

Topología II: Conceptos Básicos

Daniel Monjas Miguélez

2 de febrero de 2022

Índice

1. Grupo Fundamental	3
1.1. Homotopías	3
1.2. Grupo Fundamental	4
1.3. Retracciones y Retractos de Deformación	6
1.4. Homotopías de aplicaciones	8
1.5. Teorema de Seifert-Van Kampen	10
2. Espacios recubridores	11
2.1. Definiciones y nociones básicas	11
2.2. Levantamiento de aplicaciones al recubridor	13
2.3. La acción del grupo fundamental sobre la fibra	15
2.4. Transformaciones de recubridores	16
2.5. El grupo de automorfismos. Recubridores regulares.	17
2.6. Existencia y clasificación de recubridores	19
2.7. Existencia de recubridor universal	20
3. Superficies compacta	20

1. Grupo Fundamental

1.1. Homotopías

Definición: Sea X un espacio topológico. Un lazo en X con base un punto del espacio, $x \in X$ es un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ continuo con $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. Se denota $\Omega_x(X)$ al conjunto de todos los lazos en X con base x .

Sean $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$, se define el producto de lazo como

$$\alpha * \beta : [0, 1] \rightarrow X$$
$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Definición: Sean $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$, se dicen que son homotópicos, y se denota por $\alpha \simeq \beta$, si existe una aplicación:

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X \quad \text{continua y :}$$

- $H(t, 0) = \alpha(t) \quad \forall t \in [0, 1]$, es decir, $H(*, 0) = \alpha$.
- $H(t, 1) = \beta(t) \quad \forall t \in [0, 1]$, es decir, $H(*, 1) = \beta$.
- $H(0, s) = H(1, s) = x \quad \forall s \in [0, 1]$, es decir, $H(0, *) = H(1, *) = \varepsilon_x$

Se dice que H es un homotopía de α a β , y se escribe:

$$H : \alpha \simeq \beta$$

Propiedades de las homotopías:

1. Si $\alpha \in \Omega_x(X)$, entonces $\alpha \simeq \alpha$ con $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(t, s) = \alpha(t)$.
2. Si $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un homomorfismo con $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$ entonces $\alpha \simeq \alpha \circ h$ donde $\alpha \circ h$ es un reparametrización de α preservando orientación.
3. Sea $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$. Si $\alpha \simeq \beta$ entonces $\beta \simeq \alpha$.
4. Sean $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$. Si $\alpha \simeq \beta$ y $\beta \simeq \gamma$ entonces $\alpha \simeq \gamma$.

Proposición: Sean X un espacio topológicos y puntos $p, q, r \in X$. Sean $\alpha, \alpha' \in \Omega_{p,q}(X)$ y $\beta, \beta' \in \Omega_{q,r}(X)$ arcos tales que $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$. Entonces $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.

Proposición: Sean X un espacio topológico y puntos $p, q, r, s \in X$. Sean $\alpha \in \Omega_{p,q}(X)$, $\beta \in \Omega_{q,r}(X)$ y $\gamma \in \Omega_{r,s}(X)$. Las siguientes propiedades son ciertas:

- $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$
- $(\alpha * \varepsilon_p = \varepsilon_p * \alpha = \alpha$
- $\alpha * \bar{\alpha} = \varepsilon_p$

1.2. Grupo Fundamental

Teorema: Sea X un espacio topológico y $p \in X$ un punto arbitrario. La ley de composición interna

$$* : \Pi_1(X, p) \times \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(X, p) \quad [\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$

está bien definida y dota al conjunto $\Pi_1(X, p)$ de estructura de grupo algebraico.

El grupo $(\Pi_1(X, p), *)$ es conocido como **Grupo Fundamental o de Poincaré** del espacio en el punto p . Recaltar que $\Pi_1(X, p) = \Omega_p(X) / \simeq$.

Proposición: Sea (X, τ) un espacio arcoconexo, $x, y \in X$. Entonces los grupos $\Pi_1(X, x)$ y $\Pi_1(X, y)$ son isomorfos.

Observación: Sea γ un arco que une los puntos $x_1, x_2 \in X$ entonces

$$\phi : \Pi_1(X, x_1) \rightarrow \Pi_1(X, x_2), \quad \phi([\alpha]) = [\gamma^{-1}][\alpha][\gamma]$$

es un isomorfismo de grupos.

Corolario: El grupo fundamental $\Pi_1(X, p)$ está unívocamente determinado salvo isomorfismos por la arcocomponente C_p del punto p . En particular, si X es arcoconexo entonces la clase de isomorfía de $\Pi_1(X, p)$ no depende del punto $p \in X$. En este caso la notación es $\Pi_1(X)$.

Proposición: Sean X e Y espacios topológicos y $\varphi : X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Consideremos $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$ y los correspondientes $\varphi \circ \alpha, \varphi \circ \beta \in \Omega_{\varphi(p),\varphi(q)}(Y)$. Se tiene que

$$\alpha \simeq \beta \Rightarrow \varphi \circ \alpha \simeq \varphi \circ \beta$$

En particular:

- La aplicación $\varphi_* : \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi(p))$, $\varphi_*([\alpha]) = [\varphi \circ \alpha]$ está bien definida y es un homomorfismo de grupos.
- Si $\psi : Y \rightarrow Z$ es otra aplicación continua y consideramos los homomorfismos de grupos

$$\begin{aligned} \psi_* : \Pi_1(X, \varphi(p)) &\rightarrow \Pi_1(Y, \psi(\varphi(p))) \\ (\psi \circ \varphi)_* : \Pi_1(X, p) &\rightarrow \Pi_1(Z, \psi(\varphi(p))) \end{aligned}$$

entonces se tiene que $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$

Corolario (Invarianza topológica del Grupo Fundamental): Si $\varphi : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo de espacios topológicos entonces $\phi_* : \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi(p))$ es un isomorfismo de grupos.

