

## **Исследование методов оптимизации на примере различных функций**

Для тестирования методов оптимизации было выбрано 22 функции:

1. Функции 1 - 10 являются многочленами малой размерности;
2. Функции 11 - 15 являются специальными функциями для тестирования методов оптимизации
3. Функции 16 – 22 являются функциями произвольной размерности, причем функции 17, 18, 20 не являются гладкими.

В результате расчетов можно заметить, что методы сходятся не только в минимумах функций, но и в стационарных точках; а также на проблемных функциях методы могут сходиться очень медленно, превышая предел допустимых итераций, либо расходятся (ф. 14).

Кроме того, возможна работа на негладких функциях, но при этом выбор неподходящих точек начального приближения может легко привести к расхождению метода.

I. Гладкая функция

$$1 + x + y - xy + x^2 + y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-1, -1)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001900
$x_2$	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001900
Количество итераций $N$		1	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001133
$x_2$	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99998467
Количество итераций $N$		4	5	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99998467
$x_2$	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001133
Количество итераций $N$		4	5	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99995800
$x_2$	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99995800
Количество итераций $N$		1	1000000	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	-1.00000000	-1.00000000	-0.99999800
$x_2$	0	-1.00000000	-1.00000000	-0.99999800
Количество итераций $N$		1	1000000	1000000

## II. Гладкая функция

$$1 + 7x + 5y + 0.5xy + 3x^2 + y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-0.978723, -2.255319)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97873333
$x_2$	-20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25535216
Количество итераций $N$		8	3	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97874014
$x_2$	20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25527045
Количество итераций $N$		6	1000000	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97870610
$x_2$	-20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25535896
Количество итераций $N$		4	4	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97871291
$x_2$	20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25527726
Количество итераций $N$		3	2	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	-0.97872340	-0.97872340	-0.97872312
$x_2$	0	-2.25531915	-2.25531915	-2.25531471
Количество итераций $N$		2	1000000	1000000

### III. Гладкая функция

$$100 + 7x + 5y - 10xy + 3x^2 + 10y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-9.5, -5)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-9.50000000	-9.50000000	-9.50028800
$x_2$	-20	-5.00000000	-5.00000000	-5.00015600
Количество итераций $N$		4	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-9.50000000	-9.50000000	-9.49996800
$x_2$	20	-5.00000000	-5.00000000	-4.99996400
Количество итераций $N$		6	1000000	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-9.50000000	-9.50000000	-9.49964800
$x_2$	-20	-5.00000000	-5.00000000	-4.99983600
Количество итераций $N$		5	1000000	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-9.50000000	-9.50000000	-9.49932800
$x_2$	20	-5.00000000	-5.00000000	-4.99964400
Количество итераций $N$		5	6	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	-9.50000000	-9.50000000	-9.49980800
$x_2$	0	-5.00000000	-5.00000000	-4.99990000
Количество итераций $N$		8	5	1000000

IV. Гладкая функция

$$100 + 7x + 5y - 10.95xy + 3x^2 + 10y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-1997.435897, -1093.846154)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-1997.43589730	-1997.43589634	-1989.01629184
$x_2$	-20	-1093.84615377	-1093.84615325	-1089.23556071
Количество итераций $N$		5	73	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-1997.43589742	-1997.43589727	-1988.94441544
$x_2$	20	-1093.84615384	-1093.84615375	-1089.19617638
Количество итераций $N$		3	6	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-1997.43589836	-1997.43589825	-1988.88501073
$x_2$	-20	-1093.84615435	-1093.84615429	-1089.16368430
Количество итераций $N$		5	52	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-1997.43589754	-1997.43589874	-1988.81313434
$x_2$	20	-1093.84615391	-1093.84615456	-1089.12429998
Количество итераций $N$		4	36	1000000

Начальное приближение 5:



	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	-1997.43589641	-1997.43589645	-1988.91478510
$x_2$	0	-1093.84615328	-1093.84615330	-1089.17996978
Количество итераций $N$		7	9	1000000

V. Гладкая функция

$$1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Глобальный минимум:  $x = (-0.25, -0.25, -0.25)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25001975
$x_2$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25001975
$x_3$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25001975
Количество итераций $N$		10	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
$x_2$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
$x_3$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24994667
Количество итераций $N$		14	5	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
$x_2$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24994667
$x_3$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
Количество итераций $N$		15	1000000	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25005333
$x_2$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333

