ejercicios5IE.pdf

(Provisional) Relación 5 resuelta

KEEP
CALM
AND
ESTUDIA
UN POQUITO

Relación de ejercicios 5: Estimación de máxima verosimilitud y otros métodos. [1]

Ejercicio 1.

Sea $X \rightsquigarrow \{P_\theta, \theta \in \mathbb{R}\}$ siendo P_θ una distribución con función de densidad

$$f_\theta(x) = e^{\theta - x},\ x \geq \theta$$

a) ¿Es la familia de distribuciones de X exponencial uniparamétrica?

b) Dada una muestra aleatoria simple de X de tamaño n, encontrar los estimadores máximo verosímiles de θ y e^θ. Basándose en los resultados del problema 7 de la relación 4, decir si estos estimadores son insesgados.

SOLUCIÓN

a) Una de las condiciones para que la familia de distribuciones de X sea exponencial uniparamétrica es que el espacio muestral sea independiente del parámetro desconocido. En este caso, eso no se cumple pues los valores que hacen que la función de densidad sea no nula deben ser mayores o iguales que θ, luego por tanto la familia de distribuciones de X no es exponencial uniparamétrica.

b) Puesto que la función de densidad de X es $f_\theta(x) = e^{\theta - x}$, $x \geq \theta$, la función de densidad muestral viene dada por

$$f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = e^{\theta - x_1} \cdots e^{\theta - x_n} \underbrace{=}_{x \geq \theta} e^{n\theta - \sum_{i=1}^n x_i} I_{[X_{(1)} \geq \theta]} = e^{n\theta - \sum_{i=1}^n x_i} I_{[\theta \leq X_{(1)}]} = L_{x_1, \ldots, x_n}(\theta)$$

Así, $L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)$ no es derivable por ser el producto de dos funciones, una de ellas no derivable. Así, debemos estudiar su crecimiento y decrecimiento sin derivarla. Para ello, definimos la función $g(\theta) = e^{n\theta - \sum_{i=1}^n x_i}$, de la cual depende la monotonía de la función de verosimilitud para $\theta \leq X_{(1)}$ (pues, en otro caso, $I_{[\theta \leq X_{(1)}]} = 0 \Rightarrow L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta) = 0$).

$$g(\theta) = \underbrace{e^{n\theta}}_{\text{creciente en } \mathbb{R}} \cdot \underbrace{e^{-\sum_{i=1}^n x_i}}_{\text{No depende de } \theta} \quad \text{es creciente en } \mathbb{R}.$$

Por tanto, hasta $X_{(1)}$, la función $L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)$ es creciente y alcanza su valor máximo cuando mayor es θ, es decir, cuando $\theta = X_{(1)}$. Así, $\widehat{\theta} = X_{(1)}$ es EMV de θ.

- Ya se demostró que $h(T) = \frac{nT-1}{n}$ es UMVUE para θ, con $T = X_{(1)}$.
  Como el UMVUE para un parámetro es único, entonces se tiene que $\widehat{\theta} = X_{(1)}$ no es UMVUE para θ pues, en general, $h(X_{(1)}) \neq X_{(1)}$. Por tanto, tampoco es insesgado ya que, si lo fuera, sería un estimador función del estadístico suficiente y completo insesgado con momento de segundo orden finito, es decir, UMVUE para θ, contradiciendo así su unicidad.

[1] Si encuentras algún error en el documento, escribe un correo electrónico a *melferizq@gmail.com*.

Por el teorema de invariancia de Zehna:

$$\widehat{e^{\theta}} = e^{\widehat{\theta}} = e^{X_{(1)}}$$

- Por la misma razón que antes, $e^{X_{(1)}}$ no puede ser insesgado en e^{θ} pues, en caso contrario, sería UMVUE para e^{θ}, contradiciendo así su unicidad.

Ejercicio 2.

Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con distribución exponencial. Basándose en los resultados del problema 9 de la relación 4, encontrar los estimadores máximo verosímiles de la media y de la varianza de X.

SOLUCIÓN

Si $X \rightsquigarrow \exp(\lambda)$, entonces $\mathrm{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda}$, $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{1}{\lambda^2}$. Así, debemos hallar los EMV para $\dfrac{1}{\lambda}$ y $\dfrac{1}{\lambda^2}$.

