Tema 1

Cuestiones básicas en espacios normados

La mayoría de los espacios de funciones, de cuyo estudio se ocupa el Análisis Funcional, son espacios vectoriales reales o complejos, provistos de una norma adecuada para trabajar en ellos, es decir, son *espacios normados*. De hecho, dicha norma casi siempre es completa, así que se trata de *espacios de Banach*. Por ello, nuestro estudio del Análisis Funcional se inicia recordando los conceptos de espacio normado y espacio de Banach, junto con algunas de las nociones básicas que se manejan en tales espacios y que en esencia deben ser conocidas.

1.1. Norma y distancia

Damos por conocida la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo conmutativo. En lo que sigue trabajaremos siempre con espacios vectoriales reales o complejos. Usaremos la letra $\mathbb{K}$ para denotar indistintamente al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Por tanto, cualquier concepto o resultado tendrá casi siempre dos versiones, una cuando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (caso real) y otra para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (caso complejo).

Una **seminorma** en un espacio vectorial X es una función $\varphi : X \to \mathbb{R}$ verificando:

$$\begin{array}{rl} (i) & \varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) \qquad \forall x,y \in X \\ (ii) & \varphi(\lambda x) = |\lambda|\, \varphi(x) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X \end{array}$$

Estas condiciones implican claramente que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(x) \geqslant 0$ para todo $x \in X$, así que *una seminorma no puede tomar valores negativos.* Cuando la igualdad $\varphi(x) = 0$ sólo se verifica para $x = 0$, decimos que φ es una norma. Para $x \in X$, se suele escribir entonces $\|x\|$ en lugar de $\varphi(x)$.

Así pues, una **norma** en X es una función $x \mapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}$, verificando:

$$\begin{array}{rl} (i) & \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \qquad \forall x,y \in X \\ (ii) & \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in X \\ (iii) & x \in X,\ \|x\| = 0 \implies x = 0 \end{array} \tag{1}$$

Un **espacio normado** es un espacio vectorial X dotado de una norma $\|\cdot\|$. Para cada $x \in X$, se dice también que $\|x\|$ es la norma del vector x, un número real no negativo que se interpreta geométricamente como la longitud de un segmento, y que no debemos confundir con la norma del espacio X, que es una función de X en $\mathbb{R}$.

Las propiedades (1), que ha de cumplir toda norma, tienen un significado geométrico que conviene resaltar. La condición (i) se conoce como **desigualdad triangular**, pues afirma que cada lado de un triángulo es menor o igual que la suma de los otros dos. La condición (ii) se interpreta mejor si la desdoblamos en dos casos particulares. Por una parte, para $\rho \in \mathbb{R}^+$, la aplicación $x \mapsto \rho x$, biyectiva de X en sí mismo, es la **homotecia** de razón ρ, y (ii) nos dice que la norma es *homogénea por homotecias*, ya que $\|\rho x\| = \rho \|x\|$ para cualesquiera $x \in X$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$. Por otra parte, para $\mu \in \mathbb{K}$ con $|\mu| = 1$, la aplicación $x \mapsto \mu x$, también biyectiva, es un **giro**, y (ii) nos dice que la norma es *invariante por giros*, ya que $\|\mu x\| = \|x\|$ para cualesquiera $x \in X$ y $\mu \in \mathbb{K}$ con $|\mu| = 1$. Nótese que en el caso real sólo hablamos en realidad de un giro, pues se tiene $\mu = \pm 1$, y el caso $\mu = 1$ es trivial. Finalmente, (iii) es una condición de *no degeneración*, pues nos dice que la longitud de un segmento sólo puede ser cero cuando su origen y extremo coinciden, es decir, cuando se trata de un segmento degenerado.

En todo espacio normado X usamos siempre la **distancia** $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(x, y) = \|y - x\| \qquad \forall x, y \in X \tag{2}$$

Es fácil ver, usando las propiedades de la norma, que en efecto d es una distancia en X. Nótese que d permite a su vez recuperar la norma, pues se tiene $\|x\| = d(0, x)$ para todo $x \in X$.

Observemos también que la distancia d tiene un buen comportamiento con respecto a la estructura de espacio vectorial. Más concretamente, fijado $z \in X$, la aplicación $x \mapsto x + z$, de nuevo una biyección de X en sí mismo, es la **traslación** determinada por el vector z, y la distancia d es *invariante por traslaciones*, pues evidentemente verifica que:

$$d(x+z, y+z) = d(x, y) \qquad \forall x, y, z \in X$$

Por otra parte, la distancia d es *invariante por giros y homogénea por homotecias,* ya que

$$d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y) \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall x, y \in X$$

1.2. Topología de la norma

En cualquier espacio normado X, usando su distancia d dada por (2), podemos manejar todas las nociones propias de los espacios métricos. En particular, disponemos de la topología generada por la distancia d que suele denominarse **topología de la norma**. Salvo que se diga expresamente lo contrario, cualquier noción topológica que manejemos en un espacio normado se refiere siempre a la topología de la norma. Así pues, un conjunto $A \subset X$ es *abierto* cuando para cada $x \in A$, se puede encontrar un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que la bola abierta de centro x y radio r está contenida en A. Por tanto, para cada $x \in X$, las bolas abiertas de centro x forman una base de entornos de x, e igual ocurre con las correspondientes bolas cerradas. El manejo de estos entornos básicos resulta especialmente cómodo con la notación que pasamos a explicar.

Si A y B son subconjuntos de un espacio vectorial X y $\Lambda \subset \mathbb{K}$, es natural escribir

$$A+B = \{x+y \,:\, x\in A,\ y\in B\} \qquad \text{y} \qquad \Lambda B = \{\lambda y \,:\, \lambda\in\Lambda,\ y\in B\}$$

Si $A=\{x\}$ tiene un sólo elemento, podemos escribir $x+B$ en lugar de $\{x\}+B$. Análogamente, cuando $\Lambda=\{\lambda\}$ tiene un sólo elemento, escribimos λB en vez de $\{\lambda\}B$.

Pues bien, consideremos la **bola unidad** de un espacio normado X, esto es, el conjunto

$$B = \{b\in X \,:\, \|b\| \leqslant 1\}$$

Es claro que, para $x\in X$ y $r\in\mathbb{R}^+$, el conjunto $x+rB$ es la bola cerrada de centro x y radio r. Así pues, cualquier bola cerrada se obtiene a partir de la bola unidad mediante una homotecia y una traslación. Análoga situación se tiene, obviamente, usando bolas abiertas: si llamamos U a la **bola abierta unidad** de X, esto es, $U=\{u\in X \,:\, \|u\|<1\}$, es claro que $x+rU$ es la bola abierta de centro x y radio r.

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son **equivalentes** cuando dan lugar a la misma topología. Repasamos el siguiente resultado del que se deduce un cómodo criterio para decidir si dos normas son equivalentes:

- *Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

  (i) *La topología de la norma $\|\cdot\|_1$ contiene a la de $\|\cdot\|_2$.*
  (ii) *Existe una constante $\rho\in\mathbb{R}^+$ tal que $\|x\|_2 \leqslant \rho\|x\|_1$ para todo $x\in X$.*

Para la demostración denotamos por B_1 y B_2 a las bolas unidad de X para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ respectivamente.

$(i)\Rightarrow(ii)$. Como B_2 es un entorno de cero para $\|\cdot\|_2$, de (i) deducimos que también lo es para $\|\cdot\|_1$, luego existe $\delta\in\mathbb{R}^+$ tal que $\delta B_1\subset B_2$, es decir, $B_1\subset\rho B_2$ donde $\rho = 1/\delta$. Para $x\in X$, escribiendo $x=\|x\|_1\, u$ con $u\in B_1$, tenemos $\|u\|_2\leqslant\rho$, de donde deducimos claramente (ii), ya que $\|x\|_2 = \|u\|_2\|x\|_1 \leqslant \rho\|x\|_1$.

$(ii)\Rightarrow(i)$. De (ii) deducimos $B_1\subset\rho B_2$, es decir, $(1/\rho)B_1\subset B_2$. Si A es un subconjunto abierto de X para la norma $\|\cdot\|_2$ y $x\in A$, existe un $r\in\mathbb{R}^+$ tal que $x+rB_2\subset A$, de donde deducimos que $x+(r/\rho)B_1\subset x+rB_2\subset A$. Esto prueba que A es abierto para la norma $\|\cdot\|_1$, luego se cumple (i). ■

Del resultado anterior deducimos obviamente la siguiente caracterización:

- *Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, existen dos constantes $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^+$ tales que*

$$\alpha\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta\|x\|_1 \qquad \forall x\in X$$

Destacamos una consecuencia importante del criterio anterior, que se refiere al concepto de acotación en espacios normados.

Recordemos que un subconjunto A de un espacio métrico X está **acotado** cuando está contenido en una bola, en cuyo caso, podemos elegir libremente el centro de dicha bola, es decir, para cada $x \in X$, existe una bola de centro x que contiene al conjunto A. En particular, cuando X es un espacio normado, vemos que A está acotado si y sólo si, está contenido en una bola de centro cero, es decir, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|x\| \leqslant M$ para todo $x \in A$, lo que se suele indicar escribiendo $\sup \{ \|x\| : x \in A \} < \infty$.

Es sabido que la acotación en un espacio métrico no es una propiedad topológica. Más concretamente, dos distancias en un mismo conjunto pueden ser equivalentes, es decir, generar la misma topología, y no dar lugar a los mismos conjuntos acotados. Sin embargo, del criterio recién probado para la equivalencia entre dos normas, deducimos obviamente que dos normas equivalentes dan lugar a los mismos conjuntos acotados:

- *Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas equivalentes en un espacio vectorial X, un subconjunto de X está acotado para la norma $\|\cdot\|_1$ si, y sólo si, está acotado para $\|\cdot\|_2$.*

Resaltemos ahora una propiedad de los espacios normados que usaremos con frecuencia.

- *En todo espacio normado X se tiene:*

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leqslant \|x-y\| \qquad \forall x,y \in X \tag{3}$$

  luego la norma de X es una función continua.

Para $x,y \in X$ la desigualdad triangular nos dice que $\|x\| \leqslant \|x-y\| + \|y\|$, o lo que es lo mismo, $\|x\| - \|y\| \leqslant \|x-y\|$, pero intercambiando los papeles de x e y, también tenemos que $\|y\| - \|x\| \leqslant \|y-x\| = \|x-y\|$, luego se verifica (3). Dicha desigualdad nos dice que la norma es una función lipschitziana, luego continua. ■

1.3. Subespacios y bases algebraicas

Fijemos un espacio vectorial X, para repasar algunas nociones algebraicas bien conocidas. Para abreviar, a los subespacios vectoriales de X les llamaremos simplemente subespacios, así que un **subespacio** de X es un conjunto no vacío $M \subset X$ tal que $\mathbb{K}M + M \subset M$.

Si ahora E es un subconjunto no vacío de X, denotaremos por $\operatorname{Lin} E$ al conjunto de todas las **combinaciones lineales** de vectores de E, es decir:

$$\operatorname{Lin} E = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \, : \, n \in \mathbb{N}, \; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \; x_1, x_2, \ldots, x_n \in E \right\}$$

Es claro que $\operatorname{Lin} E$ es un subespacio de X que contiene a E, así como que, todo subespacio de X, que contenga a E, ha de contener también a $\operatorname{Lin} E$. Así pues, $\operatorname{Lin} E$ es el mínimo subespacio de X que contiene a E, por lo que le llamamos **subespacio engendrado** por E.

Por otra parte, E es un conjunto de vectores **linealmente independientes** cuando ningún vector de E puede expresarse como combinación lineal de los restantes, es decir, cuando para todo $x \in E$ se tiene que $x \notin \operatorname{Lin}\big(E \setminus \{x\}\big)$.

Una **base** del espacio vectorial X es un conjunto E de vectores linealmente independientes tal que $\operatorname{Lin} E = X$. Ello equivale claramente a que cada vector de X se exprese, de manera única, como una combinación lineal de elementos de E, con coeficientes no nulos.

Del lema de Zorn se deduce que X siempre tiene una base, y de hecho, todo conjunto de vectores linealmente independientes de X está contenido en una base. Además, todas las bases son equipotentes, es decir, si E_1 y E_2 son bases de X, existe una aplicación biyectiva de E_1 sobre E_2. Ello permite definir la **dimensión** de X como el cardinal común a todas las bases de X. Esta noción general requiere la teoría de cardinales, pero aquí sólo usaremos los casos más sencillos. Concretamente, X tiene **dimensión finita**, cuando tiene una base finita, en cuyo caso la dimensión de X es el número elementos de cualquiera de sus bases. Análogamente, X tiene **dimensión numerable**, cuando tiene una base numerable, y obviamente se pueden dar dos casos: o bien X tiene dimensión finita, o bien todas sus bases son equipotentes a $\mathbb{N}$.

En adelante, a las bases de un espacio vectorial X, en el sentido que acabamos de recordar, las llamaremos **bases algebraicas**, para distinguirlas de otro tipo de bases que pronto vamos a presentar, y que son mucho más útiles en Análisis Funcional.

Si X es un espacio normado y M un subespacio de X, está claro que la norma de X, como función de X en $\mathbb{R}$ que es, se puede restringir a M, con lo que claramente se obtiene una norma en M, a la que llamamos **norma inducida** por X en M. Resaltamos así que la topología de M es la inducida por la topología de X, es decir, los subconjuntos abiertos de M son las intersecciones con M de los abiertos de X. Salvo que se diga lo contrario, todo subespacio M de un espacio normado X se considera siempre como espacio normado, con la norma inducida. No obstante, en ciertas situaciones veremos que puede ser preferible usar en M otra norma, distinta de la inducida por X, e incluso no equivalente a ella.

1.4. Espacios vectoriales topológicos

Como ocurría con la norma y con la distancia, la topología de un espacio normado tiene un buen comportamiento con respecto a las operaciones de espacio vectorial, como muestra el siguiente enunciado.

- *Si X es un espacio normado, la función suma $(x,y) \mapsto x+y$, de $X \times X$ en X, es continua, considerando en $X \times X$ la topología producto. El producto por escalares $(\lambda,x) \mapsto \lambda x$ también es una función continua de $\mathbb{K} \times X$ en X, considerando en $\mathbb{K}$ su topología usual y en $\mathbb{K} \times X$ la producto.*

La continuidad de la suma es consecuencia inmediata de la desigualdad triangular, pues se tiene claramente

$$\|(x+y)-(u+v)\| = \|x-u\| + \|y-v\| \qquad \forall x,y,u,v \in X$$

Por otra parte, para $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$ y $x,u \in X$ tenemos

$$\|\lambda x - \mu u\| \leqslant \|\lambda(x-u) + (\lambda-\mu)u\| \leqslant |\lambda|\,\|x-u\| + |\lambda-\mu|\,\|u\|$$

de donde se deduce claramente la continuidad del producto por escalares. ■

Una topología en un espacio vectorial, aunque no proceda de una norma, puede hacer cierto el enunciado anterior. Concretamente, un **espacio vectorial topológico** (abreviado EVT) es, por definición, un espacio vectorial X en el que se dispone de una topología, con la que la suma y el producto por escalares son funciones continuas, usando la topología usual en $\mathbb{K}$ y, tanto en $X \times X$ como en $\mathbb{K} \times X$, la topología producto. Así pues, cualquier espacio normado es un ejemplo de EVT. Un espacio vectorial $X \neq \{0\}$, con la topología trivial $\{\emptyset, X\}$, es un ejemplo (trivial) de EVT cuya topología no procede de una norma. Obviamente existen ejemplos más interesantes, de hecho el concepto de EVT es el más importante del Análisis Funcional, pero por ahora nos interesan sólo los espacios normados.

Ciertas propiedades de los espacios normados se deducen del resultado anterior, por lo que son válidas en cualquier EVT. Destacaremos dos ejemplos relevantes.

- *Si X es un EVT, para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $z \in X$, la aplicación $x \mapsto \lambda x + z$ es un homeomorfismo de X. Equivalentemente, las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos de X.*

La continuidad de las operaciones de X hace que las aplicaciones $x \mapsto \lambda x$ y $x \mapsto x + z$ sean continuas. Si $f(x) = \lambda x + z$ para todo $x \in X$, deducimos que f es continua, como composición de funciones continuas. Además, f es biyectiva y $f^{-1}(x) = (1/\lambda)x - (z/\lambda)$ para todo $x \in X$. Lo demostrado para f se puede pues aplicar a f^{-1} para obtener que f^{-1} también es continua, luego f es un homeomorfismo. Como casos particulares, para $\lambda = 1$ tenemos las traslaciones, mientras que para $z = 0$, tenemos los giros si $|\lambda| = 1$, y las homotecias si $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Recíprocamente, f se obtiene componiendo una homotecia con un giro y una traslación. ■

- *En todo EVT, el cierre de un subespacio es a su vez un subespacio.*

Si X es un EVT y M un subespacio de X, queremos probar que $\overline{M}$ es subespacio de X. Denotando por $\sigma : X \times X \to X$ a la suma, y $\pi : \mathbb{K} \times X \to X$ al producto por escalares, que son funciones continuas, se trata de probar que $\sigma\big(\overline{M} \times \overline{M}\big) \subset \overline{M}$ y que $\pi\big(\mathbb{K} \times \overline{M}\big) \subset \overline{M}$.

Por ser M un subespacio de X tenemos $\sigma(M \times M) \subset M \subset \overline{M}$, de donde $M \times M \subset \sigma^{-1}\big(\overline{M}\big)$. Como, por ser σ continua, $\sigma^{-1}\big(\overline{M}\big)$ es cerrado, deducimos que $\overline{M} \times \overline{M} = \overline{M \times M} \subset \sigma^{-1}\big(\overline{M}\big)$, es decir, $\sigma\big(\overline{M} \times \overline{M}\big) \subset \overline{M}$. De forma similar, como $\pi\big(\mathbb{K} \times M\big) \subset M \subset \overline{M}$, vemos que el conjunto cerrado $\pi^{-1}(\overline{M})$ contiene a $\mathbb{K} \times M$, luego también a $\overline{\mathbb{K} \times M} = \mathbb{K} \times \overline{M}$, como se quería. ■

Contra lo que la intuición parece indicar, pronto veremos que un subespacio de un espacio normado puede no ser cerrado.

1.5. Complitud y espacios de Banach

Ni que decir tiene, la topología de un espacio normado X, como la de todo espacio métrico, se caracteriza mediante la convergencia de sucesiones. Recordamos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X es **convergente**, cuando existe $x \in X$ tal que $\big\{ \|x_n - x\| \big\} \to 0$, en cuyo caso x es único, le llamamos **límite** de la sucesión $\{x_n\}$ y escribimos $\{x_n\} \to x$, o bien, $x = \lim_{n \to \infty} x_n$.

Para un conjunto $A \subset X$ y un punto $x \in X$, sabemos que $x \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to x$. Por tanto, A es cerrado si, y sólo si, para toda sucesión convergente $\{x_n\}$ de puntos de A se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in A$. De esta forma, la convergencia de sucesiones caracteriza a los conjuntos cerrados, y por tanto a la topología de X.

Recordemos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de X es una sucesión de Cauchy cuando, para cada $\varepsilon > 0$, puede encontrarse $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,m \geqslant n_0$ se tiene $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Es bien sabido que toda sucesión convergente es siempre una sucesión de Cauchy y, cuando se verifica el recíproco decimos que la norma de X es **completa**, o que el espacio normado X es completo. A los espacios normados completos también se les llama **espacios de Banach**, en honor del matemático polaco Stefan Banach (1892-1945), el padre del Análisis Funcional.

De manera más general, dado un subconjunto A de un espacio normado X, decimos que A es **completo** cuando toda sucesión de Cauchy de puntos de A converge a un punto de A; en tal caso, es claro que A tiene que ser cerrado en X. El recíproco es cierto cuando el propio X es completo, es decir: si A es un subconjunto de un espacio de Banach X, entonces A es completo si, y sólo si, A es cerrado en X.

El criterio probado anteriormente, para la equivalencia entre dos normas, implica claramente que dos normas equivalentes, en un mismo espacio vectorial, dan lugar a las mismas sucesiones de Cauchy, luego una de ellas es completa si, y sólo si, lo es la otra. Por tanto, un espacio de Banach lo sigue siendo cuando sustituimos su norma por otra equivalente a ella.

1.6. Series

Nociones conocidas sobre convergencia de series numéricas pueden extenderse fácilmente para aplicarlas a series en espacios normados. A cada sucesión $\{x_n\}$ de vectores de un espacio normado X asociamos la **serie** $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ de término general $\{x_n\}$, que es la sucesión $\{S_n\}$ definida por $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Cuando dicha serie converge, como sucesión que es, su límite recibe el nombre de **suma de la serie** y se denota por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. Más concretamente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente, como $x_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos claramente que $\{x_n\} \to 0$. Como bien sabemos, el recíproco es falso, incluso en el caso $X = \mathbb{R}$.

Por otra parte, decimos que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} x_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie numérica $\sum\limits_{n\geqslant 1} \|x_n\|$ es convergente. Por tratarse de una serie de términos positivos, esta última afirmación suele expresarse simplemente escribiendo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.

Como ocurre con las series de números reales, en todo espacio de Banach, la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia. Pero además, esta implicación caracteriza los espacios de Banach como probamos a continuación.

Criterio de complitud. *Un espacio normado X es completo si, y sólo si, verifica que toda serie absolutamente convergente de vectores de X es convergente.*

Demostración. Una implicación se prueba exactamente igual que en $\mathbb{R}$. Si $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es una serie absolutamente convergente en un espacio de Banach X, para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k \qquad \text{y} \qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

Para $m,n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, la desigualdad triangular nos dice claramente que

$$\|S_n - S_m\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| = \sigma_n - \sigma_m = |\sigma_n - \sigma_m|$$

desigualdad que es trivial cuando $n = m$ y no se altera al intercambiar m con n, luego es válida para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$. Como por hipótesis, la sucesión $\{\sigma_n\}$ es de Cauchy, deducimos de dicha desigualdad que la sucesión $\{S_n\}$ también lo es. La complitud de X nos dice entonces que $\{S_n\}$ converge, es decir, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es convergente, como queríamos.

Para probar la implicación recíproca, supongamos que X es un espacio normado en el que toda serie absolutamente convergente es convergente, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,m \geqslant n_k$ se tiene $\|x_n - x_m\| < 1/2^k$. Definiendo por inducción $\sigma(1) = n_1$ y $\sigma(k+1) = \max\{n_{k+1}, \sigma(k)+1\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtenemos una aplicación estrictamente creciente $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Para $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\sigma(k+1) > \sigma(k) \geqslant n_k$ luego

$$\left\|x_{\sigma(k+1)} - x_{\sigma(k)}\right\| < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Tomando $y_1 = x_{\sigma(1)}$ e $y_{n+1} = x_{\sigma(n+1)} - x_{\sigma(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} y_n$ es absolutamente convergente, luego es convergente. Pero observamos que dicha serie coincide con la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$, pues para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ se tiene claramente

$$\sum_{k=1}^{n} y_k = x_{\sigma(1)} + \sum_{k=2}^{n} \left(x_{\sigma(k)} - x_{\sigma(k-1)}\right) = x_{\sigma(1)} + x_{\sigma(n)} - x_{\sigma(1)} = x_{\sigma(n)}$$

Así pues, la sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente, luego $\{x_n\}$ también lo es, por tratarse de una sucesión de Cauchy que posee una sucesión parcial convergente. Hemos probado así que toda sucesión de Cauchy en X es convergente, es decir, X es un espacio de Banach, como queríamos demostrar. ■

Merece la pena resaltar la idea clave del último razonamiento: *toda sucesión de Cauchy en un espacio normado admite una sucesión parcial, que es una serie absolutamente convergente.*

Tema 2

Ejemplos de espacios normados

Vamos a presentar una amplia colección de espacios, que permitan ilustrar los principales teoremas del Análisis Funcional. Para ello, juegan un papel clave dos herramientas muy útiles: las *desigualdades de Hölder y Minkowski*. A partir de ellas se define fácilmente una amplia gama de normas en el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^N$, con $N \in \mathbb{N}$ arbitrario, obteniendo así numerosos espacios normados de dimensión finita. Casi con la misma facilidad, se construyen los que se conocen como *espacios de Banach clásicos*, agrupados en dos grandes familias. Por una parte, los espacios clásicos de sucesiones son los ejemplos más sencillos de espacios de Banach de dimensión infinita. Por otra, tenemos los espacios de funciones integrables, cuya construcción involucra de manera decisiva la integral de Lebesgue. Su complitud se conoce como *teorema de Riesz-Fischer*, y se considera como el detonante que dio lugar al nacimiento del Análisis Funcional. Presentaremos también algunos espacios de funciones continuas. En conjunto, obtenemos una amplia gama de espacios de Banach, que muestra la gran variedad de contextos en los que el Análisis Funcional tiene importantes aplicaciones.

2.1. Desigualdades de Hölder y Minkowski

Algunos de los espacios que vamos a construir dependerán de un parámetro p, pudiendo ser $p \in \mathbb{R}$ con $p \geqslant 1$, pero también $p = \infty$, lo que se suele indicar escribiendo $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Excluidos los valores extremos $p = 1$ y $p = \infty$, o si se quiere, para $1 < p < \infty$, definimos el *exponente conjugado* de p, que denotaremos por p^*, mediante la igualdad $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$. Observamos que también $1 < p^* < \infty$ y que la relación entre p y p^* es simétrica: $\big(p^*\big)^* = p$. La concavidad del logaritmo nos da una desigualdad, previa a las dos que más nos interesan:

Desigualdad de Young. *Para $1 < p < \infty$ y cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene:*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}$$

Demostración. Aquí y en todo lo que sigue, se entiende obviamente que $0^p = 0^{p^*} = 0$. Si $a = 0$ o $b = 0$ no hay nada que demostrar y, en otro caso, usando que el logaritmo es una función cóncava obtenemos

$$\log\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^{p^*}}{p^*}\right) \geqslant \frac{1}{p}\log a^p + \frac{1}{p^*}\log b^{p^*} = \log a + \log b = \log(ab)$$

La desigualdad buscada se obtiene usando que la exponencial es una función creciente. ■

Deducimos sin gran dificultad una segunda desigualdad, más relevante:

Desigualdad de Hölder. *Si* $1 < p < \infty$ *y* $N \in \mathbb{N}$, *para* $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$ *se tiene:*

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} {a_k}^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} {b_k}^{p^*}\right)^{1/p^*} \tag{1}$$

Demostración. Llamando $\alpha = \left(\sum_{k=1}^{N} {a_k}^p\right)^{1/p}$ y $\beta = \left(\sum_{k=1}^{N} {b_k}^{p^*}\right)^{1/p^*}$ a los dos factores que aparecen en el segundo miembro de (1), podemos claramente suponer que $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, pues en otro caso (1) es evidente. Usando la desigualdad de Young, podemos ahora escribir

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\beta}\sum_{k=1}^{N} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{\alpha}\,\frac{b_k}{\beta} \leqslant \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{a_k^p}{p\,\alpha^p} + \frac{b_k^{p^*}}{p^*\,\beta^{p^*}}\right) \\ &= \frac{1}{p\alpha^p}\sum_{k=1}^{N} a_k^p + \frac{1}{p^*\beta^{p^*}}\sum_{k=1}^{N} b_k^{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1\end{aligned}$$

de donde se deduce claramente (1). ■

En un tercer paso, obtenemos ya el resultado que nos va a permitir probar la desigualdad triangular para muchas de las normas que vamos a estudiar.

Desigualdad de Minkowski. *Para* $1 \leqslant p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ *y* $a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$ *se tiene:*

$$\left(\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^p\right)^{1/p}$$

Demostración. Trabajamos con $p > 1$, pues el caso $p = 1$ es evidente. Abreviamos la notación escribiendo

$$\alpha = \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p\right)^{1/p}, \qquad \beta = \left(\sum_{k=1}^{N} b_k^p\right)^{1/p} \qquad \text{y} \qquad \gamma = \left(\sum_{k=1}^{N} (a_k + b_k)^p\right)^{1/p}$$

con lo que debemos probar que $\gamma \leqslant \alpha + \beta$. Partimos de una igualdad evidente:

$$\gamma^p = \sum_{k=1}^{N} a_k (a_k + b_k)^{p-1} + \sum_{k=1}^{N} b_k (a_k + b_k)^{p-1}$$

Para cada uno de los sumandos que han aparecido en el segundo miembro de la igualdad anterior, usamos ahora la desigualdad de Hölder. Como $(p-1)\,p^* = p$, obtenemos:

$$\gamma^p \leqslant (\alpha+\beta)\left(\sum_{k=1}^{N}(a_k+b_k)^p\right)^{1/p^*} = (\alpha+\beta)\,\gamma^{p/p^*}$$

Si $\gamma = 0$ no hay nada que demostrar y, en otro caso, podemos dividir ambos miembros de la desigualdad anterior por $\gamma^{p/p^*} > 0$. Teniendo en cuenta que $p-(p/p^*) = 1$, obtenemos directamente la desigualdad buscada. ■

2.2. Algunos espacios normados de dimensión finita

Fijado $N \in \mathbb{N}$, vamos a definir una amplia gama de normas en el espacio vectorial $\mathbb{K}^N$, producto cartesiano de N copias de $\mathbb{K}$. En vez de usar subíndices, las componentes de cada vector $x \in \mathbb{K}^N$ se denotarán con paréntesis, es decir, escribiendo $x = \big(x(1), x(2), \ldots, x(N)\big)$, pues en realidad x no es otra cosa que una aplicación del conjunto $\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant N\}$ en $\mathbb{K}$.

Pues bien, para $1 \leqslant p < \infty$ definimos

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{N} |x(k)|^p\right)^{1/p} \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{2}$$

mientras que en el caso $p = \infty$ escribimos

$$\|x\|_\infty = \max\big\{\,|x(k)| \,:\, k \in \mathbb{N},\ k \leqslant N\big\} \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{3}$$

La notación se justifica por el hecho de que $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$ para todo $x \in \mathbb{K}^N$, como se puede fácilmente comprobar.

Para ver que, en todos los casos, $\|\cdot\|_p$ es una norma en $\mathbb{K}^N$, dos de las condiciones a comprobar son evidentes y sólo la desigualdad triangular merece comentario. Para $p = \infty$ dicha desigualdad también es inmediata, mientras que, para $1 \leqslant p < \infty$, se deduce de la desigualdad de Minkowski, pues para cualesquiera $x, y \in \mathbb{K}^N$ se tiene

$$\begin{aligned}\big\|x+y\big\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{N}\big|x(k)+y(k)\big|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}\big(|x(k)|+|y(k)|\big)^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{N}\big|x(k)\big|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{N}\big|y(k)\big|^p\right)^{1/p} = \big\|x\big\|_p + \big\|y\big\|_p\end{aligned}$$

Comprobemos ahora que todas las normas recién definidas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes. Para ello usamos la base usual $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{K}^N$, que viene dada por $e_k(k) = 1$ y $e_k(j) = 0$ para cualesquiera $k, j \in \mathbb{N}$ con $k, j \leqslant N$ y $k \neq j$. Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $x \in \mathbb{K}^N$, la desigualdad triangular nos dice que

$$\big\|x\big\|_p = \left\|\sum_{k=1}^{N} x(k)\,e_k\right\|_p \leqslant \sum_{k=1}^{N}\big|x(k)\big|\,\big\|e_k\big\|_p = \sum_{k=1}^{N}\big|x(k)\big| = \big\|x\big\|_1$$

Por otra parte, es evidente que $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$ y $\|x\|_1 \leqslant N\|x\|_\infty$. Enlazando ahora las tres desigualdades anteriores, obtenemos

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant \|x\|_1 \leqslant N\,\|x\|_\infty \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N$$

Esto prueba claramente que todas las normas $\|\cdot\|_p$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$ son equivalentes a $\|\cdot\|_\infty$, luego son equivalentes entre sí.

Es claro que las bolas abiertas para la norma $\|\cdot\|_\infty$ son productos cartesianos de bolas abiertas (intervalos o discos) en $\mathbb{K}$. Por tanto, la topología de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es la topología producto en $\mathbb{K}^N$, a la que llamamos **topología usual** de $\mathbb{K}^N$. Por supuesto, la topología de la norma $\|\cdot\|_p$ también es la usual de $\mathbb{K}^N$, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Para cualesquiera $x, y \in \mathbb{K}^N$ y $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant N$, se tiene claramente

$$\big|\,y(k) - x(k)\,\big| \leqslant \big\|y - x\big\|_\infty \leqslant \sum_{j=1}^{N} \big|\,y(j) - x(j)\,\big| \tag{4}$$

Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy para la norma $\|\cdot\|_\infty$, usando la primera desigualdad de (4) vemos claramente que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego es convergente. Existe por tanto $x \in \mathbb{K}^N$ tal que $\{x_n(k)\} \to x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant N$, y la segunda desigualdad de (4) nos permite claramente deducir que $\big\{\|x_n - x\|_\infty\big\} \to 0$. Esto prueba que la norma $\|\cdot\|_\infty$ es completa, luego $\|\cdot\|_p$ también lo es, para todos los valores de p.

En resumen, para cualesquiera $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, hemos comprobado que $\mathbb{K}^N$, con la norma $\|\cdot\|_p$ definida en (2) y (3), es un espacio de Banach, que se suele denotar por l_p^N y cuya topología es la usual de $\mathbb{K}^N$. Por supuesto, dicho espacio tiene una versión real y otra compleja, según tomemos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2.3. Los espacios clásicos de sucesiones

Consideremos el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, cuyos elementos son todas las sucesiones de escalares, es decir, todas las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, con operaciones definidas puntualmente o, si se quiere, término a término. Concretamente, para $x, y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene

$$\big(x + y\big)(n) = x(n) + y(n) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda x\big)(n) = \lambda\, x(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Vamos a considerar una amplia gama de subespacios de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que, dotados de la norma apropiada en cada caso, se convertirán en importantes ejemplos de espacios de Banach.

2.3.1. Los espacios l_p con $1 \leqslant p < \infty$

Para $1 \leqslant p < \infty$, denotaremos por l_p al conjunto de todas las sucesiones $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tales que la serie $\sum_{n \geqslant 1} \big|\,x(n)\,\big|^{\,p}$ es convergente, abreviadamente:

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \tag{5}$$

Vemos en particular que l_1 está formado por los términos generales de todas las series de escalares absolutamente convergentes. En general, nuestro objetivo es convertir a l_p en un espacio de Banach cuya norma vendrá dada por

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad \forall x \in l_p \tag{6}$$

La desigualdad de Minkowski será la clave para comprobar que l_p es un espacio vectorial y que $\|\cdot\|_p$ es una norma en l_p. Para $x,y \in l_p$ y $n \in \mathbb{N}$, dicha desigualdad nos dice que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)+y(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x(k)|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

de modo que tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)+y(k)|^p \leqslant \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big)^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por tanto, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |x(n)+y(n)|^p$ es convergente, es decir, $x+y \in l_p$, pero además, de la última desigualdad deducimos claramente que

$$\big(\|x+y\|_p \big)^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)+y(k)|^p = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |x(k)+y(k)|^p \leqslant \big(\|x\|_p + \|y\|_p \big)^p$$

De esta forma hemos probado por ahora que

$$x,y \in l_p \implies x+y \in l_p\,, \quad \|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p$$

Por otra parte es del todo evidente que, para cualesquiera $x \in l_p$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene $\lambda x \in l_p$ con $\|\lambda x\|_p = |\lambda|\,\|x\|_p$. Finalmente, de $\|x\|_p = 0$ se deduce obviamente que $x = 0$. De hecho conviene resaltar algo que usaremos muy a menudo:

$$|x(k)| \leqslant \|x\|_p \qquad \forall x \in l_p\,,\ \forall k \in \mathbb{N} \tag{7}$$

En resumen, hemos probado que el conjunto de sucesiones l_p definido en (5) es un espacio vectorial, subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, y que la función $\|\cdot\|_p$ definida en (6) es una norma en l_p. Sólo queda probar la complitud para obtener el siguiente resultado:

- *Para $1 \leqslant p < \infty$, se tiene que l_p es un espacio de Banach.*

Para probar que $\|\cdot\|_p$ es completa, sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en l_p. Fijado $k \in \mathbb{N}$, de la desigualdad (7) deducimos claramente que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego es convergente. Definiendo $x(k) = \lim_{n\to\infty} x_n(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtenemos $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y la demostración se concluirá probando que $x \in l_p$ y $\big\{ \|x_n - x\|_p \big\} \to 0$.

Fijado $\varepsilon > 0$, por ser $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n,m \geqslant n_0$ se tiene $\|x_n - x_m\|_p < \varepsilon$. Fijado $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$, observamos que

$$m,N \in \mathbb{N},\ m \geqslant n_0 \implies \sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_m(k)|^p \leqslant \big(\|x_n - x_m\|_p\big)^p < \varepsilon^p$$

Fijado también $N \in \mathbb{N}$, vemos entonces que

$$\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x_m(k)|^p \leqslant \varepsilon^p$$

Como esto es válido para todo $N \in \mathbb{N}$, deducimos que la serie $\sum\limits_{k\geqslant 1} |x_n(k) - x(k)|^p$ converge, es decir, $x_n - x \in l_p$, de donde $x = x_n - (x_n - x) \in l_p$. Pero además, la desigualdad anterior nos permite obtener que

$$\|x_n - x\|_p = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} |x_n(k) - x(k)|^p \right)^{1/p} \leqslant \varepsilon$$

Esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$, luego $\{\|x_n - x\|_p\} \to 0$ como queríamos. ■

2.3.2. Los vectores unidad

Fijado el exponente p, con $1 \leqslant p < \infty$, vamos a profundizar un poco más en la estructura del espacio de Banach l_p. Para ello juegan un papel clave los vectores que ahora vamos a presentar. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotaremos por e_n a la sucesión cuyo n-ésimo término es 1, mientras que todos los demás se anulan, esto es,

$$e_n(n) = 1 \qquad \text{y} \qquad e_n(k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}$$

Se dice que e_n es el n-ésimo **vector unidad**, y es obvio que $e_n \in l_p$, luego l_p contiene a todos los vectores unidad, que claramente son linealmente independientes, luego l_p tiene dimensión infinita. Observemos ahora el subespacio de l_p engendrado por los vectores unidad.

Fijado $N \in \mathbb{N}$, en l_p tenemos el subespacio $\operatorname{Lin}\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ engendrado por los N primeros vectores unidad, que tiene dimensión N y se convierte en espacio normado con la norma inducida por l_p. Dicho espacio normado se identifica totalmente con l_p^N, pues existe una obvia biyección lineal entre ambos que preserva la norma. Así pues, podemos ver el espacio de Banach l_p^N como subespacio cerrado de l_p.

Como es la primera vez que aparece, conviene resaltar el criterio que permite identificar dos espacios normados X e Y. Un **isomorfismo isométrico** de X sobre Y es una biyección lineal $\Phi : X \to Y$ que preserva la norma, es decir, verifica que $\|\Phi(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Como es natural, dos espacios normados se consideran idénticos, cuando son isométricamente isomorfos, es decir, existe un isomorfismo isométrico de uno sobre el otro. Acabamos de ver que, para todo $N \in \mathbb{N}$, el espacio de Banach l_p^N es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de l_p.

Pero nos interesa ahora el subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ engendrado por todos los vectores unidad, que tiene dimensión infinita, pero numerable, y se denota por $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, es decir

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \text{Lin}\,\{\,e_n : n \in \mathbb{N}\,\}$$

Si definimos el **soporte** de una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ como el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x(n) \neq 0\}$, es claro que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ está formado por las sucesiones de soporte finito. Equivalentemente, para una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, se tiene $x \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ si, y sólo si, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x(n) = 0$ para $n > m$.

Sabemos que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset l_p$ y vamos a comprobar que, de hecho, $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en l_p. La forma de aproximar cada sucesión $x \in l_p$ mediante sucesiones de soporte finito es fácil de adivinar: basta usar la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,e_n$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ llamamos $s_n = \sum_{j=1}^{n} x(j)\,e_j$ a la n-ésima suma parcial de dicha serie, es claro que s_n tiene soporte finito, pues $s_n(k) = 0$ para $k > n$. Pero también es claro que $s_n(k) = x(k)$ para $k \leqslant n$, con lo que se tiene

$$\big(\,\|x - s_n\|_p\,\big)^p = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\,x(k)\,|^p \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

El resto de una serie convergente es una sucesión convergente a cero, luego $\big\{\,\|x - s_n\|_p\,\big\} \to 0$. Esto prueba que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en l_p, pero de hecho tenemos algo más concreto:

- *Para $1 \leqslant p < \infty$, cada $x \in l_p$ se expresa en la forma*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,e_n \tag{8}$$

como suma de una serie que converge en l_p. Además, dicho desarrollo en serie es único en el siguiente sentido: si $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie converge en l_p, entonces $\alpha_k = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Hemos probado ya la validez del desarrollo (8), luego sólo queda comprobar su unicidad. Sea $\{\alpha_n\}$ la sucesión de escalares del enunciado y fijemos $k \in \mathbb{N}$ para probar que $\alpha_k = x(k)$. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos $y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$, tenemos por hipótesis $\big\{\,\|y_n - x\|_p\,\big\} \to 0$ y la desigualdad (7) nos dice que $\big\{y_n(k)\big\} \to x(k)$, pero es claro que para $n \geqslant k$ se tiene $y_n(k) = \alpha_k$, luego $\big\{\,y_n(k)\,\big\} \to \alpha_k$ y concluimos que $\alpha_k = x(k)$ como se quería. ■

Siempre para $1 \leqslant p < \infty$, se tiene $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \neq l_p$, pues tomando por ejemplo $x(n) = 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x \in l_p$, pero $x \notin \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$. Así pues, el espacio de Banach l_p contiene un subespacio $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, que no es cerrado. Por tanto $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$, con la norma inducida por l_p, es un espacio normado no completo.

El resultado anterior nos va a permitir ahora describir la forma en que el espacio l_p depende del parámetro p, o lo que viene a ser lo mismo, aclarar la relación entre los espacios l_p para distintos valores de p. Para ello, supondremos en lo que sigue que $1 \leqslant p < q < \infty$.

Para $x \in l_p$ escribimos $x = \|x\|_p\, u$ donde $u \in l_p$ y $\|u\|_p = 1$. De (7) deducimos que, para $k \in \mathbb{N}$ se tiene $|u(k)| \leqslant 1$, luego

$$\big|u(k)\big|^q = \big|u(k)\big|^{q-p}\,\big|u(k)\big|^p \leqslant \big|u(k)\big|^p \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

El criterio de comparación para series de términos positivos nos dice que $u \in l_q$ y $\|u\|_q \leqslant 1$. Deducimos que también $x \in l_q$ con $\|x\|_q = \|x\|_p \|u\|_q \leqslant \|x\|_p$. Hemos obtenido así una primera relación entre los espacios l_p, que se resume en la siguiente implicación:

$$1 \leqslant p < q < \infty, \quad x \in l_p \quad \Longrightarrow \quad x \in l_q, \quad \|x\|_q \leqslant \|x\|_p \tag{9}$$

Así pues, para $1 \leqslant p < q < \infty$, vemos que l_p está contenido en l_q. Tal inclusión es estricta como muestran las series armónicas. En concreto, definiendo $x(n) = n^{-1/p}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es claro que $x \in l_q$ pero $x \notin l_p$. Puesto que $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ es denso en l_q y está contenido en l_p, vemos que también l_p es un subespacio denso en l_q.

Debe quedar claro que l_p está contenido en l_q como espacio vectorial, pero en l_p usamos la norma $\|\cdot\|_p$, que no coincide con la norma inducida por l_q, que es la restricción a l_p de la norma $\|\cdot\|_q$. Estas dos normas en l_p no son equivalentes, pues $\|\cdot\|_p$ es completa, pero la norma inducida por l_q no lo es, ya que l_p no es cerrado en l_q como acabamos de ver. Tenemos así el primer ejemplo de dos normas en un mismo espacio vectorial, que no son equivalentes. De hecho, la desigualdad de (9) nos dice que en l_p, la topología de la norma $\|\cdot\|_p$ contiene estrictamente a la inducida por l_q.

2.3.3. Espacios de sucesiones acotadas

En la discusión anterior sobre espacios de sucesiones, ha quedado excluido el caso $p = \infty$, que ahora vamos a estudiar. Para $N \in \mathbb{N}$, recordemos que l_∞^N es el espacio de Banach que se obtiene dotando a $\mathbb{K}^N$ de la norma del máximo $\|\cdot\|_\infty$. Es natural considerar un espacio de sucesiones en el que podemos definir una norma análoga. Basta trabajar con sucesiones acotadas y, aunque una tal sucesión puede no tener un término cuyo valor absoluto o módulo sea máximo, siempre podemos usar un supremo. Denotamos por l_∞ el conjunto de todas las sucesiones acotadas de escalares, simbólicamente,

$$l_\infty = \big\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \big\}$$

Es evidente que l_∞ es un espacio vectorial, de nuevo subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, y probaremos sin dificultad el siguiente resultado:

- *l_∞ es un espacio de Banach con la norma dada por*

$$\big\|x\big\|_\infty = \sup\big\{ |x(n)| : n \in \mathbb{N} \big\} \qquad \forall x \in l_\infty$$

Está claro que $\|\cdot\|_\infty$ es una norma en l_∞, cuya complitud vamos a comprobar. Si $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en l_∞, para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n,m \in \mathbb{N}, \; n,m \geqslant n_0 \implies \|x_n - x_m\|_\infty < \varepsilon \implies \big|x_n(k) - x_m(k)\big| < \varepsilon \;\; \forall k \in \mathbb{N} \tag{10}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, vemos claramente que $\{x_n(k)\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego converge, lo que nos permite definir $x(k) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n(k)$. Obtenemos así una sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, y la demostración se concluirá comprobando que $x \in l_\infty$ y $\big\{ \|x_n - x\|_\infty \big\} \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$ tenemos $n_0 \in \mathbb{N}$ verificando (10) y fijamos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant n_0$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\big| x_n(k) - x(k) \big| \,=\, \lim_{m\to\infty} \big| x_n(k) - x_m(k) \big| \leqslant \varepsilon$$

luego la sucesión $x_n - x$ está acotada, de donde $x = x_n - (x_n - x) \in l_\infty$. Pero de hecho tenemos que $\|x_n - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$ que verifique $n \geqslant n_0$. Esto prueba que $\big\{ \|x_n - x\|_\infty \big\} \to 0$ como se quería. ■

En el espacio l_∞ seguimos teniendo los vectores unidad $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por razones que se irán comprendiendo más adelante, cuando el espacio $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ de las sucesiones de soporte finito se considera como subespacio de l_∞, se le denota por c_{00}. A diferencia de lo que ocurría para $p < \infty$, vamos a comprobar que c_{00} no es denso en l_∞. De hecho vamos a describir explícitamente el cierre de c_{00} en l_∞.

Si $x \in \overline{c_{00}}$ y fijamos $\varepsilon > 0$, ha de existir $y \in c_{00}$ tal que $\|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Como y tiene soporte finito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $y(n) = 0$ para $n \geqslant m$. Entonces, también para $n \geqslant m$ tenemos claramente $|x(n)| = |x(n) - y(n)| \leqslant \|x - y\|_\infty < \varepsilon$. Esto prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} x(n) = 0$, lo cual es válido para todo $x \in \overline{c_{00}}$. Deducimos que c_{00} no es denso en l_∞, pues abundan las sucesiones acotadas que no convergen a cero.

Denotamos por c_0 al subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ formado por las sucesiones convergentes a cero:

$$c_0 = \big\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \lim_{n\to\infty} x(n) = 0 \big\}$$

Como toda sucesión convergente está acotada, c_0 es un subespacio de l_∞, que consideramos como espacio normado, con la restricción de la norma $\|\cdot\|_\infty$. Acabamos de ver que $\overline{c_{00}} \subset c_0$ y enseguida vamos a comprobar que esta inclusión es una igualdad. De hecho veremos que los vectores unidad se comportan en c_0 de forma análoga a como lo hacían en l_p para $1 \leqslant p < \infty$. Toda la información se recoge en el siguiente enunciado:

- *El espacio c_0, de las sucesiones de escalares convergentes a cero, es un subespacio cerrado de l_∞, y por tanto un espacio de Banach, cuya norma viene dada por*

$$\|x\|_\infty = \max \big\{ |x(n)| \,:\, n \in \mathbb{N} \big\} \qquad \forall x \in c_0 \tag{11}$$

Además, cada $x \in c_0$ se expresa en la forma

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n \tag{12}$$

como suma de una serie que converge en c_0, y en particular c_{00} es denso en c_0. Por último, el desarrollo en serie anterior es único, es decir: si $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$, donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la serie converge en c_0, entonces $\alpha_k = x(k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Conviene empezar probando el desarrollo (12). Fijado $x \in c_0$, escribimos $s_n = \sum_{k=1}^{n} x(k)\, e_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y se trata de probar que $\{\|x - s_n\|_\infty\} \to 0$. Para $n, k \in \mathbb{N}$ se tiene $s_n(k) = x(k)$ cuando $k \leqslant n$, mientras que $s_n(k) = 0$ si $k > n$, luego

$$\|x - s_n\|_\infty = \sup\left\{ |x(k)| : k \in \mathbb{N},\ k > n \right\} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x(k)| < \varepsilon$ para $k \geqslant m$. La igualdad anterior nos dice entonces que para $n \geqslant m$ se tiene $\|x - s_n\|_\infty \leqslant \varepsilon$, luego $\{\|x - s_n\|_\infty\} \to 0$, como se quería.

Como $s_n \in c_{00}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $x \in \overline{c_{00}}$, lo cual es válido para todo $x \in c_0$, luego vemos que $c_0 \subset \overline{c_{00}}$, pero ya teníamos la otra inclusión, así que $c_0 = \overline{c_{00}}$. Por tanto, c_0 es un subespacio cerrado de l_∞, luego c_0 es un espacio de Banach con la norma inducida por l_∞.

Para tener (11), dado $x \in c_0$, debemos ver que el supremo que define a $\|x\|_\infty$ es un máximo, cosa obvia si $x = 0$. En otro caso, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $|x(n)| < \|x\|_\infty / 2$ para $n > m$. Está claro entonces que $\|x\|_\infty = |x(k)|$ para algún $k \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant m$, como queríamos.

Sólo queda la unicidad del desarrollo (12). Para $x \in c_0$, supongamos que $\left\{ \|x - y_n\|_\infty \right\} \to 0$, donde $y_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Fijado $k \in \mathbb{N}$, tenemos claramente $|x(k) - y_n(k)| \leqslant \|x - y_n\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{y_n(k)\} \to x(k)$, pero es claro que $y_n(k) = \alpha_k$ para $n \geqslant k$, luego $\{y_n(k)\} \to \alpha_k$, de donde $\alpha_k = x(k)$ como queríamos. ■

Veamos finalmente la relación entre los espacios l_p con $1 \leqslant p < \infty$ y los recién estudiados para $p = \infty$. Para $x \in l_p$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} |x(n)|^p$ es convergente, luego $\lim_{n \to \infty} |x(n)|^p = 0$, o lo que es lo mismo, $x \in c_0$. Además, sabemos que $|x(n)| \leqslant \|x\|_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$. Así pues, la relación buscada es la siguiente

$$1 \leqslant p < \infty, \quad x \in l_p \quad \Longrightarrow \quad x \in c_0, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p$$

La inclusión de l_p en c_0 es estricta, pues tomando $x(n) = 1 / \log(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x \in c_0$ pero $x \notin l_p$. La situación de l_p en c_0 es análoga a la que tenía en l_q para $p < q < \infty$. Concretamente, l_p es un subespacio denso en c_0, pues contiene a c_{00}, pero no es cerrado. Con la norma inducida por c_0, vemos que l_p es un espacio normado no completo, cuya norma no es equivalente a $\|\cdot\|_p$. De hecho, la topología de l_p contiene estrictamente a la inducida por c_0.

2.4. Bases de Schauder y espacios de Banach separables

Considerando el espacio de Banach $X = l_p$ con $1 \leqslant p < \infty$, o bien $X = c_0$, observemos la situación en X de los vectores unidad. Aunque son linealmente independientes, no forman una base algebraica de X, pues el subespacio que engendran es $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \neq X$. Sin embargo, la sucesión $\{e_n\}$ se comporta en cierto modo como una base, pues cada vector $x \in X$ se expresa de manera única como una especie de "combinación lineal infinita" de los términos de nuestra sucesión: $x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$, expresión que tiene sentido porque la serie converge en la topología del espacio de Banach X. Ello motiva la siguiente definición.

Una sucesión $\{u_n\}$ en un espacio de Banach X, es una **base de Schauder** de X, cuando para cada $x \in X$ existe una única sucesión $\{\alpha_n\}$ de escalares tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n \tag{13}$$

serie que converge en la topología de X. Se dice que (13) es el desarrollo en serie de x con respecto a la base de Schauder $\{u_n\}$.

Por supuesto, la sucesión $\{e_n\}$ de los vectores unidad es una base de Schauder, tanto de l_p para $1 \leqslant p < \infty$, como de c_0, llamada **base de vectores unidad** de l_p o c_0.

El concepto de base de Schauder es uno de los más útiles e importantes en el estudio de los espacios de Banach, pero por ahora sólo haremos alguna observación sencilla sobre dicho concepto. En lo que sigue fijamos una base de Schauder $\{u_n\}$ de un espacio de Banach X, escribimos $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, y consideramos el subespacio engendrado $Y = \operatorname{Lin} U \subset X$.

Cada vector $y \in Y$ es combinación lineal de vectores de U, luego puede escribirse en la forma $y = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n u_n$ donde $\alpha_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 0\}$ es finito, lo que obviamente hace que la serie converja. Hemos obtenido así el desarrollo en serie de y con respecto a $\{u_n\}$, que por hipótesis es único, lo que tiene dos consecuencias. Por una parte, el desarrollo en serie de cada vector $y \in Y$ con respecto a $\{u_n\}$ se reduce a una suma finita. Por otra, la expresión de cada vector $y \in Y$ como combinación lineal de vectores de U también es única. Esto significa que los vectores de U forman una base del espacio vectorial Y, es decir, son linealmente independientes y, en particular, $u_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, Y tiene dimensión infinita y numerable, es decir, como espacio vectorial se puede identificar con $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$.

La definición de base de Schauder implica claramente que Y es denso en X y vamos a comprobar que $Y \neq X$. Para ello consideramos la serie $\sum_{n \geqslant 1} x_n$ donde $x_n = 2^{-n} u_n / \|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es una serie absolutamente convergente, ya que $\|x_n\| = 2^{-n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego por ser X un espacio de Banach, del criterio de complitud deducimos que dicha serie es convergente. Escribiendo

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n \|u_n\|} u_n$$

tenemos claramente el desarrollo en serie de x con respecto a $\{u_n\}$ en el que ninguno de los escalares que aparecen se anula. Esto implica que $x \notin Y$, pues en otro caso dicho desarrollo se reduciría a una suma finita como hemos visto antes. Así pues, una base de Schauder de un espacio de Banach X nunca es una base algebraica de X. Más adelante probaremos un resultado más general: un espacio de Banach no puede tener dimensión infinita y numerable.

Por contener un subespacio denso de dimensión numerable, todo espacio de Banach con base de Schauder tendrá una propiedad topológica, que ahora vamos a comentar. Recordemos que un espacio topológico es **separable** cuando contiene un subconjunto denso, numerable. Para espacios métricos, esta propiedad tiene una útil caracterización:

- *Un espacio métrico X es separable si, y sólo si, su topología tiene una base numerable. En tal caso, todo conjunto no vacío $Y \subset X$ es separable con la topología inducida.*

Naturalmente, nos interesa sobre todo el caso particular de un espacio normado, en el que la separabilidad se caracteriza como sigue.

- *Un espacio normado es separable si, y sólo si, tiene un subespacio denso, de dimensión numerable.*

Una implicación es casi evidente: si X es un espacio normado separable y E es un conjunto numerable, denso en X, basta tomar $Y = \operatorname{Lin} E$ para tener un subespacio Y, que obviamente tiene dimensión numerable y es denso en X. Lo interesante es el recíproco, cuya demostración es un poco más laboriosa.

Supongamos que X es un espacio normado, sea Y un subespacio denso en X, de dimensión numerable, que puede ser finita, y sea U un conjunto numerable tal que $Y = \operatorname{Lin} U$. Para probar que X es separable, usaremos también un conjunto numerable Δ, denso en $\mathbb{K}$. Por ejemplo, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puede ser $\Delta = \mathbb{Q}$, mientras que para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, podemos tomar $\Delta = \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto E_n de todas las combinaciones lineales de n vectores cualesquiera de U, con coeficientes en Δ, es decir:

$$E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \delta_k u_k \ : \ n \in \mathbb{N}, \ \delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta, \ u_1, \ldots, u_n \in U \right\}$$

Vemos que E_n es numerable, pues existe claramente una aplicación sobreyectiva del conjunto numerable $\Delta^n \times U^n$ sobre E_n. Además, usando que Δ es denso en $\mathbb{K}$, comprobamos fácilmente que $\overline{E_n}$ contiene a todas las combinaciones lineales de n elementos cualesquiera de U.

