Tema 6: Estimación por intervalos de confianza

1. Sea $\overline{X}$ la media de una muestra aleatoria de tamaño n de una población $\mathcal{N}(\mu, 16)$. Encontrar el menor valor de n para que $(\overline{X} - 1,\ \overline{X} + 1)$ sea un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza 0.9.

2. La altura en cm. de los individuos varones de una población sigue una distribución $\mathcal{N}(\mu, 56.25)$. Si en una muestra aleatoria simple de tamaño 12 de dicha población se obtiene una altura media de 175 cm., determinar un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza 0.95. ¿Qué tamaño de muestra es necesario para que el intervalo de confianza a dicho nivel tenga longitud menor que 1 cm?

3. Una fábrica produce tornillos cuyo diámetro medio es 3 mm. Se seleccionan aleatoria e independientemente 12 de estos tornillos y se miden sus diámetros, que resultan ser 3.01, 3.05, 2.99, 2.99, 3.00, 3.02, 2.98, 2.99, 2.97, 2.97, 3.02 y 3.01. Suponiendo que el diámetro es una variable aleatoria con distribución normal, determinar un intervalo de confianza para la varianza al nivel de confianza 0.99, y una cota superior de confianza al mismo nivel. Interpretar los resultados en términos de la desviación típica del diámetro de los tornillos.

4. Las notas en cierta asignatura de 7 alumnos de una clase, elegidos de forma aleatoria e independiente son: 4.5, 3, 6, 7, 1.5, 5.2 y 3.6. Suponiendo que las notas tienen distribución normal, dar un intervalo de confianza para la varianza de las mismas al nivel de confianza 0.95.

5. Dos muestras independientes, cada una de tamaño 7, de poblaciones normales con igual varianza, producen medias 4.8 y 5.4 y cuasivarianzas muestrales 8.38 y 7.62, respectivamente. Encontrar un intervalo de confianza para la diferencia de medias al nivel de confianza 0.95.

6. La siguiente tabla presenta los salarios anuales (en miles de euros) de dos grupos de recién graduados de dos carreras diferentes. Suponiendo normalidad en los salarios de ambos grupos, determinar un intervalo de confianza para el cociente de las varianzas al nivel de confianza 0.90.

GRUPO 1	16.3	18.2	17.5	16.1	15.9	15.4	15.8	17.3	14.9	15.1				
GRUPO 2	13.2	15.1	13.9	14.7	15.6	15.8	14.9	18.1	15.6	15.3	16.2	15.2	15.4	16.6

7. Con objeto de estudiar la efectividad de un agente diurético, se eligen al azar 11 pacientes, aplicando dicho fármaco a seis de ellos y un placebo a los cinco restantes. La variable observada en esta experiencia fue la concentración de sodio en la orina a las 24 horas, que se supone tiene una distribución normal en ambos casos. Los resultados observados fueron:

   DIURÉTICO: 20.4, 62.5, 61.3, 44.2, 11.1, 23.7

   PLACEBO: 1.2, 6.9, 38.7, 20.4, 17,2

a) Calcular un intervalo de confianza para el cociente de las varianzas al nivel de confianza 0.95.

b) Suponiendo que las varianzas son iguales, calcular un intervalo de confianza para la diferencia de las medias al nivel de confianza 0.9, y una cota inferior de confianza al mismo nivel. Interpretar los resultados.

8. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con distribución $U(0, \theta)$. Dado un nivel de confianza arbitrario, calcular el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente basado en un estadístico suficiente.

9. Utilizando la desigualdad de Chebychev, dar un intervalo de confianza para p a nivel de confianza arbitrario, basado en una muestra de tamaño arbitrario de una variable aleatoria con distribución $B(1, p)$.

10. Para una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta,$$

encontrar el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente a nivel de confianza $1 - \alpha$, basado en un estadístico suficiente.

11. Para una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta$$

encontrar el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente a nivel de confianza $1 - \alpha$, basado en el estimador máximo verosímil de θ.