En el Ejercicio 9 de la Relación 4 se demostró que $T = \bar{X}$ es un estimador eficiente para $1/\lambda$. Como la Proposición 4 de los apuntes de teoría dice que si $T(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador eficiente para un parámetro entonces $T(X_1, \dots, X_n)$ es EMV para el mismo parámetro, se tiene así que $\widehat{1/\lambda} = \bar{X}$.

Por el teorema de invariancia de Zehna, $\widehat{1/\lambda^2} = (\widehat{1/\lambda})^2 = \bar{X}^2$. Por tanto, se ha llegado a que:

$$\widehat{\mathrm{E}[X]} = \bar{X}, \qquad \widehat{\mathrm{Var}[X]} = \bar{X}^2$$

Ejercicio 3.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad de la forma

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta - 1}, \quad 0 < x < 1$$

a) Calcular un estimador máximo verosímil para θ.
b) Deducir dicho estimador a partir de los resultados del problema 10 de la relación 4.

SOLUCIÓN

a) Si X es una variable aleatoria con función de densidad $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}$, ya se demostró que la función de densidad muestral viene dada por

$$f_\theta^n(x_1, \dots, x_n) = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta - 1} = L_{x_1,\dots,x_n}(\theta) \Rightarrow \ln L_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

Derivando con respecto a θ e igualando a cero, se tiene:

$$\frac{\partial \ln L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{\theta} = -\sum_{i=1}^n \ln x_i \Leftrightarrow \theta = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i} \text{ candidato a EMV.}$$

Es evidente que $\dfrac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$ es estimador de θ pues ambos toman valores reales. Por otro lado:

$$\frac{\partial^2 \ln L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{-n}{\theta^2} < 0 \Rightarrow \widehat{\theta} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i} \text{ EMV para } \theta.$$

b) En el Ejercicio 10 del tema 4 se dedujo que $T = \overline{\ln X}$ es un estimador eficiente para $-1/\theta$. Por la Proposición 4 de los apuntes de teoría se tiene entonces que $T = \overline{\ln X}$ es EMV para $-1/\theta$. Por tanto, $\widehat{-1/\theta} = \overline{\ln X}$. Así, por el teorema de invariancia de Zehna se tiene que

$$\widehat{\theta} = -1/\overline{\ln X} = \frac{-n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$$

Ejercicio 4.

Sea $(X_1,\ldots,X_n)$ una muestra de una variable $X \rightsquigarrow \{B(k_0,P); p \in (0,1)\}$. Estimar, por máxima verosimilitud y por el método de los momentos, el parámetro p y la varianza de X.

Aplicación. Se lanza 100 veces un dado cargado y se cuenta el número de veces que sale un 4. Este experimento se realiza 100 veces de forma independiente, obteniéndose los siguientes resultados:

Nº de 4	0	1	2	3
Frecuencia	84	15	1	0

Estimar, a partir de estos datos, la probabilidad de salir un 4.

SOLUCIÓN

Sabemos por el Ejercicio 1 del Tema 1 que si X es una variable aleatoria con $X \rightsquigarrow B(k_0,p)$, la función masa de probabilidad muestral de una muestra aleatoria simple de tamaño n de X viene dada por:

$$f_\theta^n(x_1,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i} p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{nk_0-\sum_{i=1}^n x_i} = L_{x_1,\ldots,x_n}(p)$$

Por tanto:

$$\ln L_{x_1,\ldots,x_n}(p) = \ln\left(\prod_{i=1}^n \binom{k_0}{x_i}\right) + \sum_{i=1}^n x_i \ln p + \left(nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i\right)\ln(1-p)$$

Derivando con respecto a p e igualando a cero se llega entonces a:

$$\frac{\partial \ln L_{x_1,\ldots,x_n}(p)}{\partial p} = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^n x_i - \frac{1}{1-p}\left(nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{(1-p)\sum_{i=1}^n x_i - p\left(nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i\right)}{p(1-p)}$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^n x_i - pnk_0}{p(1-p)} = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i - pnk_0 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{nk_0}$$

Por tanto, $\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{nk_0}$ es candidato a EMV para p.