Lo anterior es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el conjunto $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es numerable, por ser una unión numerable de conjuntos numerables. Pero además, como $\overline{E_n} \subset \overline{E}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que $\overline{E}$ contiene a todas las combinaciones lineales de elementos de U, es decir, se tiene $Y = \operatorname{Lin} U \subset \overline{E}$. Finalmente, como Y es denso en X, vemos que $X = \overline{E}$, luego E es un conjunto numerable denso en X. Por tanto, X es separable, como queríamos demostrar. ∎

Así pues, todo espacio de Banach con base de Schauder es separable y, en particular, los espacios de Banach l_p con $1 \leqslant p < \infty$ y c_0 son separables. Durante algún tiempo, en todos los espacios de Banach separables conocidos, se disponía de una base de Schauder, lo que llevó al propio Stefan Banach a preguntar si en todo espacio de Banach separable se puede encontrar una base de Schauder. El problema, abierto durante más de cuarenta años, fue resuelto en 1973 por el matemático sueco Per Enflo, construyendo una amplia gama de espacios de Banach separables sin base de Schauder. Volviendo a cuestiones más sencillas, vemos a continuación un ejemplo de espacio de Banach que no es separable.

- *El espacio de Banach l_∞, de las sucesiones acotadas de escalares, no es separable.*

Usaremos un hecho bien conocido: el conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, de todos los subconjuntos de $\mathbb{N}$, no es numerable. Para cada $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, denotemos por $\chi_J \in l_\infty$ a la función característica de J, es decir, la sucesión definida por

$$\chi_J(n) = 1 \quad \forall n \in J \qquad \text{y} \qquad \chi_J(n) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{N} \setminus J$$

Sea ahora B_J la bola abierta en l_∞ de centro χ_J y radio $1/2$. Para $J,K \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ con $J \neq K$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\chi_J(n) - \chi_K(n)| = 1$, luego $\|\chi_J - \chi_K\|_\infty \geqslant 1$, de donde $B_J \cap B_K = \emptyset$. Así pues, $\{B_J : J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}$ es una familia no numerable de subconjuntos abiertos de l_∞, que son dos a dos disjuntos. Esto impide que l_∞ pueda ser separable, como vamos a ver.

Si E es un conjunto denso en l_∞, para cada $J \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ se tiene $E \cap B_J \neq \emptyset$, lo que nos permite elegir $y_J \in E \cap B_J$. Claramente la aplicación $J \mapsto y_J$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ en E, es inyectiva, luego E no es numerable. Hemos probado que ningún subconjunto denso de l_∞ puede ser numerable, es decir, que l_∞ no es separable. ■

2.5. Espacios de funciones continuas

Es fácil generalizar la definición del espacio l_∞ considerando, en vez de sucesiones acotadas, funciones acotadas en un conjunto arbitrario. Más concretamente, si Γ es un conjunto no vacío, consideramos el espacio vectorial producto $\mathbb{K}^\Gamma$, formado por todas las funciones de Γ en $\mathbb{K}$, con operaciones definidas puntualmente, es decir, para $x,y \in \mathbb{K}^\Gamma$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene:

$$\big(x+y\big)(\gamma) = x(\gamma) + y(\gamma) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda x\big)(\gamma) = \lambda x(\gamma) \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

Denotaremos por $l_\infty(\Gamma)$ al conjunto de todas las funciones acotadas de Γ en $\mathbb{K}$, que es evidentemente un subespacio de $\mathbb{K}^\Gamma$:

$$l_\infty(\Gamma) = \big\{ x \in \mathbb{K}^\Gamma \, : \, \sup\{|x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} < \infty \big\}$$

Es claro que, definiendo

$$\big\|x\big\|_\infty = \sup\big\{ |x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \big\} \qquad \forall x \in l_\infty(\Gamma)$$

se obtiene una norma en $l_\infty(\Gamma)$. Exactamente igual que hicimos en el caso $\Gamma = \mathbb{N}$, se comprueba que dicha norma es completa, obteniendo el siguiente resultado.

- *Si Γ es un conjunto no vacío arbitrario, el espacio $l_\infty(\Gamma)$, de todas las funciones acotadas de Γ en $\mathbb{K}$, es un espacio de Banach, cuya norma viene dada por*

$$\big\|x\big\|_\infty = \sup\big\{ |x(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \big\} \qquad \forall x \in l_\infty(\Gamma)$$

Como casos particulares que ya conocíamos, tenemos $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$ y, si para $N \in \mathbb{N}$ fijo, tomamos $\Gamma = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant N\}$, es claro que $l_\infty(\Gamma) = l_\infty^N$.

Volviendo al caso general, conviene observar la convergencia en $l_\infty(\Gamma)$. Si $x_n \in l_\infty(\Gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y $x \in l_\infty(\Gamma)$, fijados $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, la desigualdad $\|x_n - x\|_\infty \leqslant \varepsilon$ equivale a que se tenga $|x_n(\gamma) - x(\gamma)| \leqslant \varepsilon$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Por tanto, la convergencia de $\{x_n\}$ a x se expresa de la siguiente forma

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad |x_n(\gamma) - x(\gamma)| \leqslant \varepsilon \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

y esto significa que la sucesión de funciones $\{x_n\}$ converge uniformemente a x en Γ. Así pues, la convergencia en el espacio de Banach $l_\infty(\Gamma)$ equivale a la convergencia uniforme en Γ.

Nos interesa sobre todo un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$ que aparece de forma natural cuando Γ está provisto de una topología adecuada. Cambiamos la notación, para usar la más habitual.

Si K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, es bien sabido que toda función continua $f : K \to \mathbb{K}$ está acotada, y la función $|f|$ tiene máximo en K. Por tanto, podemos considerar el subespacio de $l_\infty(K)$ formado por todas las funciones continuas en K con valores escalares, al que denotamos por $C(K)$. Como la convergencia en $l_\infty(K)$ es la uniforme, que preserva la continuidad, $C(K)$ es subespacio cerrado de $l_\infty(K)$, luego espacio de Banach con la norma inducida. Resaltamos la nueva gama de espacios de Banach que acaba de aparecer.

- *Si K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, entonces el espacio $C(K)$, de todas las funciones continuas en K y con valores escalares, es un espacio de Banach con la norma dada por:*

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : t \in K\} \qquad \forall f \in C(K)$$

Cabe destacar por ejemplo el caso en que $K = [0,1]$ con su topología usual, la inducida por $\mathbb{R}$. Por un conocido teorema de Weierstrass, para cada $f \in C[0,1]$ existe una sucesión de funciones polinómicas que converge a f uniformemente en $[0,1]$. Por tanto, $C[0,1]$ tiene un subespacio denso de dimensión numerable, es decir, es un espacio de Banach separable.

2.6. Los espacios de Lebesgue

Para presentar una nueva gama de espacios de Banach, usaremos la medida y la integral de Lebesgue en el intervalo $[0,1]$, que suponemos conocidas. Las propiedades fundamentales de la integral de Lebesgue, recogidas en los teoremas de convergencia, son las que permiten obtener la complitud de los espacios que vamos a presentar. De hecho, se podría trabajar con la medida de Lebesgue en cualquier subconjunto medible de $\mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$ arbitrario, o incluso con cualquier otra medida, obteniendo resultados similares en algunos aspectos, aunque no en todos. Sin embargo, preferimos discutir un ejemplo concreto.

Trabajaremos con funciones medibles de $[0,1]$ en $\mathbb{K}$, identificando funciones que coincidan casi por doquier (abreviado c.p.d.), esto es, que coincidan salvo en un conjunto de medida nula. Denotamos por L al espacio vectorial formado por tales *funciones*. En rigor, los elementos de este espacio son clases de equivalencia, pero casi siempre las manejaremos como si fuesen funciones, con las debidas precauciones.

2.6.1. Los espacios L_p para $1 \leqslant p < \infty$

Si $\varphi \in L$ y $\varphi(t) \in \mathbb{R}_0^+$ para casi todo (abreviado p.c.t.) $t \in [0,1]$, siempre tiene sentido la integral de φ sobre $[0,1]$, o sobre subconjuntos medibles de dicho intervalo, que puede ser ∞. Fijado p con $1 \leqslant p < \infty$, para $f \in L$ se tiene $|f|^p \in L$, luego podemos definir,

$$L_p = \left\{ f \in L : \int_0^1 |f(t)|^p \, dt < \infty \right\} \tag{14}$$

y comprobaremos enseguida que L_p es un subespacio de L.

Para $f, g \in L_p$ podemos escribir $[0,1] = A \cup B$ donde A y B son conjuntos medibles y disjuntos, tales que $|g| \leqslant |f|$ c.p.d. en A, mientras que $|f| < |g|$ c.p.d. en B, con lo que también tenemos $|f+g|^p \leqslant 2^p\,|f|^p$ c.p.d. en A y $|f+g|^p \leqslant 2^p\,|g|^p$ c.p.d. en B. Usando propiedades elementales de la integral, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(t)+g(t)|^p\,dt &= \int_A |f(t)+g(t)|^p\,dt + \int_B |f(t)+g(t)|^p\,dt \\ &\leqslant 2^p \int_A |f(t)|^p\,dt + 2^p \int_B |g(t)|^p\,dt < \infty\end{aligned}$$

y esto prueba que $f+g \in L_p$. Por otra parte, es evidente que $\lambda f \in L_p$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Por tanto, L_p es un espacio vectorial, subespacio de L.

Con el fin de convertir a L_p en un espacio normado, definimos:

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \qquad \forall f \in L_p \tag{15}$$

y se trata de probar que $\|\cdot\|_p$ es una norma en L_p. Para cualesquiera $\lambda \in \mathbb{K}$ y $f \in L_p$, se tiene evidentemente $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\,\|f\|_p$. Además, si $f \in L_p$ verifica que $\|f\|_p = 0$, se ha de tener $f = 0$ c.p.d., pero esto significa que f es el vector cero en L_p. Por supuesto, esta era la razón para identificar funciones que coinciden c.p.d. y trabajar con clases de equivalencia. Por tanto, sólo queda comprobar que $\|\cdot\|_p$ verifica la desigualdad triangular. Ello requiere nuevas versiones de las desigualdades de Hölder y Minkowski.

Desigualdad integral de Hölder. *Si* $1 < p < \infty$, $f \in L_p$ *y* $g \in L_{p^*}$, *se tiene:*

$$fg \in L_1 \qquad \text{con} \qquad \|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\,\|g\|_{p^*}$$

Demostración. Si $\|f\|_p = 0$, tenemos $f = 0$ c.p.d., luego $fg = 0$ c.p.d. y no hay nada que demostrar. Por tanto, suponemos que $\|f\|_p = \alpha \in \mathbb{R}^+$, y análogamente, que $\|g\|_{p^*} = \beta \in \mathbb{R}^+$.

La desigualdad de Young nos permite entonces escribir

$$\frac{1}{\alpha\beta}|f(t)g(t)| \leqslant \frac{|f(t)|^p}{p\,\alpha^p} + \frac{|g(t)|^{p^*}}{p^*\,\beta^{p^*}} \qquad \text{p.c.t. } t \in [0,1]$$

de donde deducimos claramente la desigualdad buscada:

$$\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1 |f(t)g(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{p\,\alpha^p}\int_0^1 |f(t)|^p\,dt + \frac{1}{p^*\beta^{p^*}}\int_0^1 |g(t)|^{p^*}\,dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \quad \blacksquare$$

El siguiente razonamiento también nos recordará al usado para obtener la desigualdad de Minkowski en su primera versión.

Desigualdad integral de Minkowski. *Para cualesquiera* $f, g \in L_p$, *se tiene:*

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

Demostración. Suponemos que $p > 1$ pues en otro caso el resultado es evidente. Usaremos la desigualdad obvia

$$|f+g|^p \leqslant |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$$

y aplicaremos la desigualdad integral de Hölder a los dos sumandos del segundo miembro. Observamos que $|f+g|^{p-1} \in L_{p^*}$, ya que

$$\int_0^1 \left(|f(t)+g(t)|^{p-1}\right)^{p^*} dt = \int_0^1 |f(t)+g(t)|^p \, dt = \left(\|f+g\|_p\right)^p < \infty$$

con lo que al aplicar la mencionada desigualdad obtenemos:

$$\left(\|f+g\|_p\right)^p = \|\,|f+g|^p\,\|_1 \leqslant \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)\left(\|f+g\|_p\right)^{p/p^*}$$

Si $\|f+g\|_p = 0$ no hay nada que demostrar y, en otro caso, dividimos ambos miembros de la última desigualdad por $\left(\|f+g\|_p\right)^{p/p^*} > 0$. Como $p - (p/p^*) = 1$, obtenemos exactamente el resultado deseado. ■

Comprobado que $\|\cdot\|_p$ es una norma en L_p, la siguiente cuestión clave es su complitud. Se trata de un resultado básico en la teoría de la integración que no vamos a demostrar.

Teorema de Riesz-Fischer. *Para $1 \leqslant p < \infty$, el espacio L_p definido en (14), dotado de la norma $\|\cdot\|_p$ dada por (15), es un espacio de Banach.*

Los espacios recién presentados, para la medida de Lebesgue en $[0,1]$ o para cualquier otra medida, se conocen como **espacios de Lebesgue**. Su complitud tiene útiles consecuencias, que convirtieron la integral de Lebesgue en herramienta indispensable del Análisis Matemático, pero también mostraron la utilidad del estudio abstracto de los espacios de funciones. Es por ello que la integral de Lebesgue y el teorema de Riesz-Fischer se consideran como dos de las claves que dieron lugar al nacimiento del Análisis Funcional.

Para entender mejor la estructura de los espacios de Lebesgue, conviene conocer, igual que con los espacios de sucesiones, un subespacio común, denso en todos ellos. Dada una función continua $f \in C[0,1]$, y $1 \leqslant p < \infty$, es claro que la clase de equivalencia de f pertenece a L_p. Además, el conjunto $\{t \in [0,1] : f(t) \neq 0\}$ es abierto, luego si tiene medida nula, ha de ser vacío. Dicho de otra forma, si $f = 0$ c.p.d., entonces f es idénticamente nula. Por tanto, si a cada función continua asociamos su clase de equivalencia, obtenemos una aplicación lineal e inyectiva de $C[0,1]$ en L_p. Como espacio vectorial, podemos por tanto identificar $C[0,1]$ con el subespacio de L_p formado por las clases de equivalencia que contienen una (y sólo una) función continua, y escribir $C[0,1] \subset L_p$.

Obviamente, la norma inducida por L_p en $C[0,1]$ no coincide con la natural de $C[0,1]$, la norma del máximo, que lo convierte en espacio de Banach. De hecho, ambas normas no son equivalentes, como consecuencia del siguiente resultado básico, que tampoco demostraremos.

- *Para $1 \leqslant p < \infty$ se tiene que $C[0,1]$ es denso en L_p*

2.6.2. Funciones esencialmente acotadas

Veamos ahora el espacio de Lebesgue que corresponde al caso $p = \infty$. Es fácil modificar la noción de función acotada, de forma que tenga sentido para clases de equivalencia de funciones medibles en $[0,1]$. Para $f \in L$, no tiene sentido decir que f está acotada, pues ello depende claramente de la función que elijamos como representante de la clase de equivalencia f. Pero podemos preguntarnos si f está acotada c.p.d., que es la propiedad con la que vamos a trabajar.

Si $\varphi \in L$ y $\varphi(t) \in \mathbb{R}_0^+$ p.c.t. $t \in [0,1]$, no es difícil comprobar que existe una mínima constante $M \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$, verificando que $\varphi(t) \leqslant M$ p.c.t. $t \in [0,1]$. Dicha constante recibe el nombre de **supremo esencial** de φ y se denota por: $\operatorname{ess\,sup} \varphi$. Así pues,

$$\operatorname{ess\,sup} \varphi = \min \left\{ M \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\} : \varphi(t) \leqslant M \text{ p.c.t. } t \in [0,1] \right\}$$

Decimos que $f \in L$ es una **función esencialmente acotada**, cuando $\operatorname{ess\,sup} |f| < \infty$, o si se quiere, cuando existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $|f(t)| \leqslant M$ p.c.t. $t \in [0,1]$. Denotamos por L_∞ al conjunto de todas las funciones esencialmente acotadas,

$$L_\infty = \left\{ f \in L : \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty \right\}$$

que es claramente un subespacio de L. De nuevo se trata de clases de equivalencia, pero las manejamos como funciones. Para convertir a L_∞ en un espacio normado, definimos

$$\| f \|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| \qquad \forall f \in L_\infty$$

y se comprueba sin ninguna dificultad que $\| \cdot \|_\infty$ es una norma en L_∞. La complitud es una vez más nuestro objetivo, para obtener:

- *L_∞ es un espacio de Banach con la norma $\| \cdot \|_\infty$.*

Para razonar con claridad, distinguimos entre funciones y clases de equivalencia. Si $\{F_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L_∞, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos claramente elegir una función f_n en la clase de equivalencia F_n, de forma que se verifiquen todas las desigualdades siguientes:

$$|f_n(t)| \leqslant \|F_n\|_\infty \quad \text{y} \quad |f_n(t) - f_m(t)| \leqslant \|F_n - F_m\|_\infty \qquad \forall t \in [0,1], \ \forall n,m \in \mathbb{N}$$

Entonces $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones acotadas en $[0,1]$, pero de hecho vemos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach $l_\infty[0,1]$. Por tanto $\{f_n\}$ converge en $l_\infty[0,1]$, es decir, uniformemente en $[0,1]$, a una función acotada f. Como f es medible, da lugar a una clase de equivalencia $F \in L_\infty$. Finalmente, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene evidentemente

$$\| F_n - F \|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |F_n - F| \leqslant \sup \left\{ |f_n(t) - f(t)| : t \in \Omega \right\}$$

luego de $\{f_n\} \to f$ en $l_\infty[0,1]$, deducimos que $\{F_n\} \to F$ en L_∞. ■

Como subespacio de L_∞, encontramos de nuevo al espacio de funciones continuas $C[0,1]$, pero la situación es muy diferente a la que teníamos para $p < \infty$.

Si $f \in C[0,1]$ y $M \in \mathbb{R}_0^+$, el conjunto $\{t \in [0,1] : |f(t)| > M\}$ es abierto, luego si tiene medida nula, ha de ser vacío. Dicho de otra forma, de $|f(t)| \leqslant M$ p.c.t. $t \in [0,1]$, se deduce que $|f(t)| \leqslant M$ para todo $t \in [0,1]$. Tenemos por tanto que

$$\operatorname{ess\,sup}|f| = \max\{\,|f(t)| : t \in [0,1]\,\} \qquad \forall f \in C[0,1]$$

Esto significa que, considerando a $C[0,1]$ como espacio de Banach con la norma del máximo, al asociar a cada función continua la clase de equivalencia a la que pertenece, se obtiene una aplicación lineal e isométrica de $C[0,1]$ en L_∞. Por tanto, el espacio de Banach $C[0,1]$ es isométricamente isomorfo a un subespacio de L_∞, que obligadamente ha de ser cerrado.

2.6.3. Relaciones entre los espacios de Lebesgue

La dependencia del espacio L_p con respecto al parámetro p es exactamente la opuesta de la que teníamos para los espacios de sucesiones.

- *Para* $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, *se tiene:*

$$f \in L_q \quad \Longrightarrow \quad f \in L_p\,, \quad \|f\|_p \leqslant \|f\|_q \tag{16}$$

Suponiendo primero que $q < \infty$, usaremos la desigualdad integral de Hölder, pero con el exponente $r = q/p > 1$. Observamos claramente que

$$\int_0^1 \big(|f(t)|^p\big)^r dt = \int_0^1 |f(t)|^q dt = \big(\|f\|_q\big)^q < \infty$$

luego $|f|^p \in L_r$ con $\big\||f|^p\big\|_r = \big(\|f\|_q\big)^{q/r} = \big(\|f\|_q\big)^p$.

Por otra parte, tomamos $g(t) = 1$ p.c.t. $t \in [0,1]$, con lo que evidentemente tenemos

$$\int_0^1 |g(t)|^{r^*} dt = 1\,, \qquad \text{luego} \qquad g \in L_{r^*}\,, \ \|g\|_{r^*} = 1$$

La desigualdad integral de Hölder nos dice que $|f|^p g \in L_1$, es decir, $f \in L_p$, con

$$\big(\|f\|_p\big)^p = \big\||f|^p g\big\|_1 \leqslant \big\||f|^p\big\|_r \|g\|_{r^*} = \big(\|f\|_q\big)^p$$

y tenemos (16). El caso $q = \infty$ es aún más sencillo, pues para $f \in L_\infty$ se tiene

$$\int_0^1 |f(t)|^p dt \leqslant \big(\|f\|_\infty\big)^p < \infty$$

luego $f \in L_p$ con $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$. ■

De nuevo para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, vamos a comprobar ahora que la inclusión $L_q \subset L_p$ es estricta. Con un poco más de esfuerzo, vamos a obtener un resultado bastante mejor.

- *Si* $1 \leqslant p < \infty$, *existe* $f \in L_p$ *tal que* $f \notin L_q$ *para* $p < q \leqslant \infty$

Empezamos considerando la función medible $g:\,[0,1]\to\mathbb{R}_0^+$ definida por

$$g(t)\,=\,\frac{1}{t\,\big(\log t\big)^2}\quad\forall t\in\,]\,0\,,\,1/2\,]\qquad\text{y}\qquad g(t)=0\quad\forall t\in\,]\,1/2\,,\,1\,]\cup\{0\}$$

Fijado $n\in\mathbb{N}$ con $n\geqslant 3$, el cambio de variable $t=1/s$ nos permite escribir

$$\int_{1/n}^{1} g(t)\,dt\,=\,\int_{1/n}^{1/2}\frac{dt}{t\,\big(\log t\big)^2}\,=\,\int_{2}^{n}\frac{ds}{s\,\big(\log s\big)^2}\,=\,\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{ds}{s\,\big(\log s\big)^2}$$

Para $k\in\mathbb{N}$ con $2\leqslant k\leqslant n-1$ y $s\in[\,k\,,\,k+1\,]$ se tiene $s\,\big(\log s\big)^2\,\geqslant\,k\,\big(\log k\big)^2$, de donde

$$\int_{1/n}^{1} g(t)\,dt\,=\,\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{ds}{s\,\big(\log s\big)^2}\,\leqslant\,\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\,\big(\log k\big)^2}$$

El teorema de la convergencia monótona nos permite ahora concluir que

$$\int_{0}^{1} g(t)\,dt\,=\,\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1} g(t)\,dt\,\leqslant\,\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k\,\big(\log k\big)^2}\,=\,\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\,\big(\log k\big)^2}\,<\,\infty$$

pues sabemos que la serie de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{k\,\big(\log k\big)^2}$ es convergente.

Por otra parte, fijemos $r\in\mathbb{R}$ con $1<r<2$ y sea de nuevo $n\in\mathbb{N}$ con $n\geqslant 3$. El mismo cambio de variable usado antes nos permite ahora escribir

$$\int_{1/n}^{1} g(t)^r\,dt\,=\,\int_{1/n}^{1/2}\frac{dt}{t^r\,\big(\log t\big)^{2r}}\,=\,\int_{2}^{n}\frac{ds}{s^{2-r}\,\big(\log s\big)^{2r}}\,=\,\sum_{k=2}^{n-1}\int_{k}^{k+1}\frac{ds}{s^{2-r}\,\big(\log s\big)^{2r}}$$

Para $s\in[\,k\,,\,k+1\,]$ con $k=2,\ldots,n-1$, usamos que $s^{2-r}\,\big(\log s\big)^{2r}\,\leqslant\,(k+1)^{2-r}\big(\log(k+1)\big)^{2r}$, con lo cual obtenemos ahora

$$\int_{1/n}^{1} g(t)^r\,dt\,\geqslant\,\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^{2-r}\big(\log(k+1)\big)^{2r}}\,=\,\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k^{2-r}\big(\log k\big)^{2r}}$$

Esta vez la serie de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 3}\frac{1}{k^{2-r}\big(\log k\big)^{2r}}$ diverge, ya que $2-r<1$, y el teorema de la convergencia monótona nos da

$$\int_{0}^{1} g(t)^r\,dt\,=\,\lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1} g(t)^r\,dt\,\geqslant\,\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^{2-r}\big(\log k\big)^{2r}}\,=\,\infty$$

En resumen viendo ya a g como clase de equivalencia, hemos probado que $g\in L_1$ pero $g\notin L_r$ para $1<r<2$. Usando (17) tenemos que $g\notin L_r$ para $1<r\leqslant\infty$. Ahora, para $1\leqslant p<\infty$ basta tomar $f=g^{1/p}$. En efecto, como $g\in L_1$ se tiene $f\in L_p$, y si $p<q<\infty$, tomando $r=q/p>1$ tenemos $g\notin L_r$, luego $f\notin L_q$ y, con más razón, $f\notin L_\infty$. ■

Así pues, para $1\leqslant p<q\leqslant\infty$, la relación entre los espacios L_p y L_q es la misma que había entre los espacios de sucesiones l_p y l_q, pero con la inclusión en sentido opuesto. Concretamente, L_q es un subespacio denso de L_p, porque contiene a $C[0,1]$, pero $L_q\neq L_p$. Por tanto L_q, con la norma inducida por L_p, es un espacio normado no completo, cuya topología está contenida estrictamente en la de la norma $\|\cdot\|_q$.

2.6.4. Relación con los espacios de sucesiones

El siguiente resultado nos da una clara relación entre dos de las gamas de espacios de Banach que hemos presentado.

- *Para* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *se tiene que* l_p *es isométricamente isomorfo a un subespacio de* L_p.

Sea $\{J_n\}$ una sucesión de intervalos abiertos no vacíos, contenidos en $[0,1]$ y dos a dos disjuntos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $\chi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la función característica de J_n y $\rho_n \in \mathbb{R}^+$ la longitud de J_n. Por ejemplo, para todo $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar

$$J_n = \left]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\qquad \text{y} \qquad \rho_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

En el caso $p < \infty$, fijado $x \in l_p$, consideramos la función $f_x : [0,1] \to \mathbb{R}_0^+$ dada por

$$f_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{\rho_n^{1/p}} \chi_n \tag{17}$$

La serie converge puntualmente porque, fijado $t \in [0,1]$, al estar usando intervalos dos a dos disjuntos, vemos que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : \chi_n(t) \neq 0\}$ tiene a lo sumo un elemento. Por la misma razón se tiene también que

$$|f_x|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^p}{\rho_n} \chi_n$$

Entonces f es medible, por ser el límite puntual de una sucesión de funciones medibles, y el teorema de la convergencia monótona nos permite escribir

$$\int_{\Omega} |f(t)|^p \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x(n)|^p}{\rho_n} \int_0^1 \chi_n(t) \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty$$

Viendo a f_x como clase de equivalencia, tenemos por tanto $f_x \in L_p$, lo cual es válido para toda sucesión $x \in l_p$. Pero de hecho vemos que $\|f_x\|_p = \|x\|_p$ para todo $x \in l_p$, donde no hay problema en denotar por $\|\cdot\|_p$ a la norma de L_p y también a la de l_p. La aplicación $x \mapsto f_x$ es evidentemente lineal, luego es un isomorfismo isométrico de l_p sobre un subespacio de L_p.

En el caso $p = \infty$, para cada $x \in l_\infty$, en vez de (17) definimos

$$f_x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) \, \chi_n$$

De nuevo la serie anterior converge puntualmente en $[0,1]$, luego f_x es medible. También es claro que $|f_x(t)| \leqslant \sup\left\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\right\} = \|x\|_\infty$ para todo $t \in [0,1]$. Por tanto, viendo f_x como clase de equivalencia, tenemos $f_x \in L_\infty$, con $\|f_x\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}|f_x| \leqslant \|x\|_\infty$. Además, dado $n \in \mathbb{N}$, tenemos por una parte $f_x(t) = x(n)$ p.c.t. $t \in J_n$, y por otra $|f_x(t)| \leqslant \|f_x\|_\infty$ también p.c.t. $t \in J_n$. Como J_n tiene medida positiva, se deberá tener $|x(n)| \leqslant \|f_x\|_\infty$, lo cual es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluimos que $\|f_x\|_\infty = \|x\|_\infty$ para toda sucesión $x \in l_\infty$, luego la aplicación $x \mapsto f_x$ es un isomorfismo isométrico de l_∞ sobre un subespacio de L_∞. ■

Tema 3

Operadores y funcionales lineales continuos

Llega ahora el momento de trabajar con las aplicaciones, entre espacios normados, que tienen un buen comportamiento algebraico y topológico: los *operadores lineales continuos*. El punto de partida será una caracterización de la continuidad de un operador lineal mediante una sencilla desigualdad. Como consecuencia, veremos que el espacio vectorial de todos los operadores lineales continuos entre dos espacios normados, se convierte a su vez de manera natural en un espacio normado. Ello da lugar a una nueva familia de espacios normados y espacios de Banach, conocidos de manera genérica como *espacios de operadores*.

Prestaremos especial atención al caso en que el espacio de llegada es el cuerpo escalar. Entonces, el término "operador" no resulta ya tan conveniente, por lo que es preferible hablar de *funcionales lineales continuos* en un espacio normado. Estos funcionales forman un espacio de Banach, que es el *dual* del espacio en el que están definidos. Daremos una descripción muy concreta de los duales de algunos espacios conocidos.

3.1. Operadores lineales continuos

Como los espacios vectoriales que nos interesan suelen estar formados por funciones, las aplicaciones entre ellos transforman unas funciones en otras, y es habitual llamar "operadores" a las transformaciones de este tipo. Así pues, si X e Y son espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, un **operador lineal** de X en Y es una aplicación $T : X \to Y$, que es lineal, es decir, verifica que

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v) \qquad \forall u, v \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

La continuidad de un operador lineal entre espacios normados puede caracterizarse de varias maneras, entre las que destacamos la más útil, para luego comentar las restantes.

Caracterización de la continuidad. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si, verifica la siguiente condición:*

$$\exists\, M \in \mathbb{R}_0^+ \ :\ \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \quad \forall x \in X \tag{1}$$

Demostración. Nótese que, siguiendo una sana costumbre, denotamos de la misma forma a las normas de X e Y, lo que no tiene por qué causar confusión alguna.

Supongamos primero que T es continuo, para comprobar (1). Por ser T continuo en cero, existe $\delta > 0$ tal que, para $z \in X$ con $\|z\| \leqslant \delta$ se tiene $\|T(z)\| \leqslant 1$. Dado $x \in X$, podemos escribir $x = \|x\| u$ con $u \in X$ y $\|u\| \leqslant 1$. Tomando $z = \delta u$, tenemos $\|z\| \leqslant \delta$ y deducimos claramente que $\delta \|T(u)\| = \|T(z)\| \leqslant 1$, de donde $\|T(u)\| \leqslant 1/\delta$. Como $T(x) = \|x\| T(u)$, concluimos que $\|T(x)\| = \|x\| \|T(u)\| \leqslant (1/\delta)\|x\|$. Como esta desigualdad es válida para todo $x \in X$, hemos probado (1) con $M = 1/\delta$.

Recíprocamente, si existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando (1), para cualesquiera $u, v \in X$ se tiene claramente que $\|T(u) - T(v)\| = \|T(u-v)\| \leqslant M\|u - v\|$, con lo que T es una aplicación lipschitziana, luego continua. ■

La demostración anterior contiene información útil, que no está recogida en el enunciado. Para destacarla, fijamos un operador lineal $T : X \to Y$, donde X e Y son espacios normados.

En la primera parte de la demostración, para probar (1) no se usa la continuidad de T en todo punto de X, sino tan sólo la continuidad en cero. Así pues, si T es continuo en cero, será continuo en todo punto de X. Pero además, si suponemos que T es continuo en un punto cualquiera $x_0 \in X$, de la igualdad $T(x) = T(x_0 + x) - T(x_0)$, válida para todo $x \in X$, deducimos claramente que T es continuo en cero, y por tanto en todo punto de X. En resumen, si un operador lineal entre espacios normados no es continuo, entonces no puede ser continuo en ningún punto del espacio de partida.

Por otra parte, de la condición (1), no sólo hemos deducido que T es continuo, sino que es una aplicación lipschitziana, luego uniformemente continua. Así pues, la continuidad de un operador lineal entre espacios normados equivale a su continuidad uniforme, que a su vez equivale a que el operador sea una aplicación lipschitziana. Basta pensar en el caso $X = Y = \mathbb{R}$, para comprender que la linealidad es esencial para que se verifiquen estas equivalencias.

En otro orden de ideas, es natural decir que una función $f : X \to Y$ está acotada en un conjunto $A \subset X$, cuando $f(A)$ es un subconjunto acotado de Y. Si nuestro operador lineal T es continuo, la condición (1) nos dice que T está acotado en cada conjunto acotado $A \subset X$, o si se quiere, T preserva la acotación. En efecto, si $K \in \mathbb{R}_0^+$ verifica $\|x\| \leqslant K$ para todo $x \in A$, de (1) se deduce obviamente que $\|y\| \leqslant MK$ para todo $y \in T(A)$.

Recíprocamente, si T preserva la acotación, en particular T estará acotado en la bola unidad de X, es decir, existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|T(u)\| \leqslant M$ para todo $u \in X$ que verifique $\|u\| \leqslant 1$. Dado $x \in X$, tenemos $x = \|x\| u$ con $u \in X$ y $\|u\| \leqslant 1$, luego $\|T(x)\| = \|x\| \, \|T(u)\| \leqslant M\|x\|$, y hemos probado (1), que equivale a la continuidad de T. Así pues, T es continuo si, y sólo si, está acotado en cada subconjunto acotado de X, para lo cual es suficiente que esté acotado en la bola unidad de X. Es por esto que a los operadores lineales continuos entre espacios normados se les suele llamar también **operadores lineales acotados**.

Comentemos un caso particular del resultado anterior que ya conocíamos. Si $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son dos normas en un espacio vectorial X, la topología de $\|\cdot\|_1$ contiene a la de $\|\cdot\|_2$ si, y sólo si, la identidad en X, que obviamente es un operador lineal, es continua como aplicación de X con la norma $\|\cdot\|_1$, en X con $\|\cdot\|_2$. El resultado anterior nos dice que esto ocurre si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1$ para todo $x \in X$, como obtuvimos en su momento.

3.2. Espacios de operadores

Si X e Y son espacios normados sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$, denotamos por $L(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales continuos de X en Y. Dicho conjunto tiene estructura de espacio vectorial, con la suma y el producto por escalares definidos en forma fácil de adivinar. Para $T,S \in L(X,Y)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, consideramos las aplicaciones $T+S$, $\lambda T : X \to Y$, definidas, para todo $x \in X$, por:

$$\big(T+S\big)(x) = T(x) + S(x) \qquad \text{y} \qquad \big(\lambda T\big)(x) = \lambda T(x)$$

Es rutinario comprobar que $T+S$ y λT son operadores lineales, pero además, usando que la la suma y el producto por escalares de Y son funciones continuas, la continuidad de T y S nos lleva fácilmente a la de $T+S$ y λT, así que $T+S, \lambda T \in L(X,Y)$. De nuevo se comprueba de forma rutinaria que $L(X,Y)$, con la suma y el producto por escalares recién definidos, es un espacio vectorial. Nuestro objetivo es convertir a $L(X,Y)$ en un espacio normado.

Fijado ahora un operador $T \in L(X,Y)$, y en vista de la caracterización de la continuidad antes obtenida, cabe pensar en hacer que la desigualdad que aparece en (1) sea la mejor posible, es decir, en considerar la mínima constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ que la verifique. Observamos claramente que, para $M \in \mathbb{R}_0^+$ se tiene

$$\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad \|T(u) - T(v)\| \leqslant M\,\|u-v\| \quad \forall u,v \in X$$

luego la mínima constante que buscábamos no es otra que la contante de Lipschitz de T.

Adelantando acontecimientos, definimos la **norma de un operador** $T \in L(X,Y)$ como su constante de Lipschitz, o lo que es lo mismo,

$$\|T\| = \min\big\{M \in \mathbb{R}_0^+ \,:\, \|T(x)\| \leqslant M\,\|x\| \quad \forall x \in X\big\} \tag{2}$$

Vamos a obtener a continuación otras expresiones útiles para la norma de un operador. Para ello, descartamos el caso trivial $X = \{0\}$.

Recordemos la razón por la que el conjunto que aparece en el segundo miembro de (2) tiene mínimo: para $M \in \mathbb{R}_0^+$ la desigualdad $\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\|$ es trivial si $x = 0$, y en otro caso equivale a $\|T(x)\| \,/\, \|x\| \leqslant M$, luego buscamos el mínimo mayorante de un conjunto no vacío y mayorado de números reales, que obviamente existe, es el supremo de dicho conjunto:

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \,:\, x \in X \setminus \{0\}\right\} \tag{3}$$

Para $x \in X \setminus \{0\}$ tenemos obviamente $\|T(x)\|/\|x\| = \big\|T\big(x/\|x\|\big)\big\|$ y está claro que el conjunto $\big\{x/\|x\| : x \in X \setminus \{0\}\big\}$ es la **esfera unidad** de X, es decir, $S = \{z \in X \,:\, \|z\| = 1\}$. Por tanto la igualdad (3) equivale a

$$\|T\| = \sup\big\{\,\|T(z)\| : z \in S\big\} = \sup\big\{\,\|T(z)\| : z \in X\,,\ \|z\| = 1\big\} \tag{4}$$

El conjunto que aparece en el segundo miembro de (4) aumenta si sustituimos S por la bola unidad $B = \{x \in X \,:\, \|x\| \leqslant 1\}$, pero su supremo no varía, como vamos a ver.

Para $x \in B$ se tiene $x = \|x\| z$ con $z \in S$, y por tanto $\|T(x)\| = \|x\| \|T(z)\| \leqslant \|T(z)\|$. Deducimos claramente que $\sup\{\| T(x) \| : x \in B\} \leqslant \sup\{\| T(z) \| z \in S\}$. La otra desigualdad es evidente y hemos comprobado que

$$\|T\| = \sup \{ \|T(x)\| : x \in B \} = \sup \{ \|T(x)\| : x \in X , \ \|x\| \leqslant 1 \} \tag{5}$$

Observemos finalmente que también se puede sustituir la bola cerrada B por la bola abierta unidad U, es decir,

$$\|T\| = \sup \{ \|T(u)\| : u \in U \} = \sup \{ \|T(u)\| : u \in X , \ \|u\| < 1 \} \tag{6}$$

En efecto: una desigualdad es evidente y, para la otra, dado $x \in B$ y $\rho \in]0,1[$, tenemos $\rho x \in U$, de donde

$$\| T(x) \| = \lim_{\rho \to 1} \rho \| T(x) \| = \lim_{\rho \to 1} \| T(\rho x) \| \leqslant \sup \{ \| T(u) \| : u \in U \}$$

Hemos obtenido cinco formas de expresar la norma de un operador, entre las que (2) y (5) son las que se usan con más frecuencia.

Antes de comprobar que en efecto hemos definido una norma en el espacio vectorial $L(X,Y)$, expliquemos la forma en que suele usarse la expresión (2). Si ya sabemos que $T \in L(X,Y)$, podemos escribir $\|T(x)\| \leqslant \|T\| \|x\|$ para todo $x \in X$, y tenemos una desigualdad óptima, pues la constante $\|T\|$ que en ella aparece es la mínima posible.

Pero en la práctica, lo habitual es empezar comprobando que un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo, encontrando $M \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|T(x)\| \leqslant M \|x\|$ para todo $x \in X$. Sabemos entonces que $\|T\| \leqslant M$, y se dará la igualdad cuando la desigualdad que hemos probado sea óptima.

Comprobemos ya que tenemos una norma en $L(X,Y)$. Para $T, S \in L(X,Y)$, se tiene

$$\| (T+S)(x) \| \leqslant \| T(x) \| + \| S(x) \| \leqslant \big(\| T \| + \| S \| \big) \|x\| \qquad \forall x \in X$$

de donde $\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|$. Por otra parte, para $\lambda \in \mathbb{K}$, usando por ejemplo (5) tenemos

$$\| \lambda T \| = \sup \{ \|\lambda T(x)\| : x \in B \} = |\lambda| \sup \{ \|T(x)\| : x \in B \} = |\lambda| \|T\|$$

Finalmente, de $\|T\| = 0$ se deduce obviamente que $T = 0$. Así pues, la aplicación $T \mapsto \|T\|$, definida mediante la igualdad (2), o cualquiera de las otras expresiones que hemos mencionado, es una norma en $L(X,Y)$, que recibe el nombre genérico de **norma de operadores**, mientras que al espacio normado $L(X,Y)$ se le llama **espacio de operadores**.

Para estudiar la convergencia en el espacio de operadores recién definido, sea $\{T_n\}$ una sucesión en $L(X,Y)$ que converja a $T \in L(X,Y)$. Si A es un subconjunto acotado de X, y tomamos $K \in \mathbb{R}_0^+$ tal que $\|x\| \leqslant K$ para todo $x \in A$, de (2) se deduce que, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\sup \{ \|T_n(x) - T(x)\| : x \in A \} \leqslant K \|T_n - T\|$, luego $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en cada subconjunto acotado de X. Recíprocamente, con sólo suponer que $\{T_n\}$ converge a T uniformemente en la bola unidad de X, de (5) se deduce que $\{ \|T_n - T\| \} \to 0$. Usando (4), o bien (6), la bola unidad se puede sustituir por la esfera unidad o por la bola abierta unidad.

Está claro que, de $\{\,\|T_n - T\|\,\} \to 0$, se deduce que $\{T_n(x)\} \to T(x)$ para todo $x \in X$, pero más adelante veremos que el recíproco no es cierto, es decir, la convergencia puntual en X no es suficiente para asegurar la convergencia en $L(X,Y)$.

Podemos ahora probar que, si Y es un espacio de Banach, $L(X,Y)$ también lo es, con un tipo de argumento que ya debe ser familiar. Si $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L(X,Y)$, para cualesquiera $x \in X$ y $n,m \in \mathbb{N}$ se tiene $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \|T_n - T_m\|\,\|x\|$, luego $\{T_n(x)\}$ es una sucesión de Cauchy en Y. Como Y es completo, podemos definir $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ para todo $x \in X$, obteniendo una aplicación $T : X \to Y$. La continuidad de la suma y el producto por escalares de Y permiten comprobar rutinariamente que T es un operador lineal, y acabaremos probando que T es continuo con $\{\,\|T_n - T\|\,\} \to 0$. Fijado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n,m \in \mathbb{N},\ \ n,m \geqslant n_0 \quad \Longrightarrow \quad \|T_n - T_m\| \leqslant \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad \|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|x\| \quad \forall x \in X$$

Fijado $n \in N$ con $n \geqslant n_0$, para todo $x \in X$ tenemos claramente

$$\|T_n(x) - T(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_n(x) - T_m(x)\| \leqslant \varepsilon\,\|x\|$$

y esto prueba que $T_n - T \in L(X,Y)$, de donde $T = T_n - (T_n - T) \in L(X,Y)$. Pero además, la desigualdad anterior nos dice que $\|T_n - T\| \leqslant \varepsilon$ para $n \geqslant n_0$, luego $\{\,\|T_n - T\|\,\} \to 0$ como queríamos. El siguiente enunciado resume lo demostrado sobre los espacios de operadores:

- *Si X e Y son espacios normados, el espacio vectorial $L(X,Y)$, de todos los operadores lineales y continuos de X en Y, es un espacio normado, con la norma de operadores. La convergencia en $L(X,Y)$ equivale a la convergencia uniforme en cada subconjunto acotado de X, que a su vez equivale a la convergencia uniforme en la bola unidad de X. Finalmente, si Y es un espacio de Banach, entonces $L(X,Y)$ también lo es.*

Más adelante veremos que, excluido el caso trivial $X = \{0\}$, la complitud de Y no sólo es suficiente, sino también necesaria, para la complitud del espacio de operadores $L(X,Y)$. Por otra parte, la complitud de Y, junto con la continuidad uniforme de los operadores lineales y continuos, tienen otra importante consecuencia, ya que las funciones uniformemente continuas, con valores en un espacio métrico completo, pueden extenderse de un conjunto a su cierre, preservando la continuidad uniforme. En vez de probar este resultado más general, para luego aplicarlo a operadores, preferimos obtener directamente el caso que nos interesa:

Extensión de operadores. *Sea Y un espacio de Banach, M un subespacio de un espacio normado X y consideremos, tanto en M como en $\overline{M}$, la norma inducida por X. Entonces, para cada $T \in L(M,Y)$, existe un único $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ que extiende a T, es decir, $\widetilde{T}(u) = T(u)$ para todo $u \in M$. Además, se tiene $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.*

Demostración. Fijado $x \in \overline{M}$, existe una sucesión $\{u_n\}$ en M tal que $\{u_n\} \to x$, con lo que $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy en M. Como $\|T(u_n) - T(u_m)\| \leqslant \|T\|\,\|u_n - u_m\|$ para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$, deducimos que $\{T(u_n)\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Banach Y, luego converge. Para poder definir $\widetilde{T}(x)$ como el límite de la sucesión $\{T(u_n)\}$, debemos ver que dicho límite no depende de la sucesión $\{u_n\}$ elegida. En efecto, si $\{v_n\}$ es otra sucesión en M con $\{v_n\} \to x$, tenemos $\{u_n - v_n\} \to 0$, luego $\{T(v_n) - T(u_n)\} \to 0$, pero las sucesiones $\{T(u_n)\}$ y $\{T(v_n)\}$ son convergentes, así que sus límites coinciden.

Así pues, para cada $x \in \overline{M}$ definimos $\widetilde{T}(x) = \lim_{n\to\infty} T(u_n)$, donde $\{u_n\}$ es cualquier sucesión de puntos de M tal que $\{u_n\} \to x$. Se comprueba rutinariamente que $\widetilde{T} : \overline{M} \to Y$ es un operador lineal. Si $u \in M$, podemos obviamente tomar $u_n = u$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para tener $\widetilde{T}(u) = T(u)$, luego $\widetilde{T}$ extiende a T. Fijando $x \in \overline{M}$ y $\{u_n\} \to x$ con $u_n \in M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, usamos ahora que $\|T(u_n)\| \leqslant \|T\| \|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de donde se deduce que $\|\widetilde{T}(x)\| \leqslant \|T\| \|x\|$, y esto prueba que $\widetilde{T} \in L(\overline{M},Y)$ con $\|\widetilde{T}\| \leqslant \|T\|$. La otra desigualdad es clara, pues $\widetilde{T}$ extiende a T, luego tenemos $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Finalmente, si $\widehat{T} : \overline{M} \to Y$ es cualquier extensión continua de T, el conjunto $\{ x \in \overline{M} : \widehat{T}(x) = \widetilde{T}(x) \}$ es cerrado y contiene a M, luego coincide con $\overline{M}$, es decir, se tiene $\widehat{T} = \widetilde{T}$. Esto prueba de sobra la unicidad de $\widetilde{T}$, concluyendo la demostración. ■

Con la misma notación anterior, vemos que la aplicación $T \mapsto \widetilde{T}$, de $L(M,Y)$ en $L(\overline{M},Y)$, es lineal e isométrica, luego inyectiva. Pero también es sobreyectiva, pues para $S \in L(\overline{M},Y)$ se tiene obviamente $S = \widetilde{T}$ donde $T = S\big|_M \in L(M,Y)$ es la restricción de S a M. Tenemos así un isomorfismo isométrico, que identifica totalmente los espacios de Banach $L(M,Y)$ y $L(\overline{M},Y)$. Es preferible manejar la función inversa $S \mapsto S\big|_M$, que también es un isomorfismo isométrico, pero tiene una definición más explícita.

Observemos también que, en la discusión anterior, nada cambia al sustituir X por $\overline{M}$, luego no se pierde generalidad suponiendo que M es denso en X. Por tanto, la identificación entre dos espacios de operadores que hemos obtenido, puede enunciarse como sigue:

- *Sea X un espacio normado, M un subespacio denso en X con la norma inducida, e Y un espacio de Banach. Entonces, la aplicación $S \mapsto S\big|_M$ es un isomorfismo isométrico de $L(X,Y)$ sobre $L(M,Y)$*

3.3. Funcionales lineales continuos

Todo lo dicho anteriormente sobre operadores, es cierto en particular cuando el espacio de llegada es el cuerpo escalar, cuya norma es el valor absoluto o el módulo. Si X es un espacio vectorial formado por funciones, una aplicación de X en $\mathbb{K}$ asocia un número a cada función de X, por lo que el término "operador" deja de ser adecuado y se suele sustituir por "funcional".

Así pues, un **funcional lineal** en un espacio vectorial X no es más que una aplicación lineal de X en $\mathbb{K}$. Repasemos los resultados obtenidos anteriormente para operadores, en el caso particular de los funcionales, que es el que ahora nos interesa.

Para un funcional lineal f en un espacio normado X, es equivalente ser continuo en algún punto, ser continuo en todo punto, ser uniformemente continuo y ser una función lipschitziana.

Cualquiera de las propiedades de f recién mencionadas equivale a la existencia de una constante $M \in \mathbb{R}_0^+$ verificando que

$$|f(x)| \leqslant M \|x\| \qquad \forall x \in X$$

Esto a su vez ocurre si, y sólo si, f está acotado en cada subconjunto acotado de X, para lo cual es suficiente que f esté acotado en la bola unidad de X.

El espacio vectorial formado por todos los funcionales lineales continuos en X se denota por X^*, en vez de $L(X,\mathbb{K})$, y en él disponemos de una norma que se puede expresar de varias formas, entre las que destacamos dos. Para todo $f \in X^*$ se tiene:

$$\|f\| = \text{mín}\left\{M \in \mathbb{R}_0^+ : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\right\} = \sup\left\{|f(x)| : x \in X, \ \ \|x\| \leqslant 1\right\}$$

La complitud de $\mathbb{K}$ nos asegura que X^* es siempre un espacio de Banach, que se conoce como el **espacio dual** del espacio normado X, y también es habitual decir que la norma de X^* es la **norma dual** de la norma de X. Hasta qué punto existe una auténtica *dualidad* entre un espacio normado X y su dual X^*, es algo que discutiremos a fondo más adelante. De momento tenemos cierta asimetría, pues X^* es completo aunque X no lo sea.

Comentemos también que, si M es un subespacio denso en un espacio normado X, entonces la aplicación $f \mapsto f\big|_M$ es un isomorfismo isométrico de X^* sobre M^*. Conviene destacar la sobreyectividad de dicha aplicación: cada $g \in M^*$ es la restricción a M de un único $\widetilde{g} \in X^*$.

Veamos ahora una propiedad de los funcionales lineales que ya no es caso particular de un resultado referente a operadores lineales en general. Para ello, veamos que un funcional lineal f en un espacio vectorial X, queda determinado por su núcleo $\ker f = \{x \in X : f(x) = 0\}$, salvo un factor de proporcionalidad, es decir: si g es otro funcional lineal en X con $\ker g = \ker f$, existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $g = \lambda f$. En el caso $f = 0$ se tiene $\ker g = \ker f = X$, luego $g = 0$ y podemos usar cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$. En otro caso, existe $u \in X$ tal que $f(u) = 1$ con lo que, para todo $x \in X$, se tiene $x - f(x)u \in \ker f = \ker g$, luego $g(x) = f(x)\,g(u)$. Tomando $\lambda = g(u) \in \mathbb{K}$, se tiene por tanto $g = \lambda f$, como queríamos.

Es bien fácil convencerse de que el resultado análogo al anterior, para operadores lineales cualesquiera, está muy lejos de ser cierto. Pero volviendo a los funcionales lineales, no es de extrañar ahora que, en un espacio normado, la continuidad de un funcional lineal se caracterice en términos de su núcleo, como vamos a comprobar.

- *Un funcional lineal en un espacio normado es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.*

Si X es un espacio normado y $f \in X^*$, está claro que $\ker f$ ha de ser un subconjunto cerrado de X. Recíprocamente, sea f un funcional lineal en X y supongamos que $\ker f$ es cerrado, para probar que f es continuo. Si $f = 0$ no hay nada que demostrar, y en otro caso fijamos $z \in X$ con $f(z) = -1$. Como $\ker f$ es cerrado, tenemos $z \notin \overline{\ker f}$, luego existe un entorno de z cuya intersección con $\ker f$ es vacía. Tenemos por tanto $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $\big(z + rU\big) \cap \ker f = \emptyset$, donde U es la bola abierta unidad de X.

Si $x \in X$ y $f(x) \neq 0$, se tiene $z + \big(x/f(x)\big) \in \ker f$, luego $z + \big(x/f(x)\big) \notin \big(z + rU\big)$, o lo que es lo mismo, $x/f(x) \notin rU$. Esto significa que $\|x/f(x)\| \geqslant r$, es decir, $|f(x)| \leqslant (1/r)\|x\|$. Esta desigualdad es obvia cuando $f(x) = 0$, luego es válida para todo $x \in X$, y prueba que f es continuo, como se quería. ■

Conviene resaltar una consecuencia fácil del resultado anterior. Si un funcional lineal f, en un espacio normado X, no es continuo, entonces $\ker f$ es denso en X. En efecto, hemos visto que $\ker f$ no puede ser cerrado, pero entonces $\overline{\ker f}$ es un subespacio de X que contiene estrictamente a $\ker f$, de donde se deduce claramente que $\overline{\ker f} = X$.

3.4. Duales de algunos espacios de Banach

Vamos a describir con detalle los duales de muchos espacios de Banach estudiados en el tema anterior. Veremos, por ejemplo, que el dual de un espacio de sucesiones se identifica frecuentemente con otro espacio de sucesiones. Por supuesto, dicha identificación se consigue mediante un isomorfismo isométrico.

Conviene extender la definición del exponente conjugado p^*, que hicimos para $1 < p < \infty$, de forma que queden incluidos los casos extremos, haciendo que cada uno sea el conjugado del otro, es decir, para $p = 1$ definimos $p^* = \infty$, mientras que para $p = \infty$ tomamos $p^* = 1$. De esta forma, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, se tiene $1 \leqslant p^* \leqslant \infty$ y sigue siendo cierto que $\left(p^*\right)^* = p$.

La definición anterior es coherente con la desigualdad de Hölder, que a partir de ahora tendrá bastante protagonismo. Para $N \in \mathbb{N}$, y cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_N$, $b_1, b_2, \ldots, b_N \in \mathbb{R}_0^+$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k \leqslant \text{máx}\left\{a_1, a_2, \ldots, a_N\right\} \sum_{k=1}^{N} b_k$$

que puede entenderse como la desigualdad de Hölder para los casos $p = \infty$ y $p = 1$. Veamos pues la forma en que podemos usar dicha desigualdad, sin excluir los casos $p = 1$ y $p = \infty$, y sin distinguirlos de los que ya conocíamos. Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene claramente:

$$\sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_{p^*} \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N \tag{7}$$

3.4.1. Duales de espacios de dimensión finita

Fijados $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, vamos a estudiar el espacio dual $\left(l_p^N\right)^*$. Aprovechamos para ello que los funcionales lineales en $\mathbb{K}^N$ son bien conocidos. Fijado $y \in \mathbb{K}^N$, consideramos el funcional lineal $\widehat{y} : l_p^N \to \mathbb{K}$, dado por

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k) \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{8}$$

De (7) deducimos claramente que

$$\left|\widehat{y}(x)\right| = \left|\sum_{k=1}^{N} x(k)\, y(k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)|\,|y(k)| \leqslant \left\|x\right\|_p \left\|y\right\|_{p^*} \qquad \forall x \in l_p^N$$

luego $\widehat{y} \in \left(l_p^N\right)^*$, cosa que era bastante obvia, pero además tenemos que $\left\|\widehat{y}\right\| \leqslant \left\|y\right\|_{p^*}$. De hecho vamos a obtener la igualdad, comprobando que también se tiene

$$\left\|y\right\|_{p^*} \leqslant \left\|\widehat{y}\right\| \tag{9}$$

Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ escribimos $|\,y(k)\,| = \alpha_k\, y(k)$ con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ y $|\,\alpha_k\,| = 1$. Obtendremos (9) distinguiendo los tres casos que pueden darse.

Si $p=1$, elegimos $j \in \{1,2,\ldots,N\}$ de forma que $|y(j)| = \|y\|_\infty$. y definimos $x \in \mathbb{K}^N$ tomando $x(j) = \alpha_j$ y $x(k) = 0$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,N\} \setminus \{j\}$. Tenemos entonces

$$\|y\|_\infty = |y(j)| = \alpha_j y(j) = \widehat{y}(x) = |\widehat{y}(x)| \leqslant \|\widehat{y}\| \, \|x\|_1 = \|\widehat{y}\|$$

que es la desigualdad (9), en el caso $p=1$.

Si $p=\infty$, tomando $x(k) = \alpha_k$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,N\}$, obtenemos también (9), ya que

$$\|y\|_1 = \sum_{k=1}^N |y(k)| = \sum_{k=1}^N \alpha_k y(k) = \widehat{y}(x) = |\widehat{y}(x)| \leqslant \|\widehat{y}\| \, \|x\|_\infty = \|\widehat{y}\|$$

Finalmente, si $1 < p < \infty$, tomamos $x(k) = \alpha_k |y(k)|^{p^*-1}$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,N\}$. Entonces, por una parte tenemos

$$\widehat{y}(x) = \sum_{k=1}^N \alpha_k |y(k)|^{p^*-1} y(k) = \sum_{k=1}^N |y(k)|^{p^*} = \left(\|y\|_{p^*}\right)^{p^*}$$

y por otra vemos que

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^N |y(k)|^{(p^*-1)p}\right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^N |y(k)|^{p^*}\right)^{1/p} = \left(\|y\|_{p^*}\right)^{p^*/p}$$

Enlazando las dos últimas igualdades obtenemos

$$\left(\|y\|_{p^*}\right)^{p^*} = |\widehat{y}(x)| \leqslant \|\widehat{y}\| \, \|x\|_p = \|\widehat{y}\| \left(\|y\|_{p^*}\right)^{p^*/p}$$

Suponiendo que $y \neq 0$, pues en otro caso (9) es evidente, podemos dividir ambos miembros por $\left(\|y\|_{p^*}\right)^{p^*/p} > 0$, y como $p^* - (p^*/p) = 1$, obtenemos (9).

