

Исследование методов оптимизации на примере различных функций

Автор: Юрий Кондратов

Для тестирования методов оптимизации было выбрано 22 функции:

1. Функции 1 - 10 являются многочленами малой размерности;
2. Функции 11 - 15 являются специальными функциями для тестирования методов оптимизации
3. Функции 16 – 22 являются функциями произвольной размерности, причем функции 17, 18, 20 не являются гладкими.

В результате расчетов можно заметить, что методы сходятся не только в минимумах функций, но и в стационарных точках; а также на проблемных функциях методы могут сходить очень медленно, превышая предел допустимых итераций, либо расходятся (ф. 14).

Кроме того, возможна работа на негладких функциях, но при этом выбор неподходящих точек начального приближения может легко привести к расхождению метода.

I. Гладкая функция

$$1 + x + y - xy + x^2 + y^2$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-1, -1)$

Начальное приближение 1:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001900
x_2	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001900
Количество итераций N		1	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001133
x_2	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99998467
Количество итераций N		4	5	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99998467
x_2	-20	-1.00000000	-1.00000000	-1.00001133
Количество итераций N		4	5	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99995800
x_2	20	-1.00000000	-1.00000000	-0.99995800
Количество итераций N		1	1000000	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	-1.00000000	-1.00000000	-0.99999800
x_2	0	-1.00000000	-1.00000000	-0.99999800
Количество итераций N		1	1000000	1000000

II. Гладкая функция

$$1 + 7x + 5y + 0.5xy + 3x^2 + y^2$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-0.978723, -2.255319)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97873333
x_2	-20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25535216
Количество итераций N		8	3	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97874014
x_2	20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25527045
Количество итераций N		6	1000000	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97870610
x_2	-20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25535896
Количество итераций N		4	4	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-0.97872340	-0.97872340	-0.97871291
x_2	20	-2.25531915	-2.25531915	-2.25527726
Количество итераций N		3	2	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	-0.97872340	-0.97872340	-0.97872312
x_2	0	-2.25531915	-2.25531915	-2.25531471
Количество итераций N		2	1000000	1000000

III. Гладкая функция

$$100 + 7x + 5y - 10xy + 3x^2 + 10y^2$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-9.5, -5)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-9.50000000	-9.50000000	-9.50028800
x_2	-20	-5.00000000	-5.00000000	-5.00015600
Количество итераций N		4	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-9.50000000	-9.50000000	-9.49996800
x_2	20	-5.00000000	-5.00000000	-4.99996400
Количество итераций N		6	1000000	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-9.50000000	-9.50000000	-9.49964800
x_2	-20	-5.00000000	-5.00000000	-4.99983600
Количество итераций N		5	1000000	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-9.50000000	-9.50000000	-9.49932800
x_2	20	-5.00000000	-5.00000000	-4.99964400
Количество итераций N		5	6	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	-9.50000000	-9.50000000	-9.49980800
x_2	0	-5.00000000	-5.00000000	-4.99990000
Количество итераций N		8	5	1000000

IV. Гладкая функция

$$100 + 7x + 5y - 10.95xy + 3x^2 + 10y^2$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-1997.435897, -1093.846154)$

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-1997.43589730	-1997.43589634	-1989.01629184
x_2	-20	-1093.84615377	-1093.84615325	-1089.23556071
Количество итераций N		5	73	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-1997.43589742	-1997.43589727	-1988.94441544
x_2	20	-1093.84615384	-1093.84615375	-1089.19617638
Количество итераций N		3	6	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-1997.43589836	-1997.43589825	-1988.88501073
x_2	-20	-1093.84615435	-1093.84615429	-1089.16368430
Количество итераций N		5	52	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-1997.43589754	-1997.43589874	-1988.81313434
x_2	20	-1093.84615391	-1093.84615456	-1089.12429998
Количество итераций N		4	36	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	-1997.43589641	-1997.43589645	-1988.91478510
x_2	0	-1093.84615328	-1093.84615330	-1089.17996978
Количество итераций N		7	9	1000000