Proposición: El grupo fundamental de un subconjunto estrellado de \mathbb{R}^n es trivial. En particular, todo subconjunto convexo de \mathbb{R}^n tiene grupo fundamental trivial.

Además, se tiene que

$$\Pi_1(X \times Y, (p, q)) \cong \Pi_1(X, p) \times \Pi_1(Y, q)$$

Observación importante: El grupo fundamental de S^n es \mathbb{Z} . El grupo fundamental de un conjunto X estrellado es $\Pi_1(X, x) = \{[\epsilon_x]\}$.

El grupo fundamental del toro $T = S^1 \times S^1$ es $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$.

El grupo fundamental del cilindro $S^n \times \mathbb{R}$ es $\mathbb{Z} \times \{1\} \cong \mathbb{Z}$. El grupo fundamental de X estrellado es $\Pi_1(S^1, 1) = (\{[\alpha_n] : n \in \mathbb{N}, *\}$.

Definición: Un grupo topológico es un par (G, \cdot) donde:

- G es un espacio topológico.
- $\cdot : G \times G \rightarrow G$ es una ley de composición interna en G que le dota de estructura algebraica.
- La aplicación $G \times G \rightarrow G \quad (a, b) \rightarrow a.b^{-1}$ es continua, o equivalentemente: $\cdot : G \times G \rightarrow G \quad (a, b) \mapsto a.b$ y $(\)^{-1} : G \rightarrow G \quad a \mapsto a^{-1}$ son continuas.

Propiedad del levantamiento de arco: Sea $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$ un arco con $\alpha(0) = 1$. Entonces existe un único arco $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = 0$, donde $\rho : \mathbb{R} \rightarrow S^1$, $\rho(t) = e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

Propiedad del levantamiento de homotopías: Sea $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow S^1$ un arco con $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Supongamos que existe una homotopía H de α en β . Entonces:

- Los arcos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen los mismos extremos.
- La aplicación \tilde{H} es una homotopía (con extremos fijos) de $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$, donde $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y tal que $\rho \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0, 0) = 0$.

Definición: Si $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2) : [0, 1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es un arco de clase C^1 con $\alpha(0) = (1, 0)$, entonces su levantamiento vía ρ a \mathbb{R} dado por:

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t (\alpha_1(s)\alpha_2'(s) - \alpha_1'(s)\alpha_2(s))ds$$

De forma explícita, y para cada $n \in \mathbb{Z}$, el lazo $\alpha_n : [0, 1] \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$, $\alpha_n(t) = e^{2n\pi it}$ se levanta con condición inicial $\tilde{\alpha}_n(0) = 0$ al arco $\tilde{\alpha}_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\alpha}_n(t) = nt$.

Definición: Dado un lazo $\alpha : [0, 1] \rightarrow S^1$ con base el punto $1 \in S^1$, definimos el grado de α como:

$$\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z}$$

donde $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ represental el levantamiento de α con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = 0$.

Proposición: Dados $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow S^1$ dos lazos con base $1 \in S^1$, se tiene que

$$\alpha \simeq \beta \Leftrightarrow \deg(\alpha) = \deg(\beta)$$

Teorema: La aplicación

$$\begin{aligned} \deg : (\Pi_1(S^1, 1), *) &\rightarrow (\mathbb{Z}, +), \\ \deg([\alpha]) &= \deg(\alpha) \end{aligned}$$

Proposición: Si \overline{D} denota el disco unidad cerrado $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, no existe ninguna aplicación continua $f : \overline{D} \rightarrow S^1$ tal que $f|_{S^1} = Id_{S^1}$.

Teorema (Punto fijo de Brower): Sea $f : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ una aplicación continua. Entonces existe $p_0 \in \overline{D}$ tal que $f(p_0) = p_0$.

1.3. Retracciones y Retractos de Deformación

Teorema Fundamental del Álgebra: Sea $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función polinómica de la forma

$$P(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n \quad n \geq 1$$

Entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Definición: Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio topológico. Una retracción o retractor de X en A es una aplicación continua $r : X \rightarrow A$ satisfaciendo $r|_A = Id_A$, o equivalentemente, $r \circ i = Id_A$ donde $i : A \rightarrow X$ es la aplicación inclusión, $i(x) = x$. En este caso se dice que A es un retractor de X .

Proposición: Sea $r : X \rightarrow A$ es una retracción, $i : A \rightarrow X$ la aplicación inclusión y $a \in A$, entonces:

- $r_* : \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a)$ es un epimorfismo.
- $i_* : \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$ es un monomorfismo.

Definición (Retracto de deformación): Dado un espacio topológico X y un subespacio $A \subset X$, se dice que A es un retractor de deformación de X si existen una retracción $r : X \rightarrow A$ y una aplicación continua $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ satisfaciendo:

$$H(x, 0) = x \quad \forall x \in X \quad H(x, 1) = r(x) \quad \forall x \in X$$

Si adicionalmente $H(a, s) = a \quad \forall (a, s) \in A \times [0, 1]$, entonces se dice que A es un retracts fuerte de deformación de X . A las aplicaciones H y r se les llamará deformación y retracción asociadas al retracts (fuerte) de deformación A de X , respectivamente.

