TEMA 1: Introducción a la Inferencia Estadística. Estadísticos muestrales

1.1. Planteamiento y modelización de un problema de inferencia.

1.2. Muestra aleatoria simple.

1.3. Función de distribución muestral.

1.4. Estadísticos muestrales. Distribuciones en el muestreo.

1.1. PLANTEAMIENTO Y MODELIZACIÓN

La Estadística es la ciencia que estudia cómo debe emplearse la información disponible sobre una situación práctica que envuelve incertidumbre para dar una guía de acción en dicha situación (Vic Barnett (1973)).

El objetivo de la Estadística es crear procedimientos o métodos que permitan formular juicios acerca del modelo de probabilidad adecuado para describir una situación de incertidumbre concreta.

PROBLEMA DE INFERENCIA ESTADÍSTICA: *Bajo el punto de vista clásico, un problema de inferencia estadística consiste en obtener conclusiones acerca del comportamiento de una o varias características en una determinada población, basándose en la observación de las mismas en un subconjunto de la población.*

▶ **ELEMENTOS BÁSICOS:**

- *Característica* (o características) de interés.
- *Población* de individuos en los que se pretende estudiar dicha característica (Ω).
- *Muestra*, parte de la población en la que se observa la característica para inferir conclusiones sobre su comportamiento en toda la población.

▶ **MODELO ESTADÍSTICO:** $(X, \mathcal{P})$

- $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, variable aleatoria que describe la característica objeto de estudio.
- $\mathcal{P}$: familia de todas las distribuciones de probabilidad que, según nuestro conocimiento, pueden ser la de X.

Modelos estadísticos paramétricos: se conoce la forma funcional de P_X y el desconocimiento sólo se refiere al valor de uno o varios parámetros:

$$P_X \in \mathcal{P} = \{P_\theta;\ \underbrace{\theta \in \Theta}_{\text{espacio paramétrico}}\}.$$

Modelos estadísticos no paramétricos: la forma de P_X es desconocida; la información sobre ella se refiere a propiedades de tipo general (es de tipo continuo, es simétrica,...).

1.2. MUESTRA ALEATORIA SIMPLE

Una muestra aleatoria simple (de tamaño n) de una variable X es un vector, $(X_1, \dots, X_n)$, formado por n variables aleatorias independientes, todas con la misma distribución que X.

- *Realización muestral*: valor concreto obtenido al observar una muestra aleatoria simple.
- *Espacio muestral*: conjunto de todas las posibles realizaciones muestrales según nuestro conocimiento sobre P_X. Notando $f_\theta(x)$ a la f.m.p. o f. densidad de X bajo P_θ:

  $\chi_\theta = \{x \ / \ f_\theta(x) > 0\} \rightarrow$ valores de X bajo P_θ.

  $\chi = \bigcup\limits_{\theta \in \Theta} \chi_\theta \rightarrow$ valores de X bajo $\mathcal{P}$.

$$\chi^n = \chi \times \cdots \times \chi = \{(x_1, \dots, x_n); \quad x_1, \dots, x_n \in \chi\}.$$

Distribución de una muestra aleatoria simple:

- X discreta: $P_\theta\left(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\right) = P_\theta\left(X = x_1\right) \cdots P_\theta\left(X = x_n\right), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$.
- X continua: $f_\theta^n(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$.

1.3. FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN MUESTRAL

Dada una muestra aleatoria simple, $(X_1, \ldots, X_n)$, de una variable X con función de distribución F_X, la función de distribución muestral, $F^*_{X_1,\ldots,X_n}$, es una función sobre $\mathbb{R}$ definida por

$$F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de variables } X_i \text{ menores o iguales que } x}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_i)}{n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Propiedades:

- *Para cada realización muestral, $(x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$, $F^*_{x_1,\ldots,x_n}$ es una función de distribución en $\mathbb{R}$.*
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x)$ *es una variable aleatoria tal que* $nF^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) \to B(n, F_X(x))$:

$$E\left[F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x)\right] = F_X(x), \qquad Var\left[F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x)\right] = \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n}.$$

- Para valores grandes de n, en virtud del *Teorema Límite de Lèvy*:

$$F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) \simeq \mathcal{N}\left(F_X(x), \frac{F_X(x)(1-F_X(x))}{n}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- $F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{P}} F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (*Ley débil de Bernoulli*).
- $F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) \underset{n\to\infty}{\xrightarrow{c.s.}} F_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (*Ley fuerte de Borel*).

Teorema de Glivenko-Cantelli: *Si $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de variables independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución F_X, las funciones de distribución muestrales $F^*_{X_1,\ldots,X_n}$ convergen casi segura y uniformemente a la teórica, F_X:*

$$P\left\{\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) - F_X(x)\right| = 0\right\} = 1.$$

$$\downarrow$$

Con probabilidad 1, al tomar sucesivas observaciones independientes de la variable y considerar las correspondientes funciones de distribución muestrales:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_\varepsilon \;/\; n > n_\varepsilon \;\Rightarrow\; F_X(x) \in \left(F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) - \varepsilon,\; F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) + \varepsilon\right), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Vélez y García, pg. 37.

1.4. ESTADÍSTICOS MUESTRALES

Dada una muestra aleatoria simple $(X_1, \dots, X_n)$ *de una variable* X*, un estadístico (muestral), es una función de ella,* $T(X_1, \dots, X_n)$*, tal que*

$$T : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n) \longrightarrow (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$$

es medible ($T^{-1}(B) \in \mathcal{B}^n,\ \forall B \in \mathcal{B}^k$*) e independiente de cualquier parámetro desconocido.*

ESTADÍSTICOS DE INTERÉS:

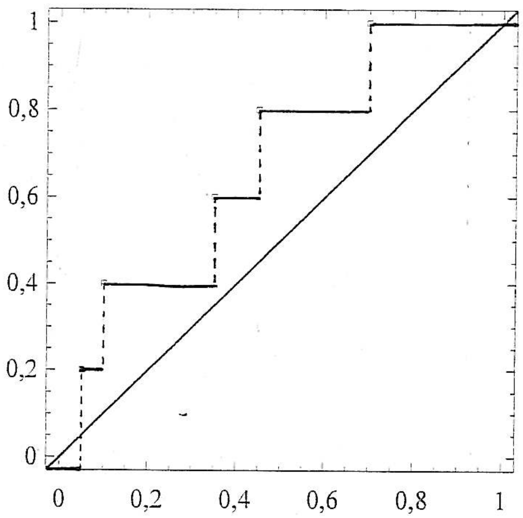
- *Momentos muestrales no centrados*: $A_k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^k}{n}, \quad k \in \mathbb{N}.$
  - $A_1 = \overline{X} \rightarrow$ *media muestral.*

- *Momentos muestrales centrados*: $B_k = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^k}{n}, \quad k \in \mathbb{N}.$
  - $B_1 = 0$
  - $B_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n} \rightarrow$ *varianza muestral.*

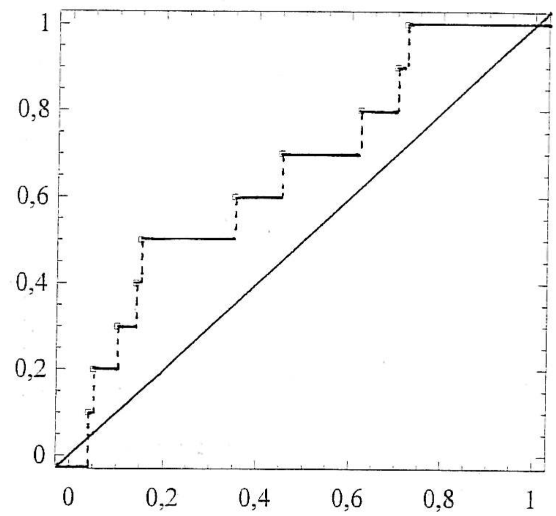
    Cuasivarianza muestral: $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}.$

- $M = \text{máx}(X_1, \dots, X_n), \quad N = \text{mín}(X_1, \dots, X_n).$

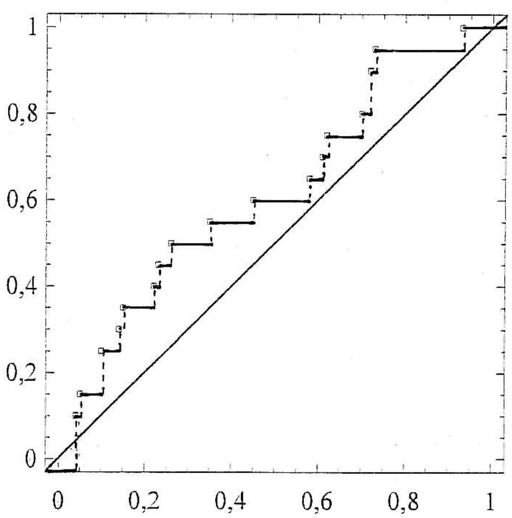
FUNCIÓN DE DISTRIBUCIÓN TEÓRICA Y FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN MUESTRALES ASOCIADAS A OBSERVACIONES DE MUESTRAS DE TAMAÑO n=5, 10, 20 Y 50 DE UNA DISTRIBUCIÓN U(0,1)



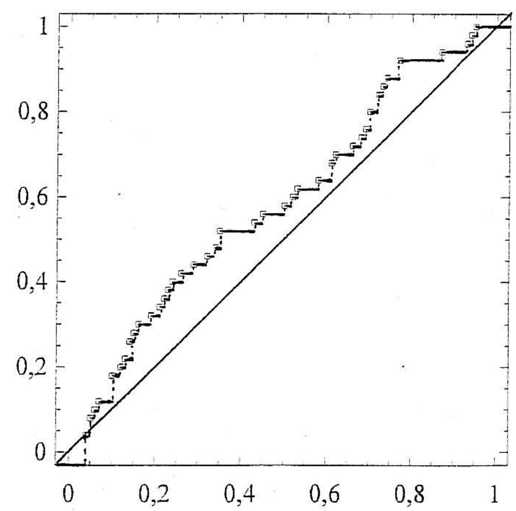
,05	,10	,35	,45	,70



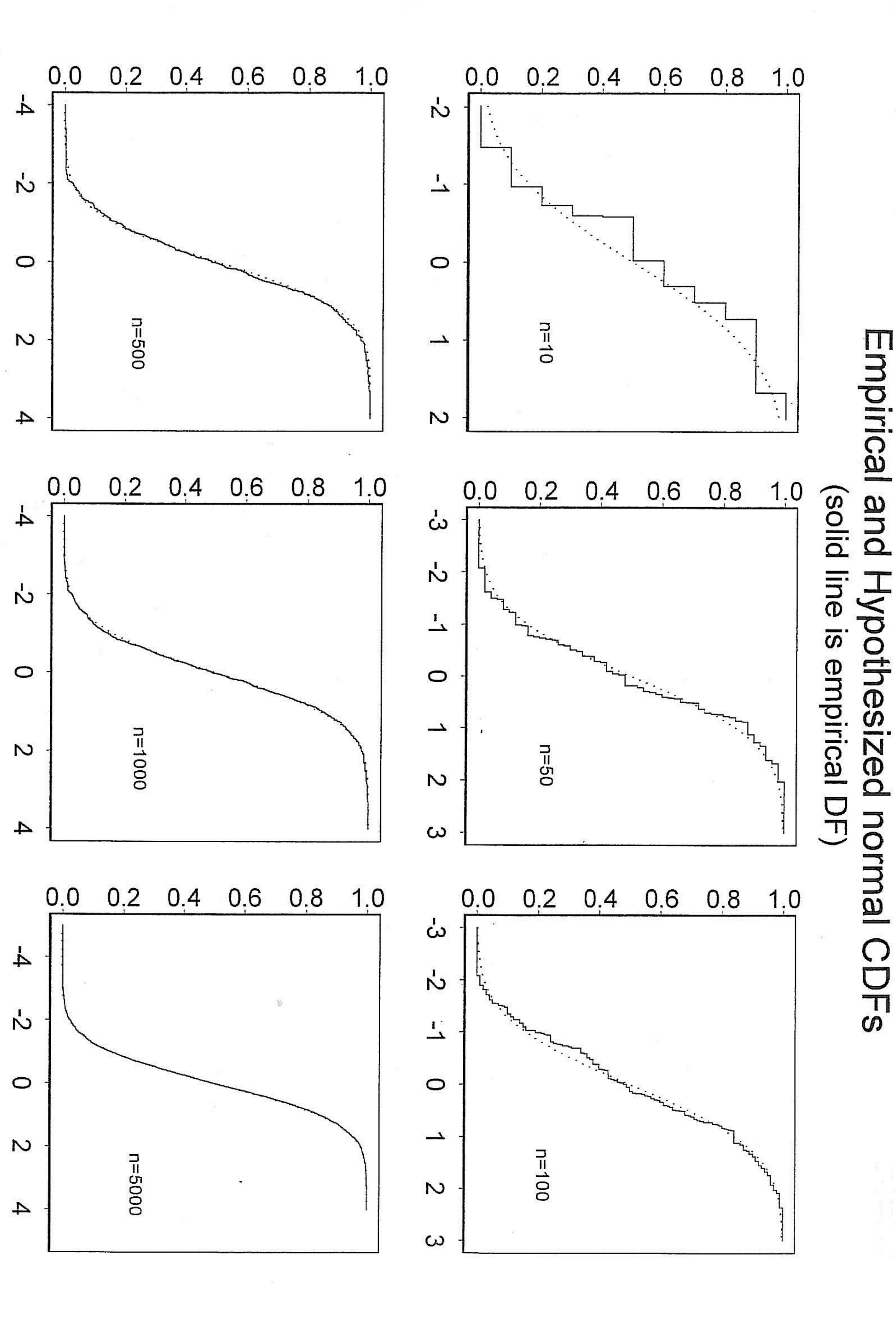
,04	,05	,10	,14	,15	,35	,45	,62	,70	,72



,04	,04	,05	,10	,10	,14	,15	,22	,23	,26
,35	,45	,58	,61	,62	,70	,72	,72	,73	,93



,04	,04	,05	,05	,06	,07	,10	,10	,10	,12
,13	,14	,14	,15	,16	,19	,21	,22	,23	,24
,26	,29	,32	,34	,35	,35	,43	,45	,50	,52
,53	,58	,61	,61	,62	,66	,68	,69	,70	,70
,72	,72	,73	,74	,77	,77	,87	,93	,94	,95


Empirical and Hypothesized normal CDFs
(solid line is empirical DF)
n=10
n=50
n=100
n=500
n=1000
n=5000

TEMA 2: Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales

2.1.1. DISTRIBUCIÓN χ^2 DE PEARSON

Caso particular de la distribución gamma[(1)] :

$$X \to \chi^2(n),\ n \in \mathbb{N} \ \Leftrightarrow\ X \to \Gamma(n/2, 1/2).$$

Función de densidad: $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(n/2)2^{n/2}} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0.$

Función generatriz de momentos: $M_X(t) = \dfrac{1}{(1-2t)^{n/2}}, \quad t < 1/2.$

Momentos: $E[X^k] = 2^k \dfrac{\Gamma(n/2+k)}{\Gamma(n/2)}, \quad k \in \mathbb{N}.$

- *Media*: $E[X] = n$.
- *Varianza*: $Var[X] = 2n$.

Reproductividad

$X_1, \ldots, X_n$ independientes y $X_i \to \chi^2(k_i),\ i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i \to \chi^2\left(\sum_{i=1}^n k_i\right)$

Relación con la distribución normal

a) $X \to \mathcal{N}(0,1) \ \Rightarrow\ X^2 \to \chi^2(1)$

b) $X_1, \ldots, X_n$ independientes y $X_i \to \mathcal{N}(0,1),\ i = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i^2 \to \chi^2(n)$ (*)

Tablas y aproximaciones: Está tabulada para valores de n pequeños. Para n grande, la expresión (*) como suma de variables independientes e idénticamente distribuidas, con media y varianza finitas, permite usar la siguiente aproximación (*teorema central del límite de Lèvy*):

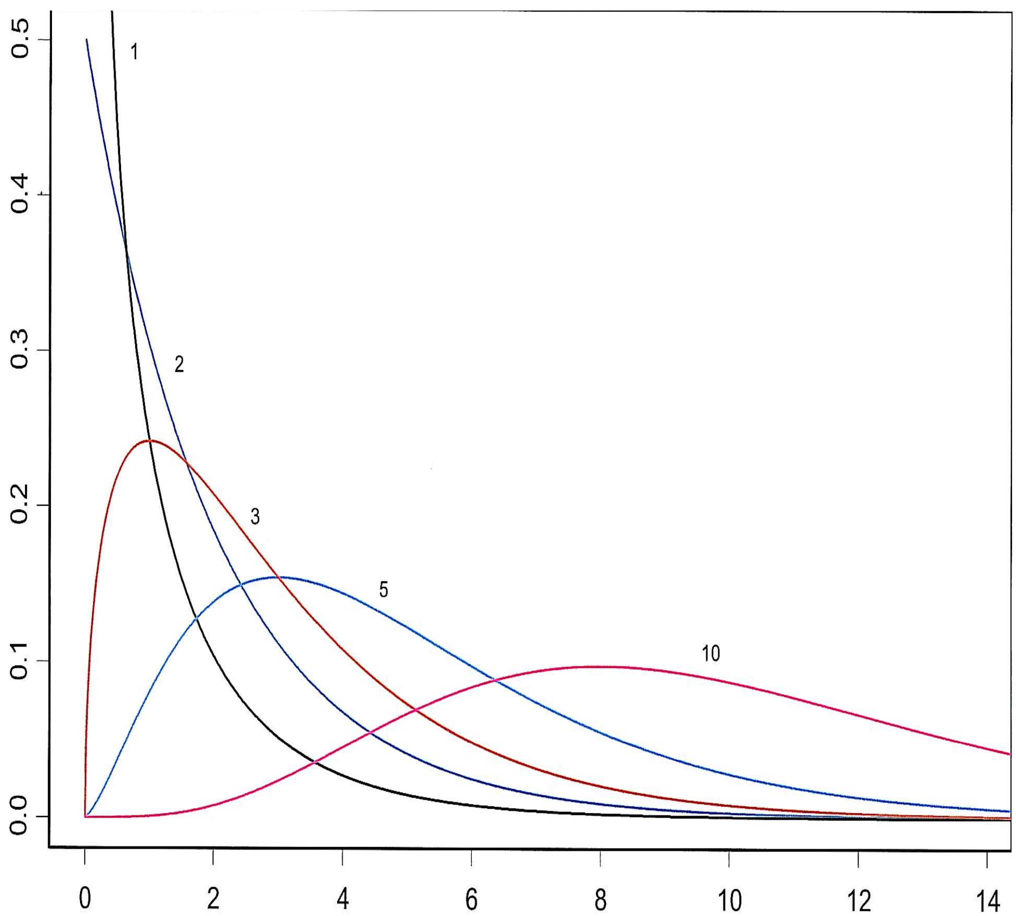
$$\chi^2(n) \approx \mathcal{N}(n, 2n).$$

---

(1) $X \to \Gamma(p, a)\ (p, a \in \mathbb{R}^+) \ \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax},\ x > 0 \quad \left(\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx\right)$

Gráfica de la función de densidad de $\chi^2(n)$:

- Asimétrica a la derecha y unimodal.
- Para $n = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ y la función de densidad es estrictamente decreciente.
- Para $n = 2$, $f(0) = 1/2$ y la función de densidad es estrictamente decreciente.
- Para $n \geq 3$, $f(0) = 0$, crece hasta la moda y luego decrece.