$x_3$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
Количество итераций $N$		10	6	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24994667
$x_2$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
$x_3$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
Количество итераций $N$		11	1000000	1000000

Начальное приближение 6:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
$x_2$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25005333
$x_3$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
Количество итераций $N$		11	1000000	1000000

Начальное приближение 7:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
$x_2$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
$x_3$	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25005333
Количество итераций $N$		8	1000000	1000000

Начальное приближение 8:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
$x_2$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333

$x_3$	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
Количество итераций $N$		9	1000000	1000000

Начальное приближение 9:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	-0.25000000	-0.25000000	-0.24999975
$x_2$	0	-0.25000000	-0.25000000	-0.24999975
$x_3$	0	-0.25000000	-0.25000000	-0.24999975
Количество итераций $N$		2	3	1000000

VI. Гладкая функция

$$10x^4 + 15y^4 + 15xy$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-0.582109, 0.525995); (0.582109, -0.525995)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	0.58210887	0.58210887	-0.59376195
$x_2$	-20	-0.52599474	-0.52599474	0.51580258
Количество итераций $N$		74	16	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-0.58210887	-0.58210887	-0.60382767
$x_2$	20	0.52599475	0.52599474	0.54467784
Количество итераций $N$		34	14	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	0.58210887	0.58210887	0.60382767
$x_2$	-20	-0.52599475	-0.52599474	-0.54467784
Количество итераций $N$		34	14	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	-0.58210887	-0.58210887	0.59376195
$x_2$	20	0.52599474	0.52599474	-0.51580258
Количество итераций $N$		74	16	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.5	-0.58210887	0.00000000	0.58210853
$x_2$	0.5	0.52599474	-0.00000000	-0.52599398
Количество итераций $N$		14	7	1000000

VII. Гладкая функция

$$10x^6 + 15y^6 - 20x^3y + xy^3$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-1.08789, -1.00318); (1.08789, 1.00318)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	-1.08788977	-1.75807511
$x_2$	-20	-20.00000000	-1.00317844	-1.62238646
Количество итераций $N$		1	21	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	0.00000000	-1.46746248
$x_2$	20	20.00000000	-0.00000000	1.35506449
Количество итераций $N$		1	88	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	-0.00000000	1.46746248
$x_2$	-20	-20.00000000	0.00000000	-1.35506449
Количество итераций $N$		1	88	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	1.08788977	1.75807511
$x_2$	20	20.00000000	1.00317844	1.62238646
Количество итераций $N$		1	21	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.5	-1.08788977	0.00000000	1.08788891
$x_2$	0.5	-1.00317844	0.00000000	1.00317770
Количество итераций $N$		22	72	1000000



VIII. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 2(x^3y + xy^3) + x^2 + y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-1, -1); (0, 0); (1, 1)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	-0.99999998	-1.63907231
$x_2$	-20	-20.00000000	-0.99999998	-1.63907231
Количество итераций $N$		1	20	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.27986310
$x_2$	20	20.00000000	0.00000000	1.27986310
Количество итераций $N$		1	20	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	0.00000000	1.27986310
$x_2$	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.27986310
Количество итераций $N$		1	20	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	0.99999998	1.63907231
$x_2$	20	20.00000000	0.99999998	1.63907231
Количество итераций $N$		1	20	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.5	-0.00000000	0.57735028	0.00000025
$x_2$	0.5	0.00000000	0.57735028	0.00000025
Количество итераций $N$		6	4	1000000

IX. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 3(x^3y + xy^3) + x^2 + y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-1.34777, -1.34777); (1.34777, 1.34777)$

Локальный минимум:  $(x, y) = (0, 0)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	-1.34777466	-1.75601801
$x_2$	-20	-20.00000000	-1.34777466	-1.75601801
Количество итераций $N$		1	22	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.21694232
$x_2$	20	20.00000000	0.00000000	1.21694232
Количество итераций $N$		1	20	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	0.00000000	1.21694232
$x_2$	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.21694232
Количество итераций $N$		1	20	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	1.34777466	1.75601801
$x_2$	20	20.00000000	1.34777466	1.75601801
Количество итераций $N$		1	22	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.5	1.01165100	0.42837299	1.34777314
$x_2$	0.5	1.01155480	0.42837299	1.34777314
Количество итераций $N$		1000000	5	1000000

