

Câu 1. Có 3 người bạn (Anh, Bình, và Vân) lấy sách của Thầy. Khi Thầy hỏi, lần lượt trả lời như sau: **Anh:** $A = \text{"Bạn Bình lấy, không phải bạn Vân lấy"}$; **Bình:** $B = \text{"Bạn Vân lấy, bạn Anh không lấy"}$; **Vân:** $C = \text{"Bạn Bình không lấy"}$.

Biết rằng trong 3 em thì có 2 em nói đúng, còn 1 em nói sai.

Gọi mệnh đề $P = \text{"Bạn Anh lấy sách"}$; $Q = \text{"Bạn Bình lấy sách"}$; $R = \text{"Bạn Vân lấy sách"}$.

A. Phát biểu mệnh đề phủ định của P, Q, R ?

(1.0 điểm)

$\neg P = \text{"Bạn Anh không lấy sách"}$; $\neg Q = \text{"Bạn Bình không lấy sách"}$; $\neg R = \text{"Bạn Vân không lấy sách"}$.

B. Phát biểu 3 câu nói trên của 3 bạn ở dạng logic mệnh đề?

(1.0 điểm)

Câu nói của **Anh:** $A = Q \wedge \neg R$; Câu nói của **Bình:** $B = R \wedge \neg P$; Câu nói của **Vân:** $C = \neg Q$.

C. Dùng phương pháp logic mệnh đề, cho biết ai là người lấy sách?

(1.0 điểm)

Vì 2 trong 3 em nói đúng, nên ta có:

$$X = A \vee B = (Q \wedge \neg R) \vee (R \wedge \neg P) = \text{TRUE}$$

$$Y = A \vee C = (Q \wedge \neg R) \vee (\neg Q) = (\neg R \vee \neg Q) = \text{TRUE}$$

$$Z = B \vee C = (R \wedge \neg P) \vee (\neg Q) = (R \vee \neg Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) = \text{TRUE}$$

$$\Rightarrow (R \vee \neg Q) = \text{TRUE} \text{ và } (\neg P \vee \neg Q) = \text{TRUE}$$

Ta có: $(\neg R \vee \neg Q) = \text{TRUE}$ và $(R \vee \neg Q) = \text{TRUE}$, nên suy ra $\neg Q = \text{TRUE}$, nghĩa là "Bạn Bình không lấy".

Suy ra, bạn Vân nói đúng và bạn Anh nói sai. Vậy còn lại bạn Bình cũng nói đúng (2 người nói đúng, 1 người nói sai), nghĩa là "Bạn Vân lấy, bạn Anh không lấy".

Kết luận: Bạn Vân là người lấy sách.

Câu 2. Dùng phương pháp chứng minh quy nạp, chứng minh rằng: $A(n) = 7^n + 3n - 1$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n .

(1.0 điểm)

Bước 1: Bước Quy nạp. Với $n = 0$, ta có $A(0) = 0$ chia hết cho 9 \rightarrow đúng. Sang bước 2.

Bước 2: Bước Quy nạp:

Giả sử $A(k) = 7^k + 3k - 1$ chia hết cho 9 với mọi k là số tự nhiên.

Ta cần chứng minh $A(k+1) = 7^{k+1} + 3(k+1) - 1$ cũng chia hết cho 9.

Thật vậy, ta có:

$$A(k+1) = 7^{k+1} + 3(k+1) - 1 = 7 \cdot 7^k + 3 \cdot k + 3 - 1 = 7 \cdot 7^k + 21 \cdot k - 7 - 18k + 9$$

$$= 7(7^k + 3 \cdot k - 1) - 18k + 9 = 7 \cdot A(k) - 9(2 \cdot k - 1) \quad (*)$$

Theo giả thuyết quy nạp thì $A(k)$ chia hết cho 9. Do đó từ (*) ta suy ra $A(k+1)$ cũng chia hết cho 9.

Vậy $A(n)$ chia hết cho 9 với mọi số tự nhiên n .

Câu 3. Một bài thi trắc nghiệm có 50 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời. Hỏi 1 sinh viên có bao nhiêu cách chọn phương án trả lời tất cả các câu hỏi (có thể để trống)? **(1.0 điểm)**

Có 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời và 1 cách không chọn (để trống), nên sinh viên trên có 5 cách chọn cho mỗi câu hỏi. Suy ra có tất cả 5^{50} cách chọn phương án cho tất cả các câu.

Câu 4. Có bao nhiêu cách chia 25 cái kẹo cho 5 em sao cho:

A. Em nào cũng có kẹo?

(1.0 điểm)

Gọi x_i là số kẹo của em thứ i ($1 \leq i \leq 5$, $x_i \geq 1$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 25$).

Đặt $y_i = x_i - 1$, đưa phương trình về dạng $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20$. Số cách chia là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 20$ ($y_i \geq 0$), và bằng $K_5^{20} = C_{24}^{20} = \frac{24!}{4!20!} = 10626$ cách.

B. Số kẹo của mỗi em là một số lẻ?

(1.0 điểm)

Đặt $x_i = 2y_i + 1$, đưa phương trình về dạng $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 10$. Số cách chia là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ ($x_i \geq 0$), và bằng $K_5^{10} = C_{14}^{10} = \frac{14!}{4!10!} = 1001$ cách.

Câu 5. Ma trận trọng số của đồ thị trên?

(1.0 điểm)

	a	b	c	d	e	f	g	z
a	∞	2	4	∞	∞	∞	∞	∞
b	2	∞	1	6	5	∞	∞	∞
c	4	1	∞	∞	3	∞	∞	∞
d	∞	6	∞	∞	∞	1	3	∞
e	∞	5	3	∞	∞	2	2	∞
f	∞	∞	∞	1	2	∞	∞	2
g	∞	∞	∞	3	2	∞	∞	5
z	∞	∞	∞	∞	∞	2	5	∞

Câu 6. Các đỉnh (theo thứ tự abc) khi duyệt đồ thị trên theo chiều sâu?

(1.0 điểm)

$a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow z$.

Câu 7. Đồ thị trên có là đồ thị Euler hay nửa Euler không? Tại sao?

(1.0 điểm)

Không là đồ thị Euler, cũng không là nửa Euler. Vì số đỉnh các bậc lẻ là 4 (c, d, f, g).

----- Hết -----