- Puesto que $0 \leq x_i \leq k_0$ para cualquier $i = 1, \ldots, n$, entonces $0 \leq \sum_{i=1}^n x_i \leq nk_0, \forall n$. Por tanto, $\dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{nk_0} \in (0,1)$ es estimador de p.
- Si calculamos la segunda derivada, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \ln L_{x_1,\ldots,x_n}(p)}{\partial p^2} = \underbrace{\frac{-1}{p^2}\sum_{i=1}^n x_i}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{(1-p)^2}\left(nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i\right)}_{<0} < 0 \Rightarrow \widehat{p} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{nk_0} = \frac{\bar{X}}{k_0} \text{ EMV de } p.$$

Por otro lado, puesto que la varianza de $X \rightsquigarrow B(k_0, p)$ es $\mathrm{Var}[X] = k_0 p(1-p)$, por el teorema de invariancia de Zehna se tiene:

$$\widehat{\mathrm{Var}[X]} = k_0 \widehat{p(1-p)} = k_0 \widehat{p}(1-\widehat{p}) = \cancel{k_0} \cdot \frac{\bar{X}}{\cancel{k_0}}\left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{nk_0}\right) = \bar{X} - \frac{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2}{n^2 k_0} \text{ EMV de } \mathrm{Var}[X].$$

Utilizamos ahora el método de los momentos para estimar p y la varianza de X. Para ello, en primer lugar igualamos los momentos de primer orden muestral y poblacional.

$$\bar{X} = A_1 = m_1 = \mathrm{E}[X] = k_0 p \Leftrightarrow p = \frac{\bar{X}}{k_0} \Rightarrow p^* = \frac{\bar{X}}{k_0} = \widehat{p}$$

Por otro lado, se pueden igualar los momentos no centrados de orden dos para obtener:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 = k_0(k_0-1)p^2 + k_0 p = k_0^2 p^2 \underbrace{- k_0 p^2 + k_0 p}_{=k_0 p(1-p)} \Rightarrow (\mathrm{Var}[X])^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$$

Aplicación. Sea $X =$ *número de veces que sale un 4 en 10 lanzamientos*. Así definido, $X \rightsquigarrow B(10, p)$, con p la probabilidad de salir un 4, y $k_0 = 10$. Como el experimento se realiza 100 veces de forma independiente, entonces estamos considerando una realización muestral $(x_1, \ldots, x_{100})$ de una muestra aleatoria simple de X de tamaño $n = 100$. Por tanto, para hallar $\widehat{p}$ basta con sustituir en $\widehat{p} = \bar{X}/k_0$.

$$\bar{X} = \frac{1}{100}(1 \cdot 15 + 2 \cdot 1) = \frac{17}{100} = 0{,}17 \Rightarrow \widehat{p} = 0{,}017$$

Ejercicio 5.

Se lanza un dado hasta que salga un 4 y se anota el número de lanzamientos necesarios; este experimento se efectúa veinte veces de forma independiente. A partir de los resultados obtenidos, estimar la probabilidad de sacar un 4 por máxima verosimilitud.

$\boxed{\text{SOLUCIÓN}}$

Sea $X =$ *número de lanzamientos hasta que se obtiene un 4*, donde se incluye el lanzamiento en el que sale el 4 (así, si el 4 sale en el quinto lanzamiento, entonces $X = 5$). Por tanto, para construir X estamos considerando repeticiones independientes de una prueba de Bernoulli donde el suceso éxito es obtener un 4 y el suceso fracaso es obtener un resultado distinto.

Definición 1. *La distribución geométrica modeliza el número de fracasos antes del primer éxito en repeticiones independientes de ensayos de Bernoulli con probabilidad de éxito p constante. Su función masa de probabilidad viene dada por:* $P[X=x]=p(1-p)^x;\ \ x=0,1,2,\ldots$.