Х. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 2(x^3y + xy^3) + x^4 + y^4 - x^2 - y^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-1, -1); (1, 1)$

Локальный минимум:  $(x, y) = (-0.39332, 0.39332); (0.39332, -0.39332)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	-0.99999999	-1.57371479
$x_2$	-20	-20.00000000	-0.99999999	-1.57371479
Количество итераций $N$		1	19	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-20	-20.00000000	-0.39331988	-1.25546568
$x_2$	20	20.00000000	0.39331988	1.25546568
Количество итераций $N$		1	21	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	0.39331988	1.25546568
$x_2$	-20	-20.00000000	-0.39331988	-1.25546568
Количество итераций $N$		1	21	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	20	20.00000000	0.99999999	1.57371479
$x_2$	20	20.00000000	0.99999999	1.57371479
Количество итераций $N$		1	19	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.5	0.99999999	0.00000000	-0.99999699
$x_2$	0.5	0.99999999	0.00000000	-0.99999699
Количество итераций $N$		268811	5	1000000

XI. Гладкая функция (функция Химмельбау)

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$

Глобальный минимум:  $(x, y) =$

$(3, 2); (-2.80518, 3.131312); (-3.779310, -3.283186); (3.584428, -1.848126)$

Локальный минимум:  $(x, y) = (-0.270845, -0.923039)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	-0.13728848	-0.27084459	3.58442741
$x_2$	0	1.22767072	-0.92303856	-1.84812413
Количество итераций $N$		7968	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	4	3.00000000	3.00000000	2.99999964
$x_2$	4	2.00000000	2.00000000	2.00000774
Количество итераций $N$		14	7	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-4	-2.80511809	-2.80511809	-2.80512047
$x_2$	4	3.13131252	3.13131252	3.13131394
Количество итераций $N$		15	6	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-4	-3.77931025	-3.77931025	-3.77931079
$x_2$	-4	-3.28318599	-3.28318599	-3.28318720
Количество итераций $N$		10	5	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	4	3.58442834	3.58442834	3.58442949
$x_2$	-4	-1.84812652	-1.84812652	-1.84813619
Количество итераций $N$		23	7	1000000



XII. Гладкая функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^4 \left[ \sum_{i=1}^4 x_i^k - b_k \right]^2$$

, где  $b_k = [8, 18, 44, 114]$

Глобальный минимум:  $x = [1, 2, 2, 3]$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.1	-1.90599244	-0.60582958	1.29726609
$x_2$	0.1	1.70441423	-0.60582958	1.70431725
$x_3$	0.1	2.24497368	-0.60582958	2.24494128
$x_4$	0.1	3.15747544	-0.60582958	3.15746791
Количество итераций $N$		33	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	3.9	3.90000000	1.29752594	1.29808951
$x_2$	3.9	3.90000000	1.70441423	1.70454689
$x_3$	3.9	3.90000000	2.24497368	2.24499868
$x_4$	3.9	3.90000000	3.15747544	3.15747727
Количество итераций $N$		1	12	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	2	2.00000000	1.29752594	1.29756402
$x_2$	2	2.00000000	1.70441423	1.70441869
$x_3$	2	2.00000000	2.24497368	2.24497276
$x_4$	2	2.00000000	-0.60582958	3.15747473
Количество итераций $N$		1	8	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	3	3.00000000	1.29752594	1.29761822
$x_2$	1	1.00000000	-0.60582958	1.70440358
$x_3$	1	1.00000000	-0.60582958	2.24496898
$x_4$	2	2.00000000	-0.60582958	3.15747473
Количество итераций $N$		1	1000000	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	2	2.00000000	1.29752594	1.29756402
$x_2$	3	3.00000000	1.70441423	1.70443380
$x_3$	3	3.00000000	2.24497368	2.24497653
$x_4$	2	2.00000000	-0.60582958	3.15747473
Количество итераций $N$		1	9	1000000