2.1.2. DISTRIBUCIÓN t DE STUDENT

Es la distribución del cociente entre una variable con distribución $\mathcal{N}(0,1)$ y la raíz cuadrada de una con distribución χ^2 dividida por sus grados de libertad, ambas independientes:

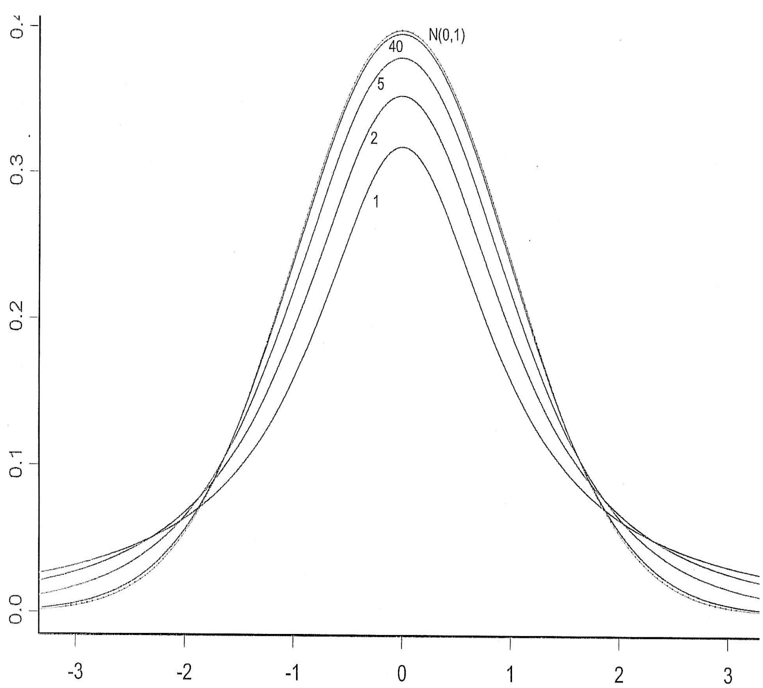
$$X \text{ e } Y \text{ independientes}, \ X \to \mathcal{N}(0,1), \ Y \to \chi^2(n) \ \Rightarrow \ T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \to t(n)$$

Función de densidad: $f(t) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1+\dfrac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$

Momentos: $\exists E[T^k] \Leftrightarrow k < n$.

- $n > 1 \Rightarrow \exists E[T] = 0$.
- $n > 2 \Rightarrow \exists Var[T] = \dfrac{n}{n-2}$.

Gráfica de la función de densidad de $t(n)$: Es similar a la de la $\mathcal{N}(0,1)$ (simétrica alrededor del cero y unimodal) y, de hecho, se aproxima a ella cuando $n \to +\infty$. Ya que la varianza es mayor que uno, las colas son más gruesas que las de la normal y la gráfica es más aplastada (*distribución platicúrtica*).



Tablas: Está tabulada para valores de n pequeños. Para n grande se aproxima por la $\mathcal{N}(0,1)$.

2.1.3. DISTRIBUCIÓN F DE SNEDECOR

Es la distribución del cociente entre dos variables independientes con distribución χ^2, cada una dividida por sus grados de libertad:

$$X \text{ e } Y \text{ independientes}, \ X \to \chi^2(m), \ Y \to \chi^2(n) \ \Rightarrow \ F = \frac{X/m}{Y/n} \to F(m,n)$$

Función de densidad: $g(f) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} f^{m/2-1} \left(1 + \dfrac{m}{n} f\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad f > 0.$

Momentos: $\exists E[F^k] \Leftrightarrow k < n/2$.

- $n > 2 \Rightarrow \exists E[F] = \dfrac{n}{n-2}$.
- $n > 4 \Rightarrow \exists Var[F] = \dfrac{n^2(2m+2n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}$.

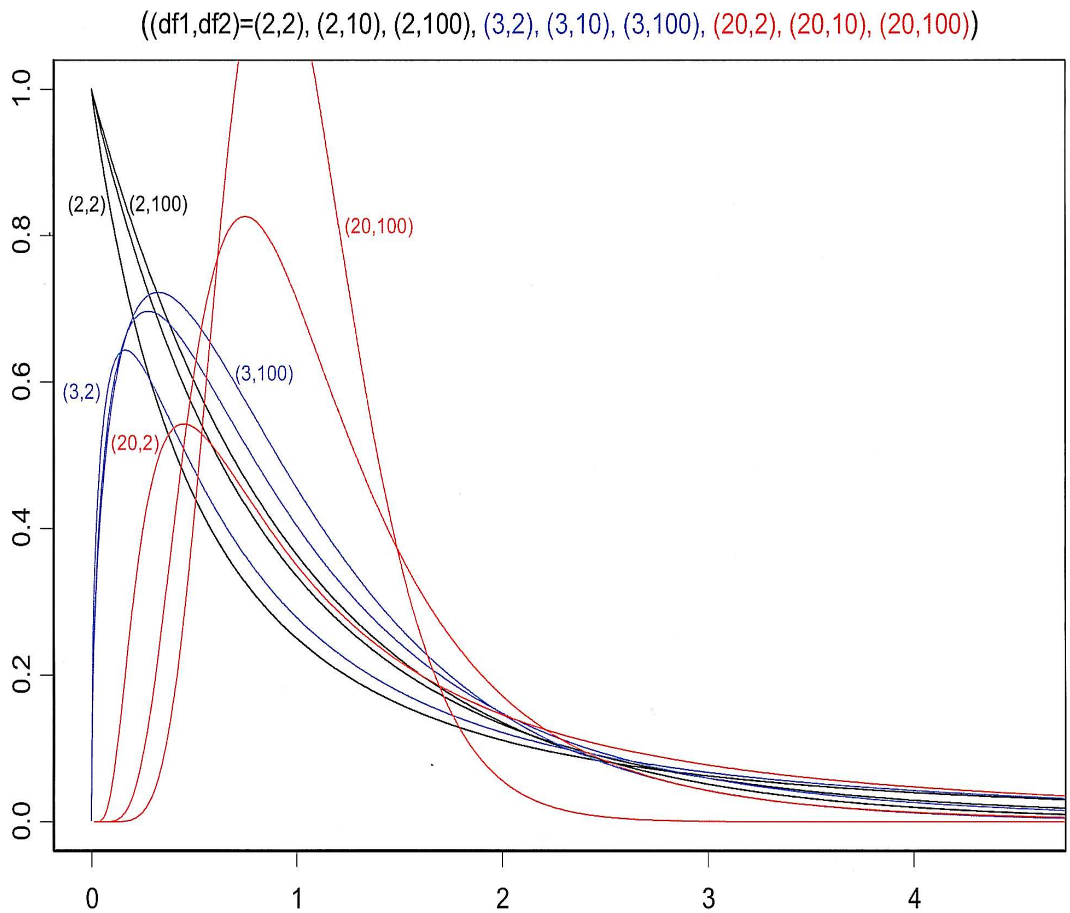
Propiedades:

- $F \to F(m,n) \Leftrightarrow F^{-1} \to F(n,m)$.
- $T \to t(n) \Leftrightarrow T^2 \to F(1,n)$.

Tablas: Como las anteriores, esta distribución está tabulada y, usualmente, las tablas incluyen aproximaciones para valores grandes de m y n.

Gráfica de la función de densidad de $F(m, n)$

- Asimétrica a la derecha y unimodal.
- $F(1, n)$: $\lim_{f \to 0} g(f) = +\infty$ y la función de densidad es estrictamente decreciente.
- $F(2, n)$: $g(0) = 1$ y la función de densidad es estrictamente decreciente.
- $F(m, n),\ m > 2$: $g(0) = 0$, crece hasta el valor modal y luego decrece.



2.2. MUESTREO EN UNA NORMAL UNIDIMENSIONAL

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \mathcal{N}(\mu, \sigma^2), \quad \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}, \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1}$$

LEMA DE FISHER

Los estadísticos $\overline{X}$ y S^2 son independientes

DISTRIBUCIONES ASOCIADAS AL MUESTREO

Variable	Distribución	Uso
$\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mathcal{N}(0, 1)$	Inferencia sobre μ cuando σ^2 es conocida
$\dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	Inferencia sobre μ cuando σ^2 es desconocida
$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n)$	Inferencia sobre σ^2 cuando μ es conocida
$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	Inferencia sobre σ^2 cuando μ es desconocida

2.3. MUESTREO EN DOS NORMALES UNIDIMENSIONALES

- $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ m.a.s de $X \to \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $\quad \overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} X_i}{n_1}, \quad S_1^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \overline{X})^2}{n_1 - 1}.$
- $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ m.a.s de $Y \to \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\quad \overline{Y} = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_2} Y_j}{n_2}, \quad S_2^2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \overline{Y})^2}{n_2 - 1}.$
- $(X_1, \ldots, X_{n_1})$, $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ independientes.

EXTENSIÓN DEL LEMA DE FISHER

$$\boxed{\textit{Los vectores } (\overline{X}, \overline{Y}) \textit{ y } (S_1^2, S_2^2) \textit{ son independientes}}$$

DISTRIBUCIONES ASOCIADAS AL MUESTREO

Variable	Distribución	Uso
$\dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	Inferencia sobre $\mu_1 - \mu_2$ (σ_1^2, σ_2^2 conocidas)
$\dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}} \sqrt{\dfrac{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}{n_1 + n_2 - 2}}}$	$t(n_1 + n_2 - 2)$	
$\dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$	$t(n_1 + n_2 - 2)$	Inferencia sobre $\mu_1 - \mu_2$ ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocidas)
$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2 \Big/ n_1\sigma_1^2}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2 \Big/ n_2\sigma_2^2}$	$F(n_1, n_2)$	Inferencia sobre $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (μ_1, μ_2 conocidas)
$\dfrac{S_1^2 \Big/ \sigma_1^2}{S_2^2 \Big/ \sigma_2^2}$	$F(n_1 - 1, n_2 - 1)$	Inferencia sobre $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (μ_1, μ_2 desconocidas)

TEMA 3: Suficiencia y completitud

3.1. Estadísticos suficientes.

3.2. Estadísticos completos.

3.3. Suficiencia y completitud en familias exponenciales.

3.1. ESTADÍSTICOS SUFICIENTES

$(X_1, \ldots, X_n) \in \chi^n$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$.

$f_\theta \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de X bajo P_θ.

$f_\theta^n \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de $(X_1, \ldots, X_n)$ bajo P_θ.

Un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para la familia de distribuciones de X (o suficiente para el parámetro θ) si la distribución de $(X_1, \ldots, X_n)$ condicionada a cualquier valor de $T(X_1, \ldots, X_n)$ es independiente de θ.

Teorema de factorización de Neyman-Fisher: *Un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente si y sólo si, para cualquier valor de θ:*

$$f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) g_\theta \left(T(x_1, \ldots, x_n)\right), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$$

donde el primer factor es independiente de θ, y el segundo sólo depende de $(x_1, \ldots, x_n)$ a través de $T(x_1, \ldots, x_n)$.

Propiedades de los estadísticos suficientes:

- Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, lo es para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta'\}$ con $\Theta' \subseteq \Theta$.
- Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ y $U(X_1, \ldots, X_n)$ es otro estadístico tal que $T = f(U)$, $U(X_1, \ldots, X_n)$ es también suficiente para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$.
- Cualquier transformación biunívoca de un estadístico suficiente es también suficiente.

3.2. ESTADÍSTICOS COMPLETOS

Un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ es completo para la familia de distribuciones de X si, para cualquier función medible unidimensional, g, se tiene:

$$E_\theta \left[g(T)\right] = 0,\ \forall \theta \in \Theta \ \Rightarrow \ P_\theta(g(T) = 0) = 1,\ \forall \theta \in \Theta.$$

3.3. SUFICIENCIA Y COMPLETITUD EN FAMILIAS EXPONENCIALES

Familia exponencial k-paramétrica: $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, *con funciones de densidad o funciones masa de probabilidad* $\{f_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, *es exponencial* k*-paramétrica si:*

- Θ *es un intervalo de* $\mathbb{R}^k$.
- $\forall \theta \in \Theta \quad \{x \ / \ f_\theta(x) > 0\} = \chi \to$ independiente de θ.
- $\forall \theta \in \Theta, \quad f_\theta(x) = \exp\left\{\sum_{h=1}^{k} Q_h(\theta) T_h(x) + S(x) + D(\theta)\right\}, \quad \forall x \in \chi,$

  siendo $T_1, \ldots, T_k, S$ *funciones medibles de* x, *y* $Q_1, \ldots, Q_k, D$ *funciones de* θ.

Teorema de suficiencia y completitud en familias exponenciales: *Si la familia de distribuciones de* X, $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, *es exponencial* k*-paramétrica, la familia de distribuciones de cualquier muestra aleatoria simple también lo es:*

$$\forall \theta \in \Theta,\ f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{\sum_{h=1}^{k} Q_h(\theta) \left(\sum_{i=1}^{n} T_h(x_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} S(x_i) + nD(\theta)\right\}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n.$$

Además:

- *El estadístico* $\left(\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i)\right)$ *es suficiente para* θ.
- *Si* $k \leq n$ *y el conjunto imagen de la función* $Q(\theta) = (Q_1(\theta), \ldots, Q_k(\theta))$ *contiene a un abierto de* $\mathbb{R}^k$, *el estadístico* $\left(\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i)\right)$ *es también completo.*

TEMA 4: Estimación puntual. Insesgadez y mínima varianza

4.1. Planteamiento del problema de estimación.

4.2. Estimación insesgada de mínima varianza.

4.3. Estimadores eficientes.

4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA DE ESTIMACIÓN

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

Se trata de aproximar el verdadero valor del parámetro (o de alguna función paramétrica) a partir de las observaciones muestrales.

Estimador puntual: *Un estimador de θ es un estadístico, $T(X_1, \ldots, X_n)$, que toma valores en Θ.*

$\downarrow$ *Función de pérdida* : $L : \Theta \times \Theta \to \mathbb{R}$

$L(\theta, t)$: pérdida que conlleva estimar el parámetro por el valor t si su verdadero valor es θ.

Función de riesgo de un estimador: *Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es un estimador de θ, su función de riesgo bajo la función de pérdida L es la que asigna a cada valor del parámetro la pérdida media asociada al estimador*:

$$\begin{aligned} R_T^L : \Theta &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto R_T^L(\theta) = E_\theta\left[L(\theta, T(X_1, \ldots, X_n))\right]. \end{aligned}$$

Estimador óptimo bajo una función de pérdida L: *Es el estimador que minimiza uniformemente la función de riesgo. Esto es, un estimador del parámetro, $T(X_1, \ldots, X_n)$, es óptimo bajo la función de pérdida L si, para cualquier otro estimador, $T'(X_1, \ldots, X_n)$, se tiene:*

$$R_T^L(\theta) \leq R_{T'}^L(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

ESTIMACIÓN DE MENOR ERROR CUADRÁTICO MEDIO

Función de pérdida cuadrática : $L : \Theta \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(\theta, t) \longmapsto L(\theta, t) = (t - \theta)^2$$

Función de riesgo de un estimador $T(X_1, \ldots, X_n)$:

$$R_T^L(\theta) = E_\theta\left[(T(X_1, \ldots, X_n) - \theta)^2\right] \ \to \quad \textit{error cuadrático medio de } \ T(X_1, \ldots, X_n)$$

$$\downarrow$$

$$E_\theta\left[T(X_1, \ldots, X_n)\right] = \theta \Rightarrow E_\theta\left[(T(X_1, \ldots, X_n) - \theta)^2\right] = Var_\theta[T(X_1, \ldots, X_n]$$

4.2. ESTIMACIÓN INSESGADA DE MÍNIMA VARIANZA

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

Estimador de $g(\theta)$: estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ con valores en $g(\Theta)$

Estimador insesgado: *Un estimador de $g(\theta)$, $T(X_1, \ldots, X_n)$, es insesgado (centrado) si*

$$E_\theta \left[T(X_1, \ldots, X_n)\right] = g(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Estimador insesgado uniformemente de mínima varianza (UMVUE): *Un estimador de $g(\theta)$, $T(X_1, \ldots, X_n)$, insesgado y de segundo orden, es UMVUE para $g(\theta)$ si para cualquier otro estimador insesgado de $g(\theta)$, $T'(X_1, \ldots, X_n)$, se tiene*:

$$Var_\theta[T(X_1, \ldots, X_n)] \leq Var_\theta[T'(X_1, \ldots, X_n)], \quad \forall \theta \in \Theta.$$

- *Unicidad*: El UMVUE de cualquier función paramétrica, si existe, es único.
- *Linealidad*: Si $T_i(X_1, \ldots, X_n)$ es el UMVUE para $g_i(\theta),\ i = 1, 2$, y $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, entonces $a_1 T_1(X_1, \ldots, X_n) + a_2 T_2(X_1, \ldots, X_n)$ es el UMVUE para $a_1 g_1(\theta) + a_2 g_2(\theta)$.

Teorema de Rao-Blackwell: *Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ y $S(X_1, \ldots, X_n)$ es un estimador insesgado de $g(\theta)$ de segundo orden:*

- $E\left[S(X_1, \ldots, X_n) \big/ T(X_1, \ldots, X_n)\right]$ *es estimador insesgado de $g(\theta)$ y de segundo orden.*
- $Var_\theta\left[E\left[S(X_1, \ldots, X_n) \big/ T(X_1, \ldots, X_n)\right]\right] \leq Var_\theta[S(X_1, \ldots, X_n)],\ \forall \theta \in \Theta.$

Teorema de Lehmann-Scheffé: *Sea $T(X_1, \ldots, X_n)$ un estadístico suficiente y completo para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$. Si $g(\theta)$ admite un estimador insesgado de segundo orden, $S(X_1, \ldots, X_n)$, entonces existe el UMVUE de $g(\theta)$ y está dado por*

$$E\left[S(X_1, \ldots, X_n) \big/ T(X_1, \ldots, X_n)\right].$$

4.3. ESTIMADORES EFICIENTES

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

$f_\theta \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de X bajo P_θ

$f_\theta^n \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de $(X_1, \ldots, X_n)$ bajo P_θ

Condiciones de regularidad de Fréchet-Cramér-Rao: *La familia de distribuciones $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ es regular en el sentido de Fréchet-Cramér-Rao si satisface:*

i) *Θ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.*

ii) *El conjunto de valores de la variable es independiente de θ:*

$$\forall \theta \in \Theta,\ \{x \ /\ f_\theta(x) > 0\} = \chi.$$

iii) *$\forall x \in \chi,\ f_\theta(x)$ es derivable respecto de θ y*

- $\displaystyle\sum_{x \in \chi} \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{x \in \chi} f_\theta(x) = 0,\ \forall \theta \in \Theta$ *(si las distribuciones son discretas)*
- $\displaystyle\int_\chi \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial \theta} dx = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_\chi f_\theta(x) dx = 0,\ \forall \theta \in \Theta$ *(si las distribuciones son continuas).*

Función de información de Fisher: *Si $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ es regular, se definen las funciones de información asociadas a X y a la muestra, respectivamente, como*:

$$I_X(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta}\right)^2\right], \qquad I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = E_\theta\left[\left(\frac{\partial \ln f_\theta^n(X_1, \ldots, X_n)}{\partial \theta}\right)^2\right].$$

- $I_X \geq 0, \quad I_{X_1,\ldots,X_n} \geq 0.$
- $E_\theta\left[\dfrac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta}\right] = 0,\ \ \forall \theta \in \Theta, \qquad I_X(\theta) = Var_\theta\left[\dfrac{\partial \ln f_\theta(X)}{\partial \theta}\right],\ \ \forall \theta \in \Theta.$
- $E_\theta\left[\dfrac{\partial \ln f_\theta^n(X_1, \ldots, X_n)}{\partial \theta}\right] = 0,\ \ \forall \theta \in \Theta,\ \ I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = Var_\theta\left[\dfrac{\partial \ln f_\theta^n(X_1, \ldots, X_n)}{\partial \theta}\right],\ \ \forall \theta \in \Theta.$
- *Aditividad*: $I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = n I_X(\theta),\ \ \forall \theta \in \Theta.$

Estadístico regular: *Un estadístico $T(X_1,\dots,X_n)$ es regular en el sentido de Fréchet-Cramér-Rao si* (en función de que las distribuciones sean discretas o continuas):

- $$\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\chi^n} T(x_1,\dots,x_n) f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)}_{E_\theta[T(X_1,\dots,X_n)]} = \underbrace{\sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\chi^n} T(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)}{\partial\theta}}_{E_\theta\left[T(X_1,\dots,X_n)\frac{\partial \ln f_\theta^n(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta}\right]}$$
- $$\underbrace{\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{\chi^n} T(x_1,\dots,x_n) f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)dx_1\cdots dx_n}_{E_\theta[T(X_1,\dots,X_n)]} = \underbrace{\int_{\chi^n} T(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)}{\partial\theta}dx_1\cdots dx_n}_{E_\theta\left[T(X_1,\dots,X_n)\frac{\partial \ln f_\theta^n(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta}\right]}.$$

