**ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS**

Cuarto curso, 26/01/2015

1. Teorema de Banach-Steinhaus (Principio de la acotación uniforme).

2. Sea $X$ un espacio normado y $M$ un subespacio propio de $X$. Pruébese que $int(M) = \emptyset$.

3. Considérese el espacio $l_2$ con la norma usual y sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales dada.
   (a) Demuéstrese que $\{\lambda_n x_n\} \in l_2, \ \forall \ \{x_n\} \in l_2$ si y solamente si la sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada.
   (b) Si la sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada, demuéstrese que el operador lineal $L : l_2 \to l_2$, definido como $Lx = L\{x_n\} = \{\lambda_n x_n\}$ es continuo.
   (c) Si la sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada, calcúlese la norma de $L$.

4. Sea $H$ un espacio prehilbertiano y $x, y \in H$. Pruébese que $x$ e $y$ son ortogonales si y solamente si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$.