

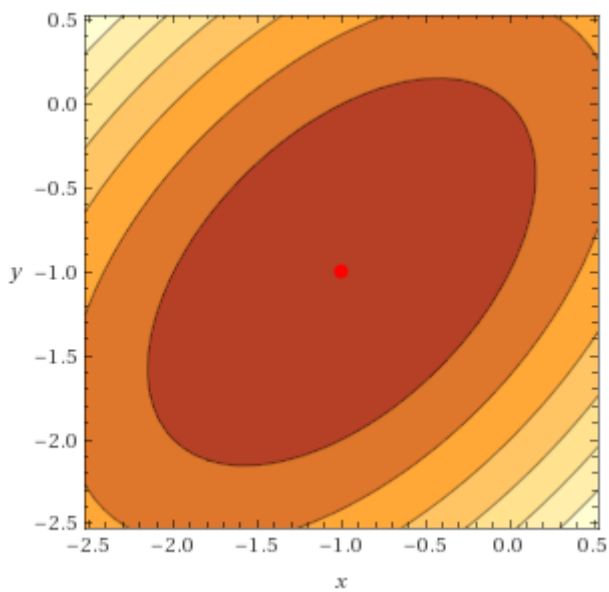
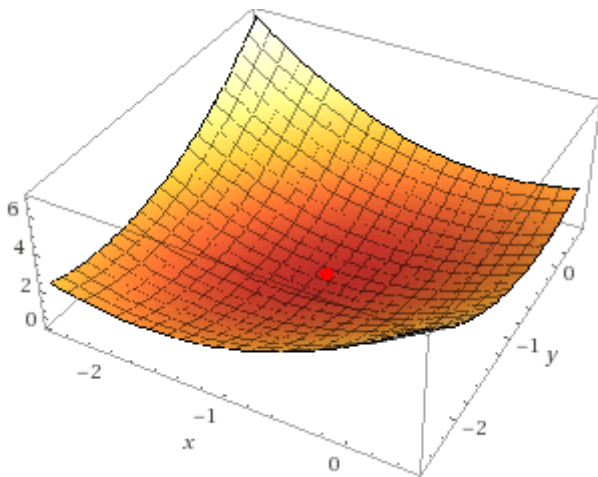
## Графики тестируемых функций

Автор: Юрий Кондратов, Бураханова Алена, Казарян Михаил

### 1. Гладкая функция

$$1 + x + y - xy + x^2 + y^2$$

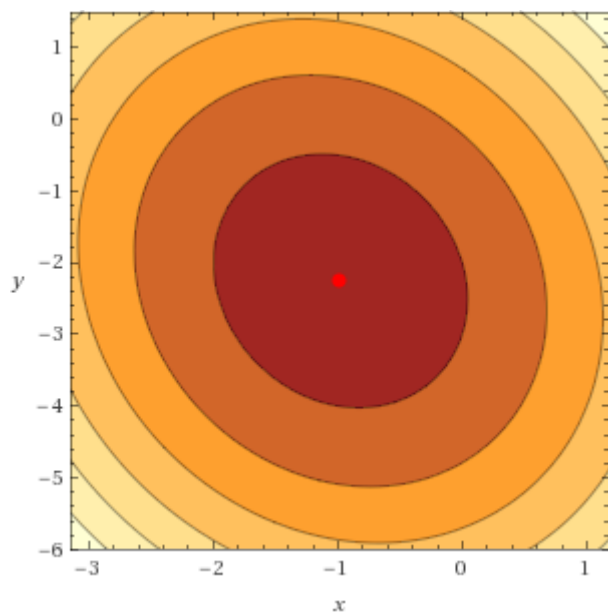
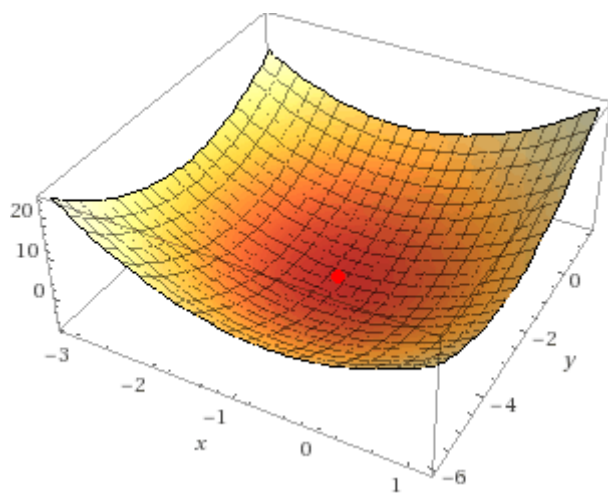
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-1, -1)$	0



### 2. Гладкая функция

$$1 + 7x + 5y + 0.5xy + 3x^2 + y^2$$

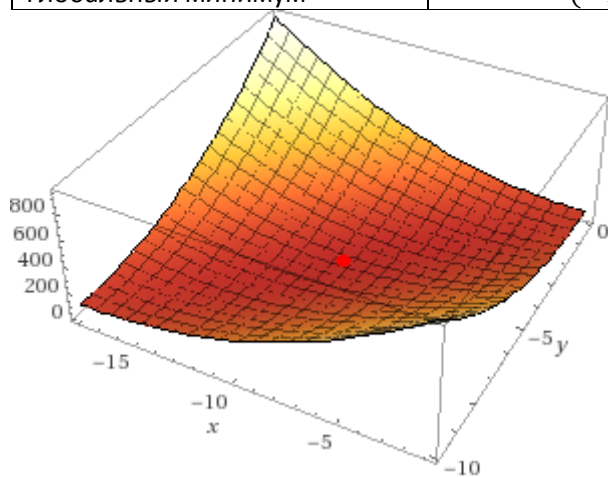
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-0.978723, -2.255319)$	-8.06383

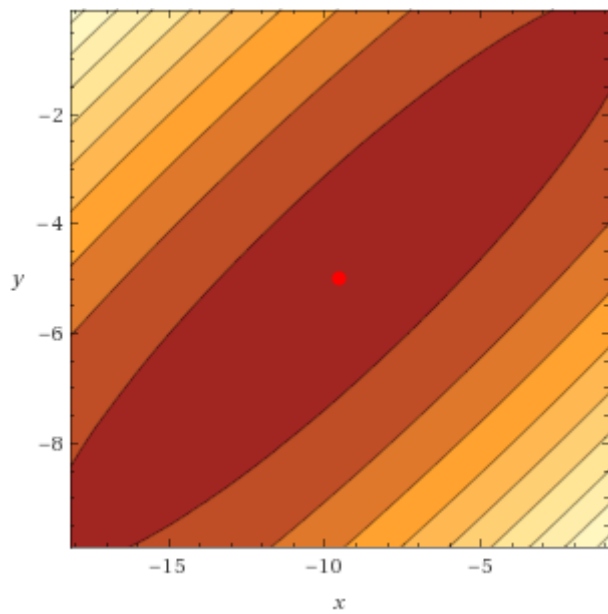


### 3. Гладкая функция

$$100 + 7x + 5y - 10xy + 3x^2 + 10y^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-9.5, -5)$	54.25

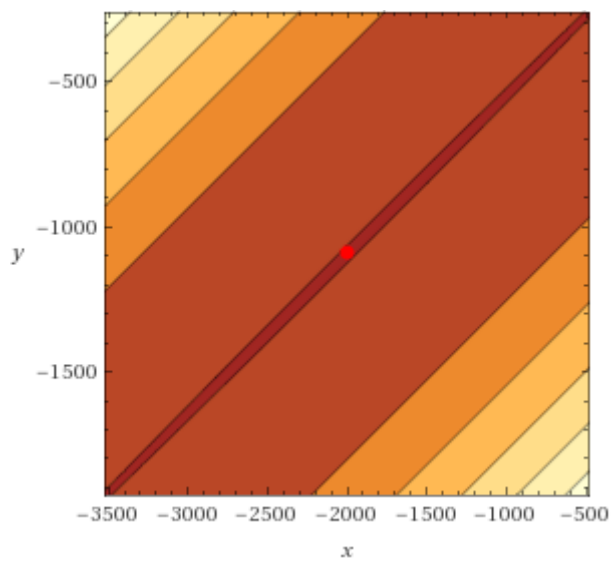
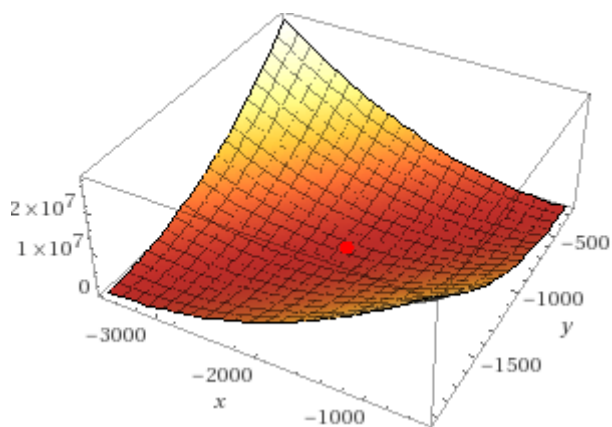




#### 4. Гладкая функция

$$100 + 7x + 5y - 10.95xy + 3x^2 + 10y^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-1997.435897, -1093.846154)$	$-9625.64102564$



5. Гладкая функция

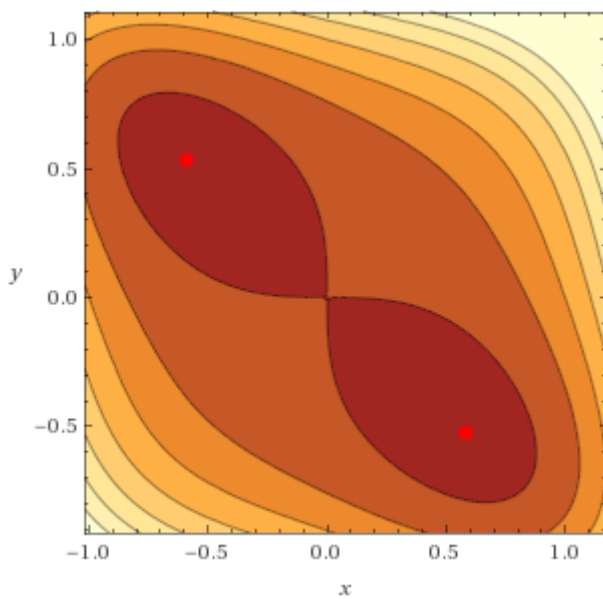
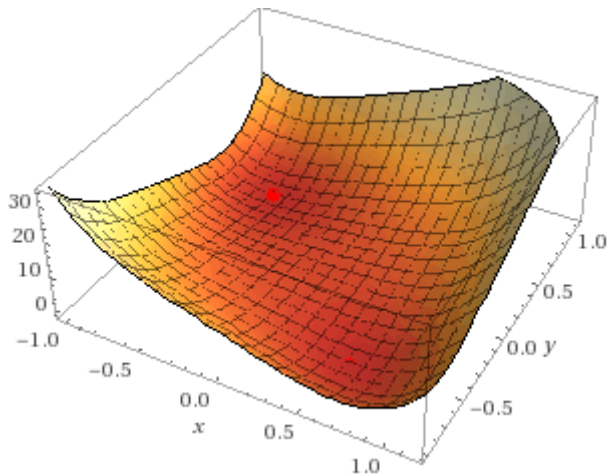
$$1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-0.25, -0.25, -0.25)$	0.625

6. Гладкая функция

$$10x^4 + 15y^4 + 15xy$$

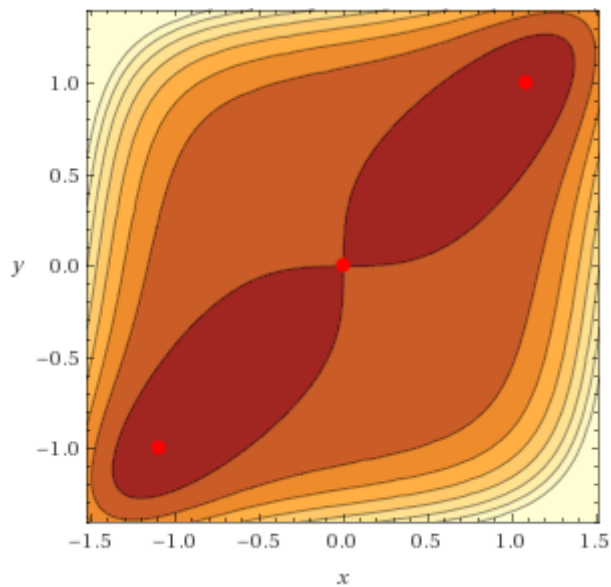
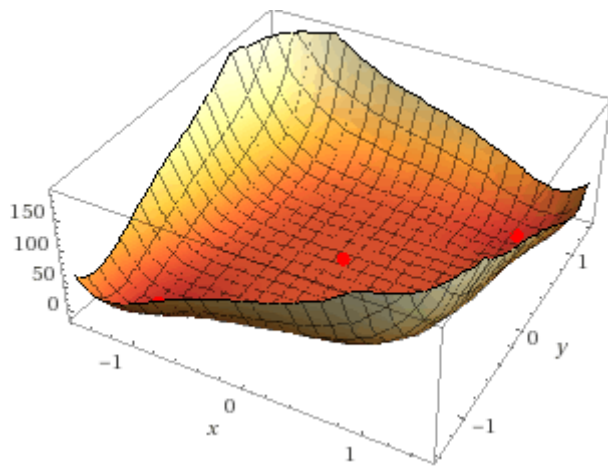
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-0.582109, 0.525995)$	-2.2964
	$(0.582109, -0.525995)$	-2.2964
Седловая точка	$(0, 0)$	0



7. Гладкая функция

$$10x^6 + 15y^6 - 20(x^3y + xy^3)$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-1.08789, -1.00318)$	$-15.9327$
	$(1.08789, 1.00318)$	$-15.9327$
Седловая точка	$(0, 0)$	$0$