Así pues, en todos los casos hemos probado (9) y, como ya teníamos la otra desigualdad, concluimos que

$$\|\widehat{y}\| = \|y\|_{p^*} \tag{10}$$

Consideremos la aplicación $\Phi : l_{p^*}^N \to \left(l_p^N\right)^*$, definida por $\Phi(y) = \widehat{y}$ para todo $y \in l_{p^*}^N$, que evidentemente es lineal. En (10) vemos que Φ es isométrica, luego en particular inyectiva, pero comprobamos enseguida que también es sobreyectiva. En efecto, denotando por $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ a la base usual de $\mathbb{K}^N$, si f es cualquier funcional lineal en $\mathbb{K}^N$, se tiene claramente que $f = \widehat{y}$, sin más que tomar $y(k) = f(e_k)$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,N\}$. Destacamos el resultado obtenido, que describe perfectamente toda una gama de espacios duales.

- *Para $N \in \mathbb{N}$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, los espacios $l_{p^*}^N$ y $\left(l_p^N\right)^*$ son isométricamente isomorfos. De hecho, definiendo*

$$\widehat{y}(x) = \sum_{k=1}^N x(k) y(k) \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N$$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de $l_{p^*}^N$ sobre $\left(l_p^N\right)^*$.

Obsérvese la simetría de la situación: el resultado anterior también es válido para p^* en lugar de p, luego identifica $\left(l_{p^*}^N\right)^*$ con l_p^N. Por tanto, cada uno de los espacios l_p^N y $l_{p^*}^N$ es isométricamente isomorfo al dual del otro. Se dice que $\|\cdot\|_{p^*}$ es la *norma dual* de $\|\cdot\|_p$, y viceversa. Observemos por último que l_2^N es *autodual*, se identifica con su espacio dual.

3.4.2. Duales de espacios de sucesiones

Para estudiar los duales de los espacios l_p, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, seguimos un razonamiento similar al usado en dimensión finita, sustituyendo sumas finitas por sumas de series y prestando atención a la convergencia.

Fijemos $x \in l_p$, $y \in l_{p^*}$ y $n \in \mathbb{N}$. Considerando entonces los vectores $x_n, y_n \in \mathbb{K}^n$, definidos por $x_n(k) = x(k)$ e $y_n(k) = y(k)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, de (7) deducimos claramente que,

$$\sum_{k=1}^{n} |x(k)|\, |y(k)| \leqslant \|x_n\|_p \, \|y_n\|_{p^*} \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_{p^*}$$

Como esto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y(n)$ es absolutamente convergente con

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|\, |y(n)| \leqslant \|x\|_p \, \|y\|_{p^*} \tag{11}$$

Todavía con $y \in l_{p^*}$ fijo, definimos una aplicación $\widehat{y} : l_p \to \mathbb{K}$, escribiendo

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \qquad \forall x \in l_p$$

Es claro que $\widehat{y}$ es un funcional lineal en l_p y (11) nos dice que $\widehat{y} \in l_p^*$ con $\|\widehat{y}\| \leqslant \|y\|_{p^*}$, pero probaremos la igualdad, viendo que $\|y\|_{p^*} \leqslant \|\widehat{y}\|$. Para $n \in \mathbb{N}$, escribimos $|y(n)| = \alpha_n\, y(n)$ con $\alpha_n \in \mathbb{K}$ y $|\alpha_n| = 1$, y distinguimos ahora los tres casos que pueden darse.

Si $p = 1$, usando los vectores unidad $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|y(n)| = |\widehat{y}(e_n)| \leqslant \|\widehat{y}\| \, \|e_n\|_1 = \|\widehat{y}\|$$

de donde deducimos claramente que $\|y\|_\infty \leqslant \|\widehat{y}\|$.

En el caso $p = \infty$, definimos $x(n) = \alpha_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $x \in l_\infty$ y obtenemos

$$\|y\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |y(k)| = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_k\, y(k) = \widehat{y}(x) = |\widehat{y}(x)| \leqslant \|\widehat{y}\| \, \|x\|_\infty = \|\widehat{y}\|$$

Finalmente, si $1 < p < \infty$, tomando $x(n) = \alpha_n\, |y(n)|^{p^*-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos de entrada que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^{(p^*-1)p} = \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^{p^*} < \infty$$

luego $x \in l_p$ con $\|x\|_p = \left(\|y\|_{p^*}\right)^{p^*/p}$. Pero ahora vemos también que

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\, |y(n)|^{p^*-1}\, y(n) = \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^{p^*} = \left(\|y\|_{p^*}\right)^{p^*}$$

Enlazando las dos últimas igualdades, obtenemos que

$$\big(\|y\|_{p^*}\big)^{p^*} = |\widehat{y}(x)| \leqslant \|\widehat{y}\|\,\|x\|_p = \|\widehat{y}\|\,\big(\|y\|_{p^*}\big)^{p^*/p}$$

Si $y \neq 0$, al dividir ambos miembros por $\big(\|y\|_{p^*}\big)^{p^*/p} > 0$, obtenemos que $\|y\|_{p^*} \leqslant \|\widehat{y}\|$, desigualdad que es obvia cuando $y = 0$. Así pues, en todos los casos hemos probado que

$$\|\widehat{y}\| = \|y\|_{p^*} \qquad \forall y \in l_{p^*} \tag{12}$$

Considerando ahora la aplicación $\Phi : l_{p^*} \to l_p^*$ definida por

$$\Phi(y) = \widehat{y} \quad \forall y \in l_{p^*} \tag{13}$$

comprobamos rutinariamente que Φ es lineal, acabamos de ver que es isométrica, y se trata ahora de saber si es sobreyectiva.

Fijado $f \in l_p^*$, buscamos $y \in l_{p^*}$ tal que $\widehat{y} = f$. Está claro que debemos tomar $y(n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y de entrada debemos comprobar que $y \in l_{p^*}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, escribimos de nuevo $|y(k)| = \alpha_k y(k)$ donde $\alpha_k \in \mathbb{K}$ con $|\alpha_k| = 1$, y volvemos a distinguir tres casos.

El caso $p = 1$ es el más sencillo, pues para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$|y(n)| = |f(e_n)| \leqslant \|f\|\,\|e_n\|_1 = \|f\|$$

luego $y \in l_\infty$. En el caso $p = \infty$, para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |y(k)| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|_\infty = \|f\|$$

de donde deducimos que $y \in l_1$. Finalmente, cuando $1 < p < \infty$, adaptamos el razonamiento anterior. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} |y(k)|^{p^*} &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |y(k)|^{p^*-1} f(e_k) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k |y(k)|^{p^*-1} e_k\right) \\ &\leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k |y(k)|^{p^*-1} e_k\right\| = \|f\| \left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^{p^*}\right)^{1/p} \end{aligned}$$

Deducimos claramente que $y \in l_{p^*}$, pues la desigualdad anterior nos da

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |y(k)|^{p^*}\right)^{1/p^*} \leqslant \|f\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En todos los casos, dado $f \in l_p^*$, hemos comprobado que $y \in l_{p^*}$, donde $y(n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Nos preguntamos ahora si $\widehat{y} = f$, y comprobamos enseguida que la respuesta es afirmativa para $1 \leqslant p < \infty$.

En efecto, como $\widehat{y}\,(e_n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por linealidad deducimos que $\widehat{y}$ ha de coincidir con f en el subespacio engendrado por los vectores unidad, que es denso en l_p. Por tanto tenemos dos funciones continuas en l_p que coinciden en un conjunto denso, luego son iguales, como queríamos. Así pues, cuando $1 \leqslant p < \infty$, la aplicación Φ es sobreyectiva. Antes de discutir lo que ocurre para $p = \infty$, destaquemos todo lo demostrado en los demás casos.

- *Para $1 \leqslant p < \infty$, los espacios de Banach l_{p^*} y l_p^* son isométricamente isomorfos. De hecho, definiendo*

$$\widehat{y}\,(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad \forall x \in l_p\,,\ \forall y \in l_{p^*}$$

la aplicación $y \mapsto \widehat{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_{p^*} sobre l_p^*.

Nótese que, para $1 < p < \infty$, el resultado anterior también es válido sustituyendo p por p^*, y tenemos la misma simetría observada en dimensión finita: cada uno de los espacios l_p y l_{p^*} se identifica con el dual del otro. En particular, l_2 se identifica con su propio dual.

En el caso $p = \infty$ el resultado anterior no es válido como demostraremos más adelante. La aplicación lineal $\Phi : l_1 \to l_\infty^*$ es isométrica, luego l_1 es isométricamente isomorfo a un subespacio cerrado de l_∞^*, pero Φ no es sobreyectiva. De hecho veremos que, si X es un espacio normado y X^* es separable, entonces X es separable. Por tanto, l_∞^* no es separable, luego no puede ser siquiera homeomorfo a l_1. Tenemos así un ejemplo en el que no se presenta la simetría entre un espacio y su dual que hasta ahora veníamos observando. El dual de l_1 se identifica con l_∞, pero el dual de l_∞ no se puede identificar con l_1. Pronto veremos otro ejemplo de esta situación, que no requiere esperar a la demostración de otros resultados.

El motivo por el que no podemos razonar con l_∞ como hemos hecho con l_p, para $p < \infty$, salta a la vista: el subespacio engendrado por los vectores unidad no es denso en l_∞. Esto sugiere la posibilidad de trabajar con c_0 en vez de l_∞, como haremos ahora.

Para $y \in l_1$, consideramos la restricción de $\widehat{y}$ a c_0 que denotaremos por $\widetilde{y}$, siendo evidente que $\widetilde{y} \in c_0^*$ con $\|\widetilde{y}\| \leqslant \|\widehat{y}\| \leqslant \|y\|_1$. En vez de Φ, usaremos ahora la aplicación $\Psi : l_1 \to c_0^*$ dada por $\Psi(y) = \widetilde{y}$ para todo $y \in l_1$. Para ver que Ψ es isométrica, dado $y \in l_1$, para cada $k \in \mathbb{N}$ escribimos $|y(k)| = \alpha_k\, y(k)$ con $\alpha_k \in \mathbb{K}$ y $|\alpha_k| = 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |y(k)| = \widetilde{y}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \leqslant \|\widetilde{y}\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|_\infty \leqslant \|\widetilde{y}\|$$

de donde $\|y\|_1 \leqslant \|\widetilde{y}\|$, como se quería. Para ver que Ψ es sobreyectiva, dado $f \in c_0^*$, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos $y(n) = f(e_n)$ y escribimos $|y(n)| = \alpha_n\, y(n)$ con $\alpha_n \in \mathbb{K}$ y $|\alpha_n| = 1$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{n} |y(k)| = f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right) \leqslant \|f\| \left\|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|_\infty \leqslant \|f\|$$

luego $y \in l_1$ como se quería. Finalmente está bien claro que $\widetilde{y} = f$, porque el subespacio engendrado por los vectores unidad es denso en c_0 igual que lo era en l_p para $1 \leqslant p < \infty$. Como $\widetilde{y}(e_n) = f(e_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene $\widetilde{y} = f$. Hemos probado el siguiente resultado, con el que concluimos el estudio de los duales de los espacios de sucesiones.

- *Los espacios de Banach l_1 y c_0^* son isométricamente isomorfos. Más concretamente, definiendo*

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad \forall x \in c_0\,,\ \forall y \in l_1$$

la aplicación $y \mapsto \widetilde{y}$ es un isomorfismo isométrico de l_1 sobre c_0^*.

Tenemos ya el ejemplo prometido, para el que no hay simetría entre un espacio de Banach y su dual: el dual de c_0 se identifica con l_1, pero el dual de l_1 se identifica con l_∞, que no se puede identificar con c_0, ya que c_0 es separable y l_∞ no lo es.

3.4.3. Duales de los espacios de Lebesgue

Estudiemos los duales de los espacios L_p, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, aunque sin dar la demostración de algunos resultados. Como cabe esperar, hay un claro paralelismo con el estudio que hemos hecho para los espacios de sucesiones.

Observemos que la desigualdad integral de Hölder es claramente cierta para $p=1$ y $p=\infty$, pues si $f \in L_1$ y $g \in L_\infty$ se tiene

$$\int_0^1 \left| f(t)\, g(t) \right| dt \leqslant \| f \|_1 \, \| g \|_\infty$$

Por tanto, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $f \in L_p$ y $g \in L_{p^*}$ se tiene $f g \in L_1$ con

$$\left| \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \right| \leqslant \| f g \|_1 \leqslant \| f \|_p \, \| g \|_{p^*} \tag{12}$$

Fijada $g \in L_{p^*}$ podemos entonces definir un funcional lineal $\widehat{g} : L_p \to \mathbb{K}$ dado por

$$\widehat{g}(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt \qquad \forall f \in L_p$$

y de (12) deducimos que $\widehat{g} \in L_p^*$ con $\| \widehat{g} \| \leqslant \| g \|_{p^*}$. Esto nos lleva a la aplicación lineal

$$\Phi : L_{p^*} \to L_p^*, \qquad \Phi(g) = \widehat{g} \qquad \forall g \in L_{p^*} \tag{13}$$

que verifica $\| \Phi(g) \| \leqslant \| g \|_{p^*}$ para toda $g \in L_{p^*}$. Demostrar que Φ es isométrica requiere una observación elemental: si $g : [0,1] \to \mathbb{K}$ es una función medible, existe otra $\alpha : [0,1] \to \mathbb{K}$ tal que $|\alpha(t)| = 1$ y $|g(t)| = \alpha(t)\, g(t)$ para todo $t \in \Omega$. En términos de clases de equivalencia, las igualdades $|\alpha| = 1$ y $|g| = \alpha g$ se verifican c.p.d.

Pues bien, fijada $g \in L_{p^*}$, suponemos sin perder generalidad $\| g \|_{p^*} = 1$, tomamos α como antes, y distinguimos tres casos, para razonar de forma análoga a como ya lo hemos hecho dos veces. Si $1 < p < \infty$, tomando $f = \alpha \left| g \right|^{p^*-1}$, es fácil ver que $\widehat{g}(g) = \| f \|_p = 1$, de donde deducimos que $\| \widehat{g} \| \geqslant 1$ como se quería. En el caso $p = \infty$, tomamos simplemente $f = \alpha$, con lo que se tiene de nuevo $\widehat{g}(f) = \| f \|_\infty = 1$, luego $\| \widehat{g} \| \geqslant 1$. Finalmente en el caso $p=1$ tomamos $\rho \in \mathbb{R}^+$ con $\rho < 1$ y, como $\| g \|_\infty > \rho$, existe un conjunto medible $E \subset [0,1]$, con medida $r \in \mathbb{R}^+$, tal que $|g(t)| \geqslant \rho$ p.c.t. $t \in E$. Tomando entonces $f = \alpha \chi_E / r$, se tiene claramente que $f \in L_1$ con $\| f \|_1 = 1$, de donde

$$\| \widehat{g} \| \geqslant | \widehat{g}(f) | = \frac{1}{r} \int_E |g(t)|\, dt \geqslant \rho$$

En vista de la arbitrariedad de ρ, deducimos que $\| \widehat{g} \| \geqslant 1$.

En todos los casos, hemos probado que la aplicación Φ definida en (13) es isométrica. Cuando $p < \infty$, dicha aplicación es también sobreyectiva, cosa que no vamos a demostrar. Enunciamos sin embargo este importante resultado.

Teorema de representación de Riesz, para los espacios de Lebesgue. *Para* $1 \leqslant p < \infty$, *los espacios de Banach* L_{p^*} *y* L_p^* *son isométricamente isomorfos. Más concretamente, definiendo*

$$\widehat{g}(f) = \int_{\Omega} f(t)\, g(t)\, dt \qquad \forall f \in L_p(\Omega), \quad \forall g \in L_{p^*}(\Omega)$$

la aplicación $g \mapsto \widehat{g}$ *es un isomorfismo isométrico de* L_{p^*} *sobre* L_p^*.

La parte de este teorema que no vamos a probar, la sobreyectividad de la aplicación $g \mapsto \widehat{g}$, es la más importante, y explica su nombre. Todo funcional lineal continuo en L_p, un objeto bastante abstracto, se expresa en la forma $\widehat{g}$, es decir, se "representa" mediante un objeto mucho más concreto, una función $g \in L_{p^*}$. Este resultado es una consecuencia directa de un teorema fundamental en Teoría de la Medida, el *teorema de Radon-Nikodým.*

En el caso $p = \infty$, la aplicación Φ definida en (13) no es sobreyectiva. De hecho, como ocurría con los espacios de sucesiones, se puede probar que L_∞^* no es separable, mientras L_1 sí lo es, luego L_1 no puede ser siquiera homeomorfo a L_∞^*. Conseguir una descripción concreta de L_∞^*, como ocurre con l_∞^*, es asunto delicado, en el que no vamos a entrar.

3.4.4. Funcionales lineales en espacios de funciones continuas

En general, si K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, describir el dual del espacio de Banach $C(K)$ requiere conocimientos de Teoría de la Medida. Uno de los resultados fundamentales de dicha teoría, conocido también como *Teorema de representación de Riesz*, identifica $C(K)^*$ con un espacio formado por medidas reales o complejas en K, con la norma adecuada. Por todo lo dicho, aquí sólo vamos a presentar algunos ejemplos de funcionales lineales continuos en espacios de funciones continuas.

Los primeros son bien sencillos y los presentamos a plena generalidad. Si K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, fijado un punto $t \in K$, podemos considerar el funcional lineal $\delta_t : C(K) \to \mathbb{K}$ definido por

$$\delta_t\big(f\big) = f(t) \qquad \forall f \in C(K)$$

Se dice que δ_t es el **funcional de Dirac** en el punto t, en honor del físico-matemático británico P. Dirac (1902-1984), uno de los creadores de la Mecánica Cuántica. Es claro que

$$\big|\,\delta_t(f)\,\big| \leqslant \text{máx}\,\big\{\,|f(s)| : s \in K\big\} = \big\|\,f\,\big\|_\infty \qquad \forall f \in C(K)$$

luego $\delta_t \in C(K)^*$ con $\big\|\,\delta_t\,\big\| \leqslant 1$. Pero tomando $f(s) = 1$ para todo $s \in K$, se tiene $f \in C(K)$ con $\|\,f\,\|_\infty = 1$, de donde $\|\,\delta_t\,\| \geqslant |\,\delta_t(f)\,| = 1$, luego $\|\,\delta_t\,\| = 1$.

El ejemplo por antonomasia de funcional lineal continuo en $C[0,1]$ es la integral:

$$I\big(f\big) = \int_0^1 f(t)\, dt \qquad \forall f \in C[0,1]$$

Es fácil comprobar que $I \in C[0,1]^*$ con $\|\,I\,\| = 1$.

Tema 4

Operaciones con espacios normados

En lo que sigue vamos a usar con frecuencia la noción de *isomorfismo* entre dos espacios normados, que es menos restrictiva que la de isomorfismo isométrico, pero hasta cierto punto permite identificarlos, de ahí su nombre. Aclarado este concepto, estudiaremos dos operaciones que, a partir de dos espacios normados conocidos, permiten obtener otros nuevos: *producto* y *cociente*. Al discutir la relación entre ellas, van a aparecer otras dos nociones importantes: las de *suma topológico-directa* y *subespacio complementado*.

4.1. Isomorfismos entre espacios normados

Hasta ahora hemos manejado una sola relación de equivalencia entre espacios normados: identificamos dos espacios normados cuando existe un isomorfismo isométrico entre ellos, pues está claro que en tal caso, los dos espacios son matemáticamente idénticos.

Sin embargo, muchas de las nociones que se usan en un espacio normado no dependen de la norma concreta del espacio, sino solamente de su topología. Ocurre por supuesto con todas las propiedades topológicas, como la compacidad o la continuidad, pero también con otras nociones que no son topológicas, como la acotación o la complitud. Para el estudio de tales nociones, podemos identificar dos espacios normados cuando exista una biyección entre ellos que los identifique como espacios vectoriales y también como espacios topológicos, aunque no del todo como espacios normados, es decir, aunque no llegue a ser un isomorfismo isométrico.

Claramente, el tipo de aplicación del que estamos hablando es una biyección lineal, que sea a la vez un homeomorfismo, es decir, un homeomorfismo lineal. En Análisis Funcional, a los homeomorfismos lineales entre espacios normados se les llama simplemente isomorfismos.

Así pues, si X e Y son espacios normados, un **isomorfismo** de X sobre Y es un operador lineal biyectivo $T : X \to Y$, tal que T y T^{-1} son continuos. Cuando tal isomorfismo existe, decimos lógicamente que X e Y son **isomorfos**. Está claro que la relación de isomorfía entre espacios normados es una relación de equivalencia. Como se ha dicho, dos espacios normados isomorfos son idénticos como espacios vectoriales y como espacios topológicos, aunque no lleguen a serlo como espacios normados.

Para tener ejemplos de isomorfismos entre espacios normados, que no son isométricos, basta pensar que dos normas en un espacio vectorial X son equivalentes si, y sólo si, la identidad es un isomorfismo, de X con una de las normas, sobre X con la otra. Dicho isomorfismo sólo es isométrico, cuando ambas normas coinciden. En cierto modo, todo los isomorfismos son del mismo tipo que los recién presentados, como vamos a ver.

Si X e Y son espacios normados, y $T : X \to Y$ un isomorfismo, tenemos

$$\|T(x)\| \leqslant \|T\| \, \|x\| \quad \forall x \in X \qquad \text{y} \qquad \|T^{-1}(y)\| \leqslant \|T^{-1}\| \, \|y\| \quad \forall y \in Y$$

Dado $x \in X$, podemos tomar $y = T(x)$ en la segunda desigualdad para obtener

$$\frac{1}{\|T^{-1}\|} \, \|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant \|T\| \, \|x\| \qquad \forall x \in X$$

Vemos en particular que T es isométrico si, y sólo si, $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$.

En cualquier caso, si definimos $\|x\|_T = \|T(x)\|$ para todo $x \in X$, está claro que obtenemos una nueva norma $\|\cdot\|_T$ en X, que por las desigualdades anteriores es equivalente a la de partida. Ahora bien, es obvio que T es un isomorfismo isométrico de X con la norma $\|\cdot\|_T$, sobre Y. Podemos por tanto identificar esos dos espacios normados, y está claro que entonces T se convierte en el operador identidad, de X con la norma de partida, en X con la norma $\|\cdot\|_T$, siendo dichas dos normas equivalentes. Así pues, cuando dos espacios normados X e Y son isomorfos, podemos perfectamente pensar que cualquiera de ellos se obtiene a partir del otro, sustituyendo su norma por otra equivalente a ella.

Para tener un ejemplo de dos espacios normados isomorfos, que no son isométricamente isomorfos, observamos los espacios reales l_1^2 y l_2^2. Como $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son normas equivalentes en $\mathbb{R}^2$, pero distintas, la identidad en $\mathbb{R}^2$ es un isomorfismo entre dichos espacios que no es isométrico. Pero eso no basta para asegurar que no son isométricamente isomorfos, podría existir un isomorfismo isométrico entre ellos, distinto de la identidad. Supongamos por tanto que T es un isomorfismo isométrico de l_1^2 sobre l_2^2, para llegar a una contradicción. Si J es el segmento de extremos $(1,0)$ y $(0,1)$, contenido en la esfera unidad de l_1^2, entonces $T(J)$, que es el segmento de extremos $T(1,0)$ y $T(0,1)$, estará contenido en la esfera unidad de l_2^2, una circunferencia que no contiene segmentos no triviales. Esto implica que $T(J)$ se reduce a un punto, es decir, $T(1,0) = T(0,1)$, lo cual es una contradicción, porque T era inyectivo.

4.2. Producto de espacios normados

Sean X e Y dos espacios normados, y consideremos el espacio vectorial producto $X \times Y$. Es fácil adivinar cómo podemos definir en $X \times Y$ toda una gama de normas. Concretamente, para $1 \leqslant p < \infty$ podemos escribir

$$\|(x,y)\|_p = \big(\|x\|^p + \|y\|^p\big)^{1/p} \qquad \forall (x,y) \in X \times Y \tag{1}$$

y para $p = \infty$ también podemos definir

$$\|(x,y)\|_\infty = \text{máx}\,\big\{\|x\|, \|y\|\big\} \qquad \forall (x,y) \in X \times Y \tag{2}$$

Obtenemos ahora la información que cabe esperar sobre las funciones recién definidas.

- *Si X e Y son espacios normados y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, la función $\|\cdot\|_p$, definida en (1) o (2), es una norma en $X \times Y$. Todas las normas mencionadas son equivalentes, y la topología común a todas ellas es la topología producto en $X \times Y$.*

Fijado $1 \leqslant p \leqslant \infty$, comprobar la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$ no requiere volver a la desigualdad de Minkowski. Denotando por φ_p a la norma del espacio l_p^2, podemos escribir

$$\|(x,y)\|_p = \varphi_p\big(\|x\|, \|y\|\big) \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

Usando que la restricción de φ_p al primer cuadrante $\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+$ es una función creciente en cada variable, y que φ_p verifica la desigualdad triangular, para $(x,y),(u,v) \in X \times Y$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\|(x,y)+(u,v)\|_p &= \varphi_p\big(\|x+u\|, \|y+v\|\big) \leqslant \varphi_p\big(\|x\| + \|u\|\,,\, \|y\| + \|v\|\big)\\ &\leqslant \varphi_p\big(\|x\|, \|y\|\big) + \varphi_p\big(\|u\|, \|v\|\big) = \|(x,y)\|_p + \|(u,v)\|_p\end{aligned}$$

Por otra parte, es obvio que para $\lambda \in \mathbb{K}$ y $(x,y) \in X \times Y$ se tiene $\|\lambda(x,y)\|_p = |\lambda|\, \|(x,y)\|_p$, así como que, de $\|(x,y)\| = 0$ se deduce que $x = y = 0$.

Fijando $(x,y) \in X \times Y$, la desigualdad triangular para , $\|\cdot\|_p$ nos dice que

$$\|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,0)\|_p + \|(0,y)\|_p = \|x\| + \|y\| = \|(x,y)\|_1$$

pero es evidente que $\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p$ y que $\|(x,y)\|_1 \leqslant 2\,\|(x,y)\|_\infty$. Enlazando las tres desigualdades anteriores, obtenemos

$$\|(x,y)\|_\infty \leqslant \|(x,y)\|_p \leqslant \|(x,y)\|_1 \leqslant 2\|(x,y)\|_\infty \qquad \forall (x,y) \in X \times Y$$

y esto prueba que todas las normas que estamos considerando en $X \times Y$ son equivalentes.

Denotemos por $\mathcal{T}$ a la topología producto en $X \times Y$, que sabemos tiene como base a la familia $\mathcal{B}$ formada por todos conjuntos del tipo $U \times V$ donde U y V son abiertos de X e Y respectivamente. Por otra parte, sea $\mathcal{T}_\infty$ la topología de la norma $\|\cdot\|_\infty$ que tiene como base a la familia $\mathcal{B}_\infty$ formada por todas las bolas abiertas para $\|\cdot\|_\infty$. Cada una de estas bolas es el producto cartesiano de una bola abierta en X por una bola abierta en Y, luego tenemos $\mathcal{B}_\infty \subset \mathcal{B}$, de donde $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}$. Pero recíprocamente, si U y V son abiertos en X e Y, ambos son uniones de bolas abiertas en sus respectivos espacios, luego $U \times V$ es unión de elementos de $\mathcal{B}_\infty$. Esto prueba que $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}_\infty$, de donde $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_\infty$. Concluimos que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_\infty$, y por tanto $\mathcal{T}$ es también la topología de la norma $\|\cdot\|_p$, para $1 \leqslant p < \infty$. ■

Es costumbre llamar **espacio normado producto** de X por Y, a cualquiera que se obtenga dotando a $X \times Y$ de una norma cuya topología sea la producto, por ejemplo, cualquiera de las normas $\|\cdot\|_p$ con $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Está claro que todos estos espacios normados son isomorfos, o por así decirlo, existe salvo isomorfismos un único espacio normado producto de X por Y, que se suele denotar simplemente por $X \times Y$. Ciertamente es una notación ambigua, pero ello no es problema para estudiar propiedades que se conservan por isomorfismos, como ocurre por ejemplo con la complitud. El siguiente enunciado tiene por tanto perfecto sentido:

- *Si X e Y son espacios normados, el espacio normado producto $X \times Y$ es completo si, y sólo si, lo son X e Y.*

La aplicación $x \mapsto (x,0)$ es claramente un isomorfismo de X sobre $X \times \{0\}$, que es un subespacio cerrado de $X \times Y$. Si $X \times Y$ es completo, deducimos que $X \times \{0\}$ es completo, luego X también lo es, y el mismo razonamiento se usa para Y.

Recíprocamente, supongamos que X e Y son espacios de Banach, y sea $\{(x_n, y_n)\}$ una sucesión de Cauchy en $X \times Y$. La primera proyección coordenada, $(x,y) \mapsto x$, es un operador lineal continuo de $X \times Y$ sobre X, luego $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en X, y análogamente obtenemos que $\{y_n\}$ es de Cauchy en Y. Por tanto, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sucesiones convergentes, luego $\{(x_n, y_n)\}$ converge en la topología producto. ■

4.3. Cociente de espacios normados

Si M es un subespacio de un espacio vectorial X, recordemos el **espacio vectorial cociente**

$$X/M = \{x + M : x \in X\}$$

cuyas operaciones vienen dadas por

$$(x+M) + (z+M) = x+z+M \quad \text{y} \quad \lambda(x+M) = \lambda x + M \quad \forall x,z \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Para trabajar con el cociente X/M, conviene siempre usar la **aplicación cociente**, que a cada vector $x \in X$ asocia la clase de equivalencia a la que pertenece, esto es

$$q : X \to X/M, \qquad q(x) = x + M \quad \forall x \in X$$

Claramente q es lineal y sobreyectiva.

Si X es un espacio normado y M un subespacio cerrado de X, definimos la norma de cada clase de equivalencia $w \in X/M$ como el ínfimo de las normas de sus representantes, es decir,

$$\|w\| = \inf\{\|x\| : x \in w\} \qquad \forall w \in X/M \tag{3}$$

Equivalentemente, se tiene

$$\|q(x)\| = \|x + M\| = \inf\{\|x + y\| : y \in M\} \qquad \forall x \in X \tag{4}$$

Observemos también que, para cada $x \in X$, la norma de su clase de equivalencia $q(x)$, es la distancia de x a M, es decir,

$$\|q(x)\| = \inf\{\|x - y\| : y \in M\} = d(x,M) \qquad \forall x \in X$$

Veremos más adelante que, fijado $x \in X$, el ínfimo de la igualdad anterior, o equivalentemente, el que aparece en (4), pueden no ser mínimos. Dicho de otra forma, aunque M sea cerrado, puede no existir un punto de M que esté situado a la mínima distancia de x, esto es, un $y \in M$ que verifique $\|x - y\| = d(x,M)$.

Es hora de comprobar que, efectivamente, tenemos una norma en X/M.

- *Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X, mediante cualquiera de las igualdades* (3) *y* (4)*, se obtiene una norma en el espacio vectorial cociente X/M.*

Fijados $x_1, x_2 \in X$ e $u, v \in M$ se tiene

$$\| q(x_1 + x_2) \| \leqslant \| x_1 + x_2 + u + v \| \leqslant \| x_1 + u \| + \| x_2 + v \|$$

Como esto es válido para todo $v \in M$, deducimos que

$$\| q(x_1 + x_2) \| \leqslant \| x_1 + u \| + \| q(x_2) \|$$

pero a su vez esto es cierto para todo $u \in M$, y obtenemos la desigualdad triangular:

$$\| q(x_1 + x_2) \| \leqslant \| q(x_1 \| + \| q(x_2) \| \qquad \forall x_1, x_2 \in X$$

Por otra parte, para $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ se tiene

$$\begin{aligned} \| \lambda q(x) \| &= \operatorname{ínf} \left\{ \| \lambda x + y \| : y \in M \right\} = \operatorname{ínf} \left\{ \| \lambda x + \lambda u \| : u \in M \right\} \\ &= \operatorname{ínf} \left\{ |\lambda| \, \| x + u \| : u \in M \right\} = |\lambda| \, \operatorname{ínf} \left\{ \| x + u \| : u \in M \right\} = |\lambda| \, \| q(x) \| \end{aligned}$$

igualdad que es obvia cuando $\lambda = 0$.

Finalmente si $x \in X$ verifica que $\| q(x) \| = 0$, se tiene $d(x, M) = 0$, es decir, $x \in \overline{M}$. Pero hemos supuesto que M es cerrado, luego $x \in M$, es decir, $q(x) = 0$. ■

Entendemos ahora la razón para suponer que M es cerrado: en otro caso la definición (3) nos daría una seminorma en X/M, pero no una norma.

Como es natural, la norma definida en (3) se conoce como **norma cociente**, y su topología recibe el nombre de **topología cociente**. También es habitual decir que X/M, con dicha norma, es el **espacio normado cociente** de X por M.

Para trabajar en el espacio normado cociente se aprovechan sobre todo las propiedades de la aplicación cociente que se recogen en el siguiente enunciado:

- *Dados un espacio normado X y un subespacio cerrado $M \subset X$, consideremos el espacio normado cociente X/M. Se tiene entonces:*
  - (i) *La aplicación cociente $q : X \to X/M$ es un operador lineal continuo*
  - (ii) *La bola abierta unidad de X/M es $q(U)$, donde U es la bola abierta unidad de X*
  - (iii) *Salvo en el caso trivial $M = X$, se tiene $\|q\| = 1$*
  - (iv) *La aplicación q es abierta*
  - (v) *Un subconjunto G de X/M es abierto si, y sólo si, $q^{-1}(G)$ es un abierto de X*
  - (vi) *Si Y es cualquier espacio topológico, una aplicación $f : X/M \to Y$ es continua si, y sólo si, $f \circ q$ es continua.*

(i). Por definición de la norma cociente, se tiene evidentemente que $\| q(x) \| \leqslant \| x \|$ para todo $x \in X$, luego $q \in L(X, X/M)$ y por ahora tenemos $\| q \| \leqslant 1$.

(ii). Para $x \in U$ se tiene $\| q(x) \| \leqslant \| x \| < 1$, lo que nos da una inclusión. Pero si $w \in X/M$ verifica que $\| w \| < 1$, por definición de ínfimo ha de existir $x \in w$ tal que $\| x \| < 1$, de donde se deduce que $w = q(x) \in q(U)$, y tenemos la otra inclusión.

(iii). Suponiendo que $M \neq X$, de (ii) deducimos claramente que

$$\| q \| = \sup \left\{ \| q(x) \| : x \in U \right\} = \sup \left\{ \|w\| : w \in X/M, \ \|w\| < 1 \right\} = 1$$

(iv). Sea A un subconjunto abierto de X, y sea $w \in q(A)$, es decir, $w = q(x)$ con $x \in A$. Existe entonces $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $x + rU \subset A$, de donde $q(x) + r\,q(U) \subset q(A)$, pero (ii) nos dice que $q(x) + r\,q(U)$ es la bola abierta en X/M, de centro $q(x) = w$ y radio r. Esto prueba que $q(A)$ es abierto, como se quería.

(v). Si G es abierto, lo será $q^{-1}(G)$, porque q es continua. Recíprocamente, si $q^{-1}(G)$ es abierto, usando (iv) obtenemos que $q\big(q^{-1}(G)\big)$ es abierto, pero por ser q sobreyectiva, se tiene $G = q\big(q^{-1}(G)\big)$.

(vi). Si f es continua, $f \circ q$ también lo es, como composición de funciones continuas. Supongamos que $f \circ q$ es continua y sea H un abierto de Y. Entonces $G = f^{-1}(H)$ verifica que $q^{-1}(G) = \big(f \circ q\big)^{-1}(H)$ es abierto, luego (v) nos dice que G es abierto. Por tanto, f es continua, como se quería. ■

La afirmación (vi) nos interesa sobre todo cuando Y es un espacio normado y f es lineal. En particular nos da información sobre la factorización canónica de un operador lineal, que pasamos a recordar.

Sea $T : X \to Y$ un operador lineal entre espacios vectoriales y consideremos su núcleo e imagen, $\ker T$ y $T(X)$, subespacios de X e Y, respectivamente. Consideramos la aplicación cociente $q : X \to X/\ker T$, lineal y sobreyectiva, y la inclusión natural $J : T(X) \to Y$, que es lineal e inyectiva. Entonces existe una única biyección lineal $S : X/\ker T \to T(X)$, verificando la igualdad $T = J \circ S \circ q$, que se conoce como factorización canónica del operador lineal T. De hecho, está claro que S ha de verificar que $S\big(q(x)\big) = T(x)$ para todo $x \in X$, y esa misma igualdad permite definir correctamente S, obteniendo la biyección lineal buscada.

Pues bien, supongamos ahora que X e Y son espacios normados y tomemos $T \in L(X,Y)$. Entonces $\ker T$ es un subespacio cerrado de X, que da lugar al espacio normado cociente, y sabemos que $q \in L(X, X/\ker T)$. Por otra parte, en $T(X)$ tenemos la norma inducida por Y, con la que J es isométrica. Pero la clave está en comprobar que el operador S también es continuo. En efecto, como $T = J \circ S \circ q$ es continuo, y J es una isometría, vemos que $S \circ q$ es continuo y basta usar la afirmación (vi) del resultado anterior. Por tanto, la factorización canónica de T lo expresa como composición de tres operadores lineales continuos, como debe ser.

Finalmente, cabe preguntarse por la complitud del espacio normado cociente. La respuesta no puede ser más diáfana:

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X. Entonces X es completo si, y sólo si, M y X/M son completos.*

Si X es completo, M también lo es, por ser cerrado en X. Para probar que X/M también es un espacio de Banach, usaremos el criterio de complitud en términos de series.

Sea pues $\sum_{n\geqslant 1} w_n$ una serie absolutamente convergente en X/M y, para cada $n\in\mathbb{N}$, usemos la definición de la norma cociente para encontrar $x_n\in X$ tal que

$$w_n = q(x_n) \qquad \text{y} \qquad \|x_n\| \leqslant \|w_n\| + \frac{1}{2^n}$$

De esta forma, $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\|w_n\| + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} < \infty$, luego la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente y, por la complitud de X, es convergente. Como q es un operador lineal continuo, deducimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} q(x_n) = \sum_{n\geqslant 1} w_n$ es convergente, como se quería.

Supongamos que M y X/M son completos, y sea $\{x_n\}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces la sucesión $\{q(x_n)\}$ es de Cauchy en X/M, luego converge a un $w\in X/M$, que se puede escribir como $w=q(z)$ con $z\in X$. Entonces $\{q(x_n-z)\}\to 0$, y la definición de la norma cociente nos permite encontrar una sucesión $\{y_n\}$ en M, tal que $\{x_n-z+y_n\}\to 0$. Entonces $\{x_n-z+y_n\}$ y $\{x_n-z\}$ son sucesiones de Cauchy, de donde deducimos que $\{y_n\}$ también lo es, ya que $y_n=(x_n-z+y_n)-(x_n-z)$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Usando entonces que M es completo, tenemos $\{y_n\}\to y\in M$, de donde $\{x_n\} = \{(x_n-z+y_n)+z-y_n\}\to z-y$. Esto prueba que X es completo y concluye la demostración. ■

4.4. Sumas topológico-directas

Estrechamente ligada a las nociones de producto y cociente de espacios vectoriales, está la descomposición de un espacio vectorial como suma directa de dos subespacios. Vamos a recordar dicha descomposición en un contexto puramente algebraico, para luego analizarla en el ambiente de los espacios normados.

Dado un subespacio M de un espacio vectorial X, comprobemos que siempre existe otro subespacio Z de X que verifica $X=M+Z$ y $M\cap Z=\{0\}$. En efecto, si A es una base algebraica de M, vemos que A es un conjunto de vectores linealmente independientes en X, luego $A\subset B$, donde B es una base algebraica de X. Basta entonces tomar $Z=\operatorname{Lin}(B\setminus A)$. En la situación descrita, se dice que X es **suma directa** de M y Z, y escribimos $X=M\oplus Z$. También diremos que Z es un **complemento algebraico** de M en X. La forma en que hemos probado su existencia, muestra que Z no es único, salvo en los casos triviales $M=X$ y $M=\{0\}$.

La suma directa es la forma correcta de descomponer un espacio vectorial: recuperamos el espacio vectorial X a partir de sus subespacios M y Z, ya que X se identifica con el espacio vectorial producto $M\times Z$, como vamos a ver. Si $X=M\oplus Z$, cada vector $x\in X$ se expresa de manera única como $x=y+z$, con $y\in M$ y $z\in Z$. Pero esto significa que definiendo

$$\varphi : M\times Z\to X, \qquad \varphi(y,z) = y+z \quad \forall\,(y,z)\in M\times Z \tag{5}$$

obtenemos una biyección lineal de $M\times Z$ sobre X, que no es más que la restricción a $M\times Z$ de la suma de X. Recíprocamente, si M y Z son subespacios de X, tales que φ es biyectiva, se tiene claramente $X=M\oplus Z$. En el siguiente enunciado resaltamos esta relación entre sumas directas y productos de espacios vectoriales.

- *Si M y Z son subespacios de un espacio vectorial X, se tiene $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, la restricción a $M \times Z$ de la suma de X es una biyección lineal de $M \times Z$ sobre X.*

Si M y Z son espacios vectoriales arbitrarios, se tiene $M \times Z = \big(M \times \{0\}\big) \oplus \big(\{0\} \times Z\big)$, pero podemos identificar M con $M \times \{0\}$ y Z con $\{0\} \times Z$, para ver $M \times Z$ como suma directa de M con Z. Por tanto la diferencia entre las expresiones $X = M \times Z$ y $X = M \oplus Z$ es sólo cuestión de matiz, con la primera ponemos el énfasis en una *construcción*, mientras la segunda enfatiza una *descomposición*.

Las proyecciones coordenadas, de un producto sobre los factores, se vuelven aplicaciones lineales de una suma directa sobre los sumandos, que ahora vamos a considerar. Recordemos que una **proyección lineal** en un espacio vectorial X es un operador lineal $P : X \to X$ que verifica $P \circ P = P$. Una tal proyección lineal queda caracterizada cuando se conocen su imagen y su núcleo. Para comprobarlo, sean P_1 y P_2 proyecciones lineales en X con la misma imagen y núcleo. Fijado $x \in X$, se tiene $P_1(x) \in P_1(X) = P_2(X)$, luego $P_1(x) = P_2(u)$ con $u \in X$, pero entonces $x - P_2(u) = x - P_1(x) \in \ker P_1 = \ker P_2$, de donde $P_2(x) = P_2(u) = P_1(x)$, como se quería. Si P es una proyección lineal en X y $M = P(X)$, se suele decir que P es una proyección lineal de X sobre M, y si $Z = \ker P$, hemos visto que P es la única proyección lineal de X sobre M con núcleo Z.

Vamos a aclarar ahora la relación entre sumas directas y proyecciones lineales. Para evitar repeticiones, en lo que sigue, M y Z serán subespacios de un espacio vectorial X.

Si $X = M \oplus Z$, para $x \in X$ llamamos $P(x)$ al único elemento de M tal que $x - P(x) \in Z$. Está claro entonces que P es la proyección lineal de X sobre M con núcleo Z. Su relación con la biyección lineal φ definida en (5) es clara, pues se tiene $\varphi^{-1}(x) = \big(P(x), x - P(x)\big)$ para todo $x \in X$. La simetría de la situación se mantiene, pues definiendo $Q = I - P$ donde I es la identidad en X, vemos que Q es la única proyección lineal de X sobre Z con núcleo M.

Recíprocamente, si P es una proyección lineal en X, para $x \in X$ se tiene $x - P(x) \in \ker P$, luego $x = P(x) + \big(x - P(x)\big) \in P(X) + \ker P$, así que $X = P(X) + \ker P$. Pero si suponemos que $x \in P(X) \cap \ker P$, tendremos $x = P(x) = 0$, luego $X = P(X) \oplus \ker P$ y hemos obtenido la siguiente relación entre sumas directas y proyecciones lineales.

- *Se tiene $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, existe una proyección lineal P en X tal que $M = P(X)$ y $Z = \ker P$. En tal caso, si φ es la restricción a $M \times Z$ de la suma de X, se tiene:*

$$\varphi^{-1}(x) = \big(P(x), x - P(x)\big) \qquad \forall x \in X \tag{6}$$

Así pues, los complementos algebraicos de un subespacio de X no son, ni más ni menos, que los núcleos de las proyecciones lineales de X sobre él. Veremos enseguida que todos son idénticos, como espacios vectoriales.

Sea $\psi : Z \to X/M$ la restricción a Z de la aplicación cociente, es decir, $\psi(z) = z + M$ para todo $z \in Z$. Tenemos $\psi(z) = 0$ si, y sólo si, $z \in M$, luego la igualdad $M \cap Z = \{0\}$ equivale a que ψ sea inyectiva. Por otra parte, dado $x \in X$, que exista $z \in Z$ con $x + M = \psi(z)$, es decir, tal que $x - z \in M$, equivale a que $x \in M + Z$, luego $X = M + Z$ si, y sólo si, ψ es sobreyectiva. Por tanto, se tiene $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, ψ es biyectiva. En tal caso, es fácil relacionar ψ con la proyección lineal P de X sobre M con núcleo Z.

Para $x \in X$, tomando $z = \psi^{-1}(x+M)$ se tiene $x - z \in M$, pero el único $z \in Z$ que cumple esta condición es precisamente $x - P(x)$. Por tanto, $\psi^{-1}(x+M) = x - P(x)$ para todo $x \in X$. En resumen, hemos obtenido la siguiente relación entre sumas directas y cocientes:

- *Si ψ es la restricción a Z de la aplicación cociente de X sobre X/M, entonces se tiene que $X = M \oplus Z$ si, y sólo si, ψ es biyectiva, en cuyo caso,*

$$\psi^{-1}(x+M) = x - P(x) \qquad \forall x \in X \tag{7}$$

donde P es la única proyección lineal de X sobre M con núcleo Z.

Así pues, todo complemento algebraico de M en X se identifica con el cociente X/M, que se convierte así en una especie de "complemento canónico", pues no usamos ninguna base algebraica de X o de M para construirlo. En particular, X se identifica con $M \times (X/M)$.

Pues bien, ya está todo preparado para trabajar con estas nociones en espacios normados y veremos que la situación se complica, o se enriquece bastante, según se mire. Sea X un espacio normado, descompuesto como suma directa de dos subespacios: $X = M \oplus Z$. Queremos saber cuándo podemos decir que tenemos una descomposición correcta de X como espacio normado, y no sólo como espacio vectorial. Nos preguntamos por tanto, hasta donde podemos reconstruir el espacio normado X, a partir de los subespacios M y Z, conociendo lógicamente las normas inducidas por X en dichos subespacios.

No hay una forma natural de recuperar la norma concreta de X, simplemente porque, a partir de las normas de M y Z, hay muchas formas distintas de definir una norma en $M \times Z$. Pensemos por ejemplo lo que ocurre cuando $X = \mathbb{R}^2$, $M = \mathbb{R} \times \{0\}$ y $Z = \{0\} \times \mathbb{R}$: todas las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^2$, con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, coinciden en M y en Z, pero no en X.

Pero volviendo al caso general, lo que sí podemos pedir es que, a partir de M y Z, podamos recuperar la topología de X, es decir, que al identificar X con el espacio vectorial $M \times Z$, la topología de X se corresponda con la topología producto. Esto es tanto como pedir que la biyección lineal φ definida en (5) sea un isomorfismo del espacio normado producto $M \times Z$ sobre X. De entrada φ es continua, por ser la restricción a $M \times Z$ de la suma de X, que es continua en $X \times X$.

La continuidad de φ^{-1} es más delicada, pues φ^{-1} será continua cuando lo sean sus dos componentes y, en vista de (6), ello equivale a la continuidad de la proyección lineal P, de X sobre M con núcleo Z, o a la de $Q = I - P$, pero esto no está nada claro. Por ejemplo, para que P sea continua es necesario que $Z = \ker P$ sea cerrado, y $M = \ker Q$ también deberá ser cerrado, pero en principio no habíamos supuesto que M y Z fuesen cerrados.

Supongamos pues que M y Z son cerrados en X, lo que permite usar los cocientes. Como espacio vectorial, Z se identifica con X/M mediante una biyección lineal $\psi : Z \to X/M$, que es la restricción a Z de la aplicación cociente $q : X \to X/M$. Considerando en X/M la norma cociente, es lógico pedir que ψ sea al menos un isomorfismo, y de entrada ψ es continua por serlo q. El criterio de continuidad, para aplicaciones definidas en un espacio normado cociente, nos dice que ψ^{-1} será continua cuando lo sea $\psi^{-1} \circ q$, pero en (7) vemos que $\psi^{-1} \circ q = Q$. De nuevo nos encontramos con que ψ es un isomorfismo si, y sólo si, P y Q son continuas.

El siguiente enunciado resume toda la discusión anterior, resaltando las tres condiciones equivalentes que deben cumplirse, para que la descomposición de un espacio normado, como suma directa de dos subespacios cerrados, tenga utilidad.

- *Sean M y Z dos subespacios cerrados de un espacio normado X, tales que $X = M \oplus Z$. Usando en M y en Z las normas inducidas por X, consideremos el espacio normado producto $M \times Z$, así como el espacio normado cociente X/M. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) *La aplicación $\varphi : M \times Z \to X$, definida por $\varphi(y,z) = y+z$ para todo $(y,z) \in M \times Z$, es un isomorfismo*
  (ii) *La única proyección lineal $P : X \to X$, que verifica $P(X) = M$ y $\ker P = Z$, es continua*
  (iii) *La aplicación $\psi : Z \to X/M$, definida por $\psi(z) = z+M$ para todo $z \in Z$, es un isomorfismo.*

Cuando se verifican las afirmaciones anteriores, se dice que X es **suma topológico-directa** de M y Z, así como que Z es un **complemento topológico** de M en X. Obviamente, M será a su vez un complemento topológico de Z en X.

Para un subespacio cerrado M de un espacio normado X, existen muchos complementos algebraicos de M en X, pero tienen poca utilidad, salvo que sean complementos topológicos. Se dice que M está **complementado** en X, cuando tiene un complemento topológico. Por el resultado anterior, ello equivale a que exista una proyección lineal y continua de X sobre M. Entonces, todos los complementos topológicos de M en X son isomorfos al espacio normado cociente X/M, luego X/M hace el papel de "complemento topológico canónico" de M en X. En particular, X es isomorfo al espacio normado producto $M \times (X/M)$.

Casi todos los temas que siguen traerán condiciones suficientes para que un subespacio cerrado de un espacio normado esté complementado. Tendremos así abundantes ejemplos de subespacios complementados y sumas topológico-directas. Como ejemplo de subespacio no complementado, no es demasiado difícil, pero tampoco es nada fácil, probar que c_0 no está complementado en l_∞. Este resultado fue obtenido en 1940 por el matemático estadounidense R.S. Phillips (1913-1998). De hecho, la gran mayoría de los espacios de Banach de dimensión infinita contienen subespacios cerrados que no están complementados.

Cuando un subespacio cerrado M de un espacio normado X no está complementado en X, el cociente X/M suple a veces el papel del complemento topológico que no tenemos. Ello hace que la noción de cociente tenga más interés para espacios normados, que en el contexto general de los espacios vectoriales.

Veamos un ejemplo conocido, en el que el cociente hace el papel al que nos hemos referido. Al estudiar la complitud del cociente, vimos que X es completo siempre que M y X/M lo sean. Cuando M está complementado en X, este resultado se deduce de algo más sencillo, probado previamente: el producto de dos espacios de Banach es completo. Basta pues recordar que X es isomorfo a $M \times (X/M)$. Cuando M no está complementado en X, tal isomorfismo puede no existir, pero el resultado sigue siendo cierto, luego cabe entender que el cociente X/M sigue haciendo el papel del complemento topológico que no tenemos.

Tema 5

Espacios normados de dimensión finita

Vamos a presentar dos resultados básicos acerca de los espacios normados más sencillos, los de dimensión finita. En primer lugar, un teorema probado por F. Hausdorff en 1932, afirmando que, para cada $N \in \mathbb{N}$, todas las normas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes. De hecho obtendremos un resultado formalmente más fuerte, del que se deducen varias consecuencias relevantes. Por otra parte, veremos un clásico teorema probado por F. Riesz en 1918, que nos da una caracterización puramente topológica de los espacios normados de dimensión finita.

5.1. Teorema de Hausdorff

Vamos a describir, salvo isomorfismos, todos los espacios normados de dimensión finita, pues veremos de hecho que, para cada $N \in \mathbb{N}$, todos los espacios normados de dimensión N son isomorfos. Para ello, empezamos con una sencilla observación.

Lema. *Para $N \in \mathbb{N}$, todo operador lineal, de $\mathbb{K}^N$ con la topología usual, en cualquier otro espacio normado, es continuo.*

Demostración. Sea Y un espacio normado y $T : \mathbb{K}^N \to Y$ un operador lineal. Denotando por $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$ a la base usual de $\mathbb{K}^N$, sea $y_k = T(e_k)$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Se tiene entonces que

$$T(x) = T\left(\sum_{k=1}^{N} x(k)\, e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, T(e_k) = \sum_{k=1}^{N} x(k)\, y_k \qquad \forall x \in \mathbb{K}^N \tag{1}$$

Fijado $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, la aplicación $x \mapsto x(k)$, de $\mathbb{K}^N$ en $\mathbb{K}$, es obviamente continua para la topología usual de $\mathbb{K}^N$. Por otra parte, la aplicación $\lambda \mapsto \lambda y_k$, de $\mathbb{K}$ en Y, es continua, por serlo el producto por escalares de Y. Vemos por tanto que la aplicación $x \mapsto x(k)\, y_k$ es continua, como composición de funciones continuas. De (1) deducimos entonces que T es continuo, por ser una suma de funciones continuas. ■

Pasamos a probar un primer resultado clave sobre espacios normados de dimensión finita.

Teorema de Hausdorff. *Toda biyección lineal, entre dos espacios normados de dimensión finita, es un isomorfismo.*

Demostración. En primer lugar, fijado $N \in \mathbb{N}$, sea Φ una biyección lineal de $\mathbb{K}^N$, con la topología usual, sobre un espacio normado Y. Por el lema anterior, Φ es continua, pero queremos ver que Φ es un isomorfismo, para lo cual deberemos probar que Φ^{-1} es continua.

Consideremos la esfera unidad $S = \{x \in \mathbb{K}^N : \|x\| = 1\}$, para cualquier norma en $\mathbb{K}^N$ cuya topología sea la usual. Como S es un conjunto compacto y Φ es continua, $\Phi(S)$ es un subconjunto compacto de Y. Por tanto, la norma de Y, que es una función continua, tendrá un mínimo en $\Phi(S)$, es decir, existe $u_0 \in S$ tal que $\|\Phi(u)\| \geqslant \|\Phi(u_0)\|$ para todo $u \in S$. Como Φ es inyectiva, se ha de tener $\|\Phi(u_0)\| = \rho > 0$. Fijado $y \in Y$, tomamos $x = \Phi^{-1}(y)$ y escribimos $x = \|x\|\, u$ con $u \in S$. Tenemos entonces

$$\|y\| = \|\Phi(x)\| = \|x\|\, \|\Phi(u)\| \geqslant \rho\, \|x\| = \rho\, \|\Phi^{-1}(y)\|$$

y esto prueba que Φ^{-1} es continua, como queríamos.

Sean ahora X e Y dos espacios normados de dimensión finita, y $T : X \to Y$ una biyección lineal. Si $N \in \mathbb{N}$ es la dimensión de X, existe una biyección lineal $\Phi : \mathbb{K}^N \to X$, así que $T \circ \Phi$ es una biyección lineal de $\mathbb{K}^N$ sobre Y. Considerando en $\mathbb{K}^N$ la topología usual, hemos visto ya que Φ y $T \circ \Phi$ son isomorfismos, luego $T = (T \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ también lo es. ■

Este teorema suele enunciarse diciendo que, para cada $N \in \mathbb{N}$, todas las normas en $\mathbb{K}^N$ son equivalentes. Se puede comprobar que tal enunciado es equivalente, valga la redundancia, al que hemos usado, pero nos parece menos conveniente, porque lo queramos o no, al hablar de $\mathbb{K}^N$ tenemos presente su base usual, mientras que si hablamos de un espacio normado de dimensión N, está claro que no estamos pensando en ninguna base de dicho espacio.

Fijado $N \in \mathbb{N}$, el teorema anterior deja bien claro que $\mathbb{K}^N$, con cualquier norma, es salvo isomorfismos, el único espacio normado de dimensión N, pero da una información adicional que conviene resaltar. Si X e Y son dos espacios normados de dimensión N, el teorema no sólo nos dice que X e Y son isomorfos, sino que toda biyección lineal de X sobre Y es un isomorfismo. Merece la pena detenerse a explicar el mayor interés de esta segunda afirmación.