Cota de Fréchet-Cramér-Rao: *Si $\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\}$ es regular, $0<I_X(\theta)<+\infty$, $\forall\theta\in\Theta$ y $T(X_1,\dots,X_n)$ es un estadístico regular, de segundo orden, insesgado en una función paramétrica derivable $g(\theta)$, se tiene:*

a) $Var_\theta[T(X_1,\dots,X_n)] \geq \dfrac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)},\quad \forall\theta\in\Theta.$

b) $\forall\theta\in\Theta\ /\ g'(\theta)\neq 0:$

$$Var_\theta[T] = \frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)} \ \Leftrightarrow\ \exists a(\theta)\neq 0\ /\ P_\theta\left(\frac{\partial \ln f_\theta^n(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} = a(\theta)\left[T(X_1,\dots,X_n)-g(\theta)\right]\right)=1.$$

Estimador eficiente: *Sea $\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\}$ regular, con $0<I_X(\theta)<+\infty$, $\forall\theta\in\Theta$, y $g(\theta)$ una función paramétrica derivable. Un estimador de $g(\theta)$, $T(X_1,\dots,X_n)$, se dice que es eficiente si es insesgado, regular y su varianza alcanza la cota para cualquier valor del parámetro*:

$$Var_\theta[T(X_1,\dots,X_n)] = \frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)},\quad \forall\theta\in\Theta.$$

Caracterización de estimadores eficientes: *Sea $\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\}$ regular, con $0<I_X(\theta)<+\infty$, $\forall\theta\in\Theta$, $g(\theta)$ una función paramétrica derivable, no constante, y $T(X_1,\dots,X_n)$ un estimador de $g(\theta)$. Una condición necesaria y suficiente para que $T(X_1,\dots,X_n)$ sea eficiente es*

$$\forall\theta\in\Theta\ \ \exists a(\theta)\neq 0 \textit{ tal que } \begin{cases} i)\ P_\theta\left(\dfrac{\partial \ln f_\theta^n(X_1,\dots,X_n)}{\partial\theta} = a(\theta)\left[T(X_1,\dots,X_n)-g(\theta)\right]\right)=1 \\[2ex] ii)\ I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = a(\theta)g'(\theta). \end{cases}$$

Propiedades de los estimadores eficientes: $(T \equiv T(X_1, \ldots, X_n))$

- *Si T es eficiente para $g(\theta)$, $aT + b$ es eficiente para $ag(\theta) + b$ $(a \neq 0, b \in \mathbb{R})$ y solo este tipo de funciones paramétricas admite estimador eficiente.*

- *Si existe estimador eficiente para una función paramétrica, es único.*

- *Solo existen estimadores eficientes en familias de tipo exponencial:*

$$T \text{ eficiente para alguna función paramétrica}$$
$$\Downarrow$$
$$f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = \exp\{Q(\theta)T(x_1, \ldots, x_n) + D(\theta) + S((x_1, \ldots, x_n))\}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n.$$

- *Si T es un estimador eficiente para $g(\theta)$, T es un estadístico suficiente. Si, además, el conjunto imagen de $Q(\theta)$ contiene a un abierto de $\mathbb{R}$, también es completo. En tal caso, T es el UMVUE para $g(\theta)$.*

TEMA 5: Estimación de máxima verosimilitud y otros métodos

5.1. ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

$(X_1, \dots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

$f_\theta \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de X bajo P_θ

$f_\theta^n \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de $(X_1, \dots, X_n)$ bajo P_θ

Función de verosimilitud: *Para cada realización muestral, $(x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$, se define la función de verosimilitud asociada a dicha realización como:*

$$\begin{aligned} L_{x_1,\dots,x_n} : \Theta &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \theta &\longmapsto L_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = f_\theta^n(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Estimador de máxima verosimilitud: $\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ *es estimador de máxima verosimilitud de θ si la estimación correspondiente a cada realización muestral, $\widehat{\theta}(x_1, \dots, x_n)$, maximiza la función de verosimilitud asociada a dicha realización:*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n, \quad L_{x_1,\dots,x_n}\left(\widehat{\theta}(x_1, \dots, x_n)\right) = \max_{\theta \in \Theta} L_{x_1,\dots,x_n}(\theta).$$

- **Relación con los estadísticos suficientes**: *Si $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ admite un estadístico suficiente, $T(X_1, \dots, X_n)$, y $\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador máximo verosímil de θ, $\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ es función de $T(X_1, \dots, X_n)$.*
- **Relación con los estimadores eficientes**: *Si $T(X_1, \dots, X_n)$ es estimador eficiente de θ, $T(X_1, \dots, X_n)$ es el único estimador máximo verosímil de θ.*

Estimador de máxima verosimilitud de una función paramétrica $g : \Theta \to \Lambda$:

- *Para cada realización muestral, $(x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$, se define la función de verosimilitud de $\lambda = g(\theta)$ asociada a dicha realización como:*

$$\begin{aligned} M_{x_1,\dots,x_n} : \Lambda &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \lambda &\longmapsto M_{x_1,\dots,x_n}(\lambda) = \sup_{\theta \in g^{-1}(\lambda)} L_{x_1,\dots,x_n}(\theta). \end{aligned}$$

- $\widehat{\lambda}(X_1, \dots, X_n)$ *es estimador máximo verosímil de λ si, $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$, la estimación $\widehat{\lambda}(x_1, \dots, x_n)$ maximiza la función de verosimilitud asociada a dicha realización*:

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n, \quad M_{x_1,\dots,x_n}\left(\widehat{\lambda}(x_1, \dots, x_n)\right) = \max_{\lambda \in \Lambda} M_{x_1,\dots,x_n}(\lambda).$$

Teorema de invarianza de Zehna: *Si $\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ es estimador máximo verosímil de θ, y g es una función medible, $g\Big(\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n)\Big)$ es estimador máximo verosímil de $g(\theta)$.*

5.2. OTROS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

MÉTODO DE LOS MOMENTOS (K. Pearson, 1894)

- $(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$.
- Momentos poblacionales: $m_{\theta,j} = E_\theta\left[X^j\right], \quad j \in \mathbb{N}$.
- Momentos muestrales: $A_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^j}{n}, \quad j \in \mathbb{N}$.

El método consiste en estimar la función $h(m_{\theta,1}, \ldots, m_{\theta,k})$ (h medible) por $h(A_1, \ldots, A_k)$.

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS (Gauss, 1809)

Sean $X_1, \ldots, X_n$ observaciones aleatorias de cierta magnitud, $\varphi(t, \theta)$, bajo distintas condiciones experimentales, $t_1, \ldots, t_n$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \varphi(t_1, \theta) + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ X_n &= \varphi(t_n, \theta) + \varepsilon_n, \end{aligned}$$

donde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ son variables aleatorias *no observables*, que especifican los errores cometidos en cada observación.

El estimador de mínimos cuadrados de θ basado en $X_1, \ldots, X_n$ es aquel que minimiza la suma de los cuadrados de los errores:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \varphi(t_i, \theta)\right)^2.$$

TEMA 6: Estimación por intervalos de confianza

6.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONCEPTOS BÁSICOS

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

Se trata de usar los datos muestrales para construir un subconjunto del espacio paramétrico para el que podamos afirmar, con un margen de error prefijado, que contiene al verdadero valor del parámetro.

Intervalo de confianza: *Un intervalo aleatorio,* $\Big(I_1(X_1, \ldots, X_n),\ I_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)$, *es un intervalo de confianza para* θ *al nivel de confianza* $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ *si*

$$\forall \theta \in \Theta, \quad P_\theta\Big(I_1(X_1, \ldots, X_n) \leq \theta \leq I_2(X_1, \ldots, X_n)\Big) \geq 1 - \alpha.$$

Interpretación: Sea cual sea el verdadero valor del parámetro, la probabilidad de que el intervalo lo contenga es, al menos, $1 - \alpha$.

Según la definición frecuentista de probabilidad, esto puede interpretarse como que el $(1 - \alpha)100\,\%$ de las veces que se observe una muestra de tamaño n, el intervalo concreto obtenido, $(I_1(x_1, \ldots, x_n),\ I_2(x_1, \ldots, x_n))$, contendrá al verdadero valor del parámetro; por tanto, cada vez que tomamos una muestra, tenemos una *confianza* del $(1 - \alpha)100\,\%$ de que así ocurre.

Intervalo de confianza de menor longitud esperada uniformemente: *Un intervalo* $\Big(I_1(X_1, \ldots, X_n),\ I_2(X_1, \ldots, X_n)\Big)$, *con nivel de confianza* $1-\alpha$, *es de menor longitud esperada uniformemente a dicho nivel si para cualquier otro intervalo* $\Big(I_1'(X_1, \ldots, X_n),\ I_2'(X_1, \ldots, X_n)\Big)$ *al mismo nivel se tiene:*

$$\forall \theta \in \Theta, \quad E_\theta\left[I_2(X_1, \ldots, X_n) - I_1(X_1, \ldots, X_n)\right] \leq E_\theta\left[I_2'(X_1, \ldots, X_n) - I_1'(X_1, \ldots, X_n)\right].$$

6.2. CONSTRUCCIÓN DE INTERVALOS

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

Intervalos obtenidos mediante la desigualdad de Chebychev: Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es un estimador insesgado de θ con varianza uniformemente acotada ($E_\theta\left[T(X_1, \ldots, X_n)\right] = \theta$, y $Var_\theta\left[T(X_1, \ldots - X_n)\right] \leq c,\ \forall \theta \in \Theta$), para cualquier $k > 0$ se tiene:

$$P_\theta\Big(T(X_1, \ldots - X_n) - k < \theta < \ T(X_1, \ldots - X_n) + k\Big) \geq 1 - \frac{c}{k^2}, \quad \forall \theta \in \Theta,$$

y $(T(X_1, \ldots, X_n) - k, T(X_1, \ldots, X_n) + k)$ es un intervalo de confianza para θ al nivel de confianza $1 - c/k^2$.

Intervalos obtenidos mediante el método pivotal:

Pivote para un parámetro: Función de la muestra y del parámetro, $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$, tal que $\forall \theta \in \Theta,\ T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$ es una variable aleatoria con distribución independiente de θ.

Descripción del método: Sea $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$ un pivote estrictamente monótono en θ:

i) Se buscan dos valores, λ_1 y λ_2 tales que $P_\theta\Big(\lambda_1 < T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) < \lambda_2\Big) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$

ii) Se resuelven en θ las ecuaciones $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) = \lambda_1$ y $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) = \lambda_2$, y las soluciones, $\widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)$ y $\widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)$, proporcionan un intervalo de confianza para θ al nivel $1 - \alpha$:

- T creciente $\rightarrow \ P_\theta\left(\widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)\right) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta$
- T decreciente $\rightarrow \ P_\theta\left(\widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)\right) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$

Determinación de pivotes en distribuciones continuas:

- Si X es de tipo continuo con función de distribución F_θ, la siguiente función es un pivote para θ:

$$T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = -2 \sum_{i=1}^{n} \ln F_\theta(X_i) \ \longrightarrow \ \chi^2(2n).$$

- Si $S(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico con distribución de tipo continuo y F_θ^S es su función de distribución, la siguiente función constituye un pivote para θ:

$$T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = F_\theta^S\big(S(X_1, \ldots, X_n)\big) \ \longrightarrow \ U(0, 1).$$

En cualquiera de los casos, si los pivotes son monótonos en θ, darán lugar a intervalos de confianza para θ.

A1: Intervalos de confianza para la media de una normal con varianza conocida

$(X_1, \dots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2);\ \mu \in \mathbb{R}\}$

PIVOTE : $T(X_1, \dots, X_n;\ \mu) = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\quad \underbrace{P_\mu\left(\lambda_1 < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \lambda_2\right)} = P_\mu\left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - \lambda_1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < Z < \lambda_2) = F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) \quad \big(Z \to \mathcal{N}(0,1),\quad F_Z(z) = P(Z \le z)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1 - \alpha \longrightarrow \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X} - \lambda_1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) \text{ IC para } \mu \text{ a nivel } 1-\alpha}$$

Se busca, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente ($\forall \mu \in \mathbb{R}$) *la longitud media:*

$$E_\mu\left[\left(\overline{X} - \lambda_1 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)\right] = (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}.$$

Problema A1: *Minimizar la función $\lambda_2 - \lambda_1$ con λ_1, λ_2 sujetos a $F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1 - \alpha$.*

Solución: Notando $f_Z = F_Z'$ a la función de densidad de la $\mathcal{N}(0,1)$:

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda[F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) - (1-\alpha)]$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)}{\partial \lambda_1} = -1 - \lambda f_Z(\lambda_1) = 0 \\ \dfrac{\partial F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda)}{\partial \lambda_2} = 1 + \lambda f_Z(\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_Z(\lambda_1) = f_Z(\lambda_2) \Rightarrow \lambda_1 = \pm\lambda_2 \quad (f_Z \text{ es simétrica}).$$

Dado que $\lambda_1 = \lambda_2$ no verifica $F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1 - \alpha$, ha de ser $\lambda_1 = -\lambda_2$, y la restricción $F_Z(\lambda_2) - F_Z(-\lambda_2) = 1 - \alpha$ conduce a $\lambda_2 = z_{\alpha/2}$, siendo $P(Z > z_{\alpha/2}) = \alpha/2$.

I.C. para μ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = -z_\alpha \longrightarrow \left(-\infty,\ \overline{X} + z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right). \\[2ex] \lambda_1 = -\infty \Rightarrow \lambda_2 = z_\alpha \longrightarrow \left(\overline{X} - z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ +\infty\right). \end{array}\right.$$

A2: Intervalo de confianza para la media de una normal con varianza desconocida

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$$\text{PIVOTE}:\ T(X_1, \ldots, X_n;\ \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \longrightarrow t(n-1)$$

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\ \underbrace{P_{\mu,\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \lambda_2\right)} = P_{\mu,\sigma^2}\left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \big(T \to t(n-1),\ F_T(t) = P(T \leq t)\big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \rightarrow \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} - \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \ \text{IC para } \mu \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

Se busca entre ellos el que minimice uniformemente $(\forall \mu \in \mathbb{R},\ \forall \sigma^2 \in \mathbb{R}^+)$ *la longitud media:*

$$E_{\mu,\sigma^2}\left[\left(\overline{X} - \lambda_1 \frac{S}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - \lambda_2 \frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right] = (\lambda_2 - \lambda_1) E_{\mu,\sigma^2}\left[S/\sqrt{n}\right].$$

Problema A2: *Minimizar la función* $\lambda_2 - \lambda_1$ *con* λ_1, λ_2 *sujetos a* $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha$.

Solución: Es el Problema A1 con la restricción dada por la función de distribución de una $t(n-1)$; por tanto, λ_1 y λ_2 deben verificar $f_T(\lambda_1) = f_T(\lambda_2)$, donde f_T es la función de densidad de la distribución $t(n-1)$; como esta función es también simétrica, razonando como A1 se tiene $\lambda_1 = -\lambda_2$ y $\lambda_2 = t_{n-1;\ \alpha/2}$, siendo $P(T > t_{n-1;\ \alpha/2}) = \alpha/2$.

I.C. para μ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha/2} \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = -t_{n-1;\ \alpha} \ \longrightarrow \ \left(-\infty,\ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha} \dfrac{S}{\sqrt{n}}\right). \\[2ex] \lambda_1 = -\infty \Rightarrow \lambda_2 = t_{n-1;\ \alpha} \ \longrightarrow \ \left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha} \dfrac{S}{\sqrt{n}},\ +\infty\right). \end{cases}$$

B1: Intervalo de confianza para la varianza de una normal con media conocida

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2);\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

PIVOTE : $T(X_1, \ldots, X_n;\ \sigma^2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi^2(n)$

$$\forall \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\quad \underbrace{P_{\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2} < \lambda_2\right)} = P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\lambda_1}\right)$$

$$P\left(\lambda_1 < T < \lambda_2\right) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \left(T \to \chi^2(n),\ F_T(t) = P(T \leq t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha \ \to \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\lambda_2},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\lambda_1}\right) \text{ IC para } \sigma^2 \text{ a nivel } 1-\alpha}$$

Longitud media $\to E_{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2/\lambda_1 - \sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2/\lambda_2\right] = \left(\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}\right) E_{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right].$

Problema B1: *Minimizar la función* $\dfrac{1}{\lambda_1} - \dfrac{1}{\lambda_2}$ *con* λ_1, λ_2 *sujetos a* $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha$.

$$F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + \lambda[F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) - (1-\alpha)] \ \to \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -\dfrac{1}{\lambda_1^2} - \lambda f_T(\lambda_1) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = \dfrac{1}{\lambda_2^2} + \lambda f_T(\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f_T(\lambda_1)}{f_T(\lambda_2)} = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2}.$$

En este caso, la asimetría de la distribución hace que los valores λ_1 y λ_2 no sean los de colas iguales. Sin embargo, la diferencia no es suficientemente importante (sobre todo para grandes muestras), y en la práctica se usa el intervalo de colas iguales: $\lambda_1 = \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}$ y $\lambda_2 = \chi^2_{n;\ \alpha/2}$, donde $P\left(\chi^2(n) > \chi^2_{n;\alpha/2}\right) = \alpha/2$.

I.C. para σ^2 de menor longitud media uniformemente (≈), a nivel de confianza $1-\alpha$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha/2}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES
$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = \chi^2_{n;\ 1-\alpha} \longrightarrow \left(0, \quad \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha}}\right) \\ \\ \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \chi^2_{n;\ \alpha} \longrightarrow \left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha}}, \quad +\infty\right). \end{cases}$$

B2: Intervalo de confianza para la varianza de una normal con media desconocida

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

PIVOTE : $T(X_1, \ldots, X_n;\ \sigma^2) = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{\sigma^2} = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \longrightarrow \chi^2(n-1)$

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\quad \underbrace{P_{\mu,\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \lambda_2\right)}_{\downarrow} = P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\lambda_1}\right)$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \left(T \to \chi^2(n-1),\ F_T(t) = P(T \leq t)\right)$$

Se razona como en B1, sustituyendo $\sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2$ por $(n-1)S^2$ y la distribución $\chi^2(n)$ por $\chi^2(n-1)$.

I.C. para σ^2 de menor longitud media uniformemente (≈), a nivel de confianza $1-\alpha$

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES
$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \Rightarrow \lambda_1 = \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha} \longrightarrow \left(0,\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha}}\right) \\[2ex] \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \chi^2_{n-1;\ \alpha} \longrightarrow \left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha}},\ +\infty\right). \end{cases}$$

C1: Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos normales (varianzas conocidas)

$(X_1,\dots,X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1^2);\ \mu_1\in\mathbb{R}\}$

$(Y_1,\dots,Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2^2);\ \mu_2\in\mathbb{R}\}$

$(X_1,\dots,X_{n_1}),\ (Y_1,\dots,Y_{n_2})$ independientes

$$\text{PIVOTE}:\ T(X_1,\dots,X_{n_1},Y_1,\dots,Y_{n_2};\ \mu_1-\mu_2)=\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\forall \mu_1,\mu_2\in\mathbb{R},\ \underbrace{P_{\mu_1,\mu_2}(\lambda_1<T<\lambda_2)}=P_{\mu_1,\mu_2}\left(\overline{X}-\overline{Y}-\lambda_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}<\mu_1-\mu_2<\overline{X}-\overline{Y}-\lambda_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1<Z<\lambda_2)=F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)\quad \Big(Z\to\mathcal{N}(0,1),\ \ F_Z(z)=P(Z\le z)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha \longrightarrow \left(\overline{X}-\overline{Y}-\lambda_2\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ \overline{X}-\overline{Y}-\lambda_1\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)\ \text{IC para } \mu_1-\mu_2 \text{ a nivel } 1-\alpha}$$

El problema de buscar, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media es exactamente el Problema A1, y la solución es, por tanto, $\lambda_1=-z_{\alpha/2},\ \lambda_2=z_{\alpha/2}$.