Proposición: Si A es un retracts de deformación de X , $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ son las arcomponentes de A y \hat{C}_α es la arcomponente de X conteniendo a C_α para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces:

1. $r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha \quad \forall \alpha \in \Lambda$ y por tanto, $\hat{C}_\alpha \neq \hat{C}_\beta, \alpha \neq \beta$.
2. $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ son las arcomponentes de X .
3. Si $H : X \times [0, 1] \rightarrow X$ y $r : X \rightarrow A$ son una deformación y retracción asociadas al retracts de deformación A de X , entonces $H|_{\hat{C}_\alpha \times [0, 1]} : \hat{C}_\alpha \times [0, 1] \rightarrow \hat{C}_\alpha$ y $r|_{\hat{C}_\alpha} : \hat{C}_\alpha \rightarrow C_\alpha$ son una deformación y retracción asociadas al retracts de deformación C_α de \hat{C}_α .

Proposición: Sea $F : X \rightarrow A$ un homeomorfismo. Si A es un retracts (fuerte) de deformación de Y entonces $F^{-1}(A)$ es un retracts (fuerte) de deformación de X .

Teorema: Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$ un retracts fuerte de deformación con $r : X \rightarrow A$ una retracción asociada. Entonces dado $a \in A$ se tiene que:

$$r_* : \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a) \quad i_* : \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$$

son isomorfismos, uno inverso del otro.

Definición: Un espacio topológico X se dice contráctil si admite como retracts de deformación a un punto $\{p_0\} \subset X$. En caso de que $\{p_0\}$ sea retracts fuerte de deformación de X diremos que el espacio es fuertemente contráctil.

Definición: Un espacio topológico X se dice simplemente conexo si es arcoconexo y $\Pi_1(X, p) = \{[\epsilon_p]\}$ para algún $p \in X$ (luego para todo $p \in X$).

Corolario: Todo espacio fuertemente contráctil es simplemente conexo.

Consecuencias:

1. Todo subconjunto estrellado de \mathbb{R}^n es simplemente conexo. Esto se aplica a subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ convexos.
2. Si $p \in S^n$ entonces $\Pi_1(\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}, p)$ es isomorfo a $\Pi_1(S^n, p)$.
3. Si $p \in S^1$ entonces $\Pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, (p, 0))$ es isomorfo a $\Pi_1(S^1, p) \cong \mathbb{Z}$.

4. Si $p \in S^1 \times \mathbb{R}$ entonces $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - \{x = y = 0\}, p)$ es isomorfo a $\Pi_1(S^1 \times \mathbb{R}, p) \cong \mathbb{Z}$.
5. El grupo fundamental de la cinta de Möbius es isomorfo a \mathbb{Z} .

Definición: Sea (X, τ) espacio topológico.

1. Se dice que el espacio satisface el primer axioma de numerabilidad (o ANI) si todo punto tiene una base numerable de entornos.
2. Se dice que el espacio satisface el segundo axioma de numerabilidad (o ANII) si la topología tiene una base numerable.

Teorema: Sea X un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo. Supongamos que la topología admite una base β satisfaciendo:

1. β es numerable (luego X es II-Axioma de Numerabilidad).
2. B es simplemente conexo $\forall B \in \beta$.

Entonces $\Pi_1(X, x)$ es numerable $\forall x \in X$.

1.4. Homotopías de aplicaciones

Definición (Homotopía de aplicaciones): Dados dos espacios topológicos X e Y , dos aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow Y$, se dicen homotópicas, y se escribe $\varphi_1 \simeq \varphi_2$, si existe una aplicación $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ verificando:

$$H(x, 0) = \varphi_1(x) \forall x \in X \quad H(x, 1) = \varphi_2(x) \forall x \in X$$

Si $A \subset X$, las aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow Y$ se dirán homotópicas relativas a A , $\varphi_1 \simeq_A \varphi_2$ si existe $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ verificando:

$$\begin{aligned} H(x, 0) &= \varphi_1(x) \quad \forall x \in X & H(x, 1) &= \varphi_2(x) \quad \forall x \in X \\ H(a, s) &= \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \quad \forall (a, s) \in A \times [0, 1] \end{aligned}$$

Si $A \subset X$ es un retracto de deformación vía H con la retracción asociada r , entonces $Id_X \simeq r$. Si A es un retracto fuerte de deformación de X se tiene que $Id_X \simeq_A r$.

Teorema: Sean X e Y espacios topológicos y dos aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow Y$. Supongamos que $\varphi_1 \simeq \varphi_2$ vía $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$, fijemos $x_0 \in X$ y sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ el arco uniendo $\varphi_1(x_0)$ y $\varphi_2(x_0)$ definido por $\gamma(s) = H(x_0, s)$.

Dados los homomorfismos de grupos

$$(\varphi_1)_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \quad (\varphi_2)_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_2(x_0))$$

Y el isomorfismo $U_\gamma : \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_2(x_0))$, se tiene que $U_\gamma \circ (\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*$. En particular, los homomorfismos $(\varphi_1)_*$ y $(\varphi_2)_*$ son iguales salvo isomorfismo.

Corolario: Sean $\varphi_1, \varphi_2 : X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas y $x_0 \in X$. Supongamos que $\varphi_1 \simeq_{\{x_0\}} \varphi_2$ y sea $y_0 = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$. Entonces $(\varphi_1)_* = (\varphi_2)_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$.

