Victor Vieira de Melo 201905S028

1) $S_1 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ usando teste 4

$\det([5]) = 5 > 0$

$\det\left(\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}\right) = 35 - 36 = -1 < 0$, então um dos autovalores é menor que zero.

$S_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$ usando teste 4

$\det([-1]) = -1 < 0$, então um dos autovalores é menor que 0.

$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{pmatrix}$ usando o teste 4

$\det([1]) = 1 > 0$

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix}\right) = 100 - 100 = 0$, logo a matriz $S_3$ tem ao menos um autovalor igual a 0.

$S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{pmatrix}$ Usando o teste 4

$\det([1]) = 1 > 0$

$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}\right) = 101 - 100 = 1 > 0$, a matriz $S_4$ tem dois autovalores maiores que zero.

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad [x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} < 0$ $\quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$[x_1 \ \ x_2] \begin{bmatrix} 5x_1 + 6x_2 \\ 6x_1 + 7x_2 \end{bmatrix} < 0$

$x_1(5x_1 + 6x_2) + x_2(6x_1 + 7x_2)$

$5x_1^2 + 6x_2x_1 + 6x_2x_1 + 7x_2^2$, se $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$

$20 + (-24) + (-24) + 28 = 0$

② a) teste 3 $\quad S = A^{T}A$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{bmatrix}$ $A^{T}A$, é uma matriz simétrica com colunas independentes, de acordo com o teste 3, $A^{T}A$ é definida positiva.

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

$A^{T}A$ é uma matriz simétrica com colunas independentes, de acordo com o teste 3 $A^{T}A$ é uma matriz definida positiva.

c) A matriz $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \end{array}$

$3C_1 - C_2 = C_3$ / Logo, a matriz A não é linearmente independente.

③ $S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

det $1\times1 = 2$
det $2\times2 = 6$
det $3\times3 = 2 \cdot 31 - 2 \cdot 16$
det $3\times3 = 62 - 32$
det $3\times3 = 30$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\det 2\times 2}{\det 1\times 1} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\frac{\det 3\times 3}{\det 2\times 2} = \frac{30}{6} = 5$$

④ $$[x_1 \ x_2 \ x_3]\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$[x_1 \ x_2 \ x_3]\begin{bmatrix} 4x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \end{bmatrix} =$$

$$x_1(4x_1 + x_2 + x_3) + x_2(x_1 + 2x_3) + x_3(x_1 + 2x_2 + 5x_3) =$$

$$4x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1x_3 + 2x_2x_3 + 5x_3^2 =$$

$$4x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3 + 5x_3^2 = \qquad (-1, 3, 0)$$

$$4 + (-6) + 0 + 0 + 0 = -2$$

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 3, 0)$$

⑤ Assumindo que C é determinada positiva e A é linearmente independentes,

$x^T A^T C A x > 0 \quad \forall Ax \neq 0$

$Ax$ é diferente que $0$ para todo $x \neq 0$

$y^T C y > 0$, onde $Ax = y$, sendo $y \neq 0$.

↳ Como C é definido positiva, isso é verdade.

então $A^T C A = S$.