Como X cuenta el número de tiradas necesarias hasta que salga un 4 incluyendo a la propia tirada en la que lo obtenemos, entonces es evidente que $X-1$ modeliza el número de tiradas necesarias antes de sacar el 4, es decir, $X-1 \rightsquigarrow G(p)$ con p la probabilidad de obtener un 4. Por tanto:

$$P[X=x]=P[X-1=x-1]=p(1-p)^{x-1}$$

Así, si consideramos una muestra aleatoria simple $(X_1,\ldots,X_{20})$ de tamaño $n=20$ de la variable aleatoria X, la función de verosimilitud asociada a cada realización muestral viene dada por:

$$f_\theta^{20}(x_1,\ldots,x_{20})=p(1-p)^{x_1-1}\cdots p(1-p)^{x_{20}-1}=p^{20}(1-p)^{\sum_{i=1}^{20}x_i-20}=L_{x_1,\ldots,x_{20}}(p)$$

$$\ln L_{x_1,\ldots,x_{20}}(p)=\ln(p^{20})+\ln\left((1-p)^{\sum_{i=1}^{20}x_i-20}\right)=20\ln p+\left(\sum_{i=1}^{20}x_i-20\right)\ln(1-p)$$

Derivando el logaritmo de la función de verosimilitud e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{\partial \ln L_{x_1,\ldots,x_{20}}(p)}{\partial p}=\frac{20}{p}-\frac{1}{1-p}\left(\sum_{i=1}^{20}x_i-20\right)=\frac{20(1-p)-p\left(\sum_{i=1}^{20}x_i-20\right)}{p(1-p)}=0$$

$$\Leftrightarrow 20-\sum_{i=1}^{n}x_i=0\Leftrightarrow p=\frac{20}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{X}}\text{ candidato a EMV.}$$

Es posible que en este caso el candidato a EMV no sea estimador siempre, pero lo admitimos como estimador pues, en tal caso, el problema no tendría solución (además, lo normal no es que siempre ocurra un suceso al primer intento si estamos considerando una distribución geométrica). Así, asumimos que $\sum_{i=1}^{20}x_i\geq 20$. Por otro lado, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \ln L_{x_1,\ldots,x_{20}}(p)}{\partial p^2}=\frac{-20}{p^2}-\frac{1}{(1-p)^2}\left(\sum_{i=1}^{20}x_i-20\right)<0\Rightarrow\widehat{p}=\frac{1}{\bar{X}}\text{ EMV para }p.$$

Ejercicio 6.

En 20 días muy fríos, una granjera pudo arrancar su tractor en el primer, tercer, quinto, primer, segundo, primer, tercer, séptimo, segundo, cuarto, cuarto, octavo, primer, tercer, sexto, quinto, segundo, primer, sexto y segundo intento. Suponiendo que la probabilidad de arrancar en cada intento es constante, y que las observaciones se han obtenido de forma independiente, dar la estimación más verosímil de la probabilidad de que el tractor arranque en el segundo intento.

SOLUCIÓN

Sea X = *número de intentos hasta que se arranca el tractor*, de nuevo como en el Ejercicio 5 incluyendo la tirada en el que se consigue arrancar. Por el mismo razonamiento que antes se concluye que $X-1\rightsquigarrow G(p)$ con p la probabilidad de arrancar el tractor, luego el EMV para p es $\widehat{p}=1/\bar{X}$.

Por otro lado, como $P[X=2]=P[X-1=1]=p(1-p)^{2-1}=p(1-p)$, por el teorema de invariancia de Zehna se tiene:

$$\widehat{P[X=2]}=p\widehat{(1-p)}=\widehat{p}(1-\widehat{p})=\frac{1}{\bar{X}}\left(1-\frac{1}{\bar{X}}\right)=\frac{\bar{X}-1}{\bar{X}^2}\text{ EMV para } P[X=2].$$

Como $\bar{X}=\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}X_i=\frac{1}{20}(1+3+\cdots+6+2)=\frac{67}{20}=3{,}35$, entonces:

$$\widehat{P[X=2]}=\frac{3{,}35-1}{3{,}35^2}\approx 0{,}209.$$

Ejercicio 7.

Una variable aleatoria discreta toma los valores 0, 1 y 2 con las siguientes probabilidades:

$$P_p[X=0]=p^2,\qquad P_p[X=1]=2p(1-p),\qquad P_p[X=2]=(1-p)^2$$

siendo p un parámetro desconocido. En una muestra aleatoria simple de tamaño 100, se ha presentado 22 veces el 0, 53 veces el 1 y 25 veces el 2. Calcular la función de verosimilitud asociada a dicha muestra y dar la estimación más verosímil de p.