Definición: Sean X e Y espacios topológicos. Una aplicación continua $f : X \rightarrow Y$ se dirá una equivalencia homotópica si existe $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f = Id_X$ y $f \circ g = Id_Y$. En ese caso se dirá que f y g son inversas homotópicas.

Dos espacios X e Y se dicen del mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia homotópica entre ellos.

Nota: Todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica pero el recíproco no es cierto. La equivalencia homotópica es suficiente para garantizar isomorfismo entre grupos fundamentales.

Teorema: Sean X e Y espacios topológicos y $f : X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica con inversa homotópica $g : Y \rightarrow X$. Fijemos $x_0 \in X$. Entonces $f_* : \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.

Corolario: Sea $A \subset X$ es un retracto de deformación de X con la retracción asociada $r : X \rightarrow A$ e $i : A \rightarrow X$ la aplicación inclusión. Entonces para cada $a \in A$ las aplicaciones

$$r_* : \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a) \quad i_* : \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$$

son isomorfismos de grupos. En particular, todo espacio topológico contráctil es simplemente conexo.

Proposición: Sea X un espacio topológico, y sean $U, V \subset X$ subconjuntos satisfaciendo:

1. U y V son abiertos simplemente conexos (con la topología inducida).
2. $U \cap V$ es arcoconexo y no vacío.
3. $U \cup V = X$

Entonces X es simplemente conexo.

Corolario: La esfera S^n es simplemente conexa para todo $n \geq 2$.

Teorema de Invarianza de la Dimensión: Si $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ y $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$ con $n \neq 2$ son abiertos conexos, entonces Ω_2 no es homeomorfo a Ω_n .

Lema: No existe ninguna aplicación $F : S^2 \rightarrow S^1$ continua e impar.

Teorema (Borsuk-Ulam): Si $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua, entonces existe $x_0 \in S^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.

Corolario: Si identificamos S^2 con la superficie de la tierra y $f, g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son dos magnitudes físicas que se distribuyen de forma continua sobre dicha superficie (por ejemplo, la presión y la temperatura), existen puntos antípodas $p_0, -p_0 \in S^2$ tales que $(f, g)(p_0) = (f, g)(-p_0)$.

Corolario: Si S^2 es la unión de tres subconjuntos cerrados A_1, A_2 y A_3 , entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas.

Corolario (Teorema de las tortitas): Dados dos compactos $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$, existe una recta combinatoria de \mathbb{R}^2 que los subdivide a ambos en trozos de igual área.

Corolario (Teorema del bocadillo de jamón): Dados tres compactos $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}^3$, es posible encontrar un plano combinatorio de \mathbb{R}^3 que los subdivide a los tres en trozos de igual volumen.

1.5. Teorema de Seifert-Van Kampen

Teorema de Seifert-Van Kampen: Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subset X$ subconjuntos satisfaciendo:

1. U, V y $U \cap V$ son abiertos arcoconexos.
2. $U \cap V \neq \emptyset$ y $U \cup V = X$

$i_* : \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0)$ y $j_* : \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(V, x_0)$ los correspondientes homomorfismos inducidos. Entonces

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$$

donde el producto amalgamado es el relativo a los homomorfismos i_* y j_* .

Corolario: Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si $U \cap V$ es simplemente conexo entonces $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) * \Pi_1(V, x_0)$.

Corolario: Bajos las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si V es simplemente conexo entonces

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) / N(i_*(\Pi_1(U \cap V, x_0)))$$

Definición: Si A es un subconjunto de G :

- $N(A) := \left\{ \prod_{j=1}^k g_j^{-1} \cdot a_j^{n_j} \cdot g_j : (a_j, g_j, n_j) \in A \times G \times \mathbb{Z}, \quad j = 1, \dots, k, \quad k \in \mathbb{N} \right\}$
es el menor subgrupo normal de G conteniendo a A , también llamado el subgrupo normal de G generado por A . Es fácil comprobar que $N(A)$ coincide con la intersección de todos los subgrupos normales de G que contienen a A .
- Si $H \leq G$, $N_0(H) := \{g \in G : g^{-1} \cdot H \cdot g = H\}$ es el mayor subgrupo de G que contiene a H como subgrupo normal, también llamado el normalizador de H en G . Es claro que $H \trianglelefteq N_0(H) \leq G$ y $N_0(H) = G$ si y solo si $H \trianglelefteq G$.

Corolario: Si X es un n -ciclo entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al grupo libre $F(a_1, \dots, a_n)$.

Definición: Sea el semiplano $\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$ y sus girados respecto del eje x_3 :

$$\Pi_j = \left\{ \left(e^{2\pi(j-1)i/k} z, x_3 \right) : (z, x_3) \in \Pi_1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3 \right\} \quad j = 1, \dots, k$$

Por definición, el espacio libre de k hojas es:

$$L_k = \bigcup_{j=1}^k \Pi_j \quad k \in \mathbb{N}$$

Proposición: Los espacios L_k y L_s no son homeomorfos, $k, s \in \mathbb{N}$, $k \neq s$.

Corolario: Si $O \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto conteniendo al origen, entonces $O \cap L_k$ no puede ser homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 para todo $k \neq 2$.

