ejercicios4IE.pdf

(Provisional) Relación 4 resuelta

KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

Relación de ejercicios 4: Estimación puntual. Insesgadez y mínima varianza. [1]

Ejercicio 1.

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^2\}$. Probar que

$$T(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \bar{X} \leq 0 \\ 0 & \bar{X} > 0 \end{cases}$$

es un estimador insesgado de la función paramétrica $\Phi(-\mu\sqrt{n}/\sigma)$, siendo Φ la función de distribución de la $\mathcal{N}(0,1)$.

SOLUCIÓN

Debemos comprobar que se verifica

$$\mathrm{E}_{\mu,\sigma^2}[T(X_1, \ldots, X_n)] = \Phi(-\mu\sqrt{n}/\sigma) = P\left[Z \leq \frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}\right]$$

Veamos que, en efecto, se cumple.

$$\mathrm{E}_{\mu,\sigma^2}[T(X_1, \ldots, X_n)] = 1 \cdot P[\bar{X} \leq 0] + 0 \cdot P[\bar{X} > 0] = P[\bar{X} \leq 0] \underbrace{=}_{\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)} P\left[\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right]$$

$$= \underbrace{P\left[Z \leq \frac{-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right]}_{Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)} = F_Z\left(\frac{-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = \Phi\left(\frac{-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right), \text{ donde } \frac{-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{-\mu\sqrt{n}}{\sigma}.$$

Ejercicio 2.

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \rightsquigarrow \{B(1,p); p \in (0,1)\}$, y sea $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Probar que si $k \in \mathbb{N}$ y $k \leq n$, el estadístico

$$\frac{T(T-1)\cdots(T-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$

es un estimador insesgado de p^k. ¿Es este estimador el UMVUE?

b) Probar que si $k > n$, no existe ningún estimador insesgado para p^k.

c) ¿Puede afirmarse que $\dfrac{T}{n}\left(1 - \dfrac{T}{n}\right)^2$ es insesgado para $p(1-p)^2$?

[1] Si encuentras algún error en el documento, escribe un correo electrónico a *melferizq@gmail.com*.

SOLUCIÓN

Llamemos $V = \dfrac{T(T-1)\cdots(T-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$.

a) Sabemos que si $X \rightsquigarrow B(1,p)$, con $p \in (0,1)$, entonces el estadístico $T = \sum_{i=1}^n X_i$ es suficiente y completo. Así, se tiene entonces que $V(T)$ es una función del estadístico suficiente y completo, primera condición para que este sea UMVUE. Además, puesto que $T \leq n$ y $k \leq n$, tenemos que

$$0 \leq T(T-1)\cdots(T-k+1) \leq n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

luego $0 \leq V \leq 1$. Por tanto, V toma valores en el espacio paramétrico $(0,1)$, luego también es estimador. Comprobemos ahora que es insesgado en p^k.

$$\mathrm{E}_p[V(t)] = \sum_{k=0}^{n} \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{n(n-1)\cdots(n-k+1)} \cdot \underbrace{\binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t}}_{\text{ya que } T\rightsquigarrow B(n,p)} = \sum_{t=k}^{n} \frac{(n-k)!}{(t-k)!(n-t)!} p^t (1-p)^{n-t}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-k}{s} p^{s+k}(1-p)^{n-k-s} = p^k \cdot \underbrace{\left[\sum_{s=0}^{n-k} \binom{n-k}{s} p^s (1-p)^{n-k-s}\right]}_{=1 \text{ por ser suma de f.m.p. de } B(n-k,p)} = p^k$$

Por otro lado, se tiene que $\mathrm{E}[V^2] < \infty$ por tratarse de una suma finita al seguir T una distribución binomial (luego el espacio de probabilidad es finito).

Por tanto, V es, en efecto, UMVUE para p^k.

b) Supongamos que existe un estimador S insesgado en p^k con $k > n$. En tal caso, se tiene

$$\mathrm{E}[S(t)] = \sum_{j=0}^{n} S(t) \cdot \binom{n}{t} p^t (1-p)^{n-t} = p^k$$

llegando así a una contradicción, puesto que $p^t(1-p)^{n-t}$ es un polinomio de grado, a lo sumo, n, y como $k > n$, no puede aumentar su grado hasta llegar a tener grado k. Por tanto, si $k > n$, no existe estimador insesgado para p^k.

c) Por a), se tiene que $\dfrac{T}{n}$ es UMVUE de p. Así, si $\dfrac{T}{n}\left(1-\dfrac{T}{n}\right)^2$ fuese insesgado para $p(1-p)^2$, entonces este sería el UMVUE para $p(1-p)^2$.

Así, como $p(1-p)^2 = p^3 - 2p^2 + p$, entonces el UMVUE de $p(1-p)^2$ debería ser

$$\mathrm{UMVUE}(p(1-p)^2) = \mathrm{UMVUE}(p^3) - 2 \cdot \mathrm{UMVUE}(p^2) + \mathrm{UMVUE}(p)$$

Sin embargo, se tiene que, en general,

$$\frac{T(T-1)(T-2)}{n(n-1)(n-2)} - 2\frac{T(T-1)}{n(n-1)} + \frac{T}{n} \neq \frac{T}{n}\left(1-\frac{T}{n}\right)$$

luego $\dfrac{T}{n}\left(1-\dfrac{T}{n}\right)$ no es insesgado para $p(1-p)^2$.

Ejercicio 3.

Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightsquigarrow \{P(\lambda); \lambda > 0\}$. Encontrar, si existe, el UMVUE para λ^s, siendo $s \in \mathbb{N}$ arbitrario.