SOLUCIÓN

Sabemos que la función de verosimilitud viene dada por

$$L_{x_1,\ldots,x_{100}}(p)=f_\theta^{100}(x_1,\ldots,x_{100})=f_\theta(x_1)\cdots f_\theta(x_{100})$$

Para este caso particular podemos suponer $x_i=0, i=1,\ldots,22; x_j=1, j=23,\ldots,75; x_k=2, k=76,\ldots,100$, para obtener una realización muestral de $(X_1,\ldots,X_{100})$ cumpliendo:

$$\begin{aligned}f_\theta^{100}(x_1,\ldots,x_{100})&=P_p[X_1=0]\cdots P_p[X_{22}=0]P_p[X_{23}=1]\cdots P_p[X_{75}=2]P_p[X_{76}=2]\cdots P_p[X_{100}=2]\\&=(P_p[X=0])^{22}\cdot(P_p[X=1])^{53}\cdot(P_p[X=2])^{25}=(p^2)^{22}\cdot(2p(1-p))^{53}\cdot((1-p)^2)^{25}\\&=p^{44}\cdot 2^{53}\cdot p^{53}\cdot(1-p)^{53}\cdot(1-p)^{50}=p^{97}\cdot(1-p)^{103}\cdot 2^{53}=L_{x_1,\ldots,x_{100}}(p)\end{aligned}$$

Así:

$$\ln L_{x_1,\ldots,x_{100}}(p)=97\ln p+103\ln(1-p)+\ln(2^{53})$$

Derivando el logaritmo de la función de verosimilitud e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{\partial \ln L_{x_1,\ldots,x_{100}}(p)}{\partial p}=\frac{97}{p}-\frac{103}{1-p}=0\Leftrightarrow\frac{(1-p)97-103p}{p(1-p)}=0\Leftrightarrow p=\frac{97}{200}\Rightarrow p=0{,}485$$

Como $\frac{\partial^2 L_{x_1,\ldots,x_{100}}(p)}{\partial p^2}<0$ para $p=0{,}485$, entonces se tiene $\widehat{p}=0{,}485$ EMV de p.

Observemos que el resultado es lógico puesto que se tiene que si $p=0{,}485$ entonces $P_p[X=0]\approx 0{,}23$, $P_p[X=1]\approx 0{,}499$, $P_p[X=2]\approx 0{,}26$ y, por tanto, en 100 observaciones cabría esperar que el 0 se obtuviera aproximadamente 23 veces (se obtiene 22), que el 1 se obtuviera sobre 50 veces (se obtiene 53) y que el 2 se repitiera 26 aproximadamente 26 veces (y se repite en 25 ocasiones).

Ejercicio 8.

En el muestreo de un variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(\mu,1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, se observa que no se obtiene un valor menor que -1 hasta la quinta observación. Dar una estimación máximo verosímil de μ.

SOLUCIÓN

Sea $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,1)$. Consideramos una muestra aleatoria $(X_1,\dots,X_n)$ de X de tamaño $n=5$, y consideramos la realización muestral $(x_1,\dots,x_5)$ que cumple $x_1 \geq -1, i=1,\dots,4; x_5 < -1$. Si llamamos p a la probabilidad de que se obtenga un valor mayor o igual que 1, entonces $1-p$ es la probabilidad de que se obtenga un valor menor que 1. Así, la función de verosimilitud asociada a la realización muestral $(x_1,\dots,x_5)$ es la probabilidad de que se obtenga dicha muestra, es decir:

$$L_{x_1,\dots,x_5}(p) = (P[X \geq -1])^4 P[X < -1] = p^4(1-p)$$

Por tanto, resolviendo la ecuación dada por la derivada del logaritmo neperiano de la función de verosimilitud igualada a cero obtendremos el EMV para p:

$$\ln L_{x_1,\dots,x_5}(p) = 4\ln p + \ln(1-p) \Rightarrow \frac{\partial \ln L_{x_1,\dots,x_5}(p)}{\partial p} = \frac{4}{p} - \frac{1}{1-p} = 0 \Leftrightarrow 4-4p-p=0 \Leftrightarrow p=0{,}8$$

Es evidente que en este caso p es estimador pues es positivo, y como la segunda derivada del logaritmo de la función de verosimilitud en 0.8 es negativa, entonces en efecto $\widehat{p}=0{,}8$.

