Статистика, байесовский вывод, линейные и «деревянные» модели

Лабораторная работа №1

Срок сдачи: 21 ноября 2025

Преподаватели: Бойцев Антон, Волчек Дмитрий

Ластовецкий Дмитрий

Задача 1

Определить (с обоснованием), зависимы или независимы следующие события:

(a) Несовместные события;

(b) События, образующие σ-алгебру Σ в пространстве (Ω, Σ, P);

(c) События, имеющие одинаковую вероятность.

Решение:

(a) Без ограничения общности возьмем два события и обозначим их за A, B. Так как события независимы, то по определению $A \cap B = \emptyset$, следовательно $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. По определению события независимы, если $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Далее,

- если $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$, то требуемое равенство выполняется и **события независимы**
- если же одновременно $P(A) > 0$ и $P(B) > 0$, то $P(A) \cdot P(B) > 0 = P(A \cap B)$ **и события не независимы**

Аналогично обобщается для большего количества событий. Если вероятность хотя бы одного из событий равна 0, то требуемое равенство выполняется и события в совокупности независимы (что влечет попарную независимость). Если же вероятность всех событий положительна, то события в совокупности не независимы.

(b) Снова возьмем события A, B. Если на них образована сигма-алгебра, то независимо от взаимного положения A, B (вложенности, отсутствия пересечений) все область Ω разбивается на

$$E_1 = A \cap B, E_2 = A^c \cap B, E_3 = A \cap B^c, E_4 = A^c \cap B^c$$

и каждое из событий E_1, E_2, E_3, E_4 входит в сигма-алгебру как комбинация дополнений и объединений изначальных событий. Теперь заметим, что если A, B независимы, то

$$P(E_1) = P(A \cap B)\text{=}P(A) \cdot P(B)$$

при этом

$$P(A) = P(E_1 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_3)$$

так как $E_1 \cap E_3 = \emptyset$. аналогично

$$P(B) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

и

$$P(A) \cdot P(B) = (P(E_1) + P(E_3)) \cdot (P(E_1) + P(E_2)) = P^2(E_1) + P(E_1)P(E_2) + P(E_1)P(E_3) + P(E_2)P(E_3)$$

для краткости обозначим $P(E_i) = p_i$. тогда события независимы если

$$p_1 = p_1^2 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3$$

$$p_1^2 + p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3 - p_1 = 0$$

$$p_1(p_1 + p_2 + p_3 - 1) + p_2p_3 = 0$$

$$p_1p_4 = p_2p_3$$

$$P(A \cap B) \cdot P(A^c \cap B^c) = P(A^c \cap B) \cdot P(A \cap B^c)$$

То есть события A, B **независимы если** $P(A \cap B) \cdot P(A^c \cap B^c) = P(A^c \cap B) \cdot P(A \cap B^c)$**, иначе не независимы**.

(c) Боюсь, в данном случае не получится сделать вывод о зависимости или независимости двух событий. Обозначим $A, B, P(A) = P(B) = p$. События независимы если $P(A \cap B) = p^2$. Мы можем подобрать соответствующие примеры:

- отсутствия независимости двух событий. Возьмем один бросок стандартного шестигранного кубика и рассмотрим события

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{1, 4, 5\}$$

Тогда

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}; P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

- независимости двух событий. Возьмем два подряд бросания честной монетки и обозначим за A выпадение орла в первом броске и за B выпадение орла во втором броске. Тогда вероятности событий равны, и при этом $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4}$

Задача 2

Опыт заключается в независимом подбрасывании двух симметричных монет. Рассматриваются следующие события:

- A – появление герба на первой монете;
- B – появление решки на первой монете;
- C – появление герба на второй монете;
- D – появление решки на второй монете;
- E – появление хотя бы одного герба;
- F – появление хотя бы одной решки;
- G – появление одного герба и одной решки;
- H – непоявление ни одного герба;
- K – появление двух гербов.