SOLUCIÓN

Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria $X \rightsquigarrow P(\lambda)$. Ya sabemos que $T = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow P(n\lambda)$ es un estadístico suficiente y completo. Distingamos el caso $s = 1$ y el caso general.

- Si $s = 1$, se tiene $E_\lambda[T] = n\lambda \Rightarrow E_\lambda\left[\frac{T}{n}\right] = \lambda$ (queda comprobar que es estimador con momento de segundo orden finito, evidente por tratarse de una Poisson).

  Por tanto, se tiene que $h(T) = \frac{T}{n}$ es UMVUE para λ.

- Consideremos el caso general. Impongamos la insesgadez del estadístico $h(T)$ función del estadístico suficiente y completo.

$$E_\lambda[h(T)] = \sum_{t=0}^{\infty} h(t) e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^t}{t!} = \lambda^s \Leftrightarrow \sum_{t=0}^{\infty} h(t) e^{-n\lambda} \frac{n^t \lambda^{t-s}}{t!} = 1$$

  Multiplicamos y dividimos por $n^s(t-s)!$ y separamos la sumatoria en dos sumandos, para obtener:

$$\sum_{t=0}^{s-1} h(t) e^{-n\lambda} \frac{n^t \lambda^{t-s}}{t!} + \underbrace{\sum_{t=s}^{\infty} h(t) \underbrace{e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^{t-s}}{(t-s)!}}_{\text{f.m.p. de } P(n\lambda)} \cdot \frac{n^s (t-s)!}{t!}}_{(*)} = 1$$

  Observemos que si imponemos que la primera suma sea 0, entonces solo debemos hacer que $(*)$ sea 1. Por tanto, imponemos $h(t) = 0$ para $t < s$.

  Por otro lado, como la suma de los valores de la función masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta suma 1, para que $(*)$ valga 1 debemos hacer que se transforme en

$$\sum_{t=s}^{\infty} e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^{t-s}}{(t-s)!}$$

  y la única forma de conseguirlo es hacer $h(t) = \frac{t!}{n^s(t-s)!}$.

  Por tanto, la función $h(T) = \begin{cases} 0 & T < s \\ \frac{T!}{n^s(T-s)!} & T \geq s \end{cases}$ es candidata a UMVUE para λ^s.

  Es evidente que $h(T) \in \mathbb{R}^+$ puesto que $n > 0$ y $t \geq s$, luego es estimador de λ^s. De la misma forma, como la distribución de Poisson tiene momento de segundo orden finito, entonces $h(T)$ tiene momento de segundo orden finito.

  Por tanto, $h(T)$ es UMVUE para λ^s.

Ejercicio 4.

Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable con distribución uniforme discreta en los puntos $\{1, \dots, N\}$, siendo N un número natural arbitrario. Encontrar el UMVUE para N.

SOLUCIÓN

Sabemos por el Ejercicio 5 del Tema 3 que si $(X_1, \dots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple de X una variable aleatoria uniforme discreta, entonces $T = X_{(n)}$ es un estadístico suficiente y completo.

$$P[X_{(n)} = x] = \left(\frac{x}{N}\right)^n - \left(\frac{x-1}{N}\right)^n = \frac{x^n - (x-1)^n}{N^n}, \quad x = 1, 2, \dots, N$$

Como $X_{(n)}$ es una variable aleatoria discreta, la suma de los valores de su función masa de probabilidad debe dar 1. Por tanto:

$$\sum_x P[X_{(n)} = x] = 1 \Rightarrow \sum_x \frac{x^n - (x-1)^n}{N^n} = 1 \Rightarrow \sum_x x^n - (x-1)^n = N^n$$

Sea $h(T)$ una función de T arbitraria. Impongamos su insesgadez.

$$\mathrm{E}[h(T)] = \sum_{t=1}^{n} h(t)\frac{t^n - (t-1)^n}{N^n} = N \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} h(t)\frac{t^n - (t-1)^n}{N^{n+1}} = 1$$

Así, necesito que $h(t)$ cumpla $h(t)(t^n - (t-1)^n) = N^n + 1$.

Por el mismo razonamiento de antes, si tuviese sentido hablar de $X_{(n+1)}$ se tendría entonces que $\sum_x x^{n+1} - (x-1)^{n+1} = N^{n+1}$. Por tanto:

$$\sum_{t=1}^{n} \left((t^{n+1} - (t-1)^{n+1}) \cdot \frac{\cancel{t^n - (t-1)^n}}{N^{n+1}} \cdot \frac{1}{\cancel{t^n - (t-1)^n}} \right) = 1$$

Por tanto, $h(T) = \dfrac{T^{n+1} - (T-1)^{n+1}}{T^n - (T-1)^n}$ es candidato a UMVUE para N.

En este caso, $h(T)$ no tiene por qué ser estimador puesto que N tomará un valor natural, y es posible que $h(t)$ no lo sea para todo valor de t. Sin embargo, lo aceptamos como estimador, teniendo en cuenta que no hay problema si $h(t)$ es natural, y en caso contrario se puede escoger la parte entera de $h(t)$ más 1. Por otra parte, $\mathrm{E}[h(T)^2] < \infty$ puesto que se trata de un cociente cuyo denominador no se anula nunca.

Así, se tiene que $h(T) = \dfrac{T^{n+1} - (T-1)^{n+1}}{T^n - (T-1)^n}$ es UMVUE para N.

Ejercicio 5.

Sea $(X_1,\dots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X cuya función de densidad es de la forma
$$f_\theta(x)=\frac{1}{2\sqrt{x\theta}},\quad 0<x<\theta$$
Calcular, si existe, el UMVUE para θ.