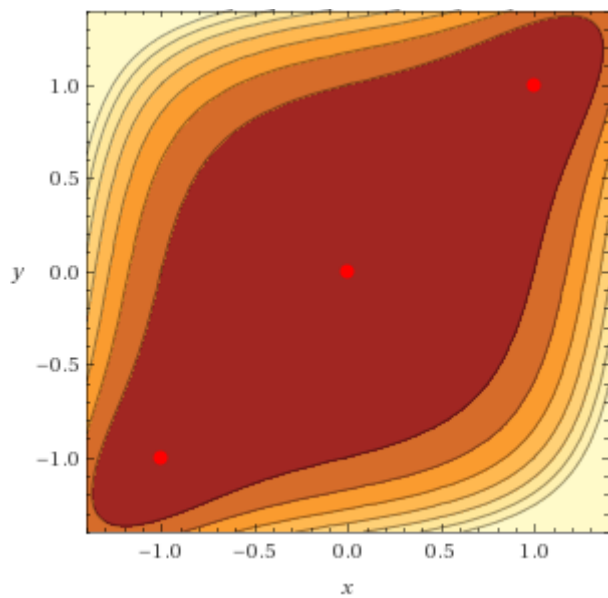
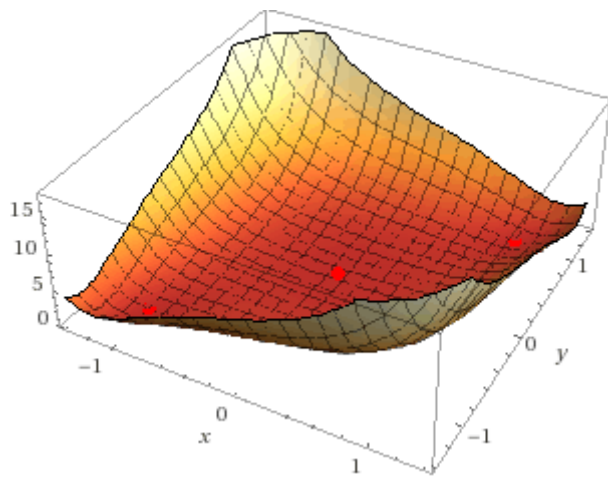


#### 8. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 2(x^3y + xy^3) + x^2 + y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-1, -1); (0, 0); (1, 1)$

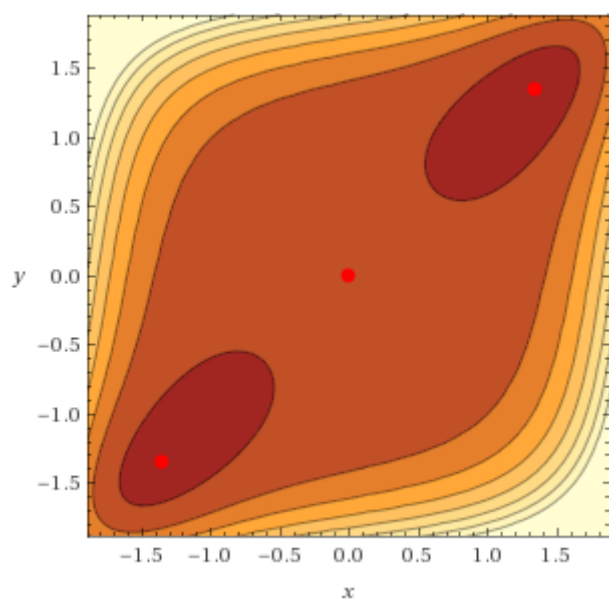
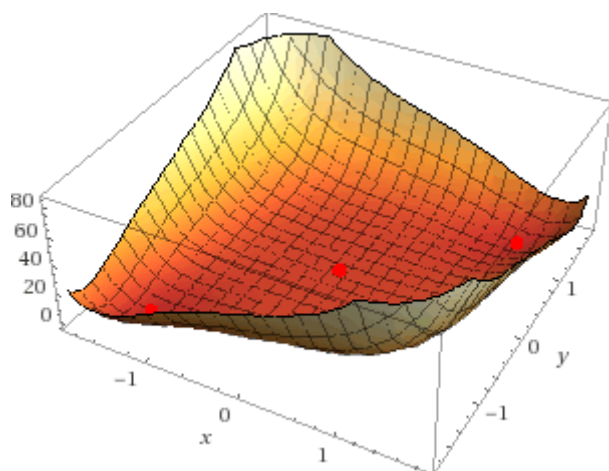
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-1, -1)$	$0$
	$(0, 0)$	$0$
	$(1, 1)$	$0$
Седловая точка	$(-0.57735, -0.57735)$	$0.296297$
	$(0.57735, 0.57735)$	$0.296297$



# 9. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 3(x^3y + xy^3) + x^2 + y^2$$

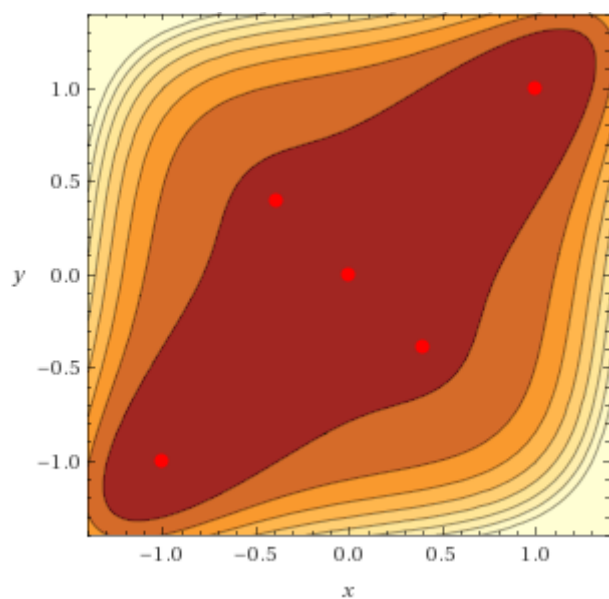
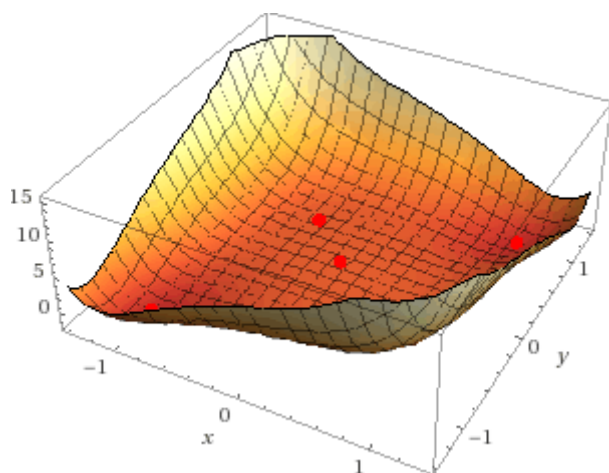
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-1.34777, -1.34777)$	$-4.17732$
	$(1.34777, 1.34777)$	$-4.17732$
Локальный минимум	$(0, 0)$	$0$
Седловая точка	$(-0.428373, -0.428373)$	$0.1777324$
	$(0.428373, 0.428373)$	$0.1777324$



# 10. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 2(x^3y + xy^3) + x^4 + y^4 - x^2 - y^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-1, -1)$	$-2$
	$(1, 1)$	$-2$
Локальный минимум	$(-0.39332, 0.39332)$	$-0.158403$
	$(0.39332, -0.39332)$	$-0.158403$
Локальный максимум	$(0, 0)$	$0$
Седловая точка	$(-0.498104, 0.20241)$	$-0.15221$
	$(-0.20241, 0.498104)$	$-0.15221$
	$(0.20241, -0.498104)$	$-0.15221$
	$(0.498104, -0.20241)$	$-0.15221$

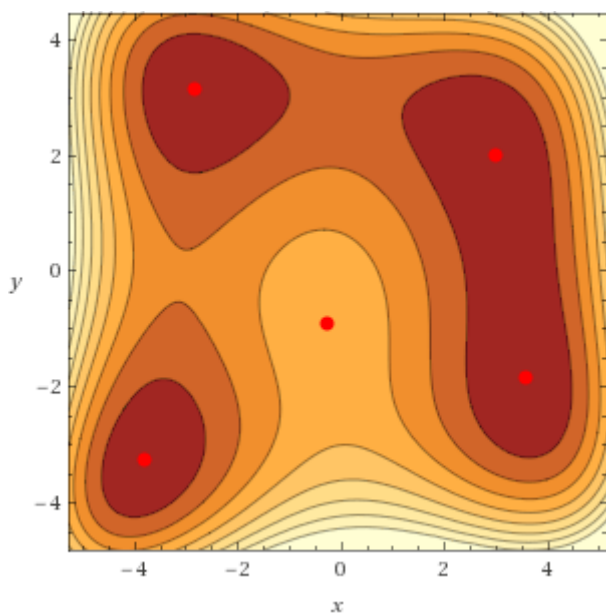
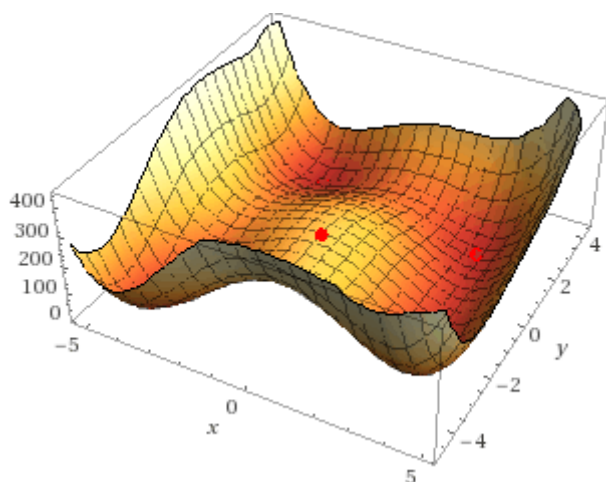


11. Гладкая функция (функция Химмельбау)

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(3, 2)$	0
	$(-2.80518, 3.131312)$	0
	$(-3.779310, -3.283186)$	0
	$(3.584428, -1.848126)$	0
Локальный максимум	$(-0.2708456 - 0.923039)$	181.617
Седловая точка	$(-3.07303, -0.081353)$	104.015
	$(-0.127961, -1.95371)$	178.337
	$(0.0866775, 2.88425)$	67.7192
	$(3.38515, 0.0738519)$	13.3119





## 12. Гладкая функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^4 \left[ \sum_{i=1}^4 x_i^k - b_k \right]^2$$

, где  $b_k = [8, 18, 44, 114]$

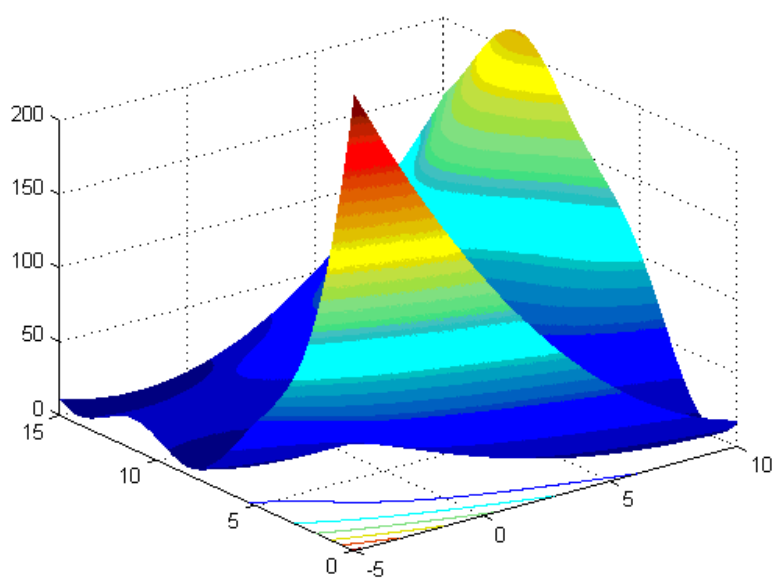
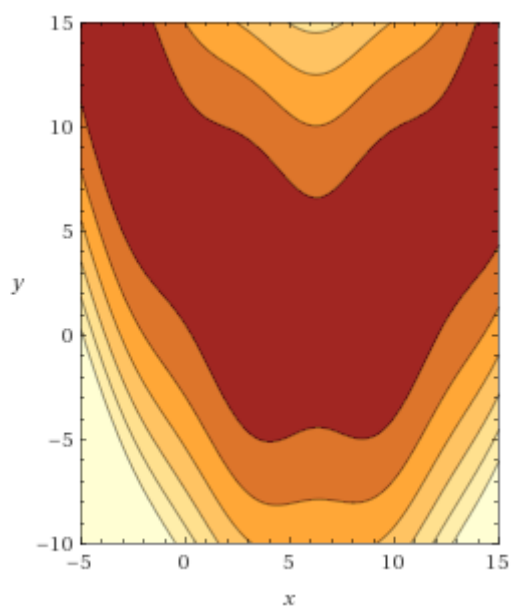
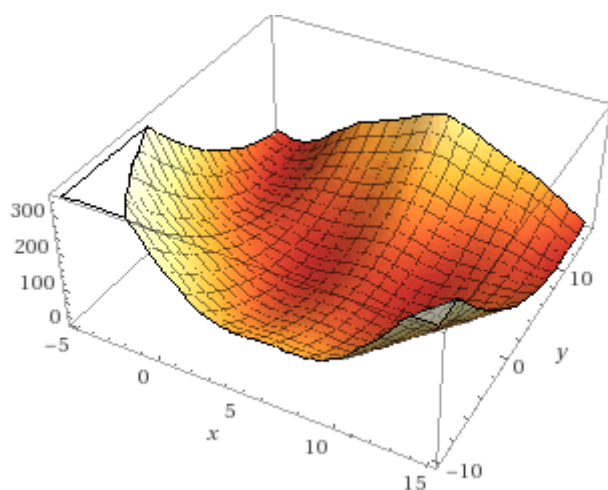
Глобальный минимум:  $x = [1, 2, 2, 3]$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(1, 2, 2, 3)$	0

## 13. Гладкая функция (функция Бранина)

$$f(x, y) = \left( y - \frac{5.1}{4\pi^2} x^2 + \frac{5}{\pi} x - 6 \right)^2 + 10 \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x + 10$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-\pi, 12.275)$	0.397887
	$(\pi, 2.275)$	0.397887
	$(9.42478, 2.475)$	0.397887



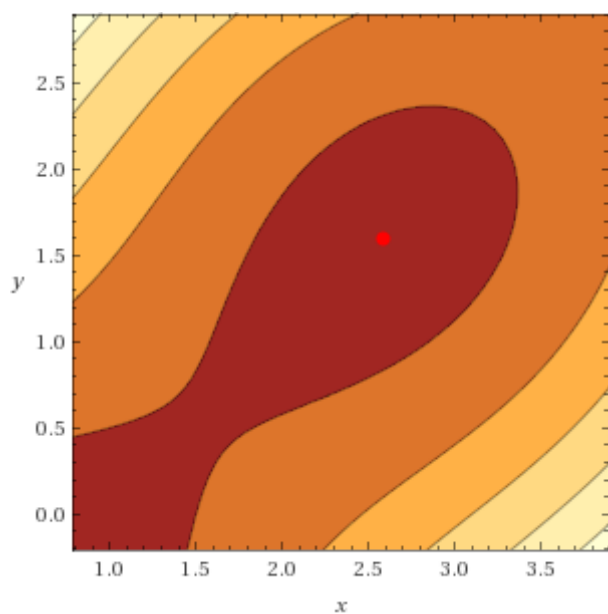
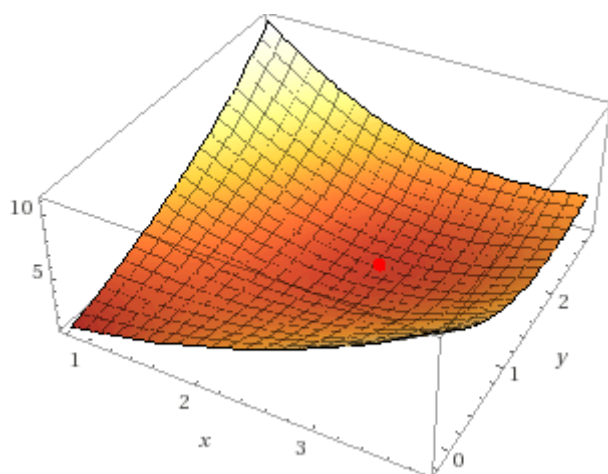
14. Гладкая функция (функция МакКормика)

$$f(x, y) = \sin(x + y) + (x - y)^2 - 1.5x + 2.5y + 1$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-0.547198, -1.5472)$