Si X es un espacio vectorial de dimensión N, la forma natural de definir una norma en X es bastante obvia: usar coordenadas. Fijada una base de X, tenemos una biyección lineal de X sobre $\mathbb{K}^N$, que nos permite trasladar a X cualquier norma de $\mathbb{K}^N$, por ejemplo, la euclídea. La norma que obtenemos en X depende obviamente de la base que hemos usado, dos bases distintas dan lugar a dos biyecciones lineales distintas $\Phi_1, \Phi_2 : X \to \mathbb{K}^N$, con las que obtenemos dos normas distintas, dadas por $\|x\|_1 = \|\Phi_1(x)\|$ y $\|x\|_2 = \|\Phi_2(x)\|$ para todo $x \in X$. Si el teorema anterior sólo dijese que dos espacios normados de la misma dimensión finita son isomorfos, tendríamos tan solo un isomorfismo, de X con la norma $\|\cdot\|_1$ sobre X con la norma $\|\cdot\|_2$. Esto es evidente, $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ es un tal isomorfismo, que de hecho es isométrico. Sin embargo, el teorema asegura que la identidad en X es otro isomorfismo, es decir, que ambas normas son equivalentes. Así pues, en X existe una única topología común a todas las normas, que no depende de la base que podamos usar para definirla, o para trabajar con ella.

5.2. Consecuencias

El teorema de Hausdorff tiene varios corolarios destacables, algunos de los cuales equivalen al propio teorema. En primer lugar, el lema previo tiene ahora una versión más general:

- *Todo operador lineal, de un espacio normado de dimensión finita, en un espacio normado arbitrario, es continuo.*

Si X es un espacio normado de dimensión $N \in \mathbb{N}$, existe una biyección lineal $\Phi : \mathbb{K}^N \to X$, que por el teorema de Hausdorff es un isomorfismo, considerando en $\mathbb{K}^N$ la topología usual. Si ahora Y es un espacio normado, y $T : X \to Y$ un operador lineal, el lema previo a dicho teorema nos dice que $T \circ \Phi$ es continuo, luego $T = T \circ \Phi \circ \Phi^{-1}$ también lo es. ■

Cabe preguntarse lo que ocurre cuando es el espacio de llegada de nuestro operador lineal el que tiene dimensión finita. La respuesta es el siguiente resultado, que generaliza lo que ya sabíamos para funcionales lineales.

- *Sean X e Y espacios normados y supongamos que Y tiene dimensión finita. Entonces, un operador lineal $T : X \to Y$ es continuo si, y sólo si, su núcleo es cerrado.*

Si T es continuo, entonces $\ker T = T^{-1}\big(\{0\}\big)$ ha de ser cerrado. Recíprocamente, si $\ker T$ es cerrado, tenemos el espacio normado cociente $X/\ker T$ y la factorización canónica de T, es decir, $T = J \circ S \circ q$, donde $q : X \to X/\ker T$ es la aplicación cociente, $J : T(X) \to Y$ la inclusión natural, y $S : X/\ker T \to T(X)$ una biyección lineal. Ahora bien, como $T(X)$ tiene dimensión finita, el teorema de Hausdorff nos dice que S es un isomorfismo y, en particular, es una aplicación continua. Pero q y J son continuas, luego T también lo es. ■

A partir de cualquiera de los dos resultados anteriores se deduce el teorema de Hausdorff, pues si $T : X \to Y$ es una biyección lineal entre espacios normados de dimensión finita, ambos nos dicen que T y T^{-1} son continuas. Por tanto, los tres resultados son equivalentes.

Puesto que la complitud se conserva por isomorfismos, del teorema de Hausdorff se deduce obviamente que *todo espacio normado de dimensión finita es completo.* En Análisis Funcional, los espacios normados de dimensión finita casi siempre aparecen como subespacios de espacios de funciones, que suelen tener dimensión infinita. Si M es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, entonces M es completo con la norma inducida por X, luego M es cerrado en X. Hemos obtenido así un corolario al teorema de Hausdorff que, por la razón recién explicada, es el que se usa con más frecuencia:

- *En cualquier espacio normado, todos los subespacios de dimensión finita son cerrados.*

Como última consecuencia del teorema de Hausdorff, obtenemos una condición suficiente para que un subespacio cerrado de un espacio normado esté complementado. Recordemos que, si M es un subespacio de un espacio vectorial X, la **codimensión** de M en X es la dimensión del cociente X/M, que coincide con la de cualquier complemento algebraico de M en X.

- *Si M es un subespacio cerrado que tiene codimensión finita en un espacio normado X, entonces M está complementado en X. De hecho, todo complemento algebraico de M en X es un complemento topológico.*

Sea Z un complemento algebraico de M en X y Q la proyección lineal de X sobre Z cuyo núcleo es M. Como Z tiene dimensión finita y $\ker Q$ es cerrado en X, un resultado anterior nos dice que Q es continua. Esto significa que $X = M \oplus Z$ es una suma topológico-directa, es decir, que Z es un complemento topológico de M en X. ■

5.3. Contraejemplos en dimensión infinita

Vamos a comprobar con ejemplos que las hipótesis de dimensión finita en el teorema de Hausdorff y sus corolarios no pueden suprimirse. Los resultados son más llamativos si, en vez de considerar espacios normados concretos, trabajamos a plena generalidad. Para ello, empezamos con una sencilla observación:

- *En todo espacio vectorial se puede definir una norma.*

Sea $E = \{u_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ una base algebraica de un espacio vectorial X, con lo que todo vector de X se expresa de manera única como combinación lineal de elementos de E. Esto significa que existe un conjunto $\{f_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de funcionales lineales en X tal que, para cada $x \in X$, el conjunto $\{\gamma \in \Gamma : f_\gamma(x) \neq 0\}$ es finito, y se tiene

$$x = \sum_{\gamma \in \Gamma} f_\gamma(x)\, u_\gamma \qquad \forall x \in X$$

Obsérvese que, para cada $x \in X$, esta suma es en realidad finita, pues sólo hay un conjunto finito de sumandos no nulos. Podemos entonces definir

$$\|x\| = \sum_{\gamma \in \Gamma} |f_\gamma(x)| \qquad \forall x \in X$$

pues de nuevo, cada una de estas sumas es finita. Es inmediato comprobar que de esta forma hemos definido una norma en X. ■

Veamos ahora que, el resultado sobre la continuidad de operadores lineales definidos en espacios normados de dimensión finita, es falso en todos los de dimensión infinita:

- *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, existe un funcional lineal en X, que no es continuo.*

Sea E una base algebraica de X, que es un conjunto infinito, luego contiene un conjunto infinito y numerable $E_0 = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para obtener un funcional lineal en X, basta definirlo en E de manera arbitraria, para luego extenderlo por linealidad.

Por tanto, existe un funcional lineal f en X, que verifica $f(u_n) = n\|u_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $f\big(u_n/\|u_n\|\big) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vemos que f no está acotado en la esfera unidad de X, luego no es continuo. ■

Ahora podemos observar también que el teorema de Hausdorff está muy lejos de ser cierto en espacios de dimensión infinita:

- *Si X es un espacio normado de dimensión infinita, existe una biyección lineal $T : X \to X$, que no es continua, verificando que $T^{-1} = T$.*

Sea f un funcional lineal en X que no sea continuo, cuya existencia acabamos de probar, y sea $u \in X$ tal que $f(u) = 1$. Consideramos el operador lineal $T : X \to X$ definido por:

$$T(x) = x - 2f(x)u \qquad \forall x \in X$$

Para cada $x \in X$ tenemos $f\big(T(x)\big) = f(x) - 2f(x)f(u) = -f(x)$, de donde

$$T\big(T(x)\big) = T(x) - 2f\big(T(x)\big)u = x - 2f(x)u + 2f(x)u = x \qquad \forall x \in X$$

lo que prueba que T es biyectivo con $T^{-1} = T$. Finalmente, como $x - T(x) = 2f(x)u$ para todo $x \in X$, si T fuese continuo, f también lo sería. ■

El resultado anterior da lugar a parejas de normas, cuyas topologías no son comparables, es decir, ninguna de ellas está contenida en la otra:

- *Sea $\|\cdot\|_1$ una norma en un espacio vectorial X de dimensión infinita. Entonces existe otra norma $\|\cdot\|_2$ en X cuya topología no es comparable con la de $\|\cdot\|_1$, pero existe un isomorfismo isométrico de X con una de las normas, en X con la otra. Por tanto, $\|\cdot\|_2$ es completa si, y sólo si, lo es $\|\cdot\|_1$.*

Por llamativo que parezca, este resultado es consecuencia directa del anterior. Para abreviar, llamamos X_1 al espacio normado que se obtiene considerando en X, la norma de partida $\|\cdot\|_1$. Tenemos una biyección lineal $T : X_1 \to X_1$, que verifica $T = T^{-1}$, y no es continua. Definimos entonces

$$\big\|x\big\|_2 = \big\|T(x)\big\|_1 \qquad \forall x \in X$$

con lo que obviamente tenemos una norma $\|\cdot\|_2$ en X, y llamamos X_2 al espacio normado que se obtiene dotando a X de esta nueva norma. Se cumple la segunda parte del enunciado, puesto que T es un isomorfismo isométrico, de X_2 sobre X_1. En particular, tenemos $T \in L(X_2, X_1)$, pero también $T = T^{-1} \in L(X_1, X_2)$.

Como $T \in L(X_2, X_1)$, si la topología de X_1 contuviese a la de X_2, se tendría $T \in L(X_1, X_1)$, cosa que no es cierta. Pero como $T \in L(X_1, X_2)$, si la topología de X_2 contuviese a la de X_1, se tendría igualmente $T \in L(X_1, X_1)$. Por tanto, las topologías de X_1 y X_2 no son comparables, como se quería. ■

5.4. Teorema de Riesz

El segundo resultado fundamental de este tema asegura que, prescindiendo de la estructura de espacio vectorial, la topología de un espacio normado es capaz por sí sola de decirnos si el espacio tiene o no dimensión finita. Establece por tanto la equivalencia entre una propiedad puramente topológica y una propiedad puramente algebraica.

Preparamos la demostración con el siguiente resultado previo:

Lema de Riesz. *Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X, con $M \neq X$. Entonces, para cada $\rho \in \mathbb{R}$ con $0 < \rho < 1$, existe $x \in X$, con $\|x\| = 1$, tal que $d(x,M) \geqslant \rho$, es decir, $\|x - y\| \geqslant \rho$ para todo $y \in M$.*

Demostración. Fijamos $x_0 \in X \setminus M$ y, por ser M cerrado, se tiene que $d(x_0,M) = \alpha > 0$. Como $\alpha < \alpha/\rho$, existe $y_0 \in M$ tal que $\|x_0 - y_0\| \leqslant \alpha/\rho$. Comprobaremos que basta tomar

$$x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$$

En efecto, es obvio que $\|x\| = 1$ y, para todo $y \in M$ se tiene

$$\|x - y\| = \frac{\big\|x_0 - y_0 - \|x_0 - y_0\| y\big\|}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \frac{\alpha}{\|x_0 - y_0\|} \geqslant \rho$$

lo que equivale a $d(x,M) \geqslant \rho$, como se quería. ■

Para $1 \leqslant p < \infty$, es fácil ver que la esfera unidad de l_p no es compacta. De hecho, si $\{e_n\}$ es la sucesión de los vectores unidad, para $n,m \in \mathbb{N}$ con $n \neq m$ se tiene $\|e_n - e_m\|_p = 2^{1/p}$. Tenemos así una sucesión en la esfera unidad de l_p, que claramente no admite ninguna sucesión parcial convergente, luego dicha esfera unidad no es compacta. Pues bien, el lema anterior permite probar fácilmente que lo mismo ocurre en todo espacio normado de dimensión infinita:

Teorema de Riesz. *Si en un espacio normado X, la esfera unidad $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es un conjunto compacto, entonces X tiene dimensión finita.*

Demostración. Fijemos $\rho \in \mathbb{R}$, con $0 < \rho < 1$, por ejemplo $\rho = 1/2$. Las bolas abiertas de radio ρ, centradas en puntos de S, forman un recubrimiento de S por abiertos, del que podrá extraerse un subrecubrimiento finito. Existen por tanto $n \in \mathbb{N}$ y $z_1, z_2, \ldots, z_n \in S$ tales que

$$S \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in X : \|x - z_k\| < \rho\} \tag{2}$$

Tomando $M = \text{Lin}\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, por un corolario al teorema de Hausdorff, sabemos que M es cerrado en X, y de hecho veremos que $M = X$, con lo que X tendrá dimensión finita. En efecto, si fuese $M \neq X$, el lema anterior nos daría un $x \in S$ tal que $d(x,M) \geqslant \rho$, y en particular se tendría $\|x - z_k\| \geqslant \rho$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, en clara contradicción con (2). ■

El hecho de que la esfera unidad de un espacio normado X sea un conjunto compacto, parece depender esencialmente de la norma concreta que estamos considerando. Sin embargo, sólo depende de la topología de X, sin usar siquiera su estructura de espacio vectorial.

Caracterizaciones de los espacios normados de dimensión finita. *Si X es un espacio normado y B su bola unidad, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *X tiene dimensión finita*
(ii) *X es un espacio topológico localmente compacto*
(iii) *B es compacta*
(iv) *Todo subconjunto cerrado y acotado de X es compacto*
(v) *La esfera unidad de X es compacta.*

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$. Si X tiene dimensión $N \in \mathbb{N}$, el teorema de Hausdorff nos dice que X es isomorfo, y en particular homeomorfo, a $\mathbb{K}^N$ con la topología usual, que es un espacio topológico localmente compacto, luego igual le ocurre a X.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Sea K un entorno de cero compacto en X y sea $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $rB \subset K$. Entonces, rB es un subconjunto cerrado del compacto K, luego rB es compacto. Como las homotecias son homeomorfismos de X, deducimos que B también es un conjunto compacto.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Sea E es un subconjunto cerrado y acotado de X y $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $E \subset \rho B$. Por hipótesis B es compacta, luego lo mismo le ocurre a ρB. Entonces E es un subconjunto cerrado del compacto ρB, luego E es compacto.

Por último, $(iv) \Rightarrow (v)$ es evidente, mientras que $(v) \Rightarrow (i)$ es el teorema de Riesz. ■

Resaltamos lo más llamativo del teorema anterior: la afirmación (ii), que sólo involucra la topología de X, y no su estructura de espacio vectorial, es equivalente a (i), que sólo involucra la estructura de espacio vectorial de X, pero no su topología.

Para trabajar en espacios normados de dimensión infinita, la conclusión más relevante que debemos extraer del teorema anterior, es la escasez de conjuntos compactos en tales espacios. Como lo bola unidad no es compacta, ninguna bola cerrada de radio positivo puede serlo, luego un conjunto compacto no puede contener bolas no triviales:

- *En cualquier espacio normado de dimensión infinita, todo subconjunto compacto tiene interior vacío.*

5.5. Mejor aproximación

El lema de Riesz, origen de los resultados anteriores, tiene una interpretación geométrica sencilla, que plantea una pregunta muy natural. Supongamos que un subespacio cerrado M de un espacio normado X verifica la tesis de dicho lema, pero con $\rho = 1$. Entonces existe $x \in X$ con $\|x\| = d(x,M) = 1$, luego el origen es un punto de M situado a mínima distancia de x. Podemos entender que, en cierto modo, el vector x es "perpendicular" a M. En general, el lema de Riesz nos da, para cada $\rho \in]0,1[$, un $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$ y $d(x,M) \geqslant \rho$, es decir, nos da vectores que están tan cerca como queramos de ser perpendiculares a M en el sentido antes indicado, luego es natural preguntar si se puede tomar $\rho = 1$. Revisando la demostración del lema, se observa que ello equivale a que el ínfimo que define a la norma cociente de alguna clase de equivalencia no nula en X/M sea un mínimo, cuestión que quedó aplazada en el tema anterior, y ahora vamos a abordar.

Las nociones que siguen tienen sentido en cualquier espacio métrico, pero las planteamos en el caso que nos interesa. Sea X un espacio normado y A un subconjunto no vacío de X. Dado $x \in X$, se dice que $y \in A$ es una **mejor aproximación** de x en A, cuando verifica que

$$\|x - y\| = d(x,A), \qquad \text{es decir,} \qquad \|x - y\| \leqslant \|x - a\| \quad \forall a \in A$$

En general, una tal mejor aproximación puede no existir, y cuando existe, puede no ser única. Se dice que A es un **conjunto proximinal** en X, cuando todo punto $x \in X$ tiene al menos una mejor aproximación en A. Es claro que para ello A tiene que ser cerrado en X, pues para $x \in \overline{A}$ se tiene $d(x,A) = 0$, luego si existe $y \in A$ tal que $\|x - y\| = 0$, se tiene $x = y \in A$. Es natural preguntarse hasta qué punto es cierto el recíproco, pregunta cuyo estudio es uno de los objetivos generales de toda una rama de la Matemática, la *Teoría de Aproximación.*

Cuando el conjunto A está contenido en un subespacio de dimensión finita, es fácil probar que la pregunta planteada tiene respuesta afirmativa:

- *Sea A un subconjunto no vacío y cerrado de un espacio normado X. Si* $\operatorname{Lin} A$ *tiene dimensión finita, entonces A es proximinal en X. Por tanto, todo subespacio de dimensión finita es proximinal en X.*

Dado $x \in X$, tomando $r \in \mathbb{R}$ con $r > d(x,A)$, el conjunto $A_r = \{a \in A : \|x - a\| \leqslant r\}$ no es vacío. Además A_r es un subconjunto cerrado y acotado del espacio normado de dimensión finita $\operatorname{Lin} A$, luego A_r es compacto. Por tanto, la función continua $a \mapsto \|x - a\|$ tiene mínimo en A_r, es decir, existe $y \in A_r$ tal que $\|x - y\| \leqslant \|x - a\|$ para todo $a \in A_r$. Pero si $a \in A \setminus A_r$, se tiene $\|x - a\| > r \geqslant \|x - y\|$, luego y es una mejor aproximación de x en A.

Si M es un subespacio de dimensión finita de X, sabemos que M es cerrado en X, luego basta tomar $A = M$, ya que $\operatorname{Lin} M = M$ tiene dimensión finita. ■

En la demostración anterior, la compacidad juega un papel clave, lo que nos hace sospechar que el resultado no va a ser cierto en general. como efectivamente vamos a comprobar.

Pensemos en la proximinalidad de un subespacio cerrado M de un espacio normado X, el caso que tiene más interés. Un vector $x_0 \in X$ tiene una mejor aproximación en M si, y sólo si, el ínfimo que define a la norma cociente de la clase de equivalencia $x_0 + M$ es un mínimo, es decir, existe $y_0 \in M$ tal que $\|x_0 - y_0\| = \min\{\|x_0 - y\| : y \in M\} = \|x_0 + M\|$. Cuando M tiene codimensión 1 en X, es decir, cuando $M = \ker f$ con $f \in X^* \setminus \{0\}$, podemos calcular fácilmente la norma cociente, y la posible proximinalidad de M equivale a otro problema, que hasta ahora no habíamos abordado.

- *Si X es un espacio normado y $f \in X^* \setminus \{0\}$, se verifica que*

$$d\big(x, \ker f\big) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} \qquad \forall x \in X$$

Además, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\ker f$ *es proximinal en X*

(ii) *La función $|f|$ tiene máximo en la esfera unidad de X.*

Fijado $x \in X$, para todo $y \in \ker f$ se tiene

$$\big| f(x) \big| = \big| f(x-y) \big| \leqslant \| f \| \, \| x-y \|$$

de donde se deduce claramente una desigualdad: $|f(x)| \leqslant \| f \| \, d\big(x, \ker f\big)$.

Por otra parte, sea $z \in X$ con $\| z \| = 1$ y supongamos de momento que $f(z) \neq 0$. Tomando entonces $y = x - \big(f(x)\, z / f(z) \big)$, se tiene que $y \in \ker f$ con $\| x-y \| = |f(x)|/|f(z)|$, de donde

$$\big| f(z) \big| \, d\big(x, \ker f\big) \leqslant \big| f(z) \big| \, \| x-y \| = \big| f(x) \big|$$

lo cual es obvio cuando $f(z) = 0$, así que es válido para todo z en la esfera unidad de X. Deducimos claramente la otra desigualdad: $\| f \| \, d\big(x, \ker f\big) \leqslant | f(x) |$. La equivalencia entre las afirmaciones del enunciado se prueba ya con facilidad.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Fijado $x \in X$ con $f(x) \neq 0$, existe $y \in \ker f$ tal que

$$\| f \| \, \| x-y \| = \| f \| \, d\big(x, \ker f\big) = | f(x) | = | f(x-y) |$$

Tomando $u = (x-y) / \| x-y \|$ se tiene $\| u \| = 1$ y $| f(u) | = \| f \|$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Por hipótesis, existe $u \in X$, con $\| u \| = 1$, tal que $| f(u) | = \| f \|$. Dado $x \in X$, tomando $y = x - \big(f(x)\, u / f(u) \big)$ se tiene claramente $y \in \ker f$ con

$$\| x-y \| = \frac{| f(x) | \, \| u \|}{| f(u) |} = \frac{| f(x) |}{\| f \|} = d\big(x, \ker f\big)$$

luego y es una mejor aproximación de x en $\ker f$. ■

Veamos ahora un ejemplo sencillo en el que no se verifica la afirmación (ii) del enunciado anterior. Recordemos para ello la identificación de l_1^* con l_∞. Cada sucesión acotada $z \in l_\infty$ se identifica con el funcional $\widehat{z} \in l_1^*$ definido por

$$\widehat{z}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, z(n) \qquad \forall x \in l_1$$

Pues bien, supongamos que la función $\big| \widehat{z} \big|$ tiene máximo en la esfera unidad de l_1, es decir, que existe $u \in l_1$ con $\| u \|_1 = 1$ tal que $\big| \widehat{z}(u) \big| = \big\| \widehat{z} \big\| = \big\| z \big\|_\infty$. Se tiene entonces que

$$\big\| z \big\|_\infty = \big| \widehat{z}(u) \big| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big| u(n) \big| \, \big| z(n) \big| \leqslant \big\| z \big\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \big| u(n) \big| = \big\| z \big\|_\infty \, \big\| u \big\|_1 = \big\| z \big\|_\infty$$

luego todas la desigualdades que han aparecido en la cadena anterior han de ser igualdades. En particular, se tiene que $\big| u(n) \big| \, \big| z(n) \big| = \big| u(n) \big| \, \big\| z \big\|_\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $u \neq 0$, deducimos que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $\big| z(n) \big| = \big\| z \big\|_\infty$, luego el supremo que define a $\| z \|_\infty$ es un máximo. Pero en general, esto no tiene por qué ocurrir: tomando $v(n) = 1 - (1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es obvio que $v \in l_\infty$ con $\| v \|_\infty = 1$, pero $| v(n) | < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Deducimos que la función $\big| \widehat{v} \big|$ no tiene máximo en la esfera unidad de l_1. Por el resultado anterior, tomando $M = \ker \widehat{v}$, tenemos un subespacio cerrado de l_1 que no es proximinal en l_1. Concretamente dicho subespacio viene dado por

$$M = \left\{ y \in l_1 \, : \, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}\, y(n) = 0 \right\}$$

Aunque resulte un poco repetitivo, conviene resaltar que el ejemplo anterior da respuesta negativa a cuatro cuestiones que han aparecido anteriormente. En primer lugar, en el espacio de Banach $X = l_1$ tenemos un funcional lineal y continuo $f = \widehat{v} \in X^*$, tal que la función $|f|$ no tiene máximo en la esfera unidad de X. Equivalentemente, el hiperplano cerrado $M = \ker f$ no es proximinal en X, luego en segundo lugar, tenemos un ejemplo de un subconjunto cerrado M de un espacio de Banach X, tal que M no es proximinal en X.

En tercer lugar, existe $x_0 \in X$ que no tiene mejor aproximación en M, luego tenemos un ejemplo en el que el ínfimo que define a la norma cociente $\|x_0 + M\|$ no es un mínimo. De hecho, como X/M tiene dimensión 1, veremos que lo mismo ocurre para cualquier otro $x \in X$ tal que $x \notin M$. En efecto, escribiendo $x_0 + M = \lambda(x + M)$ con $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, tenemos

$$\{ \|x_0 + y\| : y \in M \} = \{ \|\lambda(x + z)\| : z \in M \} = \{ |\lambda| \|x + z\| : z \in M \}$$

luego si el ínfimo $\|x + M\|$ fuese un mínimo, entonces $\|x_0 + M\|$ también lo sería. Dicho de otra forma, ningún $x \in X$ con $x \notin M$ tiene mejor aproximación en M. En particular, no puede existir un $x \in X$ con $\|x\| = \|x + M\| = 1$, con lo que, en cuarto y último lugar, hemos comprobado que la tesis del lema de Riesz no siempre se verifica para $\rho = 1$.

Tema 6

Versión analítica del teorema de Hahn-Banach

Los tres teoremas considerados como “Principios Fundamentales del Análisis Funcional” llevan el nombre de Stefan Banach: el *teorema de Hahn-Banach*, el de *Banach-Steinhaus* y el de la *aplicación abierta*, también conocido como *teorema de Banach-Schauder*. Vamos a probar aquí el primero de ellos, que es la pieza clave para el estudio de la dualidad en espacios normados. Como cualquier resultado importante en Matemáticas, pero muy especialmente en este caso, el teorema de Hahn-Banach admite numerosas versiones equivalentes, que se aplican en campos muy diversos. En este tema vemos la “versión analítica”, que nos permitirá avanzar en el estudio de la dualidad. Más adelante veremos una “versión geométrica”, que se caracteriza precisamente por eso, por tener clara interpretación geométrica.

6.1. Enunciado y demostración del teorema

Antes de enunciar el teorema, el siguiente razonamiento nos proporciona una motivación. Dado un espacio normado $X \neq \{0\}$, sin más información, cabe preguntar si existen funcionales lineales continuos no nulos en X. En los muchos casos concretos que conocemos, siempre hemos podido describir el espacio dual X^*, al menos para comprobar que $X^* \neq \{0\}$. Pero la cuestión es si podemos asegurar que $X^* \neq \{0\}$ para *todo* espacio normado $X \neq \{0\}$.

Para abordar esta pregunta, podemos usar un subespacio de dimensión finita $M \subset X$, pues abundan los funcionales lineales no nulos en M, y todos ellos son continuos. Tomando $g \in M^*$ con $\|g\| = 1$, tenemos $|g(y)| \leqslant \|y\|$ para todo $y \in M$, Si pudiésemos extender g a todo X, manteniendo su linealidad de forma que la extensión siga verificando la misma desigualdad, tendríamos un funcional lineal continuo en X que no es idénticamente nulo, porque extiende a g. Pues bien, eso es lo que, con hipótesis bastante más generales, nos garantiza la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

6.1.1. Enunciado del teorema

En vez de una norma, usaremos una aplicación con propiedades bastante menos restrictivas. Concretamente, un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una aplicación $\varphi : X \to \mathbb{R}$ que verifica la desigualdad triangular y es homogénea por homotecias, es decir, verifica las siguientes dos condiciones:

$$\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y) \qquad \text{y} \qquad \varphi(rx) = r\varphi(x) \qquad \forall x,y \in X\,,\ \forall r \in \mathbb{R}^+$$

Observamos que toda seminorma en X es un funcional sublineal, pero el recíproco es falso. Por ejemplo, si f es un funcional lineal en X, definiendo $\varphi(x) = \operatorname{Re} f(x)$ para todo $x \in X$, vemos que φ es un funcional sublineal en X, que sólo es una seminorma cuando $f = 0$, pues en otro caso, φ toma valores negativos. Por otra parte, en el caso $X = \mathbb{R}$, definiendo $\varphi(x) = \max\{0,x\}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, se obtiene un funcional sublineal en $\mathbb{R}$, que no es lineal y tampoco es una seminorma. Enunciamos ya la versión analítica del teorema de Hahn-Banach:

Teorema (Hahn 1927, Banach 1929). *Sea X un espacio vectorial y φ un funcional sublineal en X. Sea M un subespacio de X y g un funcional lineal en M, que está dominado por φ, en el siguiente sentido:*

$$\operatorname{Re} g(y) \leqslant \varphi(y) \qquad \forall y \in M$$

Entonces existe un funcional lineal f en X, que extiende a g y está dominado por φ, es decir,

$$f(y) = g(y) \quad \forall y \in M \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re} f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \forall x \in X$$

Si φ es una seminorma, se tiene de hecho

$$\big|f(x)\big| \leqslant \varphi(x) \qquad \forall x \in X$$

Al parecer, la versión demostrada por Hahn suponía que φ es una norma en X; esta versión más general es la aportación de Banach y resulta esencial como se verá, para establecer las versiones geométricas del teorema. Por otra parte, usar la función parte real es lo que permite hacer un enunciado común para el caso real y el caso complejo; naturalmente, en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dicha función es la identidad. Dividiremos la demostración en tres etapas.

6.1.2. Caso real, primera extensión

Empezamos considerando el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y sólo extendemos el funcional g al subespacio que se obtiene sumando una recta a M. Esta es la etapa más importante, pero no es difícil.

Fijado $x \in X \setminus M$, consideramos el subespacio $Z = M \oplus \mathbb{R}x$, y queremos definir un funcional lineal h en Z que extienda a g y siga dominado por φ. Obviamente debemos definir

$$h\big(y + \lambda x\big) = g\big(y\big) + \lambda\alpha \qquad \forall y \in M\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

para conveniente $\alpha \in \mathbb{R}$. Cualquiera que sea α, está claro que h es lineal y extiende a g, luego el problema es encontrar $\alpha \in \mathbb{R}$, de forma que h esté dominado por φ, es decir, que verifique:

$$g\big(y\big) + \lambda\alpha \leqslant \varphi\big(y + \lambda x\big) \qquad \forall y \in M\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{1}$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}^+$, dividiendo por λ los dos miembros de (1) y usando que φ es homogéneo por homotecias, vemos que (1) toma la forma

$$g\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \alpha \leqslant \varphi\left(\frac{y}{\lambda} + x\right)$$

Observamos ahora que $u = y/\lambda$ es un vector de M tan arbitrario como y. Por tanto, $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica la desigualdad (1) para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y todo $y \in M$ si, y sólo si,

$$\alpha \leqslant \varphi(u+x) - g(u) \qquad \forall u \in M \tag{2}$$

Para $\lambda \in \mathbb{R}^-$ dividimos por $-\lambda$ ambos miembros de (1) y usando de que φ es homogéneo por homotecias, (1) toma la forma

$$g\left(-\frac{y}{\lambda}\right) - \alpha \leqslant \varphi\left(-\frac{y}{\lambda} - x\right)$$

Como $w = -y/\lambda$ es un vector de M tan arbitrario como y, vemos que $\alpha \in \mathbb{R}$ verifica la desigualdad (1) para todo $\lambda \in \mathbb{R}^-$ y todo $y \in M$ si, y sólo si,

$$\alpha \geqslant g(w) - \varphi(w-x) \qquad \forall w \in M \tag{3}$$

Obsérvese por último que, para $\lambda = 0$, la desigualdad (1) se cumple por hipótesis, cualquiera que sea $\alpha \in \mathbb{R}$. En resumen, hemos probado que esta etapa de la demostración estará concluida si encontramos $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando (2) y (3).

Ahora bien, para cualesquiera $u, w \in M$, tenemos por hipótesis:

$$g(u) + g(w) = g(u+w) \leqslant \varphi(u+w) \leqslant \varphi(u+x) + \varphi(w-x)$$

donde se ha usado que φ verifica la desigualdad triangular. Así pues, tenemos

$$g(w) - \varphi(w-x) \leqslant \varphi(u+x) - g(u) \qquad \forall w, u \in M$$

de donde deducimos claramente que

$$\sup\left\{g(w) - \varphi(w-x) \,:\, w \in M\right\} \leqslant \operatorname{ínf}\left\{\varphi(u+x) - g(u) \,:\, u \in M\right\} \tag{4}$$

Si ahora α es cualquier número real comprendido entre los dos miembros de (4), está bien claro que α verifica (2) y (3), luego también (1), como queríamos.

Nótese que si (4) es una igualdad, sólo hay una elección posible de α. El razonamiento anterior permite en la práctica discutir la posible unicidad del funcional f cuya existencia afirma el teorema, un asunto del que no nos vamos a ocupar.

6.1.3. Caso real, extensión definitiva

Hablando intuitivamente, lo que haremos para concluir la demostración en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, es iterar la extensión realizada en la primera etapa, añadiendo en cada paso una recta al subespacio obtenido en el paso anterior, hasta llegar a X.

Está claro que necesitamos tantos pasos como indique la dimensión de X/M, que puede ser infinita, e incluso no numerable. Hemos de hacer por tanto una "inducción transfinita", que se formaliza usando el Lema de Zorn.

Consideramos el conjunto $\mathcal{E}$ de todos los pares ordenados de la forma (Z,h), donde Z es un subespacio de X, que contiene a M, y h un funcional lineal en Z, que extiende a g y está dominado por φ. Para $(Z_1,h_1)\,,(Z_2,h_2)\in\mathcal{E}$ definimos

$$(Z_1,h_1)\leqslant(Z_2,h_2) \qquad\Longleftrightarrow\qquad Z_1\subset Z_2 \quad \text{y} \quad h_2\big|_{Z_1}=h_1 \tag{5}$$

y es evidente que de esta forma se obtiene una relación de orden en $\mathcal{E}$.

Sea $\mathcal{E}_0=\big\{(Z_j,h_j)\,:\,j\in J\big\}$ un subconjunto totalmente ordenado de $\mathcal{E}$, y veamos que $\mathcal{E}_0$ tiene un mayorante. Observamos que $Z=\bigcup\limits_{j\in J}Z_j$ es un subespacio de X, que evidentemente contiene a Z_j para todo $j\in J$, y en particular contiene a M. En efecto, para $u,v\in Z$ y $\lambda\in\mathbb{R}$ tomamos $j,k\in J$ tales que $u\in Z_j$ y $v\in Z_k$. Como $\mathcal{E}_0$ está totalmente ordenado, (5) nos dice que $Z_j\subset Z_k$ o $Z_k\subset Z_j$, y deducimos que se ha de tener, o bien $u,v\in Z_k$ y $\lambda u+v\in Z_k\subset Z$, o bien $u,v\in Z_j$ y $\lambda u+v\in Z_j\subset Z$.

Definimos ahora $h:Z\to\mathbb{R}$ como sigue. Dado $u\in Z$, tomamos $j\in J$ tal que $u\in Z_j$ y comprobamos que podemos definir $h(u)=h_j(u)$. En efecto, si también $u\in Z_k$ con $k\in J$, de nuevo por estar $\mathcal{E}_0$ totalmente ordenado, (5) nos dice que, o bien h_j extiende a h_k, o bien h_k extiende a h_j, luego en ambos casos $h_j(u)=h_k(u)$. Por definición de h, tenemos $h\big|_{Z_j}=h_j$ para todo $j\in J$, y esto permitirá comprobar que h es lineal. Si $u,v\in Z$ y $\lambda\in\mathbb{R}$, hemos visto que existe $j\in J$ tal que $u,v\in Z_j$, con lo que $\lambda u+v\in Z_j$, y tenemos

$$h\big(\lambda u+v\big)=h_j\big(\lambda u+v\big)=\lambda h_j\big(u\big)+h_j\big(v\big)=\lambda h\big(u\big)+h\big(v\big)$$

Esto prueba que h es lineal, y es obvio que h extiende a g, pues para cualquier $j\in J$, sabemos que h extiende a h_j, que a su vez extiende a g. Finalmente, para $u\in Z$, basta tomar $j\in J$ tal que $u\in Z_j$, para tener $h(u)=h_j(u)\leqslant\varphi(u)$, luego h está dominado por φ. En resumen, tenemos $(Z,h)\in\mathcal{E}$ que verifica $(Z_j,h_j)\leqslant(Z,h)$ para todo $j\in J$, luego $\mathcal{E}_0$ tiene un mayorante, como queríamos comprobar.

El Lema de Zorn nos proporciona un elemento maximal $(Z,f)\in\mathcal{E}$, y sólo queda comprobar que $Z=X$, pues entonces f será el funcional que buscamos, un funcional lineal en X que extiende a g y está dominado por φ. Ahora bien, si $Z\neq X$, podemos tomar $x\in X\setminus Z$, y la primera etapa de la demostración nos da un funcional lineal $\widehat{f}$, en el subespacio $\widehat{Z}=Z\oplus\mathbb{R}x$, que extiende a f y está dominado por φ. Entonces $\big(\widehat{Z},\widehat{f}\,\big)\in\mathcal{E}$ verifica que $\big(Z,f\big)\leqslant\big(\widehat{Z},\widehat{f}\,\big)$, con $\widehat{Z}\neq Z$, lo que contradice la maximalidad de (Z,f). Esto concluye la demostración del teorema, en el caso real.

Todo el razonamiento anterior es bastante rutinario, simplemente ocurre que el lema de Zorn es el instrumento que permite formalizar la idea intuitiva consistente en iterar un proceso hasta concluirlo, sin importar el número de iteraciones que sean necesarias. Conviene resaltar que, cuando usamos el lema de Zorn para formalizar un proceso infinito, nuestro razonamiento no es constructivo, no controlamos el resultado del proceso. En nuestro caso, hemos probado la existencia de un funcional f, que no conocemos explícitamente. Esto contrasta claramente con lo ocurrido en la primera etapa de la demostración, en la que el funcional extendido se pudo definir explícitamente.

6.1.4. Fin de la demostración

Para completar la prueba del teorema nos queda considerar el caso complejo y comprobar la última afirmación, referente al caso en que φ es una seminorma.

Si Z es un espacio vectorial complejo, el producto por escalares de X es una aplicación definida en $\mathbb{C} \times X$, que podemos restringir a $\mathbb{R} \times X$. Es claro que de esta forma se obtiene un espacio vectorial real, llamado **espacio real subyacente** a Z, que se denota por $Z_{\mathbb{R}}$. Vamos ahora a aclarar la relación entre los funcionales lineales en ambos espacios. Si h es un funcional lineal en Z, es evidente que $\operatorname{Re} h$ es un funcional lineal en $Z_{\mathbb{R}}$. Además h queda determinado por su parte real, ya que

$$\operatorname{Im} h(z) = \operatorname{Re}\big(-i\,h(z)\big) = -\operatorname{Re} h(iz) \qquad \forall z \in Z$$

Recíprocamente, si h_0 es un funcional lineal en $Z_{\mathbb{R}}$, definimos

$$h(z) = h_0(z) - i\,h_0(iz) \qquad \forall z \in Z$$

y comprobamos que h es un funcional lineal en Z, que obviamente verifica $\operatorname{Re} h = h_0$. En efecto, es claro que $h(u+v) = h(u) + h(v)$ y $h(\alpha u) = \alpha h(u)$ para $u, v \in Z$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Pero además, para todo $z \in Z$ se tiene

$$h(iz) = h_0(iz) - i\,h_0(-z) = i\big(h_0(z) - i\,h_0(iz)\big) = i\,h(z)$$

de donde se deduce ya claramente que h es lineal. Podemos por tanto enunciar:

- *Si Z es un espacio vectorial complejo, los funcionales lineales en $Z_{\mathbb{R}}$ son las partes reales de los funcionales lineales en Z.*

Es ya fácil probar la versión analítica del teorema de Hahn-Banach en el caso complejo. Sea pues X un espacio vectorial complejo, provisto de un funcional sublineal $\varphi : X \to \mathbb{R}$, que también es un funcional sublineal en $X_{\mathbb{R}}$. Sea también M un subespacio de X y $g : M \to \mathbb{C}$ un funcional lineal dominado por φ, es decir, que verifica $\operatorname{Re} g(y) \leqslant \varphi(y)$ para todo $y \in M$. Entonces el espacio vectorial real $M_{\mathbb{R}}$ es subespacio de $X_{\mathbb{R}}$, y tomando $g_0 = \operatorname{Re} g$, tenemos que g_0 es un funcional lineal en $M_{\mathbb{R}}$ dominado por φ, esto es, $g_0(y) \leqslant \varphi(y)$ para todo $y \in M$. Como el teorema en el caso real ya está demostrado, existe un funcional lineal $f_0 : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ que extiende a g_0 y está dominado por φ. Existe ahora un (único) funcional lineal $f : X \to \mathbb{C}$, tal que $f_0 = \operatorname{Re} f$. Entonces f está dominado por φ, puesto que se tiene $\operatorname{Re} f(x) = f_0(x) \leqslant \varphi(x)$ para todo $x \in X$. Concluimos viendo que f extiende a g, ya que tanto $f\big|_M$ como g quedan determinados por sus respectivas partes reales. Concretamente, para todo $y \in M$, se tiene

$$f(y) = f_0(y) - i\,f_0(iy) = g_0(y) - i\,g_0(iy) = g_0(y)$$

Sólo queda probar la última afirmación del teorema, pero esto es muy sencillo: si φ es de hecho una seminorma, para cada $x \in X$ podemos escribir $|f(x)| = \lambda f(x)$ con $\lambda \in \mathbb{K}$ y $|\lambda| = 1$. Se tiene entonces

$$\big|f(x)\big| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \operatorname{Re} f(\lambda x) \leqslant \varphi(\lambda x) = |\lambda|\,\varphi(x) = \varphi(x)$$

donde hemos usado que, evidentemente $f(\lambda x) \in \mathbb{R}$, y que φ es una seminorma.

6.2. Teorema de extensión en espacios normados

El resto de este tema se dedica a obtener las consecuencias más inmediatas del teorema recién demostrado. La primera contesta afirmativamente, a plena generalidad, la pregunta que habíamos planteado como motivación. En el contexto de los espacios normados, el teorema de Hahn-Banach se usa casi siempre de esta forma:

Teorema de extensión Hahn-Banach. *Sea X un espacio normado, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Entonces existe $f \in X^*$ tal que f extiende a g y verifica que $\|f\| = \|g\|$. Se dice que f es una* **extensión Hahn-Banach** *de g.*

Demostración. Definiendo $\varphi(x) = \|g\| \, \|x\|$ para todo $x \in X$, está bien claro que φ es una seminorma en X, de hecho una norma salvo en el caso trivial $g = 0$. La continuidad de g nos dice claramente que $\operatorname{Re} g(y) \leqslant |g(y)| \leqslant \varphi(y)$ para todo $y \in Y$. Por tanto, la versión analítica del teorema de Hahn-Banach nos da un funcional lineal f en X que verifica:

$$f(y) = g(y) \quad \forall y \in Y \qquad \text{y} \qquad |f(x)| \leqslant \varphi(x) = \|g\| \, \|x\| \quad \forall x \in X$$

Vemos que $f \in X^*$ con $\|f\| \leqslant \|g\|$ pero, como f extiende a g, también se tiene $\|f\| \geqslant \|g\|$, luego ambas normas coinciden. ■

El hecho de que todo funcional lineal continuo, en cualquier subespacio M de un espacio normado X, se extienda para obtener un funcional lineal continuo en todo el espacio X, ya es bastante importante. Como ya se dijo, nos garantiza por ejemplo la abundancia de funcionales lineales continuos no nulos en cualquier espacio normado $X \neq \{0\}$. Basta tomar un subespacio de dimensión finita $M \subset X$ y un funcional lineal no nulo g en M, que automáticamente es continuo, y el teorema anterior nos da $f \in X^*$ que extiende a g, luego $f \neq 0$.

En general está claro que, al extender un funcional lineal continuo, su norma no puede disminuir, y el teorema anterior nos asegura que siempre existe una extensión Hahn-Banach, es decir, que la extensión puede hacerse sin que la norma aumente. La existencia de este tipo de extensión tendrá más adelante consecuencias importantes, pero por ahora vamos a considerar dos situaciones en las que basta disponer de una extensión continua.

En primer lugar aprovechamos simplemente el hecho de que $X^* \neq \{0\}$ para todo espacio normado $X \neq \{0\}$. Para cualquier otro espacio normado $Y \neq \{0\}$, esto nos permite definir operadores lineales continuos no nulos de X en Y, es decir, podemos ver que $L(X,Y) \neq \{0\}$. En efecto, fijados $y \in Y \setminus \{0\}$ y $f \in X^* \setminus \{0\}$, basta definir

$$T(x) = f(x)\,y \qquad \forall x \in X$$

Está claro que $T : X \to Y$ es un operador lineal que verifica

$$\|T(x)\| = |f(x)| \, \|y\| \leqslant \|f\| \, \|x\| \, \|y\| \qquad \forall x \in X$$

luego $T \in L(X,Y)$ con $\|T\| \leqslant \|f\| \, \|y\|$. De hecho se verifica la igualdad, pues si B es la bola unidad de X, se tiene

$$\|T\| = \sup \big\{ |f(x)| \, \|y\| : x \in B \big\} = \|y\| \, \sup \big\{ |f(x)| : x \in B \big\} = \|y\| \, \|f\|$$

Aprovechando la idea anterior, podemos ahora probar algo que quedó aplazado al estudiar la complitud de los espacios de operadores. Vimos que si Y es un espacio de Banach, el espacio de operadores $L(X,Y)$ es completo, para todo espacio normado X, pero ahora podemos probar el recíproco.

- *Sean X e Y espacios normados, con $X \neq \{0\}$. Si el espacio de operadores $L(X,Y)$ es completo, entonces Y es completo.*

Dada una sucesión de Cauchy $\{y_n\}$ en Y, fijamos $f \in X^* \setminus \{0\}$ y definimos

$$T_n(x) = f(x)\, y_n \qquad \forall x \in X\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

obteniendo una sucesión $\{T_n\}$ en $L(X,Y)$ que también es de Cauchy, ya que

$$\|T_n - T_m\| = \|f\|\, \|y_n - y_m\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por ser $L(X,Y)$ completo, la sucesión $\{T_n\}$ converge en $L(X,Y)$ a un operador T. Puesto que

$$\|\, T_n(x) - T(x)\,\| \leqslant \|\, T_n - T\,\|\, \|x\| \qquad \forall x \in X\,,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

deducimos que la sucesión $\big\{\, T_n(x)\,\big\} = \big\{\, f(x)\, y_n\,\big\}$ converge en Y para todo $x \in X$, luego basta tomar $x \in X$ con $f(x) = 1$, para concluir que $\{y_n\}$ converge. ■

Como otra consecuencia del teorema de extensión, probamos un resultado sobre subespacios complementados, que es la contrapartida del obtenido al estudiar los espacios normados de dimensión finita. Vimos en su momento que, si M es un subespacio cerrado, de codimensión finita en un espacio normado X, entonces M está complementado en X, y de hecho, todo complemento algebraico de M en X es un complemento topológico. Si Z es cualquiera de estos complementos, está claro que Z tiene dimensión finita. Puede pensarse, por tanto, que *cualquier* subespacio de dimensión finita $Z \subset X$, también va a estar complementado en X. El resultado anterior no permite obtener tal conclusión, pues si M es un complemento algebraico de Z en X, ciertamente M tiene codimensión finita en X, pero M puede no ser cerrado. Recuérdese que, en todo espacio normado de dimensión infinita, existe un funcional lineal que no es continuo, luego existe un subespacio de codimensión 1 que no es cerrado. No obstante, el teorema de Hahn-Banach sí nos va a permitir probar que los subespacios de dimensión finita de cualquier espacio normado, siempre están complementados.

- *Si M es un subespacio de dimensión finita de un espacio normado X, entonces M está complementado en X.*

En efecto, sea $n \in \mathbb{N}$ la dimensión de M y $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base algebraica de M. Está claro que las coordenadas de cada vector $y \in M$, con respecto a dicha base, dependen linealmente de y, es decir, existen $g_1, g_2, \ldots, g_n$, funcionales lineales en M, tales que

$$y = \sum_{k=1}^{n} g_k(y)\, u_k \qquad \forall y \in M \tag{6}$$

Como M tiene dimensión finita, para cada $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ tenemos $g_k \in M^*$ y el teorema anterior nos proporciona un funcional $f_k \in X^*$ que extiende a g_k. Definiendo ahora

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, u_k \qquad \forall x \in X$$

tenemos claramente un operador lineal $P : X \to X$, que es continuo, pues se obtiene como suma de funciones continuas. Para todo $x \in X$, se tiene $P(x) \in \operatorname{Lin}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} = M$, luego vemos que $P(X) \subset M$. Pero por otra parte, como f_k extiende a g_k para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la igualdad (6) nos dice que $P(y) = y$ para todo $y \in M$. Así pues, $P \circ P = P$ y $P(X) = M$, es decir, P es una proyección lineal continua de X sobre M. ■

Resaltamos la diferencia entre este resultado y el que conocíamos para los subespacios de codimensión finita. Si M es un subespacio de codimensión finita en un espacio normado X, suponiendo que M es cerrado en X, tenemos que todo complemento algebraico de M en X es un complemento topológico. En cambio, si M tiene dimensión finita, sabemos que M siempre es cerrado, y el resultado anterior nos da un complemento topológico de M en X, pero no es cierto que todo complemento algebraico de M en X sea un complemento topológico.

Tema 7

Dualidad en espacios normados

Usando el teorema de extensión Hahn-Banach, vamos ahora a profundizar en el estudio de la relación entre un espacio normado y su dual. En el caso más sencillo, dicho teorema permite obtener cualquier norma a partir de su norma dual, lo que establece cierta simetría entre ambas. Por otra parte, el teorema de extensión permite mostrar la relación entre el dual de un espacio normado y el de cualquiera de sus subespacios, poniendo de manifiesto la relación que existe entre extensiones Hahn-Banach y mejores aproximaciones en ciertos subespacios de un espacio de Banach dual. Haremos también una descripción del dual de un cociente, que es independiente del teorema de Hahn-Banach, pero la conjunción de ambos resultados permite caracterizar los subespacios cerrados de un espacio normado, usando el espacio dual. Esta es sin duda una de las consecuencias más útiles del teorema de Hahn-Banach.

Para llegar a la cuestión más relevante en el estudio de la dualidad, mostramos que todo espacio normado puede identificarse canónicamente con un subespacio de su *bidual*, que no es más que el espacio dual de su dual. Aparecerán así los espacios de Banach *reflexivos*, para los que existe total simetría entre un espacio y su dual. Para la gran mayoría de los espacios de Banach que conocemos, podremos averiguar sin mucha dificultad si son reflexivos. Veremos finalmente algunas propiedades de estabilidad que tiene la clase de los espacios reflexivos.

7.1. Un ejemplo de extensión Hahn-Banach

Como caso particular muy sencillo del teorema de extensión Hahn-Banach, obtenemos el siguiente resultado:

- *Si X es un espacio normado y $x \in X \setminus \{0\}$, existe $h \in X^*$ con $\|h\| = 1$ y $h(x) = \|x\|$.*

Usamos el subespacio $M = \mathbb{K}x \subset X$ y el funcional lineal $g \in M^*$ dado por $g(\lambda x) = \lambda \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene claramente $|g(y)| = \|y\|$ para todo $y \in M$, luego $\|g\| = 1$. Por tanto, si $h \in X^*$ es una extensión Hahn-Banach de g, vemos que $\|h\| = 1$ y $h(x) = g(x) = \|x\|$, como se quería. ■

Hemos obtenido una relación entre cualquier norma y su norma dual, que ahora vamos a resaltar. Fijado $x \in X \setminus \{0\}$, para $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ se tiene obviamente $|f(x)| \leqslant \|x\|$. Pero existe $h \in X^*$ con $\|h\| = 1$ que nos da la igualdad $h(x) = \|x\|$. Tenemos por tanto:

$$\|x\| = \sup\big\{\,|f(x)| \,:\, f \in X^*,\ \|f\| = 1\,\big\} \qquad \forall x \in X$$

pues el caso $x = 0$ no es una excepción. De hecho el supremo anterior es siempre un máximo, pero al usar el supremo, vemos muy clara la simetría con la definición de la norma dual:

$$\|f\| = \sup\big\{\,|f(x)| \,:\, x \in X,\ \|x\| = 1\,\big\} \qquad \forall f \in X^*$$

Así pues, el teorema de Hahn-Banach nos ha permitido obtener la norma de X, a partir de su norma dual en X^*, exactamente igual que la norma de X^* se obtiene, por definición, a partir de la de X. Es costumbre enfatizar la simetría anterior, denotando por x^* a un elemento genérico del espacio dual X^*, de la misma forma que denotamos por x a un vector genérico de X. Las dos igualdades anteriores toman entonces la siguiente forma:

$$\|x\| = \sup\big\{\,|x^*(x)| : x^* \in X^*,\ \|x^*\| = 1\,\big\} \quad \forall x \in X$$
$$\|x^*\| = \sup\big\{\,|x^*(x)| : x \in X,\ \|x\| = 1\,\big\} \quad \forall x^* \in X^*$$

Del resultado anterior deduciremos también lo que se conoce como "universalidad" de los espacios de funciones acotadas: todo espacio normado puede verse como subespacio de uno de ellos. Recordemos que, si Γ es un conjunto no vacío, $l_\infty(\Gamma)$ es el espacio de Banach de todas las funciones acotadas de Γ en $\mathbb{K}$, cuya norma viene dada por $\|y\| = \sup\big\{\,\big|y(\gamma)\big| : \gamma \in \Gamma\,\big\}$ para todo $y \in l_\infty(\Gamma)$. En particular conocemos el espacio de sucesiones $l_\infty = l_\infty(\mathbb{N})$.

- *Todo espacio normado es isométricamente isomorfo a un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$ para algún conjunto no vacío Γ. En particular, todo espacio normado separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de l_∞.*

Sea X un espacio normado y sea $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ un conjunto denso en X. Para cada $\gamma \in \Gamma$ tomamos $x_\gamma^* \in X^*$ verificando que $\|x_\gamma^*\| = 1$ y $x_\gamma^*(x_\gamma) = \|x_\gamma\|$. Para cada $x \in X$, definimos entonces una función $T(x) : \Gamma \to \mathbb{K}$, escribiendo

$$\big(T(x)\big)(\gamma) = x_\gamma^*(x) \qquad \forall \gamma \in \Gamma$$

Para cualesquiera $x \in X$ y $\gamma \in \Gamma$ se tiene claramente $\big|\big(T(x)\big)(\gamma)\big| \leqslant \|x_\gamma^*\|\,\|x\| = \|x\|$, de donde deducimos que $T(x) \in l_\infty(\Gamma)$ con $\|T(x)\|_\infty \leqslant \|x\|$. Es claro que $T : X \to l_\infty(\Gamma)$ es un operador lineal, y acabamos de probar que T es continuo, pero de hecho veremos enseguida que T es isométrico.

Para todo $\gamma \in \Gamma$ se tiene claramente

$$\big\|x_\gamma\big\| = \big|x_\gamma^*(x_\gamma)\big| = \big|\big(T(x_\gamma)\big)(\gamma)\big| \leqslant \big\|T(x_\gamma)\big\|_\infty \leqslant \big\|x_\gamma\big\|$$

Como T es continuo, la función $x \mapsto \|T(x)\|_\infty$ es continua en X, al igual que la norma de X, y hemos visto que ambas funciones coinciden en el conjunto $\{x_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, que es denso en X. Por tanto, dichas funciones coinciden en X, es decir, T es isométrico.

Si el espacio normado X es separable, tiene un subconjunto denso numerable, luego el razonamiento anterior puede hacerse con $\Gamma = \mathbb{N}$, obteniendo un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio de $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$. ■

7.2. Dual de un subespacio

Volvamos al teorema de extensión Hahn-Banach en versión general. Dado un subespacio M de un espacio normado X, el teorema hace que la aplicación lineal $x^* \mapsto x^*\big|_M$, de X^* en M^*, sea sobreyectiva. Por tanto, M^* se identifica, como espacio vectorial, con el cociente de X^* por el núcleo de dicha aplicación, un subespacio de X^* al que ahora vamos a prestar atención.

Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, definimos el **anulador** de A como el conjunto $A^\perp$ de todos los funcionales lineales continuos en X que se anulan en A:

$$A^\perp = \big\{ x^* \in X^* \, : \, x^*(a) = 0 \ \ \forall a \in A \big\}$$

Para cada $a \in A$, la aplicación lineal $x^* \mapsto x^*(a)$ es continua, ya que $|x^*(a)| \leqslant \|a\| \, \|x^*\|$ para todo $x^* \in X^*$, luego el conjunto $\{x^* \in X^* : x^*(a) = 0\}$ es un subespacio cerrado de X^*. Deducimos que $A^\perp$ es subespacio cerrado de X^*, como intersección de subespacios cerrados. Esto permite considerar el espacio de Banach $X^*/M^\perp$, cociente del espacio de Banach X^* por un subespacio cerrado. Vamos a comprobar ahora que este cociente se identifica con M^*, no sólo como espacios vectoriales, sino también como espacios de Banach.

- *Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces se tiene un isomorfismo isométrico $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$, que viene dado por*

$$\Phi\big(q(x^*)\big) = x^*\big|_M \qquad \forall x^* \in X^* \tag{1}$$

donde $q : X^* \to X^*/M^\perp$ es la aplicación cociente.

Por lo ya comentado, Φ está bien definida y es una biyección lineal, luego se trata de probar que Φ es isométrica.