Определить, каким событиям этого списка равносильны следующие события:

(a) $A + C$

(b) AC

(c) EF

(d) $G + E$

(e) GE

(f) BD

(g) $E + K$

Решение:

Рассмотрим пространство элементарных исходов

$$\Omega = \{\text{ОО}, \text{ОР}, \text{РО}, \text{РР}\}$$

Тогда события из условия можно записать так:

$$\begin{aligned}
A &= \{\text{ОО}, \text{ОР}\}, && \text{(орёл на первой монете)}\\
B &= \{\text{РО}, \text{РР}\}, && \text{(решка на первой монете)}\\
C &= \{\text{ОО}, \text{РО}\}, && \text{(орёл на второй монете)}\\
D &= \{\text{ОР}, \text{РР}\}, && \text{(решка на второй монете)}\\
E &= \{\text{ОО}, \text{ОР}, \text{РО}\}, && \text{(хотя бы один орёл)}\\
F &= \{\text{ОР}, \text{РО}, \text{РР}\}, && \text{(хотя бы одна решка)}\\
G &= \{\text{ОР}, \text{РО}\}, && \text{(один орёл и одна решка)}\\
H &= \{\text{РР}\}, && \text{(нет орлов)}\\
K &= \{\text{ОО}\}. && \text{(два орла)}
\end{aligned}$$

откуда

(a)
$$A + C = A \cup C = \{\text{ОО}, \text{ОР}\} \cup \{\text{ОО}, \text{РО}\} = \{\text{ОО}, \text{ОР}, \text{РО}\} = E$$

(b)
$$AC = A \cap C = \{\text{ОО}, \text{ОР}\} \cap \{\text{ОО}, \text{РО}\} = \{\text{ОО}\} = K$$

(c)
$$EF = E \cap F = \{\text{ОО}, \text{ОР}, \text{РО}\} \cap \{\text{ОР}, \text{РО}, \text{РР}\} = \{\text{ОР}, \text{РО}\} = G$$

(d)
$$G + E = G \cup E = E \quad (\text{так как } G \subset E)$$

(e)
$$GE = G \cap E = G$$

(f)
$$BD = B \cap D = \{\text{РО}, \text{РР}\} \cap \{\text{ОР}, \text{РР}\} = \{\text{РР}\} = H$$

(g)
$$E + K = E \cup K = E \quad (\text{так как } K \subset E)$$

Задача 3

Производится выстрел по вращающейся мишени, в которой закрашены два непересекающихся сектора по 20° каждый. Найти вероятность попадания в закрашенную область.

Решение:

Так как секторы не пересекаются, то закрашенный угол равен 40°. Площадь сектора линейно зависит от угла, следовательно, закрашена $\frac{1}{9}$ площади мишени. Так как вероятность попадания распределена равномерно по площади мишени, **она равна** $\frac{1}{9}$

Задача 4

Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу независимо друг от друга и равновозможно в течение суток. Определить вероятность того, что одному из них придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода – 1 час, а второго – 2 часа.

Решение:

Обозначим за t_1 время прихода первого парохода к причалу, за t_2 время прихода второго парохода к причалу. Тогда кому-то придется ждать освобождения причала, если $[t_1, t_1 + 1] \cap [t_2, t_2 + 2]$. Рассмотрим