Локальный минимум:  $(x, y) = (\pi k - 0.547198, \pi k - 1.5472)$

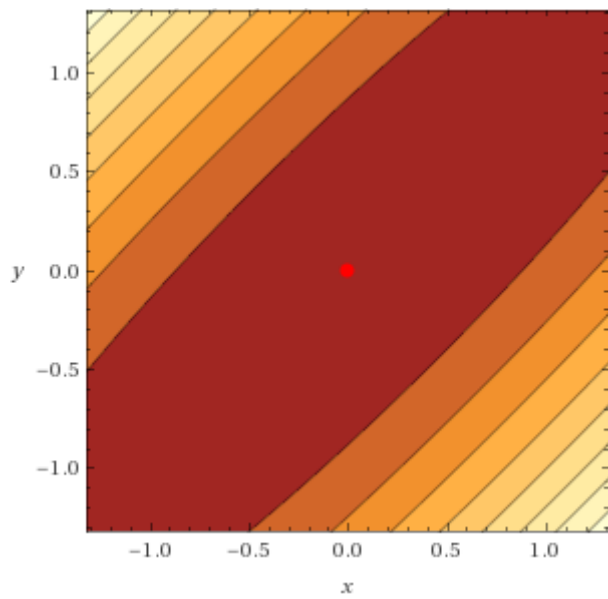
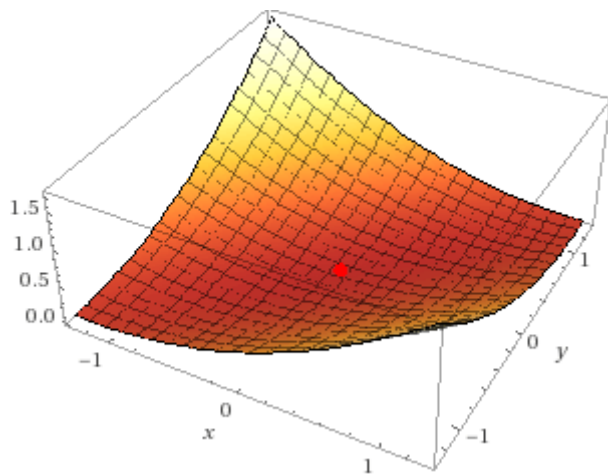
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-0.547198, -1.5472)$	$-1.913223$
Седловая точка	$(\pi k - 0.547198, \pi k - 1.5472)$	$\pi k - \sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2\pi k\right) - \frac{\pi}{3}$



15. Гладкая функция (функция Матиаса)

$$f(x, y) = 0.26(x^2 + y^2) - 0.48xy$$

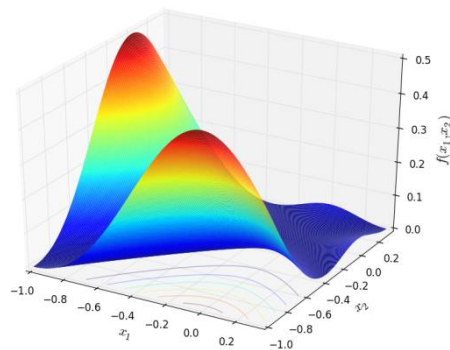
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0)$	$0$



16. Гладкая функция(функция Кин)

$$-\frac{\sin^2(x_1 - x_2) \sin^2(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	(0, 1.39325)	-0.673668



17. Гладкая функция(функция Шмидта-Веттерса)

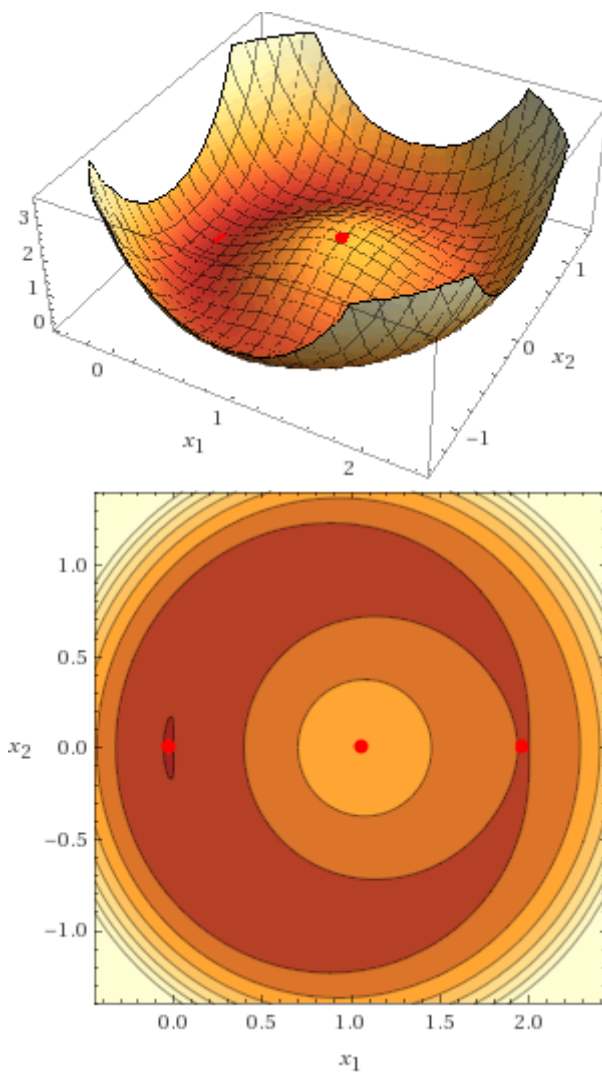
$$\frac{1}{1 + (x_1 - x_2)^2} + \sin\left(\frac{\pi x_2 + x_3}{2}\right) + e^{\left(\frac{x_1 + x_2}{x_2} - 2\right)^2}$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0.78547, 0.78547, 0.78547)$	3

18. Гладкая функция(функция Зеттла)

$$\frac{1}{4}x_1 + (x_1^2 - 2x_1 + x_2^2)^2$$

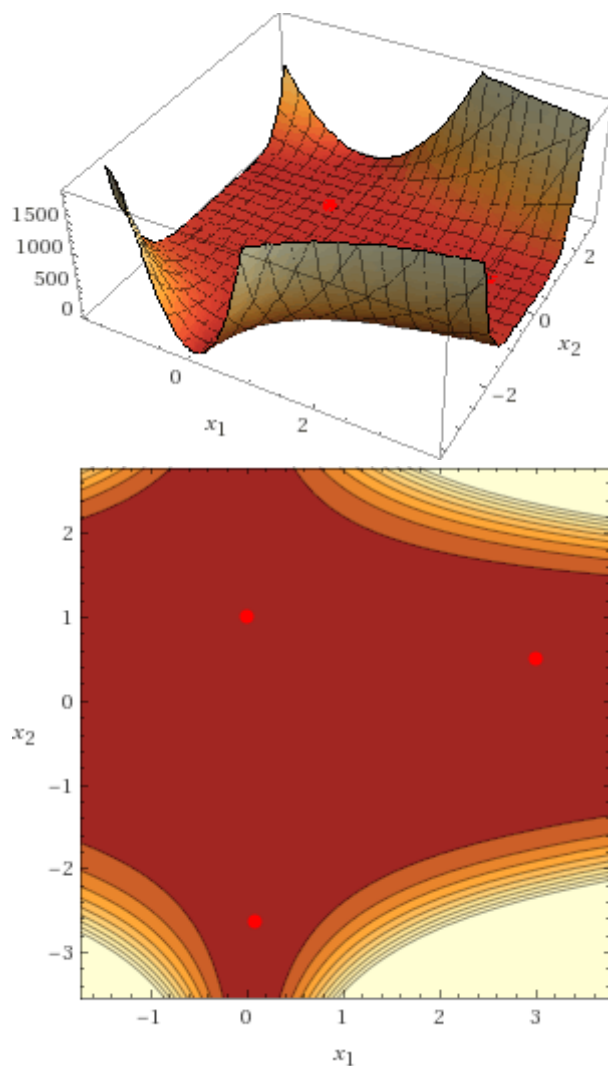
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-0.029896, 0)$	-0.003791
Седловая точка	$(1.96715, 0)$	0.495963
Локальный максимум	$(1.06275, 0)$	1.25783



19. Гладкая функция(функция Биля)

$$(x_1x_2 - x_1 + 1.5)^2 + (x_1x_2^2 - x_1 + 2.25)^2 + (x_1x_2^3 - x_1 + 2.625)^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(3, 0.5)$	0
Седловая точка	$(0.100538, -2.64451)$	9.86451
	$(0, 1)$	14.2031



20. Гладкая функция (функция Колвилля):

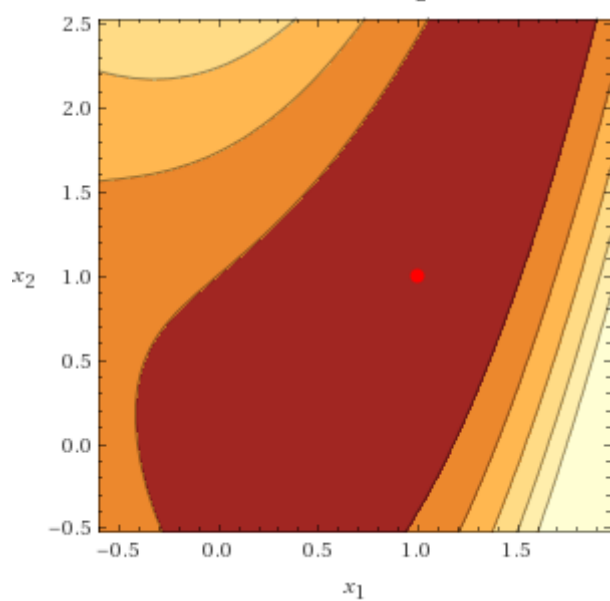
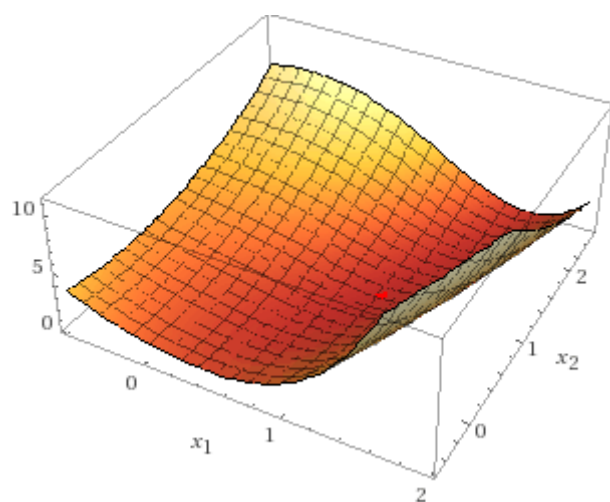
$$(x_1 - 1)^2 + 100(x_1^2 - x_2)^2 + 10.1(x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + 90(x_3^2 - x_4)^2 + 10.1(x_4 - 1)^2 + 19.8 \frac{x_4 - 1}{x_2}; -10 \leq x_i \leq 10$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(1, 1, 1, 1)$	0

21. Гладкая функция:

$$(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

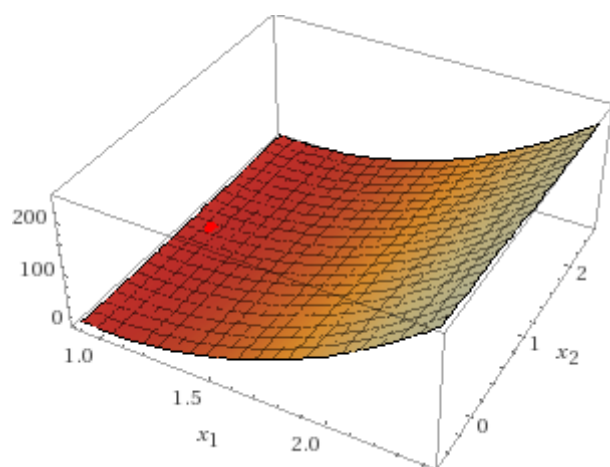
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(1, 1)$	0

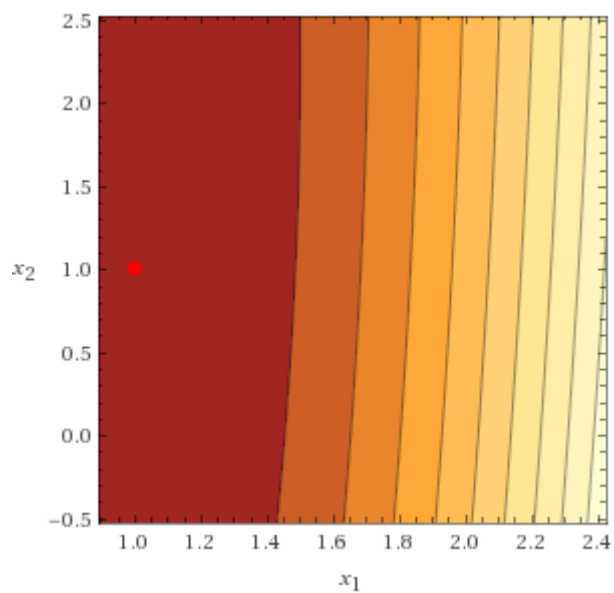


22. Гладкая функция

$$(x_2 - x_1^2)^2 + 100(1 - x_1)^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	(1, 1)	0