Fijado $w \in X^*/M^\perp$, sea $y^* = \Phi(w) \in M^*$, para comprobar que $\|y^*\| = \|w\|$. Por una parte, para todo $x^* \in w$, tenemos $\|y^*\| = \|x^*|_M\| \leqslant \|x^*\|$, y por otra, el teorema de extensión Hahn-Banach nos da un $x^* \in w$ con $\|x^*\| = \|y^*\|$, luego usando la definición de la norma cociente obtenemos

$$\|\Phi(w)\| = \|y^*\| = \text{mín}\,\big\{ \|x^*\| \, : \, x^* \in w \big\} = \|w\|$$

Esto prueba que Φ es un isomorfismo isométrico, como se quería. ■

En el razonamiento anterior aparece un hecho que conviene destacar: para todo $w \in X^*/M^\perp$, el ínfimo que define a la norma cociente $\|w\|$ es un mínimo. Deducimos que cada $x^* \in X^*$ tiene al menos una mejor aproximación en $M^\perp$, junto con una relación entre mejores aproximaciones y extensiones Hahn-Banach, que merece la pena resaltar.

- *Si M es un subespacio de un espacio normado X, entonces $M^\perp$ es proximinal en X^*. De hecho, para cada $x^* \in X^*$, las mejores aproximaciones de x^* en $M^\perp$ son los funcionales de la forma $x^* - z^*$, donde z^* es una extensión Hahn-Banach de $x^*\big|_M$.*

Dado $x^* \in X^*$, sea z^* una extensión Hahn-Banach de $x^*|_M$. Entonces $x^* - z^* \in M^\perp$, y usando el resultado anterior, tenemos

$$\|x^* - (x^* - z^*)\| = \|z^*\| = \|x^*|_M\| = \|q(x^*)\| = d\left(x^*, M^\perp\right)$$

luego $x^* - z^*$ es una mejor aproximación de x^* en $M^\perp$. Por otra parte, si u^* es una mejor aproximación de x^* en $M^\perp$, se tiene que

$$\|x^* - u^*\| = d\left(x^*, M^\perp\right) = \|q(x^*)\| = \|x^*|_M\|$$

luego $z^* = x^* - u^*$ es una extensión Hahn-Banach de $x^*|_M$, tal que $u^* = x^* - z^*$. ■

7.3. Dual de un cociente

Veamos una descripción del dual de un cociente, que es la contrapartida a la del dual de un subespacio, recién obtenida.

- *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X y $q : X \to M$ la aplicación cociente. Entonces se tiene un isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$, dado por:*

$$\Psi\left(w^*\right) = w^* \circ q \qquad \forall w^* \in (X/M)^* \tag{2}$$

Para $w^* \in (X/M)^*$, la linealidad y continuidad de q hacen que se tenga $w^* \circ q \in X^*$, y es claro que $w^*\left(q(y)\right) = 0$ para todo $y \in M$, luego $w^* \circ q \in M^\perp$. Denotando por U a la bola abierta unidad de X, sabemos que $q(U)$ es la bola abierta unidad de X/M, y vemos que Ψ es isométrica, pues para todo $w^* \in (X/M)^*$ se tiene:

$$\|\Psi(w^*)\| = \sup\left\{\left|w^*\left(q(x)\right)\right| : x \in U\right\} = \sup\left\{|w^*(w)| : w \in q(U)\right\} = \|w^*\|$$

Si $x^* \in M^\perp$ y $u, x \in X$ verifican que $q(u) = q(x)$, tenemos $u - x \in M$, luego $x^*(u) = x^*(x)$. Podemos pues definir un funcional lineal $w^* : X/M \to \mathbb{K}$ escribiendo $w^*\left(q(x)\right) = x^*(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $w^* \circ q = x^* \in X^*$ de donde $w^* \in (X/M)^*$, y tenemos $\Psi(w^*) = x^*$. Por tanto, la imagen de Ψ es $M^\perp$, y Ψ es un isomorfismo isométrico, como queríamos. ■

Obsérvese que en la demostración anterior no hemos usado el teorema de Hahn-Banach, el resultado podía haberse probado mucho antes. De hecho, el mismo razonamiento puede usarse con operadores en vez de funcionales. Si Y es un espacio normado arbitrario, se obtiene un isomorfismo isométrico del espacio de operadores $L(X/M, Y)$ sobre el subespacio de $L(X, Y)$ formado por los operadores que se anulan en M. Hemos preferido destacar el caso $Y = \mathbb{K}$, que es el más interesante. Además, ahora podemos aprovecharlo para generalizar el resultado con el que iniciábamos este tema.

- *Si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X y $x \in X \setminus M$, existe $x^* \in M^\perp$ tal que $\|x^*\| = 1$ y $x^*(x) = d(x, M)$.*

Si $q : X \to X/M$ es la aplicación cociente, el resultado mencionado nos da $w^* \in (X/M)^*$ tal que $\|w^*\| = 1$ y $w^*\big(q(x)\big) = \|q(x)\|$. Basta entonces tomar $x^* = w^* \circ q \in M^\perp$, pues se tiene $\|x^*\| = \|w^*\| = 1$ y $x^*(x) = w^*\big(q(x)\big) = \|q(x)\| = d(x,M)$, como se quería. ■

Tomando $M = \{0\}$ recuperamos el resultado inicial de este tema, que hemos usado para obtener una versión más general. Como ocurría en el caso particular, el valor $x^*(x) = d(x,M)$ es óptimo, en el siguiente sentido. De $z^* \in M^\perp$ con $\|z^*\| = 1$, se deduce que, para todo $y \in M$ se ha de tener $|z^*(x)| = |z^*(x-y)| \leqslant \|x-y\|$, de donde $|z^*(x)| \leqslant d(x,M) = x^*(x)$. Pero aún olvidando este detalle, el resultado anterior tiene una consecuencia importante: si $x \in X \setminus M$, existe $x^* \in M^\perp$ tal que $x^*(x) \neq 0$. Dicho de otra forma, dado $x \in X$, se tiene que $x \in M$ si, y sólo si, $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in M^\perp$. Esto significa que el espacio dual X^* nos permite caracterizar los subespacios cerrados de cualquier espacio normado X. De hecho, con el mismo razonamiento podemos conseguir el siguiente resultado, formalmente más general.

- *Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, se tiene:*

$$\overline{\operatorname{Lin} A} = \big\{x \in X \,:\, x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in A^\perp\big\} \tag{3}$$

En particular, si M es un subespacio de X, se tiene

$$\overline{M} = \big\{x \in X \,:\, x^*(x) = 0 \quad \forall x^* \in M^\perp\big\} \tag{4}$$

luego M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$.

Sea $Y = \overline{\operatorname{Lin} A}$ y llamemos Z al conjunto que aparece en el segundo miembro de (3), para comprobar que $Y = Z$. Vemos que Z es un subespacio cerrado de X, por ser la intersección de los núcleos de los elementos de $A^\perp$. Como es obvio que $A \subset Z$, deducimos que $Y \subset Z$. Para la otra inclusión, fijamos $x \in X \setminus Y$ y comprobamos que $x \notin Z$. Como Y también es un subespacio cerrado de X, el resultado anterior nos da un $x^* \in Y^\perp$ tal que $x^*(x) = d(x,Y) \neq 0$. Se tiene obviamente $x^* \in A^\perp$, luego $x \notin Z$ como queríamos.

Para un subespacio $M \subset X$, se tiene $\operatorname{Lin} M = M$ y (3) se convierte en (4). Cuando M es denso en X, para todo $x^* \in M^\perp$, se tiene por continuidad que $x^* = 0$, luego $M^\perp = \{0\}$. Recíprocamente, si $M^\perp = \{0\}$, en vista de (4) es obvio que $\overline{M} = X$. ■

Deducimos un resultado que quedó anunciado al estudiar los duales de algunos espacios de Banach concretos.

- *Si X es un espacio normado tal que X^* es separable, entonces X es separable.*

Como X^* es un espacio métrico separable, su esfera unidad también lo es, luego existe un conjunto numerable $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$, que es denso en la esfera unidad de X^*. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos entonces $x_n \in X$ verificando que $\|x_n\| = 1$ y $|x_n^*(x_n)| > 1/2$. Probaremos que el subespacio de dimensión numerable $M = \operatorname{Lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en X, y esto implica, como sabemos, que X es separable. Por el resultado anterior, bastará comprobar que $M^\perp = \{0\}$.

Supongamos por el contrario que existe $x^* \in M^\perp$ con $\|x^*\| = 1$. Entonces, para $n \in \mathbb{N}$, como $x^*(x_n) = 0$, tenemos $1/2 < |x_n^*(x_n)| = |x_n^*(x_n) - x^*(x_n)| \leqslant \|x_n^* - x^*\|$, pero esto es una contradicción, porque $\{x_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ era denso en la esfera unidad de X^*. ■

7.4. Inyección canónica y completación

Naturalmente, llamamos segundo dual, o **bidual**, de un espacio normado X, al dual del espacio de Banach X^*, que denotamos por $X^{**} = \big(X^*\big)^*$. Desde luego, X^{**} también es un espacio de Banach, cuya norma viene dada por

$$\|x^{**}\| = \sup\left\{ \left|x^{**}(x^*)\right| \,:\, x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leqslant 1 \right\} \qquad \forall x^{**} \in X^{**}$$

Enseguida vamos a ver que X es isométricamente isomorfo a un subespacio de X^{**}. Para ello basta usar una idea bien sencilla: la expresión $x^*(x)$ puede verse como función de $x \in X$, pero también como función de $x^* \in X^*$.

Concretamente, fijado $x \in X$, consideramos la aplicación $J(x) : X^* \to \mathbb{K}$ definida por

$$\big(J(x)\big)(x^*) = x^*(x) \qquad \forall x^* \in X^*$$

Es obvio que $J(x)$ es un funcional lineal en X^*, y tenemos $\left|\big(J(x)\big)(x^*)\right| \leqslant \|x\|\,\|x^*\|$ para todo $x^* \in X^*$. Por tanto $J(x)$ es continuo, es decir, $J(x) \in X^{**}$, y tenemos $\|J(x)\| \leqslant \|x\|$. Pero un resultado ya conocido nos da la igualdad, ya que

$$\begin{aligned} \|x\| &= \sup\left\{ \left|x^*(x)\right| \,:\, x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leqslant 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \left|\big(J(x)\big)(x^*)\right| \,:\, x^* \in X^*,\ \|x^*\| \leqslant 1 \right\} = \|J(x)\| \end{aligned}$$

Todo lo dicho es válido para todo $x \in X$, luego podemos considerar la aplicación $x \mapsto J(x)$. Se trata obviamente de una aplicación lineal $J : X \to X^{**}$ y acabamos de comprobar que es isométrica, luego permite identificar X con un subespacio de su bidual X^{**}. Se dice que J es la **inyección canónica** del espacio normado X en su bidual.

Si X no es completo, $J(X)$ tampoco lo es, luego $J(X) \neq X^{**}$. Esta sencilla observación tiene su utilidad, pues permite ver a X como subespacio denso de un espacio de Banach.

- *Si X es un espacio normado no completo, existe un espacio de Banach $\widehat{X}$, junto con un isomorfismo isométrico de X sobre un subespacio denso en $\widehat{X}$. Además $\widehat{X}$ es único, salvo isomorfismos isométricos.*

Considerando la inyección canónica $J : X \to X^{**}$, tomamos $\widehat{X} = \overline{J(X)}$. Entonces $\widehat{X}$ es un subespacio cerrado de X^{**}, luego es también un espacio de Banach. Obviamente J es un isomorfismo isométrico de X sobre $J(X)$, que es un subespacio denso en $\widehat{X}$.

La unicidad de $\widehat{X}$ se deduce del teorema de extensión por densidad de operadores lineales continuos. Sea $\widetilde{X}$ otro espacio de Banach, tal que exista un isomorfismo isométrico I, de X sobre un subespacio $I(X)$, denso en $\widetilde{X}$. El operador $T_0 = J \circ I^{-1} : I(X) \to J(X) \subset \widehat{X}$ y su inverso $S_0 = I \circ J^{-1} : J(X) \to I(X) \subset \widetilde{X}$, se pueden entonces extender, obteniendo operadores lineales y continuos $T : \widetilde{X} \to \widehat{X}$ y $S : \widehat{X} \to \widetilde{X}$, que verifican $\|T\| = \|S\| = 1$. Como $T_0 \circ S_0$ es la identidad en $J(X)$, que es un subespacio denso en $\widehat{X}$, deducimos claramente que $T \circ S$ es la identidad en $\widehat{X}$. Análogamente $S \circ T$ es la identidad en $\widetilde{X}$, y esto prueba que T y S son biyectivos con $T^{-1} = S$. Tenemos por tanto $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, luego T es un isomorfismo isométrico de $\widetilde{X}$ sobre $\widehat{X}$, como queríamos demostrar. ■

Se dice que el espacio de Banach $\widehat{X}$ del resultado anterior es **la completación** del espacio normado X. Podemos por tanto ver cada espacio normado como subespacio denso de un espacio de Banach. La unicidad de la completación permite recíprocamente pensar que, si Y es un subespacio denso de un espacio de Banach Z, entonces Z es la completación de Y.

7.5. Espacios de Banach reflexivos

Consideremos los espacios de Banach que mejor se comportan con respecto a la dualidad. Se dice que un espacio de Banach X es **reflexivo**, cuando la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es sobreyectiva, es decir, cuando $J(X) = X^{**}$. En tal caso, naturalmente, J es un isomorfismo isométrico de X sobre X^{**}, y tenemos total simetría entre los espacios de Banach X y X^*, puesto que el espacio dual de X^* se identifica con X.

Los ejemplos más sencillos de espacios de Banach reflexivos saltan a la vista. Si X es un espacio normado de dimensión finita, está claro que X^*, y por tanto X^{**}, tienen la misma dimensión que X. Como la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ es isométrica, luego inyectiva, también ha de ser sobreyectiva:

- *Todo espacio de Banach de dimensión finita es reflexivo.*

Al estudiar los duales de los espacios de sucesiones, vimos que la relación entre un espacio y su dual podía no ser simétrica. Esto nos llevará a los primeros ejemplos de espacios de Banach no reflexivos. Para abreviar, escribiremos $X \equiv Y$ cuando dos espacios normados X e Y sean isométricamente isomorfos, es decir, idénticos como espacios normados.

- *Los espacios de Banach c_0 y l_1 no son reflexivos.*

Recordemos que $c_0^* \equiv l_1$, y a su vez $l_1^* \equiv l_\infty$, luego $c_0^{**} \equiv l_1^* \equiv l_\infty$, y en particular, c_0^{**} no es separable. Como c_0 sí es separable, no puede ser siquiera homeomorfo a c_0^{**}, luego no es reflexivo. Del mismo modo, tenemos $l_1^{**} \equiv l_\infty^*$, y sabemos que l_∞^* no es separable, porque l_∞ no lo es. Como l_1 es separable, no puede ser homeomorfo a l_1^{**}, luego l_1 no es reflexivo. ■

El razonamiento usado con l_1 se puede abstraer. Si X es un espacio de Banach separable, tal que X^* no es separable, entonces X no es reflexivo. En efecto, si X fuese reflexivo, X^{**} sería separable por ser homeomorfo a X, luego X^* sería separable.

A diferencia de los ejemplos anteriores, veamos lo que ocurre con l_p para $1 < p < \infty$. Sabemos que $l_p^* \equiv l_{p^*}$, y a su vez $l_{p^*}^* \equiv l_{p^{**}} = l_p$, luego tenemos $l_p^{**} \equiv l_{p^*}^* \equiv l_p$. Esto invita a pensar que l_p es reflexivo, pero no basta para asegurarlo, como vamos a explicar.

Concretamente, el matemático estadounidense R.C. James encontró en 1951 un espacio de Banach X, que es isométricamente isomorfo a su bidual, pero no es reflexivo, es decir, la inyección canónica $J : X \to X^{**}$ no es sobreyectiva. Hoy se conoce como *el espacio de James*, y verifica algo que también es llamativo y poco frecuente: $J(X)$ tiene codimensión 1 en X^{**}.

Así pues, para asegurar que un espacio de Banach es reflexivo, no basta identificarlo de alguna forma con su bidual, hay que comprobar que la inyección canónica es sobreyectiva. Para ello es frecuente recurrir a una noción que ahora vamos a estudiar.

7.6. Transposición de operadores

En los últimos razonamientos con espacios de sucesiones, hemos usado algo que no es discutible, pero sin comprobarlo explícitamente: si dos espacios normados son isométricamente isomorfos, sus duales también deben serlo. Necesitamos esa comprobación, pero haremos algo más general y útil, pues a cada operador lineal y continuo entre espacios normados, asociaremos un operador lineal y continuo entre los duales, y tendremos cierto control de la relación entre las propiedades de ambos operadores.

La forma de hacerlo no ofrece dificultad. Sean X e Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$ un operador lineal y continuo. Para cada $y^* \in Y^*$ se tiene entonces que $y^* \circ T \in X^*$, lo que permite considerar la aplicación $T^* : Y^* \to X^*$ definida por $T^*(y^*) = y^* \circ T$ para todo $y^* \in Y^*$. Es evidente que T^* es un operador lineal, que se maneja fácilmente mediante la igualdad

$$\big(T^*(y^*)\big)(x) = y^*\big(T(x)\big) \qquad \forall x \in X\,,\ \ \forall y^* \in Y^*$$

que no es más que la definición de T^*. Se dice que T^* es el **operador transpuesto** de T.

Esta nomenclatura está inspirada en lo que ocurre cuando se trabaja en espacios normados de dimensión finita, como vamos a explicar. Supongamos que X tiene dimensión $n \in \mathbb{N}$ y sea $U = \big\{u_1, u_2, \ldots, u_n\big\}$ una base algebraica de X. Las coordenadas de cada vector $x \in X$ dependen linealmente de x, luego existe un conjunto $U^* = \big\{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\big\} \subset X^*$, verificando que la igualdad $x = \sum_{k=1}^{n} u_k^*(x)\, u_k$ nos da la única forma de expresar cada vector $x \in X$ como combinación lineal de elementos de U. Es claro entonces que

$$x^* = \sum_{k=1}^{n} x^*(u_k)\, u_k^* \qquad \forall x^* \in X^* \tag{5}$$

es la única forma de expresar cada $x^* \in X^*$ como combinación lineal de elementos de U^*. Por tanto, U^* es una base algebraica de X^*, a la que llamamos *base dual* de U. A su vez, U^* tiene una base dual $U^{**} = \{u_1^{**}, u_2^{**}, \ldots, u_n^{**}\}$, y de (5) se deduce claramente que $u_k^{**} = J(u_k)$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, donde $J : X \to X^{**}$ es la inyección canónica. Tenemos así una comprobación bien detallada de la reflexividad de X.

Si ahora Y es otro espacio normado, de dimensión $m \in \mathbb{N}$, fijamos también en Y una base algebraica $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, con lo que en Y^* tenemos la base dual $V^* = \{v_1^*, v_2^*, \ldots, v_m^*\}$. En las bases U y V, sabemos que cada operador lineal $T \in L(X,Y)$ queda representado por una matriz $m \times n$ con coeficientes escalares, la matriz $A = \big(a_{jk}\big)$ dada por $a_{jk} = v_j^*\big(T(u_k)\big)$ para $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ y $k \in \{1,2,\ldots n\}$. De hecho, se tiene claramente

$$v_j^*\big(T(x)\big) = \sum_{k=1}^{n} v_j^*\big(T(u_k)\big)\, u_k^*(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} u_k^*(x) \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}, \quad \forall x \in X$$

luego si escribimos cada $x \in X$ como un vector columna formado por sus coordenadas en la base U, y hacemos lo mismo con $T(x)$ en la base V, la igualdad anterior nos dice que el vector columna $T(x)$ es el producto de la matriz A por el vector columna x, luego el operador T se expresa como producto de matrices: $T(x) = Ax$ para todo $x \in X$.

Pues bien, en las bases duales V^* y U^*, el operador transpuesto $T^* : Y^* \to X^*$ se representa a su vez por una matriz $n \times m$, que viene dada por $A^* = \left(a^*_{kj}\right)$, donde $a^*_{kj} = u^{**}_k \left(T^*(v^*_j)\right)$ para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ y $j \in \{1,2,\ldots,m\}$. Ahora bien, para j y k arbitrarios, se tiene

$$a^*_{kj} = u^{**}_k \left(T^*(v^*_j)\right) = \left(J(u_k)\right)\left(T^*(v^*_j)\right) = \left(T^*(v^*_j)\right)(u_k) = v^*_j \left(T(u_k)\right) = a_{jk}$$

luego A^* es la matriz transpuesta de A.

Esta es la razón por la que a T^* le llamamos operador transpuesto de T. Así pues, puede decirse que la noción de operador transpuesto generaliza la de matriz transpuesta. Veamos ahora las propiedades básicas del operador transpuesto.

- *Si X e Y son espacios normados arbitrarios, para todo operador $T \in L(X,Y)$ se tiene que $T^* \in L(Y^*,X^*)$ con $\|T^*\| = \|T\|$.*

Para cualesquiera $y^* \in Y^*$ y $x \in X$ se tiene

$$\left|\left(T^*(y^*)\right)(x)\right| = \left|y^*\left(T(x)\right)\right| \leqslant \|y^*\|\,\|T\|\,\|x\|$$

luego $\|T^*(y^*)\| \leqslant \|T\|\,\|y^*\|$. Por tanto, T^* es continuo con $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. La igualdad se deduce usando la norma de Y^* para calcular normas en Y. Más concretamente, si llamamos B a la bola unidad de X y B^* a la de Y^*, se tiene:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\left\{\|T(x)\| \,:\, x \in B\right\} \\ &= \sup\left\{\left|y^*\left(T(x)\right)\right| \,:\, y^* \in B^*,\ x \in B\right\} \\ &= \sup\left\{\left|\left(T^*(y^*)\right)(x)\right| \,:\, y^* \in B^*,\ x \in B\right\} \\ &= \sup\left\{\|T^*(y^*)\| \,:\, y^* \in B^*\right\} = \|T^*\| \end{aligned}$$

Nótese que en la segunda igualdad hemos usado el teorema de Hahn-Banach, las demás se verifican por definición de las normas de los operadores o funcionales involucrados. ■

Es claro que la aplicación $T \mapsto T^*$, de $L(X,Y)$ en $L(Y^*,X^*)$ es lineal, y acabamos de ver que es isométrica, luego permite identificar $L(X,Y)$ con un subespacio de $L(Y^*,X^*)$.

La transposición de operadores se puede ahora iterar. Concretamente, para $T \in L(X,Y)$, consideramos el operador transpuesto de T^*, que denotamos por $T^{**} = \left(T^*\right)^*$. De esta forma tenemos que $T^{**} \in L(X^{**},Y^{**})$, y viendo a X e Y como subespacios de sus biduales, cabe preguntarse por la relación entre T y T^{**}. La respuesta es fácil de adivinar: T^{**} puede verse como una extensión de T, en el sentido que sigue.

- *Si X e Y son espacios normados y denotamos por J_X y J_Y a las respectivas inyecciones canónicas, para todo $T \in L(X,Y)$ se tiene $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$.*

Fijado $x \in X$, para todo $y^* \in Y^*$ tenemos

$$\begin{aligned} \left[T^{**}\left(J_X(x)\right)\right](y^*) &= \left[J_X(x)\right]\left(T^*(y^*)\right) = \left[T^*(y^*)\right](x) \\ &= y^*\left(T(x)\right) = \left[J_Y\left(T(x)\right)\right](y^*) \end{aligned}$$

luego $T^{**}\left(J_X(x)\right) = J_Y\left(T(x)\right)$ para todo $x \in X$, como se quería. ■

En particular, si X es un espacio de Banach reflexivo, al identificar X con X^{**} podemos entender que $T^{**} = T$. Nos interesa ahora el operador transpuesto de una composición.

- *Si X,Y,Z son espacios normados, para cualesquiera $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, se tiene que $\big(S \circ T\big)^* = T^* \circ S^*$*

Basta observar que, para todo $z^* \in Z^*$ se tiene

$$\big(S \circ T\big)^*(z^*) = z^* \circ S \circ T = S^*(z^*) \circ T = T^*\big(S^*(z^*)\big) \qquad \blacksquare$$

Es ahora fácil entender lo que ocurre al transponer un isomorfismo.

- *Si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entre dos espacios normados, entonces T^* también es un isomorfismo de Y^* sobre X^*, con $\big(T^*\big)^{-1} = \big(T^{-1}\big)^*$. Por tanto, si T es un isomorfismo isométrico, T^* también lo es.*

Denotando por I_Z al operador identidad en cada espacio normado Z, se tiene obviamente que $I_Z^* = I_{Z^*}$ es el operador identidad en Z^*. Por tanto, de $T^{-1} \circ T = I_X$ y $T \circ T^{-1} = I_Y$ deducimos que

$$I_{X^*} = \big(T^{-1} \circ T\big)^* = T^* \circ \big(T^{-1}\big)^* \qquad \text{y} \qquad I_{Y^*} = \big(T \circ T^{-1}\big)^* = \big(T^{-1}\big)^* \circ T^*$$

Esto prueba que T^* es un isomorfismo, y $\big(T^*\big)^{-1} = \big(T^{-1}\big)^*$. Cuando el isomorfismo T es isométrico, tenemos $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$, luego $\|T^*\| = \|(T^*)^{-1}\| = 1$, y vemos que T^* también es isométrico. $\blacksquare$

El resultado anterior deja claro que la reflexividad se conserva por isomorfismos. En efecto, si $T : X \to Y$ es un isomorfismo entre espacios normados, $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ también lo es. Por otra parte, sabemos que las inyecciones canónicas de X e Y verifican que $T^{**} \circ J_X = J_Y \circ T$. Por tanto, si X es un espacio de Banach reflexivo, tenemos

$$Y^{**} = T^{**}(X^{**}) = T^{**}\big(J_X(X)\big) = J_Y\big(T(X)\big) = J_Y(Y)$$

luego Y también es reflexivo. Dicho de otra forma, la reflexividad de un espacio de Banach se conserva al sustituir su norma por otra equivalente.

Probemos ya con detalle la reflexividad de numerosos espacios de Banach.

- *Para $1 < p < \infty$, los espacios de Banach l_p y L_p son reflexivos.*

Para simplificar la notación escribimos $q = p^*$. Disponemos entonces de un isomorfismo isométrico $\Phi_p : l_q \to l_p^*$ dado por

$$\big(\Phi_p(y)\big)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y(n) \qquad \forall x \in l_p, \quad \forall y \in l_q$$

Entonces Φ_p^* es un isomorfismo isométrico de l_p^{**} sobre l_q^*. Por otra parte, q está en la misma situación que p, con $q^* = p$, luego Φ_q es un isomorfismo isométrico de l_p sobre l_q^*.

Así pues, $\left(\Phi_p^*\right)^{-1} \circ \Phi_q$ es un isomorfismo isométrico de l_p sobre l_p^{**}, y bastará ver que tal operador es la inyección canónica J, de l_p en su bidual. Equivalentemente, se trata de probar que $\Phi_q = \Phi_p^* \circ J$. Para ello, basta observar que, fijado $x \in l_p$, para todo $y \in l_q$ se tiene

$$\left[\Phi_p^*\big(J(x)\big)\right](y) = \left[J(x)\right]\big(\Phi_p(y)\big) = \left[\Phi_p(y)\right](x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) = \left[\Phi_q(x)\right](y)$$

luego $\Phi_p^*\big(J(x)\big) = \Phi_q(x)$, como se quería.

Para L_p usamos el isomorfismo isométrico $\Phi_p : L_q \to L_p^*$ dado por

$$\big(\Phi_p(g)\big)(f) = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt \qquad \forall f \in L_p\,,\ \forall g \in L_q$$

y hacemos literalmente el mismo razonamiento empleado para l_p. ■

Merece la pena observar lo que ocurre si usamos con c_0 el mismo razonamiento empleado con l_p para $1 < p < \infty$. Partimos del isomorfismo isométrico $\Phi : l_1 \to c_0^*$ dado por

$$\big(\Phi(y)\big)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,y(n) \qquad \forall x \in c_0\,,\ \forall y \in l_1$$

Por tanto Φ^* es un isomorfismo isométrico de l_1^* sobre c_0^{**}. Por otra parte, también tenemos un isomorfismo isométrico $\Psi : l_\infty \to l_1^*$, que viene dado formalmente por la misma expresión:

$$\big(\Psi(z)\big)(y) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)\,z(n) \qquad \forall y \in l_1\,,\ \forall z \in l_\infty$$

Por tanto $\left(\Phi^*\right)^{-1} \circ \Psi$ es un isomorfismo isométrico de l_∞ sobre c_0^{**}. Vemos que l_∞ se identifica con el bidual de c_0 como ya sabíamos, pero ahora conocemos explícitamente un isomorfismo isométrico entre ellos. Es natural preguntarse en qué se convierte la inyección canónica $J : c_0 \to c_0^{**}$ cuando la vemos como aplicación de c_0 en l_∞, y la respuesta es la que cabe esperar: se convierte en la inclusión natural $I : c_0 \to l_\infty$. Ello equivale claramente a decir que $\left(\Phi^*\right)^{-1} \circ \Psi \circ I = J$, o lo que es lo mismo, que $\Psi \circ I = \Phi^* \circ J$, pero esto es bien fácil de comprobar. Fijado $x \in c_0$ para todo $y \in l_1$ se tiene:

$$\left[\Phi^*\big(J(x)\big)\right](y) = \left[J(x)\right]\big(\Phi(y)\big) = \big(\Phi(y)\big)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)\,x(n) = \left[\Psi\big(I(x)\big)\right](y)$$

de donde $\Phi^*\big(J(x)\big) = \Psi\big(I(x)\big)$ como se quería. El hecho de que c_0 no es reflexivo se puede ahora entender de forma muy clara: J no es sobreyectiva, simplemente porque I no lo es.

Revisemos algunas propiedades que permiten distinguir unos espacios de Banach de otros. Además de la separabilidad, que hemos usado a menudo, ahora disponemos de la reflexividad, que se conserva por isomorfismos. Por ejemplo, c_0 y l_1 no son reflexivos, luego ninguno de ellos puede ser isomorfo a l_p con $1 < p < \infty$.

Otra propiedad que se conserva por isomorfismos es la separabilidad del dual. Si X es un espacio de Banach con dual separable, e Y un espacio de Banach isomorfo a X, entonces Y^* es separable, por ser isomorfo a X^*. Usando esta propiedad vemos por ejemplo que c_0 no es isomorfo a l_1, pues el dual de c_0 es separable, mientras que el dual de l_1 no lo es.

7.7. Reflexividad de subespacios y cocientes

Estudiando la estabilidad de la clase de los espacios de Banach reflexivos mediante ciertas operaciones, será posible mejorar algunos razonamientos anteriores.

Dado un subespacio cerrado M de un espacio normado X, es natural preguntar la relación que pueda existir entre la reflexividad de X, la de M y la del cociente X/M. Para contestar esta pregunta, debemos relacionar los biduales y las inyecciones canónicas de los tres espacios. A poco que se piense, en esta relación intervendrá el anulador de $M^\perp$ como subconjunto de X^*, que lógicamente denotamos por $M^{\perp\perp} = \left(M^\perp\right)^\perp = \left\{x^{**} \in X^{**} \, : \, x^{**}(x^*) = 0 \ \forall x^* \in M^\perp\right\}$. Pues bien, la relación buscada, que sólo necesitamos a nivel algebraico, es la siguiente:

- *Sea M un subespacio cerrado de un espacio normado X, denotemos por $I : M \to X$ a la inclusión natural y por $q : X \to X/M$ a la aplicación cociente. Se tiene entonces:*
  (i) *El operador $I^{**} : M^{**} \to X^{**}$ es inyectivo y su imagen es $M^{\perp\perp}$*
  (ii) *El operador $q^{**} : X^{**} \to (X/M)^{**}$ es sobreyectivo y su núcleo es $M^{\perp\perp}$.*

Usaremos también la inclusión $I_1 : M^\perp \to X^*$ y la aplicación cociente $q_1 : X^* \to X^*/M^\perp$. En (1) obtuvimos un isomorfismo isométrico $\Phi : X^*/M^\perp \to M^*$ que verifica

$$\Phi\big(q_1(x^*)\big) = x^*\big|_M = x^* \circ I = I^*(x^*) \qquad \forall x^* \in X^*$$

Por tanto, tenemos $I^* = \Phi \circ q_1$, luego $I^*(X^*) = M^*$, es decir, el operador I^* es sobreyectivo, y vemos también que $\ker I^* = \ker q_1 = M^\perp$.

A su vez, en (2) se obtuvo otro isomorfismo isométrico $\Psi : (X/M)^* \to M^\perp$, dado por

$$\Psi(w^*) = w^* \circ q = q^*(x^*) \qquad \forall w^* \in (X/M)^*$$

Tenemos por tanto $I_1 \circ \Psi = q^*$, luego q^* es inyectivo y su imagen es $M^\perp$.

Todo lo dicho es cierto para todo subespacio cerrado M de un espacio normado X, luego podemos usarlo para $M^\perp$ como subespacio cerrado de X^*. Obtenemos, por una parte, que I_1^* es sobreyectivo con núcleo $M^{\perp\perp}$, y por otra que q_1^* es inyectivo, con imagen $M^{\perp\perp}$.

Pues bien, de $I^* = \Phi \circ q_1$ deducimos que $I^{**} = q_1^* \circ \Phi^*$. Como Φ^* y q_1^* son inyectivos, vemos que I^{**} también lo es. Como además Φ^* es sobreyectivo, la imagen de I^{**} coincide con la de q_1^*, que es $M^{\perp\perp}$, como ya se ha dicho. Esto demuestra la afirmación (i).

Para (ii), de $I_1 \circ \Psi = q^*$ deducimos que $q^{**} = \Psi^* \circ I_1^*$, con lo que q^{**} es sobreyectivo, ya que tanto I_1^* como Ψ^* lo son. Como además Ψ^* es inyectivo, el núcleo de q^{**} coincide con el de I_1^*, que es $M^{\perp\perp}$ como ya sabíamos. ■

Podemos ya probar el resultado que aclara perfectamente la relación entre la reflexividad de un espacio de Banach, la de sus subespacios cerrados y la de sus cocientes.

Teorema (Reflexividad de subespacios y cocientes). *Sea X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X. Entonces X es reflexivo si, y sólo si, M y X/M son reflexivos.*

Demostración. Sean otra vez $I : M \to X$ la inclusión natural y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente. Denotando por J_X, J_M y $J_{X/M}$ a las inyecciones canónicas, sabemos que

$$I^{**} \circ J_M = J_X \circ I \qquad \text{y} \qquad q^{**} \circ J_X = J_{X/M} \circ q \tag{6}$$

En primer lugar, suponiendo que X es reflexivo, se trata de probar que M también lo es. Dado $y^{**} \in M^{**}$, tomando $x^{**} = I^{**}(y^{**})$, por el resultado anterior se tiene $x^{**} \in M^{\perp\perp} \subset X^{**}$. Como hemos supuesto que X es reflexivo, existe $x \in X$ tal que $x^{**} = J_X(x)$. Para todo $x^* \in M^{\perp}$ se tiene entonces

$$x^*(x) = \big(J_X(x)\big)(x^*) = x^{**}(x^*) = 0$$

ya que $x^{**} \in M^{\perp\perp}$. La caracterización del cierre de un subespacio obtenida en (4) nos dice que, al ser $x^*(x) = 0$ para todo $x^* \in M^{\perp}$ se tiene $x \in \overline{M} = M$, es decir, $x = I(y)$ con $y \in M$. Usando la primera igualdad de (6), vemos entonces que

$$I^{**}\big(J_M(y)\big) = J_X\big(I(y)\big) = J_X(x) = x^{**} = I^{**}(y^{**})$$

pero el resultado anterior también nos dice que el operador I^{**} es inyectivo, luego $y^{**} = J_M(y)$. Esto prueba que $M^{**} = J_M(M)$, es decir, M es reflexivo, como se quería.

Seguimos suponiendo que X es reflexivo y se trata ahora de probar que X/M también lo es. La clave para ello está en usar que, de nuevo por el resultado anterior, el operador q^{**} es sobreyectivo. Dado $w^{**} \in (X/M)^{**}$, escribimos $w^{**} = q^{**}(x^{**})$ con $x^{**} \in X^{**}$ y, por ser X reflexivo, existe $x \in X$ tal que $J_X(x) = x^{**}$. Tomando entonces $w = q(x)$, la segunda igualdad de (6) nos permite concluir que

$$J_{X/M}(w) = J_{X/M}\big(q(x)\big) = q^{**}\big(J_X(x)\big) = q^{**}(x^{**}) = w^{**}$$

y esto prueba que X/M es reflexivo.

Supongamos finalmente que M y X/M son reflexivos, para probar que X también lo es. Dado $x^{**} \in X^{**}$ tenemos $q^{**}(x^{**}) \in (X/M)^{**}$ y podemos usar que X/M es reflexivo para obtener $w \in X/M$ tal que $J_{X/M}(w) = w^{**}$. Escribiendo entonces $w = q(x)$ con $x \in X$, usamos de nuevo la segunda igualdad de (6) para obtener que

$$q^{**}\big(J_X(x)\big) = J_{X/M}\big(q(x)\big) = w^{**} = q^{**}(x^{**})$$

luego $x^{**} - J_X(x)$ pertenece al núcleo del operador q^{**}, que por el resultado anterior es $M^{\perp\perp}$. El mismo resultado nos dice que $M^{\perp\perp}$ es la imagen del operador I^{**}, luego existe $y^{**} \in Y^{**}$ tal que $I^{**}(y^{**}) = x^{**} - J_X(x)$. Por ser M reflexivo, existe $y \in M$ tal que $y^{**} = J_M(y)$. Usando la primera igualdad de (6), tenemos entonces $x^{**} - J_X(x) = I^{**}\big(J_M(y)\big) = J_X\big(I(y)\big)$, de donde obtenemos $x^{**} = J_X\big(x + I(y)\big) \in J_X(X)$, luego X es reflexivo, como se quería. ■

Deducimos de este teorema que, dados dos espacios de Banach X e Y, el producto $X \times Y$ es reflexivo si, y sólo si, lo son X e Y. Basta pensar que $M = X \times \{0\}$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$ isomorfo a X, con $(X \times Y)/M$ isomorfo a Y. De este resultado, que se podría haber probado de forma más fácil, se deduce el teorema anterior, en el caso de que M esté complementado en X, pues entonces X es isomorfo a $M \times (X/M)$. Vemos que, si M no está complementado en X, el cociente X/M suple al complemento topológico que no tenemos.

Por otra parte, el teorema anterior nos da nueva información sobre la reflexividad de ciertos espacios de Banach concretos. Como c_0 no es reflexivo, y es subespacio cerrado de l_∞, vemos que l_∞ tampoco es reflexivo. De manera más general, si Γ es un conjunto infinito, usando un subconjunto infinito y numerable de Γ, es fácil comprobar que l_∞ es isométricamente isomorfo a un subespacio de $l_\infty(\Gamma)$. Por tanto, tenemos:

- *Si Γ es un conjunto infinito, el espacio de Banach $l_\infty(\Gamma)$ no es reflexivo.*

Con respecto a los espacios de Lebesgue, recordemos que l_1 y l_∞ son isométricamente isomorfos a subespacios cerrados de L_1 y L_∞ respectivamente, luego tenemos:

- *Los espacios de Banach L_1 y L_∞ no son reflexivos.*

El teorema anterior también permite mejorar algunos resultados comentados anteriormente, sobre la imposibilidad de que ciertos espacios de Banach sean isomorfos. Concretamente, si M es un subespacio cerrado de l_p, con $1 < p < \infty$ sabemos ahora que M y l_p/M son espacios de Banach reflexivos, luego ninguno de ellos puede ser isomorfo a c_0 o a l_1.

7.8. Reflexividad del dual

Vamos a probar ahora la equivalencia entre la reflexividad de un espacio de Banach y la de su dual. Usamos un razonamiento debido al matemático francés J. Dixmier, nacido en 1924, que tiene interés en sí mismo.

Dado un espacio normado X, consideramos el operador transpuesto $J_X^* : X^{***} \to X^*$, de la inyección canónica $J_X : X \to X^{**}$. Cada $x^{***} \in X^{***}$ es un funcional lineal continuo en X^{**} e intuitivamente, $J_X^*(x^{***}) = x^{***} \circ J_X$ no es más que la restricción de x^{***} a X, cuando vemos X como subespacio de X^{**}. En sentido contrario, tenemos la inyección canónica $J_{X^*} : X^* \to X^{***}$, que intuitivamente extiende cada funcional $x^* \in X^*$, definido en X, a todo el espacio X^{**}.

Al restringir un funcional que previamente hemos extendido, debemos obtener el funcional de partida, luego se debe tener

$$J_X^* \circ J_{X^*} = I_{X^*} \tag{7}$$

donde I_{X^*} es la identidad en X^*. Lo comprobamos fácilmente, pues basta observar que, para cualesquiera $x^* \in X^*$ y $x \in X$, se tiene

$$\big[J_X^*\big(J_{X^*}(x^*)\big)\big](x) = \big[J_{X^*}(x^*)\big]\big(J_X(x)\big) = \big(J_X(x)\big)(x^*) = x^*(x)$$

Si ahora hacemos la composición en el orden opuesto y definimos $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$, es fácil comprobar que P_X es una proyección lineal en X^{***}, pues de (7) deducimos que

$$P_X \circ P_X = J_{X^*} \circ \big(J_X^* \circ J_{X^*}\big) \circ J_X^* = J_{X^*} \circ J_X^* = P_X$$

Vemos también en (7) que la imagen de J_X^* es X^*, luego $J_{X^*}(X^*)$ es la imagen de P_X. Como J_{X^*} es inyectiva, el núcleo de P_X coincide con el de J_X^*, pero para $x^{***} \in X^{***}$ se tiene

$$J_X^*(x^{***}) = 0 \iff x^{***} \circ J_X = 0 \iff x^{***}\big(J_X(x)\big) = 0 \quad \forall x \in X$$

Así pues, teniendo en cuenta que $J_X(X) \subset X^{**}$, vemos que $\ker P_X = J_X(X)^{\perp}$.

Por último es claro que P_X es continua con $\|P_X\| \leqslant \|J_X^*\| \, \|J_{X^*}\| = \|J_X\| \, \|J_{X^*}\| = 1$. De hecho será $\|P_X\| = 1$ salvo que $P_X = 0$, cosa que sólo ocurre cuando $X^* = \{0\}$, es decir, en el caso trivial $X = \{0\}$. Se dice que P_X es la **proyección de Dixmier** asociada al espacio normado X. En resumen, hemos comprobado lo siguiente:

- *Para todo espacio normado X se tiene la suma topológico-directa*

$$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus J_X(X)^{\perp} \tag{8}$$

La proyección lineal de X^{***} sobre $J_{X^*}(X^*)$, con núcleo $J_X(X)^{\perp}$, es la proyección de Dixmier $P_X = J_{X^*} \circ J_X^*$.

La relación entre la reflexividad de un espacio de Banach y la de su dual es ya inmediata.

- *Un espacio de Banach es reflexivo si, y sólo si, lo es su dual.*

Si X es un espacio de Banach reflexivo, tenemos $J_X(X) = X^{**}$, luego $J_X(X)^{\perp} = \{0\}$, y vemos en (8) que $X^{***} = J_{X^*}(X^*)$, es decir, X^* es reflexivo.

Recíprocamente, supongamos que X es un espacio de Banach tal que X^* es reflexivo, es decir, con $X^{***} = J_{X^*}(X^*)$. Entonces (8) nos dice que $J_X(X)^{\perp} = \{0\}$ y de la igualdad (4), aplicada a $J_X(X)$ como subespacio de X^{**}, deducimos que $J_X(X)$ es denso en X^{**}. Ahora bien, como X es completo, $J_X(X)$ también lo es, luego $J_X(X)$ es cerrado en X^{**}. Concluimos por tanto que $J_X(X) = X^{**}$, es decir, X es reflexivo. ■

A la vista del resultado anterior, pensemos como pueden ser los sucesivos duales de un espacio de Banach X. Denotando por $X^{(n)}$ al n-ésimo dual de X, cuando X es reflexivo esta sucesión sólo tiene dos términos significativos, ya que $X^{(n)}$ se identifica con X o con X^* según que n sea par o impar. Por el contrario, cuando X no es reflexivo, tenemos dos sucesiones estrictamente crecientes de espacios de Banach, pues identificando cada espacio con la imagen de su inyección canónica, tenemos $X \subset X^{(2)} \subset X^{(4)} \ldots$, y también $X^* \subset X^{(3)} \subset X^{(5)} \ldots$, siendo todas las inclusiones estrictas.

Comentemos finalmente que, para un espacio de Banach no reflexivo X, la proyección de Dixmier sigue teniendo interés, lo que se entiende mejor si identificamos X y X^* con sus imágenes por las inyecciones canónicas respectivas. Entonces podemos escribir $X^{\perp} = J_X(X)^{\perp}$ y la igualdad (8) toma una forma más intuitiva:

$$X^{***} = X^* \circ X^{\perp}$$

Tomando como referencia el espacio de Banach $Y = X^*$, vemos entonces que, por el hecho de ser un espacio dual, Y está complementado en su bidual $Y^{**} = X^{***}$. Por ejemplo, l_1 puede verse como subespacio complementado de l_∞^*.

Veamos en cambio un ejemplo de espacio de Banach que no está complementado en su bidual. Recordemos que, cuando c_0^{**} se identifica con l_∞, la inyección canónica $J : c_0 \to c_0^{**}$ se convierte en la inclusión natural $I : c_0 \to l_\infty$. Por el teorema de Phillips, sabemos que $I(c_0)$ no está complementado en l_∞, es decir, que $J(c_0)$ no está complementado en c_0^{**}. Es fácil ver que, si un espacio de Banach Y está complementado en Y^{**}, lo mismo le ocurre a todo espacio de Banach isomorfo a Y. Concluimos que no existe ningún espacio de Banach X, tal que X^* sea isomorfo a c_0.

7.9. Mejor aproximación en espacios reflexivos

Vamos a obtener fácilmente una propiedad clave de los espacios de Banach reflexivos. Como motivación observamos que el resultado inicial de este tema tiene una consecuencia inmediata para estos espacios:

- *Si X es un espacio de Banach reflexivo y $x^* \in X^*$, entonces la función $|x^*|$ tiene máximo en la bola unidad de X.*

Sabemos que existe $x_0^{**} \in X^{**}$ con $\|x_0^{**}\| = 1$ y $x_0^{**}(x^*) = \|x^*\|$. Pero por ser X reflexivo, tenemos $x_0^{**} = J(x_0)$ donde $x_0 \in X$ y $J : X \to X^{**}$ es la inyección canónica. Puesto que J es isométrica, tenemos $\|x_0\| = 1$, mientras que $x^*(x_0) = x_0^{**}(x^*) = \|x^*\|$. Está claro por tanto que $x^*(x_0) = |x^*(x_0)|$ es el máximo de la función $|x^*|$ en la bola unidad de X. ■

Recordemos que, si X es un espacio normado y $x^* \in X^*$, la función $|x^*|$ tiene máximo en la bola unidad de X si, y sólo si, el núcleo de x^* es proximinal en X. El resultado anterior nos dice por tanto que, en un espacio de Banach reflexivo, todos los hiperplanos cerrados son proximinales. Pero en realidad esto es un caso muy particular del siguiente resultado:

- *En un espacio de Banach reflexivo, todos los subespacios cerrados son proximinales.*

Sea M es un subespacio de un espacio normado X, y $J : X \to X^{**}$ la inyección canónica. Para cualesquiera $y \in M$ y $x^* \in M^\perp$, se tiene $\big(J(y)\big)(x^*) = x^*(y) = 0$, luego $J(M) \subset M^{\perp\perp}$. Cuando X es un espacio de Banach reflexivo y M es cerrado en X, tenemos la otra inclusión, y por tanto la igualdad. En efecto, dado $x^{**} \in M^{\perp\perp}$, escribimos $x^{**} = J(x)$ con $x \in X$. Para todo $x^* \in M^\perp$ se tiene entonces que $x^*(x) = \big(J(x)\big)(x^*) = x^{**}(x^*) = 0$. Por ser M cerrado, en vista de (4) tenemos $x \in M$, luego $x^{**} \in J(M)$ como se quería.

Puesto que J es biyectiva e isométrica, decir que M es proximinal en X, equivale a decir que $J(M) = M^{\perp\perp}$ es proximinal en $J(X) = X^{**}$, pero esto es consecuencia del teorema de extensión Hahn-Banach, simplemente porque $M^{\perp\perp}$ es el anulador de un subespacio de un espacio normado. ■

Tema 8

Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach

Abordamos ahora la interpretación geométrica del teorema de Hahn-Banach, que consistirá en encontrar condiciones suficientes para separar dos subconjuntos de un espacio vectorial. Empezaremos aclarando en qué consiste esta *separación* y qué tipo de resultados cabe esperar. Obtendremos un teorema general de separación de conjuntos convexos en espacios vectoriales, equivalente a la versión analítica del teorema de Hahn-Banach, del que deduciremos una serie de consecuencias interesantes para espacios normados.

8.1. Motivación

En términos muy genéricos, podríamos decir que el estudio de la dualidad pretende obtener información sobre un espacio a partir de su dual. Hemos visto ya algunos casos en los que esto es posible. Por ejemplo, dado un espacio normado X, y puntos $x,y \in X$ con $x \neq y$, sabemos que existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x-y) = \|x-y\|$, luego en particular, $\operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$. Se dice que el funcional f "separa" y de x, en el sentido de que distingue dichos puntos, nos hace ver que son distintos. Como esto es válido para cualesquiera $x,y \in X$ con $x \neq y$, aunque el funcional $f \in X^*$ depende de dichos puntos, decimos que X^* separa los puntos de X.

Para poner otro ejemplo, igualmente conocido pero más relevante, dados un subespacio cerrado M del espacio normado X, y un punto $x \in X \setminus M$, existe $f \in M^\perp$ con $\|f\| = 1$, que verifica $f(x) = d(x,M) \in \mathbb{R}^+$. En particular, $\operatorname{Re} f(y) < \operatorname{Re} f(x)$ para todo $y \in M$. De nuevo diremos que f "separa" el subespacio M del punto x, pues pone de manifiesto que $x \notin M$.

La idea de separación que vamos a estudiar generaliza en varios sentidos lo que ocurre en los ejemplos anteriores. Por una parte, trabajamos en un espacio vectorial X, en el que no usamos de entrada ninguna norma. Por otra, en vez de puntos o subespacios, utilizamos subconjuntos convexos de X. Además, sólo exigimos desigualdades no estrictas, que se manejan con más comodidad, sin excluir que, en casos concretos, nos interese obtener desigualdades estrictas, que describan tipos de separación más eficaces.

Sean pues A y B subconjuntos no vacíos y convexos de un espacio vectorial X. Dado un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$, decimos que f **separa** A de B, cuando

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall\, a \in A\,,\ \ \forall\, b \in B \tag{1}$$

o equivalentemente,

$$\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B) \tag{2}$$

En tal caso, tomando $\alpha \in \mathbb{R}$ de forma que $\sup f(A) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{ínf} f(B)$, tenemos claramente

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall\, a \in A\,,\ \ \forall\, b \in B \tag{3}$$

Recíprocamente, si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ que verifica (3), deducimos obviamente (1) y (2). Conviene hacer varias aclaraciones acerca de esta definición.

En primer lugar, los conjuntos A y B no están en situación simétrica porque, en todas las desigualdades anteriores, hemos elegido situar A en el primer miembro y B en el segundo. Sin embargo, si el funcional f separa A de B, está claro que $-f$ separa B de A. Por tanto, a la hora de *separar* los conjuntos A y B, es decir, de encontrar un funcional que separe uno del otro, los papeles de ambos conjuntos sí son simétricos.

Por otra parte, si X es un espacio vectorial complejo, recordamos que las partes reales de los funcionales lineales en X no son, ni más ni menos que, los funcionales lineales en el espacio vectorial real $X_{\mathbb{R}}$ subyacente a X. Un funcional lineal $f \neq 0$ separa A de B en el espacio complejo X si, y sólo si, el funcional lineal $\operatorname{Re} f \neq 0$ separa A de B en el espacio real $X_{\mathbb{R}}$. Así pues, el estudio de todas las cuestiones referentes a la separación de conjuntos convexos se puede siempre reducir al caso real.

Cuando los conjuntos A y B son disjuntos, un funcional lineal $f \neq 0$ que separe A de B puede no ponerlo de manifiesto, porque (1) no implica que los conjuntos $f(A)$ y $f(B)$ tengan que ser disjuntos. Esto se debe a que hemos preferido usar en (1) desigualdades no estrictas, para tener un tipo de separación más general. De esta forma, en ocasiones podremos separar conjuntos que no llegan a ser disjuntos, lo que puede ser útil, como veremos más adelante. A este respecto, conviene resaltar que la condición $f \neq 0$, exigida en la definición anterior, es obligada para evitar trivialidades. Si f es idénticamente nulo, se verifica la condición (1), cualesquiera que sean los conjuntos A y B, lo que obviamente carece de interés.

Para entender geométricamente la separación de dos conjuntos convexos, si $f \neq 0$ es un funcional lineal en X y $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos el conjunto $H = \{x \in X \,:\, \operatorname{Re} f(x) = \alpha\}$, que es un *hiperplano afín* en $X_{\mathbb{R}}$, pues se obtiene trasladando el núcleo de un funcional lineal. Da lugar a los *semiespacios* $H^- = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha\}$ y $H^+ = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \geqslant \alpha\}$. Dados dos conjuntos convexos $A, B \subset X$, la condición (3) nos dice que f separa A de B si, y sólo si, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ verificando que $A \subset H^-$ y $B \subset H^+$. Esto significa que el conjunto A está a un lado del hiperplano H mientras que B está al otro, y en este sentido podemos decir que el hiperplano H *separa* los conjuntos A y B. Ahora la situación sí es simétrica, pues al sustituir f por $-f$ y α por $-\alpha$, el hiperplano H no varía, pero los semiespacios H^- y H^+ se intercambian.

Si A y B son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, de un espacio vectorial X, la intuición geométrica sugiere que debe ser posible separar A y B, pero en general no es así, como vamos a comprobar.

Ejemplo: *Dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, de un espacio vectorial, que no se pueden separar.* Sea X el espacio vectorial real de todas las sucesiones de soporte finito, en el que tenemos una base algebraica formada por los vectores unidad $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$. Consideremos el conjunto $A \subset X$ formado por las sucesiones cuyo último término no nulo es positivo, es decir,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k : n \in \mathbb{N}, \ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}, \ \alpha_n > 0 \right\}$$

Dados $u, v \in A$ y $t \in]0,1[$, veamos que $w \in A$, donde $w = (1-t)u + tv$. Para ello, escribimos $u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$ y $v = \sum_{k=1}^{m} \beta_k e_k$, con $n, m \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$, siendo $\alpha_n > 0$ y $\beta_m > 0$. Si $m < n$, se tiene $w(n) = (1-t)u(n) + tv(n) = (1-t)\alpha_n > 0$, mientras que $w(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k > n$, luego $w \in A$. Análogo razonamiento prueba que $w \in A$ cuando $n < m$. Finalmente, si $n = m$, se tiene también $w(n) = (1-t)\alpha_n + t\beta_n > 0$ y $w(k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ con $k > n$. En cualquier caso $w \in A$, luego A es convexo.

Observamos ahora que, si $f \neq 0$ es un funcional lineal en X, se tiene $f(A) = \mathbb{R}$. En efecto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(e_n) = \lambda \neq 0$ y supondremos de momento que $\lambda > 0$. Para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$ tenemos $\rho e_n \in A$, luego $\rho\lambda \in f(A)$, y esto prueba que el conjunto $f(A)$ no está mayorado. También para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$, tenemos $e_{n+1} - \rho e_n \in A$, luego $f(e_{n+1}) - \rho\lambda \in f(A)$, y esto prueba que $f(A)$ no está minorado. Como A es convexo, vemos que $f(A)$ es un intervalo, que no está mayorado ni minorado, luego $f(A) = \mathbb{R}$. En el caso $\lambda < 0$, el razonamiento anterior se aplica al funcional $-f$, obteniendo que $-f(A) = \mathbb{R}$, luego también $f(A) = \mathbb{R}$.

Queda claro que A no se puede separar de ningún otro conjunto convexo, pues para ello algún funcional lineal no nulo tendría que estar mayorado o minorado en A. Por ejemplo, si tomamos $B = \{0\}$, vemos que A y B son subconjuntos convexos de X, no vacíos y disjuntos, pero no existe ningún funcional lineal no nulo en X que separe uno del otro. ■

Resaltemos que el espacio vectorial X del ejemplo anterior tiene dimensión infinita. Más adelante veremos que, en un espacio vectorial de dimensión finita, no es posible encontrar un ejemplo como el anterior. Para probarlo usaremos un teorema general de separación, mucho más importante. De hecho, la versión analítica del teorema de Hahn-Banach dará una condición suficiente para separar dos subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, de un espacio vectorial cualquiera, con una hipótesis adicional muy poco restrictiva sobre uno de ellos.