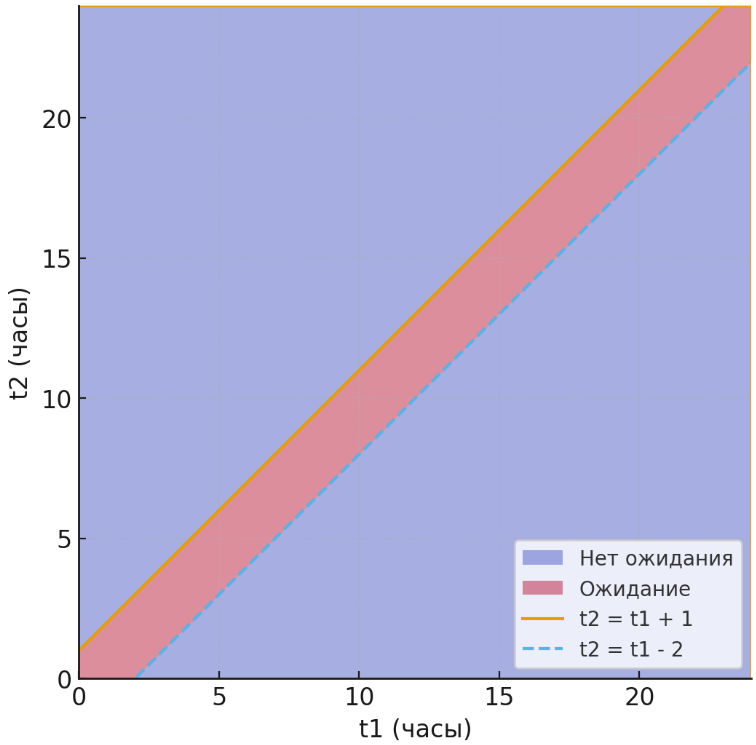

Рис. 1: Области ожидания и отсутствия ожидания причала

полное дополнение этого события (что значит, что никакой пароход не ждал причал). Его можно задать как объединение событий $t_1+1 \leq t_2$ и $t_2+2 \leq t_1$. Приведем иллюстрацию: Соответственно, никто никого не ждет с вероятностью, равной отношению соответствующей синей области к площади квадрата, то есть:

$$P((t_1+1 \leq t_2) \cup (t_2+2 \leq t_1)) = \frac{\frac{23^2}{2} + \frac{22^2}{2}}{24^2} = \frac{1013}{1152}$$

Следовательно, искомая нами вероятность ожидания равна

$$P([t_1, t_1+1] \cap [t_2, t_2+2]) = 1 - \frac{1013}{1152} = \frac{139}{1152} \approx 0.1206597$$

Задача 5

Самолет, по которому ведется стрельба, состоит из трех различных по уязвимости частей:

(a) Кабина летчика и двигатель

(b) Топливные баки

(c) Планер

Для поражения самолета достаточно либо одного попадания в первую часть, либо двух попаданий во вторую, либо трех в третью. При попадании в самолет одного снаряда, снаряд с вероятностью p_1 попадает в первую часть, с вероятностью p_2 — во вторую, с вероятностью p_3 – в третью. Попавшие снаряды распределяются по частям независимо друг от друга. Известно, что в самолет попало m снарядов. Найти условную вероятность $P(A|m)$ события A – ”Самолет поражен” – при $m = 1, 2, 3, 4$

Решение:

1. При $m = 1$ самолёт поражён тогда и только тогда, когда выстрел пришёлся в первую часть. Следовательно,

$$P(A \mid m = 1) = p_1.$$

2. При $m = 2$ самолёт поражён тогда и только тогда, когда либо хотя бы один выстрел пришёлся в первую часть (A_1), либо оба выстрела попали во вторую часть (A_2).

   Вероятность первого события найдём через дополнение:

   $$P(A_1) = 1 - P(A_1^c) = 1 - (1 - p_1)^2.$$

   Вероятность второго:

   $$P(A_2) = p_2^2.$$

   при этом

   $$A_1 \cap A_2 = \emptyset.$$

   Тогда

   $$P(A \mid m = 2) = P(A_1) + P(A_2) = 1 - (1 - p_1)^2 + p_2^2.$$

3. При $m = 3$ удобнее сразу смотреть на дополнение. Самолёт *не* поражён, если одновременно:

   - нет ни одного попадания в первую часть ($N_1 = 0$);
   - во вторую попало строго меньше двух попаданий ($N_2 \leq 1$);
   - в третью попало строго меньше трёх попаданий ($N_3 \leq 2$),

   где N_i — число попаданий в i-ю часть и $N_1 + N_2 + N_3 = 3$.

   Из всех троек (N_1, N_2, N_3) с суммой 3 этим условиям удовлетворяет только

   $$(N_1, N_2, N_3) = (0, 1, 2),$$

   то есть самолёт не поражён только в случае когда один снаряд попал во вторую часть и два — в третью.

