

TEOREMA DE HAHN-BANACH

Aprendo
Noviembre 2021

Motivación. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado.
Si $\dim E$ es finita, sabemos que cualquier aplicación lineal $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.
Por ejemplo, si $\dim(E) = n$, ¿podrías escribir la expresión general de cualquier $L: E \rightarrow \mathbb{R}$, lineal?

Si $\dim(E)$ es infinita, sabemos que existen aplicaciones lineales no continuas (¿te acuerdas?) y aplicaciones lineales continuas (por ejemplo, la que es idénticamente cero). Pero, ¿podrías dar algún ejemplo de aplicación lineal CONTINUA no trivial? En espacios concretos, $(C([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, $L_p(1 \leq p \leq +\infty)$, $L^p(a,b)$, etc. parece fácil, pero si sólo sabemos que $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, sin conocer la naturaleza de sus elementos (no sabemos si los elementos son sueldos, funciones...), ¿cómo podemos dar ejemplos de aplicaciones lineales CONTINUAS que no sean idénticas a la cero?

ticamente levo.

El Teorema que enunciaremos y demostraríamos a continuación viene en nuestra ayuda!

TEOREMA (H. HAHN, 1.927; S. BANACH, 1.929)

Sea $E(\mathbb{R})$ un espacio vectorial y $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ verificando

$$\left. \begin{array}{l} \text{(i)} p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in E \\ \text{(ii)} p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E \end{array} \right\}$$

Sea G un subespacio vectorial de E y
 $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ lineal, t. q.

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G \quad (2)$$

ENTONCES: $\exists f: E \rightarrow \mathbb{R}$ lineal t. q.

$$\left. \begin{array}{l} \text{a)} f|_G = g \quad (f(x) = g(x), \forall x \in G) \\ \text{b)} f(x) \leq p(x), \forall x \in E. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Demostración. La idea clave es aplicar el LEMA DE ZORN a un conjunto P , ordenado e inductivo, conveniente. En nuestro caso:

$$P = \left\{ h: D(h) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } D(h) \text{ es un sub vect. de } E \right. \\ \left. \text{t.q. } D(h) \supset G, h \text{ lineal, } h|_G = g \text{ y, además, } h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h) \right\} \quad (4)$$

(Los elementos de P son aplic. lineales con ciertas condiciones)

Observamos que $P \neq \emptyset$ pues $g \in P$.

P se puede ordenar de la forma siguiente:
Si $h_1, h_2 \in P$, diremos que

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases}$$

Es "clínical" comprobar que la relación así definida, \leq , verifica las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

(P, \leq) es, además, INDUCTIVO: Si $Q \subset P$ está totalmente ordenado ($\forall x, y \in Q$, obten $x \leq y$, o bien $y \leq x$), entonces Q tiene COTA SUPERIOR ($\exists q_0 \in P: q \leq q_0, \forall q \in Q$).

Veamos que (P, \leq) es inductivo. Para ello, si:

$$Q = \{h_i, i \in I\} \subset P$$

es totalmente ordenado, entonces: el elemento de P , q_0 , definido como

$$q_0: D(q_0) = \bigcup D(h_i) \longrightarrow \mathbb{R} \quad q = q_0(x) =$$

IEI

$= h_i(x)$, donde $i \in I$ verifica $x \in D(h_i)$, es UNA COTA SUPERIOR DE α .

Pensemos que la única dificultad para probar esto es que $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$ para algún $i \neq j$, $i, j \in I$! Pero esto no es problema si tenemos en cuenta que \mathbb{Q} está totalmente ordenado y por tanto, o bien $h_i \leq h_j$, o bien $h_j \leq h_i$. Si, por ejemplo, $h_i \leq h_j$ entonces $D(h_i) \subset D(h_j)$ y $h_j|_{D(h_i)} = h_i$.

En consecuencia $h_i(x) = h_j(x)$. Si $h_j \leq h_i$, el razonamiento es similar.

RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN HASTA AHORA:

El conjunto P definido en (4) es un CONJUNTO ORDENADO INDUCTIVO. El famoso LEMA DE ZORN afirma que P tiene algún ELEMENTO MAXIMAL, al que llamamos f . Este f cumple todas las conclusiones⁽³⁾ del Teorema. En efecto, que f sea maximal significa:

$\nexists h \in P : f < h$ ($f \leq h$ y $f \neq h$) (5)

¡Terminemos la demostración! Para ello, probaremos que si $D(f) = E$, es decir $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, entonces f cumple las propiedades (3).

Ahora bien, H0 ES POSIBLE QUE

$$D(f) \subset E \neq \emptyset \quad (6)$$

En efecto, si (6) se cumpliere, entonces es posible "construir" un elemento $h \in P$ t.q.

$$f < h$$

lo que contradice (5). ¡Definamos h ! Para ello, si (6) se cumple, entonces

$$\exists x_0 \in E \setminus D(f)$$

Sea $D(h) = D(f) + \langle x_0 \rangle = \{x + t x_0, x \in D(f), t \in \mathbb{R}\}$, $h: D(h) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x + t x_0) = f(x) + t \alpha$

donde α debe elegirse para que

$$f(x) + t\alpha = h(x + t x_0) \leq p(x + t x_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

En este caso, $f < h$ (que contradice el hecho de que f es maximal).