XIII. Гладкая функция (функция Бранина)

$$f(x, y) = \left( y - \frac{5.1}{4\pi^2} x^2 + \frac{5}{\pi} x - 6 \right)^2 + 10 \left( 1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x + 10$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-\pi, 12.275), (\pi, 2.275), (9.42478, 2.475)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	5	3.14159265	21.99114852	3.14151124
$x_2$	5	9.01106125	363.54200010	9.01064729
Количество итераций $N$		18	10	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	7	3.14159265	6.28318532	3.14169033
$x_2$	10	9.01106126	28.04424519	9.01146728
Количество итераций $N$		59	8	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	7	6.32017708	6.28318532	3.14136298
$x_2$	3	28.35798983	28.04424519	9.00987081
Количество итераций $N$		1000000	7	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-3	-3.14159264	-3.14159264	-3.14118984
$x_2$	10	19.01106119	19.01106119	19.00807762
Количество итераций $N$		14	5	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-3	-3.14159264	-3.14159264	3.14141116
$x_2$	3	19.01106119	19.01106119	9.01023218
Количество итераций $N$		24	5	1000000

XIV. Гладкая функция (функция МакКормика)

$$f(x, y) = \sin(x + y) + (x - y)^2 - 1.5x + 2.5y + 1$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (-0.547198, -1.5472)$

Локальный минимум:  $(x, y) = (\pi k - 0.547198, \pi k - 1.5472)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	-0.54719755	inf	-0.54719634
$x_2$	0	-1.54719755	inf	-1.54719634
Количество итераций $N$		11	15	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	2	2.59439510	2.59439510	2.59439499
$x_2$	2	1.59439510	1.59439510	1.59439499
Количество итераций $N$		6	1000000	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-0.5	-3.68879021	1.54719755	-0.54719548
$x_2$	2	-4.68879021	0.54719755	-1.54719548
Количество итераций $N$		11	11	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	2	-0.54719755	1.54719755	-0.54719577
$x_2$	-1	-1.54719755	0.54719755	-1.54719577
Количество итераций $N$		9	9	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-0.5	-0.54719755	-0.54719755	-0.54719721
$x_2$	-1	-1.54719755	-1.54719755	-1.54719721
Количество итераций $N$		13	1000000	1000000

XV. Гладкая функция (функция Матиаса)

$$f(x, y) = 0.26(x^2 + y^2) - 0.48xy$$

Глобальный минимум:  $(x, y) = (0, 0)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
$x_2$	0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
Количество итераций $N$		1	1	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00006250
$x_2$	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00006250
Количество итераций $N$		3	2	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00000500
$x_2$	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00000500
Количество итераций $N$		2	2	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00000500
$x_2$	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00000500
Количество итераций $N$		2	2	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00006250
$x_2$	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00006250
Количество итераций $N$		3	2	1000000



XVI. Гладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 1)

$$f(x) = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - 2x_i^2 + 1)^2$$

Глобальный минимум:  $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность  $n = 2$ :

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999968	0.99999968	0.99935908
$x_2$	1	0.99999872	0.99999872	0.99743607
Количество итераций $N$		197	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999968	0.99999968	0.99363323
$x_2$	-1	0.99999872	0.99999872	0.97429403
Количество итераций $N$		26	7	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.99999968	0.99999968	0.99840547
$x_2$	0	0.99999872	0.99999872	0.99354612
Количество итераций $N$		20	7	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	0.99999968	0.99999968	0.52729166
$x_2$	-10	0.99999872	0.99999872	-0.54516907

Количество итераций $N$		58	6	100000
-------------------------	--	----	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.99999968	0.99999968	0.99714135
$x_2$	-1	0.99999872	0.99999872	0.98842151
Количество итераций $N$		15	4	100000

**Размерность  $n = 4$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	-0.13193911	0.99999328	0.99366042
$x_2$	1	-0.81553556	0.99997272	0.97440393
$x_3$	1	0.31321058	0.99989081	0.89884490
$x_4$	1	-0.77834918	0.99956328	0.61582360
Количество итераций $N$		54	31	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999330	0.99999328	0.96512238
$x_2$	-1	0.99997277	0.99997272	0.86074593
$x_3$	-1	0.99989095	0.99989081	0.48122437
$x_4$	-1	0.99956382	0.99956328	-0.53698702
Количество итераций $N$		153	37	100000

