Extraordinario-2021.pdf

AmigoCanario

Inferencia Estadística

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Extraordinario 2021

[1 pto] Sean $(X_1,\dots,X_8)$, $(Y_1,\dots,Y_{15})$ muestras aleatorias simples independientes de poblaciones $\mathcal{N}(\mu_1,\sigma^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2,\sigma^2)$, respectivamente, y sean $\overline{X}$, $\overline{Y}$, S_1^2, S_2^2 las medias y cuasivarianzas de ambas muestras. Partiendo de las distribuciones asociadas a estos estadísticos, deducir la distribución de la siguiente variable, detallando y justificando cada paso (no es preciso hacer ninguna demostración):

$$\frac{4(\overline{X}-\mu_1)+5(\overline{Y}-\mu_2)}{\sqrt{7S_1^2+14S_2^2}}\sqrt{\frac{63}{11}}.$$

Si se consideran dos realizaciones muestrales con $\overline{x}=4,\ \overline{y}=6,\ \sum_{i=1}^{8}x_i^2=132,\ \sum_{j=1}^{15}y_j^2=545$, dar una cota superior de confianza para $4\mu_1+5\mu_2$ a nivel 0.99.

Tamaño máximo para archivos nuevos: 1GB

Archivos

Puede arrastrar y soltar archivos aquí para añadirlos

[3.25 ptos]

$a)$ Sea $(X_1,\dots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable con función de densidad:

$$f_\theta(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}(\theta+1)^{2/3}},\ \ 0<x<\theta+1.$$

$a1)$ Sabiendo que $\max X_i$ es un estadístico suficiente y completo, calcular el UMVUE para θ.

$a2)$ Calcular la función de verosimilitud y encontrar el estimador máximo verosímil de $3\theta-1$. ¿Es insesgado? (justificar la respuesta).

$b)$ Sea X una variable aleatoria continua con distribución en una familia paramétrica con funciones de densidad definidas como:

$$f_\theta(x)=\exp\{Q(\theta)T(x)+D(\theta)+S(x)\},\ x\in\chi_\theta,\ \ \theta\in\Theta,$$

siendo T y S funciones medibles.

$b1)$ Establecer las condiciones necesarias para que esta familia sea regular en el sentido de Fréchet-Cramér-Rao. Calcular $E_\theta[T(X)]$ bajo tales condiciones.

$b2)$ Bajo condiciones de regularidad, y suponiendo que $D'(\theta)=\theta^3Q'(\theta)$ (D' y Q' son las derivadas) y que $T(X)$ es regular, dar la expresión de $Var_\theta[T(X)]$ en términos de tales funciones. Calcular la función de información.

Tamaño máximo para archivos nuevos: 1GB

Archivos

Puede arrastrar y soltar archivos aquí para añadirlos

[1.75 ptos] Sea $(X_1,\dots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x)=2e^{8\theta-2x},\quad x>4\theta.$$

$a)$ Encontrar un estadístico suficiente y completo.

$b)$ Encontrar el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente a nivel de confianza $1-\alpha$, basado en dicho estadístico.

Tamaño máximo para archivos nuevos: 1GB

Archivos

Puede arrastrar y soltar archivos aquí para añadirlos

[2 ptos] Sea $(X_1, \dots X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable X con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{9\theta^2}, \quad 0 < x < 3\theta.$$

$a)$ Deducir el test más potente de tamaño arbitrario para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, siendo $\theta_1 < \theta_0$. Calcular la potencia de los tests obtenidos.

$b)$ Especificar los tests óptimos a niveles de significación 0.1 y 0.05, si se usa una muestra de tamaño 16 para contrastar $H_0 : \theta = 5.5$ frente a $H_1 : \theta = 5.1$. Justificar detalladamente la respuesta.

Tamaño máximo para archivos nuevos: 1GB

Archivos

Puede arrastrar y soltar archivos aquí para añadirlos

[2 ptos] Con objeto de analizar una posible relación lineal entre las notas de dos asignaturas distintas, se observan las calificaciones de 5 alumnos en ambas, obteniéndose los siguientes datos:

Asignatura 1:	5.2	5.3	5.1	5.8	8.4
Asignatura 2:	5.7	4.7	5	7	8

$a)$ Describir el modelo lineal teórico concreto que debe usarse para expresar las notas de la segunda asignatura en términos de las notas de la primera. Especificar el significado y las propiedades de las variables aleatorias que aparecen en este modelo.

$b)$ Sabiendo que las notas de la Asignatura 1 tienen media 5.96 y varianza 1.5464, y para la Asignatura 2 la media es 6.08 y la varianza 1.5496, estimar la recta de regresión e interpretar sus coeficientes. ¿Por qué es menos fiable la predicción de la nota de la Asignatura 2 para un alumno con 7 puntos en la Asignatura 1 que para un alumno con 5 puntos? (no es preciso realizar ningún cálculo; sólo indicar de manera justificada el motivo)

$c)$ Suponiendo hipótesis de normalidad, especificar el contraste de regresión, explicando el significado de la hipótesis nula. Realizar dicho contraste a nivel de significación 0.05 y decir qué conclusión se obtiene a partir de los datos.

Trabajar con 4 decimales.

Tamaño máximo para archivos nuevos: 1GB

Archivos

Puede arrastrar y soltar archivos aquí para añadirlos