Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas	**Prueba de clase & soluciones** 26 de abril de 2021

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. No hay ningún valor de $\lambda \in \mathbb{R}$ para el cual la ecuación

$$y''(t) + ty'(t) + \lambda \cos(t) y(t) = 0, \qquad y(0) = y(\pi/4) = 0$$

tiene soluciones no triviales $y\colon [0, \pi/4] \to \mathbb{R}$.

2. Sea $C \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto cerrado y $F\colon C \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa que alcanza su mínimo en un punto de C. Entonces F no puede alcanzar su mínimo en ningún otro punto de C.

3. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto y $F\colon U \to \mathbb{R}$ una función estrictamente convexa que alcanza su mínimo en un punto de U. Entonces F no puede alcanzar su mínimo en ningún otro punto de U.

4. El coeficiente de $\operatorname{sen}(3x)$ en la serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ de la función $f(x) := x^2 + \operatorname{sen}(x)$ es 0.

Solución 1.

1. Falsa. El problema dado es de tipo Sturm-Liouville (observa que $\cos(t)$ es estrictamente positivo en $[0, \pi/4]$), y por tanto siempre tiene infinitos valores propios.

2. Falsa. Si $C \subseteq \mathbb{R}$ es por ejemplo $C := \{0, 1\}$ (un conjunto con dos puntos) entonces la función $F\colon C \to \mathbb{R}$, $F(x) = 0$ alcanza su mínimo en 0 y en 1, y es estrictamente convexa. (Observa que es estrictamente convexa de forma trivial, ya que no existe ningún $\theta \in (0, 1)$ tal que $\theta \cdot 0 + (1 - \theta) \cdot 1 \in D$.) Otro contraejemplo es $F : (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ dada por $F(x) = x^2$, que alcanza mínimo en -1 y en 1. Cualquier contraejemplo requiere que el dominio de definición no sea convexo.

3. Verdadera. Si F es estrictamente convexa y alcanza su mínimo valor m en dos puntos $x, y \in D$ entonces $F(x) = F(y) = m$. Como U es abierto, siempre podemos encontrar $\theta \in (0, 1)$ tal que $\theta x + (1 - \theta) y \in D$ (por ejemplo tomando θ cerca de 0) y tenemos

$$m \le F(\theta x + (1 - \theta) y) < \theta F(x) + (1 - \theta) F(y) = \theta m + (1 - \theta) m = m,$$

lo cual es una contradicción.

4. Verdadera. La integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x)(x^2 + \operatorname{sen}(x))\, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x) x^2\, \mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(x)\, \mathrm{d}x$$

se anula porque el primer término es la integral de una función antisimétrica, y el segundo es 0 porque $\operatorname{sen}(3x)$ es perpendicular a $\operatorname{sen}(x)$ en el producto escalar usual de $L^1(-\pi, \pi)$. (Las integrales también se pueden calcular explícitamente.)

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 e^{-t}((y'(t))^2 + 2y(t)^2)\,\mathrm{d}t$$

definido en el dominio

$$D := \{y \in \mathcal{C}^2[0,1] \mid y'(1) = e^2 - 1/e\}.$$

Demuestra que $\mathcal{F}$ alcanza un único mínimo en su dominio, y encuentra la función donde lo alcanza.

Solución 2. Calculando la ecuación de Euler-Lagrange de $\mathcal{F}$ obtenemos

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

con las condiciones de contorno $y'(1) = e^2 - 1/e$, junto con $y'(0) = 0$ debido a que el dominio no tiene ninguna condición en $t = 0$. Las soluciones de la ecuación diferencial son

$$y(t) = Ae^{2t} + Be^{-t},$$

y para cumplir las condiciones de contorno debe ocurrir que

$$2A - B = 0, \qquad 2Ae^2 - \frac{B}{e} = e^2 - \frac{1}{e}.$$

Se puede ver que la única solución es $A = 1/2$, $B = 1$, luego el único punto crítico de $\mathcal{F}$ es

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + e^{-t}.$$

Por otra parte, $\mathcal{F}$ es un funcional estrictamente convexo porque la función asociada $F(t, y, z) = e^{-t}(z^2 + 2y^2)$ es estrictamente convexa en (y, z). Por tanto, el único punto crítico de $\mathcal{F}$ tiene que ser también el único punto donde $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** Consideramos el funcional

$$\mathcal{F}(y) := \int_a^b F(y(t), y'(t))\,\mathrm{d}t,$$

definido en el dominio $D := \mathcal{C}^2[a, b]$, donde $a < b \in \mathbb{R}$ y $F\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{C}^2$ cuyas variables denotamos por $F = F(y, z)$. Para cualquier función $y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definimos su energía asociada $E_y\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ como

$$E_y(t) := y'(t)\,\partial_z F(y(t), y'(t)) - F(y(t), y'(t)), \qquad t \in [a, b].$$

Demuestra que si y es un punto crítico del funcional $\mathcal{F}$ entonces E_y es una función constante en $[a, b]$.

Ejercicio 4. Los puntos críticos de $\mathcal{F}$ deben cumplir la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\partial_z F(t, y(t), y'(t))\big) = \partial_y F(t, y(t), y'(t)).$$

Si y cumple esta ecuación, entonces derivando $E_y(t)$ en t obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E_y(t) = y''(t)\,\partial_z F(y(t), y'(t)) + y'(t)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\partial_z F(y(t), y'(t)) - y'(t)\partial_y F(y(t), y'(t)) - y''(t)\partial_z F(y(t), y'(t)),$$

que es 0 porque el primer término y el último se cancelan, y los otros dos también gracias a la ecuación de Euler-Lagrange.