Начальное приближение 3:

		Полученное приближенное значение
--	--	----------------------------------

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.08798021	0.99999328	0.98107041
$x_2$	0	-0.02411397	0.99997272	0.92383088
$x_3$	0	-0.61272673	0.99989081	0.70665063
$x_4$	0	-0.27215280	0.99956328	-0.00134272
Количество итераций $N$		7	40	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	0.99999335	-inf	0.92241503
$x_2$	10	0.99997298	inf	0.67122224
$x_3$	-10	0.99989181	inf	-0.14590011
$x_4$	-10	0.99956726	inf	-1.04996743
Количество итераций $N$		210	99	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.95793615	0.99999328	0.96977455
$x_2$	-1	0.83252760	0.99997272	0.87901791
$x_3$	0	0.38477751	0.99989081	0.54489027
$x_4$	-1	-0.70533796	0.99956328	-0.40634500
Количество итераций $N$		80	31	100000

**Размерность  $n = 10$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:  $N = 619$
2. Hessian Free:  $N = 299$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 26$
2. Hessian Free:  $N = 456$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 20$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 238$
2. Hessian Free:  $N = 33277$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 96$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 20$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 24$
2. Hessian Free:  $N = 31$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1272$
2. Hessian Free:  $N = 73847$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 200$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 226$
2. Hessian Free:  $N = 210$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 650$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 100$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 37$
2. Hessian Free:  $N = 32$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 122$
2. Hessian Free:  $N = 50$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 148$
2. Hessian Free:  $N = 1548$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 811$
2. Hessian Free:  $N = 57$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 364$
2. Hessian Free:  $N = 24$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

XVII. Негладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 2)

$$f(x) = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - 2x_i^2 + 1|$$

Глобальный минимум:  $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

**Размерность  $n = 2$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	-1.00000000	-368934881473.34891558	-1.00000000
$x_2$	1	1.00000000	575618142643318694969344	1.00000000
Количество итераций $N$		1	100000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.33270737	inf	-0.34627009
$x_2$	-1	-0.77743192	inf	-0.79659167
Количество итераций $N$		12	1	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.68721316	nan	0.64138802
$x_2$	0	-0.05536490	-inf	-0.17724864
Количество итераций $N$		26	1	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	0.80674713	inf	0.39021230
$x_2$	-10	0.30167478	inf	-0.69549167

Количество итераций $N$		43	1	100000
-------------------------	--	----	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.65630162	nan	0.15750532
$x_2$	-1	-0.13853643	-inf	-0.95039720
Количество итераций $N$		27	3	100000

**Размерность  $n = 4$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	-1.00000000	-2861170205025935133696	-1.00000000
$x_2$	1	1.00000000	-2267927944885866933504	1.00000000
$x_3$	1	1.00000000	2861170205025842918144	1.00000000
$x_4$	1	1.00000000	42277124864175619500	1.00000000
Количество итераций $N$		1	6	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.69474516	inf	-0.39805918
$x_2$	-1	0.15224709	-inf	-0.68305028
$x_3$	-1	0.14355102	-inf	-0.06693526
$x_4$	-1	-1.13044716	nan	-0.99103486
Количество итераций $N$		3	2	100000

Начальное приближение 3:

		Полученное приближенное значение
--	--	----------------------------------



	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.49515754	inf	0.53413077
$x_2$	0	-0.50975294	nan	-0.42941627
$x_3$	0	-0.48060550	nan	-0.63118461
$x_4$	0	-0.53808392	-inf	-0.20321093
Количество итераций $N$		18	1	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.55074231	-inf	0.91572880
$x_2$	10	0.40005088	-inf	0.67710098
$x_3$	-10	-0.30035287	-inf	-0.08336936
$x_4$	-10	-7.36977866	-inf	-6.08963493
Количество итераций $N$		8	3	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.36969437	-inf	0.35818810
$x_2$	-1	-0.69333277	-inf	-0.74341745
$x_3$	0	-0.03130312	inf	0.10534071
$x_4$	-1	-0.75608539	-inf	-0.97780546
Количество итераций $N$		4	26	100000