   Тогда

   $$P(A^c \mid m = 3) = P(N_1 = 0, N_2 = 1, N_3 = 2) = \frac{3!}{0!\,1!\,2!}\, p_1^0 p_2^1 p_3^2 = 3p_2p_3^2,$$

   следовательно

   $$P(A \mid m = 3) = 1 - P(A^c \mid m = 3) = 1 - 3p_2p_3^2.$$

4. При $m = 4$ снова смотрим на дополнение. Чтобы самолёт не был поражён, нужно одновременно:

   $$N_1 = 0, \quad N_2 \leq 1, \quad N_3 \leq 2, \quad N_1 + N_2 + N_3 = 4.$$

   Но при $N_2 \leq 1$ и $N_3 \leq 2$ максимум возможная сумма $N_2 + N_3$ равна $1 + 2 = 3 < 4$, то есть таких конфигураций просто не существует. Значит

   $$P(A^c \mid m = 4) = 0, \qquad P(A \mid m = 4) = 1.$$

Задача 6

Проверить, является ли

$$f_\xi(x, y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1 + x^2)}$$

плотностью распределения случайного вектора.

Решение:

Функция являетcz плотностью распределения случайного вектора, если она не отрицательна по x, y и если ее интеграл на $\mathbb{R}^2$ равен 1. Первое очевидно по форме функции. Найдем интеграл

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_\xi(x, y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi\big(1 + x^2\big)}\, dx\, dy. = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi\big(1 + x^2\big)} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y|} dy$$

Сразу заметим что левый интеграл это интеграл функции плотности стандартного распределения Коши, следовательно, он равен 1. Возьмем второй интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y|}dy = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2|y|}dy = 2\int_{0}^{\infty} e^{-2y}dy = 2\frac{e^{-2y}}{-2}|_0^\infty = -e^{-2y}|_0^\infty = 1$$

Значит, исходный интеграл равен 1. Следовательно, эта функция является плотностью распределения случайного вектора.

Задача 7

Совместное распределение случайных величин ξ и η задано следующей таблицей:

$\xi\backslash\eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

(a) Найти маргинальные распределения ξ и η.

(b) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (ξ, η).

(c) Исследовать ξ и η на независимость и некоррелированность.

Решение:

(a) для ξ:

ξ	
-1	0.5
1	0.5

для η:

η	-1	0	1
	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$

(b) $\mathbb{E}(\xi, \eta) = (\mathbb{E}\xi, \mathbb{E}\eta) = (0, -\frac{1}{6})$

Далее вычислим дисперсии. Сначала вторые моменты:

$$\mathbb{E}\xi^2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,$$

$$\mathbb{E}\eta^2 = (-1)^2 \cdot \frac{11}{24} + 0^2 \cdot \frac{1}{4} + 1^2 \cdot \frac{7}{24} = \frac{11}{24} + \frac{7}{24} = \frac{18}{24} = \frac{3}{4}.$$

Тогда

$$\mathrm{Var}(\xi) = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 = 1 - 0^2 = 1,$$

$$\mathrm{Var}(\eta) = \mathbb{E}\eta^2 - (\mathbb{E}\eta)^2 = \frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{36} = \frac{27-1}{36} = \frac{13}{18}.$$

Теперь найдём смешанный момент $\mathbb{E}(\xi\eta)$:

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = (-1)(-1) \cdot \frac{1}{8} + (-1) \cdot 0 \cdot \frac{1}{12} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{7}{24} + 1 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 1 \cdot 0$$
$$= \frac{1}{8} - \frac{7}{24} - \frac{1}{3} = \frac{3}{24} - \frac{7}{24} - \frac{8}{24} = -\frac{12}{24} = -\frac{1}{2}$$

Отсюда ковариация:

$$\mathrm{Cov}(\xi, \eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) - \mathbb{E}\xi\,\mathbb{E}\eta = -\frac{1}{2} - 0 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