8.2. Separación en espacios vectoriales

Para entender mejor la hipótesis que nos llevará al principal resultado sobre separación de conjuntos convexos, introducimos el siguiente concepto. Se dice que un subconjunto U de un espacio vectorial X es **absorbente** cuando $X = \mathbb{R}^+ U$, es decir, cuando para todo $x \in X$, puede encontrarse $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in \rho U$. Es claro que entonces $0 \in U$, pero además U debe contener otro punto en cada semirrecta que parta del origen, luego podemos decir que 0 está enteramente "rodeado" por puntos de U. La bola unidad de un espacio normado, y de hecho cualquier bola centrada en el origen con radio estrictamente positivo, es un claro ejemplo de conjunto absorbente.

Si U es un subconjunto convexo y absorbente de un espacio vectorial X, para cada $x \in X$ tenemos un $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $x/\rho \in U$, con lo que el segmento de extremos 0 y x/ρ estará contenido en U, luego U contiene, no sólo un punto, sino todo un segmento no trivial en cada una de las direcciones del espacio X, si bien la longitud de dicho segmento puede depender de la dirección. Esto nos lleva a pensar que 0 es una especie de "punto interior" de U, en un sentido puramente algebraico. La misma idea se aplica, salvo una traslación, a cualquier punto del espacio: si A es un conjunto convexo y $a_0 \in A$, el hecho de que $A - a_0$ sea absorbente significa que a_0 es un punto interior de A, en el mismo sentido algebraico.

Podemos ya enunciar el principal resultado sobre separación de conjuntos convexos, que puede entenderse como la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach, pues veremos que es equivalente a la versión analítica de dicho teorema.

Teorema general de separación. *Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos, de un espacio vectorial X. Supongamos que existe un punto $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces existe un funcional lineal no nulo f en X que separa A de B, es decir, que verifica:*

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Demostración. Basta considerar el caso real, pues en el caso complejo se usa el espacio real subyacente a X, como ya hemos comentado.

Fijado $b_0 \in B$, consideramos el punto $x_0 \in X$ y el conjunto $U \subset X$ dados por

$$x_0 = b_0 - a_0 \qquad \text{y} \qquad U = A - B + x_0 = \big(A - a_0\big) - \big(B - b_0\big)$$

y como se verá al final, para separar A de B bastará separar U del punto x_0.

Por ser A y B convexos, vemos fácilmente que U también lo es. Para $u_1, u_2 \in U$, tenemos

$$u_1 = a_1 - b_1 + x_0 \qquad \text{y} \qquad u_2 = a_2 - b_2 + x_0$$

donde $a_1, a_2 \in A$ y $b_1, b_2 \in B$. Para todo $t \in [0,1]$ tenemos entonces

$$a = (1-t)\,a_1 + t\,a_2 \in A \qquad \text{y} \qquad b = (1-t)\,b_1 + t\,b_2 \in B$$

de donde deducimos claramente que $(1-t)\,u_1 + t\,u_2 = a - b + x_0 \in U$.

Como $A - a_0 \subset U$ y, por hipótesis, $A - a_0$ es absorbente, deducimos que U también lo es. Por último, de $A \cap B = \emptyset$ se deduce que $x_0 \notin U$, pues en otro caso, existirían $a \in A$ y $b \in B$ tales que $x_0 = a - b + x_0$, de donde $a = b \in A \cap B$, una contradicción.

Para entender mejor el resto de la demostración, imaginemos que U fuese la bola unidad de un espacio normado X. Tomando entonces $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\| > 1$, es claro que f separa U de x_0. Además, la norma de X se calcula fácilmente a partir de U, puesto que, dados $x \in X$ y $\rho \in \mathbb{R}^+$, se tiene $x \in \rho U$ cuando $\rho > \|x\|$ mientras que $x \notin \rho U$ para $\rho < \|x\|$, luego $\|x\| = \inf \big\{ \rho \in \mathbb{R}^+ : x \in \rho U \big\}$. En nuestro caso mucho más general, el segundo miembro de esta igualdad sigue teniendo sentido para todo $x \in X$, y permite definir una aplicación de X en $\mathbb{R}_0^+$, que ya no tiene por qué ser una norma en X, pero sí será un funcional sublineal, que nos permita aplicar la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

Así pues, usando que U es absorbente, definimos $\varphi : X \to \mathbb{R}_0^+$, escribiendo

$$\varphi(x) = \inf\{\rho \in \mathbb{R}^+ \,:\, x \in \rho U\} \qquad \forall x \in X$$

y vamos a comprobar que φ es un funcional sublineal en X.

Para $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, se tiene $\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : rx \in \lambda U\} = \{r\rho : \rho \in \mathbb{R}^+,\ x \in \rho U\}$, de donde deducimos claramente que

$$\varphi(rx) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}^+ : rx \in \lambda U\} = r \inf\{\rho \in \mathbb{R}^+ : x \in \rho U\} = r\,\varphi(x)$$

y esto prueba que φ es homogéneo por homotecias.

Para la desigualdad triangular, fijemos $x, y \in X$ y $\rho, \lambda \in \mathbb{R}^+$ tales que $x \in \rho U$ e $y \in \lambda U$. Entonces, por ser U convexo, tenemos

$$x + y \in \rho U + \lambda U = (\rho + \lambda)\left(\frac{\rho}{\rho+\lambda}U + \frac{\lambda}{\rho+\lambda}U\right) \subset (\rho + \lambda)U$$

de donde deducimos que $\varphi(x+y) \leqslant \rho + \lambda$. Como esta desigualdad es válida para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tal que $y \in \lambda U$, obtenemos que $\varphi(x+y) \leqslant \rho + \varphi(y)$, pero a su vez esta desigualdad es válida para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $x \in \rho U$, luego $\varphi(x+y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y)$. Por tanto, φ es un funcional sublineal en X, como queríamos comprobar.

Para $u \in U$ se tiene obviamente que $\varphi(u) \leqslant 1$. En sentido opuesto, vamos a comprobar que, para $x \in X$ con $\varphi(x) < 1$, se tiene $x \in U$. En efecto, existe $\rho \in]0, 1[$ tal que $x \in \rho U$, pero por ser U convexo con $0 \in U$, se tiene $\rho U \subset \rho U + (1-\rho)U \subset U$, luego $x \in U$ como se quería. Puesto que $x_0 \notin U$, deducimos que se ha de tener $\varphi(x_0) \geqslant 1$.

Razonamos ahora con φ como hicimos en otro momento con una norma. Consideramos el subespacio $M = \mathbb{R}x_0 \subset X$, en el que definimos $g(\lambda x_0) = \lambda\varphi(x_0)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, obteniendo un funcional lineal $g : M \to \mathbb{R}$. Para $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tenemos $g(\lambda x_0) = \varphi(\lambda x_0)$, puesto que φ es homogéneo por homotecias. Pero si $\lambda \in \mathbb{R}_0^-$, tenemos claramente $g(\lambda x_0) \leqslant 0 \leqslant \varphi(\lambda x_0)$, ya que φ no toma valores negativos. Por tanto, g está dominado por φ, y la versión analítica del teorema de Hahn-Banach nos da un funcional lineal $f : X \to \mathbb{R}$ que verifica

$$f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \forall x \in X \qquad \text{y} \qquad f(\lambda x_0) = g(\lambda x_0) = \lambda\varphi(x_0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En particular, podemos tomar $x = u \in U$ y $\lambda = 1$ para obtener

$$f(u) \leqslant \varphi(u) \leqslant 1 \leqslant \varphi(x_0) = f(x_0)$$

Por tanto $f \neq 0$ y, dados $a \in A$ y $b \in B$, tomamos $u = a - b + x_0 \in U$ para obtener que

$$f(a) - f(b) + f(x_0) = f(u) \leqslant f(x_0)$$

es decir, $f(a) \leqslant f(b)$. Esto prueba que f separa A de B, concluyendo la demostración. ■

8.3. Equivalencia de la versión geométrica con la analítica

Ha quedado claro que el teorema de separación recién demostrado es consecuencia directa de la versión analítica del teorema de Hahn-Banach. Recíprocamente, del teorema de separación vamos a obtener un resultado formalmente más general que dicha versión analítica, con lo que al final tendremos tres enunciados equivalentes.

Teorema. *Sea X un espacio vectorial, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ una función convexa, M un subespacio de X y g un funcional lineal en M que está dominado por φ, es decir,*

$$\operatorname{Re} g(y) \leqslant \varphi(y) \qquad \forall y \in M$$

Entonces existe un funcional lineal f en X que extiende a g y sigue dominado por φ, es decir,

$$f(y) = g(y) \quad \forall y \in M \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re} f(x) \leqslant \varphi(x) \quad \forall x \in X$$

Demostración. Basta considerar el caso real, pues en el caso complejo, φ también es una función convexa en $X_{\mathbb{R}}$, con lo que basta usar los espacios reales $X_{\mathbb{R}}$ y $M_{\mathbb{R}}$, exactamente igual que hicimos en su momento, para probar la versión analítica del teorema de Hahn-Banach.

En el espacio vectorial producto $X \times \mathbb{R}$ consideramos entonces los conjuntos

$$A = \big\{ (x,t) \in X \times \mathbb{R} \,:\, \varphi(x) < t \big\} \qquad \text{y} \qquad B = \big\{ \big(y, g(y)\big) \,:\, y \in M \big\}$$

a los que pretendemos aplicar el teorema general de separación. Para $x \in X$ arbitrario, basta tomar $t \in \mathbb{R}$ con $t > \varphi(x)$, para tener $(x,t) \in A$, luego $A \neq \emptyset$, y es aún más obvio que $B \neq \emptyset$.

Para cualesquiera $(x_1,t_1), (x_2,t_2) \in A$ y $r \in [0,1]$, la convexidad de φ nos dice que

$$\varphi\big((1-r)x_1 + rx_2\big) \leqslant (1-r)\varphi\big(x_1\big) + r\varphi\big(x_2\big) < (1-r)t_1 + rt_2$$

luego $(1-r)(x_1,t_1) + r(x_2,t_2) \in A$ y esto prueba que A es convexo. Por otra parte, como g es lineal, vemos que B es un subespacio de $X \times \mathbb{R}$ y, en particular, un conjunto convexo.

Para todo $y \in M$ tenemos por hipótesis que $g(y) \leqslant \varphi(y)$, luego $\big(y, g(y)\big) \notin A$ y esto prueba que $A \cap B = \emptyset$. Por tanto, A y B son subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos, de $X \times \mathbb{R}$.

Para un punto arbitrario $a_0 \in A$, probaremos ahora que $A - a_0$ es un conjunto absorbente. Dado $w \in X \times \mathbb{R}$, encontraremos $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $a_0 + \rho w \in A$, con lo que $w \in (1/\rho)(A - a_0)$, y por tanto $w \in \mathbb{R}^+(A - a_0)$. Si $a_0 = (x_0, t_0)$ y $w = (x,t)$ con $x_0, x \in X$ y $t_0, t \in \mathbb{R}$, se trata de encontrar $\rho \in \mathbb{R}^+$ que verifique

$$\big(x_0 + \rho x,\, t_0 + \rho t\big) \in A, \qquad \text{es decir,} \qquad \varphi\big(x_0 + \rho x\big) < t_0 + \rho t \tag{4}$$

Ahora bien, para todo $\rho \in]\,0\,,\,1\,[$, usando de nuevo la convexidad de φ, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi\big(x_0 + \rho x\big) - t_0 - \rho t &= \varphi\big((1-\rho)x_0 + \rho\,(x_0+x)\big) - t_0 - \rho t \\
&\leqslant (1-\rho)\,\varphi(x_0) + \rho\,\varphi(x_0+x) - t_0 - \rho t \\
&= \varphi(x_0) - t_0 + \rho\,\big(\varphi(x_0+x) - \varphi(x_0) - t\big)
\end{aligned}$$

Como $a_0 \in A$, tenemos $\varphi(x_0) - t_0 < 0$, y la desigualdad anterior muestra claramente que podemos elegir $\rho \in]0,1[$ de forma que se cumpla (4).

Comprobadas todas sus hipótesis, el teorema general de separación nos da un funcional lineal no nulo $F : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que separa A de B. Definimos entonces

$$h(x) = F(x,0) \quad \forall x \in X \qquad \text{y} \qquad \lambda = F(0,-1)$$

Obteniendo un funcional lineal $h : X \to \mathbb{R}$, y un $\lambda \in \mathbb{R}$, tales que

$$F(x,t) = h(x) - \lambda t \qquad \forall (x,t) \in X \times \mathbb{R}$$

Como $F \neq 0$, se ha de tener $h \neq 0$ o $\lambda \neq 0$ y, como F separa A de B, tendremos

$$h(x) - \lambda t \leqslant h(y) - \lambda g(y) \qquad \forall (x,t) \in A, \ \forall y \in M \tag{5}$$

Tomando $x = y = 0$, y $t \in \mathbb{R}^+$ con $t > \varphi(0)$, obtenemos que $-\lambda t \leqslant 0$, de donde $\lambda \geqslant 0$, pero veamos que de hecho se tiene $\lambda > 0$. Si fuese $\lambda = 0$, usando que $h \neq 0$ tenemos $x \in X$ tal que $h(x) > 0$, y tomamos $t \in \mathbb{R}$ con $t > \varphi(x)$ para tener $(x,t) \in A$. De (5) con $y = 0$ deducimos entonces que $h(x) \leqslant 0$, una contradicción.

Por otra parte, si h_0 es la restricción de h a M, usamos (5) con $(x,t) \in A$ fijado, obteniendo que el funcional lineal $h_0 - \lambda g$ está minorado en M, lo que sólo es posible si $h_0 - \lambda g = 0$. Tomando $f = h/\lambda$, tenemos un funcional lineal en X cuya restricción a M es $h_0/\lambda = g$, es decir, f extiende a g.

Sólo queda ver que f está dominado por φ. Para ello, fijado $x \in X$, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $\big(x, \varphi(x) + \varepsilon\big) \in A$. Usando (5) con $y = 0$, por ser $\lambda > 0$, obtenemos que

$$h(x) \leqslant \lambda(\varphi(x) + \varepsilon) \qquad \text{de donde} \qquad f(x) \leqslant \varphi(x) + \varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ era arbitrario, tenemos $f(x) \leqslant \varphi(x)$, como se quería. ■

La versión analítica del teorema de Hahn-Banach es caso particular del resultado anterior, porque todo funcional sublineal φ en un espacio vectorial X es una función convexa. En efecto, basta observar que, para cualesquiera $x, y \in X$ y $t \in]0,1[$ se tiene claramente

$$\varphi\big((1-t)x + ty\big) \leqslant \varphi\big((1-t)x\big) + \varphi\big(ty\big) = (1-t)\varphi\big(x\big) + t\varphi\big(y\big)$$

8.4. Separación en espacios normados

El teorema general de separación de conjuntos convexos se usa con especial comodidad cuando trabajamos en un espacio normado X. Entonces, todo entorno de cero en X contiene una bola centrada en cero con radio estrictamente positivo, luego es un conjunto absorbente. Denotando por $\operatorname{int}(A)$ al interior de un conjunto $A \subset X$, para $a_0 \in \operatorname{int}(A)$ se tiene que $A - a_0$ es entorno de cero, luego es un conjunto absorbente. Por tanto, la hipótesis que se requiere para poder aplicar el teorema de separación, se consigue fácilmente suponiendo que uno de los conjuntos convexos que queremos separar tiene interior no vacío. Por otra parte, vamos a comprobar dos propiedades básicas de los conjuntos convexos en espacios normados, que permitirán mejorar el teorema de separación en varios aspectos.

- *Sea A un subconjunto convexo de un espacio normado X, y supongamos que A tiene interior no vacío. Entonces $\operatorname{int}(A)$ es convexo y verifica que $A \subset \overline{\operatorname{int}(A)}$.*

Si $x_1, x_2 \in \operatorname{int}(A)$, existen $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ con $(x_1 + r_1 U) \cup (x_2 + r_2 U) \subset A$ donde U es la bola abierta unidad de X. Si $x = (1-t)x_1 + t x_2$ con $t \in [0,1]$, tomando $r = (1-t) r_1 + t r_2 \in \mathbb{R}^+$, tenemos claramente que $rU \subset (1-t) r_1 U + t r_2 U$, y deducimos que

$$x + rU \subset (1-t)(x_1 + r_1 U) + t(x_2 + r_2 U) \subset (1-t)A + tA \subset A$$

donde hemos usado que A es convexo. Esto prueba que $x \in \operatorname{int}(A)$, luego $\operatorname{int}(A)$ es convexo.

Para $a \in A$ debemos probar ahora que $a \in \overline{\operatorname{int}(A)}$. Para ello fijamos $x \in \operatorname{int}(A)$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $x + rU \subset A$. Para todo $t \in]0,1[$, se tiene entonces

$$(1-t)x + ta + (1-t)rU = (1-t)(x + rU) + ta \subset (1-t)A + tA \subset A$$

Como $(1-t)r \in \mathbb{R}^+$, vemos que $(1-t)x + ta \in \operatorname{int}(A)$ para todo $t \in]0,1[$. Basta ahora observar que $a = \lim\limits_{t \nearrow 1} \big((1-t)x + ta\big)$, para concluir que $a \in \overline{\operatorname{int}(A)}$, como se quería. ■

Pasamos ya a probar la versión del teorema de separación más adecuada para trabajar en espacios normados.

Teorema de separación en espacios normados. *Sean A y B subconjuntos convexos de un espacio normado X, verificando que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ y $B \neq \emptyset$, pero $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$. Entonces existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que:*

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B \tag{6}$$

De hecho se tiene que $\operatorname{Re} f(x) < \alpha$ para todo $x \in \operatorname{int}(A)$.

Demostración. Como viene ocurriendo, basta considerar el caso real, pero en este caso conviene aclarar una cuestión. Si X es un espacio normado complejo y f un funcional lineal en X, entonces f es continuo si, y sólo si, lo es su parte real, ya que $\operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Re} f(-ix)$ para todo $x \in X$. Por tanto, los elementos de $(X_{\mathbb{R}})^*$ coinciden con las partes reales de los elementos de X^* y ello hace que, una vez demostrado el teorema para $X_{\mathbb{R}}$, se obtenga claramente para X.

Por el resultado anterior sabemos que $\operatorname{int}(A)$ es convexo, luego $\operatorname{int}(A)$ y B son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, del espacio vectorial X. Además, para todo $x \in \operatorname{int}(A)$ se tiene que $A - x$ es entorno de cero en X, luego es absorbente. Esto nos permite usar el teorema general de separación, para obtener un funcional lineal no nulo en X, y un $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$f(x) \leqslant \alpha \leqslant f(b) \qquad \forall x \in \operatorname{int}(A), \ \forall b \in B \tag{7}$$

Como $f \neq 0$, podemos fijar $u \in X$, con $\|u\| = 1$ y $f(u) > 0$. Para $x \in \operatorname{int}(A)$ podemos entonces tomar $\varepsilon > 0$ de forma que $x + \varepsilon u \in \operatorname{int}(A)$, con lo que de (7) deducimos que

$$f(x) < f(x) + \varepsilon f(u) = f\big(x + \varepsilon u\big) \leqslant \alpha$$

y hemos probado así la última afirmación del enunciado.

Observamos ahora que el hiperplano $H = \{x \in X : f(x) = \alpha\}$ verifica que $H \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset$. Como $\operatorname{int}(A)$ es un abierto no vacío de X, vemos que H no es denso en X y, mediante una traslación, deducimos que $\ker f$ tampoco lo es. Por tanto $\ker f$ es cerrado, es decir, $f \in X^*$.

Finalmente, como $f \in X^*$, el semiespacio $S = \{x \in X : f(x) \leqslant \alpha\}$ es cerrado. En (7) tenemos que $\operatorname{int}(A) \subset S$, con lo que podemos usar de nuevo el resultado anterior, para concluir que $A \subset \overline{\operatorname{int}(A)} \subset S$. Esto significa que $f(a) \leqslant \alpha$ para todo $a \in A$, y hemos obtenido (6), concluyendo la demostración. ■

Comparando este resultado con el teorema general de separación, observamos que hemos fortalecido la hipótesis sobre A, exigiendo que $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$. A cambio hemos conseguido algo importante: separar A y B mediante un funcional lineal *continuo*. Además, hemos debilitado la hipótesis de que A y B sean disjuntos, exigiendo solamente $\operatorname{int}(A) \cap B = \emptyset$, e incluso podemos decir que hemos separado "estrictamente" $\operatorname{int}(A)$ y B, ya que los conjuntos $f\big(\operatorname{int}(A)\big)$ y $f(B)$ son disjuntos.

8.5. Funcionales y puntos de soporte

Vamos a destacar un caso particular del último teorema, cuya interpretación geométrica es especialmente interesante. Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X con interior no vacío. Dado un punto x_0 en la frontera de A, podemos aplicar el teorema anterior tomando $B = \{x_0\}$, y obtenemos $f \in X^* \setminus \{0\}$ que verifica:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0) \quad \forall a \in A. \tag{8}$$

Vemos que la función $\operatorname{Re} f$ tiene máximo en el conjunto A, que se alcanza en el punto x_0.

La interpretación geométrica de (8), que como siempre debe hacerse en el espacio real subyacente a X, es muy clara: el hiperplano afín $\big\{x \in X : \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} f(x_0)\big\}$ pasa por el punto x_0 y deja el conjunto A a un lado. Intuitivamente, es muy natural pensar que dicho hiperplano "soporta" al conjunto A en el punto x_0. Por ello, dado un subconjunto no vacío A de un espacio vectorial X, si un funcional lineal no nulo $f : X \to \mathbb{K}$, y un punto $x_0 \in A$, verifican la desigualdad (8), decimos que f es un **funcional de soporte** del conjunto A en el punto x_0, y también que x_0 es un **punto de soporte** de A. Con esta nomenclatura, el resultado obtenido es el siguiente:

- **Abundancia de puntos de soporte.** *Si X es un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío, todo punto de la frontera de A es un punto de soporte de A.*

Un caso particular del corolario anterior era ya conocido. Si A es la bola unidad de X y tomamos $x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$, sabíamos que existe $f \in X^*$ con $\|f\| = 1$ y $f(x_0) = \|x_0\| = 1$. Está claro entonces que f es un funcional de soporte de la bola unidad en el punto x_0. Así pues, sabíamos que todos los puntos de la esfera unidad de un espacio normado son puntos de soporte de la bola unidad. Pero ahora tenemos el mismo resultado, para cualquier conjunto convexo y cerrado con interior no vacío.

8.6. Separación fuerte

La abundancia de puntos de soporte se ha conseguido usando el teorema de separación para dos conjuntos convexos que no llegaban a ser disjuntos. Analizamos ahora la situación opuesta, en la que dichos conjuntos, no sólo son disjuntos, sino que están a distancia positiva. Entonces podremos "fortalecer" la separación, en el sentido que pasamos a explicar.

Si A y B son subconjuntos no vacíos y convexos de un espacio vectorial X, decimos que un funcional lineal $f : X \to \mathbb{K}$ **separa fuertemente** A de B, cuando existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B \tag{9}$$

Nótese que $f \neq 0$. Veamos, en el espacio real subyacente a X, el significado geométrico de estas desigualdades. Escribiendo $S_\alpha = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \leqslant \alpha\}$ y $T_\beta = \{x \in X : \operatorname{Re} f(x) \geqslant \beta\}$, vemos que S_α y T_β son semiespacios disjuntos, tales que $A \subset S_\alpha$ y $B \subset T_\beta$. No sólo los hiperplanos que dan lugar a dichos semiespacios separan A y B, sino que A y B están a distintos lados de la *banda* $D = \{x \in X : \alpha < \operatorname{Re} f(x) < \beta\}$.

Del teorema de separación en espacios normados, deducimos el siguiente resultado:

- **Separación fuerte en espacios normados.** *Supongamos que A y B son subconjuntos, no vacíos y convexos, de un espacio normado X, que están a distancia positiva, esto es:*

$$d(A,B) = \inf \{ \|b - a\| : a \in A, \ b \in B \} = \rho > 0$$

Entonces, existe un funcional lineal y continuo en X que separa fuertemente A de B. Más concretamente, existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \alpha + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B \tag{10}$$

Si U es la bola abierta unidad de X, es claro que el conjunto $A + \rho U$ es convexo y abierto. Si algún $b \in B$ verificase que $b = a + \rho u$ con $a \in A$ y $u \in U$, se tendría $\|b - a\| = \rho \|u\| < \rho$, lo cual es imposible, luego $(A + \rho U) \cap B = \emptyset$. Por tanto, $A + \rho U$ y B son dos subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de X, el primero de los cuales es abierto. Por el teorema de separación, existe $f \in X^*$ verificando que

$$\operatorname{Re} f(a) + \rho \operatorname{Re} f(u) < \operatorname{Re} f(b) \qquad \forall a \in A, \ \forall b \in B, \ \forall u \in U$$

Estas desigualdades se mantienen al dividir f por su norma, con lo que conseguimos $\|f\| = 1$, o lo que es lo mismo, $\sup\{\operatorname{Re} f(u) : u \in U\} = 1$. Para $a \in A$ y $b \in B$, deducimos que

$$\operatorname{Re} f(a) + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b)$$

Si ahora definimos $\alpha = \sup\{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$, obtenemos claramente (10). En particular tenemos (9) con $\beta = \alpha + \rho$, luego f separa fuertemente A de B. ■

El resultado anterior tiene un aspecto cuantitativo, que conviene resaltar. Recordando la interpretación geométrica de la separación fuerte, hemos visto que los conjuntos A y B están a distintos lados de la banda $D = \{x \in X : \alpha < \operatorname{Re} f(x) < \beta\}$, donde $\beta - \alpha = \rho = d(A,B)$.

La cuestión es que, siendo $\|f\| = 1$, la diferencia $\beta - \alpha = d(A,B)$ es la máxima posible. De manera más intuitiva, la banda D es lo más "ancha" posible. Para comprobarlo, supongamos que A y B verifican (9), con $f \in X^*$ y $\|f\| = 1$. Entonces, para $a \in A$ y $b \in B$ se tiene

$$\|b-a\| = \|f\|\,\|b-a\| \geqslant |f(b-a)| \geqslant \operatorname{Re} f(b) - \operatorname{Re} f(a) \geqslant \beta - \alpha$$

de donde deducimos que $\beta - \alpha \leqslant d(A,B)$, como se quería.

Hay un caso particular del corolario anterior que ya conocíamos: si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X y $x \in X \setminus M$, sabíamos que existe $f \in M^\perp$ con $\|f\| = 1$, tal que $f(x) = d(x,M)$. Esto se deduce del resultado anterior, pues tomando $A = M$ y $B = \{x\}$, con lo que $d(A,B) = d(x,M) = \rho > 0$, obtenemos $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, tales que

$$\operatorname{Re} f(y) \leqslant \alpha < \alpha + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(x) \qquad \forall y \in M$$

Vemos que $f(M) \neq \mathbb{K}$, luego $f(M) = \{0\}$, es decir, $f \in M^\perp$. Entonces $\alpha \geqslant 0$, y $\operatorname{Re} f(x) \geqslant \rho$, pero al ser $\|f\| = 1$, tenemos fácilmente $|f(x)| \leqslant \rho$, luego $f(x) = \rho$, como se quería.

Sin entrar en cuestiones cuantitativas, la siguiente es una forma natural de asegurarse que dos conjuntos están a distancia positiva, para tener separación fuerte:

- *Sean A y B subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, de un espacio normado X, y supongamos que A es compacto y B es cerrado. Entonces existe un funcional $f \in X^*$ que separa fuertemente A y B.*

La función continua $x \mapsto d(x,B)$ tiene mínimo en el compacto A, es decir, existe $a_0 \in A$ tal que $d(a_0,B) = \min\{d(a,B) : a \in A\} = d(A,B)$. Si fuese $d(a_0,B) = 0$, por ser B cerrado se tendría $a_0 \in A \cap B$ contra la hipótesis, luego $d(A,B) > 0$ y se aplica el resultado anterior. ■

8.7. Separación en espacios de dimensión finita

Concluimos viendo que, en un espacio vectorial de dimensión finita, no se requiere ninguna hipótesis restrictiva para separar dos conjuntos convexos, no vacíos y disjuntos. Ello se debe a que el caso que no queda cubierto por el teorema general de separación, puede resolverse mediante el siguiente resultado elemental.

- *Dado $N \in \mathbb{N}$, sea U un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^N$ tal que $0 \in U$ y $\operatorname{Lin} U = \mathbb{R}^N$. Entonces se tiene $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$ para la topología usual de $\mathbb{R}^N$.*

Como U contiene una base de $\mathbb{R}^N$, salvo una biyección lineal de $\mathbb{R}^N$ sobre sí mismo, que es un homeomorfismo, podemos suponer que U contiene a la base usual $\{e_1, e_2, \ldots, e_N\}$. Para cada $k \in \{1,2,\ldots,N\}$, consideramos entonces el conjunto

$$\Delta_k = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \rho_j e_j \ : \ \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k \in \mathbb{R}^+, \ \sum_{j=1}^{k} \rho_j < 1 \right\}$$

Observamos que los puntos de Δ_1 pertenecen al segmento de extremos 0 y e_1, que está contenido en U por ser U convexo, luego tenemos $\Delta_1 \subset U$. Razonando por inducción finita, suponemos que, para un $k \in \{1,2,\ldots,N-1\}$, se tiene $\Delta_k \subset U$, y probamos que $\Delta_{k+1} \subset U$.

Si $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{k+1} \in \mathbb{R}^+$ y $\sum_{j=1}^{k+1} \rho_j < 1$, tenemos $\dfrac{\rho_j}{1-\rho_{k+1}} \in \mathbb{R}^+$ para todo $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, así como $\sum_{j=1}^{k} \dfrac{\rho_j}{1-\rho_{k+1}} < 1$, luego tomando $x = \sum_{j=1}^{k} \dfrac{\rho_j}{1-\rho_{k+1}} e_j$, vemos que $x \in \Delta_k$, y por la hipótesis de inducción tenemos $x \in U$. Por tanto, $\sum_{j=1}^{k+1} \rho_j e_j = (1-\rho_{k+1})x + \rho_{k+1} e_{k+1} \in U$. Esto prueba que $\Delta_{k+1} \subset U$ como se quería. Por inducción concluimos entonces que $\Delta_N \subset U$.

Comprobemos que Δ_N es un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, con lo que tendremos $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$. Basta para ello observar que

$$\Delta_N = \left(\bigcap_{k=1}^{N} \{ x \in \mathbb{R}^N : x(k) \in \mathbb{R}^+ \} \right) \bigcap \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \sum_{k=1}^{N} x(k) < 1 \right\}$$

lo que muestra a Δ_N como intersección de $N+1$ conjuntos abiertos, luego Δ_N es abierto. Tomando $x(k) = 1/(N+1)$ para todo $k \in \{1,2\ldots,N\}$, se tiene $x \in \Delta_N$, luego $\Delta_N \neq \emptyset$. ■

Podemos ya probar el teorema general de separación para espacios de dimensión finita:

- **Separación en dimensión finita.** *Sean A y B dos subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de $\mathbb{R}^N$, con $N \in \mathbb{N}$. Entonces existe un funcional lineal no nulo en $\mathbb{R}^N$ que separa A y B. Equivalentemente, existe $c \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{N} c(k)\,a(k) \leqslant \sum_{k=1}^{N} c(k)\,b(k) \qquad \forall a \in A,\ \forall b \in B$$

Igual que en el teorema general de separación, veremos que el problema se reduce a separar un conjunto convexo $U \subset \mathbb{R}^N$ tal que $0 \in U$, de un punto $x_0 \in \mathbb{R}^N \setminus U$. En este caso particular, hay dos posibles situaciones. Si $\operatorname{int}(U) \neq \emptyset$, el teorema de separación en espacios normados, aplicado a $\mathbb{R}^N$ con cualquier norma, nos da un funcional lineal no nulo en $\mathbb{R}^N$ que separa U del punto x_0. Si por el contrario $\operatorname{int}(U) = \emptyset$, el resultado anterior nos dice que $\operatorname{Lin} U \neq \mathbb{R}^N$, luego existe un funcional lineal no nulo f en $\mathbb{R}^N$, tal que $\operatorname{Lin} U \subset \ker f$, y en particular $f(u) = 0$ para todo $u \in U$. Sustituyendo si es preciso f por $-f$, conseguimos que se tenga $f(x_0) \geqslant 0$, con lo que f separa U del punto x_0.

En general, fijados $a_0 \in A$ y $b_0 \in B$, tomamos $x_0 = b_0 - a_0$ y $U = A - B + x_0$, con lo que el conjunto U es convexo, con $0 \in U$ pero $x_0 \notin U$. Por lo ya demostrado, existe un funcional lineal no nulo f en $\mathbb{R}^N$, verificando que $f(u) \leqslant f(x_0)$ para todo $u \in U$. Dados $a \in A$ y $b \in B$, basta tomar $u = a - b + x_0 \in U$, para obtener que

$$f(a) - f(b) + f(x_0) = f(u) \leqslant f(x_0)$$

de donde $f(a) \leqslant f(b)$. Esto prueba que f separa A de B. ■

Tema 9

Teorema de Banach-Steinhaus

Tras el teorema de Hahn-Banach, abordamos ahora el estudio del segundo de los principios fundamentales del Análisis Funcional, llamado *Teorema de Banach-Steinhaus.* Su demostración se deducirá muy fácilmente de un resultado puramente topológico, cuya historia merece un comentario.

En los primeros años del siglo XX solía hacerse con frecuencia en espacios de funciones un tipo de razonamiento, conocido como *método de condensación de singularidades,* que hoy se considera como precedente del teorema de Banach-Steinhaus.

Paralelamente, habían empezado a usarse los llamados *métodos de categoría,* que permiten distinguir, de manera provechosa, entre subconjuntos “grandes” y “pequeños” de un espacio topológico. Estos métodos tienen al parecer su origen en un trabajo de W. Osgood (1897), en el que se prueba que la intersección de una sucesión de abiertos densos en $\mathbb{R}$ también es un conjunto denso en $\mathbb{R}$. Dos años después, R. Baire observa que el mismo resultado es cierto en $\mathbb{R}^N$ y lo aprovecha en su estudio de las funciones que se obtienen como límites puntuales de sucesiones de funciones continuas (llamadas *funciones de la primera clase de Baire*). Su principal resultado es una caracterización de dichas funciones mediante sus propiedades de continuidad, que se conoce como el *Gran Teorema de Baire*, y los métodos de categoría juegan un papel clave en su demostración.

Fue Banach quien observó que el mencionado resultado de Osgood y Baire, no sólo es cierto en $\mathbb{R}^N$ sino también, con la misma demostración de Baire, en todo espacio métrico completo, dando así forma definitiva a lo que hoy día conocemos como *teorema de Baire,* o dicho con más propiedad, *lema de categoría de Baire.* Al mismo tiempo, Banach mostró que, usando este lema, es posible simplificar y clarificar enormemente los resultados basados en el método de condensación de singularidades, dejando así establecida la utilidad de los métodos de categoría en Análisis Funcional. En particular, dio una prueba muy sencilla de un resultado obtenido previamente por H. Steinhaus, llamado *teorema de cierre de Steinhaus,* que desde entonces ha quedado como una fácil consecuencia del teorema de Banach-Steinhaus.

9.1. Lema de categoría de Baire

Empezamos introduciendo la noción topológica en que se basan los métodos de categoría. Si E es un subconjunto de un espacio topológico X, diremos que E es **magro** en X, cuando el cierre de E tenga interior vacío: $\operatorname{int}(\overline{E}) = \emptyset$. Tomando entonces $F = \overline{E}$, vemos que $E \subset F$ donde F es un conjunto cerrado con interior vacío. Pero recíprocamente, si $E \subset F = \overline{F} \subset X$ donde $\operatorname{int}(F) = \emptyset$, se tiene $\operatorname{int}(\overline{E}) \subset \operatorname{int}(F) = \emptyset$, luego E es magro en X. Así pues, E es magro en X si, y sólo si, E está contenido en un subconjunto cerrado de X con interior vacío.

Si ahora $A \subset X$, se dice que A es un conjunto de **primera categoría** en X, cuando A puede expresarse como unión numerable de conjuntos magros en X, es decir, cuando A está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío. En otro caso se dice que A es de **segunda categoría** en X.

Observemos que todo subconjunto de un conjunto de primera categoría en X es de primera categoría en X, así como que toda unión numerable de conjuntos de primera categoría en X es de primera categoría en X.

Para que la intuición ayude a entender las definiciones anteriores, debemos pensar que un conjunto magro es topológicamente "muy pequeño". Por ejemplo, todo subconjunto finito de un espacio normado X es magro en X. A partir de esta idea básica, los subconjuntos de un espacio topológico X se han clasificado en dos tipos: los de primera categoría, que podemos ver como topológicamente "pequeños", y los de segunda categoría, que serían "grandes". Por supuesto, estas nociones dependen de manera esencial de la topología que tenemos en X. Por ejemplo, si en un conjunto no vacío X consideramos la topología discreta, está claro que todo subconjunto no vacío de X es de segunda categoría en X.

Aclaremos que las nociones de categoría son relativas, dependen del espacio ambiente X. Por ejemplo, si F es un subconjunto finito de un espacio normado X, y E es un subconjunto no vacío de F, entonces E es magro en X, pero la topología inducida por X en F es la discreta, luego E es de segunda categoría en F con dicha topología.

Sin embargo, comprobamos ahora fácilmente que las nociones de categoría dependen del espacio ambiente en la forma que cabe esperar: si en X tenemos la topología inducida por otro espacio Y, todo subconjunto "pequeño" de X es también "pequeño" como subconjunto de Y.

- *Sea Y un espacio topológico y, en un subconjunto $X \subset Y$, consideremos la topología inducida por Y. Entonces, todo conjunto magro en X es magro en Y, luego todo conjunto de primera categoría en X es de primera categoría en Y.*

Si E es un subconjunto cerrado de X, que tiene interior vacío en X, bastará probar que E es magro en Y. Si F es el cierre de E en Y, debemos pues probar que F tiene interior vacío. Observemos que, como E es cerrado en X, se tiene $F \cap X = E$. Si U es el interior de F en Y, tenemos que $U \cap X$ es un abierto de X, que verifica $U \cap X \subset F \cap X = E$, pero E tiene interior vacío en X, luego se tiene $U \cap X = \emptyset$. Entonces $E \subset X \subset Y \setminus U$, pero $Y \setminus U$ es cerrado en Y, luego $F \subset Y \setminus U$. Así pues, tenemos $U \subset F \subset Y \setminus U$, luego $U = \emptyset$ como se quería. ■

Para entender la forma en que suelen usarse las nociones de categoría, analizaremos cómo se demuestra la abundancia de números trascendentes, usando que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Recordemos que un número real es *algebraico* si es raíz de un polinomio con coeficientes enteros, y *trascendente* en otro caso. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathcal{P}_n$, de los polinomios de grado n con coeficientes enteros, es numerable, porque existe una obvia aplicación inyectiva de $\mathcal{P}_n$ en $\mathbb{Z}^{n+1}$. Por tanto, el conjunto $\mathcal{P} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_n$ de todos los polinomios no constantes con coeficientes enteros, también es numerable. Como cada polinomio tiene un conjunto finito de raíces, deducimos que el conjunto de los números algebraicos es numerable. Como $\mathbb{R}$ no es numerable, concluimos que el conjunto de los números trascendentes no es numerable. Nótese que hemos probado la existencia, e incluso la abundancia, de números trascendentes, sin dar un sólo ejemplo de número trascendente, cosa que no es del todo fácil.

Las nociones de categoría permiten hacer razonamientos análogos al anterior, pero en vez de trabajar con conjuntos numerables y no numerables, usamos la distinción entre conjuntos de primera y segunda categoría. Habitualmente, esta distinción es más refinada, porque los conjuntos numerables son de primera categoría, pero el recíproco no es cierto, luego entre los conjuntos no numerables, todavía podemos distinguir si son de primera o de segunda categoría. Por ejemplo, el conjunto ternario de Cantor $C \subset \mathbb{R}$ es compacto y tiene interior vacío, luego es magro en $\mathbb{R}$, pero es sabido que C es equipotente a $\mathbb{R}$. Para un espacio normado X, de dimensión mayor que 1, las cosas son aún más claras, pues todo subespacio de dimensión 1 es magro en X, pero no es numerable.

Es claro que, para que los razonamientos del tipo que hemos sugerido tengan interés, hemos de trabajar en un espacio topológico que sea de segunda categoría en sí mismo. Se explica así la gran utilidad del siguiente resultado, que proporciona abundantes ejemplos de espacios topológicos con dicha propiedad.

Lema de categoría de Baire. *Si X es un espacio métrico completo, todo abierto no vacío de X es de segunda categoría en X. En particular, X es de segunda categoría en sí mismo.*

Demostración. Expresamos la tesis del lema de forma equivalente, para probarla con más comodidad. Se trata de probar que todo conjunto de primera categoría en X tiene interior vacío, y ello es tanto como decir que, si $\{F_n\}$ es una sucesión de subconjuntos cerrados de X, todos ellos con interior vacío, entonces el conjunto $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior vacío. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $G_n = X \setminus F_n$, vemos que G_n es abierto, con $\overline{G_n} = X \setminus \operatorname{int}(F_n)$, luego F_n tiene interior vacío si, y sólo si, G_n es denso en X. Del mismo modo, vemos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ tiene interior vacío si, y sólo si, $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. Por tanto, la tesis del enunciado equivale a la siguiente afirmación, que es la que vamos a probar: si $\{G_n\}$ es una sucesión de abiertos densos en X, entonces el conjunto $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ es denso en X. Dado un abierto no vacío $G_0 \subset X$, deberemos por tanto probar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ tiene intersección no vacía con G_0, es decir, que $\bigcap_{n=0}^{\infty} G_n \neq \emptyset$.

Como G_0 es un abierto no vacío de X, tomamos una bola cerrada B_0, de radio estrictamente positivo, contenida en G_0.

Por hipótesis, G_1 es un abierto denso en X, luego $\operatorname{int}(B_0) \cap G_1$ es un abierto no vacío, que contendrá una bola cerrada de radio estrictamente positivo, que podemos tomar tan pequeño como queramos. Tenemos por tanto una bola cerrada B_1, de radio $r_1 \in \mathbb{R}^+$, verificando que

$$B_1 \subset B_0 \cap G_1 \qquad \text{y} \qquad r_1 < 1$$

e iniciamos de esta forma una construcción por inducción.

Supongamos que, para un $n \in \mathbb{N}$, hemos construido una bola cerrada B_n, de radio $r_n \in \mathbb{R}^+$, verificando que

$$B_n \subset B_{n-1} \cap G_n \qquad \text{y} \qquad r_n < 1/n \tag{1}$$

Entonces $\operatorname{int}(B_n) \cap G_{n+1}$ es un abierto no vacío de X, que contendrá una bola cerrada de radio estrictamente positivo, que podemos tomar tan pequeño como queramos. Por tanto, existe una bola cerrada B_{n+1}, de radio $r_{n+1} \in \mathbb{R}^+$, verificando que

$$B_{n+1} \subset B_n \cap G_{n+1} \qquad \text{y} \qquad r_{n+1} < 1/(n+1)$$

que es (1) con $n+1$ en vez de n.

Así pues, por inducción, hemos construido una sucesión $\{B_n\}$ de bolas cerradas, de forma que, si $\{r_n\}$ es la sucesión de sus radios, se verifica (1) para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, $\{B_n\}$ es decreciente, es decir, para $k, n \in \mathbb{N}$ con $k \leqslant n$, se tiene $B_n \subset B_k$.

Si para cada $n \in \mathbb{N}$, elegimos un punto $x_n \in B_n$, comprobamos fácilmente que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $2/k < \varepsilon$, y para $n, m \geqslant k$ se tiene que $x_n, x_m \in B_k$, pero la bola B_k tiene radio $r_k < 1/k$, luego $d(x_n, x_m) < 2/k < \varepsilon$.

Como por hipótesis X es completo, la sucesión $\{x_n\}$ converge a un punto $x \in X$, y es fácil ver que $x \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, fijado $n \in \mathbb{N}$, se tiene $x_{n+h} \in B_n$ para todo $h \in \mathbb{N}$, luego $x = \lim\limits_{h \to \infty} x_{n+h} \in B_n$, ya que B_n es un conjunto cerrado. Así pues, tenemos $x \in B_n \subset G_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero también $x \in B_1 \subset B_0 \subset G_0$, luego $x \in \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n$, y esta intersección no es vacía, como queríamos demostrar. ■

Resaltemos que la tesis del lema anterior es puramente topológica, nos da una condición necesaria para que la topología de un espacio sea la generada por una distancia completa. Por ejemplo, no existe una distancia completa en $\mathbb{Q}$ que genere su topología (la inducida por $\mathbb{R}$), pues obviamente $\mathbb{Q}$ es de primera categoría en sí mismo.

Por otra parte, el lema anterior nos dice que $\mathbb{R}$ es de segunda categoría en sí mismo. Puesto que $\mathbb{Q}$ es de primera categoría en $\mathbb{R}$, deducimos que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ es de segunda categoría en $\mathbb{R}$. Esto implica que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ no es numerable, pero tenemos una afirmación más fuerte, pues sabemos que un conjunto no numerable puede ser de primera categoría en $\mathbb{R}$.

Mediante un razonamiento similar, obtenemos una consecuencia interesante para espacios de Banach:

- *La dimensión de un espacio de Banach es finita o no numerable.*

Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y $U = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ un conjunto infinito y numerable de vectores linealmente independientes en X, bastará probar que U no puede ser una base algebraica de X, es decir, que $\operatorname{Lin} U \neq X$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = \operatorname{Lin}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, y recordemos que, como consecuencia del teorema de Hausdorff, X_n es cerrado en X. Además, como la dimensión de X no es finita, tenemos $X_n \neq X$, de donde se deduce que $\operatorname{int}(X_n) = \emptyset$. En efecto, en otro caso existirían $x \in X_n$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $x + rB \subset X_n$ donde B es la bola unidad de X, pero al ser X_n un subespacio de X, se tendría que $B \subset (1/r)(X_n - x) \subset X_n$, de donde se deduciría que $X = \mathbb{R}^+ B \subset \mathbb{R}^+ X_n = X_n$, lo cual es falso como ya se ha dicho. Así pues X_n es un conjunto magro en X, y esto es válido para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\operatorname{Lin} U = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, deducimos que $\operatorname{Lin} U$ es un conjunto de primera categoría en X. Por el lema de Baire sabemos que X es de segunda categoría en sí mismo, luego $\operatorname{Lin} U \neq X$ como queríamos demostrar. ■

Comentemos, sin dar la demostración, una aplicación clásica y muy vistosa del lema de categoría de Baire. A lo largo del siglo XIX, aparecieron diversos ejemplos (el primero y más famoso se debe a Weierstrass) de funciones continuas en un intervalo compacto, digamos $[0,1]$, que no son derivables en ningún punto. Pues bien, considerando el espacio de Banach $C[0,1]$, no es del todo difícil comprobar que el subconjunto formado por las funciones que admiten al menos una derivada lateral en algún punto, es de primera categoría en $C[0,1]$. Por tanto, el lema de categoría de Baire nos asegura que *el conjunto de las funciones continuas en* $[0,1]$ *que no son derivables en ningún punto de* $[0,1]$ *es de segunda categoría en* $C[0,1]$. Podríamos decir que la “gran mayoría” de las funciones continuas en $[0,1]$ no son derivables en ningún punto. Obsérvese cómo el lema de Baire permite hacer razonamientos del tipo que habíamos anunciado. Probamos la abundancia de un cierto tipo de funciones, sin dar un sólo ejemplo de una función de ese tipo, cosa que no es fácil.

Pasamos ya a probar la primera consecuencia fundamental del lema de Baire, en el contexto del Análisis Funcional.

9.2. Teorema de Banach-Steinhaus

Este resultado se conoce también como *principio de acotación uniforme*, porque permite pasar de una acotación de tipo “puntual” a una acotación de tipo “uniforme” para una familia de operadores lineales y continuos. Concretemos estos dos tipos de acotación.

Dados dos espacios normados X e Y, sea $E \subset L(X,Y)$ un conjunto de operadores lineales y continuos. Es natural decir que E está **acotado en un punto** $x \in X$, cuando $\{T(x) : T \in E\}$ es un subconjunto acotado de Y, simbólicamente: $\sup\big\{ \|T(x)\| : T \in E \big\} < \infty$.

Decimos ahora que E está **puntualmente acotado** en un conjunto $A \subset X$, cuando E está acotado en cada punto de A, es decir, $\sup\big\{ \|T(x)\| : T \in E \big\} < \infty$ para todo $x \in A$. En tal caso, para cada $x \in A$, podemos encontrar una constante $M_x \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|T(x)\| \leqslant M_x$ para todo $T \in E$, pero la constante M_x puede depender del punto $x \in A$ considerado. Hablamos de acotación uniforme cuando podemos evitar esa dependencia, es decir, cuando una misma constante es válida para todos los puntos de A.

Así pues, decimos que E está **uniformemente acotado** en un conjunto $A \subset X$, cuando existe una constante $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|T(x)\| \leqslant M$ para todo $x \in A$ y todo $T \in E$, es decir, escrito simbólicamente: $\sup\{\|T(x)\| : x \in A,\ T \in E\} < \infty$.

Nos interesa sobre todo el caso en que A es la bola unidad de X, que denotamos por B. Si un conjunto de operadores $E \subset L(X,Y)$, está puntualmente acotado en B, entonces E está puntualmente acotado en X, pues para cada $x \in X$ podemos escribir $x = \|x\| u$ con $u \in B$ y obtenemos que

$$\sup\{\|T(x)\| : T \in E\} = \|x\| \sup\{\|T(u)\| : T \in E\} < \infty$$

Por otra parte, con respecto a la acotación uniforme, observamos que

$$\sup\{\|T(u)\| : u \in B,\ T \in E\} = \sup\{\|T\| : T \in E\}$$

luego E está uniformemente acotado en B si, y sólo si, E está **acotado en norma**, es decir, E es un subconjunto acotado del espacio de operadores $L(X,Y)$.

Por sorprendente que pueda parecer, la complitud del espacio X nos va a permitir pasar de la acotación puntual a la uniforme en la bola unidad de X, para todo conjunto de operadores lineales y continuos en X. De hecho, el siguiente enunciado tiene aún más contenido.

Teorema de Banach-Steinhaus. *Sea E un conjunto de operadores lineales y continuos de un espacio de Banach X en un espacio normado Y. Consideremos el conjunto A formado por los puntos de X en los que E está acotado: $A = \{x \in X : \sup\{\|T(x)\| : T \in E\} < \infty\}$. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *A es un conjunto de segunda categoría en X*

(ii) *$A = X$, es decir, E está puntualmente acotado en X*

(iii) *E está uniformemente acotado en la bola unidad de X: $\sup\{\|T\| : T \in E\} < \infty$.*

Demostración. De (iii) se deduce que E está puntualmente acotado en la bola unidad, y por tanto en X, luego $(iii) \Rightarrow (ii)$. Por el lema de categoría de Baire, X es de segunda categoría en sí mismo, luego $(ii) \Rightarrow (i)$. Sólo queda probar que $(i) \Rightarrow (iii)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideramos el conjunto

$$F_n = \{x \in X : \|T(x)\| \leqslant n \ \ \forall T \in E\} = \bigcap_{T \in E} \{x \in X : \|T(x)\| \leqslant n\}$$

Como cada $T \in E$ es una función continua, y la norma de Y también lo es, vemos que F_n es un subconjunto cerrado de X. Como $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, deducimos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(F_m) \neq \emptyset$, pues en otro caso A sería un conjunto de primera categoría en X, en contradicción con la hipótesis (i). Por tanto, existen $x \in X$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que $x + rB \subset F_m$, donde B es la bola unidad de X. Entonces, para cualesquiera $u \in B$ y $T \in E$, se tiene

$$\|T(u)\| = \left\| T\left(\frac{1}{r}(x + ru - x)\right)\right\| \leqslant \frac{1}{r}\left(\|T(x+ru)\| + \|T(x)\|\right) \leqslant \frac{2m}{r}$$

Deducimos que $\|T\| \leqslant 2m/r$ para todo $T \in E$, luego se cumple (iii), como queríamos. ■

Naturalmente, la parte más útil del teorema anterior es la afirmación $(ii) \Rightarrow (iii)$ que permite, como habíamos anunciado, pasar de la acotación puntual a la uniforme. La afirmación (i) tiene interés cuando usamos el teorema por la negativa: si el conjunto E no está acotado en norma, de $(ii) \Rightarrow (iii)$ deducimos solamente la *existencia* de algún punto de X en el que E no está acotado, mientras que de $(i) \Rightarrow (iii)$ obtenemos la *abundancia* de tales puntos, puesto que forman un conjunto de segunda categoría en X. Enseguida veremos un ejemplo concreto de esta situación.

Resaltemos que la demostración del teorema de Banach-Steinhaus es muy sencilla, si bien involucra el lema de categoría de Baire, cuya prueba tampoco es difícil. Por tanto, cuando usamos el teorema en algún caso concreto, nuestro razonamiento es muy elemental.

Vamos a presentar algunas consecuencias, que históricamente tuvieron gran repercusión, por lo que son responsables de la notoriedad que el teorema adquirió rápidamente.

9.3. Series de Fourier divergentes

Vamos a trabajar en el espacio $C(\mathbb{T})$, de todas las funciones complejas continuas en la circunferencia $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$. Sabemos que $C(\mathbb{T})$ es un espacio de Banach con la norma del máximo, pero en Análisis de Fourier, para manejar con más comodidad la integral, es costumbre describir los elementos de $\mathbb{C}(\mathbb{T})$ como funciones de variable real. Para ello, a cada $g \in C(\mathbb{T})$ asociamos la función $g^* : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dada por

$$g^*(t) = g\big(e^{it}\big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

Es claro que g^* es una función continua y 2π-periódica, con $g^*(\mathbb{R}) = g(\mathbb{T})$, de donde

$$\text{máx}\,\big\{\,|g(z)| : z \in \mathbb{T}\big\} = \text{máx}\,\big\{\,|g^*(t)| : t \in \mathbb{R}\big\}$$

En sentido inverso, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es una función continua y 2π-periódica, para cada $z \in \mathbb{T}$ definimos $g(z) = f(\arg z)$, donde $\arg z$ es el argumento principal de z, aunque la periodicidad de f permite usar cualquier otro argumento de z. Se comprueba sin dificultad que de esta forma se obtiene la única función continua $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ que verifica $g^* = f$. Tenemos así una correspondencia biunívoca entre funciones continuas en la circunferencia y funciones continuas y 2π-periódicas en $\mathbb{R}$. Podemos por tanto entender que $C(\mathbb{T})$ es el espacio de Banach formado por todas las funciones continuas y 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, cuya norma viene dada por:

$$\|f\|_\infty = \text{máx}\,\big\{\,|f(t)| : t \in \mathbb{R}\big\} \qquad \forall f \in C(\mathbb{T})$$

Pues bien, los **coeficientes de Fourier** de una función $f \in C(\mathbb{T})$ vienen dados por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Está claro que esta definición puede hacerse para funciones mucho más generales, pero por ahora sólo nos interesa el caso de una función continua.

Usando los coeficientes de Fourier, se define la **serie de Fourier** de una función $f \in C(\mathbb{T})$, denotada por $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, e^{int}$, que es la sucesión $\{S_n(f)\}$, de funciones en $C(\mathbb{T})$, definida por:

$$S_n(f,t) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

donde por comodidad hemos escrito $S_n(f,t)$ en lugar de $\big(S_n(f)\big)(t)$. Suele decirse que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $S_n(f)$ es la n-ésima suma parcial de la serie de Fourier de f.

Siempre para una función continua $f \in C(\mathbb{T})$, durante más de medio siglo se pensó que la serie de Fourier de f debería converger a f puntualmente en $\mathbb{R}$, hasta que el matemático británico P. Du Bois-Reymond publicó en 1876 un ejemplo de una función continua $f \in C(\mathbb{T})$ cuya serie de Fourier no converge en el origen. Hoy día sigue sin ser fácil dar explícitamente un ejemplo de este tipo. Sin embargo, el teorema de Banach-Steinhaus permite probar con facilidad que tales ejemplos abundan, sin dar explícitamente ninguno.

Para ello empezamos expresando la suma parcial de una serie de Fourier como una integral, una idea bien conocida desde la época de Fourier. Para cualesquiera $f \in C(\mathbb{T})$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene claramente que

$$S_n\big(f,0\big) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} \right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt$$

donde hemos escrito

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{-ikt} = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

La sucesión de funciones $\{D_n\}$ se conoce como *núcleo de Dirichlet*, y está bien claro que la convergencia de las series de Fourier tiene estrecha relación con sus propiedades.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, pensemos en $S_n(f,0)$ como función de $f \in C(\mathbb{T})$, más concretamente en el funcional $\varphi_n : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ dado por

$$\varphi_n(f) = S_n(f,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, D_n(t)\, dt \qquad \forall f \in C(\mathbb{T}) \tag{2}$$

Enseguida comprobamos que φ_n es lineal y continuo, calculando además su norma. De hecho, con el mismo esfuerzo probamos algo más general.

- *Fijada una función $h \in \mathbb{C}(T)$ consideramos el funcional $\varphi : C(\mathbb{T}) \to \mathbb{C}$ definido por*

$$\varphi(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, h(t)\, dt \qquad \forall f \in C(\mathbb{T})$$

Se tiene entonces que $\varphi \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi\| = \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\, dt$.