**Размерность  $n = 10$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 7$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 12$
2. Hessian Free:  $N = 5$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 3$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 32$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 38$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 20$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 8$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 3$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 24$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 82$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 72$
2. Hessian Free:  $N = 8$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 100$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 1$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 3$
2. Hessian Free:  $N = 1$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 7$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 5$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 169$
2. Hessian Free:  $N = 5$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

XVIII. Негладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 3)

$$f(x) = \frac{1}{4}|x_1 - 1| + \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - 2x_i^2 + 1|$$

Глобальный минимум:  $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность  $n = 2$ :

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999800	0.99999800	0.99487848
$x_2$	1	0.99999600	0.99999600	0.98978319
Количество итераций $N$		1545	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999801	0.99999800	0.96992078
$x_2$	-1	0.99999601	0.99999600	0.94064403
Количество итераций $N$		44	6	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	1.00557180	0.99999800	0.85484660
$x_2$	0	1.01626897	0.99999600	0.76265214
Количество итераций $N$		352	4	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	0.99999942	0.99999800	0.52597266
$x_2$	-10	0.99999877	0.99999600	0.24279483

Количество итераций $N$		96	6	100000
-------------------------	--	----	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.99999857	0.99999800	0.98738396
$x_2$	-1	0.99999711	0.99999600	0.97487612
Количество итераций $N$		47	6	100000

**Размерность  $n = 4$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999806	0.99999800	0.99487848
$x_2$	1	0.99999612	0.99999600	0.98978319
$x_3$	1	0.99999796	0.99999800	0.99999803
$x_4$	1	0.99999594	0.99999600	0.99999605
Количество итераций $N$		1242	4	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999833	0.99999800	0.96992078
$x_2$	-1	0.99999663	0.99999600	0.94064403
$x_3$	-1	0.99999890	0.99999800	0.96992078
$x_4$	-1	0.99999789	0.99999600	0.94064403
Количество итераций $N$		71	6	100000

Начальное приближение 3:

		Полученное приближенное значение
--	--	----------------------------------

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.28074788	0.99999800	0.89334625
$x_2$	0	0.08323957	0.99999600	0.76615091
$x_3$	0	0.12006061	0.99999800	0.85484660
$x_4$	0	0.02595974	0.99999600	0.76265214
Количество итераций $N$		158	4	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.16154819	0.99999800	3.24045049
$x_2$	10	0.00943208	0.99999600	10.50051962
$x_3$	-10	0.81202328	0.99999800	-0.29548899
$x_4$	-10	0.66251717	0.99999600	0.05456292
Количество итераций $N$		136	9	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.75946937	0.99999800	0.98738396
$x_2$	-1	0.57187343	0.99999600	0.97487612
$x_3$	0	1.02387819	0.99999800	0.98738396
$x_4$	-1	1.05352404	0.99999600	0.97487612
Количество итераций $N$		936	6	100000

**Размерность  $n = 10$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:  $N = 1205$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 104$
2. Hessian Free:  $N = 6$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 28783$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 342$
2. Hessian Free:  $N = 7$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 40$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 20$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 4$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 187$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 578$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1044$
2. Hessian Free:  $N = 7$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 34$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 100$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 156$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 557$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 515$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 154$
2. Hessian Free:  $N = 8$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 333$
2. Hessian Free:  $N = 6$



3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

XIX. Гладкая функция (функция Розенброка)

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left( 100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2 \right)$$

Глобальный минимум:  $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность  $n = 2$ :

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999800	0.99999800	0.99487848
$x_2$	1	0.99999600	0.99999600	0.98978319
Количество итераций $N$		1545	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999801	0.99999800	0.96992078
$x_2$	-1	0.99999601	0.99999600	0.94064403
Количество итераций $N$		44	6	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	1.00557180	0.99999800	0.85484660
$x_2$	0	1.01626897	0.99999600	0.76265214
Количество итераций $N$		352	4	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	0.99999942	0.99999800	0.52597266
$x_2$	-10	0.99999877	0.99999600	0.24279483

Количество итераций $N$		96	6	100000
-------------------------	--	----	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.99999857	0.99999800	0.98738396
$x_2$	-1	0.99999711	0.99999600	0.97487612
Количество итераций $N$		47	6	100000