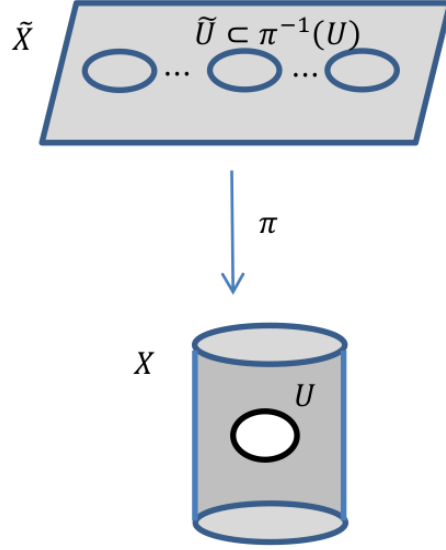
2. Espacios recubridores

2.1. Definiciones y nociones básicas

Definición: Sea X un espacio topológico. Un (espacio) recubridor de X es un par (\tilde{X}, π) , donde:

1. \tilde{X} es un espacio topológico.
2. $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación continua y sobreyectiva.
3. Todo punto $p \in X$ admite un entorno abierto y arcoconexo U en X tal que $\pi|_U : \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo para toda arcocomponente \tilde{U} de $\pi^{-1}(U)$

Al abierto U se le llamará entorno fundamental o distinguido para el recubridor (\tilde{X}, π) . A la aplicación π se la llamará aplicación recubridora, y al espacio X base del recubridor (\tilde{X}, π) , y a \tilde{X} el espacio recubridor.



Dado $p \in X$, al conjunto $\pi^{-1}(p) \subset \tilde{X}$ se le llama fibra del punto p para el recubridor (\tilde{X}, π) . Un recubridor se dirá finito (y la aplicación recubridora finita) cuando la fibra $\pi^{-1}(p)$ sea finita para todo $p \in X$.

La familia $\mathcal{U} = \{U \subset X : U \text{ es entorno distinguido para } (\tilde{X}, \pi)\}$ es una base de la topología de X . Cada arcocomponente \tilde{U} de $\pi^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de \tilde{X} . Además, la aplicación π es abierta, y el conjunto de arcocomponentes de $\pi^{-1}(U)$ está en correspondencia uno a uno con la fibra de p .

Ejemplos importantes de aplicaciones recubridoras:

- La aplicación exponencial $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\rho(t) = e^{2\pi it}$. Es decir, \mathbb{R} recubre a \mathbb{S}^1 .
- De la anterior se induce que $\rho \times \rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}$. Es decir, \mathbb{R}^2 recubre al toro de revolución.
- Un homeomorfismo $f : X \rightarrow Y$. Es decir, si $X \cong Y$ entonces X recubre a Y .
- La aplicación $\pi_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\pi_n(z) := z^n$.
- $\pi_1 \times \pi_2 : Y_1 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2$, donde $\pi_j : Y_j \rightarrow X_j$ es recubridora para $j = 1, 2$.
- $\rho \times Id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$

Proposición: Si $f : Y \rightarrow X$ es un homeomorfismo local, sobreyectivo y propio entre espacios de Hausdorff localmente compactos, entonces f es una aplicación recubridora finita.

Corolario: Supongamos que X e Y son espacios Hausdorff, Y compacto. Todo homeomorfismo local $f : Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora.

Proposición: Sean $\pi_1 : Y \rightarrow Z$ y $\pi_2 : Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras. Si π_2 es finita entonces $\pi_2 \circ \pi_1 : Y \rightarrow X$ es recubridora.

Definición: Sea X un espacio topológico, y sea $G \subset \text{Hom}(X)$ un subgrupo. Consideremos la acción canónica de G sobre X , $\mu : G \times X \rightarrow X$, donde $\mu(g, x) = g(x)$. Es habitual escribir $g.x$ en vez de $\mu(g, x)$ para todo $g \in G$, $x \in X$. La relación binaria en X :

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : g.x = y$$

Es de equivalencia. El espacio topológico cociente X/\sim se denotará por X/G y será referido como el espacio de órbitas asociado a la acción μ inducida por G .

Definición: Sea X espacio topológico, y sea $G \subset \text{Hom}(X)$ un subgrupo. El subgrupo g se dirá que actúa de forma propia y discontinua sobre X (y la acción $\mu : G \times X \rightarrow X$ inducida se dirá propia y discontinua) si para todo $x \in X$ existe un entorno abierto U de x en X , tal que $(g.U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{Id_X\}$ (aquí $g.U$ denota el conjunto $g(U)$). Al entorno U se llama entorno distinguido (alrededor de x) para la acción.

Proposición: Si X es un espacio topológico Hausdorff y G es un grupo finito de homomorfismos de X sin puntos fijos (esto es, tal que $\phi(x) \neq x$ para todo $x \in X$ y $\phi \in G \setminus \{Id_X\}$), entonces G actúa de forma propia y discontinua sobre X .

Teorema: Sea X un espacio topológico, y sea $G \subset \text{Hom}(X)$ un subgrupo actuando de forma propia y discontinua sobre X . Entonces la proyección al espacio de órbitas $\pi : X \rightarrow X/G$ es recubridora.