Ковариационная матрица вектора (ξ, η):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(\xi) & \mathrm{Cov}(\xi,\eta) \\ \mathrm{Cov}(\xi,\eta) & \mathrm{Var}(\eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$$

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{\xi,\eta} = \frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)\,\mathrm{Var}(\eta)}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 \cdot \frac{13}{18}}} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{18}{13}} = -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}}$$

Тогда корреляционная матрица:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{\xi,\eta} \\ \rho_{\xi,\eta} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{13}} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) **Независимость.** Если бы ξ и η были независимы, должно выполняться

$$P(\xi = x, \eta = y) = P(\xi = x)\,P(\eta = y) \quad \text{для всех } x, y.$$

Проверим хотя бы одну пару, например $(\xi, \eta) = (-1, -1)$:

$$P(\xi = -1, \eta = -1) = \frac{1}{8},$$

$$P(\xi = -1)P(\eta = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{48}.$$

Так как

$$\frac{1}{8} = \frac{6}{48} \neq \frac{11}{48},$$

то условие независимости не выполняется. Следовательно, ξ и η **не независимы**.

Некоррелированность. Случайные величины некоррелированы, если

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = 0.$$

но

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

значит, ξ и η **коррелированы**

Задача 8

Пусть имеются два одинаковых тетраэдра с числами $1, 2, 3, 4$ на гранях. Подкидываем оба и смотрим на выпавшие числа ξ_1 и ξ_2. Зададим следующие случайные величины:

$$\varphi_1 = \xi_1 + \xi_2, \qquad \varphi_2 = \begin{cases} 1, & (\xi_1 \,\vdots\, \xi_2) \cup (\xi_2 \,\vdots\, \xi_1), \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases}$$

(a) Составить таблицу совместного распределения φ_1 и φ_2.

(b) Найти маргинальные распределения φ_1 и φ_2.

(c) Вычислить математическое ожидание, ковариационную и корреляционную матрицы вектора (φ_1, φ_2).

(d) Исследовать φ_1 и φ_2 на независимость и некоррелированность.

Решение:

Всего исходов (ξ_1, ξ_2) 16, все равновозможны с вероятностью $1/16$.

(a) Выпишем значения (φ_1, φ_2):

$\xi_1 \backslash \xi_2$	1	2	3	4
1	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,1)$
2	$(3,1)$	$(4,1)$	$(5,0)$	$(6,1)$
3	$(4,1)$	$(5,0)$	$(6,1)$	$(7,0)$
4	$(5,1)$	$(6,1)$	$(7,0)$	$(8,1)$

По этим данным получаем совместное распределение (φ_1, φ_2):

$\varphi_1 \backslash \varphi_2$	0	1
2	0	$\frac{1}{16}$
3	0	$\frac{1}{8}$
4	0	$\frac{3}{16}$
5	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
6	0	$\frac{3}{16}$
7	$\frac{1}{8}$	0
8	0	$\frac{1}{16}$

(b) Маргинальные распределения:

$$P(\varphi_1 = 2) = \frac{1}{16}, \quad P(\varphi_1 = 3) = \frac{1}{8}, \quad P(\varphi_1 = 4) = \frac{3}{16}, \quad P(\varphi_1 = 5) = \frac{1}{4},$$
$$P(\varphi_1 = 6) = \frac{3}{16}, \quad P(\varphi_1 = 7) = \frac{1}{8}, \quad P(\varphi_1 = 8) = \frac{1}{16}.$$

Для φ_2:

$$P(\varphi_2 = 1) = \frac{3}{4}, \qquad P(\varphi_2 = 0) = \frac{1}{4}.$$

(c) Вычислим математические ожидания и дисперсии.

$$\mathbb{E}\varphi_1 = \sum_{k=2}^{8} k\, P(\varphi_1 = k) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{1}{4} + 6 \cdot \frac{3}{16} + 7 \cdot \frac{1}{8} + 8 \cdot \frac{1}{16} = 5.$$

$$\mathbb{E}\varphi_1^2 = \sum_{k=2}^{8} k^2\, P(\varphi_1 = k) = \frac{55}{2}, \qquad \text{Var}(\varphi_1) = \mathbb{E}\varphi_1^2 - (\mathbb{E}\varphi_1)^2 = \frac{55}{2} - 25 = \frac{5}{2}.$$