SOLUCIÓN

Se tiene que
$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{2\sqrt{x\theta}}\cdots\frac{1}{2\sqrt{x\theta}}=\frac{1}{2^n}\frac{1}{(\sqrt{\theta})^n}\frac{1}{\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}$$
Así, podríamos pensar que $\prod_{i=1}^n X_i$ es el estadístico suficiente que estamos buscando. Sin embargo, no conocemos su distribución así que, aunque lo fuese, no podríamos demostrar si es completo. Por tanto, debemos buscar otro estadístico, y en general esto se hará observando las condiciones que debe cumplir x para que su función de densidad no sea nula. En este caso, como $0<x<\theta$, se tiene:
$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)=2^{-n}(\theta^{-1/2})^n\prod_{i=1}^n x_i^{-1/2}\cdot I_{[X_{(1)}>0]}\cdot I_{[X_{(n)}<\theta]}$$
Así, por el teorema de factorización, tomando $g_\theta(T(X_1,\dots,X_n))=\frac{1}{\sqrt{\theta^n}}I_{[X_{(n)}<\theta]}$, se tiene que $T=X_{(n)}$ es un estadístico suficiente. Calculamos su distribución.
$$F(x)=\int_0^x\frac{1}{2\sqrt{\theta}}s^{-1/2}ds=\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\left[\frac{s^{1/2}}{2}\right]_0^x=\frac{1}{2\sqrt{\theta}}2\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\theta}},\ \ 0<x<\theta$$
Por tanto:
$$F_{X_{(n)}}(x)=F_T(x)(F(x))^n=\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\theta}}\right)^n\Rightarrow f_{X_{(n)}}=f_T(x)=(F_T(x))'=n\frac{(\sqrt{x})^{n-2}}{(\sqrt{\theta})^n},\ \ 0<x<\theta$$
Veamos que T es completo.
$$\mathrm{E}[g(T)]=\int_0^\theta g(t)n\frac{(\sqrt{t})^{n-2}}{(\sqrt{\theta})^n}dt=0,\ \forall\theta\Leftrightarrow\int_0^\theta g(t)(\sqrt{t})^{n-2}dt=0,\ \forall\theta$$
Por el Teorema Fundamental del Cálculo, existe G primitiva de la función $g(t)(\sqrt{t})^{n-2}$, y se tiene que $G(\theta)-G(0)=0$. Derivando con respecto a θ se tiene entonces $g(\theta)(\sqrt{\theta})^{n-2}=0,\ \forall\theta\Rightarrow g(\theta)=0,\ \forall\theta$. Por tanto, se tiene $\{T\in\mathbb{R}^+\}\subseteq\{g(T)=0\}$. Así:
$$1\geq P(g(T)=0)\geq P(T\in\mathbb{R}^+)=1\Rightarrow P(g(T)=0)=1$$
Sea ahora $h(T)$ un estimador al que le imponemos ser insesgado en θ.
$$\int_0^\theta h(t)\frac{n}{2}\frac{t^{n/2-1}}{\theta^{n/2}}dt=\frac{n}{2\theta^{n/2}}\int_0^\theta h(t)t^{n/2-1}=\theta\Leftrightarrow\frac{2\theta\cdot\theta^{n/2}}{n}=\int_0^\theta h(t)t^{n/2-1}dt$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, existe H primitiva de la función $h(t)t^{n/2-1}$, y se tiene $H(\theta) - H(0) = \dfrac{2}{n}\theta^{n/2+1}$. Derivando con respecto a θ se llega a:

$$h(\theta)\theta^{n/2-1} = \frac{2}{n}\left(\frac{n}{2}+1\right)\theta^{n/2} \Rightarrow h(\theta) = \frac{2}{n}\left(\frac{n+2}{2}\right)\theta^{n/2-n/2+1} = \frac{n+2}{n}\theta$$

Por tanto, $h(T) = \dfrac{n+2}{n}T$ es insesgado en θ y, por tanto, candidato a UMVUE.

Es obvio que $h(T)$ es estimador, pues $\theta \in \mathbb{R}^+$ (en otro caso no se podría definir su raíz cuadrada), y como $n > 0$, $h(t) \in \mathbb{R}^+$, $\forall t > 0$.

Comprobemos que $h(T)$ tiene momento de segundo orden finito.

$$\mathrm{E}[h(T)^2] = \int_0^\theta h(t)^2 f_T(t)dt = \int_0^\theta h(t)^2 t^{n/2-1}dt < \infty$$

donde su finitud se justifica ya que se tiene la integral en un recinto finito de un polinomio de grado positivo.

Por tanto, $h(T) = \dfrac{n+2}{n}T$ es UMVUE para θ.

Ejercicio 6.

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X cuya función de densidad es de la forma

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta$$

Calcular, si existen, los UMVUE para θ y para $1/\theta$.

SOLUCIÓN

La función de densidad de una muestra aleatoria simple de X de tamaño n vendrá dada por

$$f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = f_\theta(x_1)\cdots f_\theta(x_n) = \frac{\theta}{x_1^2}\cdots\frac{\theta}{x_n^2} = \frac{\theta^n}{\prod_{i=1}^n x_i^2} \cdot I_{[X_{(1)}>\theta]}$$

donde elegimos $h(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^n x_i^2}$, $g_\theta(T(X_1, \ldots, X_n)) = I_{[X_{(1)}>\theta]} \cdot \theta^n$.
Así, por el Teorema de Factorización, $T = X_{(1)}$ es un estadístico suficiente.
Veamos si es completo. Para ello, calculamos primero su distribución.

$$F(x) = \int_\theta^x \frac{\theta}{t^2}dt = 1 - \frac{\theta}{x} \Rightarrow F_T(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^n \Rightarrow f_T(x) = \frac{n}{x}\left(\frac{\theta}{x}\right)^n, \; x \geq \theta$$