I.C. para $\mu_1-\mu_2$ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1-\alpha$

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES
$$\begin{cases}\lambda_2=+\infty \longrightarrow \left(-\infty,\ \ \overline{X}-\overline{Y}+z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right). \\[2ex] \lambda_1=-\infty \longrightarrow \left(\overline{X}-\overline{Y}-z_\alpha\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ +\infty\right).\end{cases}$$

C2: Intervalo de confianza para la diferencia de medias de dos normales (varianzas desconocidas pero iguales)

$(X_1, \dots, X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2);\ \mu_1 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2);\ \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(X_1, \dots, X_{n_1}),\ (Y_1, \dots, Y_{n_2})$ independientes

PIVOTE : $T(X_1, \dots, X_{n_1}, Y_1, \dots, Y_{n_2};\ \mu_1 - \mu_2) = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \longrightarrow t(n_1 + n_2 - 2)$

$S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\ \underbrace{P_{\mu_1,\mu_2,\sigma^2}(\lambda_1 < T < \lambda_2)} = P_{\mu_1,\mu_2,\sigma^2}\left(\overline{X} - \overline{Y} - \lambda_2 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \overline{X} - \overline{Y} - \lambda_1 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \Big(T \to t(n_1 + n_2 - 2),\ F_T(t) = P(T \leq t)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \to \ \left(\overline{X} - \overline{Y} - \lambda_2 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\ \ \overline{X} - \overline{Y} - \lambda_1 S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right) \ \text{IC para } \mu_1 - \mu_2 \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

El problema de buscar, entre estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media es exactamente el Problema A2, y la solución es $\lambda_2 = t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2},\ \lambda_1 = -\lambda_2$.

I.C. para $\mu_1 - \mu_2$ de menor longitud media uniformemente, a nivel de confianza $1 - \alpha$

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\quad \overline{X} - \overline{Y} + t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES
$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \ \longrightarrow \ \left(-\infty,\ \ \overline{X} - \overline{Y} + t_{n_1+n_n-2;\ \alpha}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right). \\ \lambda_1 = -\infty \ \longrightarrow \ \left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}\ S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\ \ +\infty\right). \end{cases}$$

D1: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos normales (medias conocidas)

$(X_1, \ldots, X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2);\ \ \sigma_1^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2);\ \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(X_1, \ldots, X_{n_1}),\ (Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ independientes

PIVOTE : $T(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2};\ \sigma_1^2/\sigma_2^2) = \dfrac{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1\sigma_1^2} \longrightarrow F(n_2, n_1)$

$$\forall \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+,\ \underbrace{P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 < \frac{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1\sigma_1^2} < \lambda_2\right)} = P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_2 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \Big(T \to F(n_2, n_1),\ F_T(t) = P(T \le t)\Big)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \rightarrow \left(\lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2},\ \ \lambda_2 \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \mu_2)^2/n_2}\right) \text{ IC para } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

Se busca, entre todos estos intervalos, el que minimice uniformemente la longitud media, lo que se reduce a *minimizar la función* $\lambda_2 - \lambda_1$ *con* λ_1, λ_2 *sujetos a* $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha$.

Es de nuevo el Problema A1, cuya solución es $f_T(\lambda_2) = f_T(\lambda_1)$, siendo ahora f_T la función de densidad de la $F(n_2, n_1)$. De nuevo, en este caso, la asimetría de la distribución hace que el intervalo de mínima longitud esperada uniformemente no sea el de colas iguales, aunque en la práctica es este último el que suele utilizarse.

I.C. para $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ *de menor longitud media uniformemente* *(≈)*, *a nivel de confianza* $1-\alpha$

$$\left(F_{n_2,n_1;\ 1-\alpha/2}\, \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} (X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum\limits_{j=1}^{n_2} (Y_j-\mu_2)^2/n_2},\quad F_{n_2,n_1;\ \alpha/2}\, \frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} (X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum\limits_{j=1}^{n_2} (Y_j-\mu_2)^2/n_2} \right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty \ \longrightarrow \ \left(F_{n_2,n_1;\ 1-\alpha}\, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} (X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum\limits_{j=1}^{n_2} (Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ +\infty \right). \\[2em] \lambda_1 = 0 \ \longrightarrow \ \left(0,\quad F_{n_2,n_1;\ \alpha}\, \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n_1} (X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum\limits_{j=1}^{n_2} (Y_j-\mu_2)^2/n_2} \right). \end{cases}$$

D2: Intervalo de confianza para el cociente de varianzas de dos normales (medias desconocidas)

$(X_1, \ldots, X_{n_1})$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2);\ \mu_1 \in \mathbb{R},\ \sigma_1^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ muestra aleatoria simple de $Y \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2);\ \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+\}$

$(X_1, \ldots, X_{n_1}),\ (Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ independientes

PIVOTE : $T(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2};\ \sigma_1^2/\sigma_2^2) = \dfrac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} \longrightarrow F(n_2 - 1, n_1 - 1)$

$$\forall \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+,\quad \underbrace{P_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 < \frac{S_2^2/\sigma_2^2}{S_1^2/\sigma_1^2} < \lambda_2\right)} = P_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 \frac{S_1^2}{S_2^2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_2 \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

$$\downarrow$$

$$P(\lambda_1 < T < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) \quad \left(T \to F(n_2 - 1, n_1 - 1),\ F_T(t) = P(T \le t)\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \ \rightarrow\ \left(\lambda_1 \frac{S_1^2}{S_2^2},\quad \lambda_2 \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) \ \text{ IC para } \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \text{ a nivel } 1 - \alpha}$$

El problema de minimizar la longitud de los intervalos se resuelve como en D1, tomando el intervalo de colas iguales.

I.C. para $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ *de menor longitud media uniformemente (≈), a nivel de confianza* $1 - \alpha$

$$\left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2},\quad F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)$$

INTERVALOS UNILATERALES

$$\begin{cases} \lambda_2 = +\infty, \longrightarrow \left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha} \dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ +\infty\right). \\[2ex] \lambda_1 = 0 \longrightarrow \left(0,\ F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha} \dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right). \end{cases}$$

TEMA 7: Contraste de hipótesis

7.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y CONCEPTOS BÁSICOS

$(X_1,\dots,X_n)\in\chi^n$ muestra aleatoria simple de $X\to\{P_\theta;\ \theta\in\Theta\}$, $\Theta=\Theta_0\cup\Theta_1$

$H_0:\theta\in\Theta_0$ *Hipótesis nula*
$H_1:\theta\in\Theta_1$ *Hipótesis alternativa*

Test de hipótesis: Es un estadístico, $\varphi(X_1,\dots,X_n)$, con valores en [0,1], que especifica la probabilidad de rechazar H_0 a partir de $X_1,\dots,X_n$.

- *Test no aleatorizado*: $\varphi:\chi^n\longrightarrow\{0,1\}$.

$$\varphi(X_1,\dots,X_n)=\begin{cases}1 & (X_1,\dots,X_n)\in C \qquad C\subseteq\chi^n \textit{ región crítica o de rechazo}\\ 0 & (X_1,\dots,X_n)\notin C \qquad C^c=\chi^n-C \textit{ región de aceptación.}\end{cases}$$

- *Test aleatorizado*: Toma algún valor distinto de $0,1$.

Tipos de errores asociados a un test de hipótesis:

- *Error de tipo 1*: Rechazar H_0 siendo cierta.
- *Error de tipo 2*: Aceptar H_0 siendo falsa.

Función de potencia de $\varphi(X_1,\dots,X_n)$:

$$\begin{aligned}\beta_\varphi:\Theta &\longrightarrow [0,1]\\ \theta &\longmapsto \beta_\varphi(\theta)=E_\theta\left[\varphi(X_1,\dots,X_n)\right]\end{aligned}$$ (probabilidad media de rechazar H_0 bajo P_θ.)

Tamaño de $\varphi(X_1,\dots,X_n)$: $\sup_{\theta\in\Theta_0}\beta_\varphi(\theta)$ (máxima probabilidad media de cometer un error de tipo 1).

Nivel de significación de un test: $\varphi(X_1,\dots X_n)$ tiene nivel de significación α ($\in[0,1]$) si su tamaño es menor o igual que α (cota superior de las probabilidades medias de cometer error de tipo 1):

$$\forall\theta\in\Theta_0,\ \beta_\varphi(\theta)=E_\theta\left[\varphi(X_1,\dots,X_n)\right]\le\alpha.$$

Test uniformemente más potente: Un test $\varphi(X_1,\dots X_n)$ con nivel de significación α es uniformemente más potente a dicho nivel si para cualquier otro test, $\varphi'(X_1,\dots X_n)$, con nivel de significación α, se tiene:

$$\beta_{\varphi'}(\theta)\le\beta_\varphi(\theta),\quad\forall\theta\in\Theta_1.$$

Resolución de un problema de contraste: *fijado un nivel de significación, encontrar el test uniformemente más potente a dicho nivel.*

7.2. LEMA DE NEYMAN-PEARSON (H_0, H_1 simples)

Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}\}$ y $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple con funciones de densidad (o funciones masa de probabilidad) $f_0^n(x_1, \ldots, x_n)$ $(\theta = \theta_0)$ y $f_1^n(x_1, \ldots, x_n)$ $(\theta = \theta_1)$. Consideremos el problema de contraste

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1.$$

a) *Sea $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ un test de la forma*

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & si \;\; f_1^n(X_1, \ldots, X_n) > k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \\ \gamma(X_1, \ldots, X_n), & si \;\; f_1^n(X_1, \ldots, X_n) = k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \\ 0, & si \;\; f_1^n(X_1, \ldots, X_n) < k f_0^n(X_1, \ldots, X_n), \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\gamma(X_1, \ldots, X_n) \in [0, 1]$. Si $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ tiene tamaño α, es de máxima potencia a nivel de significación α. Un test de esta forma se denomina test de Neyman-Pearson.

b) *Para todo $\alpha \in (0, 1]$ existe un test de Neyman-Pearson de tamaño α, con $\gamma(X_1, \ldots, X_n) = \gamma$ constante.*

c) *Si $\varphi'(X_1, \ldots, X_n)$ es un test de tamaño α y es de máxima potencia a nivel de significación α, $\varphi'(X_1, \ldots, X_n)$ es un test de Neyman-Pearson.*

d) *El test de máxima potencia entre todos los de nivel de significación 0 (tamaño 0) es:*

$$\varphi_0(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & si \;\; f_0^n(X_1, \ldots, X_n) = 0 \\ 0, & si \;\; f_0^n(X_1, \ldots, X_n) > 0 \end{cases}$$

7.3. TEST DE LA RAZÓN DE VEROSIMILITUDES (H_0, H_1 arbitrarias)

Sea $(X_1, \ldots, X_n) \in \chi^n$ una muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1\}$. El test de razón de verosimilitudes para el problema de contraste

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$
$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

se define como:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & si \;\; \lambda(X_1, \ldots, X_n) < c \\ 0 & si \;\; \lambda(X_1, \ldots, X_n) \geq c \end{cases} \quad con\ \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_{x_1, \ldots, x_n}(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L_{x_1, \ldots, x_n}(\theta)}, \;\; \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n,$$

siendo $L_{x_1, \ldots, x_n}$ la función de verosimilitud asociada a $(x_1, \ldots, x_n)$, y $c \in (0, 1]$ una constante que se determina imponiendo el tamaño o nivel de significación requerido.

7.4. CONTRASTES SOBRE LOS PARÁMETROS DE UNA NORMAL

Contrastes sobre la media con varianza conocida

$(X_1, \dots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2);\ \mu \in \mathbb{R}\}$

Función de verosimilitud:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = \frac{1}{(\sigma_0^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/2\sigma_0^2}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

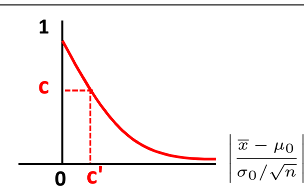
- $\sup_{\mu\in\mathbb{R}} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x})$

- $$\sup_{\mu\le\mu_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = \begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x}), & \overline{x} \le \mu_0 \ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le 0\right) \\ L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0), & \overline{x} \ge \mu_0 \ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \ge 0\right) \end{cases}$$

- $$\sup_{\mu\ge\mu_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = \begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0), & \overline{x} \le \mu_0 \ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \le 0\right) \\ L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x}), & \overline{x} \ge \mu_0 \ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \ge 0\right) \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{array}} \ \text{TRV de tamaño } \alpha \in [0,1] \ \rightarrow \ \varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2} \\ 0 & \text{si } \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \le z_{\alpha/2} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup_{\mu=\mu_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu)}{\sup_{\mu\in\mathbb{R}} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu)} = \frac{L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x})} = \exp\left\{\frac{-n(\overline{x}-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

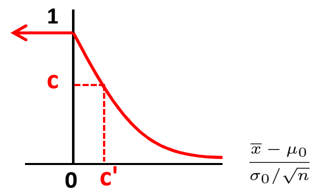


$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \dots, x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \dots, x_n) \ge c \end{cases} \Leftrightarrow \ \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > c' \ \ (\ge 0) \\ 0, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \le c' \end{cases}$$

$$\alpha = P_{\mu_0}\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > c'\right) = \left[Z \rightarrow \mathcal{N}(0,1)\right] = P\big(|Z| > c'\big) \Rightarrow c' = z_{\alpha/2} \ge 0, \ \forall \alpha \in [0,1].$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu \leq \mu_0 \\ H_1: \mu > \mu_0 \end{array}} \quad \text{TRV de tamaño } \alpha \leq 1/2 \ \rightarrow \ \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > z_\alpha \\[2ex] 0 & \text{si } \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq z_\alpha \end{cases}$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu\leq\mu_0} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x})} = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq 0 \\[2ex] \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x})}, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases}$$



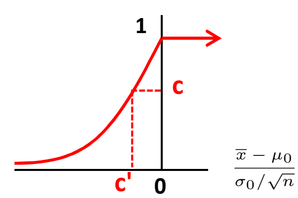
$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1,\ldots,x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1,\ldots,x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \ \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > c' \quad (c' \geq 0) \\[2ex] 0, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq c' \end{cases}$$

$$\alpha = \sup_{\mu\leq\mu_0} P_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > c'\right) = \sup_{\mu\leq\mu_0} P_\mu\left(\overline{X} > \mu_0 + c'\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = \sup_{\mu\leq\mu_0} P_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) =$$

$$\left[Z \rightarrow \mathcal{N}(0,1)\right] \qquad = \sup_{\mu\leq\mu_0} P\left(Z > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) = P\left(Z > c'\right) = \alpha \ \Rightarrow \ c' = z_\alpha \ (\geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1/2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \mu \geq \mu_0 \\ H_1: \mu < \mu_0 \end{array}} \quad \text{TRV de tamaño } \alpha \leq 1/2 \ \rightarrow \ \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha} \\[2ex] 0 & \text{si } \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq z_{1-\alpha} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu\geq\mu_0} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x})} = \begin{cases} \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x})}, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq 0 \\[2ex] 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases}$$



$$\varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1,\ldots,x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1,\ldots,x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \ \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < c' \quad (c' \leq 0) \\[2ex] 0, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq c' \end{cases}$$

$$\alpha = \sup_{\mu\geq\mu_0} P_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < c'\right) = \sup_{\mu\geq\mu_0} P_\mu\left(\overline{X} < \mu_0 + c'\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) = \sup_{\mu\geq\mu_0} P_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) =$$

$$\left[Z \rightarrow \mathcal{N}(0,1)\right] \qquad = \sup_{\mu\geq\mu_0} P\left(Z < \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) = P\left(Z < c'\right) = \alpha \ \Rightarrow \ c' = z_{1-\alpha} \ (\leq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1/2)$$

Contrastes sobre la media con varianza desconocida

$(X_1,\dots,X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2);\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$

Función de verosimilitud:

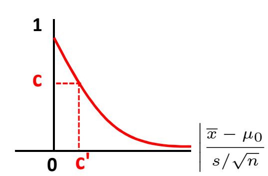
$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \ \longrightarrow\ L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/2\sigma^2},\quad \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2\in\mathbb{R}^+$$

- $$\sup_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2),\quad \widehat{\sigma}^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}$$
- $$\sup_{\mu=\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2),\quad \widehat{\sigma}_0^2=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{n}$$
- $$\sup_{\mu\le\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=\begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2), & \overline{x}\le\mu_0\ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\le 0\right)\\[2ex] L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2), & \overline{x}\ge\mu_0\ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\ge 0\right)\end{cases}$$
- $$\sup_{\mu\ge\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=\begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2), & \overline{x}\le\mu_0\ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\le 0\right)\\[2ex] L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2), & \overline{x}\ge\mu_0\ \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\ge 0\right)\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}H_0:\mu=\mu_0\\ H_1:\mu\ne\mu_0\end{array}}\ \text{TRV de tamaño } \alpha\in[0,1]\ \to\ \varphi(X_1,\dots,X_n)=\begin{cases}1 & \text{si } \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>t_{n-1;\ \alpha/2}\\[2ex] 0 & \text{si } \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|\le t_{n-1;\ \alpha/2}\end{cases}$$

$$\lambda(x_1,\dots,x_n)=\frac{\sup\limits_{\mu=\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+}L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)}{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+}L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)}=\frac{L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2)}=$$

$$=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}\right]^{n/2}=\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-\mu_0)^2}\right]^{n/2}=\left[\frac{1}{1+\frac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{(n-1)s^2}}\right]^{n/2}$$

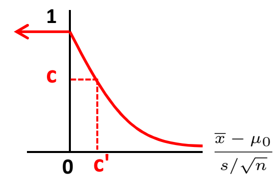


$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}1, & \lambda(x_1,\dots,x_n)<c\ \ (\in(0,1])\\ 0, & \lambda(x_1,\dots,x_n)\ge c\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \varphi(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}1, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|>c'\quad (c'\ge 0)\\[2ex] 0, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\le c'.\end{cases}$$

$$\alpha=\sup_{\sigma^2\in\mathbb{R}^+}P_{\mu_0,\sigma^2}\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right|>c'\right)=\Big[T\to t(n-1)\Big]=P\big(|T|>c'\big)\Rightarrow c'=t_{n-1;\ \alpha/2}\ge 0,\ \forall\alpha\in[0,1].$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}} \quad \text{TRV de tamaño } \alpha \leq 1/2 \ \rightarrow \ \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\ \alpha} \\[2ex] 0 & \text{si} \ \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1;\ \alpha} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu \leq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)} = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq 0 \\[2ex] \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)}, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases}$$



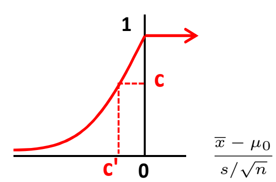
$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > c' \quad (c' \geq 0) \\[2ex] 0, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq c'. \end{cases}$$

$$\alpha = \sup_{\mu \leq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > c'\right) = \sup_{\mu \leq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\overline{X} > \mu_0 + c' \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \sup_{\mu \leq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0 - \mu}{S/\sqrt{n}} + c'\right) =$$

$$\Big[T \rightarrow t(n-1)\Big] \quad = \sup_{\mu \leq \mu_0} P\left(T > \frac{\mu_0 - \mu}{S/\sqrt{n}} + c'\right) = P\left(T > c'\right) = \alpha \ \Rightarrow \ c' = t_{n-1;\ \alpha} \ (\geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1/2)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}} \quad \text{TRV de tamaño } \alpha \leq 1/2 \ \rightarrow \ \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si} \ \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;\ 1-\alpha} \\[2ex] 0 & \text{si} \ \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{n-1;\ 1-\alpha} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu \geq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)} = \begin{cases} \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)}, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq 0 \\[2ex] 1, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases}$$



$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} < c' \quad (c' \leq 0) \\[2ex] 0, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq c'. \end{cases}$$

$$\alpha = \sup_{\mu \geq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < c'\right) = \sup_{\mu \geq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\overline{X} < \mu_0 + c' \frac{S}{\sqrt{n}}\right) = \sup_{\mu \geq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 - \mu}{S/\sqrt{n}} + c'\right) =$$

$$\Big[T \rightarrow t(n-1)\Big] \quad = \sup_{\mu \geq \mu_0} P\left(T < \frac{\mu_0 - \mu}{S/\sqrt{n}} + c'\right) = P\left(T < c'\right) = \alpha \ \Rightarrow \ c' = t_{n-1;\ 1-\alpha} \ (\geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1/2)$$

Contrastes sobre la varianza con media conocida

$(X_1, \dots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2);\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$

Función de verosimilitud:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2/2\sigma^2}, \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

- $\displaystyle \sup_{\sigma^2 \in \mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2) = L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2), \quad \widehat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{n}$

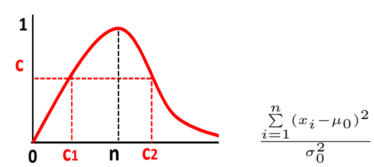
- $\displaystyle \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \leq \sigma_0^2 \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \right) \\ L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \geq \sigma_0^2 \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \right) \end{cases}$