V. Гладкая функция

$$1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Глобальный минимум: $x = (-0.25, -0.25, -0.25)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25001975
x_2	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25001975
x_3	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25001975
Количество итераций N		10	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
x_2	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
x_3	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24994667
Количество итераций N		14	5	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
x_2	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24994667
x_3	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
Количество итераций N		15	1000000	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25005333
x_2	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333

x_3	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
Количество итераций N		10	6	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24994667
x_2	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
x_3	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25002667
Количество итераций N		11	1000000	1000000

Начальное приближение 6:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
x_2	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25005333
x_3	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
Количество итераций N		11	1000000	1000000

Начальное приближение 7:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
x_2	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
x_3	-20	-0.25000000	-0.25000000	-0.25005333
Количество итераций N		8	1000000	1000000

Начальное приближение 8:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
x_2	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333

x_3	20	-0.25000000	-0.25000000	-0.24997333
Количество итераций N		9	1000000	1000000

Начальное приближение 9:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	-0.25000000	-0.25000000	-0.24999975
x_2	0	-0.25000000	-0.25000000	-0.24999975
x_3	0	-0.25000000	-0.25000000	-0.24999975
Количество итераций N		2	3	1000000

VI. Гладкая функция

$$10x^4 + 15y^4 + 15xy$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-0.582109, 0.525995); (0.582109, -0.525995)$

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	0.58210887	0.58210887	-0.59376195
x_2	-20	-0.52599474	-0.52599474	0.51580258
Количество итераций N		74	16	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-0.58210887	-0.58210887	-0.60382767
x_2	20	0.52599475	0.52599474	0.54467784
Количество итераций N		34	14	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	0.58210887	0.58210887	0.60382767
x_2	-20	-0.52599475	-0.52599474	-0.54467784
Количество итераций N		34	14	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	-0.58210887	-0.58210887	0.59376195
x_2	20	0.52599474	0.52599474	-0.51580258
Количество итераций N		74	16	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.5	-0.58210887	0.00000000	0.58210853
x_2	0.5	0.52599474	-0.00000000	-0.52599398
Количество итераций N		14	7	1000000

VII. Гладкая функция

$$10x^6 + 15y^6 - 20x^3y + xy^3$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-1.08789, -1.00318); (1.08789, 1.00318)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	-1.08788977	-1.75807511
x_2	-20	-20.00000000	-1.00317844	-1.62238646
Количество итераций N		1	21	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	0.00000000	-1.46746248
x_2	20	20.00000000	-0.00000000	1.35506449
Количество итераций N		1	88	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	-0.00000000	1.46746248
x_2	-20	-20.00000000	0.00000000	-1.35506449
Количество итераций N		1	88	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	1.08788977	1.75807511
x_2	20	20.00000000	1.00317844	1.62238646
Количество итераций N		1	21	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.5	-1.08788977	0.00000000	1.08788891
x_2	0.5	-1.00317844	0.00000000	1.00317770
Количество итераций N		22	72	1000000

VIII. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 2(x^3y + xy^3) + x^2 + y^2$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-1, -1); (0, 0); (1, 1)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	-0.99999998	-1.63907231
x_2	-20	-20.00000000	-0.99999998	-1.63907231
Количество итераций N		1	20	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.27986310
x_2	20	20.00000000	0.00000000	1.27986310
Количество итераций N		1	20	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	0.00000000	1.27986310
x_2	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.27986310
Количество итераций N		1	20	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	0.99999998	1.63907231
x_2	20	20.00000000	0.99999998	1.63907231
Количество итераций N		1	20	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.5	-0.00000000	0.57735028	0.00000025
x_2	0.5	0.00000000	0.57735028	0.00000025
Количество итераций N		6	4	1000000

IX. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 3(x^3y + xy^3) + x^2 + y^2$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-1.34777, -1.34777); (1.34777, 1.34777)$

Локальный минимум: $(x, y) = (0, 0)$

Начальное приближение 1:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	-1.34777466	-1.75601801
x_2	-20	-20.00000000	-1.34777466	-1.75601801
Количество итераций N		1	22	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.21694232
x_2	20	20.00000000	0.00000000	1.21694232
Количество итераций N		1	20	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	0.00000000	1.21694232
x_2	-20	-20.00000000	-0.00000000	-1.21694232
Количество итераций N		1	20	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	1.34777466	1.75601801
x_2	20	20.00000000	1.34777466	1.75601801
Количество итераций N		1	22	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.5	1.01165100	0.42837299	1.34777314
x_2	0.5	1.01155480	0.42837299	1.34777314
Количество итераций N		1000000	5	1000000