Para ver si T es completo, debemos comprobar que si g es un función tal que $\mathrm{E}[g(T)] = 0$, entonces $P[g(T) = 0] = 1$.

$$\mathrm{E}_\theta[g(T)] = 0 \Leftrightarrow \int_\theta^\infty g(t)\frac{n}{t}\left(\frac{\theta}{t}\right)^n dt = n\theta^n \int_\theta^\infty \frac{g(t)}{t^{n-1}}dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^\infty \frac{g(t)}{t^{n-1}} = 0, \; \forall\theta$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, existe G primitiva de la función $\frac{g(t)}{t^{n-1}}$, y se cumple que $G(\theta) - \lim\limits_{x\to\infty} G(x) = 0$. Derivando con respecto a θ se llega a que $\frac{g(\theta)}{\theta^{n+1}} = 0$, es decir, $g(\theta) = 0$, $\forall\theta$. Por tanto, se cumple $\{g(T) = 0\} \supseteq \{t \in \mathbb{R}^+\}$. Así:

$$1 \geq P[g(T) = 0] \geq P[t \in \mathbb{R}^+] = 1 \Rightarrow P[g(T) = 0] \Rightarrow T \text{ es completo.}$$

Así, el UMVUE para θ será una función de T insesgada en θ, que sea estimador de segundo orden finito. Imponemos en primer lugar su insesgadez.

$$\mathrm{E}_\theta[g(T)] = \int_\theta^\infty t\frac{n\cdot\theta^n}{t^{n+1}}dt = \int_\theta^\infty n\left(\frac{\theta}{t}\right)^n dt = n\theta^n\int_\theta^\infty \frac{1}{t^n}dt = n\theta^n\left(\frac{t^{1-n}}{1-n}\right)\Bigg]_\theta^\infty = \frac{-n}{1-n}\theta = \frac{n-1}{n}\theta$$

Por tanto, $g(T) = \frac{n-1}{n}T$ es candidato a UMVUE para θ.
Es evidente que $g(T)$ es estimador pues toma valores reales distintos de 0 (y θ no se puede anular nunca), y para comprobar que tiene momento de segundo orden finito, lo calculamos directamente.

$$\mathrm{E}_\theta[g(T)^2] = \int_\theta^\infty \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 t^2\frac{n\theta^n}{t^{n+1}}dt = \frac{(n-1)^2}{n}\theta^n\int_\theta^\infty \frac{1}{t^{n-1}}dt = \cdots = \frac{(n-1)^2}{n(n-2)},\ n \geq 3$$

Por tanto, $g(T) = \frac{n-1}{n}T$ es UMVUE cuando $n \geq 3$.

Para hallar el UMVUE de $1/\theta$, el procedimiento es prácticamente el mismo.
En este caso, el UMVUE para $1/\theta$ es $h(T) = \frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{T}$.

Ejercicio 7.

Sea $X \rightsquigarrow \{P_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ siendo P_θ una distribución con función de densidad

$$f_\theta(x) = e^{\theta - x} \quad x \geq \theta$$

Dada una muestra aleatoria simple de tamaño arbitrario, encontrar los UMVUE de θ y de e^θ.

SOLUCIÓN

Ya se vio en el Ejercicio 6 del Tema 3 que si $(X_1, \ldots, X_n)$ es una muestra aleatoria simple de X una variable aleatoria con función de densidad $f_\theta(x) = e^{\theta-x}$, $x \geq \theta$, el estadístico $T = X_{(1)}$ es suficiente y completo. Además, se tiene:

$$F_\theta(x) = 1 - e^{\theta-x},\ x \geq \theta$$

Por tanto:

$$F_T(t) = 1 - (1 - F_\theta(t))^n = 1 - (e^{\theta-t})^n,\ t \geq \theta \Rightarrow f_T(t) = n(e^{\theta t})^n,\ t \geq \theta$$

- Para calcular el UMVUE para θ, imponemos que un estadístico $h(T)$ función del suficiente y completo sea insesgado en θ.

$$\mathrm{E}[T]=\int_\theta^\infty t\cdot n(e^{\theta-t})^n dt=\frac{\theta n+1}{n}\Rightarrow \mathrm{E}\left[\frac{nT-1}{n}\right]=\theta,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$$

Por tanto, $h(T)=\dfrac{nT-1}{n}$ es candidato a UMVUE para θ.

Es obvio que como $\theta\in\mathbb{R}$, entonces $h(T)$ es estimador, pues $t\geq\theta\in\mathbb{R}$ y h es una transformación real de t.

Por otro lado, para comprobar que tiene momento de segundo orden finito podemos calcularlo directamente (aunque en la mayoría de los casos no habrá que hacer el cálculo, bastará con justificar que la integral es finita):

$$\mathrm{E}_\theta[h(T)^2]=\int_\theta^\infty\left(\frac{nt-1}{n}\right)^2 n(e^{\theta-t})^n dt=\theta^2+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}<\infty$$

Así, por ser $h(T)$ un estimador insesgado de segundo orden finito, entonces $h(T)=\dfrac{nT-1}{n}$ es UMVUE para θ.