Por el teorema de invariancia de Zehna, $\widehat{1-p} = 1-\widehat{p} = 1-0{,}8 = 0{,}2$. Por tanto:

$$P[\widehat{X<-1}] = 0{,}2$$

Tipificando la variable X se tiene que $P[X-\mu = -1-\mu] = P[Z < -1-\mu] = 0{,}2$. Así, buscamos en la tabla de la normal tipificada que deja por debajo valores con una probabilidad menor que 0.8. En efecto:

$$P[Z<-1-\mu]=0{,}2 \Leftrightarrow 1-P[Z\geq -1-\mu]=0{,}2 \Leftrightarrow P[Z\geq -1-\mu]=0{,}8 \Leftrightarrow P[Z<1+\mu]=0{,}8$$

Vamos a interpolar en la tabla de la normal a partir de los datos siguientes:

$$P[Z<0{,}84]=0{,}79955,\ P[X<0{,}85]=0{,}80234$$

Así, sean los puntos $(x_1,y_1)=(0'84, 0'79955)$, $(x_2,y_2)=(0'85,0'80264)$. Debemos sustituir tales coordenadas y el valor $y=0{,}8$ en la ecuación de la recta dada por:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow x = \frac{(y-y_1)(x_2-x_1)}{y_2-y_1} + x_1$$

Por tanto:

$$x = \frac{(0{,}8-0{,}79955)(0{,}85-0{,}84)}{0{,}80264-0{,}79955} + 0{,}84 = 0{,}84146$$

Así, se tiene que $1+\mu = 0{,}84146 \Rightarrow \mu = 0{,}84146-1 \Rightarrow \widehat{\mu} = -0{,}15854$.

Ejercicio 9.

En la producción de filamentos eléctricos la medida de interés, X, es el tiempo de vida de cada filamento, que tiene una distribución exponencial de parámetro θ. Se eligen n de tales filamentos de forma aleatoria e independiente pero, por razones de economía, no conviene esperar a que todos se quemen y la observación se acaba en el tiempo T. Dar el estimador máximo verosímil para la media de X a partir del número de filamentos quemados durante el tiempo de observación.

SOLUCIÓN

Para hacer este ejercicio, necesitamos recordar el siguiente resultado.

Proposición 1. *Si $X \rightsquigarrow \exp(\theta)$ representa la distribución de un suceso aleatorio, entonces la variable $Y \rightsquigarrow P(\theta T)$ indica el número de sucesos aleatorios ocurridos en un intervalo de tiempo T, cuando su razón de ocurrencia es θ.*

Sea X = *tiempo de vida de cada filamento*. Si X mide el tiempo que tarda cada filamento en quemarse, entonces X también modela la ocurrencia del suceso *un filamento se quema*, luego X se puede redefinir como una variable aleatoria que mide el tiempo en el que tarda en quemarse un filamento, y la razón con la que ocurre tal suceso es θ.

Si la observación de X termina en un tiempo T, uno de los sucesos que se pueden estudiar en el intervalo de tiempo $[0, T]$ es el número de filamentos que se han quemado. Por tanto, podemos definir una nueva variable aleatoria Y = *número de filamentos quemados en un intervalo de longitud* T que, por la Proposición 1, cumple $Y \rightsquigarrow P(\theta T)$. Así, debemos dar el estimador máximo verosímil de la esperanza de X estudiando el estimador de máxima verosimilitud del parámetro θT a partir del estudio de la variable Y.