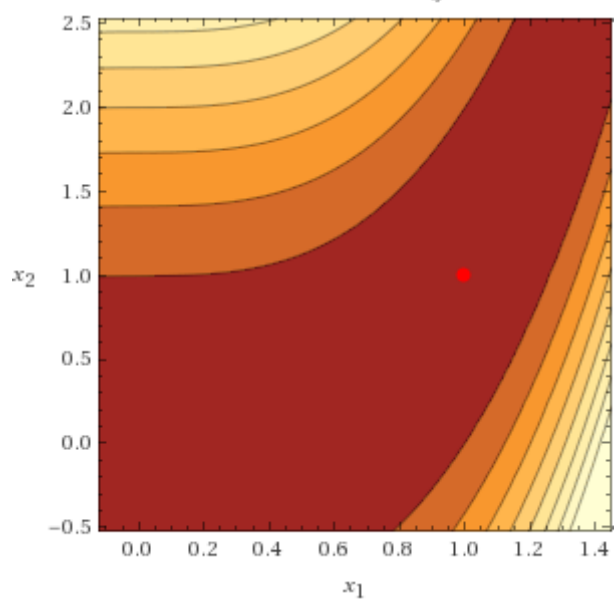
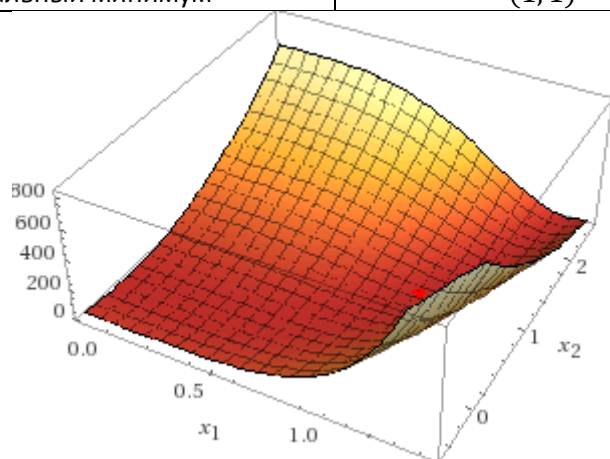




23. Гладкая функция

$$100(x_2 - x_1^3)^2 + (1 - x_1)^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	(1, 1)	0



24. Гладкая функция

$$(x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 10(x_1 - x_4)^4$$



	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0, 0, 0)$	0

25. Гладкая функция

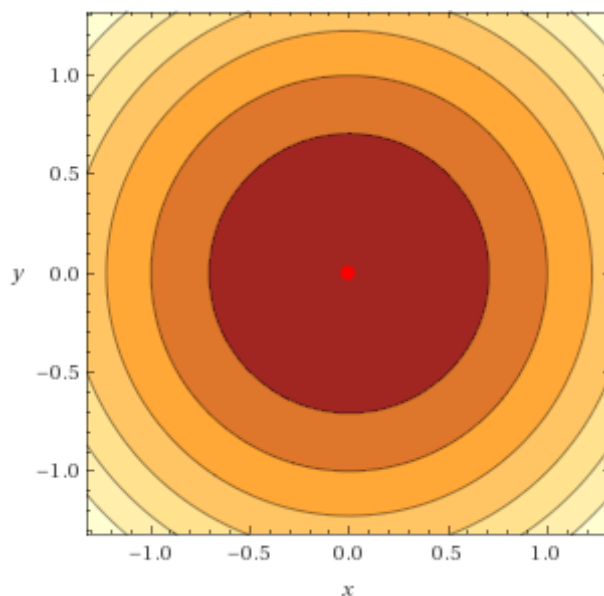
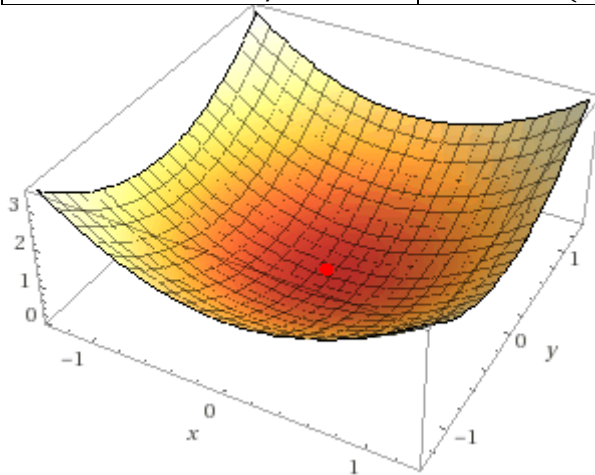
$$(x_1^2 - x_2 + 1)^4 + 100(x_2 - x_3)^6 + tg^4(x_3 - x_4) + x_1^8 + (x_4 - 1)^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 1, 1, 1)$	0

26. Гладкая функция (сферическая)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

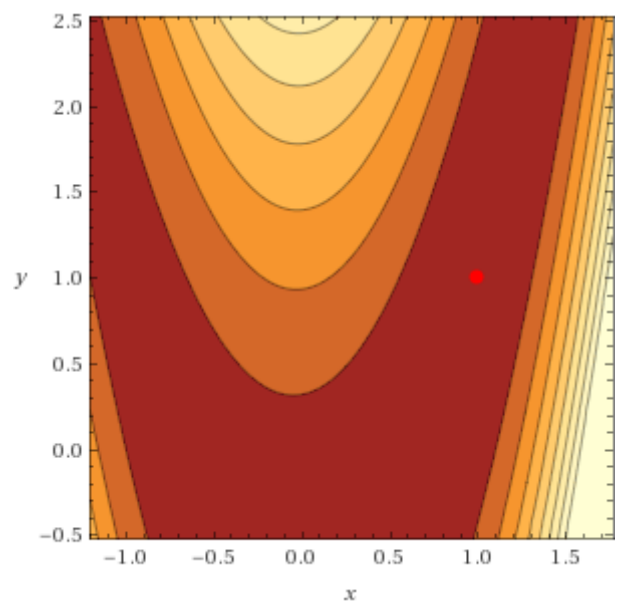
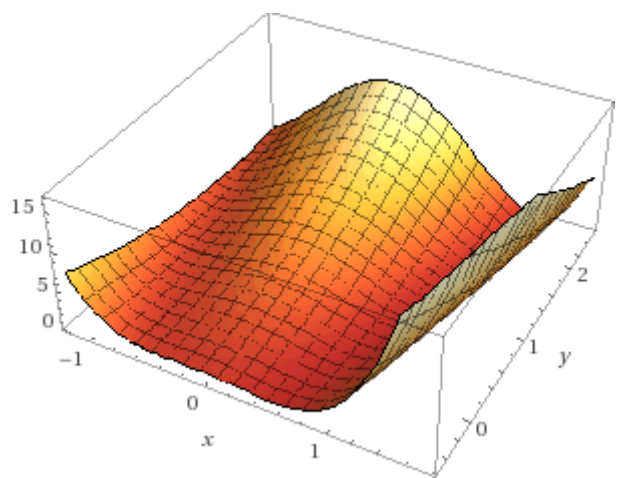
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0, \dots, 0)$	0



27. Гладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 1)

$$f(x) = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - 2x_i^2 + 1)^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(1, 1, 1, \dots, 1)$	0

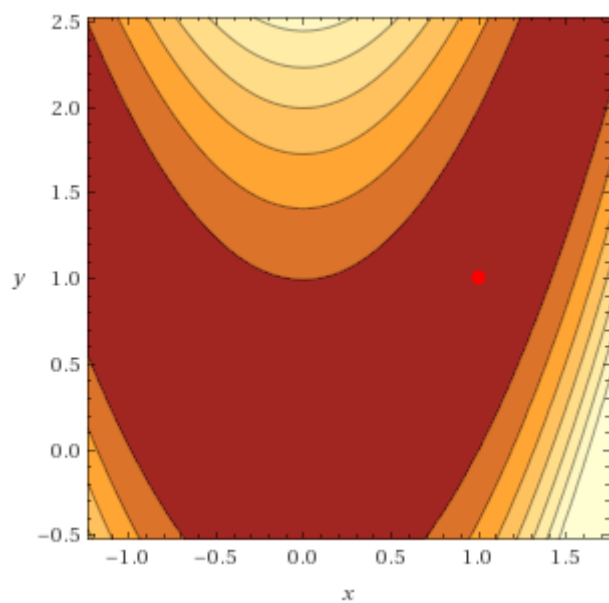
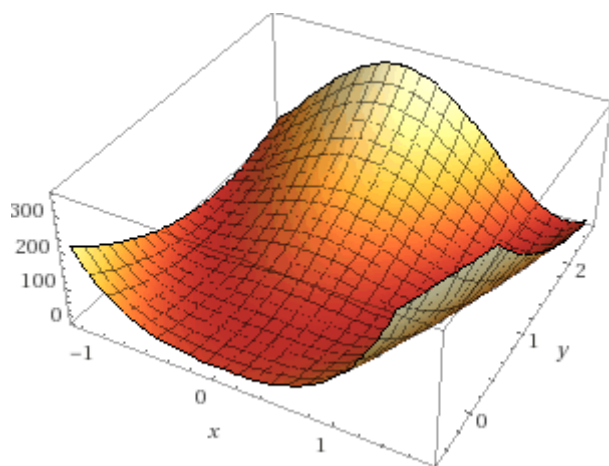


28. Гладкая функция (функция Розенброка)

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left( 100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2 \right)$$

Глобальный минимум:  $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(1, 1, 1, \dots, 1)$	0

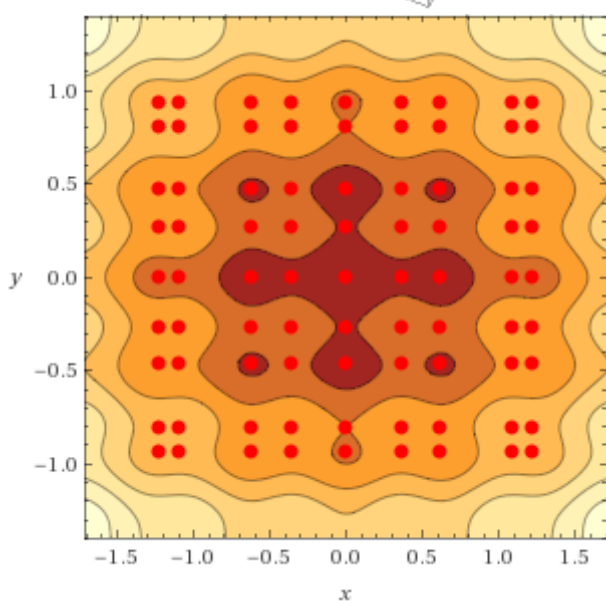
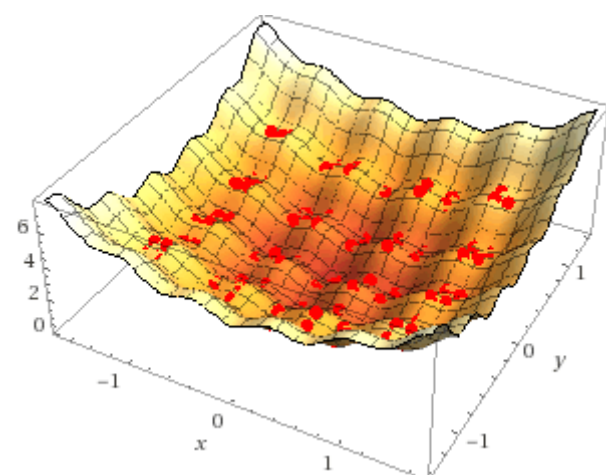


29. Гладкая функция(функция Бохачевского):

$$\sum_{i=1}^{n-1} [x_i^2 + 2x_{i+1}^2 - 0.3 \cos(3\pi x_i) - 0.4 \cos(4\pi x_{i+1}) + 0.7]$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0, 0, \dots, 0)$	0

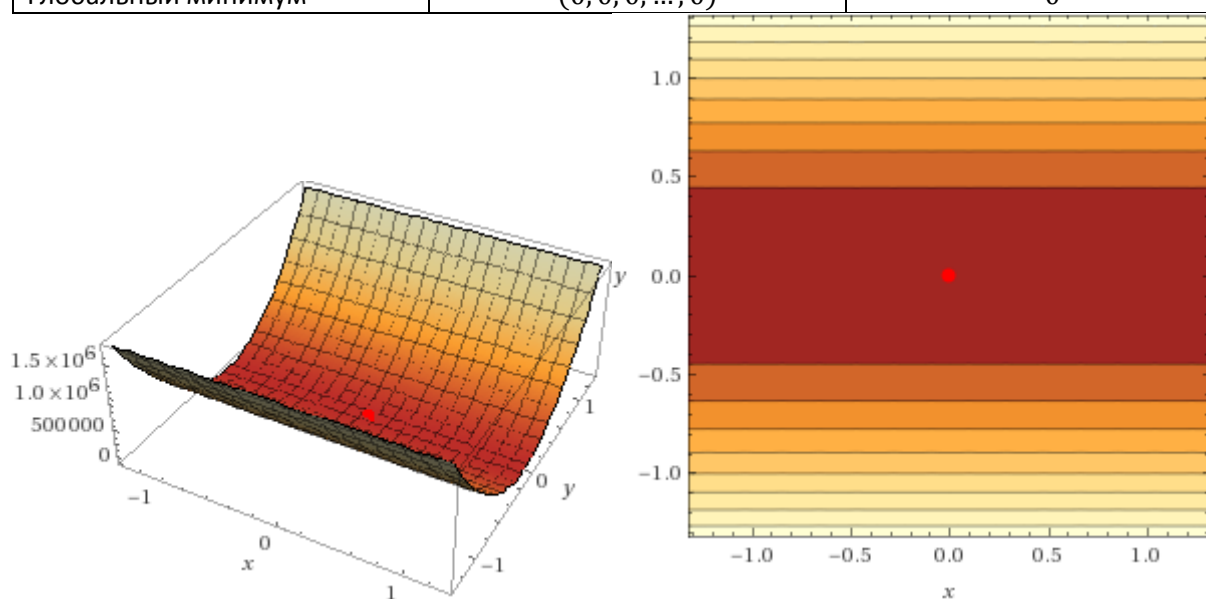
Эта функция имеет множество локальных минимумов.