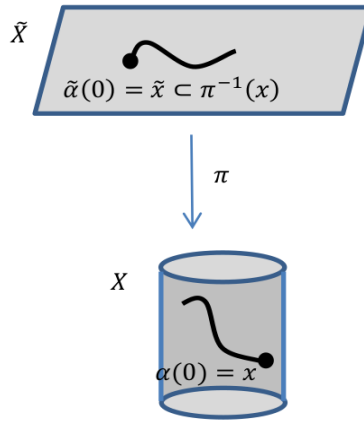
2.2. Levantamiento de aplicaciones al recubridor

Proposición: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , sea Y un espacio topológico conexo y sean $f_1, f_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ dos aplicaciones continuas satisfaciendo $\pi \circ f_1 = \pi \circ f_2$. Si $A = \{y \in Y : f_1(y) = f_2(y)\} \neq \emptyset$ entonces $f_1 = f_2$.

Lema: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Dada $H : [0, 1]^2 \rightarrow X$ continua con $H(0, 0) = x_0$, existe una única aplicación $\tilde{H} : [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ continua tal que $\pi \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0, 0) = \tilde{x}_0$.

Corolario (Propiedad del levantamiento de arco): Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, y se considera un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = x_0$. Entonces existe un único arco $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. A $\tilde{\alpha}$ se le llama levantamiento de α vía π con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.

Definición: Dado un recubridor (\tilde{X}, π) de X , un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = x$ y $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, se denota por $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ el único levantamiento de α vía π con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$.



Corolario: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y $y \in X$ y un arco $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Consideramos la aplicación $n_\alpha : \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(y)$ dada por $n_\alpha(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)$. Entonces n_α es biyectiva, y en particular $\pi^{-1}(x)$ y $\pi^{-1}(y)$ tienen el mismo cardinal.

Definición (Número de hojas de un recubridor): Dado un recubridor (\tilde{X}, π) de X , se llama número de hojas del recubridor al cardinal de $\pi^{-1}(x)$, donde x es un punto aleatorio de X .

Corolario (Propiedad del levantamiento de homotopías): Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, y sean dos arcos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Supongamos que existe una homotopía de α en β (con extremos fijos). Entonces, los arcos $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ y $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ tienen los mismo extremos y la aplicación \tilde{H} es una homotopía de $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ (con extremos fijos).

Teorema de Monodromía: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x \in X$ y $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, entonces $\pi_* : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \Pi_1(X, x)$ es un monomorfismo de grupos.

Corolario: Sea (\tilde{X}, π) es un recubridor de X , y sean $x \in X$. Sean $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$ y $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ un arco con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$. Entonces

$$\pi_* \left(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2) \right) = [\alpha]^{-1} * \pi_* \left(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \right)$$

donde α es el lazo $\pi \circ \tilde{\alpha}$ (con base x). Como consecuencia $\left\{ \pi_* \left(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \right) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x) \right\}$ es una clase de conjugación de subgrupos en $\Pi_1(X, x)$.

Definición: Se denota por $Rec(X)$ el conjunto de todos los recubridores de X , esto es:

$$Rec(X) = \left\{ (\tilde{X}, \pi) : (\tilde{X}, \pi) \text{ es un recubridor de } X \right\}$$

Fijamos $x \in X$ y sea el conjunto $S_c(\Pi_1(X, x))$ de las clases de conjugación de subgrupos de $\Pi_1(X, x)$, se define:

$$\Delta_x : Rec(X) \rightarrow S_c(\Pi_1(X, x)) \quad \Delta_x(\tilde{X}, \pi) = \left\{ \pi_* \left(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \right) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x) \right\}$$

Teorema: Sea $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora, sea $f : Y \rightarrow X$ una aplicación continua y sea $y_0 \in Y$, $x_0 \in f(y_0) \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- Existe $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ continua tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.
- $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

Corolario: Sea (Y, π) un recubridor de X , sea $A \subset X$ un subespacio topológico arcoconexo y denotemos por $i : A \rightarrow X$ a la aplicación inclusión. Supongamos $i_*(\Pi_1(A, x)) \subset \pi_*(\Pi_1(Y, y))$ para algunos $x \in A$ e $y \in \pi^{-1}(x)$. Entonces $\pi|_{\tilde{A}} : \tilde{A} \rightarrow A$ es un homeomorfismo, donde \tilde{A} es la arcocomponente de $\pi^{-1}(A)$ que contiene a y .

Proposición: Sea (G, \cdot) un grupo topológico con elemento neutro $e \in G$, sea $\pi : \tilde{G} \rightarrow G$ una aplicación recubridora y elegimos $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Entonces \tilde{G} admite una estructura de grupo topológico con elemento neutro \tilde{e} que conveirte a π es un homomorfismo de grupos.

Corolario: X tiene como máximo, salvo isomorfismos, tantos recubridores como clases de conjugación de subgrupos tengan su grupo fundamental.

2.3. La acción del grupo fundamental sobre la fibra

Teorema: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x \in X$ fijo. La aplicación

$$\cdot : \pi^{-1}(x) \times \Pi_1(X, x) \rightarrow \pi^{-1}(x) \quad y \cdot [\alpha] = \tilde{\alpha}_y(1)$$

es una acción transitiva por la derecha del grupo $\Pi_1(X, x)$ sobre la fibra $\pi^{-1}(x)$ de x .

Además, para cada $y \in \pi^{-1}(x)$ el subgrupo de isotropía asociado a la acción en el punto y , que se define por $H_y = \{[\alpha] \in \Pi_1(X, x) : y \cdot [\alpha] = y\}$ coincide con $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$.

