DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

Ejercicio Tema 3:

$X \to \{P_N ; N = 1, 2, \dots, N_0\}$

$$P[X = x] = \frac{1}{N_0 - N + 1}, \quad x \in \{N, \dots, N_0\}$$

El conjunto de valores que puede tomar X para un N fijo es $\mathcal{X}_N = \{N, \dots, N_0\}$.
El conjunto de valores que puede tomar X es
De aquí se deduce que el conjunto de valores que puede toma X es

$$\bigcup_{N \in \{1, \dots, N_0\}} \mathcal{X}_N = \{1, \dots, N_0\} = \mathcal{X} \Rightarrow \mathcal{X}^n = \{1, \dots, N_0\}^n$$

, donde $\mathcal{X}^n$ es el espacio muestral de una muestra aleatoria simple de tamaño n, $(X_1, \dots, X_n)$

Ahora veamos la f.m.p de la muestra aleatoria simple:

$$P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = P[X_1 = x_1] \cdots P[X_n = x_n] =$$

$$= \frac{1}{N_0 - N + 1} I_{[N, N_0]}(x_1) \cdots \frac{1}{N_0 - N + 1} I_{[N, N_0]}(x_n) =$$

$$= \frac{1}{(N_0 - N + 1)^n} I_{[N, N_0]}(x_1) I_{[N, N_0]}(x_2) \cdots I_{[N, N_0]}(x_n), \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n.$$

, donde $I_{[N, N_0]}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } N \leq x_i \leq N_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Por tanto podemos escribir la f.m.p como:

$$f_N^n(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \begin{cases} \frac{1}{(N_0 - N + 1)^n} & \text{si } \min x_i \geq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

No tratamos el caso de máx x_i, pues por como es $\mathcal{X}^n$ se tiene que $\max x_i \leq N_0$.

DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

Podemos reescribir

$$f_N^n(x_1,\dots,x_n) = 1 \cdot g_N(x_1,\dots,x_n), \quad \forall (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$$

, donde

$$g_N(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{N_0 - N + 1} & \text{si } \min x_i \geq N \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

, llamando $h(x_1,\dots,x_n) = 1$ se tiene que

$$f_N^n(x_1,\dots,x_n) = h(x_1,\dots,x_n) \cdot g_N(x_1,\dots,x_n)$$

tomando como estadístico $T(X_1,\dots,X_n) = X_{(1)}$ y usando el teorema de factorización

tenemos que

$$T(X_1,\dots,X_n) = X_{(1)} = \min(X_1,\dots,X_n)$$

es un estadístico suficiente.

Para ver la completitud, supongamos existe una transformación, g, tal que

$$E_N[g(T(X_1,\dots,X_n))] = 0, \ \forall N \in \{1,\dots,N_0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_N[g(T(X_1,\dots,X_n))] = 1, \ \forall N \in \{1,\dots,N_0\}$$

En primer lugar calculemos la f.m.p del estadístico, Tomamos $x \in \{1,\dots,N_0\}$

$$\cancel{P[X_{(1)} \leq x] = 1 - P[X_{(1)} \geq x] = 1 - (P[X}$$

$$P[X_{(1)} \leq x] = 1 - P[X_{(1)} > x] = 1 - (P[X_1 > x] \cdots P[X_n > x]) =$$

$$= 1 - P[X > x]^n = 1 - (1 - P[X \leq x])^n = 1 - \left(1 - \frac{x - N + 1}{N_0 - N + 1}\right)^n$$

~~es la f.m.p del estadístico~~

es la función de distribución del estadístico.

Escaneado con CamScanner

DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

Usando la función de distribución calcula la f.m.p:

$$P[X_{(1)} = x] = P[X_{(1)} \leq x] - P[X_{(1)} \leq x-1] =$$

$$= \cancel{1} - \left(1 - \frac{x-N+1}{N_0-N+1}\right)^n - \cancel{1} + \left(1 - \frac{x-N}{N_0-N+1}\right)^n =$$

$$= \frac{(N_0-x+1)^n - (N_0-x)^n}{(N_0-N+1)^n}$$

De aquí se tiene que:

$$E_N[g(T(X_1,\dots,X_n))] = \sum_{t=N}^{N_0} g(t) \frac{(N_0-t+1)^n - (N_0-t)^n}{(N_0-N+1)^n} = 0 \iff$$

$$\iff \frac{1}{(N_0-N+1)^n} \sum_{t=N}^{N_0} g(t) \left((N_0-t+1)^n - (N_0-t)^n\right) = 0 \iff$$

$$\iff \sum_{t=N}^{N_0} g(t)\left((N_0-t+1)^n - (N_0-t)^n\right) = 0$$

Probaremos que $g(t)=0 \quad \forall N \in \{1,\dots,N_0\}$

Caso base $N=N_0$

$$\sum_{t=N_0}^{N_0} g(t)\left((N_0-t+1)^n-(N_0-t)^n\right) = g(N_0)\left((1)^n-(0)^n\right) = 0 \Rightarrow g(N_0)=0$$

Supuesto cierto $\forall k \in \mathbb{N}$ tal que $N \leq k \leq N_0$ demostremoslo para $N-1$

$$\sum_{t=N-1}^{N_0} g(t)\left((N_0-t+1)^n-(N_0-t)^n\right) \overset{\text{hip.ind}}{=} g(N-1)\cdot\left((N_0-N+2)^n-(N_0-N+1)^n\right) = 0$$

Como $N_0-N+2 > N_0-N+1 \Rightarrow (N_0-N+2)^n > (N_0-N+1)^n \Rightarrow$

$$(N_0-N+2)^n - (N_0-N+1)^n > 0 \Rightarrow g(N-1) = 0$$

Luego queda demostrado que $g(t)=0 \quad \forall N \in \{1,\dots,N_0\}$

DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

De aquí se obtiene entonces que $\forall N \in \{1, \dots, N_0\}$

$$\{t \in \{N, \dots, N_0\}\} \subseteq \{t / g(t) = 0\}$$

Tomando probabilidades

$$1 \geq P[g(t)=0] \geq P[t \in \{1, \dots, N\}] = 1$$

$$\Rightarrow P[g(t)=0] = 1$$

Cumple la definición de estadístico completo, luego

$$T(X_1, \dots, X_n) = X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

es un estadístico suficiente y completo.