Х. Гладкая функция

$$x^6 + y^6 - 2(x^3y + xy^3) + x^4 + y^4 - x^2 - y^2$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-1, -1); (1, 1)$

Локальный минимум: $(x, y) = (-0.39332, 0.39332); (0.39332, -0.39332)$

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	-0.99999999	-1.57371479
x_2	-20	-20.00000000	-0.99999999	-1.57371479
Количество итераций N		1	19	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-20	-20.00000000	-0.39331988	-1.25546568
x_2	20	20.00000000	0.39331988	1.25546568
Количество итераций N		1	21	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	0.39331988	1.25546568
x_2	-20	-20.00000000	-0.39331988	-1.25546568
Количество итераций N		1	21	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	20	20.00000000	0.99999999	1.57371479
x_2	20	20.00000000	0.99999999	1.57371479
Количество итераций N		1	19	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.5	0.99999999	0.00000000	-0.99999699
x_2	0.5	0.99999999	0.00000000	-0.99999699
Количество итераций N		268811	5	1000000

XI. Гладкая функция (функция Химмельбау)

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2$$

Глобальный минимум:

$(x, y) = (3, 2); (-2.80518, 3.131312); (-3.779310, -3.283186); (3.584428, -1.848126)$

Локальный минимум: $(x, y) = (-0.270845, -0.923039)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	-0.13728848	-0.27084459	3.58442741
x_2	0	1.22767072	-0.92303856	-1.84812413
Количество итераций N		7968	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	4	3.00000000	3.00000000	2.99999964
x_2	4	2.00000000	2.00000000	2.00000774
Количество итераций N		14	7	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-4	-2.80511809	-2.80511809	-2.80512047
x_2	4	3.13131252	3.13131252	3.13131394
Количество итераций N		15	6	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-4	-3.77931025	-3.77931025	-3.77931079
x_2	-4	-3.28318599	-3.28318599	-3.28318720
Количество итераций N		10	5	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	4	3.58442834	3.58442834	3.58442949
x_2	-4	-1.84812652	-1.84812652	-1.84813619
Количество итераций N		23	7	1000000

ХII. Гладкая функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^4 \left[\sum_{i=1}^4 x_i^k - b_k \right]^2$$

, где $b_k = [8, 18, 44, 114]$

Глобальный минимум: $x = [1, 2, 2, 3]$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.1	-1.90599244	-0.60582958	1.29726609
x_2	0.1	1.70441423	-0.60582958	1.70431725
x_3	0.1	2.24497368	-0.60582958	2.24494128
x_4	0.1	3.15747544	-0.60582958	3.15746791
Количество итераций N		33	1000000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	3.9	3.90000000	1.29752594	1.29808951
x_2	3.9	3.90000000	1.70441423	1.70454689
x_3	3.9	3.90000000	2.24497368	2.24499868
x_4	3.9	3.90000000	3.15747544	3.15747727
Количество итераций N		1	12	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	2	2.00000000	1.29752594	1.29756402
x_2	2	2.00000000	1.70441423	1.70441869
x_3	2	2.00000000	2.24497368	2.24497276
x_4	2	2.00000000	-0.60582958	3.15747473
Количество итераций N		1	8	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	3	3.00000000	1.29752594	1.29761822
x_2	1	1.00000000	-0.60582958	1.70440358
x_3	1	1.00000000	-0.60582958	2.24496898
x_4	2	2.00000000	-0.60582958	3.15747473
Количество итераций N		1	1000000	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	2	2.00000000	1.29752594	1.29756402
x_2	3	3.00000000	1.70441423	1.70443380
x_3	3	3.00000000	2.24497368	2.24497653
x_4	2	2.00000000	-0.60582958	3.15747473
Количество итераций N		1	9	1000000