**Размерность  $n = 4$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999806	0.99999800	0.99487848
$x_2$	1	0.99999612	0.99999600	0.98978319
$x_3$	1	0.99999796	0.99999800	0.99999803
$x_4$	1	0.99999594	0.99999600	0.99999605
Количество итераций $N$		1242	4	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.99999833	0.99999800	0.96992078
$x_2$	-1	0.99999663	0.99999600	0.94064403
$x_3$	-1	0.99999890	0.99999800	0.96992078
$x_4$	-1	0.99999789	0.99999600	0.94064403
Количество итераций $N$		71	6	100000

Начальное приближение 3:

		Полученное приближенное значение
--	--	----------------------------------

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.28074788	0.99999800	0.89334625
$x_2$	0	0.08323957	0.99999600	0.76615091
$x_3$	0	0.12006061	0.99999800	0.85484660
$x_4$	0	0.02595974	0.99999600	0.76265214
Количество итераций $N$		158	4	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.16154819	0.99999800	3.24045049
$x_2$	10	0.00943208	0.99999600	10.50051962
$x_3$	-10	0.81202328	0.99999800	-0.29548899
$x_4$	-10	0.66251717	0.99999600	0.05456292
Количество итераций $N$		136	9	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.75946937	0.99999800	0.98738396
$x_2$	-1	0.57187343	0.99999600	0.97487612
$x_3$	0	1.02387819	0.99999800	0.98738396
$x_4$	-1	1.05352404	0.99999600	0.97487612
Количество итераций $N$		936	6	100000

**Размерность  $n = 10$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:  $N = 1205$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 104$
2. Hessian Free:  $N = 6$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 28783$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 342$
2. Hessian Free:  $N = 7$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 40$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 20$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 4$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 187$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 578$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1044$
2. Hessian Free:  $N = 7$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 34$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 100$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 156$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 557$
2. Hessian Free:  $N = 6$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 515$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 154$
2. Hessian Free:  $N = 8$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 333$
2. Hessian Free:  $N = 6$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

XX. Негладкая функция (функция Розенборка 2)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (10|x_i^2 - x_{i+1}| + |x_i - 1|)$$

Глобальный минимум:  $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

**Размерность  $n = 2$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	-1.00000000	inf	-1.00000000
$x_2$	1	1.00000000	nan	1.00000000
Количество итераций $N$		1	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	1.00303282	Inf	0.01747504
$x_2$	-1	1.00614391	-inf	0.00029917
Количество итераций $N$		50	2	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.36669666	Inf	0.01976851
$x_2$	0	0.13449964	inf	0.00039049
Количество итераций $N$		14	2	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	0.02919115	Nan	0.77680272
$x_2$	-10	0.01792452	-inf	-2.31795579



Количество итераций $N$		3	1	100000
-------------------------	--	---	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.76161176	nan	0.13017862
$x_2$	-1	0.58001434	-Inf	0.01693957
Количество итераций $N$		34	2	100000

**Размерность  $n = 4$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	-1.00000000	inf	-1.00000000
$x_2$	1	1.00000000	inf	1.00000000
$x_3$	1	1.00000000	-inf	1.00000000
$x_4$	1	1.00000000	inf	1.00000000
Количество итераций $N$		1	2	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-1	0.57361021	-inf	0.01747504
$x_2$	-1	0.32852898	nan	0.00029917
$x_3$	-1	0.62589899	inf	0.01747504
$x_4$	-1	0.39185250	nan	0.00029917
Количество итераций $N$		40	2	100000

Начальное приближение 3:

		Полученное приближенное значение
--	--	----------------------------------

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.32415702	-inf	0.02032840
$x_2$	0	0.10508732	nan	0.00041293
$x_3$	0	0.45456754	-inf	0.02032840
$x_4$	0	0.20671495	nan	0.00041293
Количество итераций $N$		33	3	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.29292167	inf	3.27514196
$x_2$	10	0.15439793	inf	10.72663520
$x_3$	-10	0.72922976	-inf	-1.05933281
$x_4$	-10	0.42221828	inf	-7.73425824
Количество итераций $N$		6	35	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0	0.67204259	inf	0.13017862
$x_2$	-1	0.45207898	inf	0.01693957
$x_3$	0	0.60931676	-inf	0.13017862
$x_4$	-1	0.37130046	inf	0.01693957
Количество итераций $N$		43	20	100000

**Размерность  $n = 10$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 15$
2. Hessian Free:  $N = 27$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 65$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 13$
2. Hessian Free:  $N = 4$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 66$
2. Hessian Free:  $N = 5$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 20$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 18$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 11$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 6$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 105$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 100$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 1$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 37$
2. Hessian Free:  $N = 1$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 29$
2. Hessian Free:  $N = 1$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 5$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 14$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

XXI. Гладкая функция (функция Растригина)

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i))$$

Глобальный минимум:  $x = 0$ , на  $x_i \in [-5.12, 5.12]$ , множество локальных минимумов.