- $\displaystyle \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \leq \sigma_0^2 \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \right) \\ L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \geq \sigma_0^2 \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \right) \end{cases}$

$$\boxed{\begin{matrix} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{matrix}}$$

TRV($\approx$) de tamaño $\alpha \in [0,1] \rightarrow \varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2} \text{ ó } > \chi^2_{n;\ \alpha/2} \\ 0 & \text{si } \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n;\ \alpha/2}. \end{cases}$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\sigma^2=\sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2)}{\sup\limits_{\sigma^2 \in \mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2)} = \frac{L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma_0^2)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)} = \left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{-n\widehat{\sigma}_0^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\}$$



$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \dots, x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \dots, x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c_1 \text{ ó } \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c_2 \\ 0, & c_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq c_2 \end{cases}$$

donde $c_1 \leq n$ y $c_2 \geq n$ son tales que $(c_1/n)^{n/2}e^{-c_1/2+n/2} = (c_2/n)^{n/2}e^{-c_2/2+n/2}$ y

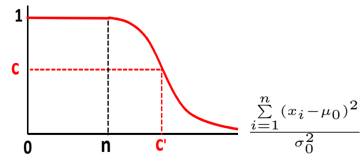
$$\alpha = P_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c_1\right) + P_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c_2\right) = P(Y < c_1) + P(Y > c_2), \text{ con } Y \rightarrow \chi^2(n).$$

En la práctica, se toma el test de colas iguales, $c_1 = \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}$, $c_2 = \chi^2_{n;\ \alpha/2}$ $\left(\forall \alpha \in [0,1],\ \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2} \leq \chi^2_{n;\ \alpha/2}\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{array}}$$

$$\text{TRV de tamaño } \alpha \leq P\left(Y > n\right)\ \left(Y \to \chi^2(n)\right) \longrightarrow \varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n;\ \alpha} \\ 0 & \text{si } \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n;\ \alpha} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)} = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \\ \dfrac{L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma_0^2)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)}, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \end{cases}$$



$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \dots, x_n) < c \quad (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \dots, x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c' \quad (c' \geq n) \\ 0, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq c' \end{cases}$$

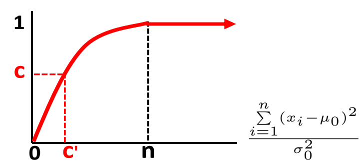
$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c'\right) = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2} > c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = \left[Y \to \chi^2(n)\right] = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P\left(Y > c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) =$$

$$= P\left(Y > c'\right) \Rightarrow c' = \chi^2_{n;\ \alpha} \ \left(\geq n \Leftrightarrow P\big(Y > n\big) \geq \alpha\right).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}}$$

$$\text{TRV de tamaño } \alpha \leq P\left(Y \leq n\right)\ \left(Y \to \chi^2(n)\right) \longrightarrow \varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;\ 1-\alpha} \\ 0 & \text{si } \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n;\ 1-\alpha} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma^2)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)} = \begin{cases} \dfrac{L_{x_1,\dots,x_n}(\sigma_0^2)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)}, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \\ 1, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \end{cases}$$



$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \dots, x_n) < c \quad (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \dots, x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c' \quad (c' \leq n) \\ 0, & \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq c'. \end{cases}$$

$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c'\right) = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2} < c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = \left[Y \to \chi^2(n)\right] = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P\left(Y < c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) =$$

$$= P\left(Y < c'\right) \Rightarrow c' = \chi^2_{n;\ 1-\alpha} \ \left(\leq n \Leftrightarrow P\big(Y < n\big) \geq \alpha\right).$$

Contrastes sobre la varianza con media desconocida

$(X_1,\dots,X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \longrightarrow \{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2);\ \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$

Función de verosimilitud:

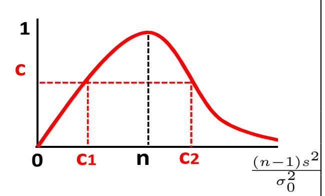
$$(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \longrightarrow L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(\sigma^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}}e^{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2/2\sigma^2},\quad \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2\in\mathbb{R}^+$$

- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2),\quad \widehat{\sigma}^2=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n}=\dfrac{(n-1)s^2}{n}.$
- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2=\sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2)$
- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\le\sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=\begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2), & \widehat{\sigma}^2\le\sigma_0^2\ \left(\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le n\right)\\ L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}^2\ge\sigma_0^2\ \left(\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge n\right)\end{cases}$
- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\ge\sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)=\begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}^2\le\sigma_0^2\ \left(\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le n\right)\\ L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2), & \widehat{\sigma}^2\ge\sigma_0^2\ \left(\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge n\right)\end{cases}$

$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$
$H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

TRV($\approx$) de tamaño $\alpha\in[0,1]$ $\rightarrow$ $\varphi(X_1,\dots,X_n)=\begin{cases} 1 & \text{si}\ \ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}\ \text{ ó }\ >\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}\\ 0 & \text{si}\ \ \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}\le\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}.\end{cases}$

$$\lambda(x_1,\dots,x_n)=\frac{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2=\sigma_0^2} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)}{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\sigma^2)}=\frac{L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2)}=\left(\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2}\exp\left\{\frac{-n\widehat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2}+\frac{n}{2}\right\}$$



$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}1, & \lambda(x_1,\dots,x_n)<c\ \ (\in(0,1])\\ 0, & \lambda(x_1,\dots,x_n)\ge c\end{cases}\Leftrightarrow \varphi(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}1 & \text{si}\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}<c_1\ \text{ó}\ \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}>c_2\\ 0 & \text{si}\ c_1\le\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le c_2\end{cases}$$

donde $c_1\le n,\ c_2\ge n,\ (c_1/n)^{n/2}e^{-c_1/2+n/2}=(c_2/n)^{n/2}e^{-c_2/2+n/2}$ son tales que

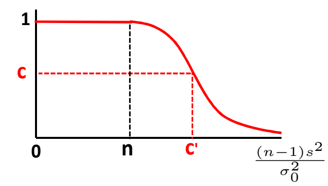
$$\alpha=\sup_{\mu\in\mathbb{R}}P_{\mu,\sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}<c_1\right)+\sup_{\mu\in\mathbb{R}}P_{\mu,\sigma_0^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}>c_2\right)=\left[Y\to\chi^2(n-1)\right]=P\left(Y<c_1\right)+P\left(Y>c_2\right)$$

En la práctica, se toma el test de colas iguales, $c_1=\chi^2_{n-1;1-\alpha/2},\ c_2=\chi^2_{n-1;\alpha/2}$ $\left(\forall\alpha\in[0,1],\ \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}\le\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}\right)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{array}}$$

TRV de tamaño $\alpha \leq P\,(Y > n)$ $(Y \to \chi^2(n-1)) \longrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\ \alpha} \\ 0 & \text{si } \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1;\ \alpha} \end{cases}$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \leq \sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)} = \begin{cases} 1, & \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq n \\ \frac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \sigma_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)}, & \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq n \end{cases}$$



$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > c' \quad (c' \geq n) \\ 0 & \text{si } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq c'. \end{cases}$$

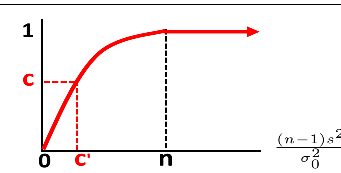
$$\alpha = \sup_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > c'\right) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = \left[Y \to \chi^2(n-1)\right] =$$

$$= \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P\left(Y > c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = P\,(Y > c') \ \Rightarrow \ c' = \chi^2_{n-1;\ \alpha} \ \big(\geq n \Leftrightarrow P\big(Y > n\big) \geq \alpha\big).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}}$$

TRV de tamaño $\alpha \leq P\,(Y \leq n)$ $(Y \to \chi^2(n-1)) \longrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha} \\ 0 & \text{si } \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha} \end{cases}$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \geq \sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)} = \begin{cases} \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \sigma_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2)}, & \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \leq n \\ 1, & \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq n \end{cases}$$



$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) < c \ \ (\in (0,1]) \\ 0, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) \geq c \end{cases} \Leftrightarrow \ \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < c' \quad (c' \leq n) \\ 0 & \text{si } \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq c'. \end{cases}$$

$$\alpha = \sup_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \geq \sigma_0^2} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < c'\right) = \sup_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \geq \sigma_0^2} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = \left[Y \to \chi^2(n-1)\right] =$$

$$= \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P\left(Y < c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = P\,(Y < c') \ \Rightarrow \ c' = \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha} \ \big(\geq n \Leftrightarrow P\big(Y < n\big) \geq \alpha\big).$$

TESTS E INTERVALOS EN POBLACIONES NORMALES

Contraste	Región de rechazo $\sigma^2 = \sigma_0^2$ conocida	Región de rechazo σ^2 desconocida
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\left\lvert \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right\rvert > z_{\alpha/2}$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$	$\left\lvert \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right\rvert > t_{n-1;\ \alpha/2}$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha/2}\dfrac{S}{\sqrt{n}} \right)$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > z_{\alpha}$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - z_{\alpha}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ +\infty \right)$	$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\ \alpha}$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha}\dfrac{S}{\sqrt{n}},\ +\infty \right)$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha}$ $\mu_0 \notin \left(-\infty,\ \overline{X} + z_{\alpha}\dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$	$\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;\ 1-\alpha}$ $\mu_0 \notin \left(-\infty,\ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha}\dfrac{S}{\sqrt{n}} \right)$

Contraste	Región de rechazo $\mu = \mu_0$ conocida	Región de rechazo μ desconocida
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}$ ó $> \chi^2_{n;\ \alpha/2}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha/2}},\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}} \right)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}$ ó $> \chi^2_{n-1;\ \alpha/2}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}} \right)$
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n;\ \alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha}},\ +\infty \right)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\ \alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha}},\ +\infty \right)$
$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;\ 1-\alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(0,\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha}} \right)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(0,\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha}} \right)$

7.5. TESTS DE HIPÓTESIS E INTERVALOS DE CONFIANZA PARA LOS PARÁMETROS DE DOS POBLACIONES NORMALES

Contraste	Región de rechazo, σ_1^2, σ_2^2 conocidas	Región de rechazo, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocida
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\dfrac{\lvert\overline{X}-\overline{Y}\rvert}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\alpha/2}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\dfrac{\lvert\overline{X}-\overline{Y}\rvert}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} \mp t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2}\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}\right)$
$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\alpha}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} - z_{\alpha}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \ +\infty\right)$	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}},\ \ +\infty\right)$

Contraste	Región de rechazo, μ_1, μ_2 conocidas	Región de rechazo, μ_1, μ_2 desconocidas
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2} < F_{n_1,n_2;\ 1-\alpha/2}$ ó $> F_{n_1,n_2;\ \alpha/2}$ $1 \notin \left(F_{n_2,n_1;\ 1-\alpha/2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2},\ \ F_{n_2,n_1;\ \alpha/2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2}\right)$	$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1;\ 1-\alpha/2}$ ó $> F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}$ $1 \notin \left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ \ F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right)$
$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2} > F_{n_1,n_2;\ \alpha}$ $1 \notin \left(F_{n_2,n_1;\ 1-\alpha}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2/n_2},\ \ +\infty\right)$	$\dfrac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha}$ $1 \notin \left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha}\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ \ +\infty\right)$

7.6. DUALIDAD ENTRE TESTS DE HIPÓTESIS Y REGIONES DE CONFIANZA

Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ *y* $(X_1, \dots, X_n)$ *una muestra aleatoria simple de* X*. Para cada* $\theta_0 \in \Theta$ *consideramos un conjunto* $A(\theta_0) \subseteq \chi^n$ *y, para cada realización muestral,* $(x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$*, definimos:*

$$\varphi_{\theta_0}(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1 & si \ \ (x_1, \dots, x_n) \notin A(\theta_0) \\ \\ 0 & si \ \ (x_1, \dots, x_n) \in A(\theta_0) \end{cases}$$

$$S(x_1, \dots, x_n) = \{\theta \in \Theta \ / \ (x_1, \dots, x_n) \in A(\theta)\} \subseteq \Theta.$$

Cada uno de lo tests $\varphi_{\theta_0}(X_1, \dots, X_n)$ *aplicado al problema de contrastar* $H_0 : \theta = \theta_0$ *frente a* $H_1 : \theta \neq \theta_0$ *tiene nivel de significación* α *si, y sólo si,* $S(X_1, \dots, X_n)$ *es una región de confianza para* θ *al nivel de confianza* $1 - \alpha$*.*

DEMOSTRACIÓN LEMA DE NEYMAN-PEARSON

Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}\}$ y $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple con funciones de densidad (o funciones masa de probabilidad) $f_0^n(x_1, \ldots, x_n)$ $(\theta = \theta_0)$ y $f_1^n(x_1, \ldots, x_n)$ $(\theta = \theta_1)$. Consideremos el problema de contraste

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1.$$

a) *Sea $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ un test de la forma*

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & si \ \ f_1^n(X_1, \ldots, X_n) > k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \\ \gamma(X_1, \ldots, X_n), & si \ \ f_1^n(X_1, \ldots, X_n) = k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \\ 0, & si \ \ f_1^n(X_1, \ldots, X_n) < k f_0^n(X_1, \ldots, X_n), \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y $\gamma(X_1, \ldots, X_n) \in [0, 1]$. Si $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ tiene tamaño α, es de máxima potencia a nivel de significación α.

Demostración: Supondremos que X es de tipo continuo y, para simplificar, notaremos $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ a la muestra aleatoria simple y $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$ a las realizaciones muestrales. Así,

$$\beta_\varphi(\theta_i) = E_{\theta_i}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \int_{\chi^n} \varphi(\mathbf{x}) f_i^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i = 0, 1.$$

Una demostración totalmente similar puede hacerse con variables discretas, sustituyendo las densidades por las funciones masa de probabilidad y las integrales por sumas.

Consideremos la siguiente integral:

$$I = \int_{\chi^n} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad h(\mathbf{x}) = [\varphi(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{x})][f_1^n(\mathbf{x}) - k f_0^n(\mathbf{x})], \ \mathbf{x} \in \chi^n.$$

Teniendo en cuenta la forma de φ y que $\varphi' \in [0, 1]$ tenemos:

- $f_1^n(\mathbf{x}) > k f_0^n(\mathbf{x}) \Rightarrow h(\mathbf{x}) = [1 - \varphi'(\mathbf{x})][f_1^n(\mathbf{x}) - k f_0^n(\mathbf{x})] \geq 0.$
- $f_1^n(\mathbf{x}) < k f_0^n(\mathbf{x}) \Rightarrow h(\mathbf{x}) = [-\varphi'(\mathbf{x})][f_1^n(\mathbf{x}) - k f_0^n(\mathbf{x})] \geq 0.$
- $f_1^n(\mathbf{x}) = k f_0^n(\mathbf{x}) \Rightarrow h(\mathbf{x}) = 0.$

Esto es, $h \geq 0$ y, consecuentemente, $I \geq 0$. Entonces, desarrollando h tenemos:

$$I = \int_{\chi^n} \varphi(\mathbf{x}) f_1^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\chi^n} \varphi'(\mathbf{x}) f_1^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - k \left(\int_{\chi^n} \varphi(\mathbf{x}) f_0^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\chi^n} \varphi'(\mathbf{x}) f_0^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)$$
$$= \beta_\varphi(\theta_1) - \beta_{\varphi'}(\theta_1) - k(\alpha - E_{\theta_0}[\varphi'(\boldsymbol{X})]) \geq 0 \Rightarrow \beta_\varphi(\theta_1) - \beta_{\varphi'}(\theta_1) \geq k(\alpha - E_{\theta_0}[\varphi'(\boldsymbol{X})]).$$

Por tanto, como $k \geq 0$ y $E_{\theta_0}[\varphi'(\boldsymbol{X})] \leq \alpha$, el segundo miembro es no negativo y, por tanto, el primero también. Esto es, $\beta_\varphi(\theta_1) \geq \beta_{\varphi'}(\theta_1)$.

b) *Para todo $\alpha \in (0,1]$ existe un test de Neyman-Pearson de tamaño α, con $\gamma(\boldsymbol{X}) = \gamma$ constante.*

Demostración: Dado $\alpha \in (0,1]$, hacemos $\gamma(\boldsymbol{X}) = \gamma$ en el test de Neyman-Pearson, $\varphi(\boldsymbol{X})$, y probamos que existen $k \geq 0$ y $\gamma \in [0,1]$ tales que el test tiene tamaño α. Esto es:

$$\alpha = E_{\theta_0}[\varphi(\boldsymbol{X})] = P_{\theta_0}(f_1^n(\boldsymbol{X}) > k f_0^n(\boldsymbol{X})) + \gamma P_{\theta_0}(f_1^n(\boldsymbol{X}) = k f_0^n(\boldsymbol{X})) \text{ [1]}$$
$$= P_{\theta_0}\left(\frac{f_1^n(\boldsymbol{X})}{f_0^n(\boldsymbol{X})} > k\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\frac{f_1^n(\boldsymbol{X})}{f_0^n(\boldsymbol{X})} = k\right).$$

Equivalentemente, notando H_{θ_0} la función de distribución de $f_1^n(\boldsymbol{X})/f_0^n(\boldsymbol{X}) \geq 0$ bajo P_{θ_0}, dado $\alpha \in (0,1]$, debemos encontrar $k \geq 0$ y $\gamma \in [0,1]$ tales que:

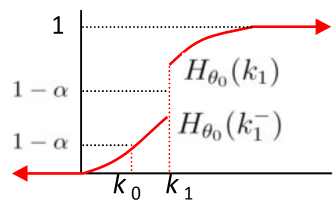
$$1 - \alpha = H_{\theta_0}(k) - \gamma(H_{\theta_0}(k) - H_{\theta_0}(k^-)).$$

Existen dos posibilidades:

a) $\exists k_0 \geq 0 \; / \; H_{\theta_0}(k_0) = 1 - \alpha \;\rightarrow\; k = k_0,\; \gamma = 0.$

b) $\exists k_1 \geq 0 \; / \; H_{\theta_0}(k_1^-) \leq 1 - \alpha < H_{\theta_0}(k_1)$

$$\rightarrow\; k = k_1,\; \gamma = \frac{H_{\theta_0}(k_1) - (1-\alpha)}{H_{\theta_0}(k_1) - H_{\theta_0}(k_1^-)} \in (0,1).$$



c) *Si $\varphi'(\boldsymbol{X})$ es un test de tamaño α y es de máxima potencia a nivel de significación α, $\varphi'(\boldsymbol{X})$ es un test de Neyman-Pearson.*

Demostración: Por *b*), dado $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi'(\boldsymbol{X})]$, podemos encontrar un test de Neyman-Pearson de tamaño α, $\varphi(\boldsymbol{X})$. Puesto que $\varphi(\boldsymbol{X})$ y $\varphi'(\boldsymbol{X})$ son de máxima potencia, ésta debe ser la misma, y ambos tests tienen el mismo tamaño y la misma potencia. Por tanto:

$$I = \int_{\chi^n} [\varphi(\mathbf{x}) - \varphi'(\mathbf{x})]\,[f_1^n(\mathbf{x}) - k f_0^n(\mathbf{x})]\,d\mathbf{x} = \beta_\varphi(\theta_1) - \beta_{\varphi'}(\theta_1) - k\Big(\beta_\varphi(\theta_0) - \beta_{\varphi'}(\theta_0)\Big) = 0.$$

Ya que, según se probó en el apartado *a*), el integrando es una función no negativa, $I = 0$ significa que el integrando es nulo (salvo, quizás, en conjuntos con medida de Lebesgue nula, que tienen probabilidades nulas). Esto es:

- $f_1^n(\mathbf{x}) > k f_0^n(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi'(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = 1.$
- $f_1^n(\mathbf{x}) < k f_0^n(\mathbf{x}) \Rightarrow \varphi'(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) = 0.$

Por tanto:

$$\varphi'(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & f_1^n(\boldsymbol{X}) > k f_0^n(\boldsymbol{X}) \\ \gamma'(\boldsymbol{X}), & f_1^n(\boldsymbol{X}) = k f_0^n(\boldsymbol{X}) \\ 0, & f_1^n(\boldsymbol{X}) < k f_0^n(\boldsymbol{X}). \end{cases}$$

[1] $P_{\theta_0}(f_0^n(\boldsymbol{X}) = 0) = \int_{\{\mathbf{x} \in \chi^n \;/\; f_0^n(\mathbf{x}) = 0\}} f_0^n(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0.$

d) *El test de máxima potencia entre todos los de nivel de significación 0 (tamaño 0) es:*

$$\varphi_0(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & f_0^n(\boldsymbol{X}) = 0 \\ 0, & f_0^n(\boldsymbol{X}) > 0. \end{cases}$$

Demostración: Puesto que $P_{\theta_0}(f_0^n(\boldsymbol{X}) = 0)$, es inmediato que el test $\varphi_0(\boldsymbol{X})$ tiene tamaño 0.