Es claro que φ es lineal y, para toda $f \in C(\mathbb{T})$, se tiene

$$\big|\varphi(f)\big| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,|h(t)|\,dt \leqslant \big\|f\big\|_\infty \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt$$

luego $\varphi \in C(\mathbb{T})^*$ con $\|\varphi\| \leqslant \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt$, y se trata ahora de probar la otra desigualdad.

Usando la conjugación en $\mathbb{C}$, consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(t) = \frac{n\,\overline{h(t)}}{n|h(t)|+1} \qquad \forall t \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos que $f_n \in C(\mathbb{T})$ con $|f_n(t)| \leqslant 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, luego $\big\|f_n\big\|_\infty \leqslant 1$. Por otra parte se tiene

$$|\varphi(f_n)| = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n\,|h(t)|^2}{n|h(t)|+1}\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|h(t)|}{n|h(t)|+1}\,dt$$

Como evidentemente se tiene $|h(t)|/\big(n|h(t)|+1\big) \leqslant 1/n$ para todo $t \in \mathbb{R}$, la última integral es menor o igual que $2\pi/n$ y concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |h(t)|\,dt - \frac{2\pi}{n} \leqslant |\varphi(f_n)| \leqslant \|\varphi\|\,\|f_n\|_\infty \leqslant \|\varphi\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde se deduce claramente la desigualdad buscada. ■

Para $n \in \mathbb{N}$, el resultado anterior se aplica al funcional φ_n definido en (2), obteniendo

$$\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*, \quad \big\|\varphi_n\big\| = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|D_n(t)\big|\,dt \qquad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3}$$

El siguiente paso consiste en usar algunas propiedades sencillas del núcleo de Dirichlet para conseguir una estimación de la última integral.

- *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene:* $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|D_n(t)\big|\,dt \geqslant \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k+1}$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, para todo $t \in \mathbb{R}$ vemos claramente que

$$\big(e^{it}-1\big)D_n(t) = \sum_{k=-n+1}^{n+1} e^{ikt} - \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{i(n+1)t} - e^{-int}$$

Multiplicando ambos miembros por $e^{-it/2}$ obtenemos

$$\big(e^{it/2} - e^{-it/2}\big)D_n(t) = e^{i(2n+1)t/2} - e^{-i(2n+1)t/2}$$

y dividiendo ambos miembros por $2i$ concluimos finalmente que

$$\operatorname{sen}(t/2)\,D_n(t) = \operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Nótese que, para $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, se tiene $\operatorname{sen}(t/2) \neq 0$, y la igualdad anterior nos da una expresión para $D_n(t)$ que permitirá estimar la integral que nos interesa. Para abreviar la notación escribiremos

$$\Delta_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| D_n(t) \right| dt \qquad \text{y} \qquad \varepsilon_n = \frac{2\pi}{2n+1}$$

Directamente de su definición, se deduce que D_n es una función par, con lo que tenemos

$$\Delta_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| D_n(t) \right| dt \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon_n}^{n\varepsilon_n} \left| D_n(t) \right| dt \tag{5}$$

Para $t \in [\varepsilon_n, \pi]$ es claro que $0 < \operatorname{sen}(t/2) \leqslant t/2$, y usando (4), de (5) deducimos que

$$\Delta_n \geqslant \frac{1}{\pi} \int_{\varepsilon_n}^{\pi} \frac{\left| \operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big) \right|}{\operatorname{sen}(t/2)} dt \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{\varepsilon_n}^{\pi} \frac{\left| \operatorname{sen}\big((2n+1)t/2\big) \right|}{t} dt \tag{6}$$

En la última integral usamos ahora el cambio de variable $(2n+1)t/2 = s$, obteniendo

$$\Delta_n \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds \tag{7}$$

Para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, en la correspondiente integral usamos que $s \leqslant (2k+1)\pi/2$. Como la función $s \mapsto |\operatorname{sen} s|$ es π-periódica, obtenemos que

$$\frac{(2k+1)\pi}{2} \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} \frac{|\operatorname{sen} s|}{s} ds \geqslant \int_{\frac{(2k-1)\pi}{2}}^{\frac{(2k+1)\pi}{2}} |\operatorname{sen} s| \, ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{sen} s| \, ds = 2$$

Sustituyendo en (7) las n desigualdades así obtenidas, llegamos claramente a

$$\Delta_n \geqslant \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}$$

que es la desigualdad buscada. ■

Como la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{2n+1}$ diverge, obtenemos que $\{\Delta_n\} \to +\infty$, y en vista de (3) tenemos que $\big\{ \| \varphi_n \| \big\} \to +\infty$. Por tanto $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach $C(\mathbb{T})$, que no está acotado en norma. El teorema de Banach-Steinhaus nos da entonces el siguiente resultado:

- *Las funciones cuya serie de Fourier está acotada en el origen, forman un conjunto de primera categoría en el espacio de Banach $C(\mathbb{T})$.*

Con más razón, el conjunto de las funciones cuya serie de Fourier converge puntualmente, es de primera categoría en $C(\mathbb{T})$, es topológicamente "pequeño". Por tanto, las funciones cuya serie de Fourier no converge puntualmente, forman un conjunto de segunda categoría en $C(\mathbb{T})$, es decir, un conjunto topológicamente "grande". Suele aludirse a este resultado diciendo que la convergencia puntual, de la serie de Fourier de una función continua, es una propiedad "atípica".

9.4. Otras consecuencias

En la discusión sobre series de Fourier, el teorema de Banach-Steinhaus se ha usado por la negativa. Más concretamente, aludiendo a las tres afirmaciones que aparecen en el enunciado de dicho teorema, hemos usado que, si no se verifica (iii), entonces tampoco se verifica (i). Pero lo más habitual es usar el teorema en positivo, es decir, partiendo de la acotación puntual de un conjunto de operadores, usar que $(ii) \Rightarrow (iii)$ para concluir que dicho conjunto está acotado en norma. A partir de ahora vamos a obtener varias aplicaciones de este tipo.

En primer lugar, el teorema de Banach-Steinhaus permite probar la acotación de cualquier subconjunto de un espacio normado, usando el espacio dual:

- *Si A es un subconjunto no vacío de un espacio normado X, entonces A está acotado si, y sólo si, verifica la siguiente condición:*

$$\sup \left\{ |x^*(x)| \, : \, x \in A \right\} < \infty \qquad \forall x^* \in X^*$$

Una implicación es evidente, pues si A está acotado, para todo $x^* \in X^*$ se tiene

$$\sup \left\{ |x^*(x)| : x \in A \right\} \leqslant \|x^*\| \, \sup \left\{ \|x\| : x \in A \right\} < \infty$$

Para el recíproco, usamos la inyección canónica $J : X \to X^{**}$. Entonces $J(A)$ es un conjunto de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach X^*, que por hipótesis verifica:

$$\sup \left\{ \left| \big(J(x) \big) (x^*) \right| \, : \, x \in A \right\} = \sup \left\{ |x^*(x)| \, : \, x \in A \right\} < \infty \qquad \forall x^* \in X^*$$

Esto significa que $J(A)$ está puntualmente acotado en X^*, y el teorema de Banach-Steinhaus nos dice que $J(A)$ está acotado en norma.

Usando ahora que J es isométrica, concluimos que

$$\sup \left\{ \|x\| : x \in A \right\} = \sup \left\{ \|J(x)\| : x \in A \right\} < \infty$$

luego el conjunto A está acotado, como queríamos demostrar. ■

Volviendo a trabajar con un conjunto de operadores, del teorema de Banach-Steinhaus se deduce fácilmente un resultado probado previamente por Steinhaus, que es algo sorprendente, pues nos da la continuidad del límite de una sucesión que sólo converge puntualmente.

Teorema de cierre de Steinhaus. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}$ una sucesión de operadores lineales y continuos de X en Y. Supongamos que $\{T_n\}$ converge puntualmente en X, es decir, verifica que $\{T_n(x)\}$ converge en Y, para todo $x \in X$. Entonces, definiendo*

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \qquad \forall x \in X$$

se tiene un operador lineal y continuo, es decir: $T \in L(X,Y)$.

Demostración. La linealidad de T se comprueba de manera completamente rutinaria. Por otra parte, para cada $x \in X$, la sucesión $\{T_n(x)\}$ es convergente, luego está acotada. Por tanto, el conjunto $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ está puntualmente acotado en X, y el teorema de Banach-Steinhaus nos dice que $\sup\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} = M < \infty$. Fijado $x \in X$, se tiene entonces

$$\|T_n(x)\| \leqslant \|T_n\| \, \|x\| \leqslant M \, \|x\| \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde $\|T(x)\| \leqslant M \, \|x\|$ para todo $x \in X$, y esto prueba que $T \in L(X,Y)$. ■

En relación con este último resultado, conviene resaltar que, aunque $T \in L(X,Y)$ y $\{T_n\}$ converge puntualmente a T, no podemos asegurar que $\{T_n\}$ converja a T en el espacio $L(X,Y)$, es decir, no tiene por qué ocurrir que $\{\|T_n - T\|\} \to 0$. Por ejemplo, tomando $X = c_0$, $Y = \mathbb{K}$, y $T_n(x) = x(n)$ para cualesquiera $x \in c_0$ y $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{T_n(x)\} \to 0$ para todo $x \in c_0$, pero $\| T_n \| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9.5. Aplicaciones en teoría de sumabilidad

Veremos ahora otro bloque de aplicaciones del teorema de Banach-Steinhaus, referentes a la convergencia de sucesiones y series. Empezamos caracterizando las series de escalares absolutamente convergentes, mediante propiedades que parecen cada vez más débiles:

- *Para una sucesión de escalares $y \in \mathbb{K}^N$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  - (i) *La serie $\sum_{n\geqslant 1} y(n)$ es absolutamente convergente*
  - (ii) *Para cada $x \in l_\infty$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ es absolutamente convergente*
  - (iii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ es absolutamente convergente.*
  - (iv) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ es convergente*
  - (v) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x(n)\,y(n)$ está acotada.*

Es claro que cada una de las anteriores afirmaciones implica las que le siguen, luego basta probar que $(v) \Rightarrow (i)$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, definimos $\varphi_n : c_0 \to \mathbb{K}$ escribiendo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x(k)\,y(k) \qquad \forall x \in c_0$$

Recordando la descripción del dual de c_0, sabemos que $\varphi_n \in c_0^*$ con $\| \varphi_n \| = \sum_{k=1}^{n} |\,y(k)\,|$. Por otra parte, la hipótesis (v) nos dice que, para cada $x \in c_0$ se tiene

$$\sup\left\{ |\,\varphi_n(x)\,| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} = \sup\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} x(k)\,y(k) \right| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty$$

Por tanto, $\{\varphi_n\}$ es una sucesión de funcionales lineales continuos en el espacio de Banach c_0, que está puntualmente acotada en c_0. Por el teorema de Banach-Steinhaus, dicha sucesión está acotada en norma, y deducimos que se cumple (i), ya que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |y(k)| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} = \sup \left\{ \|\varphi_n\| \, : \, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \qquad \blacksquare$$

Resultados análogos al anterior, con idéntica demostración, permiten discutir la posibilidad de que una sucesión $y \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pertenezca a alguno de los espacios l_p con $1 < p < \infty$. El papel de c_0 lo hará entonces el espacio de Banach l_{p^*}, cuyo dual se identifica con l_p. Por ejemplo, se tiene que $y \in l_2$ si, y sólo si, la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y(n)$ está acotada, para cada $x \in l_2$.

Dando un paso más en este tipo de resultados, vamos a considerar ciertos procedimientos para trabajar con sucesiones o series no convergentes, llamados *métodos de sumabilidad.* Como ejemplo motivador, consideremos el criterio de la media aritmética:

$$\alpha_n \in \mathbb{K} \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{\alpha_n\} \to \alpha \in \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \right\} \to \alpha$$

Es bien sabido que el recíproco no es cierto, de modo que, transformar una sucesión en la de sus medias aritméticas, puede verse como un método que facilita la convergencia, un ejemplo muy sencillo de método de sumabilidad. Esta terminología se justifica por el hecho de que la sucesión de partida suele venir dada como una serie, con lo que el método de la media aritmética proporciona una especie de “suma” de la serie, que coincide con la auténtica suma cuando la serie converge, pero puede existir y ser útil en condiciones más generales.

El ejemplo emblemático de esta situación se presenta con las series de Fourier. Sabemos que la serie de Fourier $\{S_n(f)\}$ de una función continua $f \in C(\mathbb{T})$ rara vez converge, ni siquiera puntualmente. Sin embargo, podemos considerar la sucesión de medias aritméticas de la serie de Fourier. Concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(f,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=-k}^{k} \widehat{f}(j)\, e^{ikt} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Se dice que $\{\sigma_n(f)\}$ es la sucesión de **sumas de Cesàro** de la serie de Fourier de f. El criterio de la media aritmética nos proporciona, para cualquier $t \in \mathbb{R}$, la siguiente implicación:

$$\{S_n(f,t)\} \to f(t) \quad \Rightarrow \quad \{\sigma_n(f,t)\} \to f(t)$$

Ahora el recíproco está muy lejos de ser cierto. Concretamente, un resultado básico en el estudio de las series de Fourier, el **teorema de Féjer**, afirma que, *para toda $f \in C(\mathbb{T})$, la sucesión de sumas de Cesàro de la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $\mathbb{R}$.*

Pues bien, nos proponemos generalizar el criterio de la media aritmética, sustituyendo dicha media por una combinación lineal de los términos de la sucesión de partida, admitiendo incluso combinaciones lineales “infinitas”. Para ello, usaremos una transformación matricial del tipo que vamos a explicar.

Consideramos una matriz infinita de escalares $A = \big(a_{nk}\big)$ con $n,k \in \mathbb{N}$, que no es más que una aplicación de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en $\mathbb{K}$, pero será más intuitivo usar notación matricial. Dada una sucesión de escalares $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, podemos pensar en la sucesión que se obtiene al "multiplicar" la matriz A por el vector columna x. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el n-ésimo término de tal sucesión deberá ser la suma de la serie $\sum_{k\geqslant 1} a_{nk}\,x(k)$, siempre que dicha serie converja, lo que motiva la siguiente definición.

El **dominio** de la matriz $A = \big(a_{nk}\big)$ es el conjunto de sucesiones dado por

$$D(A) = \Big\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \,:\, \sum_{k\geqslant 1} a_{nk}\,x(k) \ \text{ converge } \ \forall n \in \mathbb{N} \Big\}$$

Claramente $D(A)$ es un subespacio de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ que al menos contiene a las sucesiones de soporte finito. Para $x \in D(A)$, podemos considerar la sucesión $Ax \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\big[Ax\big](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,x(k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

De esta forma obtenemos un operador lineal $x \mapsto Ax$, definido en $D(A)$ y con valores en $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Así pues, cada matriz infinita A da lugar a un método de transformación de sucesiones, análogo al que, a cada sucesión, asocia la sucesión de sus medias aritméticas. De hecho, usando la matriz $B = \big(b_{nk}\big)$ definida, para $n,k \in \mathbb{N}$, por $b_{nk} = 1/n$ si $k \leqslant n$ y $b_{nk} = 0$ si $k > n$, se tiene claramente que $D(B) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ y, para toda sucesión $x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, vemos que Bx es la sucesión de las medias aritméticas de x. El criterio de la media aritmética afirma que la transformación definida por la matriz B preserva la convergencia, es decir: si x es una sucesión convergente, entonces Bx es convergente y tiene el mismo límite que x. Es natural considerar ahora las matrices que tienen esta misma propiedad, para lo que introducimos una notación adecuada.

Denotamos por c al espacio vectorial formado por todas las sucesiones convergentes de escalares, un subespacio de l_∞ que contiene a c_0, y definimos $u(n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $u \in c \setminus c_0$. Para cada $x \in c$ tenemos claramente $x - \lambda u \in c_0$ donde $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} x(n)$, de donde deducimos que $c = c_0 \oplus \mathbb{K}u$. Como c_0 es un subespacio cerrado de codimensión finita en c, vemos que la suma directa anterior es topológico-directa, luego c es isomorfo al espacio producto $c_0 \times \mathbb{K}$ y, en particular, es un espacio de Banach, subespacio cerrado de l_∞.

Pues bien, decimos que una matriz infinita $A = \big(a_{nk}\big)$ es **regular**, cuando preserva la convergencia de sucesiones, es decir, verifica que

$$x \in c \quad \Longrightarrow \quad x \in D(A)\,, \quad Ax \in c\,, \quad \lim_{n\to\infty} \big[Ax\big](n) = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

Cada matriz regular A da lugar a un *método de sumabilidad* análogo al criterio de la media aritmética, válido para todas las sucesiones que pertenezcan al dominio de A. Si $x \in D(A)$ es una sucesión convergente, entonces Ax converge al mismo límite que x, pero perfectamente puede ocurrir que Ax sea convergente sin que x lo sea. Por supuesto, al hablar de método de sumabilidad estamos pensando que la sucesión x puede venir dada en forma de serie.

El esquema general que hemos introducido tiene interés, gracias a que disponemos de una caracterización muy cómoda de las matrices regulares, como es la siguiente:

Condiciones de Silverman-Toeplitz. *Una matriz infinita de escalares* $A = \big(a_{nk}\big)$ *es regular si, y sólo si, verifica las tres condiciones siguientes:*

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad \sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \,:\, n \in \mathbb{N} \right\} < \infty \\
&(ii) \quad \lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0 \quad \forall\, m \in \mathbb{N} \\
&(iii) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1
\end{aligned}
$$

Demostración. Empezamos por el paso clave, en el se aplica el teorema de Banach-Steinhaus, consistente en probar que la condición (i) es necesaria para que la matriz A sea regular.

Fijado $n \in \mathbb{N}$ consideramos la n-ésima fila de la matriz A, es decir, la sucesión $y_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dada por $y_n(k) = a_{nk}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La regularidad de la matriz A nos dice en primer lugar que, para cada $x \in c_0$ se tiene $x \in D(A)$ y, en particular, la serie $\sum\limits_{k\geqslant 1} y_n(k)\,x(k)$ es convergente. La caracterización de las series absolutamente convergentes, probada anteriormente, nos dice que $y_n \in l_1$, luego tenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_n(k)| < \infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Recordando ahora la identificación de l_1 con c_0^*, sabemos que escribiendo

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_n(k)\,x(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,x(k) = \big[A\,x\big](n) \qquad \forall x \in c_0\,, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos $\varphi_n \in c_0^*$ con $\|\varphi_n\| = \|y_n\|_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, la regularidad de A nos dice también que, para cada $x \in c_0$, la sucesión $A\,x$ es convergente y, en particular, está acotada. Por tanto, la sucesión $\{\varphi_n\}$ está puntualmente acotada en c_0. Como se trata de una sucesión de funcionales lineales y continuos en el espacio de Banach c_0, el teorema de Banach-Steinhaus nos permite concluir que dicha sucesión está acotada en norma. Esto prueba (i), ya que

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \,:\, n \in \mathbb{N} \right\} = \sup \big\{ \|y_n\|_1 \,:\, n \in \mathbb{N} \big\} = \sup \big\{ \|\varphi_n\| \,:\, n \in \mathbb{N} \big\} < \infty$$

La necesidad de las condiciones (ii) y (iii) es mucho más sencilla. Fijado $m \in \mathbb{N}$, usamos el m-ésimo vector unidad $e_m \in c_0$, y recordamos la sucesión $u \in c$, constantemente igual a 1.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos claramente

$$\big[A\,e_m\big](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,e_m(k) = a_{nm} \quad \text{y} \quad \big[A\,u\big](n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\,u(k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \tag{5}$$

La regularidad de A nos dice entonces que $A\,e_k \in c_0$, luego se verifica (ii), mientras que $A\,u \in c$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \big[A\,u\big](n) = 1$, que es la condición (iii).

Acabaremos probando que toda matriz A que verifique las condiciones (i), (ii) y (iii) es regular. Denotaremos por $M \in \mathbb{R}_0^+$ al supremo que aparece en (i). En primer lugar, para cualesquiera $x \in c$ y $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}x(k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \, \|x\|_\infty \leqslant M \|x\|_\infty$$

En particular, la serie $\sum_{k \geqslant 1} a_{nk}x(k)$ es convergente, para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $x \in D(A)$, lo cual es válido para toda sucesión convergente $x \in c$, así que $c \subset D(A)$. Pero además, de la desigualdad anterior deducimos que

$$\big| \big[Ax\big](n) \big| \leqslant M \|x\|_\infty \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in c$$

luego $Ax \in l_\infty$ con $\|Ax\|_\infty \leqslant M \|x\|_\infty$ para toda sucesión $x \in c$.

Si para $x \in c$ definimos $T(x) = Ax \in l_\infty$, es claro que tenemos un operador lineal $T : c \to l_\infty$ y acabamos de comprobar que T es continuo con $\|T\| \leqslant M$. Pero de hecho debemos ver que la imagen de T está contenida en c.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos de nuevo el m-ésimo vector unidad e_m, para el que se verifica la primera igualdad de (5). La condición (ii) nos dice entonces que $T(e_m) = A\,e_m \in c_0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Recordando que c_{00} es el subespacio engendrado por los vectores unidad, por ser T lineal deducimos que $T\big(c_{00}\big) \subset c_0$. Pero como además c_{00} es denso en c_0 y T es continuo, obtenemos que

$$T\big(c_0\big) = T\big(\overline{c_{00}}\big) \subset \overline{T\big(c_{00}\big)} \subset \overline{c_0} = c_0$$

donde hemos usado que c_0 es cerrado en l_∞. Esto prueba que $Az \in c_0$ para todo $z \in c_0$.

Por otra parte, usamos de nuevo la sucesión $u \in c$, para la que volvemos a tener la segunda igualdad de (5), y la condición (iii) nos dice que Au es una sucesión convergente a 1.

Finalmente, para $x \in c$ escribimos $x = z + \lambda u$ donde $\lambda = \lim_{n\to\infty} x(n)$ y $z \in c_0$. Como $Az \in c_0$ y $Au \in c$, deducimos que $Ax = Az + \lambda Au \in c$, y se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \big[Ax\big](n) = \lim_{n\to\infty} \big[Az\big](n) + \lambda \lim_{n\to\infty} \big[Au\big](n) = \lambda = \lim_{n\to\infty} x(n)$$

Esto prueba que la matriz A es regular, concluyendo la demostración. ■

Tema 10

Teorema de la aplicación abierta

Vamos a presentar cuatro versiones equivalentes de un mismo resultado, el tercero de los principios fundamentales del Análisis Funcional. Para ello, empezaremos analizando la noción de homomorfismo entre espacios normados, en coherencia con la noción de isomorfismo que sí hemos manejado a menudo. En el contexto de los espacios de Banach, probaremos entonces un teorema principal, que nos da tres caracterizaciones de los homomorfismos entre espacios de Banach, conocidas como *teorema de la aplicación abierta, teorema de los isomorfismos de Banach* y *teorema del homomorfismo de Banach*. Son tres resultados claramente equivalentes, que sólo difieren en el tipo de operador para el que se enuncian. Finalmente, el *teorema de la gráfica cerrada*, equivalente a los tres anteriores, nos dará una muy útil caracterización de la continuidad de un operador lineal entre espacios de Banach. El lema de categoría de Baire seguirá siendo un instrumento clave para obtener todos estos resultados.

10.1. Homomorfismos de espacios normados

En contexto algebraico, dos espacios vectoriales se identifican cuando existe una biyección lineal entre ellos, es decir, las biyecciones lineales son isomorfismos de espacios vectoriales. Como consecuencia, podemos decir que todas las aplicaciones lineales son homomorfismos de espacios vectoriales, pues de esa forma, los homomorfismos biyectivos son isomorfismos. La factorización canónica de una aplicación lineal nos da entonces el primer teorema de isomorfía para espacios vectoriales. Concretamente, si X e Y son espacios vectoriales y $T : X \to Y$ una aplicación lineal, se tiene $T = I \circ S \circ q$, donde la aplicación cociente $q : X \to X/\ker T$ es lineal y sobreyectiva, la inclusión natural $I : T(X) \to Y$ es lineal e inyectiva, y $S : X/\ker T \to T(X)$ es una biyección lineal. Por tanto, *todo homomorfismo de espacios vectoriales factoriza como composición de un epimorfismo con un isomorfismo y un monomorfismo.*

Para dar contenido topológico a la discusión anterior, en principio se podría pensar en llamar homomorfismos de espacios normados a los operadores lineales y continuos. Pero entonces, los homomorfismos biyectivos podrían no ser isomorfismos, pues para un operador lineal, continuo y biyectivo, el operador inverso ciertamente es lineal, pero puede no ser continuo, como vamos a comprobar con un ejemplo conocido.

Recordemos que, para $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, se tiene la inclusión de conjuntos $l_p \subset l_q$, y la topología de l_p contiene estrictamente a la inducida por l_q. Por tanto, si T es el operador identidad, de l_p con su norma $\|\cdot\|_p$, en l_p con la norma inducida por l_q, vemos que T es lineal continuo y biyectivo, pero no es un isomorfismo, es decir, T^{-1} no es continuo.

En vista del ejemplo anterior, se hace necesario buscar una noción de homomorfismo que sea coherente con la noción de isomorfismo que ya tenemos. Para encontrarla, vamos a revisar la factorización canónica de un operador lineal y continuo $T \in L(X,Y)$ donde X e Y son ahora espacios normados. Como $\ker T$ es un subespacio cerrado de X, usamos el espacio normado cociente $X/\ker T$, y la aplicación cociente $q : X \to X/\ker T$ es continua. En $T(X)$ tenemos la norma inducida por Y, así que la inclusión natural $I : T(X) \to Y$ es isométrica, luego continua. Finalmente $T = I \circ S \circ q$ donde $S : X/\ker T \to T(X)$ es un operador lineal biyectivo, y al estudiar el cociente, vimos que S es continuo si, y sólo si, lo es $S \circ q$. Como I es isométrico, la continuidad de $S \circ q$ equivale a la de $I \circ S \circ q = T$, luego S también es continuo.

Pues bien, si queremos tener un primer teorema de isomorfía para espacios normados, como el obtenido para espacios vectoriales, no basta que S sea continuo, necesitamos que S sea un isomorfismo, es decir, que S^{-1} también sea continuo, o lo que es lo mismo, que S sea una aplicación abierta. Como q siempre es abierta, esto implica que $S \circ q$ sea abierta. Pero recíprocamente, si $S \circ q$ es abierta, dado un abierto $G \subset X/\ker T$, la continuidad de q nos asegura que $q^{-1}(G)$ es abierto en X, luego $\big[S \circ q\big]\big(q^{-1}(G)\big) = S(G)$ es abierto en $T(X)$, y vemos que S es una aplicación abierta. Así pues, S es un isomorfismo si, y sólo si, $S \circ q$ es una aplicación abierta. Observando ahora que $S \circ q$ no es más que el propio operador T, pero visto como aplicación de X en $T(X)$, llegamos a la siguiente definición.

Si X e Y son espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal, decimos que T es un homomorfismo de espacios normados, o simplemente un **homomorfismo**, cuando T es una aplicación continua y abierta de X sobre $T(X)$. Esto significa que $T^{-1}(V)$ es abierto en X para todo abierto $V \subset T(X)$ y que $T(U)$ es abierto en $T(X)$ para todo abierto $U \subset X$.

Es claro que los isomorfismos de espacios normados no son más que los homomorfismos biyectivos. Como es natural, a los homomorfismos sobreyectivos les llamamos **epimorfismos**, mientras que los homomorfismos inyectivos son los **monomorfismos**.

Pasamos ahora a comprobar que, con la noción de homomorfismo recién introducida, se verifica el primer teorema de isomorfía para espacios normados.

Recordemos que, si M es un subespacio cerrado de un espacio normado X, la aplicación cociente $q : X \to X/M$ es continua y abierta, luego es un epimorfismo. Por otra parte, si Z es un subespacio de un espacio normado Y, la inclusión natural $I : Z \to Y$ es un monomorfismo, pues vista como aplicación de Z en $I(Z) = Z$, no es más que la identidad en Z.

En particular, si X e Y son espacios normados y $T : X \to Y$ es un homomorfismo, al hacer la factorización canónica $T = I \circ S \circ q$, sabemos que $S : X/\ker T \to T(X)$ es un isomorfismo, pero acabamos de ver que $q : X \to X/\ker T$ es un epimorfismo, mientras que $I : T(X) \to Y$ es un monomorfismo. Por tanto, *todo homomorfismo de espacios normados factoriza como composición de un epimorfismo con un isomorfismo y un monomorfismo.*

Los resultados de este tema nos harán ver que la noción de homomorfismo se maneja con mucha más comodidad cuando trabajamos con espacios de Banach.

10.2. Tres resultados equivalentes

De acuerdo con la discusión anterior, si X e Y son espacios normados y $T \in L(X,Y)$ verifica que $T(X) = Y$, entonces T es un epimorfismo si, y sólo si, T es una aplicación abierta. Pues bien, esta última condición es automática cuando X e Y son espacios de Banach. Este es el contenido del siguiente resultado, también conocido como *teorema de Banach-Schauder:*

Teorema de la aplicación abierta de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y sobreyectivo. Entonces T es una aplicación abierta.*

Como caso particular del resultado anterior, cuando el operador T es biyectivo, obtenemos:

Teorema de los isomorfismos de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador lineal, continuo y biyectivo. Entonces T^{-1} es continuo.*

Este teorema nos dará a su vez una caracterización de los homomorfismos entre espacios de Banach. Sean X e Y espacios de Banach, y para $T \in L(X,Y)$ consideremos la factorización canónica $T = I \circ S \circ q$. Si T es un homomorfismo, sabemos que S es un isomorfismo, y en particular $T(X)$ es isomorfo al cociente $X/\ker T$, que es completo por serlo X, así que $T(X)$ es completo, luego es cerrado en Y. Vemos por tanto que, para que T sea un homomorfismo, es condición necesaria que $T(X)$ sea cerrado en Y. Pues bien, del teorema anterior se deduce que dicha condición también es suficiente: si $T(X)$ es cerrado en Y, entonces S es un operador lineal continuo y biyectivo entre los espacios de Banach $X/\ker T$ y $T(X)$, luego S es un isomorfismo, y T es un homomorfismo. Enunciemos esta consecuencia del resultado anterior:

Teorema del homomorfismo de Banach. *Sean X e Y espacios de Banach, y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y, entonces T es un homomorfismo.*

Aunque hemos destacado solamente la implicación que se deduce del teorema previo, no conviene olvidar que en realidad tenemos una equivalencia: la imagen de un homomorfismo de espacios de Banach siempre es un subespacio cerrado del espacio de llegada.

Del último enunciado se deduce ahora el teorema de la aplicación abierta, pues si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ verifica que $T(X) = Y$, es obvio que $T(X)$ es cerrado en Y, luego T es un homomorfismo y en particular es una aplicación abierta.

Aclarado que los tres teoremas anteriores son equivalentes, abordamos a partir de ahora la demostración del primero de ellos, que vamos a dividir en dos etapas, dosificando las hipótesis, para que quede claro lo que se consigue en cada paso.

10.2.1. Primera etapa: aplicaciones casi-abiertas

Empezamos la demostración con una observación muy sencilla:

- *Sean X e Y espacios normados y B la bola unidad de X. Una aplicación lineal $T : X \to Y$ es abierta si, y sólo si, $T(B)$ es entorno de cero en Y.*

Vemos que $0 \in T(U) \subset T(B)$ donde U es la bola abierta unidad de X. Si T es abierta, se tiene que $T(U)$ es un abierto de Y, luego $T(B)$ es entorno de cero en Y. Recíprocamente, supongamos que $T(B)$ es entorno de cero en Y, y dado un abierto $G \subset X$, veamos que $T(G)$ es abierto en Y. Para $y \in T(G)$ escribimos $y = T(x)$ con $x \in G$, y tenemos $r \in \mathbb{R}^+$ con $x + rB \subset G$, de donde $y + rT(B) \subset T(G)$. Como las homotecias y traslaciones son homeomorfismos de Y, al ser $T(B)$ un entorno de cero, deducimos que $y + rT(B)$ es un entorno de y, luego $T(G)$ también lo es. Por tanto, $T(G)$ es entorno de todos sus puntos, es decir, es abierto. ∎

Usando argumentos de categoría, con hipótesis muy poco restrictivas, vamos a conseguir que un operador lineal tenga que verificar una propiedad ligeramente más débil que la de ser una aplicación abierta, a la que merece la pena dar un nombre. Si X e Y son espacios normados, se dice que una aplicación lineal $T : X \to Y$ es **casi-abierta**, cuando $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y, donde B es la bola unidad de X. Enunciamos ya el primer paso hacia el teorema de la aplicación abierta:

Lema 1. *Sean X e Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Si $T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y, entonces T es una aplicación casi-abierta.*

Demostración. Si B es la bola unidad de X, tenemos claramente $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$, de donde

$$T(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT(B) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T(B)}$$

Como las homotecias son homeomorfismos, vemos que $n\overline{T(B)}$ es un conjunto cerrado en Y para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, ha de existir un $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\overline{T(B)}$ tenga interior no vacío, pues en otro caso $T(X)$ sería de primera categoría en Y, contradiciendo la hipótesis del lema. Usando de nuevo una homotecia, deducimos que $\overline{T(B)}$ tiene interior no vacío, es decir, podemos encontrar $y_0 \in Y$ y $r \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$y \in Y, \quad \|y - y_0\| < r \quad \Longrightarrow \quad y \in \overline{T(B)} \tag{1}$$

Si ahora $z \in Y$ verifica que $\|z\| < r$, podemos usar (1) con $y = y_0 \pm z$, obteniendo dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de puntos de B, tales que $\{T(a_n)\} \to y + z$ y $\{T(b_n)\} \to y - z$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomamos $x_n = (a_n - b_n)/2$, con lo que $\{x_n\}$ es otra sucesión de puntos de B, que claramente verifica $\{T(x_n)\} \to z$, luego $z \in \overline{T(B)}$. Por tanto $\overline{T(B)}$ contiene una bola abierta de centro cero, luego $\overline{T(B)}$ es entorno de cero en Y, como queríamos demostrar. ∎

10.2.2. Segunda etapa: Aproximaciones sucesivas

Pensando en el teorema de la aplicación abierta, la forma en que podemos sacar partido del lema anterior es fácil de adivinar: si Y es un espacio de Banach y el operador lineal T es sobreyectivo, el lema de Baire nos dice que $T(X) = Y$ es de segunda categoría en Y, luego T es una aplicación casi-abierta. Para llegar a que T es abierta usaremos el resto de las hipótesis conforme se vayan necesitando.

Expliquemos intuitivamente el tipo de razonamiento que vamos a hacer, denotando de nuevo por B a la bola unidad de X. Para $y \in Y$ con norma suficientemente pequeña, nos gustaría probar que $y \in T(B)$, es decir, que la ecuación $T(x) = y$ tiene solución $x \in B$. Sabiendo ya que T es casi-abierta, la misma hipótesis sobre y nos permite tener $y \in \overline{T(B)}$, y conseguimos $x \in B$ tal que $T(x)$ está tan cerca de y como se quiera. Por tanto, tenemos soluciones "aproximadas" para ecuaciones del tipo $T(x) = y$, pero queremos conseguir soluciones "exactas".

Para ello usaremos un *método de aproximaciones sucesivas,* es decir, vamos a construir de manera iterativa una sucesión de soluciones aproximadas cada vez mejores, que convergerá a la solución exacta que buscamos. La complitud de X nos permitirá conseguir la convergencia de la sucesión de soluciones aproximadas, mientras que la continuidad de T hará que su límite sea una solución exacta. El método sugerido nos llevará por tanto al siguiente resultado:

Lema 2. *Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Si T es una aplicación casi-abierta, entonces T es una aplicación abierta y, como consecuencia, T es sobreyectiva e Y es completo.*

Demostración. Si B es la bola unidad de X, como T es una aplicación casi-abierta, $\overline{T(B)}$ contiene una bola abierta de centro 0 y radio $\delta \in \mathbb{R}^+$. Fijados $m \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$, si $z \in Y$ verifica que $\|z\| < \delta/2^m$, tendremos $\|2^m z\| < \delta$, luego existe $u \in B$ tal que $\|2^m z - T(u)\| < 2^m \varepsilon$. Tomando entonces $x = u/2^m$ tenemos $x \in X$ verificando que $\|x\| \leqslant 1/2^m$ y $\|z - T(x)\| < \varepsilon$. Destaquemos esta información, que es la que vamos a usar iterativamente:

$$m \in \mathbb{N}, \ \varepsilon > 0, \ z \in Y, \ \|z\| < \frac{\delta}{2^m} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, x \in X \ : \ \|x\| \leqslant \frac{1}{2^m}, \ \|z - T(x)\| < \varepsilon \tag{2}$$

Empezamos nuestro proceso iterativo fijando $y \in Y$ con $\|y\| < \delta/2$ y, en un primer paso usamos (2), con $m = 1$, $\varepsilon = \delta/4$ y $z = y$, obteniendo $x_1 \in X$ que verifica:

$$\|x_1\| \leqslant \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad \|y - T(x_1)\| < \frac{\delta}{4} \tag{3.1}$$

Aunque no es necesario, demos un segundo paso para entender mejor el proceso. La última desigualdad de (3.1) nos permite usar de nuevo (2), con $m = 2$, $\varepsilon = \delta/8$ y $z = y - T(x_1)$. De esta forma obtenemos $x_2 \in X$ que verifica:

$$\|x_2\| \leqslant \frac{1}{4} \qquad \text{y} \qquad \|y - T(x_1) - T(x_2)\| < \frac{\delta}{8} \tag{3.2}$$

Está ya muy claro cuál debe ser nuestra hipótesis de inducción. Dado $n \in \mathbb{N}$, suponemos que ya hemos encontrado vectores $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ verificando que

$$\|x_n\| \leqslant \frac{1}{2^n} \qquad \text{y} \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n} T(x_k) \right\| < \frac{\delta}{2^{n+1}} \tag{3.n}$$

La última desigualdad nos dice entonces que podemos usar (2), con $m = n+1$, $\varepsilon = \delta/2^{n+2}$ y tomando $z = y - \sum_{k=1}^{n} x_k$, para obtener $x_{n+1} \in X$ que verifica

$$\|x_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \text{y} \qquad \left\| y - \sum_{k=1}^{n+1} T(x_k) \right\| < \frac{\delta}{2^{n+2}} \tag{3.n+1}$$

Por inducción, hemos construido una sucesión $\{x_n\}$ de vectores de X que verifica $(3.n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El resto de la demostración es fácil de adivinar.

La serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es absolutamente convergente, ya que: $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Como X es completo, dicha serie es convergente, con lo que podemos escribir

$$x \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \qquad \text{con} \qquad \|x\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leqslant 1$$

Además, como T es lineal y continuo, tenemos

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} T(x_k) = y$$

donde la última igualdad se deduce claramente de $(3.n)$.

Hemos visto que $y \in T(B)$, pero esto es cierto para todo $y \in Y$ que verifique $\|y\| < \delta/2$, luego $T(B)$ es un entorno de cero en Y, es decir, T es una aplicación abierta.

Por ser $T(B)$ un entorno de cero, tenemos $Y = \mathbb{R}^+ T(B) = T(\mathbb{R}^+ B) = T(X)$, luego T es sobreyectivo. Así pues, T es un epimorfismo, cuya factorización canónica nos dice que Y es isomorfo a $X/\ker T$. Como dicho cociente es completo por serlo X, deducimos que también Y es un espacio de Banach, como queríamos demostrar. ■

10.2.3. Fin de la demostración

Encadenando los dos lemas anteriores obtenemos un resultado, del que se deduce fácilmente el teorema de la aplicación abierta, pero que nos da información adicional.

Teorema principal. *Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : X \to Y$ un operador lineal y continuo. Supongamos que $T(X)$ es de segunda categoría en Y. Entonces T es una aplicación abierta y, como consecuencia, T es sobreyectiva e Y es completo.*

Demostración. El lema 1 nos dice que T es una aplicación casi-abierta, con lo que basta aplicar el lema 2. ■

Para deducir el teorema de la aplicación abierta basta observar que, si X e Y son espacios de Banach y $T \in L(X,Y)$ es sobreyectivo, el lema de categoría de Baire nos dice que $T(X) = Y$ es de segunda categoría en Y, con lo que el teorema anterior nos permite concluir que T es una aplicación abierta, como se quería.

Nótese que en el teorema anterior, dos de las hipótesis del teorema de la aplicación abierta, la sobreyectividad de T y la complitud de Y, se obtienen como tesis, aunque a cambio suponemos que $T(X)$ es de segunda categoría en Y. En la práctica, esta hipótesis no es fácil de comprobar, por lo que es el teorema de la aplicación abierta, y no este resultado más fuerte, el que se usa con más frecuencia.

Sin embargo, cuando razonamos por la negativa, el que hemos llamado teorema principal nos da más información. Concretamente, supongamos que X e Y son espacios de Banach y que, para un operador $T \in L(X,Y)$, sabemos que T no es una aplicación abierta. Entonces, el teorema de la aplicación abierta nos dice que T no es sobreyectivo, es decir, $Y \setminus T(X) \neq \emptyset$. En cambio, el teorema principal nos dice que $T(X)$ es de primera categoría en Y, luego $Y \setminus T(X)$ es un conjunto de segunda categoría en Y.

10.3. Dos consecuencias relevantes

En ocasiones, en vez del teorema principal, es más cómodo usar directamente el lema 2, porque se trabaja con un operador cuya imagen en principio no conocemos, pero sabemos que es una aplicación casi-abierta. Esto es lo que ocurrirá en la primera consecuencia de los resultados anteriores que vamos a obtener.

10.3.1. Proyectividad de l_1

Si X es un espacio normado separable y M un subespacio cerrado de X, está claro que el espacio normado cociente X/M es separable. Basta pensar que, si E es un conjunto numerable, denso en X, y $q : X \to X/M$ la aplicación cociente, entonces $q(E)$ es un conjunto numerable, denso en X/M. En particular, todo cociente de l_1 por un subespacio cerrado es un espacio de Banach separable. Por sorprendente que pueda parecer, los resultados anteriores nos van a permitir probar el recíproco:

- **Proyectividad de l_1.** *Todo espacio de Banach separable es isométricamente isomorfo al cociente de l_1 por un subespacio cerrado.*

Sea Y un espacio de Banach separable, con lo que su bola unidad también es separable, luego existe un conjunto numerable $E = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ que es denso en la bola unidad de Y. Para cada $x \in l_1$ vemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n)\, y_n$ es absolutamente convergente, puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| x(n)\, y_n \| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|\, \| y_n \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| = \| x \|_1 \tag{4}$$

Como por hipótesis Y es completo, dicha serie es convergente, lo que nos permite definir una aplicación $T : l_1 \to Y$ escribiendo

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, y_n \qquad \forall x \in l_1$$

Obviamente T es un operador lineal, pero de (4) deducimos que

$$\| T(x) \| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \| x(n)\, y_n \| \leqslant \| x \|_1 \qquad \forall x \in l_1$$

luego T es continuo con $\| T \| \leqslant 1$.

Si B es la bola unidad de l_1, y denotamos por B_Y a la bola unidad de Y, al ser $\|T\| \leqslant 1$ tenemos que $T(B) \subset B_Y$, de donde $\overline{T(B)} \subset B_Y$. Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$ vemos claramente que $y_n = T(e_n)$ donde e_n es el n-ésimo vector unidad. Por tanto $E \subset T(B)$, y como E es denso en B_Y, concluimos que $B_Y \subset \overline{T(B)}$. En resumen, hemos visto que $\overline{T(B)} = B_Y$, luego T es una aplicación casi-abierta.

El lema 2 nos dice que T es una aplicación abierta, y en particular $T(l_1) = Y$. Así pues, T es un epimorfismo, cuya factorización canónica nos da un isomorfismo $S : l_1/\ker T \to Y$, que verifica $T = S \circ q$, donde $q : l_1 \to l_1/\ker T$ es la aplicación cociente. Sólo queda comprobar que S es isométrico.

Fijado $w \in l_1/\ker T$, para todo $x \in l_1$ que verifique $w = q(x)$ se tiene claramente

$$\|S(w)\| = \|S\big(q(x)\big)\| = \|T(x)\| \leqslant \|x\|_1$$

y la definición de la norma cociente nos dice que $\|S(w)\| \leqslant \|w\|$.

Para la otra desigualdad, sea $r = \|S(w)\|$, y pongamos $S(w) = ry$ con $y \in B_Y$. Tenemos entonces $y \in \overline{T(B)}$, luego existe una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de B tal que $\{T(x_n)\} \to y$, de donde obtenemos que $\big\{S\big(q(rx_n)\big)\big\} = \{T(rx_n)\} \to ry = S(w)$. Como S es un isomorfismo, deducimos que $\{q(rx_n)\} \to w$, pero está claro que $\|q(rx_n)\| \leqslant \|rx_n\| \leqslant r\|x_n\|_1 \leqslant r$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\|w\| \leqslant r = \|S(w)\|$ como queríamos demostrar. ■

El nombre del resultado anterior alude a la noción general de objeto proyectivo, que tiene sentido para los espacios de Banach, igual que para otras estructuras algebraicas o topológicas. Si $\mathcal{X}$ es una clase de espacios de Banach, se dice que un espacio de Banach X es **proyectivo** para $\mathcal{X}$, cuando todo elemento de $\mathcal{X}$ es isomorfo al cociente de X por un subespacio cerrado. Si de hecho se tiene que todo $Y \in \mathcal{X}$ es isométricamente isomorfo a un cociente de X, suele decirse que X es **isométricamente proyectivo** para la clase $\mathcal{X}$. Por tanto, acabamos de probar que l_1 *es isométricamente proyectivo para la clase de todos los espacios de Banach separables.* La utilidad de este resultado no está a la altura de su espectacularidad: más que darnos una representación provechosa para trabajar con cualquier espacio de Banach separable, nos informa de cuán variados pueden ser los cocientes de l_1.

10.3.2. Sumas directas en espacios de Banach

Como casi todos los teoremas importantes estudiados hasta ahora, el de la aplicación abierta también da información sobre sumas topológico-directas, probablemente la más general y útil. Para motivarla, recordemos una condición obviamente necesaria para que una suma directa de dos subespacios, sea topológico-directa. Supongamos que un espacio normado X es suma directa de dos subespacios: $X = M \oplus Z$. Si la suma es topológico-directa, está claro que M y Z han de ser cerrados en X, pues cada uno de ellos es el núcleo de la proyección sobre el otro, que es continua. Pues bien, el teorema de la aplicación abierta nos va a permitir probar fácilmente que, cuando X es completo, dicha condición obviamente necesaria, también es suficiente.

- **Sumas directas en espacios de Banach.** *Sea X un espacio de Banach, descompuesto como suma directa de dos subespacios: $X = M \oplus Z$. Si M y Z son cerrados en X, entonces dicha suma es topológico-directa.*

Como M y Z son espacios de Banach, el producto $M \times Z$ también lo es. Ahora bien, por ser $X = M \oplus Z$, tenemos una biyección lineal $\Phi : M \times Z \to X$, dada por $\Phi(y,z) = y + z$ para todo $(y,z) \in M \times Z$. Además Φ es continua, como restricción a $M \times Z$ de la suma de X, que es continua en $X \times X$. Por tanto Φ es un operador lineal continuo y biyectivo entre dos espacios de Banach. Por el teorema de los isomorfismos de Banach, tenemos que Φ es un isomorfismo, pero esta es una de las formas de decir que X es suma topológico-directa de M y Z. ■

10.4. Teorema de la gráfica cerrada

Vamos a obtener otro resultado equivalente a los tres estudiados anteriormente, pero que tiene un planteamiento bastante diferente, por lo que también se usa con otra finalidad. Mientras el teorema de la aplicación abierta, y los dos enunciados equivalentes al mismo, partían siempre de un operador lineal y continuo entre espacios de Banach, ahora vamos a obtener un criterio muy útil, precisamente para comprobar la continuidad de un operador lineal.

Recordemos que la **gráfica** de una función $f : X \to Y$, donde X e Y pueden ser conjuntos cualesquiera, viene dada por

$$\operatorname{Gr} f = \big\{ \big(x, f(x)\big) \,:\, x \in X \big\} \subset X \times Y$$

Cuando X e Y tienen alguna estructura adicional, es frecuente que ciertas propiedades de la función f puedan caracterizarse en términos de su gráfica. Por ejemplo, si X e Y son espacios vectoriales, es fácil ver que f es lineal si, y sólo si, $\operatorname{Gr} f$ es un subespacio de $X \times Y$.

Como es natural, si X e Y son espacios topológicos, decimos que una función $f : X \to Y$ **tiene gráfica cerrada**, cuando $\operatorname{Gr} f$ es un subconjunto cerrado de $X \times Y$, con la topología producto. Es fácil establecer la siguiente relación con la continuidad.

- *Sean X e Y espacios topológicos y supongamos que Y es un espacio de Hausdorff. Entonces toda función continua $f : X \to Y$ tiene gráfica cerrada.*

Probaremos que el conjunto $E = \big(X \times Y\big) \setminus \operatorname{Gr} f$ es abierto. Si $(x,y) \in E$, se tiene $y \neq f(x)$, luego al ser Y de Hausdorff, existen abiertos $V, W \subset Y$, tales que $f(x) \in V$, $y \in W$ y $V \cap W = \emptyset$. Como f es continua, el conjunto $U = f^{-1}(V)$ es un abierto de X con $x \in U$, luego $U \times W$ es entorno de (x,y), con lo que bastará ver que $U \times W \subset E$. En efecto, dado $(u,w) \in U \times W$, se tiene $f(u) \in V$ y $w \in W$, luego $f(u) \neq w$, es decir, $(u,w) \in E$. ■

Ejemplos sencillos, incluso en el caso $X = Y = \mathbb{R}$, muestran que el recíproco del resultado anterior no es cierto. Por ejemplo, fijado $\alpha \in \mathbb{R}$ podemos definir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escribiendo

$$f(t) = \frac{1}{t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{y} \quad f(0) = \alpha$$

Se tiene claramente $\operatorname{Gr} f = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, xy = 1 \big\} \cup \{(0,\alpha)\}$, luego f tiene gráfica cerrada, pero no es continua.

En la práctica, la hipótesis de que Y sea un espacio de Hausdorff siempre está presente, luego debemos pensar que, para una función entre espacios topológicos, tener gráfica cerrada es una propiedad bastante más débil que la continuidad. Se comprende ahora el interés del siguiente resultado:

Teorema de la gráfica cerrada de Banach. *Si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal que tiene gráfica cerrada, entonces T es continuo.*

Demostración. El producto $X \times Y$ es un espacio de Banach y $\operatorname{Gr} T$ es un subespacio cerrado de $X \times Y$, luego $\operatorname{Gr} T$ también es un espacio de Banach. La proyección en primera coordenada, es decir, la aplicación $(x,y) \mapsto x$, es un operador lineal continuo de $X \times Y$ en X, luego también lo será su restricción a la gráfica de T, que es el operador $\Phi : \operatorname{Gr} T \to X$ definido por:

$$\Phi\big(x, T(x)\big) = x \qquad \forall x \in X$$

Es evidente que Φ es biyectivo, luego el teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que Φ^{-1} es continuo, pero es también evidente que

$$\Phi^{-1}(x) = \big(x, T(x)\big) \qquad \forall x \in X$$

Como ocurre con cualquier función que toma valores en un producto de espacios topológicos, la continuidad de Φ^{-1} equivale a la de sus dos componentes, pero su segunda componente es precisamente el operador T, así que T es continuo, como queríamos demostrar. ■

Ha quedado claro que el teorema anterior es una consecuencia casi inmediata del teorema de los isomorfismos de Banach, pero recíprocamente, admitiendo el teorema de la gráfica cerrada, vamos a ver que el de los isomorfismos de Banach resulta casi evidente.

En efecto, si X e Y son espacios de Banach y $T : X \to Y$ es un operador lineal continuo y biyectivo, observamos la clara relación entre las gráficas de T y T^{-1}:

$$\operatorname{Gr} T^{-1} = \big\{ \big(y, T^{-1}(y)\big) \,:\, y \in Y \big\} = \big\{ \big(T(x), x\big) \,:\, x \in X \big\}$$

Vemos que $\operatorname{Gr} T^{-1}$ es la imagen de $\operatorname{Gr} T$ por la aplicación $(x,y) \mapsto (y,x)$, que obviamente es un homeomorfismo de $X \times Y$ sobre $Y \times X$. Como T es continuo, y por supuesto Y es un espacio de Hausdorff, sabemos que T tiene gráfica cerrada, luego T^{-1} también tiene gráfica cerrada. El teorema de la gráfica cerrada nos asegura que T^{-1} es continuo, como queríamos.

10.5. Consecuencias del teorema de la gráfica cerrada

La linealidad de un operador hace que sea muy cómodo averiguar si su gráfica es cerrada. De hecho, comprobamos fácilmente el siguiente criterio, que casi siempre se usa:

- *Si X e Y son espacios normados, un operador lineal $T : X \to Y$ tiene gráfica cerrada si, y sólo si, verifica la siguiente condición:*

$$x_n \in X \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \to 0, \quad \{T(x_n)\} \to y \in Y \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \tag{5}$$

Si T tiene gráfica cerrada y tomamos una sucesión $\{x_n\}$ como en (5), en el producto $X \times Y$ se tiene $\{(x_n, T(x_n))\} \to (0, y)$, luego $(0, y) \in \operatorname{Gr} T$, es decir, $y = T(0) = 0$. Recíprocamente, supongamos (5) para probar que T tiene gráfica cerrada. Si $\{(z_n, T(z_n))\}$ es una sucesión de puntos de $\operatorname{Gr} T$, que converge a $(z, w) \in X \times Y$, debemos ver que $w = T(z)$. Si $x_n = z_n - z$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos $\{x_n\} \to 0$ y $\{T(x_n)\} = \{T(z_n) - T(z)\} \to w - T(z) \in Y$, luego (5) nos dice que $w - T(z) = 0$. ■

Para entender la utilidad de la condición (5), basta compararla con la continuidad de T, que equivale a la continuidad en 0, por lo que puede expresarse como sigue:

$$x_n \in X \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \{Tx_n\} \to 0 \tag{6}$$

Nótese la sutil pero importante diferencia entre (5) y (6): en ambos casos se parte de una sucesión $\{x_n\}$ convergente a cero en X, pero en (6) hay que probar que $\{Tx_n\}$ converge a cero en Y, mientras que en (5) se supone que $\{Tx_n\}$ es convergente y sólo se debe probar que su límite es cero. Cualquiera que tenga experiencia con la convergencia de sucesiones, sabe que lo segundo suele ser más fácil que lo primero: calcular el límite de una sucesión, sabiendo de antemano que la sucesión converge, es mucho más fácil que probar directamente la convergencia de la sucesión. Al obtener algunas consecuencias del teorema de la gráfica cerrada, comprobaremos que efectivamente (6) es mucho más fácil de comprobar que (5), de ahí la gran utilidad del teorema.

Como ejemplo que sirve de motivación, trabajemos en el espacio de Banach $C[0,1]$ de todas las funciones continuas en el intervalo $[0,1]$.

- *Sea $T : C[0,1] \to C[0,1]$ un operador lineal que verifique la siguiente condición: para toda sucesión $\{f_n\}$ en $C[0,1]$ que converja uniformemente a cero en $[0,1]$, se tiene que la sucesión $\{T(f_n)\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$. Entonces T es continuo.*

Nótese que, para probar directamente la continuidad de T, dada una sucesión $\{f_n\}$ como la del enunciado, deberíamos ver que $\{T(f_n)\}$ converge uniformemente a cero en $[0,1]$, pero la hipótesis sólo nos da la convergencia puntual. Sin embargo, como $C[0,1]$ es un espacio de Banach, basta probar que T tiene gráfica cerrada.

Así pues, tomamos una sucesión $\{f_n\}$ como en el enunciado, pero suponemos que $\{T(f_n)\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ a una función $g \in C[0,1]$. Vemos entonces que $\{T(f_n)\}$ converge puntualmente en $[0,1]$ a cero, pero también a g, luego $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, y hemos probado que T tiene gráfica cerrada, como queríamos. ■

Como principal consecuencia del teorema de la gráfica cerrada, probaremos una versión abstracta, y mucho más general, del resultado anterior.

- *Sean X e Y espacios de Banach, y E un subconjunto de Y^* que separe los puntos de Y, es decir, tal que*

  $$y \in Y, \quad y^*(y) = 0 \ \ \forall y^* \in E \quad \Longrightarrow \quad y = 0$$

  Todo operador lineal $T : X \to Y$, tal que $y^* \circ T \in X^*$ para todo $y^* \in E$, es continuo.

Para $\{x_n\} \to 0$ en X, supongamos que $\{T(x_n)\} \to y \in Y$. Fijado un $y^* \in E$, se tiene entonces que $\{y^*\big(T(x_n)\big)\} \to y^*(y)$, pero de $\{x_n\} \to 0$ se deduce que $\{y^*\big(T(x_n)\big)\} \to 0$, ya que $y^* \circ T$ es continuo. Por tanto, $y^*(y) = 0$, lo cual es válido para todo $y^* \in E$. Como E separa los puntos de Y, concluimos que $y = 0$. Esto prueba que T tiene gráfica cerrada, luego es continuo. ■

El resultado probado previamente en $C[0,1]$ es caso particular de este. Para verlo usamos, para cada $t \in [0,1]$, el funcional de Dirac δ_t dado por $\delta_t(f) = f(t)$ para toda $f \in C[0,1]$. Sabemos que $E = \{\delta_t : t \in [0,1]\} \subset C[0,1]^*$, y es claro que E separa los puntos de $C[0,1]$. Finalmente, suponer que $\delta_t \circ T$ es continuo para todo $t \in [0,1]$, equivale a suponer que, para toda sucesión $\{f_n\}$ que converja uniformemente a cero en $[0,1]$, se tiene que $\{\delta_t\big(T(x_n)\big)\} \to 0$ para todo $t \in [0,1]$, es decir, que $\{T(f_n)\}$ converge puntualmente a cero en $[0,1]$.