XIII. Гладкая функция (функция Бранина)

$$f(x, y) = \left(y - \frac{5.1}{4\pi^2} x^2 + \frac{5}{\pi} x - 6 \right)^2 + 10 \left(1 - \frac{1}{8\pi} \right) \cos x + 10$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-\pi, 12.275), (\pi, 2.275), (9.42478, 2.475)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	5	3.14159265	21.99114852	3.14151124
x_2	5	9.01106125	363.54200010	9.01064729
Количество итераций N		18	10	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	7	3.14159265	6.28318532	3.14169033
x_2	10	9.01106126	28.04424519	9.01146728
Количество итераций N		59	8	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	7	6.32017708	6.28318532	3.14136298
x_2	3	28.35798983	28.04424519	9.00987081
Количество итераций N		1000000	7	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-3	-3.14159264	-3.14159264	-3.14118984
x_2	10	19.01106119	19.01106119	19.00807762
Количество итераций N		14	5	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-3	-3.14159264	-3.14159264	3.14141116
x_2	3	19.01106119	19.01106119	9.01023218
Количество итераций N		24	5	1000000

XIV. Гладкая функция (функция МакКормика)

$$f(x, y) = \sin(x + y) + (x - y)^2 - 1.5x + 2.5y + 1$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (-0.547198, -1.5472)$

Локальный минимум: $(x, y) = (\pi k - 0.547198, \pi k - 1.5472)$

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	-0.54719755	inf	-0.54719634
x_2	0	-1.54719755	inf	-1.54719634
Количество итераций N		11	15	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	2	2.59439510	2.59439510	2.59439499
x_2	2	1.59439510	1.59439510	1.59439499
Количество итераций N		6	1000000	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-0.5	-3.68879021	1.54719755	-0.54719548
x_2	2	-4.68879021	0.54719755	-1.54719548
Количество итераций N		11	11	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	2	-0.54719755	1.54719755	-0.54719577
x_2	-1	-1.54719755	0.54719755	-1.54719577
Количество итераций N		9	9	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-0.5	-0.54719755	-0.54719755	-0.54719721
x_2	-1	-1.54719755	-1.54719755	-1.54719721
Количество итераций N		13	1000000	1000000

XV. Гладкая функция (функция Матиаса)

$$f(x, y) = 0.26(x^2 + y^2) - 0.48xy$$

Глобальный минимум: $(x, y) = (0, 0)$

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
x_2	0	0.00000000	0.00000000	0.00000000
Количество итераций N		1	1	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00006250
x_2	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00006250
Количество итераций N		3	2	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00000500
x_2	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00000500
Количество итераций N		2	2	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00000500
x_2	5	-0.00000000	-0.00000000	0.00000500
Количество итераций N		2	2	1000000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00006250
x_2	-5	0.00000000	0.00000000	-0.00006250
Количество итераций N		3	2	1000000

XVI. Гладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 1)

$$f(x) = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - 2x_i^2 + 1)^2$$

Глобальный минимум: $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность $n = 2$:

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999968	0.99999968	0.99935908
x_2	1	0.99999872	0.99999872	0.99743607
Количество итераций N		197	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999968	0.99999968	0.99363323
x_2	-1	0.99999872	0.99999872	0.97429403
Количество итераций N		26	7	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.99999968	0.99999968	0.99840547
x_2	0	0.99999872	0.99999872	0.99354612
Количество итераций N		20	7	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	0.99999968	0.99999968	0.52729166
x_2	-10	0.99999872	0.99999872	-0.54516907
Количество		58	6	100000

итераций N				
--------------	--	--	--	--

Начальное приближение 5:

	Начальное прибрл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.99999968	0.99999968	0.99714135
x_2	-1	0.99999872	0.99999872	0.98842151
Количество итераций N		15	4	100000

Размерность $n = 4$:

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	-0.13193911	0.99999328	0.99366042
x_2	1	-0.81553556	0.99997272	0.97440393
x_3	1	0.31321058	0.99989081	0.89884490
x_4	1	-0.77834918	0.99956328	0.61582360
Количество итераций N		54	31	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999330	0.99999328	0.96512238
x_2	-1	0.99997277	0.99997272	0.86074593
x_3	-1	0.99989095	0.99989081	0.48122437
x_4	-1	0.99956382	0.99956328	-0.53698702
Количество итераций N		153	37	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{нач}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова

x_1	0	0.08798021	0.99999328	0.98107041
x_2	0	-0.02411397	0.99997272	0.92383088
x_3	0	-0.61272673	0.99989081	0.70665063
x_4	0	-0.27215280	0.99956328	-0.00134272
Количество итераций N		7	40	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	0.99999335	-inf	0.92241503
x_2	10	0.99997298	inf	0.67122224
x_3	-10	0.99989181	inf	-0.14590011
x_4	-10	0.99956726	inf	-1.04996743
Количество итераций N		210	99	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.95793615	0.99999328	0.96977455
x_2	-1	0.83252760	0.99997272	0.87901791
x_3	0	0.38477751	0.99989081	0.54489027
x_4	-1	-0.70533796	0.99956328	-0.40634500
Количество итераций N		80	31	100000

Размерность $n = 10$:

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS: $N = 619$
2. Hessian Free: $N = 299$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 26$
2. Hessian Free: $N = 456$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 20$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 238$
2. Hessian Free: $N = 33277$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 96$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 20$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 24$
2. Hessian Free: $N = 31$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1272$
2. Hessian Free: $N = 73847$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 200$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 226$
2. Hessian Free: $N = 210$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 650$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 100$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 37$
2. Hessian Free: $N = 32$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 122$
2. Hessian Free: $N = 50$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 148$
2. Hessian Free: $N = 1548$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 811$
2. Hessian Free: $N = 57$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 364$
2. Hessian Free: $N = 24$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

XVII. Негладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 2)

$$f(x) = \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - 2x_i^2 + 1|$$

Глобальный минимум: $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность $n = 2$:

Начальное приближение 1:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	-1.00000000	-368934881473.34891558	-1.00000000
x_2	1	1.00000000	575618142643318694969344	1.00000000
Количество итераций N		1	100000	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.33270737	inf	-0.34627009
x_2	-1	-0.77743192	inf	-0.79659167
Количество итераций N		12	1	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.68721316	nan	0.64138802
x_2	0	-0.05536490	-inf	-0.17724864
Количество итераций N		26	1	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	0.80674713	inf	0.39021230
x_2	-10	0.30167478	inf	-0.69549167

Количество итераций N		43	1	100000
-------------------------	--	----	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.65630162	nan	0.15750532
x_2	-1	-0.13853643	-inf	-0.95039720
Количество итераций N		27	3	100000

Размерность $n = 4$:

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	-1.00000000	-2861170205025935133696	-1.00000000
x_2	1	1.00000000	-2267927944885866933504	1.00000000
x_3	1	1.00000000	2861170205025842918144	1.00000000
x_4	1	1.00000000	42277124864175619500	1.00000000
Количество итераций N		1	6	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.69474516	inf	-0.39805918
x_2	-1	0.15224709	-inf	-0.68305028
x_3	-1	0.14355102	-inf	-0.06693526
x_4	-1	-1.13044716	nan	-0.99103486
Количество итераций N		3	2	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл.	Полученное приближенное значение		
--	------------------	----------------------------------	--	--

	$x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.49515754	inf	0.53413077
x_2	0	-0.50975294	nan	-0.42941627
x_3	0	-0.48060550	nan	-0.63118461
x_4	0	-0.53808392	-inf	-0.20321093
Количество итераций N		18	1	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.55074231	-inf	0.91572880
x_2	10	0.40005088	-inf	0.67710098
x_3	-10	-0.30035287	-inf	-0.08336936
x_4	-10	-7.36977866	-inf	-6.08963493
Количество итераций N		8	3	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.36969437	-inf	0.35818810
x_2	-1	-0.69333277	-inf	-0.74341745
x_3	0	-0.03130312	inf	0.10534071
x_4	-1	-0.75608539	-inf	-0.97780546
Количество итераций N		4	26	100000

Размерность $n = 10$:

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 7$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 12$
2. Hessian Free: $N = 5$

3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 3$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 32$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 38$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 20$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 8$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 3$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 24$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 82$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 72$
2. Hessian Free: $N = 8$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 100$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 1$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 3$
2. Hessian Free: $N = 1$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 7$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 5$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 169$
2. Hessian Free: $N = 5$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

