

## Análisis Funcional- Evaluación 1

1. (2,5 puntos) Sea  $X$  un espacio normado. Prueba que  $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$  tiene interior vacío.
2. Dada una sucesión  $a = \{a(n)\}$  en  $l_\infty$ , se define, para cada  $x \in c_0$ , la sucesión  $T_a(x)(n) = a(n)x(n)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).
  - a) (0,5 puntos) Prueba que  $T_a(x) \in c_0$  para todo  $x \in c_0$ .
  - b) (1 punto) Prueba que  $T_a : c_0 \longrightarrow c_0$  es lineal, continua y calcula su norma.
  - c) (1 punto) Prueba que  $T_a$  alcanza su norma si, y sólo si, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|a(n)| = \|a\|_\infty$ .
  - d) (0,5 punto) Caracteriza las sucesiones  $a \in l_\infty$  para las que  $T_a$  es inyectiva.
  - e) (1 punto) Prueba que  $T_a$  es inyectiva si, y sólo si, la imagen de  $T_a$  es densa en  $c_0$ .
  - f) (1 punto) Prueba que  $T_a$  es un isomorfismo topológico sobre su imagen si, y sólo si,  $\inf\{|a(n)| : n \in \mathbb{N}\} > 0$ . En cuyo caso  $T_a$  es sobreyectivo.
3. (2,5 puntos) Sean  $X, Y$  espacios normados sobre el mismo cuerpo y  $T : X \longrightarrow Y$  una aplicación lineal tal que  $T(S_X)$  es un subconjunto acotado de  $Y$ . Prueba que  $T$  es uniformemente continua.