En este caso, la variable aleatoria Y se está observando solo una vez (no nos especifican que el experimento aleatorio se repite varias veces), luego estamos trabajando con una muestra aleatoria simple de Y de tamaño 1. Así, la función de verosimilitud vendrá dada por:

$$P[Y = y] = e^{-\theta T}\frac{(\theta T)y}{y!} = L_y(\theta T)$$

Por tanto:

$$\ln L_y(\theta T) = \ln(e^{-\theta T}) + \ln\left(\frac{(\theta T)^y}{y!}\right) = -\theta T + y\ln(\theta T) - \ln(y!)$$

Derivando el logaritmo de la función de verosimilitud e igualando a cero, se tiene:

$$\frac{\partial \ln L_y(p)}{\partial \theta T} = -1 + \frac{y}{\theta T} = 0 \Leftrightarrow \frac{y}{\theta T} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\theta T} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \theta T = y \text{ candidato a EMV.}$$

Como $y > 0$ al igual que el parámetro θT entonces se tiene que es estimador, y como

$$\frac{\partial^2 \ln L_y(p)}{\partial (\theta T)^2} = \frac{-y}{(\theta T)^2} < 0 \text{ pues } y > 0$$

entonces se tiene $\widehat{\theta T} = y$.

Por el teorema de invariancia de Zehna se tiene:

$$\hat{\theta} = y/T \Rightarrow \widehat{\mathrm{E}[X]} = \widehat{\frac{1}{\theta}} = \frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{T}{y}$$

Observemos que nuestro resultado es lógico ya que nos están pidiendo dar un pronóstico de la media del tiempo de vida de un filamento (la esperanza de X) y hemos obtenido como resultado el cociente entre el tiempo en que X ha sido observado y el número de filamentos que se han quemado. Así, si por ejemplo se tiene que en 9 minutos de observación se han quemado 3 filamentos, podemos esperar que cada uno de ellos se queme en 3 minutos (es decir, que cada uno tenga un tiempo de vida de 3 minutos).

Ejercicio 10.

Sean $X_1, \ldots, X_n$ observaciones independientes de una variable $X \rightsquigarrow \{\Gamma(p, a); p, a > 0\}$. Estimar ámbos parámetros mediante el método de los momentos.

Aplicación. Ciertos neumáticos radiales tuvieron vidas útiles de 35200, 41000, 44700, 38600 y 41500 kilómetros. Suponiendo que estos datos son observaciones independientes de una variable con distribución exponencial de parámetro θ, dar una estimación de dicho parámetro por el método de los momentos.

SOLUCIÓN

Si $X \rightsquigarrow \Gamma(p, a)$, entonces $\mathrm{E}[X] = \dfrac{p}{a}$, $\mathrm{Var}[X] = \dfrac{p}{a^2}$.

Para aplicar el método de los momentos, en primer lugar igualamos el momento muestral no centrado de primer orden con el momento poblacional no centrado de primer orden.

$$\bar{X} = A_1 = m_1 = \mathrm{E}[X] = \frac{p}{a} \Rightarrow \frac{p}{a} = \bar{X} \Rightarrow p = a\bar{X}$$

Para hallar los dos parámetros necesitamos otra igualdad, que vendrá de igualar el momento muestral centrado de segundo orden con el momento poblacional centrado de segundo orden.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = B_2 = \mu_2 = \mathrm{Var}[X] = \frac{p}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = \frac{p}{a^2} = \frac{a\bar{X}}{a^2} = \frac{\bar{X}}{a}$$
$$\Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n} = \frac{\bar{X}}{a} \Rightarrow a = \frac{n\bar{X}}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \Rightarrow a^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{(X_i - \bar{X})^2}$$

Por otro lado:

$$p^* = a^* \cdot \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} X_i}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Aplicación. Reescribimos la notación de la variable $\Gamma(p, a)$ para adaptarla al enunciado del problema. Así, por similitud con la distribución exponencial, la llamamos $\Gamma(u, \theta)$. Así definida, la función de densidad de $\Gamma(u, \theta)$ viene dada por:

$$f(x) = \frac{\theta^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} e^{-\theta x}$$

Como la función de densidad de una variable $\exp(\theta)$ viene dada por $f(x) = \theta e^{-\theta x}$, entonces es evidente que la distribución exponencial se obtiene a partir de una distribución Gamma donde el primer parámetro (en este caso, u) es 1, es decir, $\exp(\theta) = \Gamma(1, \theta)$. Así, para estimar θ debemos utilizar el estimador máximo verosímil a^* obtenido antes, que en este caso resulta ser θ^*. Como ahora se tiene $1 = \theta\bar{X}$, entonces se tiene que

$$\theta^* = \frac{1}{\bar{X}} = \frac{1}{40200} = 2{,}4875 \cdot 10^{-5}$$