XVIII. Негладкая функция (функция Нестерова Чебышева-Розенброка 3)

$$f(x) = \frac{1}{4}|x_1 - 1| + \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - 2x_i^2 + 1|$$

Глобальный минимум: $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность $n = 2$:

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999800	0.99999800	0.99487848
x_2	1	0.99999600	0.99999600	0.98978319
Количество итераций N		1545	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999801	0.99999800	0.96992078
x_2	-1	0.99999601	0.99999600	0.94064403
Количество итераций N		44	6	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	1.00557180	0.99999800	0.85484660
x_2	0	1.01626897	0.99999600	0.76265214
Количество итераций N		352	4	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	0.99999942	0.99999800	0.52597266
x_2	-10	0.99999877	0.99999600	0.24279483
Количество		96	6	100000

итераций N				
--------------	--	--	--	--

Начальное приближение 5:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.99999857	0.99999800	0.98738396
x_2	-1	0.99999711	0.99999600	0.97487612
Количество итераций N		47	6	100000

Размерность $n = 4$:

Начальное приближение 1:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999806	0.99999800	0.99487848
x_2	1	0.99999612	0.99999600	0.98978319
x_3	1	0.99999796	0.99999800	0.99999803
x_4	1	0.99999594	0.99999600	0.99999605
Количество итераций N		1242	4	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999833	0.99999800	0.96992078
x_2	-1	0.99999663	0.99999600	0.94064403
x_3	-1	0.99999890	0.99999800	0.96992078
x_4	-1	0.99999789	0.99999600	0.94064403
Количество итераций N		71	6	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова

x_1	0	0.28074788	0.99999800	0.89334625
x_2	0	0.08323957	0.99999600	0.76615091
x_3	0	0.12006061	0.99999800	0.85484660
x_4	0	0.02595974	0.99999600	0.76265214
Количество итераций N		158	4	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.16154819	0.99999800	3.24045049
x_2	10	0.00943208	0.99999600	10.50051962
x_3	-10	0.81202328	0.99999800	-0.29548899
x_4	-10	0.66251717	0.99999600	0.05456292
Количество итераций N		136	9	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.75946937	0.99999800	0.98738396
x_2	-1	0.57187343	0.99999600	0.97487612
x_3	0	1.02387819	0.99999800	0.98738396
x_4	-1	1.05352404	0.99999600	0.97487612
Количество итераций N		936	6	100000

Размерность $n = 10$:

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS: $N = 1205$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 104$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 28783$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 342$
2. Hessian Free: $N = 7$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 40$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 20$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 4$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 187$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 578$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1044$
2. Hessian Free: $N = 7$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 34$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 100$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 156$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 557$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 515$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 154$
2. Hessian Free: $N = 8$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 333$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

XIX. Гладкая функция (функция Розенброка)

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left(100(x_i^2 - x_{i+1})^2 + (x_i - 1)^2 \right)$$

Глобальный минимум: $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность $n = 2$:

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999800	0.99999800	0.99487848
x_2	1	0.99999600	0.99999600	0.98978319
Количество итераций N		1545	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999801	0.99999800	0.96992078
x_2	-1	0.99999601	0.99999600	0.94064403
Количество итераций N		44	6	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	1.00557180	0.99999800	0.85484660
x_2	0	1.01626897	0.99999600	0.76265214
Количество итераций N		352	4	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	0.99999942	0.99999800	0.52597266
x_2	-10	0.99999877	0.99999600	0.24279483
Количество		96	6	100000

итераций N				
--------------	--	--	--	--

Начальное приближение 5:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.99999857	0.99999800	0.98738396
x_2	-1	0.99999711	0.99999600	0.97487612
Количество итераций N		47	6	100000

Размерность $n = 4$:

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999806	0.99999800	0.99487848
x_2	1	0.99999612	0.99999600	0.98978319
x_3	1	0.99999796	0.99999800	0.99999803
x_4	1	0.99999594	0.99999600	0.99999605
Количество итераций N		1242	4	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.99999833	0.99999800	0.96992078
x_2	-1	0.99999663	0.99999600	0.94064403
x_3	-1	0.99999890	0.99999800	0.96992078
x_4	-1	0.99999789	0.99999600	0.94064403
Количество итераций N		71	6	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова

x_1	0	0.28074788	0.99999800	0.89334625
x_2	0	0.08323957	0.99999600	0.76615091
x_3	0	0.12006061	0.99999800	0.85484660
x_4	0	0.02595974	0.99999600	0.76265214
Количество итераций N		158	4	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.16154819	0.99999800	3.24045049
x_2	10	0.00943208	0.99999600	10.50051962
x_3	-10	0.81202328	0.99999800	-0.29548899
x_4	-10	0.66251717	0.99999600	0.05456292
Количество итераций N		136	9	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.75946937	0.99999800	0.98738396
x_2	-1	0.57187343	0.99999600	0.97487612
x_3	0	1.02387819	0.99999800	0.98738396
x_4	-1	1.05352404	0.99999600	0.97487612
Количество итераций N		936	6	100000

Размерность $n = 10$:

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS: $N = 1205$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 104$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 28783$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 342$
2. Hessian Free: $N = 7$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 40$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 20$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 4$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 187$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 578$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1044$
2. Hessian Free: $N = 7$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 34$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 100$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 156$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 557$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 515$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 154$
2. Hessian Free: $N = 8$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 333$
2. Hessian Free: $N = 6$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

XX. Негладкая функция (функция Розенборка 2)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (10|x_i^2 - x_{i+1}| + |x_i - 1|)$$

Глобальный минимум: $x = [1, 1, 1, \dots, 1]^T$

Размерность $n = 2$:

Начальное приближение 1:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	-1.00000000	inf	-1.00000000
x_2	1	1.00000000	nan	1.00000000
Количество итераций N		1	4	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	1.00303282	Inf	0.01747504
x_2	-1	1.00614391	-inf	0.00029917
Количество итераций N		50	2	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.36669666	Inf	0.01976851
x_2	0	0.13449964	inf	0.00039049
Количество итераций N		14	2	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное прибр. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	0.02919115	Nan	0.77680272
x_2	-10	0.01792452	-inf	-2.31795579

Количество итераций N		3	1	100000
-------------------------	--	---	---	--------

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.76161176	nan	0.13017862
x_2	-1	0.58001434	-Inf	0.01693957
Количество итераций N		34	2	100000

Размерность $n = 4$:

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	-1.00000000	inf	-1.00000000
x_2	1	1.00000000	inf	1.00000000
x_3	1	1.00000000	-inf	1.00000000
x_4	1	1.00000000	inf	1.00000000
Количество итераций N		1	2	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-1	0.57361021	-inf	0.01747504
x_2	-1	0.32852898	nan	0.00029917
x_3	-1	0.62589899	inf	0.01747504
x_4	-1	0.39185250	nan	0.00029917
Количество итераций N		40	2	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл.	Полученное приближенное значение
--	------------------	----------------------------------

	$x_{\text{нач}}$	BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.32415702	-inf	0.02032840
x_2	0	0.10508732	nan	0.00041293
x_3	0	0.45456754	-inf	0.02032840
x_4	0	0.20671495	nan	0.00041293
Количество итераций N		33	3	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.29292167	inf	3.27514196
x_2	10	0.15439793	inf	10.72663520
x_3	-10	0.72922976	-inf	-1.05933281
x_4	-10	0.42221828	inf	-7.73425824
Количество итераций N		6	35	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0	0.67204259	inf	0.13017862
x_2	-1	0.45207898	inf	0.01693957
x_3	0	0.60931676	-inf	0.13017862
x_4	-1	0.37130046	inf	0.01693957
Количество итераций N		43	20	100000

Размерность $n = 10$:

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 15$
2. Hessian Free: $N = 27$

3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 65$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 13$
2. Hessian Free: $N = 4$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 66$
2. Hessian Free: $N = 5$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 20$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 18$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 11$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 6$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 105$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 100$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 1$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 37$
2. Hessian Free: $N = 1$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 29$
2. Hessian Free: $N = 1$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 5$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 14$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

XXI. Гладкая функция (функция Растригина)

$$f(x) = 10n + \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i))$$

Глобальный минимум: $x = 0$, на $x_i \in [-5.12, 5.12]$, множество локальных минимумов.