Corolario: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x \in X$ fijo. Entonces para cada $y \in \pi^{-1}(x)$ la aplicación

$$\left(\Pi_1(X, x) / \Pi_1(\tilde{X}, y) \right)_{dcha} \rightarrow \pi^{-1}(x) \quad \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) * [\alpha] \rightarrow \tilde{\alpha}_y(1)$$

Proposición: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X . Entonces:

1. X es Hausdorff $\Rightarrow \tilde{X}$ es Hausdorff.
2. \tilde{X} es II-Axioma de numerabilidad $\Rightarrow X$ es II-Axioma de numerabilidad.
3. Si (\tilde{X}, π) tiene una cantidad numerable de hojas.

\tilde{X} es II-Axioma de numerabilidad $\Leftrightarrow X$ es II-Axioma de numerabilidad

Corolario: Sea X espacio topológico II-Axioma de numerabilidad y con grupo fundamental numerable. Entonces todo recubridor de X es II-Axioma de numerabilidad.

2.4. Transformaciones de recubridores

Definición: Sean $(\tilde{X}_j, \pi_j) \quad j = 1, 2$, dos espacios recubridores de X .

Un homomorfismo de recubridores Φ de (\tilde{X}_1, π_1) en (\tilde{X}_2, π_2) es una aplicación continua $\Phi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ satisfaciendo $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$.

Un homomorfismo de recubridores Φ de (\tilde{X}_1, π_1) en (\tilde{X}_2, π_2) se dirá un isomorfismo de recubridores si Φ es un homeomorfismo.

Si (\tilde{X}, π) es un recubridor de X , a los isomorfismos de (\tilde{X}, π) en (\tilde{X}, π) se les llama automorfismos de (\tilde{X}, π) .

Corolario: Dado un espacio topológico:

- La composición de dos homeomorfismos entre dos recubridores de X es un monomorfismo de recubridores de X .
- El inverso de un isomorfismo entre dos recubridores de X es un isomorfismo de recubridores de X .

- Si (\tilde{X}, π) es un recubridor de X entonces $Id_{\tilde{X}}$ es un automorfismo de (\tilde{X}, π) .

Definición: Si (\tilde{X}, π) es un recubridor de X , se denota por $\mathcal{A}(\tilde{X}, \pi)$ al grupo (respecto a la composición) de los automorfismos de (\tilde{X}, π) .

Corolario: Sean (\tilde{X}_j, π_j) $j = 1, 2$, dos espacios recubridores de X . Si $\Phi, \Psi : (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ son homomorfismos recubridores distintos, entonces $\Phi(y) \neq \Psi(y) \quad \forall y \in \tilde{X}_1$.

Corolario: Sean (\tilde{X}_j, π_j) , $j = 1, 2$, dos espacios recubridores de X , y sean $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$ $j = 1, 2$.

1. Existe un homomorfismo $\Phi : (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ si y solo si

$$(\pi_1)_* \left(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1) \right) \subseteq (\pi_2)_* \left(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2) \right)$$

2. Existe un isomorfismo $\Phi : (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ si y solo si

$$(\pi_1)_* \left(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1) \right) = (\pi_2)_* \left(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2) \right)$$

Proposición: Sean (\tilde{X}_j, π_j) , $j = 1, 2$, dos espacios recubridores de X y $\Phi : (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ un homomorfismo, entonces (\tilde{X}_1, Φ) es un recubridor de \tilde{X}_2 .

Corolario: Sean (\tilde{X}_j, π_j) , $j = 1, 2$, dos espacios recubridores de X y sean $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$ $j = 1, 2$. Si $(\pi_1)_* \left(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1) \right)$ entonces \tilde{X}_1 recubre a \tilde{X}_2 .

2.5. El grupo de automorfismos. Recubridores regulares.

Proposición: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X . Entonces la acción

$$\mu : Aut(\tilde{X}, \pi) \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X} \quad (\Phi, y) \rightarrow \Phi.y = \Phi(y)$$

es propia y discontinua.

Corolario (Construcción de Recubridores): Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , $G \leq Aut(\tilde{X}, \pi)$ un subgrupo y (\tilde{X}, π_0) el recubridor asociado al espacio de órbitas \tilde{X}/G :

$$\pi_0 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G \quad y \mapsto G.y$$

Entonces la única aplicación $\tilde{\pi} : \tilde{X}/G \rightarrow X$ tal que $\tilde{\pi} \circ \pi_0 = \pi$, esto es, definida por

$$\tilde{\pi}(G.y) = \pi(y) \quad \forall G.y \in \tilde{X}/G$$

es recubridora.

Proposición: Sea X un espacio topológico, sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X y fijemos $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$, $j = 1, 2$. Se toma $\tilde{\alpha}$ cualquier arco en \tilde{X} con $\tilde{\alpha}(0) = y_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = y_2$, y llamamos $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$. Entonces $\exists \Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ con $\Phi(y_1) = y_2 \Leftrightarrow [\alpha] \in N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)))$.

Definición: Fijados $y \in \pi^{-1}(x)$ y $[\alpha] \in N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)))$ la proposición anterior garantiza que existe un automorfismo $\Phi_y([\alpha])$ de (\tilde{X}, π) con $\Phi_y([\alpha])(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$, que es único. Se denota γ a la aplicación $\gamma : N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$, $\gamma([\alpha]) = \Phi_y([\alpha])$.