- Para calcular el UMVUE para e^θ, imponemos que un estadístico $h(T)$ función del estadístico suficiente y completo sea insesgado en e^θ.

$$e^\theta=\mathrm{E}_\theta[h(T)]=\int_\theta^\infty h(t)n(e^{\theta-t})^n dt=\int_\theta^\infty h(t)e^{-nt}dt=\frac{1}{ne^{\theta(n-1)}},\ \forall\theta$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, existe H primitiva de la función $h(t)e^{-nt}$, y se tiene $\lim_{x\to\infty}H(x)-H(\theta)=\dfrac{1}{ne^{\theta(n-1)}}$, $\forall\theta$. Derivando con respecto a θ se llega a:

$$\frac{h(\theta)}{e^{\theta n}}=\frac{n-1}{ne^{\theta(n-1)}}\Leftrightarrow h(\theta)=\frac{(n-1)e^\theta}{n},\ n>1$$

Por tanto, $h(T)=\dfrac{(n-1)e^T}{n}$ es candidato a UMVUE para e^θ.

Por el mismo razonamiento del punto anterior, se tiene que evidentemente $h(T)$ es estimador. Justifiquemos que tiene momento de segundo orden finito.

$$\mathrm{E}_\theta[h(T)^2]=\int_\theta^{infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 e^{2t}n(e^{\theta-t})^n dt=\cdots=\int_\theta^\infty e^{t(2-n)}dt<\infty$$

donde se tiene que la última integral es finita pues, para $n>1$ (condición ya impuesta) se tiene la integral de una exponencial negativa (no importa que el recinto en este caso no sea finito).

Así, por ser $h(T)$ un estimador insesgado de segundo orden finito, entonces $h(T)=\dfrac{(n-1)e^T}{n}$ es UMVUE para e^θ.

Ejercicio 8.

Sea X la variable que describe el número de fracasos antes del primer éxito en una sucesión de pruebas de Bernoulli con probabilidad de éxito $\theta \in (0,1)$ y sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X.

a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular y calcular la función de información asociada a la muestra,

b) Especificar la clase de funciones paramétricas que admiten estimadores eficientes y los correspondientes estimadores.

c) Calcular la varianza de cada estimador eficiente y comprobar que coincide con la correspondiente cota de Fréchet-Cramér-Rao.

d) Calcular, si existen, los UMVUE para $P_\theta[X=0]$ y para $\mathrm{E}_\theta[X]$ y decir si son eficientes.

SOLUCIÓN

Puesto que X es una variable aleatoria que describe el número de fracasos antes del primer éxito en ensayos de Bernoulli independientes con probabilidad de éxito θ, se tiene que $X \rightsquigarrow BN(1,\theta) \equiv G(\theta)$. Por tanto, su función masa de probabilidad viene dada por

$$P[X=x] = \theta(1-\theta)^x, \; x = 0, 1, \dots, \; \theta \in (0,1)$$

Además, su media y su varianza son, respectivamente, $\mathrm{E}_\theta[X] = \dfrac{1-\theta}{\theta}$, $\mathrm{Var}_\theta[X] = \dfrac{1-\theta}{\theta^2}$.

a) Comprobemos que la familia de distribuciones de una variable binomial negativa es regular.

i) $\Theta = (0,1)$ intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

ii) $\chi = \{x / f_\theta(x) > 0\} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ independiente de θ.

iii) Tenemos que comprobar que se verifica la igualdad

$$\sum_\chi \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} \sum_\chi f_\theta(x) = 0$$

Sin embargo, la segunda igualdad se cumple para cualquier variable aleatoria discreta puesto que al ser $f_\theta(x)$ una función masa de probabilidad, sus valores suman 1 y, por tanto, la derivada de tal suma es 0. Así, solo debemos comprobar la primera.

Reescribimos en primer lugar la función masa de probabilidad de X:

$$f_\theta(x) = \exp\{\ln\theta + x\ln(1-\theta)\} \Rightarrow \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial \theta} = \underbrace{\exp\{\ln\theta + x\ln(1-\theta)\}}_{f_\theta(x)} \cdot \left(\frac{1}{\theta} - \frac{x}{1-\theta}\right)$$

Por tanto:

$$\sum_\chi \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial \theta} = \sum_\chi f_\theta(x)\left(\frac{1}{\theta} - \frac{x}{1-\theta}\right) = \sum_\chi f_\theta(x)\frac{1}{\theta} - \sum_\chi f_\theta(x)\frac{x}{1-\theta}$$
$$= \frac{1}{\theta}\underbrace{\sum_\chi f_\theta(x)}_{=1} - \frac{1}{\theta-1}\underbrace{\sum_\chi x f_\theta(x)}_{=\mathrm{E}_\theta[X]} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\cancel{\theta-1}} \cdot \frac{\cancel{1-\theta}}{\theta} = \frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta} = 0$$

Así, la familia de distribuciones de X es regular.

b) Las funciones paramétricas que admiten estimador eficiente son de la forma $ag(\theta)+b$, con $g(\theta)$ cumpliendo

$$P_\theta\left[\frac{\partial \ln f_\theta^n}{\partial\theta} = a(\theta)[T-g(\theta)]\right] = 1$$

para cierta función $a(\theta)$.

1. Calculamos la función masa de probabilidad de la muestra.

$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = P[X_1=x_1,\dots,X_n=x_n] = P[X=x_1]\cdots P[X=x_n] = \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

ii) Calculamos el logaritmo neperiano de la función masa de probabilidad muestral.

$$\ln f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = n\ln\theta + \sum_{i=1}^n x_i \ln(1-\theta)$$

iii) Hallamos la derivada del logaritmo de la función masa de probabilidad muestral.

$$\frac{\partial \ln f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{\sum x_i}{1-\theta} = \frac{-1}{1-\theta}\left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{(1-\theta)n}{\theta}\right) = \frac{-n}{1-\theta}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1-\theta}{\theta}\right)$$

Así, vemos que tenemos dos opciones distintas para $a(\theta)$, T y $g(\theta)$.

