

Lista de Exercícios 03

Professores: Erickson, Fabricio e Renato

Política da Disciplina: Leia todas as instruções abaixo cuidadosamente antes de começar a resolver a lista, e antes de fazer a submissão.

- As questões podem ser discutidas entre até três alunos (conjuntos disjuntos). Os nomes dos colegas precisam ser incluídos na submissão. Contudo, a escrita das soluções e submissão deve ser feita individualmente.
- A submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Todas as fontes de material precisam ser citadas. O código de conduta da UFMG será seguido à risca.

Problema 1: Quais das matrizes S_1, S_2, S_3, S_4 tem dois autovalores positivos? Use um teste, não calcule os λ 's. Encontre também um vetor \mathbf{x} tal que $\mathbf{x}^T S_1 \mathbf{x} < 0$, então S_1 não é uma matriz definida positiva.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad S_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \quad S_3 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 100 \end{bmatrix} \quad S_4 = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 10 & 101 \end{bmatrix}$$

Problema 2: Faça um teste para verificar se $A^T A$ é uma matriz definida positiva em cada caso: A precisa ter colunas independentes.

$$\text{(a) } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{(b) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(c) } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Problema 3: Calcule os três determinantes superiores esquerdos de S para torná-la definida positiva. Verifique que suas proporções dão o segundo e terceiro pivôs.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Problema 4: Uma matriz definida positiva não pode ter um número zero (ou ainda pior, um número negativo) em sua diagonal principal. Mostre que essa matriz falha em ter $\mathbf{x}^T S \mathbf{x} > 0$:

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ não é positiva quando } (x_1, x_2, x_3) = (\quad , \quad , \quad)$$

Problema 5: Suponha que C é definida positiva (ou seja, $\mathbf{y}^T C \mathbf{y} > 0$ sempre que $\mathbf{y} \neq 0$), e A tem colunas independentes (ou seja, $A\mathbf{x} \neq 0$ sempre que $\mathbf{x} \neq 0$). Aplique o teste de energia para $\mathbf{x}^T A^T C A \mathbf{x}$ para mostrar que $S = A^T C A$ é definida positiva: a matriz crucial em engenharia.