Matemáticas para Ingeniería 2 FCE BUAP

Introducción

Dr. Daniel Mocencahua.
daniel.mocencahua@correo.buap.mx

Enero, 2019

Contenido

Ecuación Cuadrática

Ecuación cuadrática

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Las ecuaciones cuadráticas se conocen desde la antigüedad. Los babilonios la resolvieron en casos muy particulares y Diofanto pudo resolverla de modo mas o menos general.

Fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La fórmula general para resolver la ecuación de segundo grado fue desarrollada por el matemático Al-Kwarizmi, en el siglo IX en su trabajo Compendio de cálculo por reintegración y comparación.

Ecuación de tercer grado

Ecuación cúbica

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Estas ecuaciones también son conocidas desde la antigüedad, siendo el problema de la duplicación del cubo una de sus aplicaciones mas famosas: En el año 429 a. C., Pericles, gobernador de Atenas, muere víctima de la tifoidea que plagaba la ciudad. A raíz de este suceso algunos de los habitantes deciden ir a la ciudad de Delfos para hacer consultas al Oráculo de Apolo y saber cómo pueden detener la epidemia. La respuesta es que debían elaborar un nuevo altar en forma de cubo cuyo volumen duplique el del altar que ya existe. Lo intentaron, pero no lograron evitar el desastre por este medio.

Dada la ecuación cúbica

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$$

Se calculan

$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}$$

$$R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54}$$

$$S_1 = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

$$S_1 = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

Las tres raíces son:

$$\begin{cases} x_1 = S_1 + S_2 - \frac{a_1}{3} \\ x_2 = -\frac{S_1+S_2}{2} - \frac{a_1}{3} + \frac{i\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) \\ x_3 = -\frac{S_1+S_2}{2} - \frac{a_1}{3} - \frac{i\sqrt{3}}{2}(S_1 - S_2) \end{cases}$$

Este método es conocido como **método de Cardano**, y apareció por primera vez en el libro Ars Magna en 1545 publicado por el matemático italiano Gerolamo Cardano. Se sabe que en realidad fue desarrollado originalmente por Scipione del Ferro y Niccolo Fontana, Tartaglia.

Polinomios

Una la ecuación tiene una solución analítica, si sus raíces se pueden expresar a través de los valores (coeficientes) de la ecuación mediante operaciones aritméticas, la extracción de raíces, exponenciales, logaritmos, funciones trigonométricas y trigonométricas inversas.

Claramente las ecuaciones cuadráticas y cúbicas tienen soluciones analíticas.

Teorema fundamental del álgebra (TFA)

Todo polinomio en una variable de grado n 1 con coeficientes reales o complejos tiene por lo menos una raíz (real o compleja).

Esto se traduce en que, para un polinomio de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

existen $b_0, b_1, \ldots, b_n$ raíces de P, algunas complejas, tales que

$$P(x) = a_n \prod_{k=0}^{n} (x - b_i)$$

Evariste Galois mostró en 1834 que, para las ecuaciones de grado mayor que el quinto, es imposible expresar la solución utilizando sólo las operaciones de la aritmética y la extracción de raíces. Es decir, no hay soluciones analíticas, y por lo tanto no hay fórmulas generales.

Métodos numéricos

Para la mayoría de los propósitos es suficiente encontrar soluciones en forma de un número, y no forzozamente con una fórmula. Es decir, en lugar de soluciones analíticas (soluciones en forma de una fórmula) es suficiente tener solución numérica del problema. Por ejemplo, el valor de π: en la biblia le daban el valor de 3. Los egipcios, en el 1800 AC, lo aproximaban con $\frac{256}{81} = 3.16049...$. En siglo II, Claudio Tolomeo dio la a3.1416 La historia de la búsqueda de decimales de π a llegado hasta nuestros días con resultados tan sorprendentes como los de Nicolás Atanes que, usando GeoGebra calculó 17 000 000 000 000 decimales en 2018. O del de Emma Haruka Iwao que usó Google Cloud cruncher en 2019 para obtener 31 000 000 000 000 decimales. ¿Cómo se logra esto?

Es conocido el teorema siguiente:

Expansión por serie de Taylor

Si f se puede representar como una serie de potencias en a, entonces esta serie tiene la forma

$$fx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n$$

con $|x-a| < R$.

Donde R es el radio de convergencia de la serie.

Además sabemos que si

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

donde

$$T_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n$$

es el polinomio n-ésimo de Taylor y $R_n(x)$ es el residuo de la serie de Taylor entonces:

Desigualdad de Taylor

Si $|f^{(n)}(x)| \leq M$ para $|x-a| \leq d$ entonces el residuo $R_n(x)$ cumple con la desigualdad

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

para $|x-a| \leq d$

De lo anterior se obtienen expresiones como la de el valor de e:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

O la serie de Leibnitz para π:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

La pregunta ahora es **¿Cómo calculo una de esas sumas?** La respuesta es **por métodos numéricos**, que es de lo que trata la primera parte del curso.

El análisis numérico es la rama de las matemáticas encargada de diseñar algoritmos para simular aproximaciones de solución a problemas en análisis matemático. Se distingue del cómputo simbólico en que no manipula expresiones algebraicas, sino números.

Desde este punto de vista, el análisis numérico proporcionará todo el andamiaje necesario para llevar a cabo todos aquellos procedimientos matemáticos susceptibles de expresarse algorítmicamente, basándose en algoritmos que permitan su simulación o cálculo en procesos más sencillos empleando números.