Для φ_2:

$$\mathbb{E}\varphi_2 = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{E}\varphi_2^2 = \frac{3}{4}, \quad \text{Var}(\varphi_2) = \mathbb{E}\varphi_2^2 - (\mathbb{E}\varphi_2)^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Теперь найдём $\mathbb{E}(\varphi_1\varphi_2)$:

$$\mathbb{E}(\varphi_1\varphi_2) = \sum_k \sum_b kb\, P(\varphi_1 = k, \varphi_2 = b) = \sum_k k \cdot 1 \cdot P(\varphi_1 = k, \varphi_2 = 1) = 2 \cdot \frac{1}{16} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot \frac{3}{16} + 5 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{3}{16} + 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{7}{2}.$$

Ковариация:

$$\text{Cov}(\varphi_1, \varphi_2) = \mathbb{E}(\varphi_1\varphi_2) - \mathbb{E}\varphi_1\, \mathbb{E}\varphi_2 = \frac{7}{2} - 5 \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{2} - \frac{15}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Ковариационная матрица вектора (φ_1, φ_2):

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \text{Var}(\varphi_1) & \text{Cov}(\varphi_1, \varphi_2) \\ \text{Cov}(\varphi_1, \varphi_2) & \text{Var}(\varphi_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}.$$

Коэффициент корреляции:

$$\rho_{\varphi_1,\varphi_2} = \frac{\text{Cov}(\varphi_1, \varphi_2)}{\sqrt{\text{Var}(\varphi_1)\text{Var}(\varphi_2)}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{16}}} = -\sqrt{\frac{2}{15}}.$$

Тогда корреляционная матрица:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{\dfrac{2}{15}} \\ -\sqrt{\dfrac{2}{15}} & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) **Независимость.** Если бы φ_1 и φ_2 были независимы, то

$$P(\varphi_1 = k, \varphi_2 = b) = P(\varphi_1 = k)\, P(\varphi_2 = b) \quad \text{для всех } k, b.$$

Проверим, например, при $k = 7$, $b = 1$:

$$P(\varphi_1 = 7, \varphi_2 = 1) = 0,$$

в то время как

$$P(\varphi_1 = 7)\, P(\varphi_2 = 1) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32} > 0.$$

φ_1 и φ_2 **не независимы**

Некоррелированность. Поскольку

$$\text{Cov}(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{1}{4} \neq 0,$$

случайные величины φ_1 и φ_2 **коррелированы**

Задача 9

Найти плотность распределения суммы двух независимых случайных величин ξ и η, если $\xi \sim \text{Exp}_2$ и $\eta \sim U_{0,1}$.

Решение:

Плотности исходных величин:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad f_\eta(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Рассматриваем сумму $Z = \xi + \eta$. Так как величины независимы, используем свёртку:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(z - y) f_\eta(y)\, dy.$$

Одновременно должны выполняться условия $0 \leq y \leq 1$ и $z - y \geq 0$, так что интегрирование идёт по $y \in [0, \min\{1, z\}]$. Тогда рассмотрим по случаям :

$z < 0$ Область пуста, плотность равна нулю:

$$f_Z(z) = 0.$$

$0 \le z \le 1$ Тогда интегрируем от 0 до z:

$$f_Z(z) = \int_0^z 2e^{-2(z-y)}\,dy = 1 - e^{-2z}.$$

$z \ge 1$ Тогда ограничение даёт интеграл от 0 до 1:

$$f_Z(z) = \int_0^1 2e^{-2(z-y)}\,dy = (e^2 - 1)e^{-2z}.$$

Итого

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-2z}, & 0 \le z \le 1, \\ (e^2 - 1)e^{-2z}, & z \ge 1. \end{cases}$$