Размерность $n = 2$:

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
x_2	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
Количество итераций N		7	3	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
x_2	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
Количество итераций N		9	3	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
x_2	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
Количество итераций N		8	3	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
x_2	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
Количество		9	3	100000

итераций N				
--------------	--	--	--	--

Начальное приближение 5:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
x_2	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
Количество итераций N		11	3	100000

Размерность $n = 4$:

Начальное приближение 1:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
x_2	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
x_3	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
x_4	5	10.00000000	4.99746686	5.16364140
Количество итераций N		9	3	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
x_2	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
x_3	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
x_4	1	10.00000000	0.99746686	-2.28670061
Количество итераций N		12	3	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное прибрл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова

x_1	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
x_2	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
x_3	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
x_4	2	10.00000000	1.99746686	2.21446002
Количество итераций N		9	3	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
x_2	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
x_3	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
x_4	-3	10.00000000	-3.00253314	-3.68984863
Количество итераций N		8	3	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
x_2	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
x_3	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
x_4	0.5	-0.25404367	0.50253314	6.87048310
Количество итераций N		839	3	100000

Размерность $n = 10$:

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS: $N = 10$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 13$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 10$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 13$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 18$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 20$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 8$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 8$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 7$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 11$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 25$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 100$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 15$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 15$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 15$
2. Hessian Free: $N = 100000$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 15$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 11$
2. Hessian Free: $N = 3$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

XXII. Гладкая функция (сферическая)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Глобальный минимум: $x = 0$

Размерность $n = 2$:

Начальное приближение 1:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
x_2	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
Количество итераций N		1	2	1000000

Начальное приближение 2:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
x_2	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций N		1	2	1000000

Начальное приближение 3:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
x_2	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций N		1	2	1000000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	1	0.00000000	-0.00000000	0.00001000
x_2	-2	0.00000000	0.00000000	-0.00002000
Количество итераций N		1	2	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
x_2	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
Количество итераций N		1	2	100000

Размерность $n = 4$:

Начальное приближение 1:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999
x_2	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999
x_3	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
x_4	10	-0.00000000	0.00000000	0.00009999
Количество итераций N		1	2	100000

Начальное приближение 2:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	-10	0.00000000	0.00000000	-0.00009999
x_2	-10	0.00000000	0.00000000	-0.00009999
x_3	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
x_4	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций N		1	2	100000

Начальное приближение 3:

	Начальное приibl. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999

x_2	10	-0.00000000	-0.00000000	0.00009999
x_3	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
x_4	-10	0.00000000	-0.00000000	-0.00009999
Количество итераций N		1	2	100000

Начальное приближение 4:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	1	-0.00000000	0.00000000	0.00001000
x_2	2	0.00000000	-0.00000000	0.00002000
x_3	-3	-0.00000000	0.00000000	-0.00003000
x_4	-4	0.00000000	0.00000000	-0.00004000
Количество итераций N		2	2	100000

Начальное приближение 5:

	Начальное пригл. $x_{\text{нач}}$	Полученное приближенное значение		
		BFGS	Hessian Free	Метод Нестерова
x_1	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
x_2	0	0.00000000	0.00000000	-0.00000000
x_3	0	0.00000000	0.00000000	-0.00000000
x_4	1000	-0.00000000	0.00000000	0.00999934
Количество итераций N		1	2	100000

Размерность $n = 10$:

Начальное приближение 1: Количество итераций:

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 2$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 20$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 2$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 2$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 2$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 2$
2. Hessian Free: $N = 2$

3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Размерность $n = 100$:

Начальное приближение 1: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 2: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 3: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 4: Количество итераций

1. BFGS: $N = 2$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Начальное приближение 5: Количество итераций

1. BFGS: $N = 1$
2. Hessian Free: $N = 2$
3. Метод Нестерова: $N = 100000$

Источники:

1. http://www.optimization-online.org/DB_FILE/2011/02/2923.pdf
2. https://en.wikipedia.org/wiki/Test_functions_for_optimization
3. <http://www.geatbx.com/docu/fcnindex-01.html>
4. http://infinity77.net/global_optimization/test_functions.html