DCC639: Álgebra Linear Computacional **(Prazo para submissão: 27/09/19 23:55)**

Lista de Exercícios 04

Professores: Erickson, Fabricio e Renato

Política da Disciplina: Leia todas as instruções abaixo cuidadosamente antes de começar a resolver a lista, e antes de fazer a submissão.

- As questões podem ser discutidas entre até três alunos (conjuntos disjuntos). Os nomes dos colegas precisam ser incluídos na submissão. Contudo, a escrita das soluções e submissão deve ser feita individualmente.
- A submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Todas as fontes de material precisam ser citadas. O código de conduta da UFMG será seguido à risca.

Problema 1: Calcule as seguintes normas da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) Norma-1

(b) Norma-infinito

(c) Norma-2 (Para este item você pode usar o numpy)

(d) Norma Frobenius

Problema 2: Considere o uso do SVD truncado de posto k para compressão de imagens em escala de cinza (0 a 255) de tamanho 1024 x 768.

(a) No caso de uma única imagem decomposta usando SVD, quantos bytes precisam ser armazenados para reconstruir a imagem? Qual o valor máximo de k para o qual a compressão vale a pena?

(b) Agora suponha que queiramos usar um único SVD para comprimir várias imagens. Para isso, iremos representar as imagens como vetores de tamanho 786432 (= 1024×768). Quantos bytes serão necessários para armazenar 10 imagens? E quanto a 1000 imagens?

Problema 3: Ache os $\sigma's$, $u's$ e $v's$ do SVD para $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$**.**

Problema 4: Ache os $\sigma's$, $u's$ e $v's$ e verifique que $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U\Sigma V^T$**. Para essa matriz, as matrizes ortogonais U e V são matrizes de permutação.**

Problema 5: Mostre que os valores singulares de AA^TA são $(\sigma_1)^3$ a $(\sigma_r)^3$.

Problema 6: **Ache a aproximação de posto 1 mais próxima (com relação à norma-2), de** $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$**.**

Problema 7: **Quais matrizes de posto 3 tem** $\|A - A_1\|_2 = \|A - A_2\|_2$**?** A_2 **é** $\sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$**.**

Problema 8: **Mostre que** $\|v\|_2 \leq \sqrt{n}\|v\|_\infty$ **sempre. Prove também que** $\|v\|_1 \leq \sqrt{n}\|v\|_2$**, escolhendo um vetor** w **adequado e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz.**