30. Гладкая функция:

$$x_1^2 + 10^6 \sum_{i=2}^n x_i^2$$

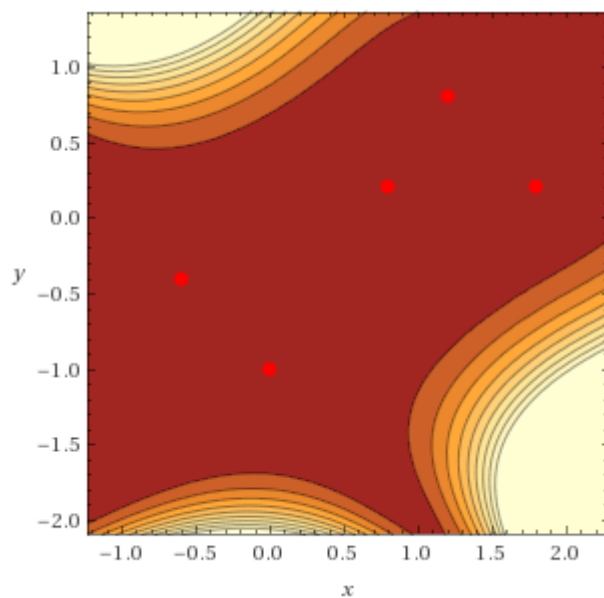
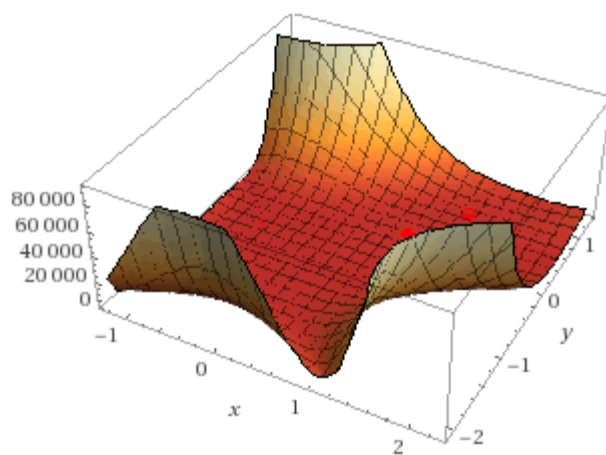
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0, 0, \dots, 0)$	0



31. Гладкая функция (Голдштейна-Прайса):

$$[1 + (x + y + 1)^2(19 - 14x + 3x^2 - 14y + 6xy + 3y^2)][30 + (2x - 3y)^2(18 - 32x + 12x^2 + 48y - 36xy + 27y^2)]$$

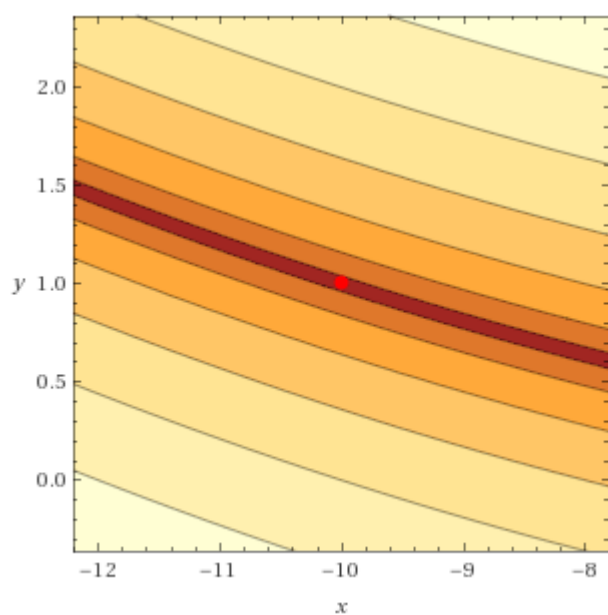
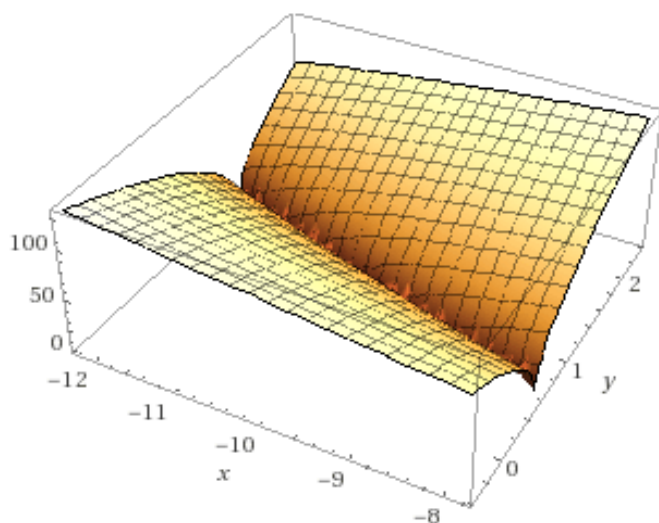
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, -1)$	3
Локальный минимум	$(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5})$	30
	$(\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$	840
	$(\frac{9}{5}, \frac{1}{5})$	84
Локальный максимум	$(\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$	1155



32. Негладкая функция (Букин06):

$$100\sqrt{|y - 0.01x^2|} + 0.01|x + 10|$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-10, 1)$	0

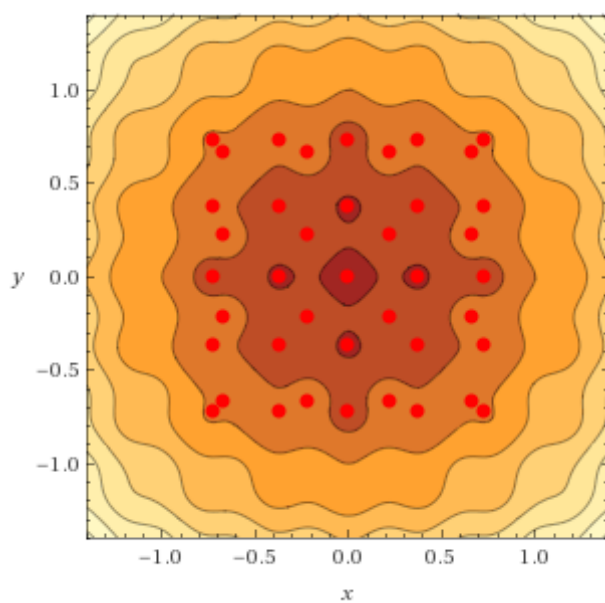
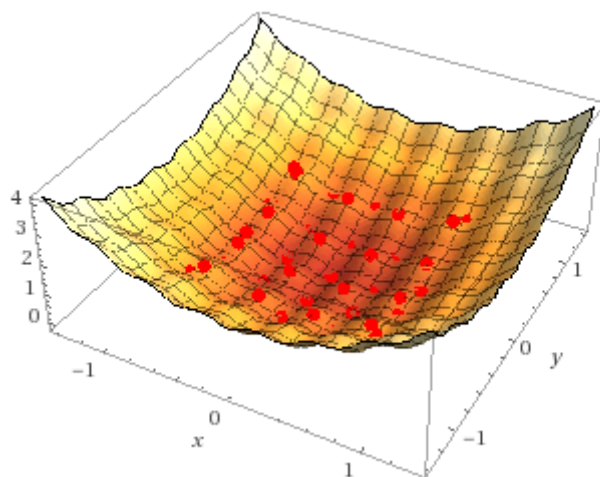


33. Гладкая функция (Cosine Mixture):

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 - 0.1 \sum_{i=1}^n \cos(5\pi x_i)$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0)$	0.2 (n=2)
Глобальный минимум	$(0, 0, 0, 0)$	0.4 (n=4)

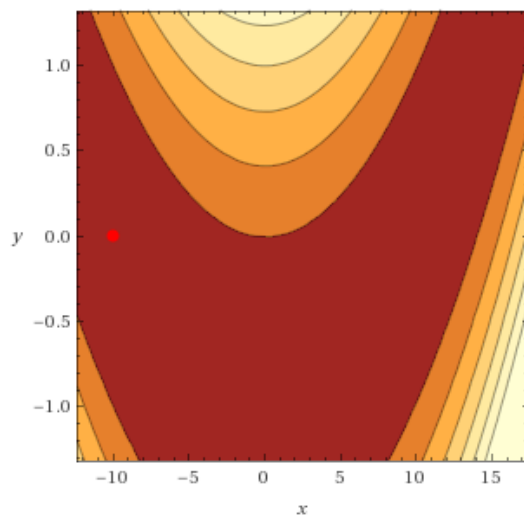
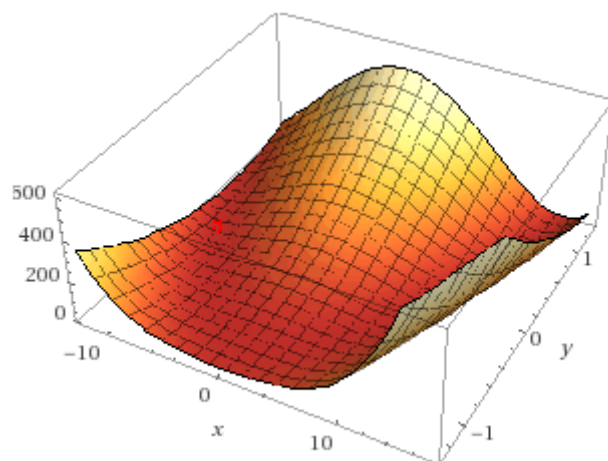
Эта функция имеет множество локальных минимумов.



34. Гладкая функция (Bukin02):

$$100(y - 0.01x^2 + 1)^2 + 0.01(x + 10)^2$$

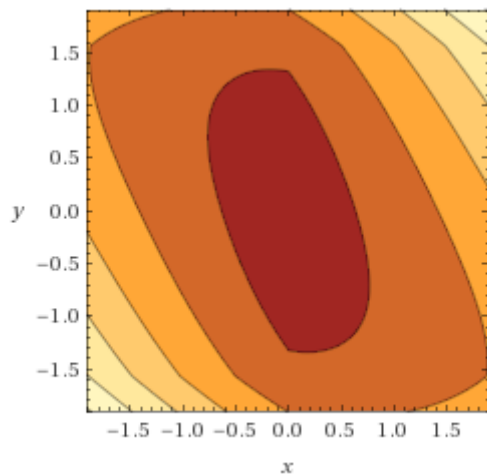
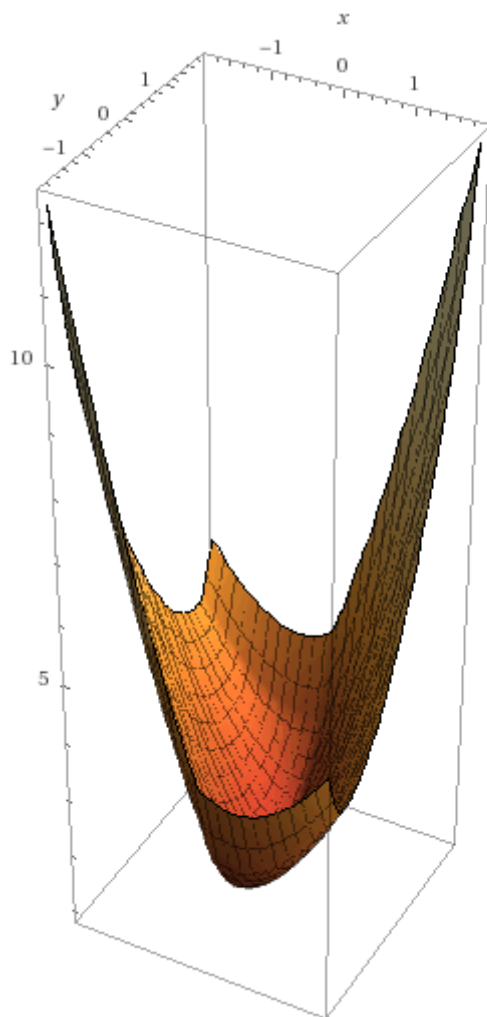
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(-10, 0)$	0



35. Негладкая функция (BartelsConn):

$$|x^2 + y^2 + xy| + |\sin x| + |\cos y|$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0)$	1

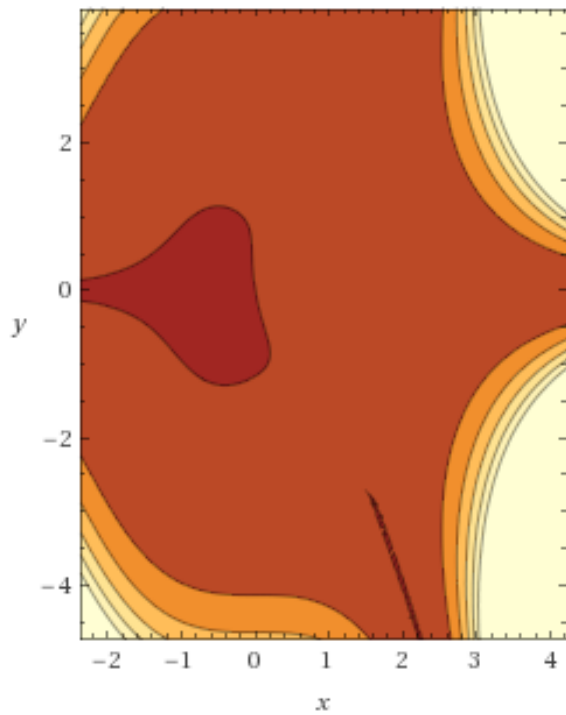
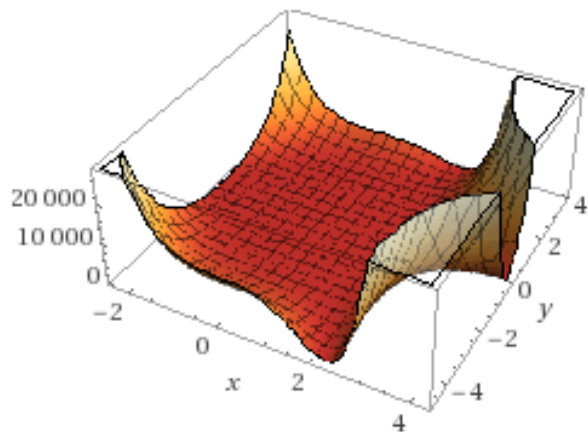


36. Гладкая функция (Price04):

$$(2x^3y - y^3)^2 + (6x - y^2 + y)^2$$



	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$(0, 0)$	0
	$(2, 4)$	0
	$(1.464, -2.506)$	0

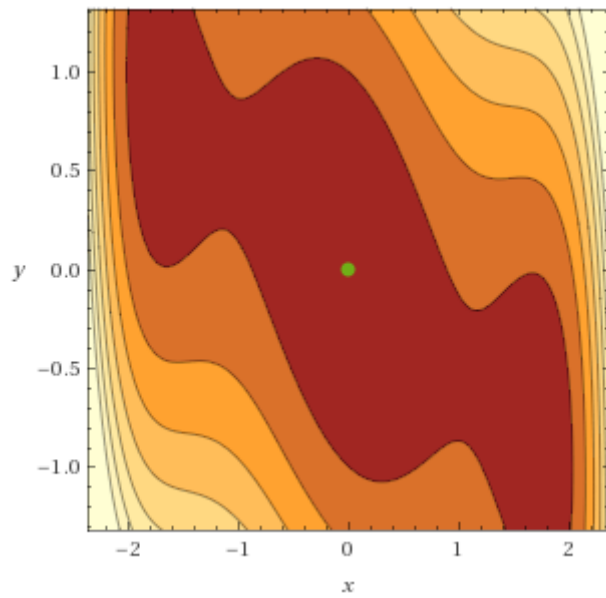
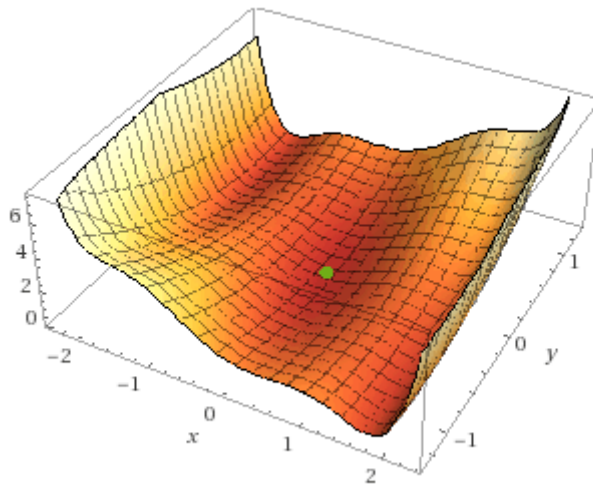