Si $\varphi_0'(\boldsymbol{X})$ es cualquier otro test de tamaño cero, $E_{\theta_0}[\varphi_0'(\boldsymbol{X})] = 0$, y al ser una función no negativa, debe anularse en $\{\mathbf{x} \in \chi^n \ / \ f_0^n(\mathbf{x}) > 0\}$. Esto es:

$$\varphi_0'(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \gamma(\boldsymbol{X}), & f_0^n(\boldsymbol{X}) = 0, \\ 0, & f_0^n(\boldsymbol{X}) > 0, \end{cases} \qquad \gamma(\boldsymbol{X}) \in [0,1].$$

Por tanto, $\varphi_0'(\boldsymbol{X}) \leq \varphi_0(\boldsymbol{X})$ y, consecuentemente:

$$\beta_{\varphi_0'}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_0'(\boldsymbol{X})\right] \leq E_{\theta_1}\left[\varphi_0(\boldsymbol{X})\right] = \beta_{\varphi_0}(\theta_1). \qquad \square$$

Expresión del test para su resolución en diferentes situaciones prácticas:

$$\chi_0 = \{x/f_0(x) > 0\}; \quad \chi_1 = \{x/f_1(x) > 0\}.$$

- $\chi_0 \supseteq \chi_1 \ \Rightarrow \ \chi^n = \chi_0^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ f_0^n(x_1, \ldots x_n) \neq 0\}$.
  En esta situación, se puede dividir siempre por $f_0^n(x_1, \ldots x_n)$ y la función test queda:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ \lambda(x_1, \ldots, x_n) > k \\ \gamma & \text{si } \ \lambda(x_1, \ldots, x_n) = k \\ 0 & \text{si } \ \lambda(x_1, \ldots, x_n) < k, \end{cases} \quad \text{con } \ \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \ldots, x_n)}{f_0^n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

- $\chi_0 \subset \chi_1 \ \Rightarrow \ \chi^n = \chi_1^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ f_1^n(x_1, \ldots x_n) \neq 0\}$.
  Existen realizaciones muestrales para las que $f_0^n(x_1, \ldots x_n) = 0$ y no se puede dividir. Sin embargo, en estos casos es obvio que, $f_1^n(x_1, \ldots x_n) > k f_0^n(x_1, \ldots x_n)$, $\forall k \geq 0$, lo que significa que tales realizaciones conducen al rechazo de H_0 en cualquier test de Neyman-Pearson, y éste se expresa como:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ f_0^n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ 1 & \text{si } \ f_0^n(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \ \text{ y } \ \lambda(x_1, \ldots, x_n) > k \\ \gamma & \text{si } \ f_0^n(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \ \text{ y } \ \lambda(x_1, \ldots, x_n) = k \\ 0 & \text{si } \ f_0^n(x_1, \ldots, x_n) \neq 0 \ \text{ y } \ \lambda(x_1, \ldots, x_n) < k. \end{cases} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \ldots, x_n)}{f_0^n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

TEMA 8: Introducción a la teoría general de modelos lineales: regresión y análisis de la varianza

- Descripción del modelo lineal general. Modelo de Gauss-Markov.
- Estimación de un modelo de Gauss-Markov.
- Inferencia bajo hipótesis de normalidad.
- Modelo de regresión lineal simple.
- Análisis de la varianza de una vía.

I. El modelo lineal general. Modelo de Gauss-Markov

MODELO LINEAL GENERAL

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (\boldsymbol{Y} = \mathbf{x_1}\beta_1 + \cdots, \mathbf{x_k}\beta_k + \boldsymbol{\varepsilon})$$

- $\boldsymbol{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ es un vector aleatorio n-dimensional *observable.*

- $\mathbf{X} = (\mathbf{x_1}, \ldots, \mathbf{x_k})$ es una *matriz conocida* de dimensión $n \times k$ $(k < n)$, denominada *matriz de diseño:*

$$\mathbf{x_j} = (x_{1j}, \ldots, x_{nj})^T, \quad j = 1, \ldots, k$$

  El rango de $\mathbf{X}$ determina el *rango del modelo*; si el rango es k, el modelo es de *rango máximo o completo.*

- $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^T$ es un vector de *parámetros desconocidos*, denominado *vector de efectos*, cuyas componentes ponderan los efectos de los vectores columna de $\mathbf{X}$ en el vector $\boldsymbol{Y}$.

- $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)^T$ es un vector aleatorio *no observable*, llamado *vector de errores*, que representa el error que se comete si se describe $\boldsymbol{Y}$ por $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$.

$\downarrow$

MODELO DE GAUSS-MARKOV

Es un modelo lineal en el que las componentes del vector de errores son variables aleatorias de segundo orden, centradas, homocedásticas (igual varianza) e incorreladas:

$$E[\varepsilon_i] = 0, \quad Var[\varepsilon_i] = E[\varepsilon_i^2] = \sigma^2, \ i = 1 \ldots, n, \qquad Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = E[\varepsilon_i \varepsilon_j] = 0, \ i \neq j = 1 \ldots, n.$$

o, equivalentemente:

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \quad Cov[\boldsymbol{\varepsilon}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T] = \sigma^2 I_{n\times n},$$

$\downarrow$

Objetivo

Realizar inferencia sobre los parámetros $\beta_1, \ldots, \beta_k, \sigma^2$ a partir de una observación del vector $\boldsymbol{Y}$.

Modelo de Gauss-Markov

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \quad Cov[\boldsymbol{\varepsilon}] = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T] = \sigma^2 I_{n\times n} \\ E[\boldsymbol{Y}] = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \quad Cov[\boldsymbol{Y}] = \sigma^2 I_{n\times n}. \end{cases}$$

$$Y_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} E[\varepsilon_i] = 0, \quad Var[\varepsilon_i] = \sigma^2, \quad Cov[\varepsilon_i, \varepsilon_j] = 0, \ i \neq j \\ E[Y_i] = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j, \quad Var[Y_i] = \sigma^2, \quad Cov[Y_i, Y_j] = 0, \ i \neq j. \end{cases}$$

I a) ESTIMACIÓN DE MÍNIMOS CUADRADOS DEL VECTOR DE EFECTOS

$$Minimizar \ \ S^2(\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \Big(Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j\Big)^2 = ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}||^2$$

- $$\frac{\partial S^2(\boldsymbol{\beta})}{\partial \beta_h} = -2\sum_{i=1}^{n}\Big(Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j\Big)x_{ih} = 0, \quad h = 1, \ldots, k.$$

Ecuaciones normales: $\sum_{i=1}^{n} Y_i x_{ih} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}x_{ih}\beta_j, \quad h = 1, \ldots, k \ \longrightarrow \ \mathbf{X}^T\boldsymbol{Y} = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})\boldsymbol{\beta}.$

$\downarrow$

Estimador de mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta} \rightarrow \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{Y}) = \Big(\widehat{\beta}_1(\boldsymbol{Y}), \ldots, \widehat{\beta}_k(\boldsymbol{Y})\Big)^T.$

- *Existencia*: existe, al menos, un estimador de mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$.
- *Unicidad*: no está garantizada, salvo si *el modelo es de rango máximo*:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} := \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{Y}) = (\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}^T\boldsymbol{Y} \rightarrow \text{Función lineal de } \boldsymbol{Y} \ \rightarrow \begin{cases} E[\widehat{\boldsymbol{\beta}}] = \boldsymbol{\beta}. \\ Cov[\widehat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}. \end{cases}$$

Función estimable (escalar): *$\psi(\boldsymbol{\beta})$ es estimable si admite un estimador insesgado, función lineal de las componentes de $\boldsymbol{Y}$:*

$$\psi(\boldsymbol{\beta}) \textit{estimable} \ \Leftrightarrow \exists \ \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n \ / \ E\left[\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{Y}\right] = \psi(\boldsymbol{\beta}), \quad \forall \boldsymbol{\beta},$$

o, equivalentemente, $\psi(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{c}^T\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n.$

- *Si el modelo es de rango máximo, $\psi(\boldsymbol{\beta})$ es estimable $\Leftrightarrow \psi(\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{\beta}, \quad \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^k$.*

Teorema de Gauss-Markov: *Si $a^T\boldsymbol{\beta}$ es estimable, admite un único estimador lineal insesgado uniformemente de mínima varianza en la clase de estimadores lineales insesgados. Dicho estimador es $a^T\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{Y})$, y se denomina estimador de mínimos cuadrados de $a^T\boldsymbol{\beta}$.*

I b) MODELO ESTIMADO, RESIDUOS Y ESTIMACIÓN DE LA VARIANZA

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\widehat{\beta}_1, \dots, \widehat{\beta}_k\right)^T := \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{Y}) \text{ estimador de mínimos cuadrados de } \boldsymbol{\beta}$$

Modelo estimado: $\widehat{\boldsymbol{Y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \longrightarrow \widehat{Y}_i = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\widehat{\beta}_j, \quad i = 1, \dots, n.$

Residuos mínimo-cuadráticos: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \longrightarrow R_i = Y_i - \widehat{Y}_i, \quad i = 1, \dots, n.$

Propiedades:

- $\widehat{Y}_i$ *es el estimador lineal insesgado de mínima varianza (estimador de mínimos cuadrados) de* $E[Y_i] = \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j, \ \forall i = 1, \dots, n.$
- *Los residuos son variables aleatorias con media nula,* $E[R_i] = 0, \ \forall i = 1, \dots, n.$
- *El vector de residuos es ortogonal a los vectores columna de* $\boldsymbol{X}$, $\mathbf{X}^T\boldsymbol{R} = 0.$[1]
- *El vector de residuos es ortogonal al vector estimado,* $\widehat{\boldsymbol{Y}}^T\boldsymbol{R} = 0.$

$$\textit{VARIANZA RESIDUAL}: \ S_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} R_i^2}{n-r} = \frac{||\boldsymbol{R}||^2}{n-r} = \frac{||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}||^2}{n-r} \longrightarrow \text{estimador insesgado de } \sigma^2$$

[1]Esto indica que existen k relaciones lineales entre los residuos $R_1, \dots, R_n$, determinadas por las k columnas de $\mathbf{X}$, $\mathbf{x_j^T R} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}R_i = 0, \quad j = 1, \dots, k$. Por tanto, si $\mathbf{X}$ es de rango r, el número de residuos R_i linealmente independientes es $n-r \longrightarrow$ *Los residuos tienen $n-r$ grados de libertad.*

I c) INFERENCIA BAJO HIPÓTESIS DE NORMALIDAD (Ver Apéndice)

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{l}\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \to \mathcal{N}_n(0,\ \sigma^2 I_{n\times n})\end{array}} \Leftrightarrow \boldsymbol{Y} \to \mathcal{N}_n(\boldsymbol{X\beta},\ \sigma^2 I_{n\times n})}$$

▶ Estimadores de máxima verosimilitud:

$$\textit{Función de verosimilitud}: \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \ \to \ L_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^n} \ \exp\left\{-\frac{||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}||^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

- *Estimador máximo verosímil de* $\boldsymbol{\beta} \longrightarrow \widehat{\boldsymbol{\beta}}$ (mínimos cuadrados). [2]

- *Estimador máximo verosímil de* $\sigma^2 \longrightarrow \widehat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n R_i^2}{n} = \dfrac{(n-r)S_R^2}{n}$. [3]

▶ Test de razón de verosimilitudes para la hipótesis lineal general:

Hipótesis lineal general: $H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = 0$, siendo $\mathbf{C}_{q\times k}$ una matriz conocida de rango q $(\leq k)$, tal que todas las componentes del vector $\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ son estimables.

Test de razón de verosimilitudes de tamaño α

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & F(\boldsymbol{Y}) > F_{q,n-r;\ \alpha} \\ 0 & F(\boldsymbol{Y}) \leq F_{q,n-r;\ \alpha} \end{cases} \qquad F(\boldsymbol{Y}) = \frac{n-r}{q}\left(\frac{||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^0||^2 - ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}||^2}{||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}||^2}\right)}$$

$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^0$: estimador máximo verosímil de $\boldsymbol{\beta}$ bajo H_0

[2] Maximizar $L_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)$ en $\boldsymbol{\beta}$ equivale a minimizar $||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}||^2$.

[3] $\dfrac{\partial ln L_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2\sigma^4}||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}||^2 = 0 \ \Rightarrow \ \widehat{\sigma}^2(\boldsymbol{y}) = \dfrac{||\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}||^2}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^n r_i^2}{n}$.

II. Modelo de regresión lineal simple

Hipótesis: X, Y variables aleatorias tales que $E[Y^2] < +\infty$ y, fijado un valor arbitrario, $X = x$:

$$E\left[Y/X = x\right] = \beta_0 + \beta_1 x, \qquad Var\left[Y/X = x\right] = \sigma^2.$$

$$\Downarrow$$

Formulación: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1 \ldots n.$

- $x_i, \quad i = 1 \ldots n$, valores arbitrarios (fijos) de X (al menos dos distintos).
- $Y_i, \quad i = 1 \ldots n$, variables aleatorias que describen las observaciones de Y, supuesto que $X = x_i$ $(Y_i \equiv Y/X = x_i)$.
- $\varepsilon_i, \quad i = 1 \ldots n$, variables aleatorias tales que $E[\varepsilon_i] = 0,\ Var[\varepsilon_i] = \sigma^2,\ i = 1, \ldots, n.$

$\Downarrow$ $Y_1, \ldots, Y_n$ independientes

Modelo de Gauss-Markov de rango máximo (2).

$$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}_{n\times 1} \qquad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}_{n\times 2} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}_{2\times 1} \qquad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

II a) ESTIMACIÓN DEL MODELO [4]

▶ Estimador de mínimos cuadrados de $\boldsymbol{\beta}$:

Modelo de rango máximo $\longrightarrow \widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y}$ [5] $\begin{cases} \text{Único y función lineal de } \boldsymbol{Y}. \\ E[\widehat{\boldsymbol{\beta}}] = \boldsymbol{\beta}, \quad Cov[\widehat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^{-1}. \end{cases}$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\widehat{\beta}_0,\ \widehat{\beta}_1\right)^T \quad \longrightarrow \quad \widehat{\beta}_0 = \overline{Y} - \widehat{\beta}_1\overline{x}, \quad \widehat{\beta}_1 = \frac{\sigma_{xY}}{\sigma_x^2}$$

$\widehat{\beta}_0$ y $\widehat{\beta}_1$ son los estimadores de mínimos cuadrados de β_0 y β_1, respectivamente.

$\Downarrow$

Son los de mínima varianza uniformemente en la clase de estimadores lineales insesgados:

⋆ $E[\widehat{\beta}_0] = \beta_0,\ E[\widehat{\beta}_1] = \beta_1.$

⋆ $Var[\widehat{\beta}_0] = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{x}^2}{n\sigma_x^2}\right), \qquad Var[\widehat{\beta}_1] = \sigma^2\frac{1}{n\sigma_x^2}, \qquad Cov[\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1] = -\sigma^2\frac{\overline{x}}{n\sigma_x^2}.$

▶ Modelo estimado, residuos mínimo cuadráticos y propiedades:

- $\widehat{\boldsymbol{Y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \quad \longrightarrow \quad \widehat{Y}_i = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i \quad \longrightarrow \quad \widehat{Y}_i = \overline{Y} + \frac{\sigma_{xY}}{\sigma_x^2}(x_i - \overline{x}), \quad i = 1, \ldots, n.$
- $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} \quad \longrightarrow \quad R_i = Y_i - \widehat{Y}_i \quad \longrightarrow \quad R_i = Y_i - \overline{Y} - \frac{\sigma_{xY}}{\sigma_x^2}(x_i - \overline{x}), \quad i = 1, \ldots, n.$
- $\mathbf{X}^T\boldsymbol{R} = 0 \ \Rightarrow \sum_{i=1}^n R_i = 0 \ \Rightarrow \sum_{i=1}^n R_i/n = 0 \ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \widehat{Y}_i/n = \overline{Y}.$
- $\widehat{\boldsymbol{Y}}^T\boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^n \widehat{Y}_i R_i = 0.$

▶ Varianza residual: $S_R^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n R_i^2}{n-2}.$

[4] $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}{n}, \quad \overline{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}, \quad \sigma_Y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2}{n}, \quad \sigma_{xY} = \dfrac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{n}.$

[5] $(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} n & n\overline{x} \\ n\overline{x} & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n\sigma_x^2}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2/n & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{pmatrix} \quad (\sigma_x^2 \neq 0 \ \text{ ya que } \ \exists x_i \neq x_j).$

$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{Y} = \frac{1}{n\sigma_x^2}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2/n & -\overline{x} \\ -\overline{x} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n\overline{Y} \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Y} - \overline{x}\frac{\sigma_{xY}}{\sigma_x^2} \\ \frac{\sigma_{xY}}{\sigma_x^2} \end{pmatrix}.$$

II b) ANÁLISIS DE LA BONDAD DEL MODELO ESTIMADO

Descomposición de la variabilidad de las observaciones [6]

$$\boxed{VT = VE + VNE}$$

- $VT = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = n\sigma_Y^2 \longrightarrow$ *Variabilidad total* (de $Y_1, \ldots, Y_n$).
- $VE = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 = \dfrac{n\sigma_{xY}^2}{\sigma_x^2} \longrightarrow$ *Variabilidad explicada por el modelo* (de $\widehat{Y}_1, \ldots, \widehat{Y}_n$).
- $VNE = \sum_{i=1}^{n} R_i^2 \longrightarrow$ *Variabilidad no explicada por el modelo* (de $R_1, \ldots, R_n$).

Coeficiente de determinación lineal

$$\boxed{R^2 = \frac{VE}{VT} = \frac{\sigma_{xY}^2}{\sigma_x^2 \sigma_Y^2}.}$$

$$\downarrow$$

Proporción de variabilidad total explicada por el modelo

[6] $Y_i = \widehat{Y}_i + R_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{Y}_i + R_i - \overline{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} R_i^2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\widehat{Y}_i - \overline{Y})R_i}_{0} = \sum_{i=1}^{n} (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2 + \sum_{i=1}^{n} R_i^2.$$

II c) PREDICCIÓN A PARTIR DEL MODELO ESTIMADO

$$X = x_p \longrightarrow Y_p = \beta_0 + \beta_1 x_p + \varepsilon_p; \quad E[\varepsilon_p] = 0, \quad Var[\varepsilon_p] = \sigma^2$$

$$\Downarrow$$

$$\textit{Predicción de } Y \textit{ cuando } X = x_p \longrightarrow \widehat{Y}_p = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_p = \overline{Y} + \frac{\sigma_{xY}}{\sigma_x^2}(x_p - \overline{x}).$$

- $E[\widehat{Y}_p] = \beta_0 + \beta_1 x_p = E\left[Y_p\right]$.
- $Var[\widehat{Y}_p] = E[(\widehat{Y}_p - E[\widehat{Y}_p])^2] = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{(x_p - \overline{x})^2}{n\sigma_x^2}\right]$.
- $ECM[\widehat{Y}_p] = E[(\widehat{Y}_p - Y_p)^2] = Var[\widehat{Y}_p] + Var[Y_p] = \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_p - \overline{x})^2}{n\sigma_x^2}\right]$.

II d) APLICACIÓN PRÁCTICA: RECTA DE REGRESIÓN ESTIMADA

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ observaciones independientes del vector aleatorio (X, Y).