1ª. $a(\theta) = \dfrac{-1}{1-\theta}, T = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i, g(\theta) = \dfrac{(1-\theta)n}{\theta}$.

2ª. $a(\theta) = \dfrac{-n}{1-\theta}, T = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, g(\theta) = \dfrac{1-\theta}{\theta}$.

Ahora se tiene que comprobar que T es estimador en ambos casos, y que se verifica $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = a(\theta)g'(\theta)$.

- Es evidente que en las dos opciones se tiene que T es estimador, pues en ambos casos T solo puede tomar valores positivos, al igual que θ.
- Para mostrar otra forma de hacerlo distinta a la que se ha visto en los apuntes de teoría, pasamos a calcular directamente $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$ sin aplicar la aditividad de la función de información de Fisher.

$$\begin{aligned} I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) &= \operatorname{Var}_\theta\left[\frac{\partial \ln f_\theta^n}{\partial\theta}\right] = \operatorname{Var}_\theta\left[\frac{n}{\theta} + \frac{\sum X_i}{1-\theta}\cdot(-1)\right] = \operatorname{Var}_\theta\left[-\frac{\sum X_i}{1-\theta}\right] \\ &= \frac{1}{(1-\theta)^2}\operatorname{Var}_\theta\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{(1-\theta)^2}\sum_{i=1}^n \operatorname{Var}_\theta[X_i] = \frac{n\cancel{(1-\theta)}}{\theta^2(1-\theta)^{\cancel{2}}} = \frac{n}{\theta^2(1-\theta)} \end{aligned}$$

1ª. $g'(\theta) = n\left(\dfrac{1-\theta}{\theta}\right)' = \dfrac{-n}{\theta^2} \Rightarrow a(\theta)g'(\theta) = \dfrac{-1}{1-\theta}\cdot\left(\dfrac{-n}{\theta^2}\right) = \dfrac{n}{\theta^2(1-\theta)} = I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$.

2ª. $g'(\theta) = \left(\dfrac{1-\theta}{\theta}\right)' = \dfrac{-1}{\theta^2} \Rightarrow a(\theta)g'(\theta) = \dfrac{-n}{1-\theta}\cdot\left(\dfrac{-1}{\theta^2}\right) = \dfrac{n}{\theta^2(1-\theta)} = I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$.

Por tanto, en efecto T es un estimador eficiente en cada caso. Así:

- Funciones paramétricas que admiten estimador eficiente: $ag(\theta)+b$.

$$\begin{array}{cc} 1^{\text{a}} \text{ opción} & 2^{\text{a}} \text{ opción} \\ \downarrow & \downarrow \\ a \cdot \dfrac{n(1-\theta)}{\theta} + b,\ a, b \in \mathbb{R} & a \cdot \dfrac{1-\theta}{\theta} + b,\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

- Estimadores eficientes para las funciones paramétricas:

$$\begin{array}{cc} 1^{\text{a}} \text{ opción} & 2^{\text{a}} \text{ opción} \\ \downarrow & \downarrow \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i + b,\ a, b \in \mathbb{R} & a \cdot \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + b = a \cdot \bar{X} + b,\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

c) Por lo que se ha visto en b) se tiene que la varianza de los estimadores es:

$$\text{Var}_\theta\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{n(1-\theta)}{\theta^2} \Rightarrow \text{Var}_\theta\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \frac{1-\theta}{n\theta^2}$$

Comprobemos que tales varianzas coinciden con la correspondiente cota de FCR: $\dfrac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)}$.

1^{a}. cota $= \dfrac{n^2}{\theta^4} \cdot \dfrac{\theta^2(1-\theta)}{n} = \dfrac{n(1-\theta)}{\theta^2} = \text{Var}_\theta[T]$.

2^{a}. cota $= \dfrac{1}{\theta^4} \cdot \dfrac{\theta^2(1-\theta)}{n} = \dfrac{1-\theta}{n\theta^2} = \text{Var}_\theta[T]$.

d) En el Corolario 2 de los apuntes de Teoría se vio que si $T(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador eficiente para una función paramétrica $g(\theta)$, entonces $T(X_1, \dots, X_n)$ es el UMVUE de $g(\theta)$. Como el UMVUE para $E_\theta[X]$ es $T = \bar{X}$, que se encuentra dentro de la clase de estimadores eficientes, entonces el UMVUE para $E_\theta[X]$ es, en efecto, eficiente.

Ejercicio 9.

Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con distribución exponencial.

a) Probar que la familia de distribuciones de X es regular.

b) Encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y el estimador correspondiente. Calcular la varianza de estos estimadores.

c) Basándose en el apartado anterior, encontrar el UMVUE para la media de X.

d) Dar la cota de Frechét-Crámer-Rao para la varianza de estimadores insesgados y regulares de λ^3. ¿Es alcanzable dicha cota?

SOLUCIÓN

a) Comprobamos que la familia de distribuciones es regular.

i) y ii) ya se comprobaron en el Ejercicio 7 del Tema 3.

iii) Veamos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial \lambda} dx = 0$, teniendo en cuenta que si $X \rightsquigarrow \exp(\lambda) \Rightarrow E_\lambda[X] = \dfrac{1}{\lambda}$.

$$\frac{\partial f_\lambda(x)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}\lambda e^{-\lambda x} = e^{-\lambda x} - x\lambda e^{-\lambda x} = \frac{1}{\lambda} f_\lambda(x) - x f_\lambda(x) = f_\lambda(x)\left(\frac{1}{\lambda} - x\right)$$

Por tanto:

$$\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\left(\frac{1}{\lambda} - x\right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} f_\lambda(x) dx - \int_0^{+\infty} x f_\lambda(x) dx = \frac{1}{\lambda} - \mathrm{E}[X] = 0$$

Así, la familia de distribuciones de X es regular.

b) Las funciones paramétricas que admiten estimador eficiente son de la forma $ag(\lambda)+b$, con $g(\lambda)$ cumpliendo

$$P_\lambda\left[\frac{\partial \ln f_\lambda^n}{\partial \lambda} = a(\lambda)[T - g(\lambda)]\right] = 1$$

para cierta función $a(\lambda)$.