Ahora bien, $f(x) + t\alpha \leq p(x + t x_0)$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha \leq \frac{p(x + t x_0) - f(x)}{t}, \forall t > 0, \forall x \in D(f)$$

$$\alpha' = \frac{p(x + t x_0) - f(x)}{t}$$

} (8)

$$\frac{P(x+tx_0) - f(x)}{t} \leq \frac{P(y+tx_0) - f(y)}{t}, \forall t < 0, \forall x \in D(f)$$

(8) de exemplo se y é dito se:

$$\frac{P(x+tx_0) - f(x)}{t} \leq \frac{P(y+tx_0) - f(y)}{t'}, \forall x, y \in D(f), \forall t < 0, \forall t' > 0 \quad \left. \right\} (9)$$

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq \frac{P(y+tx_0)}{t'} - \frac{P(x+tx_0)}{t} \quad (10)$$

Ahora bien, como $x, y \in D(f)$, $\frac{y}{t'} - \frac{x}{t} \in D(f)$.

Por tanto

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq P\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) = P\left(\frac{y}{t'} + x_0 - x_0 - \frac{x}{t}\right) =$$

$$= P\left[\frac{1}{t'}(y+tx_0) + \frac{1}{-t}(x+tx_0)\right] \leq \quad (11)$$

$$\leq P\left[\frac{1}{t'}(y+tx_0)\right] + P\left[\frac{-1}{t}(x+tx_0)\right] =$$

$$= \frac{P(y+tx_0)}{t'} + \frac{P(x+tx_0)}{-t}.$$

Mirando el primero y el último teorema
de la anterior cadena (11) de desigualdades,
obtenemos (10).

Creo que, como en alguna ocasión anterior,
debéramos acabar con ¡uf! ¡Misión
cumplida! Lo que sí nos merecemos es un
RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN, que, por cierto,
es muy breve:

- ① Definición del conjunto P .
- ② P es un conjunto no vacío, ordenado e induutivo.
- ③ Por el lema de Zorn, P tiene algún elemento
maximal.
- ④ Dicho elemento maximal es el funcional
buscado.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE (Y, ADEMÁS, CURIOSA):
El Teorema de Hahn-Banach lo enuncia y
prueba en ambiente de ESPACIOS VECTORIALES
(Si repasas el enunciado y demostración no
verás la noción de espacio normado por
vinculada). Si te interesa sus principales

aplicaciones se tienen en espacios normados.
Buena prueba de ello es el corolario siguiente,
que en algunos textos se conoce con el nombre
de "Teorema de Hahn-Banach".

COROLARIO 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ normado, $G \subset E$ un
subespacio vectorial de E y $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ lineal y
continua. Entonces existe $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, lineal y
continua $t.g. f|_G = g$ y $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$.

La demostración es "trivial", aplicando el Teorema
de H-B para $p: E \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|g(x)\|_G$, donde

$$\|g\|_{G'} = \sup_{x \in \overline{B}_G(0;1)} |g(x)|.$$

(No obstante, no te fíes de las trivialidades y
haz una demostración completa del corolario).

OTRA OBSERVACIÓN IMPORTANTE: ya tenemos
una forma de demostrar la existencia de
"infinitas aplicaciones lineales y continuas,
NO TRIVIALES DE E en \mathbb{R} , donde $(E, \|\cdot\|)$ es
un espacio normado de dimensión infinita".

En efecto, $L^1(E, \mathbb{H} \cdot \mathbb{H})$ es un espacio normado de dimensión infinita, digamos cualquier subespacio vectorial G , de dimensión finita, de E . Definimos $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ mediante aplicación lineal, que por ser $\dim G$ finita, es continua (¿habrás olvidado esto?). El corolario anterior nos "proporciona" una aplicación lineal $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continua, no trivial, que extiende a g .

Parece que "problema resuelto". No obstante, quiero que reflexiones sobre lo que expongo a continuación.

Ejercicio 1. Sea $E = (C^1([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$ y G el sub-vectorial de E generado por la función $\sin(x)$.

- Demuestra que $g: G \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto u'(0)$ es lineal y continua.
- Demuestra que $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $u \mapsto u'(0)$ es lineal y no continua.
- ¿Cómo se explican los apartados a) y b) teniendo en cuenta el Corolario 1 anterior?

contraria del Teorema de H-B.

Ejercicio 2. Recordemos que si $(E(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces los hiperplanos son o cerrados o densos. Sabemos que hay hiperplanos densos (¿Por qué?) Prueba que también existen hiperplanos cerrados.

Sugerencia: un hiperplano en E viene dado por $\times E : f(x) = \alpha \}$ donde $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal, e indudablemente cero y $\alpha \in \mathbb{R}$. Debes recordar algunos resultados del tema anterior (operadores lineales).



H. Hahn
(1879-1934)



S. Banach
(1892-1945)