Modelo lineal correspondiente a $x_1, \ldots, x_n \longrightarrow Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n.$

Modelo estimado a partir de $Y_1, \ldots, Y_n \longrightarrow \widehat{Y}_i = \overline{Y} + \dfrac{\sigma_{xY}}{\sigma_x^2}(x_i - \overline{x}), \quad i = 1, \ldots\ n.$

$$\Big\downarrow\, Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n$$

$$\widehat{y}_i = \overline{y} + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_i - \overline{x}), \quad i = 1, \ldots\ n.$$

Recta de regresión estimada [7] *a partir de* $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \longrightarrow \boxed{y = \overline{y} + \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{x})}$

Coeficiente de determinación lineal estimado [8] *a partir de* $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \longrightarrow \boxed{r^2 = \dfrac{\sigma_{xy}^2}{\sigma_x^2 \sigma_y^2}}$

Predicción a partir de la recta de regresión estimada $\longrightarrow \widehat{y}_p = \overline{y} + \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x_p - \overline{x}).$

Estimación del error cuadrático medio de la predicción $\longrightarrow \widehat{ECM}(\widehat{Y}_p) = s_R^2 \left[1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{(x_p - \overline{x})^2}{n\sigma_x^2} \right].$

[7] Recta de regresión teórica: $y = E[Y] + \dfrac{Cov[X,Y]}{Var[X]}(x - E[X])$

[8] Coeficiente de determinación lineal de X e Y : $\rho_{XY}^2 = \dfrac{Cov^2[X,Y]}{Var[X]Var[Y]}$

II e) CONTRASTE DE REGRESIÓN BAJO HIPÓTESIS DE NORMALIDAD

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1 \ldots n, \quad \varepsilon_i \to \mathcal{N}(0,\ \sigma^2) \quad \Big(\Leftrightarrow Y_i \to \mathcal{N}(\beta_0 + \beta_1 x_i,\ \sigma^2) \Big)$$

$Y_1, \ldots, Y_n$ independientes.

$H_0 : \beta_1 = 0 \;\longleftrightarrow\; H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = 0$ con $\mathbf{C} = (0,1)_{1\times 2}$ ($\mathbf{C}\boldsymbol{\beta}$ estimable y rango $q = 1$).

Estadístico de contraste del test de razón de verosimilitudes

$$F(\boldsymbol{Y}) = \frac{n-r}{q}\left(\frac{||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^0||^2 - ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}||^2}{||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}||^2}\right) \longrightarrow \begin{cases} ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}||^2 = \sum_{i=1}^n R_i^2 = VNE \\ ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^0||^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - \overline{Y})^2 = VT^{(*)} \end{cases}$$

$^{(*)}$ Bajo H_0, $Y_i = \beta_0 + \varepsilon_i \to \mathcal{N}(\beta_0, \sigma^2)$, $i = 1, \ldots, n \Rightarrow (Y_1, \ldots, Y_n)$ m.a.s. de $\mathcal{N}(\beta_0, \sigma^2) \;\Rightarrow\; \widehat{\boldsymbol{\beta}}_0^0 = \overline{Y}$.
$\Downarrow$
$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^0 = \left(\widehat{\beta}_0^0, \widehat{\beta}_1^0\right)^T = (\overline{Y}, 0)^T \;\Rightarrow\; \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^0 = (\overline{Y}, \ldots, \overline{Y})^T$.

$$\Downarrow$$

$$F(\boldsymbol{Y}) = (n-2)\frac{VT - VNE}{VNE} = \frac{VE}{VNE/(n-2)} = \frac{VE}{S_R^2} \xrightarrow[H_0]{} F(1, n-2).$$

Test de razón de verosimilitudes de tamaño α $\longrightarrow \varphi(\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & F(\boldsymbol{Y}) > F_{1,n-2;\ \alpha} \\ 0 & F(\boldsymbol{Y}) \leq F_{1,n-2;\ \alpha}. \end{cases}$

Nota: $F(\boldsymbol{Y}) = (n-2)\dfrac{R^2}{1-R^2} \longrightarrow$ función creciente de R^2. Así, grandes valores de R^2 conducen al rechazo de H_0, lo que concuerda con la definición de R^2 como medida de bondad del modelo estimado.

III. Análisis de la varianza de una vía

Técnica estadística (Fisher) para *determinar si un supuesto factor de variación afecta al comportamiento de una cierta variable aleatoria.* Se aplica bajo los siguientes supuestos:

- *La variable de interés no está afectada por factores distintos al que es objeto de estudio.*
- *El factor de variación tiene un número finito de niveles (k) y, en cada uno de ellos, la variable tiene distribución normal, con la misma varianza:*

$$Y_i: \text{ variable de interés en el nivel } i\text{-ésimo } \longrightarrow \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, k.$$

$\downarrow$ **Hipótesis a contrastar**

El supuesto factor de variación no afecta al comportamiento de la variable:

$$H_0: \mu_1 = \cdots = \mu_k$$

Igualdad de medias de k poblaciones normales con varianza común.

Resolución:

- $(Y_{i1}, \dots, Y_{in_i})$ muestra aleatoria simple de Y_i, $i = 1, \dots, k$, todas independientes.
- $Y_{ij} \to \mathcal{N}(\mu_i, \sigma^2) \Rightarrow \underbrace{Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij},\ i = 1\dots, k, \quad j = 1, \dots, n_i,}$ con $\varepsilon_{ij} \longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

$\boldsymbol{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\varepsilon}$ **modelo lineal** n-dimensional $(n = \sum_{i=1}^{k} n_i)$

$$\boldsymbol{Y} = \left(\begin{array}{c} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ \hline Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline Y_{k1} \\ \vdots \\ Y_{kn_k} \end{array}\right)_{n\times 1} \qquad \mathbf{X} = \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hline & & \vdots & \\ & & \vdots & \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)_{n\times k} \to \text{rango} = k, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}_{k\times 1} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \left(\begin{array}{c} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \hline \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n_2} \\ \hline \vdots \\ \vdots \\ \hline \varepsilon_{k1} \\ \vdots \\ \varepsilon_{kn_k} \end{array}\right)_{n\times 1}$$

$$E[\varepsilon_{ij}] = 0,\ i = 1\dots, k, \quad j = 1, \dots, n_i; \quad E[\varepsilon_{ij}\varepsilon_{i'j'}] = 0,\ i \neq i' \text{ ó } j \neq j'$$

$$\Downarrow$$

Modelo de Gauss-Markov de rango máximo ($\boldsymbol{k}$) .

III a) ESTIMACIÓN DEL MODELO

▶ Estimador máximo verosímil (mínimos cuadrados) de $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_k)^T$ [9]

$$\boxed{\widehat{\mu}_i = \overline{Y}_i, \quad i = 1, \ldots, k \;\longrightarrow\; \widehat{\boldsymbol{\mu}} = (\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_k)^T}$$

▶ Modelo estimado, residuos mínimo cuadráticos y propiedades:

- $\widehat{\boldsymbol{Y}} = \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}} = \Big(\overline{Y}_1, \ldots, \overline{Y}_1 | \cdots | \overline{Y}_k, \ldots, \overline{Y}_k\Big)^T \longrightarrow \widehat{Y}_{ij} = \overline{Y}_i, \quad i = 1, \ldots, k, \; j = 1, \ldots, n_i.$
- $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}} \longrightarrow R_{ij} = Y_{ij} - \widehat{Y}_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_i, \quad i = 1, \ldots, k, \; j = 1, \ldots, n_i.$
- $\mathbf{X}^T\boldsymbol{R} = 0 \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{n_i} R_{ij} = 0, \; i = 1, \ldots, k \;\Rightarrow \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} R_{ij}/n = 0 \\ \\ \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} \widehat{Y}_{ij}/n = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} \overline{Y}_i/n = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} Y_{ij}/n = \overline{Y}. \end{cases}.$
- $\widehat{\boldsymbol{Y}}^T\boldsymbol{R} = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} \widehat{Y}_{ij}R_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i} \overline{Y}_i R_{ij} = 0.$

---

[9] $S^2(\boldsymbol{\mu}) = \sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \mu_i)^2 \Rightarrow \dfrac{\partial S^2(\boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_h} = \dfrac{d\sum\limits_{j=1}^{n_h}(Y_{hj} - \mu_h)^2}{d\mu_h} = -2\sum\limits_{j=1}^{n_h}(Y_{hj} - \mu_h) = 0 \Rightarrow \widehat{\mu}_h = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n_h} Y_{hj}}{n_h} = \overline{Y}_h$

III b) DESCOMPOSICIÓN DE LA VARIABLIDAD DE LAS OBSERVACIONES[10]

$$\boxed{VT = VE + VNE}$$

- $VT = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}\right)^2 \rightarrow$ *Variabilidad total* (de $Y_{ij},\ i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, n_i$).

- $VE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\widehat{Y}_{ij} - \overline{Y}\right)^2 \rightarrow$ *Variabilidad explicada por el modelo* (de $\widehat{Y}_{ij},\ i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, n_i$).

- $VNE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}^2 \rightarrow$ *Variabilidad no explicada por el modelo* (de $R_{ij},\ i = 1, \dots, k,\ j = 1, \dots, n_i$).

$\downarrow\ \widehat{Y}_{ij} = \overline{Y}_i,\ R_{ij} = Y_{ij} - \overline{Y}_i$

- $VE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\overline{Y}_i - \overline{Y}\right)^2 \longrightarrow$ Variabilidad de $\overline{Y}_1, \dots, \overline{Y}_k \longrightarrow$ *Variabilidad entre grupos.*

- $VNE = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}_i\right)^2}_{\text{Variabilidad de las observaciones de la muestra } i\text{-ésima}} \longrightarrow$ *Variabilidad dentro de grupos.*

[10] $Y_{ij} = \widehat{Y}_{ij} + R_{ij}$

$\Downarrow$

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\widehat{Y}_{ij} + R_{ij} - \overline{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\widehat{Y}_{ij} - \overline{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}^2 + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(\widehat{Y}_{ij} - \overline{Y}\right) R_{ij}}_{0}$$

III c) PROBLEMA DE CONTRASTE $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_k$

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0,\ \mu_1 - \mu_3 = 0, \ldots, \mu_1 - \mu_k = 0$

$\updownarrow$

$$H_0 : \mathbf{C}\boldsymbol{\mu} = 0, \text{ con } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}_{(k-1)\times k} \rightarrow \text{rango} = k-1 \ \textbf{(Hipótesis lineal general)}$$

Estadístico de contraste del test de razón de verosimilitudes

$$F(\boldsymbol{Y}) = \frac{n-r}{q}\left(\frac{||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}}^0||^2 - ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}}||^2}{||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}}||^2}\right) \longrightarrow \begin{cases} ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}}||^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} R_{ij}^2 = VNE \\ ||\boldsymbol{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}}^0||^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y})^2 = VT^{(*)} \end{cases}$$

(*) Bajo H_0, $Y_{ij} \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\forall i, j \Rightarrow (Y_{11}, \ldots, Y_{1n_1}, \ldots, Y_{k1}, \ldots, Y_{kn_k})$ m.a.s. de $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \ \Rightarrow \ \widehat{\mu} = \overline{Y}$.

$\Downarrow$

$$\widehat{\mu}_i^0 = \overline{Y}, \quad i = 1, \ldots, k \ \longrightarrow \ \widehat{\boldsymbol{\mu}}^0 = (\overline{Y}, \ldots, \overline{Y})^T \ \longrightarrow \ \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\mu}}^0 = (\overline{Y}, \ldots, \overline{Y}|\cdots|\overline{Y}, \ldots, \overline{Y})^T.$$

$$\Downarrow$$

$$F(\boldsymbol{Y}) = \frac{n-k}{k-1}\frac{VT - VNE}{VNE} = \frac{VE/(k-1)}{VNE/(n-k)} \underset{H_0}{\longrightarrow} F(k-1, n-k).$$

TABLA ANOVA DE UNA VÍA

Fuentes de Variación	Variabilidad	Grados de libertad	Varianzas
Entre grupos	$VE = \sum_{i=1}^{k} n_i \left(\overline{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$	$k-1$	$S_E^2 = VE/(k-1)$
Dentro de grupos	$VNE = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}_i\right)^2$	$n-k$	$S_R^2 = VNE/(n-k)$
Total	$VT = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \left(Y_{ij} - \overline{Y}\right)^2$	$n-1$	

$$\downarrow$$

Test de razón de verosimilitudes de tamaño α

$$\varphi(\boldsymbol{Y}) = \begin{cases} 1 & F(\boldsymbol{Y}) > F_{k-1,n-k;\ \alpha} \\ 0 & F(\boldsymbol{Y}) \leq F_{k-1,n-k;\ \alpha} \end{cases} \qquad F(\boldsymbol{Y}) = \frac{S_E^2}{S_R^2}.$$

Nota: En la práctica, si el problema planteado no especifica un nivel de significación se trabaja con el denominado *p-nivel o p-valor asociado a los datos:*

$$p = P(F(k-1, n-k) > F_{exp}),$$

siendo F_{exp} el valor del estadístico $F(\boldsymbol{Y})$ obtenido de los datos concretos:

- Si el *p-nivel* es pequeño (usualmente, 0.05 o menor) se rechaza H_0.
- Si el *p-nivel* es grande (0.15 o mayor), se acepta H_0.
- Para valores intermedios hay que tratar cada situación en particular aunque, normalmente, es aconsejable tomar más datos y rehacer los cálculos.

Apéndice: Distribución normal n-dimensional

Un vector aleatorio $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T$ tiene distribución normal (n-dimensional), lo que se denota $Y \to \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$, si su función de densidad es de la forma:

$$f(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}} e^{-\dfrac{(y-\mu)^T\Sigma^{-1}(y-\mu)}{2}}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T \in \mathbb{R}^n$ y $\Sigma = ((\sigma_{ij}))_{n\times n}$ es una matriz definida positiva.

Propiedades:

- $E[Y] = \mu,\ Cov[Y] = E[(Y-\mu)(Y-\mu)^T] = \Sigma.$
- Las distribuciones marginales de cualquier dimensión son normales y, en particular, $Y_i \to \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_{ii}), \quad i = 1, \ldots, n.$
- $Y \to \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma) \ \Rightarrow\ \forall \gamma \in \mathbb{R}^n$ (vector constante), $Y + \gamma \to \mathcal{N}_n(\mu + \gamma, \Sigma)$.
- $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)^T \to \mathcal{N}_n(\mu, \Sigma)$:

  $Y_1, \ldots, Y_n$ son independientes $\Leftrightarrow$ Σ es diagonal $\Leftrightarrow \rho_{Y_i,Y_j} = 0,\ \forall i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq j.$

TEMA 9: Contrastes no paramétricos

9.1 Problema de bondad de ajuste:

- Test χ^2 de Pearson.
- Test de Kolmogorov-Smirnov.

9.2 Problema de localización:

- Test de los signos de Fisher.
- Test de los rangos signados de Wilcoxon.

9.3 Problema de independencia: test χ^2.

9.4 Problema de homogeneidad: test χ^2.

9.1. PROBLEMA DE BONDAD DE AJUSTE

TEST χ^2 DE PEARSON $\rightarrow$ *X variable cualitativa,* $X = A_1, \ldots, A_k$

$$H_0 : P(X = A_i) = p_i^0, \quad \forall i = 1, \cdots, k.$$
$$H_1 : P(X = A_i) \neq p_i^0 \ \text{ para algún } i = 1, \cdots, k.$$

- Se toma una muestra de n observaciones independientes de X.
- N_i : *Número de observaciones muestrales en la categoría* A_i, $i = 1, \ldots, k$.

$$\chi^2(N_1, \ldots, N_k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i^0)^2}{np_i^0} \xrightarrow[n\to+\infty,\ H_0]{L} \chi^2(k-1)$$

Región de rechazo (test de tamaño α)$^{(*)}$	$p-nivel^{(*)}$
$\chi^2_{exp} \geq \chi^2_{k-1;\ \alpha}$ $P_{H_0}\left(\chi^2(N_1, \ldots, N_k) \geq \chi^2_{k-1;\ \alpha}\right) = \alpha$	$P_{H_0}\left(\chi^2(N_1, \ldots, N_k) \geq \chi^2_{exp}\right)$

$^{(*)}$ Tamaño y p-nivel aproximados por la distribución asintótica de $\chi^2(N_1, \ldots, N_k)$ bajo H_0.
Requisitos mínimos: $np_i^0 \geq 5, \quad \forall i = 1, \ldots, k$.

TEST DE KOLMOGOROV-SMIRNOV $\rightarrow$ *X variable aleatoria continua*

$$H_0 : P_X = P_0.$$
$$H_1 : P_X \neq P_0.$$

- $(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de X.
- $F^*_{X_1,\ldots,X_n}$ *función de distribución muestral.*

$$D(X_1, \ldots, X_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|F^*_{X_1,\ldots,X_n}(x) - F_0(x)\right| \xrightarrow[H_0]{} Z \text{ de Kolmogorov}$$

Región de rechazo (test de tamaño α)	$p-nivel$
$D_{exp} \geq d_\alpha$ $P_{H_0}\Big(D(X_1, \ldots, X_n) \geq d_\alpha\Big) = \alpha$	$P_{H_0}\Big(D(X_1, \ldots, X_n) \geq D_{exp}\Big)$

$$x_i \neq x_j,\ i \neq j \Rightarrow D_{exp} = D(x_1, \cdots, x_n) = \max\left\{\max_{x_i}\left[F^*(x_i) - F_0(x_i)\right],\ \max_{x_i}\left[F_0(x_i) - F^*(x_i^-)\right]\right\}.$$
$$F^* := F^*_{x_1,\ldots,x_n}$$

9.1. PROBLEMA DE LOCALIZACIÓN

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de X, con mediana M_X

$$H_0 : M_X = m \qquad H_0 : M_X = m \qquad H_0 : M_X = m$$
$$H_1 : M_X \neq m \qquad H_1 : M_X > m \qquad H_1 : M_X < m$$

TEST DE LOS SIGNOS DE FISHER → X *variable aleatoria continua*

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \textit{Número de observaciones muestrales } X_i \textit{ mayores que } m \underset{H_0}{\longrightarrow} B(n, 1/2).$$

Alternativa	*Región de rechazo (n.s. α)*	$p-$*nivel*
$H_1 : M_X > m$	$T_{exp} \geq k$ $P_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \geq k) \leq \alpha$	$P_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \geq T_{exp})$
$H_1 : M_X < m$	$T_{exp} \leq k$ $P_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \leq k) \leq \alpha$	$P_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \leq T_{exp})$
$H_1 : M_X \neq m$	$T_{exp} \leq k$ ó $T_{exp} \geq n-k$ $P_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \leq k) \leq \alpha/2$	$2P_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \leq T_{exp})$ si $T_{exp} \leq n/2$ $2P_{H_0}(T(X_1, \ldots, X_n) \geq T_{exp})$ si $T_{exp} \geq n/2$

TEST DE LOS RANGOS SIGNADOS DE WILCOXON → X *v.a. continua y simétrica*

Se asignan rangos a $D_i = X_i - m,\ i = 1, \ldots, n$, según orden creciente de $|D_1|, \ldots, |D_n|$

$T^+(X_1, \ldots, X_n) =$ *Suma de los rangos correspondientes a los* D_i *positivos*$^{(*)}$

Alternativa	*Región de rechazo (n.s. α)*	$p-$*nivel*
$H_1 : M_X > m$	$T^+_{exp} \geq k$ $P_{H_0}(T^+(X_1, \ldots, X_n) \geq k) \leq \alpha$	$P_{H_0}(T^+(X_1, \ldots, X_n) \geq T^+_{exp})$
$H_1 : M_X < m$	$T^+_{exp} \leq k$ $P_{H_0}(T^+(X_1, \ldots, X_n) \leq k) \leq \alpha$	$P_{H_0}(T^+(X_1, \ldots, X_n) \leq T^+_{exp})$
$H_1 : M_X \neq m$	$T^+_{exp} \leq k$ ó $T^+_{exp} \geq \frac{n(n+1)}{2} - k$ $P_{H_0}(T^+(X_1, \ldots, X_n) \leq k) \leq \alpha/2$	$2P_{H_0}(T^+(X_1, \ldots, X_n) \leq T^+_{exp})$ si $T^+_{exp} \leq n(n+1)/4$ $2P_{H_0}(T^+(X_1, \ldots, X_n) \geq T^+_{exp})$ si $T^+_{exp} \geq n(n+1)/4$

$^{(*)}$ La distribución de $T^+(X_1, \ldots, X_n)$ bajo H_0, (simétrica alrededor de $\frac{n(n+1)}{4}$) está tabulada para $n \leq 15$. Para $n > 15$ puede usarse la siguiente aproximación:

$$T^+(X_1, \ldots, X_n) \approx \mathcal{N}\left(\frac{n(n+1)}{4}, \ \frac{n(n+1)(2n+1)}{24}\right)$$

9.3. PROBLEMA DE INDEPENDENCIA

TEST χ^2 DE INDEPENDENCIA $\rightarrow X = A_1, \ldots, A_m,\ \ Y = B_1, \ldots, B_k$ *variables cualitativas*

$$H_0 : P(X = A_i, Y = B_j) = P(X = A_i)P(Y = B_j), \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

$$H_1 : P(X = A_i, Y = B_j) \neq P(X = A_i)P(Y = B_j), \quad \text{para algún par } (i, j).$$

- Se toma una muestra de n observaciones independientes de (X, Y).
- N_{ij} : *Número de observaciones muestrales en* A_i *y* B_j, $\ i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, k.$

$X \backslash Y$	B_1	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_k	Totales
A_1	N_{11}	$\cdots$	N_{1j}	$\cdots$	N_{1k}	$N_{1.}$
$\vdots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	$\vdots$
A_i	N_{i1}	$\cdots$	N_{ij}	$\cdots$	N_{ik}	$N_{i.}$
$\vdots$	$\ldots$		$\ldots$		$\ldots$	$\vdots$
A_m	N_{m1}	$\cdots$	N_{mj}	$\cdots$	N_{mk}	$N_{m.}$
Totales	$N_{.1}$	$\cdots$	$N_{.j}$	$\cdots$	$N_{.k}$	n

$$\chi^2(N_{ij}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i.}N_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{N_{i.}N_{.j}}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty,\ H_0]{L} \chi^2((m-1)(k-1))$$

Región de rechazo (test de tamaño α)(*)	$p-$*nivel*(*)
$\chi^2_{exp} \geq \chi^2_{(m-1)(k-1);\ \alpha}$ $P_{H_0}\left(\chi^2(N_{ij}) \geq \chi^2_{(m-1)(k-1);\ \alpha}\right) = \alpha$	$P_{H_0}\left(\chi^2(N_{ij}) \geq \chi^2_{exp}\right)$

(*) Tamaño y p-nivel aproximados por la distribución asintótica de $\chi^2(N_{ij})$ bajo H_0.
Requisitos mínimos: $n_{i.}n_{.j}/n \geq 2, \ \ \forall i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, k$ y no más del 20 % menores que 5.

