Demostr. de 1.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $M_n = \{x \in E : \|T_i x\| \leq n, \forall i \in I\}$

M_n cerrado (intersección arbitraria de cerrados) Personal

$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \Rightarrow \exists M_{n_0} /$ int $(M_{n_0}) \neq \emptyset \Rightarrow \exists B(x_0; r_0) \subset M_{n_0} \Rightarrow$ Carrad

$\forall y \in B(x_0; r)$ $\|T_i y\| \leq n_0$, $\forall i \in I \Rightarrow \exists M_0 / \|T_i\| \leq M_0$, $\forall i \in I$

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 26/01/2015

3

1. Teorema de Banach-Steinhaus (Principio de la acotación uniforme)

E, F Banach, $\{T_i, i \in I\}$ $T_i : E \to F$ lineales y continuas t.q. $\forall x \in E$ $\{T_i x, i \in I\}$ es acotado. Entonces $\sup_{i \in I} \|T_i\| < +\infty$.

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real. Pruébese que las siguientes aplicaciones son continuas:

0'5 (a) $\mathrm{R} \times E \to E$, $(\lambda, x) \to \lambda x$

0'5 (b) $E \times E \to E$, $(x, y) \to x + y$

1 (c) $E \to \mathrm{R}$, $x \to \|x\|$

2

3. Sea el espacio normado c_0 formado por las sucesiones de números reales con límite cero, con la norma del supremo de los valores absolutos de los términos de la sucesión. Demuéstrese que la aplicación $L : E \to \mathrm{R}$, definida por $L\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $\forall \{a_n\} \in c_0$, es lineal y continua. Calcúlese $\|L\|_{E'}$. ¿Se alcanza tal norma?

3

4. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $B = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal (no necesariamente base hilbertiana). Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión dada de números reales, pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente en H si y solamente si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ es convergente.

3. L bien definida: $\forall \{a_n\} \in c_0$, $\exists M \geq 0 : |a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow \left|\frac{a_n}{3^n}\right| \leq \frac{M}{3^n}$ y $\sum_1 \frac{1}{3^n} < +\infty$. L lineal trivial. Como

$|L\{a_n\}| \leq M \sum_1^{\infty} \frac{1}{3^n} = \|\{a_n\}\|_E \dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \|\{a_n\}\|_E \Rightarrow \|L\| \leq \frac{1}{2}$

Sea $\{a_n\} = \{1\ 1 \ldots \overset{(n}{1}\ 0 \ldots\} \in c_0$, $L\{a_n\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \to \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \|L\| = \frac{1}{2}$

Sea $\{a_n\} \in c_0$: $\|\{a_n\}\| \leq 1 \Rightarrow |a_n| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |L\{a_n\}| \leq \sum_1^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}$

Si $\exists n_0 / |a_{n_0}| < 1 \Rightarrow a_{n_0} < 1 \Rightarrow L\{a_n\} \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n_0}}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} + \frac{a_{n_0}}{3^{n_0}} < \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n_0}}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^{n_0}} = \frac{1}{2}$

Luego la norma no se alcanza.

4. $S'_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k$

$m>n$, $\|S'_m - S'_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k\|^2 = \langle \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k, \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k f_k \rangle$

$= \sum_{k=n+1}^{m} \lambda_k^2$. Así, si $H_m = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^2$, tenemos

S'_m es de Cauchy $\Leftrightarrow$ H_m es de Cauchy

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

S'_m es convergente en H H_m es convergente en H

2. Por sucesiones, por ejemplo.

a) Si $(\lambda_n, x_n) \to (\lambda_0, x_0)$, entonces:

$\|\lambda_n x_n - \lambda_0 x_0\| \leq \|\lambda_n x_n - \lambda_n x_0 + \lambda_n x_0 - \lambda_0 x_0\| \leq$

$\leq \underbrace{|\lambda_n|}_{\text{acotada}} \underbrace{\|x_n - x_0\|}_{\downarrow 0} + \underbrace{|\lambda_n - \lambda_0|}_{\downarrow 0} \|x_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

b) Si $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, entonces:

$\| x_n + y_n - (x_0 + y_0)\| \leq \|x_n - x_0\| + \|y_n - y_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

c) $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$. Por tanto, si

$x_n \to x_0 \Rightarrow |\|x_n\| - \|x_0\|| \leq \|x_n - x_0\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow$

$\|x_n\| \to \|x_0\|$, c.q.d.