**Размерность  $n = 2$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
$x_2$	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
Количество итераций $N$		7	3	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
$x_2$	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
Количество итераций $N$		9	3	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
$x_2$	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
Количество итераций $N$		8	3	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
$x_2$	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863

Количество итераций $N$		9	3	100000
-------------------------	--	---	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
$x_2$	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
Количество итераций $N$		11	3	100000

**Размерность  $n = 4$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
$x_2$	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
$x_3$	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
$x_4$	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
Количество итераций $N$		9	3	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
$x_2$	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
$x_3$	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
$x_4$	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
Количество итераций $N$		12	3	100000

Начальное приближение 3:

		Полученное приближенное значение
--	--	----------------------------------

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
$x_2$	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
$x_3$	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
$x_4$	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
Количество итераций $N$		9	3	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
$x_2$	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
$x_3$	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
$x_4$	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
Количество итераций $N$		8	3	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
$x_2$	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
$x_3$	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
$x_4$	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
Количество итераций $N$		839	3	100000

**Размерность  $n = 10$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:  $N = 10$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 13$
2. Hessian Free:  $N = 3$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 10$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 13$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 18$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 20$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 8$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 8$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 7$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$



Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 11$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 25$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 100$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 15$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 15$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 15$
2. Hessian Free:  $N = 100000$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 15$
2. Hessian Free:  $N = 3$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 11$
2. Hessian Free:  $N = 3$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

XXII. Гладкая функция (сферическая)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Глобальный минимум:  $x = 0$

**Размерность  $n = 2$ :**

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
$x_2$	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
Количество итераций $N$		1	2	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
$x_2$	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций $N$		1	2	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
$x_2$	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций $N$		1	2	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	1	0.00000000	-0.00000000	0.00001000
$x_2$	-2	0.00000000	0.00000000	-0.00002000
Количество итераций $N$		1	2	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
$x_2$	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
Количество итераций $N$		1	2	100000

Размерность  $n = 4$ :

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999
$x_2$	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999
$x_3$	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
$x_4$	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
Количество итераций $N$		1	2	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	-10	0.00000000	0.00000000	-0.00009999
$x_2$	-10	0.00000000	0.00000000	-0.00009999
$x_3$	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
$x_4$	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций $N$		1	2	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999

$x_2$	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999
$x_3$	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
$x_4$	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций $N$		1	2	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	1	-0.00000000	0.00000000	0.00001000
$x_2$	2	0.00000000	-0.00000000	0.00002000
$x_3$	-3	-0.00000000	0.00000000	-0.00003000
$x_4$	-4	0.00000000	0.00000000	-0.00004000
Количество итераций $N$		2	2	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
$x_1$	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
$x_2$	0	0.00000000	0.00000000	-0.00000000
$x_3$	0	0.00000000	0.00000000	-0.00000000
$x_4$	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
Количество итераций $N$		1	2	100000

**Размерность  $n = 10$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 2$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 20$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 2$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 2$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 2$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 2$
2. Hessian Free:  $N = 2$

3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

**Размерность  $n = 100$ :**

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 2$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS:  $N = 1$
2. Hessian Free:  $N = 2$
3. Метод Нестерова:  $N = 100000$

Источники:

1. [http://www.optimization-online.org/DB\\_FILE/2011/02/2923.pdf](http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2011/02/2923.pdf)
2. [https://en.wikipedia.org/wiki/Test\\_functions\\_for\\_optimization](https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization)
3. <http://www.geatbx.com/docu/fcnindex-01.html>
4. [http://infinity77.net/global\\_optimization/test\\_functions.html](http://infinity77.net/global_optimization/test_functions.html)