9.4. PROBLEMA DE HOMOGENEIDAD

TEST χ^2 DE HOMOGENEIDAD $\to X = A_1, \ldots, A_k$ *variable cualitativa analizada en m poblaciones*

$X_1, \ldots, X_m$ *variables que describen* X *en las distintas poblaciones.*

$$H_0 : P(X_1 = A_j) = P(X_2 = A_j) = \cdots = P(X_m = A_j), \quad j = 1, 2, \cdots, k.$$

$$H_1 : P(X_i = A_j) \neq P(X_{i'} = A_j) \ \text{ para algún par } (i, i') \text{ y algún } j = 1, \ldots, k.$$

- Se toman m muestras independientes de observaciones independientes de $X_1, \ldots, X_m$.
- N_{ij} : *Número de observaciones de la muestra i-ésima en la categoría* A_j, $j = 1, \ldots, k$.

Muestras \ Categorías	A_1	$\cdots$	A_j	$\cdots$	A_k	Totales
1	N_{11}	$\cdots$	N_{1j}	$\cdots$	N_{1k}	$n_{1.}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
i	N_{i1}	$\cdots$	N_{ij}	$\cdots$	N_{ik}	$n_{i.}$
$\vdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	$\vdots$
m	N_{m1}	$\cdots$	N_{mj}	$\cdots$	N_{mk}	$n_{m.}$
Totales	$N_{.1}$	$\cdots$	$N_{.j}$	$\cdots$	$N_{.k}$	n

$$\chi^2(N_{ij}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \frac{\left(N_{ij} - \frac{n_{i.} N_{.j}}{n}\right)^2}{\frac{n_{i.} N_{.j}}{n}} \xrightarrow[\substack{n_i \to +\infty \\ \forall i=1,\ldots m, \ H_0}]{L} \chi^2((m-1)(k-1)).$$

Región de rechazo (test de tamaño α)$^{(*)}$	$p-$*nivel*$^{(*)}$
$\chi^2_{exp} \geq \chi^2_{(m-1)(k-1);\ \alpha}$ $P_{H_0}\left(\chi^2(N_{ij}) \geq \chi^2_{(m-1)(k-1);\ \alpha}\right) = \alpha$	$P_{H_0}\left(\chi^2(N_{ij}) \geq \chi^2_{exp}\right)$

(*) Tamaño y p-nivel aproximados por la distribución asintótica.
Requisitos mínimos: $n_{i.} \geq 20$, $n_{i.} n_{.j}/n \geq 2$, $\forall i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, k$ y no más del 20 % menores que 5.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 9.1: *Se recoge una muestra aleatoria simple de 30 tornillos producidos por cierta máquina y se mide su longitud, obteniéndose:*

10.39	10.66	10.12	10.32	10.25	10.52	10.83	10.72	10.28	10.35
10.46	10.54	10.23	10.18	10.62	10.49	10.61	10.64	10.29	10.78
10.81	10.34	10.75	10.41	10.53	10.31	10.47	10.43	10.57	10.74

Contrastar si estos datos avalan que la distribución de la longitud de los tornillos es normal.

Solución: A partir de 30 observaciones independientes de la v.a. $X :=$ *Longitud de los tornillos*, se pretende contrastar que $X \to \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 > 0\}$.

Ya que la distribución hipotética depende de parámetros no especificados, aplicamos el *test* χ^2, estimando previamente estos parámetros por máxima verosimilitud:

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = 10.488 \qquad \widehat{\sigma}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{30} (x_i - \overline{x})^2}{30} = 0.038204 \quad (\widehat{\sigma} = 0.195458).$$

Ahora adaptamos el test χ^2 para contrastar $H_0 : X \to \mathcal{N}(10.488,\ 0.038204)$.

En primer lugar se particiona el conjunto de valores de la distribución hipotética ($\mathbb{R}$) en k subconjuntos, $A_1, \ldots, A_k$, tales que el número esperado de observaciones en cada uno de ellos sea, al menos, 5; esto es, si $\widehat{p}_i^0 = P_{H_0}(X \in A_i),\ i = 1, \ldots, k$, ha de ser $30\widehat{p}_i^0 \geq 5$ o, equivalentemente, $\widehat{p}_i^0 \geq 1/6,\ i = 1, \ldots, k$. Entonces, con objeto de tener el mayor número de subconjuntos, tomamos 6 intervalos con probabilidad igual a 1/6, que se determinan a partir de los cuantiles $Q_{1/6},\ Q_{2/6}, \cdots, Q_{5/6}$ de la distribución a contrastar:

$$P_{H_0}\left(X \leq Q_{i/6}\right) = P\left(Z \leq \frac{Q_{i/6} - 10.488}{0.195458}\right) = \frac{i}{6}, \quad i = 1, \cdots, 5, \text{ siendo } Z = \frac{X - 10.488}{0.195458} \to \mathcal{N}(0,1).$$

La siguiente tabla presenta los cuantiles, los intervalos de la partición, y las frecuencias esperadas y observadas en cada uno, que proporcionan el valor del estadístico de contraste:

$Q_{i/6}$	A_i	$n\widehat{p}_i^0$	N_i
10.2989	$(-\infty, 10.2989]$	5	6
10.4038	$(10.2989, 10.4038]$	5	5
10.4880	$(10.4038, 10.4880]$	5	4
10.5722	$(10.4880, 10, 5722]$	5	5
10.6771	$(10.5722, 10.6771]$	5	4
	$(10.6771, +\infty)$	5	6

$$\widehat{\chi}^2_{exp} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(N_i - n\widehat{p}_i^0)^2}{n\widehat{p}_i^0} = \frac{(6-5)^2}{5} + \frac{(5-5)^2}{5} + \cdots + \frac{(6-5)^2}{5} = 0.8.$$

Ya que no se especifica nivel de significación, calculamos el p-nivel asociado a los datos, teniendo en cuenta que la distribución teórica del estadístico de contraste bajo H_0 es $\chi^2(3)$, ya que estamos trabajando con seis conjuntos y se han estimado dos parámetros:

$$p - nivel = P_{H_0}\left(\widehat{\chi}^2(N_1, \ldots, N_6) \geq 0.8\right) \approx 0.85.$$

Puesto que este valor es muy grande, se acepta H_0; esto es, *los datos no aportan evidencia para rechazar la hipótesis de que la longitud de los tornillos tiene distribución normal.* ∎

Ejemplo 9.2: *Se supone que el tiempo de reacción a un determinado compuesto se distribuye según una $\mathcal{N}(10.5;\ 0.15^2)$. Contrastar si los siguientes datos, obtenidos en un muestreo aleatorio simple de 10 individuos a los que se ha administrado el compuesto, proporcionan evidencia para rechazar esta hipótesis:*

$$10.39 \quad 10.66 \quad 10.12 \quad 10.32 \quad 10.25 \quad 10.52 \quad 10.83 \quad 10.72 \quad 10.28 \quad 10.35.$$

Solución: La variable observada, de la que se quiere contrastar su distribución, y la hipótesis a contrastar son:

$$X = \textit{Tiempo de reacción al compuesto} \qquad H_0 : X \to \mathcal{N}(10.5;\ 0.15^2).$$

Puesto que la distribución hipotética es de tipo continuo y está totalmente especificada, podemos aplicar el test de Kolmogorov-Smirnov. Para ello, disponemos los datos en orden creciente, $x_{(1)} < \cdots < x_{(10)}$, y calculamos las diferencias $F^*(x_{(i)}) - F_0(x_{(i)})$ y $F_0(x_{(i)}) - F^*(x_{(i)}^-)$, que proporcionan el valor del estadístico de contraste:

- $F_0(x_{(i)}) = P_{H_0}(X \leq x_{(i)}) = P\left(Z \leq \dfrac{x_{(i)} - 10.5}{0.15}\right), \quad Z \to \mathcal{N}(0,1),$
- $F^*(x_{(i)}) = \dfrac{i}{10},$
- $F^*(x_{(i)}^-) = \dfrac{i-1}{10}.$

$x_{(i)}$	$F^*(x_{(i)})$	$F_0(x_{(i)})$	$F^*(x_{(i)}) - F_0(x_{(i)})$	$F_0(x_{(i)}) - F^*(x_{(i)}^-)$
10.12	0.1	0.00565	0.09435	0.00565
10.25	0.2	0.04779	0.15221	−0.05221
10.28	0.3	0.07123	0.22877	−0.12877
10.32	0.4	0.11507	0.28493	−0.18493
10.35	0.5	0.15865	0.34135	−0.24135
10.39	0.6	0.23168	**0.36832**	−0.26832
10.52	0.7	0.55303	0.14697	−0.04697
10.66	0.8	0.85694	−0.05694	**0.15694**
10.72	0.9	0.92877	−0.02877	0.12877
10.83	1	0.98609	0.01391	0.08609

$$D_{exp} = \max\left\{\max_{x_i}\left[F^*(x_i) - F_0(x_i)\right],\ \max_{x_i}\left[F_0(x_i) - F^*(x_i^-)\right]\right\} = 0.36832.$$

La tabla del estadístico de Kolmogorov-Smirnov para $n = 10$ proporciona el p-nivel asociado a los datos:

$$P_{H_0}\left(D(X_1,\ldots,X_{10}) \geq 0.36866\right) = 0.1 \ \Rightarrow\ p\text{−}nivel = P_{H_0}\left(D(X_1,\ldots,X_{10}) \geq 0.36832\right) > 0.1,$$

y concluimos que *los datos no proporcionan evidencia para rechazar la hipótesis de que el tiempo de reacción es $\mathcal{N}(10.5,\ 0.15^2)$, para cualquier nivel de significación menor o igual que 0.1.* ■

Ejemplo 9.3: *Una empresa que tradicionalmente comenzaba su actividad diaria a las 9 h. ha cambiado su horario para abrir a las 8 h. y se pregunta si ello ha afectado significativamente al retraso de sus empleados. Es aceptable pensar que la forma de la distribución de los retrasos no ha variado con el cambio de horario, pero se teme que se haya desplazado a la derecha, lo cual supondría un incremento del tiempo perdido. Se sabe que la mediana de los retrasos de los empleados era inicialmente de 5 minutos. Con el cambio de horario se selecciona a 12 empleados y se observa, en determinados días, los siguientes retrasos (en minutos):*

$$2.5, \quad 1.2, \quad 7, \quad 1.8, \quad 8.3, \quad 6.8, \quad 5.2, \quad 3.4, \quad 4.7, \quad 6.2, \quad 9.1, \quad 5.,2$$

A partir de estos datos, contrastar la hipótesis de que la distribución de los retrasos no ha variado con el cambio de horario.

Solución: Ya que la forma de la distribución de los retrasos es la misma antes y después del cambio de horario, si hay diferencia entre ellas, será debida a su localización, que puede determinarse por el valor de la mediana. Se trata, por tanto de un problema de localización de la mediana de la variable:

$$X: \ \textit{Retraso de los empleados con el cambio de horario},$$

y ya que el temor del empresario es que la distribución se haya desplazado a la derecha con el cambio de horario, el problema de contraste es:

$$\begin{array}{l} H_0 : M_X = 5 \\ H_1 : M_X > 5. \end{array}$$

Como la variable X es de tipo continuo, puede aplicarse el *test de los signos* que, para el problema planteado, *rechaza H_0 si hay un alto número de observaciones muestrales mayores que 5*:

$$T(X_1, \ldots, X_{12}): \ \textit{Número de observaciones muestrales mayores que 5} \underset{H_0}{\longrightarrow} B(12, 1/2).$$

El valor de este estadístico para la muestra observada es $T_{exp} = 7$ y, por tanto, el p-nivel de los datos observados es:

$$p - nivel = P_{H_0}\left(T(X_1, \ldots, X_{12}) \geq 7\right) = 0.3872.$$

Puesto que este valor es grande, se acepta H_0; esto es, *los datos no aportan evidencia para decidir que el cambio de horario aumenta la mediana de la distribución de los retrasos.* ■

Ejemplo 9.4: *A partir de los datos del Ejemplo 9.3, y suponiendo que la distribución de los retrasos es simétrica, contrastar la hipótesis de que ésta no varía con el cambio de horario.*

Solución: La hipótesis de simetría en la distribución de los retrasos permite usar el *test de los rangos signados*, basado en el estadístico

$$T^+(X_1,\dots,X_{12}): \textit{ Suma de los rangos correspondientes a } D_i \textit{ positivos.}$$

Ya que la hipótesis alternativa es $H_1 : M_X > 5$, se rechazará H_0 si los datos proporcionan un alto valor de $T^+(X_1,\dots,X_{12})$. Calculamos dicho valor:

$$d_i = x_i - 5: \quad -2.5,\quad -3.8,\quad 2,\quad -3.2,\quad 3.3,\quad 1.8,\quad 0.2,\quad -1.6,\quad -0.3,\quad 1.2,\quad 4.1,\quad 0.2$$

$$|d_i| = |x_i - 5|: \quad 2.5,\quad 3.8,\quad 2,\quad 3.2,\quad 3.3,\quad 1.8,\quad 0.2,\quad 1.6,\quad 0.3,\quad 1.2,\quad 4.1,\quad 0.2$$

$\lvert d_i\rvert$ ordenados	**0.2**	**0.2**	0.3	**1.2**	1.6	**1.8**	**2**	2.5	3.2	**3.3**	3.8	**4.1**
Signo	+	+	−	+	−	+	+	−	−	+	−	+
Rango	**1**	**2**	3	**4**	5	**6**	**7**	8	9	**10**	11	**12**

$$T^+_{exp} = 1+2+4+6+7+10+12 = 42.$$

Calculamos ahora el p-nivel, usando la tabla del estadístico de Wilcoxon para $n = 12$:

$$p - nivel = P_{H_0}\left(T^+(X_1,\dots,X_{12}) \geq 42\right) = 0.425.$$

Se concluye, como con el test de los signos, que *los datos no dan evidencia para decidir que el cambio de horario aumenta la mediana de la distribución de los retrasos.* ■

Ejemplo 9.5: *Para estudiar si el grupo sanguíneo de los individuos tiene relación con la predisposición a la diabetes, se han seleccionado al azar 400 sujetos a los que se ha determinado el grupo sanguíneo y el nivel de glucosa en sangre en idénticas condiciones experimentales. Clasificando la segunda medida en tres niveles, los resultados han sido:*

Nivel de glucosa / *Grupo*	*Bajo*	*Medio*	*Alto*
O	137	86	35
A	42	23	11
B	19	17	7
AB	14	7	2

Contrastar, al nivel de significación 0.05, si ambas variables son independientes.

Solución: Aplicamos el test χ^2 para contrastar la independencia de las variables *grupo sanguíneo* y *nivel de glucosa en sangre*.

Puesto que las variables están clasificadas en 4 y 3 categorías, respectivamente, el estadístico de contraste tiene distribución $\chi^2(6)$ bajo H_0. Por lo tanto, al nivel especificado, se rechazará H_0 si los datos dan un valor $\chi^2_{\text{exp}} \geq \chi^2_{6;\ 0.05} = 12.5916$.

Construimos la tabla de contingencia con las frecuencias observadas y las esperadas $(n_{i.}n_{.j}/n)$, y calculamos χ^2_{exp}:

Nivel de glucosa / Grupo	Bajo	Medio	Alto	Totales
O	137 136.74	86 85.785	35 35.475	258
A	42 40.28	23 25.27	11 10.45	76
B	19 22.79	17 14.2975	7 5.9125	43
AB	14 12.19	7 7.6475	2 3.1625	23
Totales	212	133	55	400

Observamos que todas las frecuencias esperadas son mayores que 2 y sólo una (menos del 20 %) menor que 5; por lo tanto, podemos aplicar el test χ^2. Calculamos el valor del estadístico:

$$\chi^2_{exp} = \frac{(137 - 136.74)^2}{136.74} + \frac{(86 - 85.785)^2}{85.785} + \cdots + \frac{(2 - 3.1625)^2}{3.1625} = 2.41.$$

Puesto que $\chi^2_{exp} < \chi^2_{6;\ 0.05}$, se deduce que *los datos no dan evidencia para rechazar la hipótesis de independencia entre el grupo sanguíneo y el nivel de glucosa al nivel de significación 0.05.* De hecho, el p-nivel asociado a los datos es

$$P_{H_0}\left(\chi^2(N_{ij}) > 2.41\right) \in (0.85, 0.9),$$

lo que que avala perfectamente la hipótesis nula. ■

Ejemplo 9.6: *Contrastar, a partir de los resultados de la siguiente tabla, si los distintos grupos sanguíneos se presentan con la misma frecuencia en tres grupos étnicos diferentes:*

Raza \ *Grupo sanguíneo*	*O*	*A*	*B*	*AB*
1	32	11	7	2
2	47	13	17	9
3	23	7	9	6

Solución: Se trata de contrastar la homogeneidad de las tres poblaciones frente a la variable *grupo sanguíneo* (cualitativa, con cuatro categorías).

Para resolver este problema construimos la tabla de contingencia con los valores observados, los totales y los valores esperados bajo la hipótesis de homogeneidad, $n_{i.}n_{.j}/n$.

Raza \ Grupo sanguíneo	O	A	B	AB	Totales
1	32 28.98	11 8.8	7 9.377	2 4.83	52
2	47 47.93	13 14.57	17 15.5	9 7.99	86
3	23 25.08	7 7.62	9 8.15	6 4.18	45
Totales	102	31	33	17	183

Observamos que todas las frecuencias esperadas son mayores que 2 y sólo dos (menos del 20 %) menores que 5; por lo tanto, podemos aplicar el test χ^2. Calculamos el valor del estadístico de contraste:

$$\chi^2_{exp} = \frac{(32-28.98)^2}{28.98} + \frac{(11-8.8)^2}{8.8} + \cdots + \frac{(6-4.18)^2}{4.18} = 4.691,$$

y determinamos el p-nivel, teniendo en cuenta que la distribución teórica del estadístico de contraste bajo H_0 es $\chi^2(6)$:

$$0.55 < P_{H_0}\left(\chi^2(N_{ij}) > 4.691\right) < 0.6.$$

Por tanto, se acepta la hipótesis de homogeneidad; esto es, *los datos avalan que las tres razas presentan los distintos grupos sanguíneos con la misma frecuencia.* ■