Teorema: Sean X un espacio topológico y (\tilde{X}, π) un recubridor de X y fijemos $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$. Entonces la aplicación $\gamma : N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ $\gamma([\alpha]) = \Phi_y([\alpha])$ es un epimorfismo de grupos con $\text{Ker} \gamma = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$. En particular, por el primer teorema de isomorfía para grupos

$$N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))) / \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \cong \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$$

Observación: Si además, $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$, $j = 1, 2$ y $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ es tal que $\tilde{\alpha}_{y_1}(1) = y_2$ entonces

$$N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2))) = [\alpha]^{-1} * N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))) * [\alpha]$$

Ambos subgrupos conjugados de $\Pi_1(X, x)$ son isomorfos a $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$. Téngase en cuenta que

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2)) = [\alpha]^{-1} * \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) * [\alpha]$$

Definición: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X se dirá regular si existe $x \in X$ tal que la acción

$$\mu : \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \times \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x) \quad (\Phi, y) \mapsto \Phi.y = \Phi(y)$$

Observación: μ_x es transitiva para algún $x \in X$ si y solo si μ_x es transitiva para todo $x \in X$. Por tanto, (\tilde{X}, π) es regular si y solo si μ_x es transitiva para todo $x \in X$.

Proposición: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X . Son equivalentes:

- (\tilde{X}, π) es regular.
- Para todo $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$.
- Existen $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$ tales que $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$.

Corolario: Si (\tilde{X}, π) es un recubridor regular de X , $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, entonces:

- $\tilde{\gamma} : \Pi_1(X, x)/\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \quad \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) * [\alpha] \rightarrow \Phi_y([\alpha])$
es un isomorfismo de grupos.
- Si $\pi_0 : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ es la proyección al espacio de órbitas $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$, existe un homeomorfismo $\tilde{\pi} : \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \rightarrow X$ tal que $\tilde{\pi} \circ \pi_0 = \pi$.

Corolario: Si G es un grupo de homeomorfismos que actúa de forma propia y discontinua sobre el espacio X y $\pi : X \rightarrow X/G$ es la proyección al espacio de órbitas, entonces (X, π) es un recubridor regular y $\text{Aut}(X, \pi) = G$.

Recíprocamente, si (\tilde{X}, π) es un recubridor regular de X entonces X es homeomorfo al espacio de órbitas $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$, y salvo ese homeomorfismo la proyección recubridora π no es sino la proyección de órbitas $\tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$.

Proposición: Si $\Phi \in \text{Aut}(Y, \pi)$, entonces Φ es (la restricción de Y de) una transformación de Möbius.

Corolario: Existen polinomios P para los que el recubridor (Y, π) no es regular.

2.6. Existencia y clasificación de recubridores

Teorema: Sean (\tilde{X}_j, π_j) , $j = 1, 2$, dos espacios recubridores de X . Son equivalentes:

- $(\tilde{X}_1, \pi_1) \cong (\tilde{X}_2, \pi_2)$
- $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ para todo $x \in X$.
- $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ para algún $x \in X$.

En particular, para todo $x \in X$ la aplicación

$$\tilde{\Delta}_x : R(x) \rightarrow S_c(\Pi_1(X, x)) \quad \tilde{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) = \Delta(\tilde{X}, \pi)$$

inducida por $\Delta_x(\tilde{X}, \pi)$ en el cociente $R(x)$ es inyectiva.

Definición: Un recubridor (Y, π) de X se dirá universal si $\Pi_1(Y) \cong \{0\}$, o equivalentemente, si $\tilde{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) = \{[\varepsilon_x]\}$ para algún (luego para todo) $x \in X$.

Corolario: Si X admite recubridor universal (Y, π_0) , entonces:

- Y recubre a \tilde{X} para cualquier recubridor (\tilde{X}, π) de X .
- (Y, π_0) es un recubridor regular.

- Si $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, la aplicación siguiente es un isomorfismo:

$$\tilde{\gamma} : \Pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(Y, \pi_0) \quad [\alpha] \mapsto \Phi_y([\alpha])$$

Teorema: Si un espacio topológico X admite recubridor universal si y solo si la aplicación $\tilde{\Delta}_x : R(x) \rightarrow S_c(\Pi_1(X, x))$ es biyectiva para algún (luego para todo) $x \in X$.

2.7. Existencia de recubridor universal

Definición: Un abierto arcoconexo U de un espacio topológico X se dice que satisface la propiedad de semilocal simple conexión si el homomorfismo $i_* : \Pi_1(U, x) \rightarrow \Pi_1(X, x)$ inducido por la inclusión $i : U \rightarrow X$ es trivial (esto es, constante $[\varepsilon_x] \in \Pi_1(X, x)$).

Un espacio topológico X se dirá semilocalmente simplemente conexo si todo punto admite un entorno abierto arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo.

Observación: Si X es semilocalmente simplemente conexo entonces la familia de abierto semilocalmente simplemente conexos en X son una base de la topología de X .

Teorema: Un espacio topológico X admite recubridor universal si y solo si es semilocalmente simplemente conexo.

3. Superficies compacta

Una superficie es localmente euclídea si $\forall x \in S, \exists u \subset U_x$ tal que $u \simeq \mathbb{R}^2$, que es Hausdorff (T_2) y $AN - II$, es decir, existe una base numerable de la topología.

Ejemplo: $\mathbb{R}^2, S^2, S^1 \times S^1, \mathbb{K}, \mathbb{P}^2$, recubridores de superficies.

- Invarianza de la dimensión. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos euclidianos no vacíos. Si $U \simeq V$ entonces $n = m$. El mismo enunciado es válido para abiertos $U \subset \mathbb{R}_+^n$ y $V \subset \mathbb{R}_+^m$.
- Invarianza del dominio. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $U \simeq V$ entonces V es abierto en \mathbb{R}^n .