En general, para un espacio de Banach arbitrario Y, siempre podemos usar $E = Y^*$, pues el teorema de Hahn-Banach nos asegura que Y^* separa los puntos de Y. Sin embargo, si Y es un espacio de Banach concreto, no suele ser necesario tomar $E = Y^*$, es decir, se dispone de un conjunto $E \subset Y^*$, que separa los puntos de Y, pero está muy lejos de coincidir con Y^*. Es lo que ha ocurrido antes con los funcionales de Dirac en el caso $Y = C[0,1]$. Otro ejemplo destacable es el siguiente:

- *Sea X un espacio de Banach, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $T : X \to l_p$ un operador lineal. Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, el funcional lineal $x \mapsto \big(T(x)\big)(n)$ es continuo. Entonces T es continuo.*

Fijado $n \in \mathbb{N}$, escribimos $y_n^*(y) = y(n)$ para todo $y \in l_p$, y es claro que $y_n^* \in l_p^*$. También es evidente que el conjunto $E = \{y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ separa los puntos de l_p. Por hipótesis, $y_n^* \circ T \in X^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego el resultado anterior nos dice que T es continuo. ■

Tema 11

Espacios de Hilbert

Este último tema está dedicado a los espacios de Banach más perfectos desde un punto de vista geométrico, pues verifican todos los postulados de la geometría euclídea. Con el estudio, por parte de David Hilbert (1862-1943) y su escuela, de las formas cuadráticas en infinitas variables, aparecen los primeros espacios de Hilbert de dimensión infinita, y puede decirse que arranca, en los albores del siglo XX, la prehistoria del Análisis Funcional.

Como primer resultado relevante, caracterizamos los espacios de Hilbert, entre los espacios de Banach, mediante la *identidad del paralelogramo*, para pasar inmediatamente al estudio del resultado sin duda más importante: el *teorema de la proyección ortogonal*. Como consecuencia más destacable, probamos el *teorema de Riesz-Fréchet*, que permite identificar cada espacio de Hilbert con su dual.

Además, del teorema de la proyección ortogonal se deduce que todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado, una propiedad que obviamente se conserva por isomorfismos. Hoy día se sabe que, recíprocamente, un espacio de Banach en el que todos los subespacios cerrados estén complementados, ha de ser isomorfo a un espacio de Hilbert.

11.1. Formas sexquilineales y formas cuadráticas

Necesitamos algunas nociones básicas bien sencillas, que nos llevarán a la definición de los espacios de Hilbert. En lo que sigue, para evitar repeticiones, fijamos un espacio vectorial X.

Una **forma sexquilineal** en X es una aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{K}$ que verifica las siguientes dos condiciones:

(i) Es lineal en la primera variable, es decir, para cada $y \in X$ se tiene:

$$\varphi\big(\lambda x + z, y\big) = \lambda\, \varphi\big(x, y\big) + \varphi\big(z, y\big) \qquad \forall x, z \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

(ii) Es **conjugado-lineal** en la segunda variable, es decir, para cada $x \in X$ se tiene:

$$\varphi\big(x, \lambda y + z\big) = \overline{\lambda}\, \varphi\big(x, y\big) + \varphi\big(x, z\big) \qquad \forall y, z \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$$

Como es habitual, para $\lambda \in \mathbb{K}$, estamos denotando por $\overline{\lambda}$ al escalar conjugado de λ. En el caso real, se tiene $\overline{\lambda} = \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, luego una forma sexquilineal no es otra cosa que una forma bilineal, es decir, lineal en cada variable.

Se dice ahora que la forma sexquilineal φ es **hermítica**, cuando verifica que:

$$\varphi(y,x) = \overline{\varphi(x,y)} \qquad \forall x,y \in X$$

En el caso real, esto es tanto como decir que φ es una forma bilineal simétrica.

Si φ es una forma sexquilineal hermítica, es claro que $\varphi(x,x) \in \mathbb{R}$ para todo $x \in X$. Se dice entonces que la aplicación

$$Q : X \to \mathbb{R}, \qquad Q(x) = \varphi(x,x) \quad \forall x \in X$$

es la **forma cuadrática** asociada a φ. Se entiende por tanto que, una aplicación $Q : X \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática en X, cuando existe una forma sexquilineal hermítica φ en X, verificando que $Q(x) = \varphi(x,x)$ para todo $x \in X$. Vamos a comprobar que entonces φ es única y se obtiene fácilmente a partir de Q.

Identidad de polarización. *Sea Q la forma cuadrática asociada a una forma sexquilineal hermítica φ. Se tiene entonces*

$$4\,\text{Re}\,\varphi(x,y) = Q(x+y) - Q(x-y) \qquad \forall x,y \in X \tag{1}$$

y por tanto, φ es la única forma sexquilineal hermítica cuya forma cuadrática asociada es Q.

Demostración. La igualdad (1) es inmediata, pues para $x,y \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} Q(x+y) - Q(x-y) &= \varphi(x+y,x+y) - \varphi(x-y,x-y) \\ &= 2\varphi(x,y) + 2\varphi(y,x) = 2\varphi(x,y) + 2\overline{\varphi(x,y)} \\ &= 4\,\text{Re}\,\varphi(x,y) \end{aligned}$$

En el caso real, está ya bien claro que φ queda determinada por Q.

En el caso complejo, también para $x,y \in X$ se tiene

$$\text{Im}\,\varphi(x,y) = \text{Re}\,\big[-i\varphi(x,y)\big] = \text{Re}\,\varphi(x,iy)$$

luego usando (1) deducimos que

$$4\,\text{Im}\,\varphi(x,y) = Q(x+iy) - Q(x-iy) \qquad \forall x,y \in X$$

Se tiene por tanto,

$$4\,\varphi(x,y) = Q(x+y) - Q(x-y) + i\,Q(x+iy) - i\,Q(x-iy) \qquad \forall x,y \in X$$

y esto prueba que φ queda determinada por Q, también en el caso complejo. ■

De esta forma, hemos obtenido una correspondencia biunívoca entre formas sexquilineales hermíticas y formas cuadráticas. Usaremos solamente un tipo particular de formas cuadráticas, que enseguida vamos a definir.

11.2. Productos escalares y espacios de Hilbert

Seguimos manteniendo fijo el espacio vectorial X en el que trabajamos. Se dice que una forma cuadrática $Q : X \to \mathbb{R}$ es **positiva**, cuando $Q(x) \in \mathbb{R}_0^+$ para todo $x \in X$. La siguiente propiedad clave de las formas cuadráticas positivas es el punto de partida obligado para el estudio de los espacios de Hilbert.

Desigualdad de Cauchy-Schwartz. *Sea φ una forma sexquilineal hermítica en X, cuya forma cuadrática asociada Q es positiva. Entonces:*

$$\big|\varphi\big(x,y\big)\big| \leqslant Q(x)^{1/2}\, Q(y)^{1/2} \qquad \forall x,y \in X \tag{2}$$

Como consecuencia, la función $x \mapsto Q(x)^{1/2}$ es una seminorma en X.

Demostración. Fijados $x,y \in X$, para todo $t \in \mathbb{R}$ tenemos claramente

$$\begin{aligned} 0 \leqslant Q(x-ty) &= \varphi\big(x,x\big) - t\,\varphi\big(x,y\big) - t\,\varphi\big(y,x\big) + t^2\varphi\big(y,y\big) \\ &= Q(x) - 2\,t\,\mathrm{Re}\,\varphi\big(x,y\big) + t^2 Q(y) \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo,

$$2\,t\,\mathrm{Re}\,\varphi\big(x,y\big) \leqslant Q(x) + t^2 Q(y) \qquad \forall t \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Si $Q(y) > 0$, tomando $t = \mathrm{Re}\,\varphi\big(x,y\big)/Q(y)$, obtenemos claramente

$$\big|\,\mathrm{Re}\,\varphi\big(x,y\big)\big| \leqslant Q(x)^{1/2}\, Q(y)^{1/2} \tag{4}$$

Pero si $Q(y) = 0$, se ha de tener $\mathrm{Re}\,\varphi\big(x,y\big) = 0$, pues en otro caso podríamos tomar $t \in \mathbb{R}$ de forma que $2\,t\,\mathrm{Re}\,\varphi\big(x,y\big) > Q(x)$, lo que contradice (3). Así pues, se verifica (4) para cualesquiera $x,y \in X$, luego hemos probado (2) en caso real.

En caso complejo, fijando de nuevo $x,y \in X$, tomamos $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ de forma que se tenga $\big|\varphi\big(x,y\big)\big| = \alpha\,\varphi\big(x,y\big) = \varphi\big(\alpha x,y\big)$. Es claro entonces que $\varphi\big(\alpha x,y\big) \in \mathbb{R}_0^+$, así como que $Q(\alpha x) = Q(x)$, luego usando (4) con αx en lugar de x, obtenemos

$$\big|\varphi\big(x,y\big)\big| = \varphi\big(\alpha x,y\big) = \big|\,\mathrm{Re}\,\varphi\big(\alpha x,y\big)\big| \leqslant Q(\alpha x)^{1/2}\, Q(y)^{1/2} = Q(x)^{1/2}\, Q(y)^{1/2}$$

y hemos probado (2) en caso complejo.

Para ver que la función $x \mapsto Q(x)^{1/2}$ es una seminorma en X, la desigualdad triangular es ya inmediata, pues para cualesquiera $x,y \in X$ se tiene

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= Q(x) + Q(y) + 2\,\mathrm{Re}\,\varphi\big(x,y\big) \leqslant Q(x) + Q(y) + 2\big|\varphi\big(x,y\big)\big| \\ &\leqslant Q(x) + Q(y) + 2\,Q(x)^{1/2}\, Q(y)^{1/2} = \big(Q(x)^{1/2} + Q(y)^{1/2}\big)^2 \end{aligned}$$

Finalmente es claro que, para $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene $Q(\alpha x) = |\alpha|^2\, Q(x)$. ■

Está bien clara la condición que nos permite obtener una norma en X. Se dice que una forma cuadrática Q es **definida positiva**, cuando $Q(x) \in \mathbb{R}^+$ para todo $x \in X \setminus \{0\}$. Como toda forma cuadrática Q verifica que $Q(0) = 0$, si Q es definida positiva, vemos que Q es positiva.

Pues bien, un **producto escalar** en X es una forma sexquilineal hermítica φ en X, cuya forma cuadrática asociada es definida positiva. Habitualmente, un producto escalar se denota por $(x,y) \mapsto \big(x\,|\,y\big)$, para $x,y \in X$, y se dice que $\big(x\,|\,y\big)$ es el producto escalar de x por y. La anterior definición de producto escalar es redundante, pues al ser una forma lineal en la primera variable, la condición para ser hermítica ya hace que sea conjugado-lineal en la segunda variable. Vemos por tanto que una aplicación $(x,y) \mapsto \big(x\,|\,y\big)$, de $X \times X \to \mathbb{K}$, es un producto escalar en X si, y sólo si, verifica las tres condiciones siguientes:

(a) $\big(\lambda x + z\,|\,y\big) = \lambda\,\big(x\,|\,y\big) + \big(z\,|\,y\big) \qquad \forall x,y,z \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

(b) $\big(y\,|\,x\big) \,=\, \overline{\big(x\,|\,y\big)} \qquad \forall x,y \in X$

(c) $\big(x\,|\,x\big) \in \mathbb{R}^+ \qquad \forall x \in X \setminus \{0\}$

Un **espacio pre-hilbertiano** es un espacio vectorial X, dotado de un producto escalar. Se considera automáticamente a X como un espacio normado, cuya norma viene dada por

$$\|x\| \,=\, \big(x\,|\,x\big)^{1/2} \qquad \forall x \in X$$

Así pues, un espacio pre-hilbertiano no es más que un espacio normado X, cuya norma procede de un producto escalar, mediante la igualdad anterior. A su vez, el producto escalar de X viene determinado por su norma, mediante la identidad de polarización, que toma la forma:

$$4\,\mathrm{Re}\,\big(x\,|\,y\big) \,=\, \|x+y\|^2 \,-\, \|x-y\|^2 \qquad \forall x,y \in X$$

En el caso complejo, basta observar que $\mathrm{Im}\,\big(x\,|\,y\big) \,=\, \mathrm{Re}\,\big(x\,|\,iy\big)$ para cualesquiera $x,y \in X$.

Deducimos claramente que, si Y es otro espacio pre-hilbertiano, cuyos producto escalar y norma denotamos como los de X, y $T : X \to Y$ es un operador lineal isométrico, entonces T preserva el producto escalar, es decir, $\big(T(x)\,\big|\,T(z)\big) \,=\, \big(x\,|\,z\big)$ para cualesquiera $x,z \in X$. En particular, si T es un isomorfismo isométrico, entonces T identifica totalmente X con Y, no sólo como espacios normados, sino también como espacios pre-hilbertianos.

En un espacio pre-hilbertiano X, la desigualdad de Cauchy-Schwartz toma la forma

$$\big|\big(x\,|\,y\big)\big| \,\leqslant\, \|x\|\,\|y\| \qquad \forall x,y \in X$$

que nos permite obtener la siguiente consecuencia.

- *El producto escalar de un espacio pre-hilbertiano X es una función continua en $X \times X$.*

Basta observar que, fijados $u,v \in X$, para cualesquiera $x,y \in X$ se tiene

$$\big(x\,|\,y\big) - \big(u\,|\,v\big) \,=\, \big(x-u\,|\,y\big) + \big(u\,|\,y-v\big)$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que

$$\big|\big(x\,|\,y\big) \,-\, \big(u\,|\,v\big)\big| \,\leqslant\, \|x-u\|\,\|y\| \,+\, \|u\|\,\|v-y\|$$

lo que implica claramente que el producto escalar es continuo en el punto (u,v). ■

Por otra parte, para cualquier espacio pre-hilbertiano, vamos a discutir la posibilidad de que se tenga la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwartz, o en la triangular.

- *Sea X un espacio pre-hilbertiano y $x, y \in X$ con $y \neq 0$. Entonces:*

$$\begin{array}{lll} (i) \ \ |(x|y)| = \|x\| \, \|y\| & \Longleftrightarrow & \exists \, \lambda \in \mathbb{K} \, : \, x = \lambda y \\ (ii) \ \ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| & \Longleftrightarrow & \exists \, \rho \in \mathbb{R}_0^+ \, : \, x = \rho y \end{array}$$

(i) Suponiendo que $|(x|y)| = \|x\| \, \|y\|$, basta tomar $\lambda = (x|y)/\|y\|^2$. En efecto, se tiene $|\lambda|^2 = |(x|y)|^2/\|y\|^4 = \|x\|^2/\|y\|^2$ y también $\overline{\lambda}(x|y) = \|x\|^2$, de donde

$$\|x - \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + |\lambda|^2 \, \|y\|^2 - 2 \ \mathrm{Re} \left(\overline{\lambda}(x,|y) \right) = 0$$

luego $x = \lambda y$ como se quería. El recíproco es aún más fácil, pues si $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene $\|x\| = |\lambda| \, \|y\|$, de donde $|(x|y)| = |(\lambda y|y)| = |\lambda| \, \|y\|^2 = \|x\| \, \|y\|$.

(ii) Recordamos la prueba de la desigualdad triangular. basada en la de Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \ \mathrm{Re}(x|y) \leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \, \big|(x|y)\big| \\ &\leqslant \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \, \|x\| \, \|y\| = \big(\|x\| + \|y\| \big)^2 \end{aligned}$$

Entonces, $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ equivale a que se tenga $\mathrm{Re}(x|y) = |(x|y)| = \|x\| \, \|y\|$. Usando (i) la segunda igualdad equivale a $x = \rho y$ con $\rho \in \mathbb{K}$, pero entonces $(x|y) = \rho \, \|y\|^2$ y la primera igualdad equivale a que se tenga $\rho \, \|y\|^2 \in \mathbb{R}_0^+$, es decir, $\rho \in \mathbb{R}_0^+$. ■

Presentamos ya los espacios que más nos interesan. Un **espacio de Hilbert** es un espacio pre-hilbertiano cuya norma es completa, o lo que es lo mismo, un espacio de Banach cuya norma procede de un producto escalar. Seguidamente vamos a mostrar varios ejemplos concretos de espacios de Hilbert. Para el primero, basta recordar el producto escalar usual en $\mathbb{R}^N$, cuya versión en caso complejo es fácil de adivinar. Obtenemos claramente el siguiente resultado:

- *Para todo $N \in \mathbb{N}$, se tiene que l_2^N es un espacio de Hilbert, cuyo producto escalar es:*

$$\big(x \big| y \big) = \sum_{k=1}^{N} x(k) \, \overline{y(k)} \qquad \forall x, y \in l_2^N$$

Obsérvese que la desigualdad de Cauchy-Schwartz en el espacio l_2^N es caso particular de la de Hölder, pues la segunda nos permite escribir:

$$\big| \big(x \big| y \big) \big| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |x(k)| \, \big|\overline{y(k)}\big| = \sum_{k=1}^{N} |x(k)| \, |y(k)| \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{K}^N$$

Razonando con sucesiones de forma análoga a como lo hemos hecho en $\mathbb{K}^N$, encontramos el primer ejemplo de espacio de Hilbert de dimensión infinita. Para $x, y \in l_2$, sabemos que la serie $\sum_{n \geqslant 1} x(n) \, \overline{y(n)}$ es absolutamente convergente, lo que permite claramente definir un producto escalar en l_2 que da lugar a su norma.

- *El espacio de sucesiones* l_2 *es un espacio de Hilbert, con el producto escalar dado por*

$$\big(x\,|\,y\big) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\,\overline{y(n)} \qquad \forall x,y \in l_2$$

Recordemos que el subespacio $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} \subset l_2$, formado por las sucesiones de soporte finito, es denso en l_2 pero no es cerrado, lo que nos da el primer ejemplo de un espacio pre-hilbertiano que no es completo.

Como se puede ya adivinar, nuestro tercer ejemplo de espacio de Hilbert es el espacio de Lebesgue L_2. Para $f,g \in L_2$, la desigualdad integral de Hölder nos dice que $f\,\overline{g} \in L_1$, y esto permite claramente definir un producto escalar en L_2 que da lugar a su norma:

- *El espacio de Lebesgue* L_2 *es un espacio de Hilbert, con el producto escalar dado por*

$$\big(f\,|\,g\big) = \int_0^1 f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \qquad \forall f,g \in L_2$$

Nótese que la desigualdad de Cauchy-Schwartz en el espacio de Hilbert L_2 no es más que la desigualdad integral de Hölder para $p=2$. Puesto que $C[0,1]$ puede verse como subespacio denso en L_2, que no es cerrado, tenemos que $C[0,1]$, no con su norma natural que es la del máximo, sino con la inducida por L_2, es otro ejemplo de espacio pre-hilbertiano no completo.

11.3. La identidad del paralelogramo

Es natural buscar una caracterización de los espacios pre-hilbertianos entre los espacios normados, o lo que es lo mismo, una caracterización de las normas que proceden de un producto escalar. Entre las muchas respuestas que se conocen a esta pregunta, veremos la más clásica.

Si X es un espacio pre-hilbertiano, se tiene claramente

$$\|x+y\|^2 = \big(x+y\,|\,x+y\big) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\ \mathrm{Re}\,\big(x\,|\,y\big) \qquad \forall x,y \in X$$

Hacemos desaparecer el producto escalar, sumando miembro a miembro esta igualdad con la que se obtiene al sustituir y por $-y$, con lo que tenemos

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 \qquad \forall x,y \in X \tag{5}$$

Esta propiedad recibe el nombre de **identidad del paralelogramo**, por su obvia interpretación geométrica: en todo paralelogramo, la suma de los cuadrados de las diagonales coincide con la suma de los cuadrados de los lados.

Pero lo importante de la igualdad (5) es que en ella no aparece el producto escalar de X, sino solamente su norma. Podemos decir que un espacio normado X verifica la identidad del paralelogramo cuando se cumple (5). Tenemos así una condición necesaria para que una norma proceda de un producto escalar. Como la forma de obtenerla ha sido tan sencilla, no parece que tal condición pueda ser suficiente, pero vamos a probar que sí lo es.

Teorema (Jordan-Von Neumann, 1935). *Un espacio normado es pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo.*

Demostración. Como ya conocemos una implicación, dado un espacio normado X, que verifica la identidad del paralelogramo, se trata de probar que la norma de X procede de un producto escalar. En vista de la identidad de polarización, está claro que debemos considerar la aplicación $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$4\,\varphi\big(x\,,y\big) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \qquad \forall x,y \in X \tag{6}$$

pues en el caso real, el producto escalar que buscamos no puede ser otro que φ, mientras que en el caso complejo, φ ha de ser la parte real de dicho producto escalar.

Dados $u,v,y \in X$ la identidad del paralelogramo nos dice que

$$\begin{aligned} 4\varphi\big(u+v\,,y\big) &= \|u+v+y\|^2 - \|u+v-y\|^2 \\ &= 2\,\|u+y\|^2 + 2\,\|v\|^2 - \|u+y-v\|^2 - 2\,\|u\|^2 - 2\,\|v-y\|^2 + \|u-v+y\|^2 \\ &= 2\,\|u+y\|^2 + 2\,\|v\|^2 - 2\,\|u\|^2 - 2\|v-y\|^2 \end{aligned}$$

Sumando esta igualdad con la que se obtiene al intercambiar u y v, vemos que

$$8\varphi\big(u+v\,,y\big) = 2\,\|u+y\|^2 - 2\,\|u-y\|^2 + 2\,\|v+y\|^2 - 2\,\|v-y\|^2$$

El segundo miembro es, por definición, $8\varphi\big(u\,,y\big) + 8\varphi\big(v\,,y\big)$, luego hemos probado que

$$\varphi\big(u+v\,,y\big) = \varphi\big(u\,,y\big) + \varphi\big(v\,,y\big) \qquad \forall u,v,y \in X \tag{7}$$

Consideramos ahora el conjunto

$$E = \big\{\alpha \in \mathbb{R} \,:\, \varphi\big(\alpha x\,,y\big) = \alpha\varphi\big(x\,,y\big)\ \ \forall x,y \in X\big\}$$

que no es vacío, pues $0,1 \in E$. Dados $\alpha,\beta \in E$ y $x,y \in X$, usando (7) se tiene

$$\varphi\big((\alpha-\beta)x\,,y\big) + \beta\,\varphi\big(x\,,y\big) = \varphi\big((\alpha-\beta)x\,,y\big) + \varphi\big(\beta x\,,y\big) = \varphi\big(\alpha x\,,y\big) = \alpha\,\varphi\big(x\,,y\big)$$

de donde se deduce que $\alpha-\beta \in E$. Pero además, si $\beta \neq 0$, observamos que

$$\beta\,\varphi\big((\alpha/\beta)x\,,y\big) = \varphi\big(\beta(\alpha/\beta)x\,,y\big) = \varphi\big(\alpha x\,,y\big) = \alpha\,\varphi\big(x\,,y\big)$$

y deducimos que $\alpha/\beta \in E$. En resumen, E es un subcuerpo de $\mathbb{R}$, luego se tiene $\mathbb{Q} \subset E$.

Fijados $x,y \in X$, usamos la función $f_{xy} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ por

$$f_{xy}(\alpha) = \big(\alpha x\,\big|\,y\big) - \alpha\big(x\,\big|\,y\big) = (1/4)\|\,\alpha x + y\,\|^2 - (1/4)\|\,\alpha x - y\,\|^2 - \alpha\big(x\,\big|\,y\big)$$

La continuidad de la suma, el producto por escalares y la norma de X nos dicen que f_{xy} es una función continua, luego el conjunto $E_{xy} = f_{xy}^{-1}\big(\{0\}\big)$ es cerrado en $\mathbb{R}$. Ahora bien, E es la intersección de todos los conjuntos de la forma E_{xy} con $x,y \in X$, luego E también es cerrado. Como $\mathbb{Q} \subset E$, concluimos que $E = \mathbb{R}$. Esto significa que

$$\varphi\big(\alpha x\,,y\big) = \alpha\,\varphi\big(x\,,y\big) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \ \forall x,y \in X \tag{8}$$

En el caso real, es ya fácil completar la demostración. En (7) y (8) tenemos que φ es lineal en la primera variable, pero en (6) vemos claramente que $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$ para cualesquiera $x,y \in X$, luego φ es una forma bilineal simétrica en X. Pero de nuevo (6) nos dice que $\varphi(x,x) = \|x\|^2$ para todo $x \in X$, luego la forma cuadrática asociada a φ es definida positiva, y φ es el producto escalar que buscábamos.

En el caso complejo, debemos considerar la aplicación $\psi : X \times X \to \mathbb{C}$ dada por

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) + i\varphi(x,iy) \qquad \forall x,y \in \mathbb{R} \tag{9}$$

pues ψ ha de ser el producto escalar que buscamos. Las propiedades que ψ debe verificar, se deducirán de las de φ, con una observación clave: para $x,y \in X$, como X es un espacio normado complejo, se tiene $\|x+iy\| = \|ix-y\|$, así como $\|x-iy\| = \|ix+y\|$, luego

$$\varphi(x,iy) = -\varphi(ix,y) \qquad \forall x,y \in X \tag{10}$$

Veamos entonces que ψ es lineal en la primera variable, sin olvidar que ahora $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Para cualesquiera $x,y,z \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, de (7) y (8) deducimos claramente que

$$\psi(x+z,y) = \psi(x,y) + \psi(z,y) \qquad \text{y} \qquad \psi(\alpha x,y) = \alpha\,\psi(x,y)$$

luego sólo queda comprobar que $\psi(ix,y) = i\,\psi(x,y)$, pero esto se deduce de (10), ya que

$$\begin{aligned}\psi(ix,y) &= \varphi(ix,y) + i\,\varphi(ix,iy) = -\varphi(x,iy) - i\,\varphi(x,-y)\\ &= i\,\big[i\,\varphi(x,iy) + \varphi(x,y)\big] = i\,\psi(x,y)\end{aligned}$$

Por otra parte, para $x,y \in X$, también deducimos de (10) que

$$\psi(y,x) = \varphi(y,x) + i\,\varphi(y,ix) = \varphi(x,y) - i\,\varphi(x,iy) = \overline{\psi(x,y)}$$

Como ya teníamos linealidad en la primera variable, la última igualdad nos dice que ψ es una forma sexquilineal hermítica. Finalmente, para $x \in X$, usando (10) y el hecho de que φ es simétrica, obtenemos $\varphi(x,ix) = -\varphi(ix,x) = -\varphi(x,ix)$, luego $\varphi(x,ix) = 0$, de donde

$$\psi(x,x) = \varphi(x,x) + i\,\varphi(x,ix) = \|x\|^2 \qquad \forall x \in X$$

Por tanto, la forma cuadrática asociada a ψ es definida positiva, luego ψ es el producto escalar que buscábamos. ■

El teorema anterior tiene varias consecuencias inmediatas que conviene destacar. Para la primera de ellas, dado un espacio normado X, usaremos el espacio real subyacente $X_{\mathbb{R}}$, que obviamente es también un espacio normado, con la misma norma que X. Como la identidad del paralelogramo no involucra el producto por escalares, se tiene:

- *Un espacio normado complejo X es pre-hilbertiano si, y sólo si, lo es $X_{\mathbb{R}}$.*

Conviene aclarar que, cuando X y $X_{\mathbb{R}}$ son espacios pre-hilbertianos, aunque ambos tienen la misma norma, sus productos escalares no pueden coincidir. Esto puede verse en la demostración del teorema anterior, pues el producto escalar de $X_{\mathbb{R}}$ es la aplicación φ definida en (6), mientras que el de X es la aplicación ψ, dada por (9). Por tanto, la relación entre ambos productos escalares está bien clara: para cualesquiera $x, y \in X$ se tiene

$$\psi(x,y) = \varphi(x,y) + i\,\varphi(x,iy), \qquad \text{o bien,} \qquad \varphi(x,y) = \operatorname{Re}\psi(x,y)$$

Por otra parte, como la identidad del paralelogramo sólo involucra dos vectores de nuestro espacio normado, deducimos lo siguiente:

- *Un espacio normado es pre-hilbertiano si, y sólo si, lo son todos sus subespacios de dimensión* 2.

Uniendo las dos observaciones anteriores, para saber si un espacio normado X, es o no un espacio pre-hilbertiano, sólo tenemos que examinar los subespacios bidimensionales de $X_{\mathbb{R}}$.

Para una tercera observación, sea M un subespacio de un espacio normado X, con la norma inducida. Si X es pre-hilbertiano, está claro que M también lo es, pues al restringir a $M \times M$ el producto escalar de X, se tiene un producto escalar en M que obviamente da lugar a la norma inducida. El teorema anterior nos permite comprobar que el recíproco es cierto, siempre que M sea denso en X. Para ello basta ver los dos miembros de la identidad del paralelogramo como funciones continuas de dos variables, $x, y \in X$, definidas en $X \times X$, con lo que el conjunto E de los pares $(x,y) \in X \times X$ que verifican dicha identidad es cerrado. Como M es pre-hilbertiano, tenemos $M \times M \subset E$, pero por ser M denso en X, también $M \times M$ es denso en $X \times X$ y concluimos que $E = X \times X$. Hemos probado:

- *Sea X un espacio normado y M un subespacio denso en X. Si M, con la norma inducida por X, es un espacio pre-hilbertiano, entonces X también lo es. Equivalentemente, la completación de un espacio pre-hilbertiano es un espacio de Hilbert.*

Podemos ahora averiguar fácilmente, cuáles de los espacios de Banach presentados en su momento como ejemplos, son espacios de Hilbert. Para $N \in \mathbb{N}$ con $N > 1$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, usemos los dos primeros vectores, e_1 y e_2, en la base usual de $\mathbb{K}^N$. Es claro que $\| e_1 \|_p = \| e_2 \|_p = 1$, mientras que $\| e_1 \pm e_2 \|_p = 2^{1/p}$ si $p < \infty$, y $\| e_1 \pm e_2 \|_\infty = 1$. Vemos entonces que

$$\big(\| e_1 + e_2 \|_\infty\big)^2 + \big(\| e_1 - e_2 \|_\infty\big)^2 = 2 \neq 4 = 2\big(\| e_1 \|_\infty\big)^2 + 2\big(\| e_2 \|_\infty\big)^2$$

luego l_∞^N no verifica la identidad del paralelogramo. Si $1 \leqslant p < \infty$ y l_p^N la verifica, tenemos

$$2 \cdot 2^{2/p} = \big(\| e_1 + e_2 \|_p\big)^2 + \big(\| e_1 - e_2 \|_p\big)^2 = 2\big(\| e_1 \|_p\big)^2 + 2\big(\| e_2 \|_p\big)^2 = 4$$

de donde se deduce que $p = 2$ y hemos obtenido el resultado que sigue.

- *Para $N \in \mathbb{N}$ con $N \geqslant 2$ y $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l_p^N es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$.*

Observemos ahora que para $1 \leqslant p < \infty$, el espacio de sucesiones l_p contiene un subespacio isométricamente isomorfo a l_p^2, luego l_p sólo puede ser un espacio de Hilbert para $p = 2$. En el caso $p = \infty$, vemos también que l_∞^2 es isométricamente isomorfo a un subespacio de c_0, luego c_0 no es un espacio de Hilbert, y por tanto l_∞ tampoco puede serlo. En resumen, para los espacios clásicos de sucesiones, tenemos:

- *Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$, se tiene que l_p es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$. Por su parte, c_0 tampoco es un espacio de Hilbert.*

En cuanto a los espacios de Lebesgue, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ sabemos que l_p es isométricamente isomorfo a un subespacio de L_p. Por tanto:

- *Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ se tiene que L_p es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$.*

Si Γ es un conjunto no numerable, está claro que el espacio de funciones acotadas $l_\infty(\Gamma)$ contiene un subespacio isométricamente isomorfo a l_∞^2, por lo que $l_\infty(\Gamma)$ no es un espacio de Hilbert, como ocurría cuando Γ es numerable.

Comentemos finalmente que el espacio de Banach $C[0,1]$, con la norma del máximo, no es un espacio de Hilbert. Para verlo, basta considerar por ejemplo las funciones $f, g \in C[0,1]$ definidas por $f(t) = 1$ y $g(t) = t$ para todo $t \in [0,1]$. Se tiene claramente que

$$\| f+g \|^2 + \| f-g \|^2 = 5 \neq 4 = 2\| f \|^2 + 2\| g \|^2$$

luego $C[0,1]$ no verifica la identidad del paralelogramo. De hecho, no es difícil comprobar que, si K es un espacio topológico compacto y de Hausdorff, que no se reduce a un punto, entonces el espacio de Banach $C(K)$ no es un espacio de Hilbert.

11.4. Mejor aproximación en espacios de Hilbert

La identidad del paralelogramo permite obtener muy fácilmente un resultado clave, sobre existencia y unicidad de mejores aproximaciones en espacios de Hilbert, que nos llevará después al teorema más importante referente a dichos espacios. A partir de ahora trabajaremos siempre en un espacio de Hilbert, con lo que casi nunca se pierde generalidad, pues en el caso de un espacio pre-hilbertiano no completo, siempre podemos considerar su completación.

Teorema de aproximación óptima. *Sea M un subconjunto no vacío, convexo y cerrado, de un espacio de Hilbert H. Entonces, cada $x \in H$ tiene una única mejor aproximación en M, es decir: para cada $x \in H$, existe un único $y \in M$ verificando que $\|x-y\| = d(x,M)$.*

Demostración. Fijado $x \in H$, para $y, z \in M$, la identidad del paralelogramo nos dice que

$$\|z-y\|^2 = \|(x-y)-(x-z)\|^2 = 2\|x-y\|^2 + 2\|x-z\|^2 - 4\left\|x - \frac{y+z}{2}\right\|^2$$

Por ser M convexo, tenemos $(y+z)/2 \in M$, y de la igualdad anterior deducimos que

$$\|z-y\|^2 \leqslant 2\,\|x-y\|^2 + 2\,\|x-z\|^2 - 4\,d(x,M)^2 \qquad \forall\, a,b \in M \tag{11}$$

desigualdad que será la clave de la demostración.

Fijamos una sucesión $\{y_n\}$ de puntos de M tal que $\{\,\|x-y_n\|\,\} \to d(x,M)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geqslant n_0$ se tiene $\|x-y_k\|^2 < d(x,M)^2 + \left(\varepsilon^2/4\right)$. Para $n,m \geqslant n_0$, podemos entonces usar (11), con $y = y_m$ y $z = y_n$, para obtener que

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\,\|x-y_m\|^2 + 2\,\|x-y_n\|^2 - 4\,d(x,M)^2 < \varepsilon^2$$

luego $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy. Como H es completo y M cerrado, tenemos por tanto que $\{y_n\} \to y \in M$. La continuidad de la norma de H nos dice entonces que

$$\|x-y\| = \lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = d(x,M)$$

de modo que y es una mejor aproximación de x en M. Es la única, pues si $z \in M$ también verifica que $\|x-z\| = d(x,M)$, la desigualdad (11) nos dice que $z = y$. ■

Merece la pena discutir brevemente el papel que juegan las hipótesis del teorema anterior, por una parte para la existencia, y por otra para la unicidad, de las mejores aproximaciones.

Empezando por la existencia, para que todo $x \in H$ tenga al menos una mejor aproximación en M, es decir, para que M sea proximinal en H, es necesario que M sea cerrado, luego esta hipótesis no se puede suprimir.

Más importante es observar que la convexidad de M tampoco se puede suprimir. Así pues, a diferencia de lo que ocurría en los espacios normados de dimensión finita, un subconjunto cerrado A de un espacio de Hilbert H puede no ser proximinal en H, como veremos con el siguiente ejemplo.

- *Sea $\{e_n\}$ la sucesión de vectores unidad en l_2, y sea $y_n = (n+1)\,e_n/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto $A = \{\,y_n : n \in \mathbb{N}\,\}$ es cerrado, pero no es proximinal en l_2.*

Para $n,m \in \mathbb{N}$, con $n \neq m$, se tiene $\|y_n - y_m\| \geqslant \sqrt{2}$, de donde se deduce que A es cerrado, pues toda sucesión convergente de puntos de A es constante a partir de un término en adelante, luego converge a un punto de A.

Por otra parte, comprobamos que 0 no tiene ninguna mejor aproximación en A, pues basta observar que $d(0,A) = \inf\{\,\|y_n\| : n \in \mathbb{N}\,\} = 1$, pero $\|y_n\| > 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

En resumen, para asegurar la existencia de mejores aproximaciones, no podemos suprimir ninguna de las hipótesis del teorema anterior. Para la unicidad, la situación es completamente diferente, como vamos a ver.

En la demostración del teorema, la unicidad se deduce de la desigualdad (11), obtenida usando solamente que M es convexo, luego no se precisa que M sea cerrado. Por tanto, si M es un subconjunto no vacío y convexo de un espacio de Hilbert H, entonces cada $x \in H$ tiene a lo sumo una mejor aproximación en M. Finalmente está bien claro que la convexidad de M no se puede suprimir, pues basta pensar lo que ocurre cuando M tiene exactamente dos puntos.

11.5. Ortogonalidad

Para llegar al principal resultado en la teoría de los espacios de Hilbert, sólo nos queda obtener una caracterización de las mejores aproximaciones, que es independiente del teorema anterior, y acorde con la intuición geométrica.

Sea M un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert H. Entonces $y_0 \in M$ es una mejor aproximación de un $x \in H$ en M si, y sólo si, verifica que

$$\|x - y_0\|^2 \leqslant \|x - z\|^2 \qquad \forall z \in M \tag{12}$$

Ahora bien, para todo $z \in M$ se tiene

$$\|x - z\|^2 = \|(x - y_0) - (z - y_0)\|^2 = \|x - y_0\|^2 + \|z - y_0\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\big(x - y_0 \,\big|\, z - y_0\big)$$

luego la condición (12) equivale a

$$2\,\mathrm{Re}\,\big(x - y_0 \,\big|\, z - y_0\big) \leqslant \big\|z - y_0\big\|^2 \qquad \forall z \in M \tag{13}$$

Si M es convexo, dados $y \in M$ y $t \in]0,1[$, usamos (13) con $z = (1-t)\,y_0 + t\,y \in M$, con lo que $z - y_0 = t\,(y - y_0)$, y obtenemos

$$2t\,\mathrm{Re}\,\big(x - y_0 \,\big|\, y - y_0\big) \leqslant t^2\,\big\|y - y_0\big\|^2$$

Dividiendo ambos miembros por $t > 0$, y haciendo $t \to 0$, deducimos que

$$\mathrm{Re}\,\big(x - y_0 \,\big|\, y - y_0\big) \leqslant 0 \qquad \forall y \in M \tag{14}$$

Recíprocamente, de (14) se deduce (13), o lo que es lo mismo (12), sin más que tomar $y = z$.

La condición (14) se simplifica notablemente cuando M es un subespacio de H. De hecho, para todo $z \in M$, usando (14) con $y = y_0 \pm z \in M$, obtenemos que $\mathrm{Re}\,\big(x - y_0 \,\big|\, z\big) = 0$. En el caso complejo, tenemos también $\mathrm{Im}\,\big(x - y_0 \,\big|\, z\big) = \mathrm{Re}\,\big(x - y_0 \,\big|\, iz\big) = 0$ para todo $z \in M$. Así pues, en cualquier caso, de (14) hemos deducido que

$$\big(x - y_0 \,\big|\, z\big) = 0 \qquad \forall z \in M \tag{15}$$

Recíprocamente, de (15) deducimos (14) tomando $z = y - y_0$. El siguiente enunciado recoge las equivalencias recién probadas.

- **Caracterización de las mejores aproximaciones.** *Sea M un subconjunto convexo de un espacio de Hilbert H. Para $x \in H$ e $y_0 \in M$, se tiene:*

$$\big\|x - y_0\big\| \leqslant \big\|x - y\big\| \;\; \forall y \in M \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,\big(x - y_0 \,\big|\, y - y_0\big) \leqslant 0 \;\; \forall y \in M$$

Si M es de hecho un subespacio de H, se tiene también:

$$\big\|x - y_0\big\| \leqslant \big\|x - y\big\| \;\; \forall y \in M \quad \Longleftrightarrow \quad \big(x - y_0 \,\big|\, y\big) = 0 \;\; \forall y \in M$$

Para interpretar geométricamente estas equivalencias, usamos una nomenclatura, motivada por la segunda, que a partir de ahora será muy conveniente. Si H es un espacio de Hilbert, para $x,y \in H$ decimos que x es **ortogonal** a y, cuando se tiene que $\big(x \,\big|\, y\big) = 0$, en cuyo caso escribimos $x \perp y$. También podemos decir que x e y son ortogonales, pues se trata de una relación simétrica: $x \perp y \;\Leftrightarrow\; y \perp x$. Si ahora E es un subconjunto no vacío de H, definimos

$$E^{\perp} = \big\{ x \in H : x \perp y \ \ \forall y \in E \big\} = \big\{ x \in H : \big(x \,\big|\, y\big) = 0 \ \ \forall y \in E \big\}$$

Por la linealidad y continuidad del producto escalar en la primera variable, vemos que $E^{\perp}$ es un subespacio cerrado de H. Se dice que $E^{\perp}$ es el **subespacio ortogonal** a E. La notación es la misma que usábamos para el anulador de un subconjunto de un espacio normado X, que era un subespacio cerrado del espacio dual X^*. Pronto veremos que es perfectamente coherente emplear la misma notación en ambas situaciones.

Iterando el paso de E a $E^{\perp}$, es natural escribir $E^{\perp\perp} = \big(E^{\perp}\big)^{\perp}$. Es claro que $E \subset E^{\perp\perp}$, pero $E^{\perp\perp}$ es un subespacio cerrado de H, luego $\overline{\operatorname{Lin} E} \subset E^{\perp\perp}$.

Para entender geométricamente la ortogonalidad, basta pensar en el teorema de Pitágoras: dos vectores x,y son *perpendiculares* cuando $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Si H es un espacio de Hilbert, para $x,y \in H$ se tiene

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\big(x \,\big|\, y\big)$$

luego x e y son perpendiculares si, y sólo si, $\operatorname{Re}\big(x \,\big|\, y\big) = 0$, lo que en caso real, equivale a que x e y sean ortogonales. En caso complejo, tenemos $\operatorname{Im}\big(x \,\big|\, y\big) = \operatorname{Re}\big(x \,\big|\, iy\big)$, luego x e y son ortogonales cuando x es perpendicular tanto a y como a iy, es decir, cuando el vector x es perpendicular al plano (real) determinado por y e iy. Por tanto, la interpretación geométrica de la ortogonalidad queda resumida en el enunciado que sigue.

- *Si H es un espacio de Hilbert, para $x,y \in H$ se tiene:*
  (i) *En caso real:* $\quad x \perp y \iff \big\|x+y\big\|^2 = \big\|x\big\|^2 + \big\|y\big\|^2$
  (ii) *En caso complejo:* $\quad x \perp y \iff \big\|x+y\big\|^2 = \big\|x+iy\big\|^2 = \big\|x\big\|^2 + \big\|y\big\|^2$

La caracterización de las mejores aproximaciones tiene ya una interpretación geométrica muy intuitiva. Si M es un subespacio del espacio de Hilbert H, vimos que $y_0 \in M$ es la mejor aproximación de $x \in H$ en M si, y sólo si, $x - y_0 \in M^{\perp}$. Esto equivale a que $x - y_0$ sea perpendicular al subespacio M, o que el punto y_0 sea el pie de la perpendicular a M que pasa por el punto x, lo que está totalmente de acuerdo con la intuición geométrica.

Para un conjunto convexo $M \subset H$, la interpretación es también intuitiva, aunque no tan sencilla. La hacemos en caso real, pues si H es complejo, basta pensar que M es un subconjunto convexo de $H_{\mathbb{R}}$. Fijado $x \in H$, vimos que $y_0 \in M$ es la mejor aproximación de x en M si, y sólo si, $\big(x - y_0 \,\big|\, y - y_0\big) \leqslant 0$ para todo $y \in M$. Tomando $\alpha_0 = \big(x - y_0 \,\big|\, y_0\big) \in \mathbb{R}$, esto equivale a $\big(x - y_0 \,\big|\, y\big) \leqslant \alpha_0$ para todo $y \in M$. Como $\big(x - y_0 \,\big|\, x - y_0\big) > 0$, tenemos $\big(x - y_0 \,\big|\, x\big) \geqslant \alpha_0$. Por tanto, el conjunto $Z = \big\{ z \in H : \big(x - y_0 \,\big|\, z\big) = \alpha_0 \big\}$ es un *hiperplano afín*, que pasa por el punto y_0, ya que $y_0 \in Z$, deja el punto x a un lado, y el conjunto M al otro. En particular, el funcional lineal y continuo $z \mapsto \big(x - y_0 \,\big|\, z\big)$, o si se quiere el hiperplano Z, separa x de M.

Conviene describir mejor el hiperplano Z. Para $z_1, z_2 \in Z$ se tiene $\big(x - y_0 \,\big|\, z_1 - z_2\big) = 0$, así que $x - y_0$ es perpendicular a todas las rectas contenidas en Z, es un *vector normal* al hiperplano Z. En resumen, el único hiperplano que pasa por y_0 y tiene a $x - y_0$ como vector normal, separa x de M. Que esta condición caracterice a la mejor aproximación de x en M, vuelve a estar de acuerdo con la intuición geométrica.

11.6. Teorema de la proyección ortogonal

Enlazando el teorema de aproximación óptima, que garantiza la existencia y unicidad de mejores aproximaciones, con la caracterización de las mismas en términos de ortogonalidad, obtenemos el resultado más importante en el estudio de los espacios de Hilbert:

Teorema de la proyección ortogonal. *Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, se tiene $H = M \oplus M^{\perp}$, y esta suma es topológico-directa.*

De hecho, si P_M es la única proyección lineal de H sobre M cuyo núcleo es $M^{\perp}$, se tiene:

$$\big\|x\big\|^2 = \big\|P_M(x)\big\|^2 + \big\|x - P_M(x)\big\|^2 \qquad \forall x \in X \tag{16}$$

luego P_M es continua y $\|P_M\| = 1$, a menos que $M = \{0\}$. Además, para cada $x \in H$, se tiene que $P_M(x)$ es la única mejor aproximación de x en M. Finalmente, se verifica que $M^{\perp\perp} = M$.

Demostración. Cada $x \in H$ tiene una única mejor aproximación en M que, adelantando acontecimientos, denotamos por $P_M(x)$. Sabemos que $P_M(x) \in M$ se caracteriza por verificar que $x - P_M(x) \in M^{\perp}$.

Se tiene entonces que $x = P_M(x) + \big(x - P_M(x)\big) \in M + M^{\perp}$ para todo $x \in H$. Además, vemos que $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, pues para todo $y \in M \cap M^{\perp}$ se tiene $y \perp y$, luego $y = 0$. Por tanto tenemos $H = M \oplus M^{\perp}$ y efectivamente, P_M es la única proyección lineal de X sobre M cuyo núcleo es $M^{\perp}$.

La igualdad (16) se debe a que $P_M(x) \perp \big(x - P_M(x)\big)$ para todo $x \in H$, y de ella deducimos que $\|P_M(x)\| \leqslant \|x\|$ para todo $x \in H$, luego P_M es continua con $\|P_M\| \leqslant 1$. Si $M \neq \{0\}$, al ser $P_M(y) = y$ para todo $y \in M$, se ha de tener $\|P_M\| = 1$. Sabemos que la continuidad de P_M equivale a que la suma directa $H = M \oplus M^{\perp}$ sea topológico-directa.

Finalmente, para $z \in M^{\perp\perp}$ se tiene $P_M(z) \in M \subset M^{\perp\perp}$, de donde $z - P_M(z) \in M^{\perp\perp}$, pero también $z - P_M(z) \in M^{\perp}$, así que $z - P_M(z) \in M^{\perp\perp} \cap M^{\perp} = \{0\}$. Por tanto $z = P_M(z) \in M$ y hemos probado que $M^{\perp\perp} \subset M$, pero la otra inclusión es sabida. ■

Con la notación del teorema anterior, se dice que P_M es la **proyección ortogonal** de H sobre M, cuya interpretación geométrica está bien clara. Nótese que $M^{\perp}$ está en la misma situación que M, pues también es subespacio cerrado de H. Tenemos por tanto las proyecciones ortogonales P_M y $P_{M^{\perp}}$, de H sobre M y $M^{\perp}$ respectivamente. Como $\ker P_{M^{\perp}} = M^{\perp\perp} = M$, dichas proyecciones son complementarias: $P_M(x) + P_{M^{\perp}}(x) = x$ para todo $x \in H$.

Antes de estudiar la principal consecuencia del teorema anterior, generalizamos su última afirmación, sustituyendo el subespacio cerrado M por un conjunto no vacío arbitrario.

- *Si E es un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert H, se tiene que $E^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Lin} E}$. En particular, si Y es un subespacio de H, se tiene $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$, luego Y es denso en H si, y sólo si, $Y^{\perp} = \{0\}$.*

Tomando $M = \overline{\operatorname{Lin} E}$, tenemos $M \subset E^{\perp\perp}$. Ahora bien, de $E \subset M$ se deduce $M^{\perp} \subset E^{\perp}$, luego $E^{\perp\perp} \subset M^{\perp\perp}$, pero como M es un subespacio cerrado de H, el teorema anterior nos dice que $M^{\perp\perp} = M$, luego $E^{\perp\perp} \subset M$. Por tanto, $E^{\perp\perp} = M$, como se quería.

Si Y es subespacio de H, se tiene obviamente $Y^{\perp\perp} = \overline{\operatorname{Lin} Y} = \overline{Y}$. Por tanto, si $Y^{\perp} = \{0\}$ tendremos $\overline{Y} = \{0\}^{\perp} = H$, luego Y es denso en H. Recíprocamente, si Y es denso en H, tenemos $Y^{\perp\perp} = H$, de donde $Y^{\perp} = Y^{\perp} \cap Y^{\perp\perp} = \{0\}$. ■

El teorema de la proyección ortogonal se debe a la escuela de Hilbert, aparece ya en un trabajo de E. Schmidt, su más directo colaborador, publicado en 1908. Como una consecuencia muy relevante, F. Riesz y M. Fréchet probaron poco después la autodualidad de los espacios de Hilbert, resultado que ahora vamos a estudiar.

Recordemos que todos los espacios de Hilbert, que hemos presentado como ejemplos, se identifican con su espacio dual. Para $N \in \mathbb{N}$, sabemos que $\left(l_2^N\right)^*$ es isométricamente isomorfo a l_2^N, y análogamente, l_2^* se identifica con l_2. Aunque no dimos una demostración completa, también sabemos que L_2^* se identifica con L_2. Pues bien, estos resultados no son más que casos particulares de un teorema general que permite en cierto modo identificar todo espacio de Hilbert H con su dual H^*. Veamos paso a paso cómo se consigue dicha identificación.

Si X es un espacio pre-hilbertiano, fijado $y \in X$, podemos definir

$$\widetilde{y} : X \to \mathbb{K}, \qquad \widetilde{y}(x) = \big(x \,|\, y\big) \quad \forall x \in X$$

La linealidad y continuidad del producto escalar en la primera variable, significan que $\widetilde{y} \in X^*$, y vamos a calcular fácilmente la norma dual de $\widetilde{y}$. La desigualdad de Cauchy-Schwartz nos dice que $\big|\widetilde{y}(x)\big| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ para todo $x \in X$, es decir, $\|\widetilde{y}\| \leqslant \|y\|$, pero de hecho tenemos la igualdad, ya que $\|y\|^2 = \widetilde{y}(y) \leqslant \|\widetilde{y}\|\,\|y\|$. Consideramos ahora la aplicación

$$\Psi : X \to X^*, \qquad \Psi(y) = \widetilde{y} \quad \forall y \in X$$

Como el producto escalar es conjugado-lineal en la segunda variable, vemos que Ψ también es conjugado-lineal, es decir, para $y, z \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, se tiene que $\Psi(\lambda y + z) = \overline{\lambda}\Psi(y) + \Psi(z)$. Claro está que, en el caso real, Ψ es lineal.

En cualquier caso, sabemos que Ψ preserva la norma, luego es isométrica: para $y, z \in X$, se tiene que $\|\Psi(y) - \Psi(z)\| = \|\Psi(y-z)\| = \|y - z\|$. Para que Ψ sea sobreyectiva, X ha de ser completo, puesto que X^* lo es. Pero lo más interesante es el recíproco.

Teorema de Riesz-Fréchet. *Si H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$, existe $y \in H$ tal que*

$$f(x) = \big(x \,|\, y\big) \qquad \forall x \in H$$

Por tanto, si para $y \in H$ escribimos $\widetilde{y}(x) = (x \,|\, y)$ para todo $x \in H$, definiendo $\Psi(y) = \widetilde{y}$ para todo $y \in H$, se tiene que Ψ es una biyección conjugado-lineal e isométrica de H sobre H^*.

Demostración. Sólo hay que comprobar la primera afirmación: la sobreyectividad de Ψ. Dado $f \in H^* \setminus \{0\}$, tenemos que $\ker f$ es un subespacio cerrado de H, al que podemos aplicar el teorema de la proyección ortogonal. Como $\ker f \neq H$, existe $u \in (\ker f)^\perp$ tal que $\|u\| = 1$. Para $x \in H$ se tiene que $f(x)u - f(u)x \in \ker f$, de donde

$$0 = \big(f(x)u - f(u)x \,\big|\, u\big) = f(x)\|u\|^2 - f(u)\big(x \,\big|\, u\big) = f(x) - \big(x \,\big|\, \overline{f(u)}\,u\big)$$

y tomando $y = \overline{f(u)}\,u$, se tiene $f(x) = (x\,|\,y)$ para todo $x \in H$, como se quería. ■

Vemos que todo espacio de Hilbert real H se identifica con su espacio dual H^*, pues Ψ es un isomorfismo isométrico de H sobre H^*. En cambio, cuando H es complejo, Ψ no es lineal, sino conjugado-lineal. Aunque no vamos a hacerlo, se puede probar que, también en caso complejo, existe un isomorfismo isométrico Φ de H sobre H^*. Sin embargo, mientras que la aplicación Ψ es canónica, porque su definición sólo involucra el producto escalar de H, el isomorfismo Φ no puede serlo.

La existencia del isomorfismo isométrico Φ es fácil de comprobar en los casos particulares que conocemos. En el caso $H = l_2^N$ con $N \in \mathbb{N}$, para todo $y \in l_2^N$ se define $\Phi(y) = \Psi(\overline{y})$, donde $\overline{y}(k) = \overline{y(k)}$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Análogamente, cuando $H = l_2$, para $y \in l_2$ se define $\Phi(y) = \Psi(\overline{y})$ donde $\overline{y} \in l_2$ viene dado por $\overline{y}(n) = \overline{y(n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por último, en el caso $H = L_2$, para toda $g \in L_2$ se define $\Phi(g) = \Psi(\overline{g})$ donde $\overline{g}(t) = \overline{g(t)}$ p.c.t. $t \in [0,1]$. En los tres casos vemos claramente que Φ es un isomorfismo isométrico de H sobre H^*, que fue exactamente el que usamos en su momento para identificar estos dos espacios.

Conviene resaltar que, en el caso $H = L_2$, hemos probado que Ψ y Φ son sobreyectivas, gracias al teorema anterior, sin usar ningún resultado de Teoría de la Medida.

Dado un subconjunto no vacío E de un espacio de Hilbert H, aclaremos ahora la cuestión de notación planteada al definir el subespacio ortogonal $E^\perp$. Cuando identificamos H con H^* mediante Ψ, vemos que $E^\perp$ se identifica con el subespacio cerrado de H^* dado por

$$\Psi\big(E^\perp\big) = \big\{\widetilde{y} : y \in E^\perp\big\} = \big\{f \in H^* : f(x) = 0 \ \ \forall x \in E\big\}$$

que es precisamente el anulador de E, tal y como se definió, para subconjuntos de cualquier espacio normado, en el estudio de la dualidad. Así pues, al identificar H con H^* hacemos coincidir las dos definiciones de $E^\perp$, luego al usar la misma notación para ambas nociones, no hay peligro de confusión.

Comentemos finalmente la consecuencia más clara del teorema de la proyección ortogonal. Si M es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert H, entonces $M^\perp$ es un complemento topológico canónico de M y, consecuentemente, el espacio cociente H/M carece de interés. En particular, en cualquier espacio de Hilbert H, todo subespacio cerrado está complementado, y es claro que esta propiedad de H se conserva por isomorfismos:

- *Si un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert, todo subespacio cerrado de X está complementado en X.*

En 1971, J. Lindenstrauss y L. Tzafriri probaron el recíproco del resultado anterior: *si todo subespacio cerrado de un espacio de Banach X está complementado en X, entonces X es isomorfo a un espacio de Hilbert.* Resolvieron así un problema que había permanecido abierto durante varias décadas, conocido como el *problema del subespacio complementado.*