I) Calculamos la función de densidad de la muestra.

$$f_\lambda^n = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdots \lambda e^{-\lambda x_n} = \lambda^n e^{-\lambda \sum x_i}$$

II) Calculamos el logaritmo neperiano de la función de densidad muestral.

$$\ln f_\lambda^n(x_1, \ldots, x_n) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

III) Hallamos la derivada del logaritmo de la función de densidad muestral.

$$\frac{\partial \ln f_\lambda^n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = -1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n x_i - \frac{n}{\lambda}\right) = -n \cdot \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{\lambda}\right)$$

Así, vemos que tenemos dos opciones distintas para $a(\lambda)$, T y $g(\lambda)$.

1ª. $a(\lambda) = -1, T = \sum_{i=1}^n X_i, g(\lambda) = \frac{n}{\lambda}$.

2ª. $a(\lambda) = -n, T = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$.

Ahora se tiene que comprobar que T es estimador en ambos casos, y que se verifica $I_{X_1,\ldots,X_n}(\theta) = a(\lambda)g'(\lambda)$.

- Es evidente que en las dos opciones se tiene que T es estimador, pues en ambos casos T solo puede tomar valores positivos, al igual que λ.
- Calculamos $I_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda)$.

$$I_{X_1,\ldots,X_n}(\lambda) = \mathrm{Var}_\lambda\left[\frac{\partial \ln f_\lambda^n(x_1, \ldots, x_n)}{\partial \lambda}\right] = \mathrm{Var}_\lambda\left[\frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{n}{\lambda^2}$$

donde utilizamos que $X_i \rightsquigarrow \exp(\lambda) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \rightsquigarrow \Gamma(n, \lambda)$, luego $\mathrm{Var}_\lambda\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{n}{\lambda^2}$.

$$1^{\text{a}}.\quad g'(\lambda) = \frac{-n}{\lambda^2} \Rightarrow a(\lambda)g'(\lambda) = -1 \cdot \left(\frac{-n}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda^2} = I_{X_1,\dots,X_n}(\lambda).$$

$$2^{\text{a}}.\quad g'(\lambda) = \frac{-1}{\lambda^2} \Rightarrow a(\lambda)g'(\lambda) = -n \cdot \left(\frac{-1}{\lambda^2}\right) = \frac{n}{\lambda^2} = I_{X_1,\dots,X_n}(\lambda).$$

Por tanto, en efecto T es un estimador eficiente en cada caso. Así:

- Funciones paramétricas que admiten estimador eficiente: $ag(\lambda) + b$.

$$\begin{array}{cc} 1^{\text{a}} \text{ opción} & 2^{\text{a}} \text{ opción} \\ \downarrow & \downarrow \\ a \cdot \dfrac{n}{\lambda} + b,\ a, b \in \mathbb{R} & a \cdot \dfrac{1}{\lambda} + b,\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

- Estimadores eficientes para las funciones paramétricas:

$$\begin{array}{cc} 1^{\text{a}} \text{ opción} & 2^{\text{a}} \text{ opción} \\ \downarrow & \downarrow \\ a \cdot \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i + b,\ a, b \in \mathbb{R} & a \cdot \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i + b = a \cdot \bar{X} + b,\ a, b \in \mathbb{R} \end{array}$$

Finalmente, la varianza de T en la opción 2ª es $\text{Var}_\lambda \left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n^2}\text{Var}_\lambda\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n\lambda^2}$.

c) En el Corolario 2 de los apuntes de Teoría se vio que si $T(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador eficiente para una función paramétrica $g(\lambda)$, entonces $T(X_1, \dots, X_n)$ es el UMVUE de $g(\lambda)$. Así, como la media de X es $1/\lambda$, entonces se tiene que $T = \bar{X}$ es UMVUE para ella.

d) Calculamos la cota de FCR para la varianza de estimadores insesgados y regulares de $g(\lambda) = \lambda^3$.

$$\text{Var}[T] \geq \frac{(g'(\lambda))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\lambda)} = \frac{(3\lambda^2)^2}{n/\lambda^2} = \frac{9\lambda^6}{n}$$

Como la cota solo se alcanza cuando consideramos estimadores eficientes, y la cota para cada uno de ellos coincide con su varianza, entonces se tiene que la cota en ambos familias de estimadores son, respectivamente, n/λ^2 y $\frac{1}{n\lambda^2}$, que en general no coinciden con $9\lambda^6/n$. Por tanto, los estimadores insesgados y regulares de λ^3 no alcanzan la cota.

Otro razonamiento válido sería decir que los únicos estimadores eficientes que se admiten son para las funciones n/λ y $1/\lambda$, luego no hay estimadores eficientes para λ^3, por lo que no se alcanza la cota para sus estimadores insesgados y regulares.

Ejercicio 10.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad de la forma

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1$$

a) Sabiendo que $\text{E}_\theta[\ln X] = -\frac{1}{\theta}$ y $\text{Var}_\theta[\ln X] = \frac{1}{\theta^2}$, comprobar que esta familia de distribuciones es regular.

b) Basándose en una muestra aleatoria simple de X, dar la clase de funciones paramétricas con estimador eficiente, los estimadores y su varianza, y comprobar que esta alcanza la cota de Frechét-Crámer-Rao.

