ALGEBRA III (Doble grado Informática-Matemáticas)
Prueba parcial (31/10/2019)

EJERCICIOS

(1) **[2.5 puntos]** Considerar el cuerpo de números $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.
   (a) Determinar el grado de la extensión $E/\mathbb{Q}$ y una base de ella. Discutir también su normalidad.
   (b) Describe los elementos del grupo $G = G(E/\mathbb{Q})$ y determina sus respectivos órdenes.
   (c) Prueba que $G \cong D_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1 = s^2,\ sr = r^3 s\rangle$.
   (d) Determina a que subgrupos de G corresponden, por la Conexión de Galois, los subcuerpos $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2})$ y $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2})$.
   (e) Determina a que subcuerpos de E corresponden, por la conexión de Galois, los subgrupos cíclicos de G.

(2) **[2.5 puntos]** Sea $z = z_{10}$.
   (a) Determina el polinomio Φ_{10}, el grado de la extensión $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$ y muestra una base de la misma.
   (b) Calcula, expresando el resultado en función la base, la suma $(z + z^9) + (z^3 + z^7)$ y el producto $(z + z^9)(z^3 + z^7)$.
   (c) Argumenta que $z + z^9$ y $z^3 + z^7$ son las raíces del polinomio $x^2 - x - 1$ y entonces que $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ y que $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.
   (d) Describe el grupo $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ y el retículo de sus subgrupos.
   (e) Describe el retículo de subcuerpos de $\mathbb{Q}(z)$.

Tiempo: 1 hora y 45 minutos.

2.a) $\dfrac{x^{10}-1}{\phi_1\phi_2\phi_5} = \dfrac{x^{10}-1}{(x^5-1)(x+1)} = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$

$\mathrm{Irr}(z, \mathbb{Q}) = \phi_{10} \Rightarrow [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 4 \Rightarrow B_{\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}} = \{1, z, z^2, z^3\}$

(b) $x^9 + x^7 + x^3 + x = (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 - 1) + 1 \Rightarrow (z + z^9) + (z^3 + z^7) = 1$

$(z+z^9)(z^3+z^7) = z^4 + z^8 + z^2 + z^6 = z^3 + z - 1 + z^8 + z^6 = z^3 + z - 1 + (-z^3 - z) = -1$

$x^8 + x^6 = (x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x) - x^3 - x$

(c) En general, el polinomio mónico de grado 2 que tiene como raíces α y β es

$$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta.$$

$$(x - (z+z^9))(x - (z^3+z^7)) = x^2 - x - 1 \quad ; \quad x^2 - x - 1 = 0 \iff x = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$z + z^9 = z + \bar{z} = 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0 \implies z + z^9 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$z^7 = z^{-3} \text{ y } z^3 = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right) \Rightarrow z^7 = \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\Rightarrow z^3 + z^7 = 2\cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{5}\right) = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

(d) $G \equiv G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}) \approx \mathbb{Z}_{10}^{\times} = \{1,3,7,9\} \Rightarrow G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i : \mathbb{Q}(z) \longrightarrow \mathbb{Q}(z)$

$\mathbb{Q}$- inmersiones tal que $\sigma_i(z) = z^i$, $i = 1,3,7,9\}$

$$\text{ord}(\sigma_1) = 1$$

$$\sigma_3^{\,2}(z) = \sigma_3(z^3) = z^9 = \sigma_9(z) \Rightarrow \text{ord}(\sigma_3) = 4 \text{ y } \text{ord}(\sigma_9) = 2$$

$$\sigma_7^{\,2}(z) = \sigma_7(z^7) = z^{49} = z^9 = \sigma_3^{\,2}(z) \Rightarrow \text{ord}(\sigma_7) = 4$$

$$\begin{tikzcd} \langle\sigma_3\rangle = G = \langle\sigma_7\rangle \\ \langle\sigma_9\rangle \arrow[u, "2"'] \\ \{id\} \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd}$$

(e)

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}(z) \\ \mathbb{Q}(z)^{\langle\sigma_9\rangle} \arrow[u, "2"'] \\ \mathbb{Q} \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathbb{Q}(z) \\ \mathbb{Q}(z+\bar{z}) \arrow[u, "2"'] \\ \mathbb{Q} \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd} \equiv \begin{tikzcd} \mathbb{Q}(z) \\ \mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{5})) \arrow[u, "2"'] \\ \mathbb{Q} \arrow[u, "2"'] \end{tikzcd}$$

Ejercicio 7. *Sea $n > 2$ y $z = z_n$ la raíz n-ésima primitiva de la unidad.*

(1) *Observando que $(z+\bar{z}) = 2\cos\frac{2\pi}{n}$, probar que z y $\bar{z}$ son las raíces del polinomio $x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.*

(2) *Argumentar que $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \le \mathbb{Q}(z)$, pero $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \ne \mathbb{Q}(z)$.*

(3) *Probar que $Irr(z, \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})) = x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}x + 1$ y que $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})] = 2$.*

(4) *Probar que $[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$ y que el polinomio $Irr(\cos\frac{2\pi}{n}, \mathbb{Q})$ es de grado $\varphi(n)/2$.*

Indicación de solución: (1) Puesto que $z^{-1} = \bar{z}$, tenemos las igualdades $z\bar{z} = 1$ y $z + \bar{z} = 2\cos(\frac{2\pi}{n})$, de donde el z y $\bar{z}$ son las raíces raíz del polinomio $x^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{n})x + 1$.

(2) $\cos(\frac{2\pi}{n}) = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}(z + z^{n-1}) \in \mathbb{Q}(z)$. Los cuerpos son distintos pues $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \le \mathbb{R}$ y $z \notin \mathbb{R}$ al ser $n \ge 3$.

(4) Se deduce de los apartados anteriores, teniendo en cuenta la torre

$$\mathbb{Q} \le \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) \le \mathbb{Q}(z).$$