37. Гладкая функция Three Hump Camel:

$$2x_1^2 - 1.05x_1^4 + \frac{x_1^6}{6} + x_1x_2 + x_2^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$[0,0]$	0

3D plot:

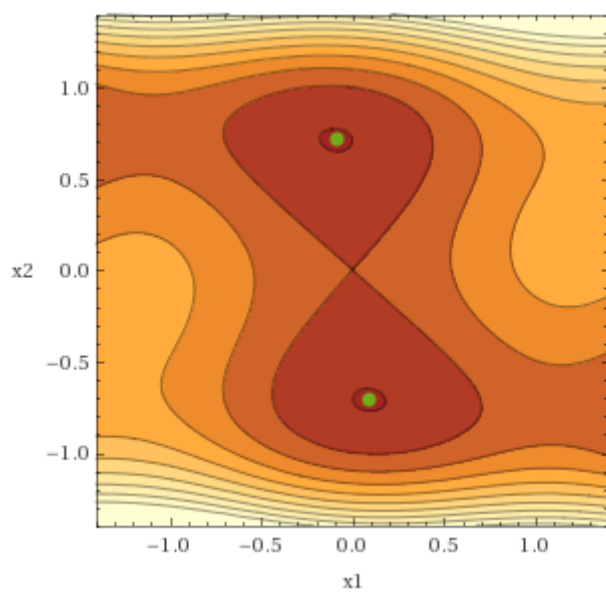
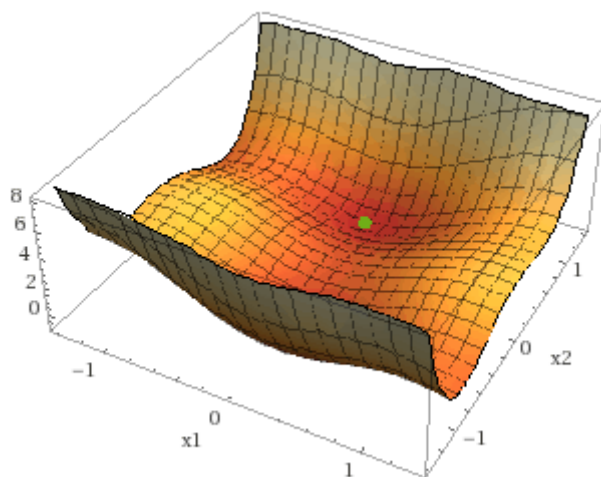


38. Гладкая функция Six Hump Camel:

$$4x_1^2 + x_1x_2 - 4x_2^2 - 2.1x_1^4 + 4x_2^4 + \frac{1}{3}x_1^6$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$[0.898 \dots, -0.712 \dots]$	$-1.03162845348 \dots$

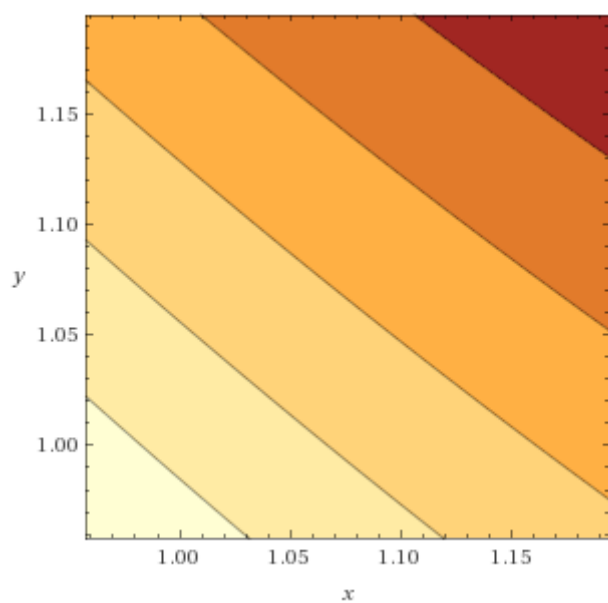
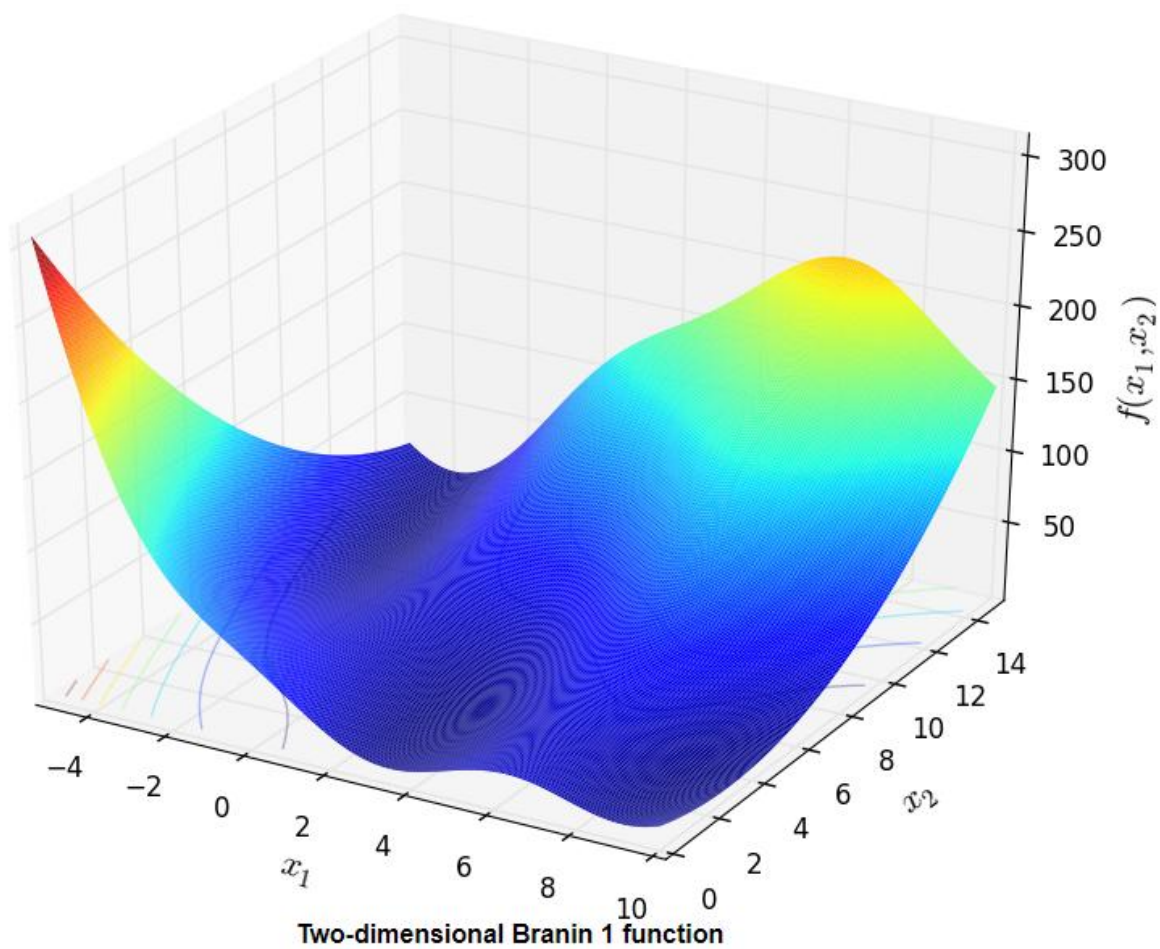
3D plot:



39. Гладкая функция Branin01:

$$\left(-1.275 \frac{x_1^2}{\pi^2} + 5 \frac{x_1}{\pi} + x_2 - 6\right)^2 + \left(10 - \frac{5}{4\pi}\right) \cos(x_1) + 10$$

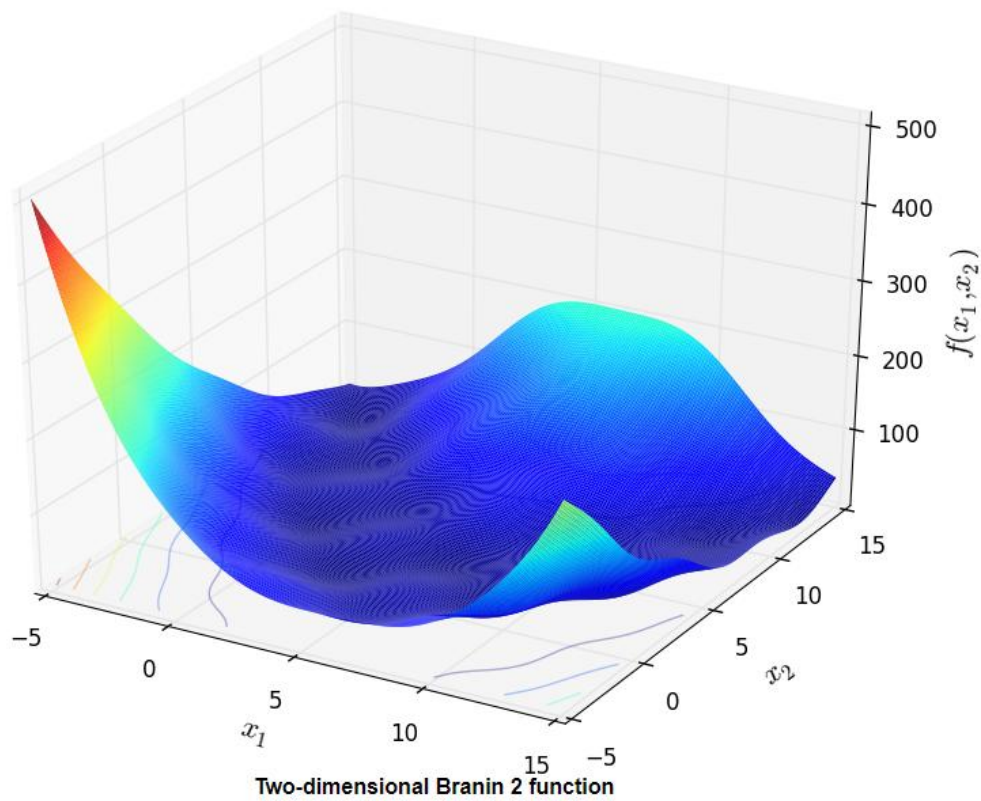
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	$[-\pi, 12.275]$	0.3978 ...



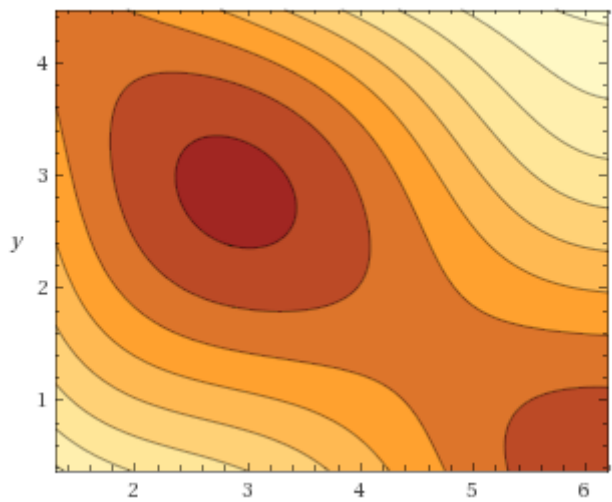
40. Гладкая функция Branin02:

$$\left(-1.275\frac{x_1^2}{\pi^2} + 5\frac{x_1}{\pi} + x_2 - 6\right)^2 + \left(10 - \frac{5}{4\pi}\right)\cos(x_1)\cos(x_2) + \log(x_1^2 + x_2^2 + 1) + 10$$

	$(\vec{x})$	$f(\vec{x})$
Глобальный минимум	$[-3.2, 12.53]$	5.559037



Contour plot:

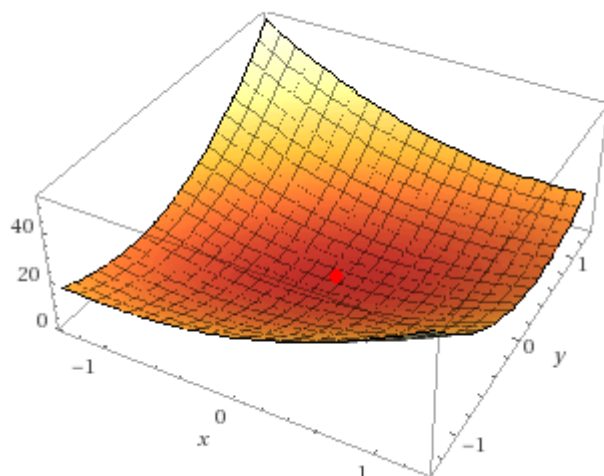


#### 41. RotatedEllipse01:

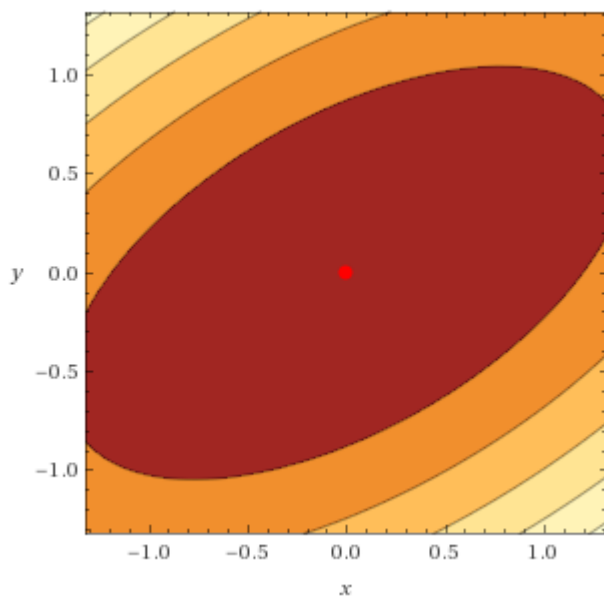
$$f(x, y) = 7x^2 - 6 \cdot \sqrt{3} xy + 13y^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	[0,0]	0

3D plot:



Contour plot:



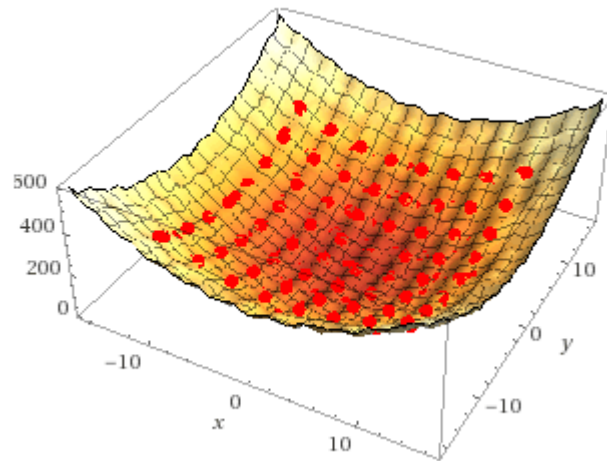
#### 42. Гладкая функция Egg Crate:

$$x_1^2 + x_2^2 + 25[\sin^2(x_1) + \sin^2(x_2)]$$

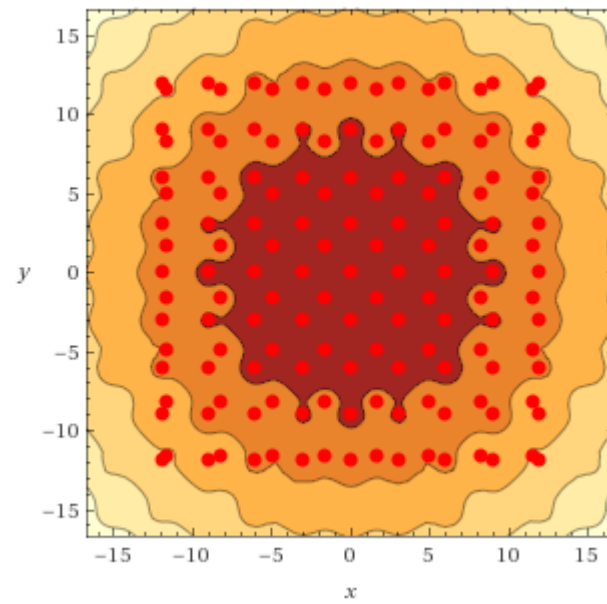
	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	[0,0]	0

Эта функция имеет большое количество локальных экстремумов

3D plot:



Contour plot:

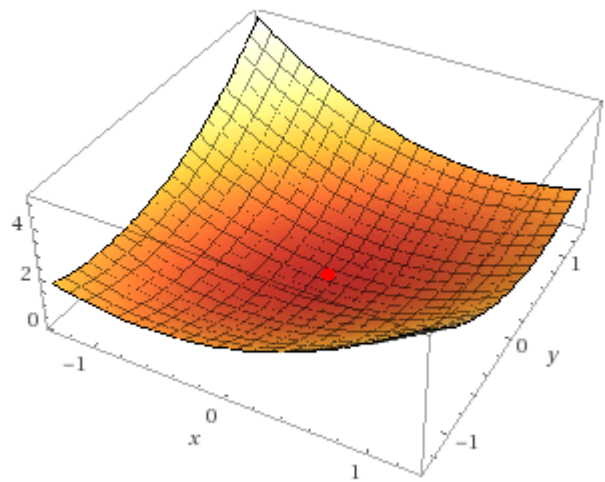


43. Гладкая функция RotatedEllipse02:

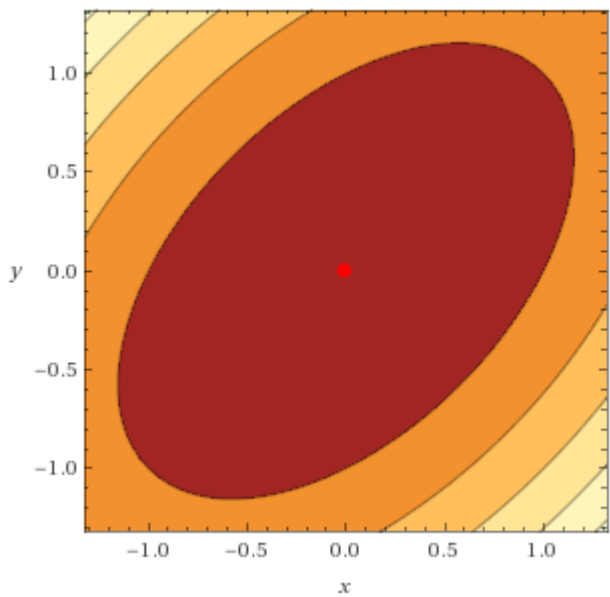
$$f(x,y) = x^2 - xy + y^2$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	[0,0]	0

3D plot:



Contour plot:

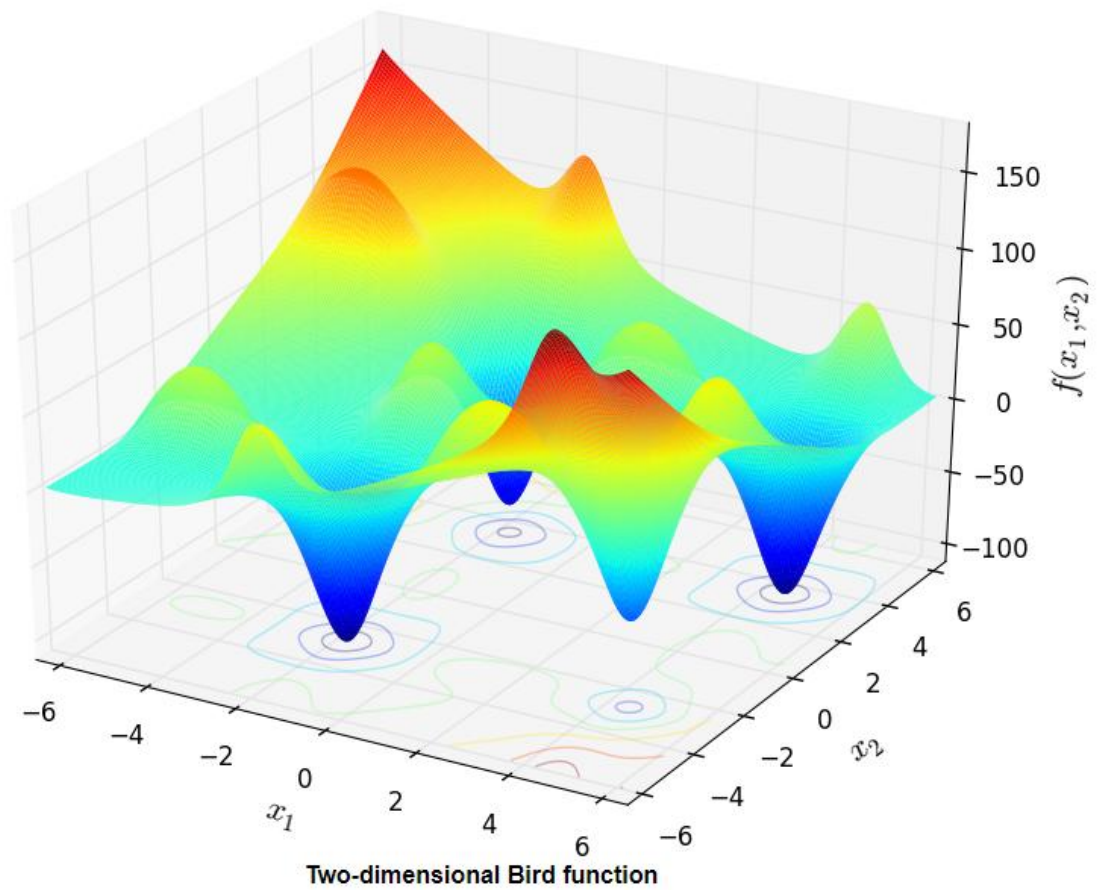


44. Гладкая функция Bird:

$$f(x,y) = (x - y)^2 + e^{(1-\sin(x))^2} \cos(y) + e^{(1-\cos(y))^2} \sin(x)$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальный минимум	[4.70105575, 3.15294602]	-106.76453672
Глобальный минимум	[-1.58214217, -3.13024680]	-106.76453672



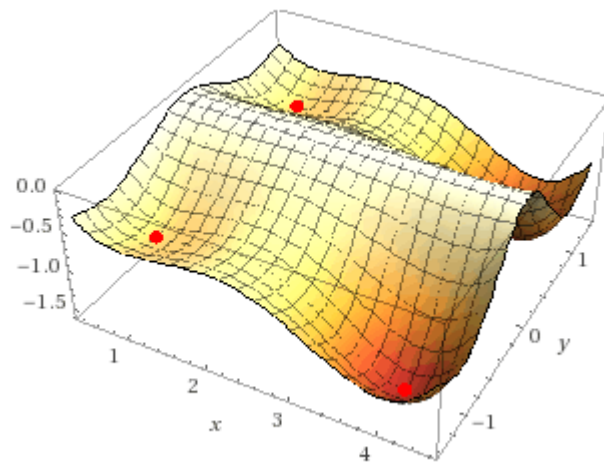


45. Гладкая функция Hosaki:

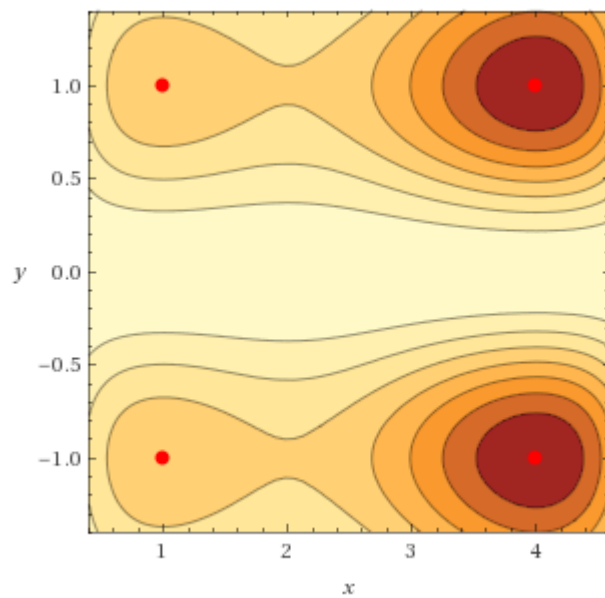
$$f(x, y) = \left(1 - 8x + 7x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) y^2 e^{-y^2}$$

	$(\bar{x})$	$f(\bar{x})$
Глобальные минимумы	$[4, \pm 1]$	$-1.59414410$
Локальные минимумы	$[1, \pm 1]$	$-0.76641550$

3D plot:



Contour plot:

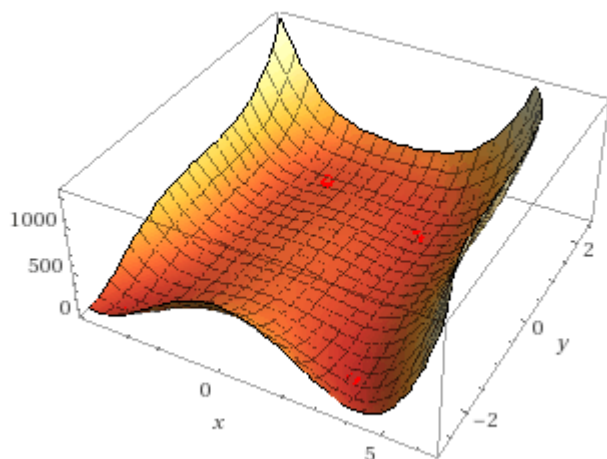


46. Гладкая функция El-Attar-Vidyasagar-Dutta:

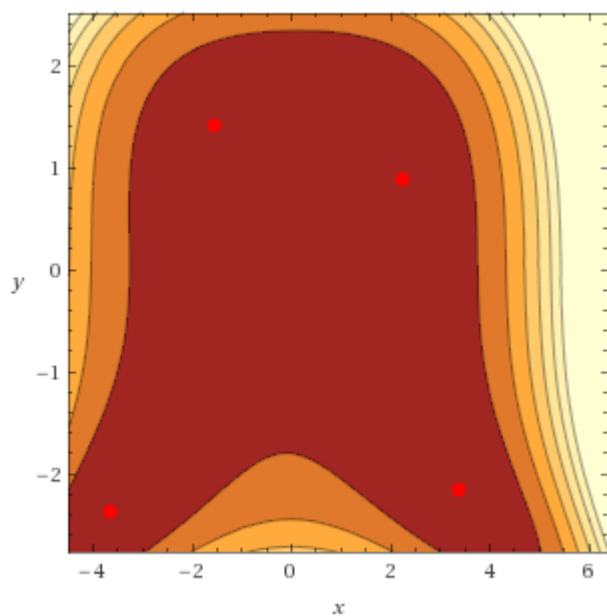
$$f(x, y) = (x^2 + y - 10)^2 + (x + y^2 - 7)^2 + (x^2 + y^3 - 1)^2$$

	$(x, y)$	$f(x, y)$
Глобальный минимум	$(3.40919, -2.17143)$	1.71278
Локальный минимум	$(-3.62315, -2.38415)$	26.9754
Локальный минимум	$(-1.52071, 1.41228)$	99.0206
Локальный минимум	$(2.27617, 0.864777)$	54.7511

3D plot:



Contour plot:



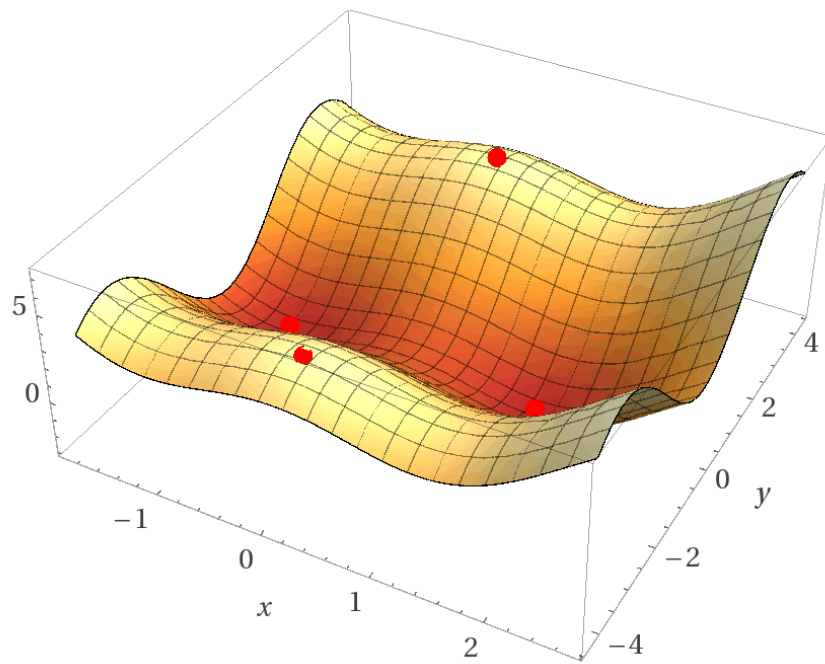
47. Гладкая функция Ursem01:

$$f(x, y) = -\sin(2x - 0.5\pi) - 3\cos(y) + 0.5x^2$$

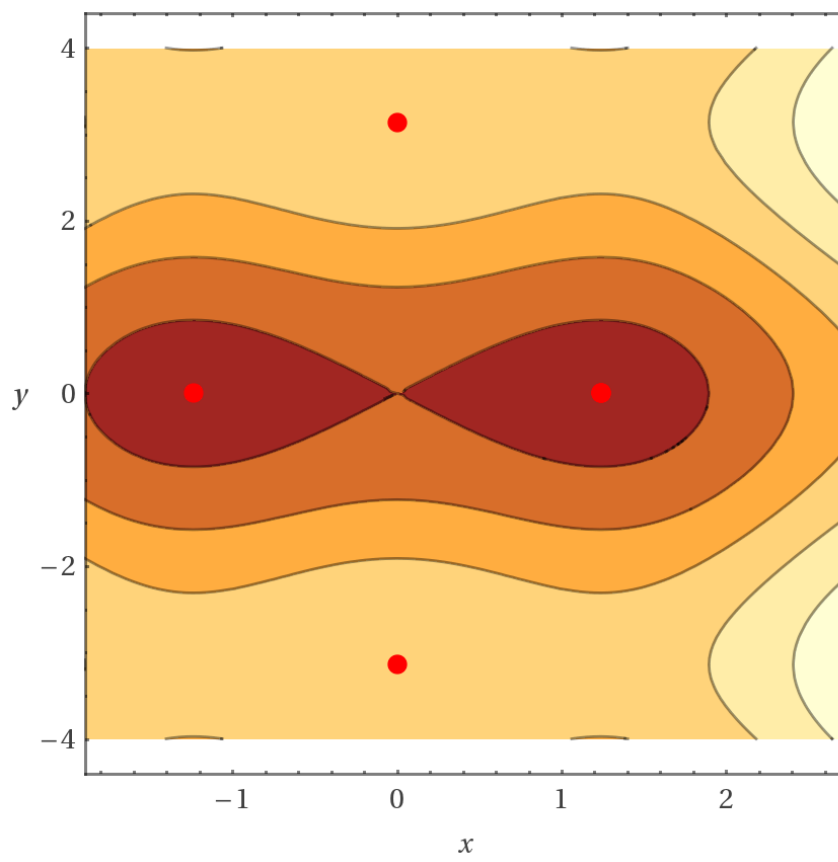
	$(x, y)$	$f(x, y)$
Глобальные минимумы	$(\pm 1.23729 + 2\pi k, 0)$	$-3.02022999$

Функция имеет бесконечное число глобальных минимумов.

3D plot



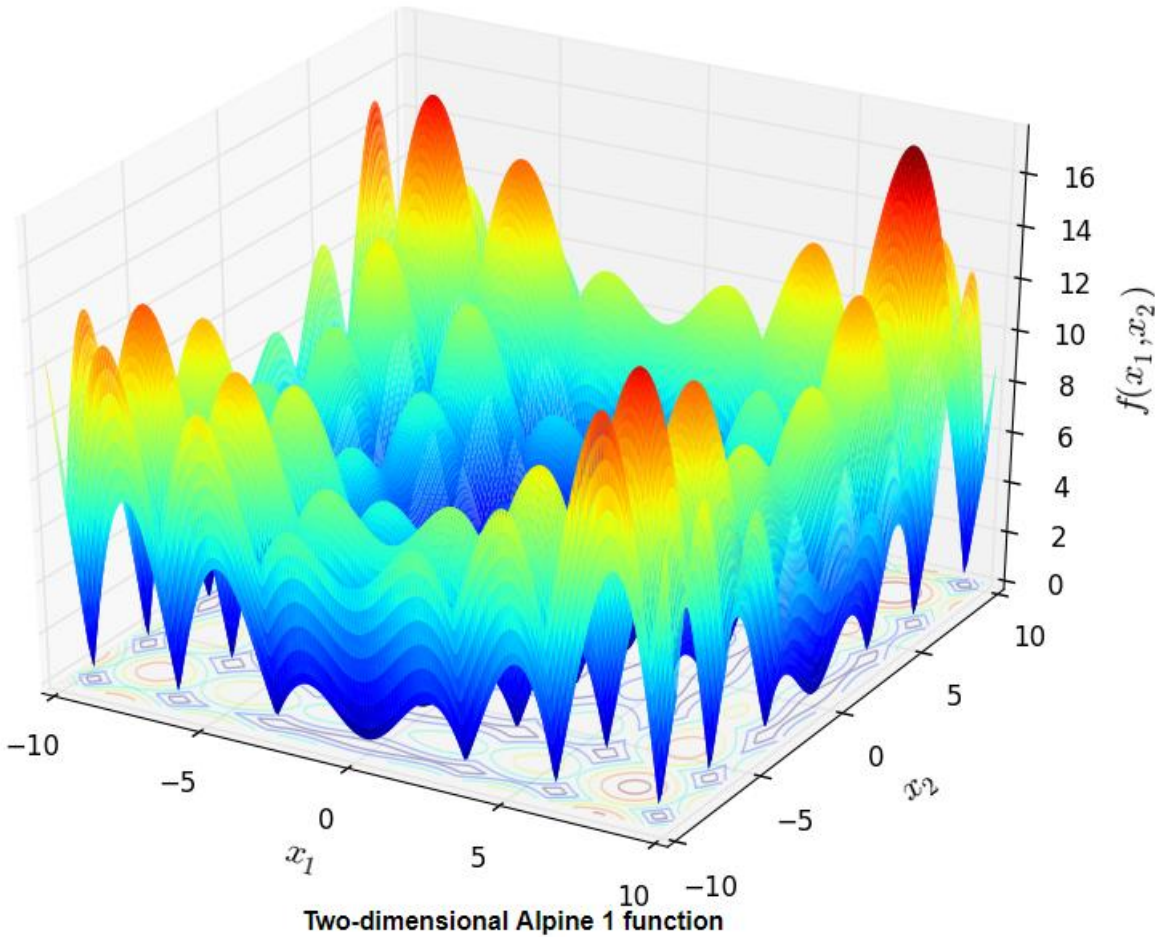
Contour plot



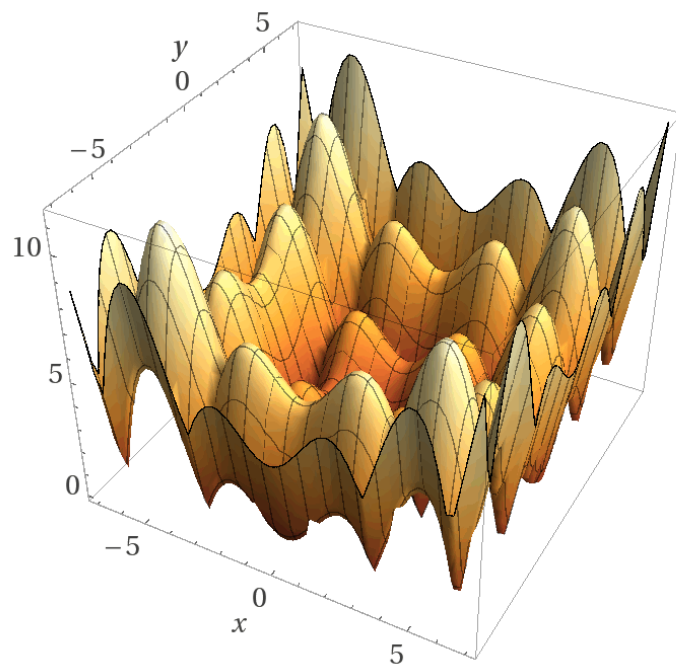
48. Негладкая функция Alpine01:

$$f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n |x_i \cdot \sin(x_i) + 0.1x_i|$$

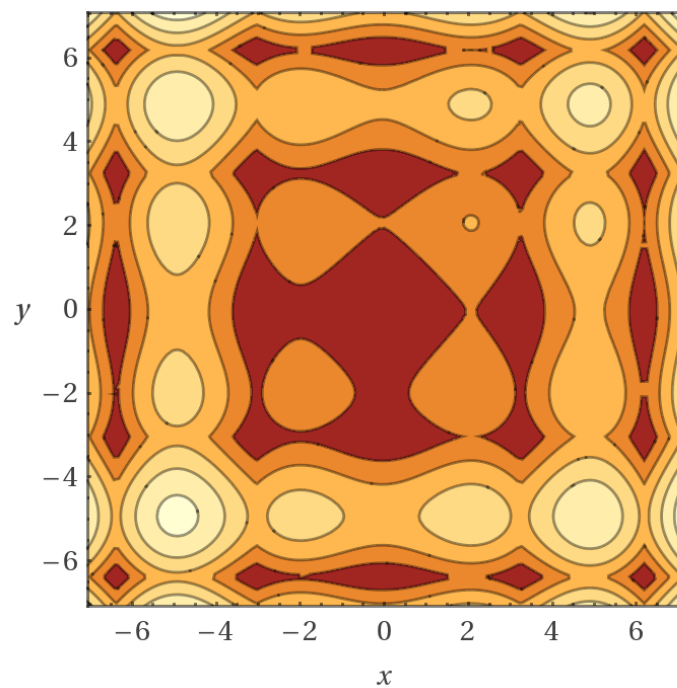
	$\vec{x}$	$f(\vec{x})$
Глобальный минимум	$(0,0, \dots, 0)$	0



3D plot



Contour plot

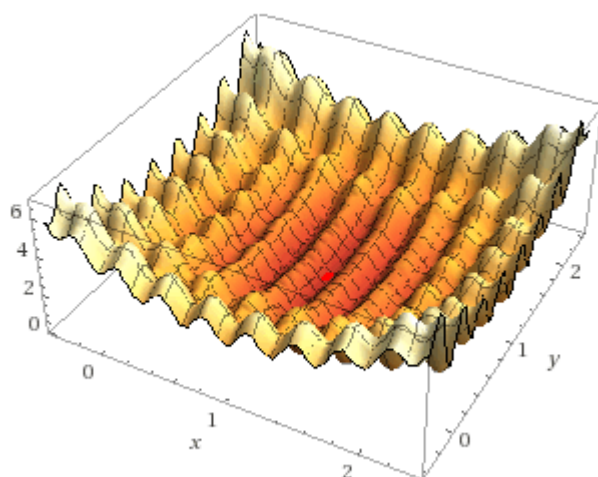


49. Гладкая функция Levy13:

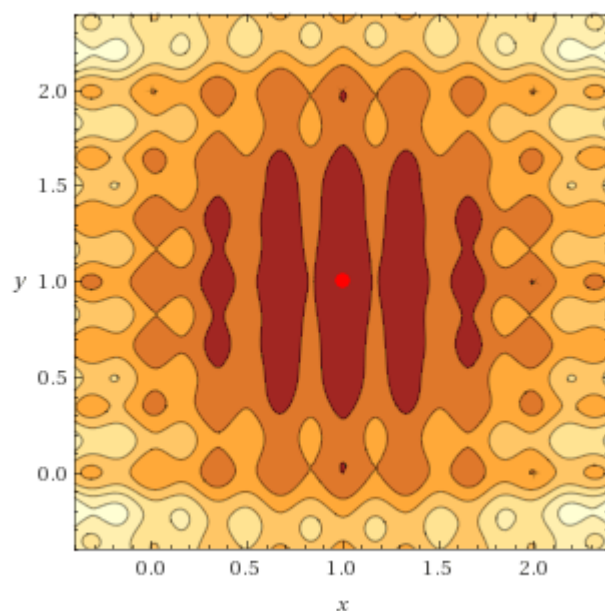
$$f(x, y) = (x - 1)^2 \cdot [\sin^2(3\pi y) + 1] + (y - 1)^2 \cdot [\sin^2(2\pi x) + 1] + \sin^2(3\pi x)$$

	$(x, y)$	$f(x, y)$
Глобальный минимум	(1,1)	0

3D plot:



Contour plot:



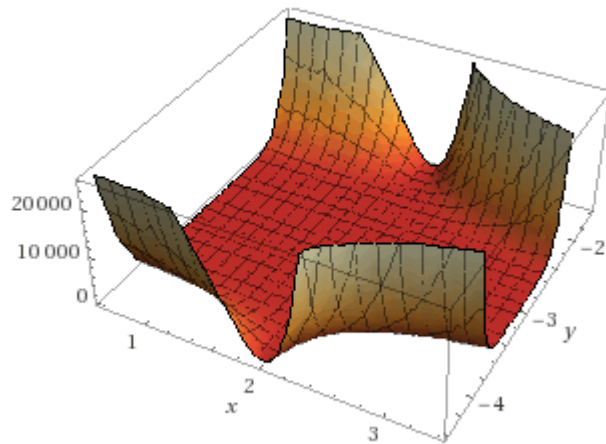
50. Негладкая функция Mishra08:

$$f(x, y) = 0.001 \left[ |x^{10} - 20x^9 + 180x^8 - 960x^7 + 3360x^6 - 8064x^5 + 13340x^4 - 15360x^3 + 11520x^2 - 5120x + 2624| |y^4 + 12y^3 + 54y^2 + 108y + 81| \right]^2$$

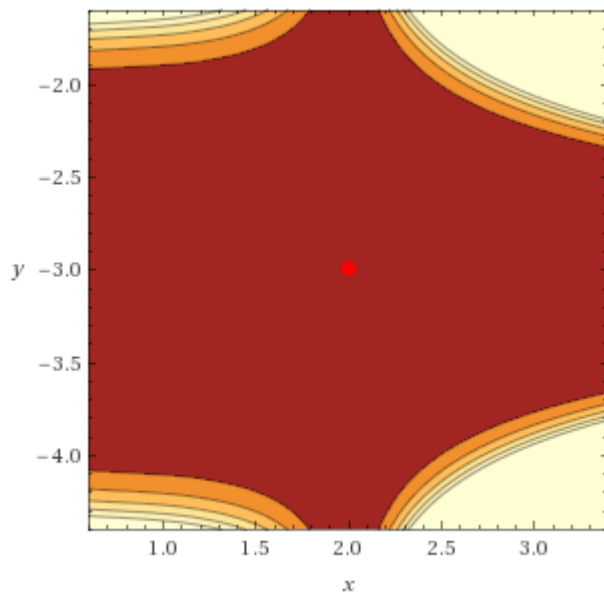
	$(x, y)$	$f(x, y)$
Глобальные минимумы	$(2, y)$	0
Глобальные минимумы	$(x, -3)$	0
Глобальные минимумы	$(5.01231, y)$	0

Эта функция имеет бесконечное количество глобальных минимумов

3D plot:



Contour plot:



Источники:

1. [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2011/02/2923.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2011/02/2923.pdf)
2. [https://en.wikipedia.org/wiki/Test\\_functions\\_for\\_optimization](https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization)
3. <http://www.geatbx.com/docu/fcnindex-01.html>
4. [http://infinity77.net/global\\_optimization/test\\_functions.html](http://infinity77.net/global_optimization/test_functions.html)
5. 'Applied nonlinear programming', - David M. Himmelblau, 1972.