SOLUCIÓN

a) Comprobamos que la familia de distribuciones es regular.

i) $\Theta = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

En este caso, se tiene $\Theta = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ pues es la única forma de hacer que la función de densidad de probabilidad integre 1 en todo su dominio.

ii) $\chi = \{x, f_\theta(x) > 0\} = (0,1)$ es independiente del parámetro θ.

iii) Veamos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial \theta} dx = 0$.

$$f_\theta(x) = \exp\{\ln\theta + (\theta-1)\ln x\} \Rightarrow \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial\theta} = f_\theta(x)\left(\frac{1}{\theta} + \ln x\right)$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{\partial f_\theta(x)}{\partial\theta} dx = \int_0^1 f_\theta(x)\left(\frac{1}{\theta} + \ln x\right) dx = \int_0^1 f_\theta(x)\frac{1}{\theta}dx + \int_0^1 \ln x f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} + \mathrm{E}[\ln X] = 0$$

Así, la familia de distribuciones de X es regular.

b) Las funciones paramétricas que admiten estimador eficiente son de la forma $ag(\theta)+b$, con $g(\theta)$ cumpliendo

$$P_\theta\left[\frac{\partial \ln f_\theta^n}{\partial\theta} = a(\theta)[T - g(\theta)]\right] = 1$$

para cierta función $a(\theta)$.

I) Calculamos la función de densidad de la muestra.

$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = \theta x_1^{\theta-1}\cdots\theta x_n^{\theta-1} = \theta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}$$

II) Calculamos el logaritmo neperiano de la función de densidad muestral.

$$\ln f_\theta^n(x_1,\dots,x_n) = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$$

III) Hallamos la derivada del logaritmo de la función de densidad muestral.

$$\frac{\partial \ln f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)}{\partial\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 1\cdot\left(\sum_{i=1}^n \ln x_i - \left(-\frac{n}{\theta}\right)\right) = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i - \left(\frac{-1}{\theta}\right)\right)$$

Así, vemos que tenemos dos opciones distintas para $a(\theta)$, T y $g(\theta)$.

1ª. $a(\theta) = 1, T = \displaystyle\sum_{i=1}^n \ln X_i, g(\theta) = -\frac{n}{\theta}$.

2ª. $a(\theta) = n, T = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i = \overline{\ln X}, g(\theta) = -\frac{1}{\theta}$.

Ahora se tiene que comprobar que T es estimador en ambos casos, y que se verifica $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = a(\theta)g'(\theta)$.

- Es evidente que en las dos opciones se tiene que T es estimador, pues en ambos casos T toma valores reales que, a priori, es la misma condición que debe cumplir θ.
- Calculamos la función de información de Fisher, $I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$.
  I) Se halla la derivada de $\ln f_\theta(x)$ con respecto a θ.

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1} \Rightarrow \ln f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} + \ln x$$

  II) Se calcula la función de información de X.

$$I_X(\theta) = \mathrm{Var}_\theta\left[\frac{\partial \ln f_\theta(x)}{\partial\theta}\right] = \mathrm{Var}_\theta\left[\frac{1}{\theta} + \ln X\right] = \mathrm{Var}_\theta[\ln X] = \frac{1}{\theta^2}$$

  III) Utilizamos la aditividad de la función de información para calcular la función de información asociada a la muestra.

$$I_{X_1,\dots,X_n}(\theta) = n \cdot I_X(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$$

1ª. $g'(\theta) = \frac{n}{\theta^2} \Rightarrow a(\theta)g'(\theta) = 1 \cdot \frac{n}{\theta^2} = I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$.

2ª. $g'(\theta) = \frac{1}{\theta^2} \Rightarrow a(\theta)g'(\theta) = n \cdot \frac{1}{\theta^2} = I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)$.

Por tanto, en efecto T es un estimador eficiente en cada caso. Así:

- Funciones paramétricas que admiten estimador eficiente: $ag(\theta) + b$.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 1^{\text{a}}\text{ opción}}}{a \cdot \left(\frac{-n}{\theta}\right) + b,\ a, b \in \mathbb{R}} \qquad \underset{\substack{\uparrow \\ 2^{\text{a}}\text{ opción}}}{a \cdot \left(\frac{-1}{\theta}\right) + b,\ a, b \in \mathbb{R}}$$

- Estimadores eficientes para las funciones paramétricas:

$$\overset{\substack{1^{\text{a}}\text{ opción} \\ \downarrow}}{a \cdot \sum_{i=1}^n \ln X_i + b,\ a, b \in \mathbb{R}} \qquad \overset{\substack{2^{\text{a}}\text{ opción} \\ \downarrow}}{a \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i + b = a \cdot \overline{\ln X} + b,\ a, b \in \mathbb{R}}$$

En este caso, la varianza de los estimadores vienen dados por:

$$\mathrm{Var}_\theta\left[\sum_{i=1}^n \ln X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_\theta[\ln X] = \frac{n}{\theta^2} \Rightarrow \mathrm{Var}_\theta\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln X_i\right] = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}_\theta\left[\sum_{i=1}^n \ln X_i\right] = \frac{1}{n\theta^2}$$

La cota de FCR viene dada por cota $= \frac{(g'(\theta))^2}{I_{X_1,\dots,X_n}(\theta)}$. Comprobemos que se alcanza.

1ª. cota $= \frac{n^2}{\theta^4} \cdot \frac{\theta^2}{n} = \frac{n}{\theta^2} = \mathrm{Var}_\theta[T]$.

2ª. cota $= \frac{1}{\theta^4} \cdot \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{n\theta^2} = \mathrm{Var}_\theta[T]$.