ÁLGEBRA 3 - CUESTIONARIO 1

PREGUNTA 1: El cuerpo de descomposición de $x^5 - 11 \in \mathbb{Q}[x]$:

a) Tiene grado 5!.

b) Es una extensión de grado 20.

c) Es $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{11})$.

SOLUCIÓN: c)

$z_5^5 = 1$

$$\mathbb{Q}(\underset{5}{\sqrt[5]{11}}, \underset{5}{z_5\sqrt[5]{11}}, \underset{5}{z_5^2\sqrt[5]{11}}, \underset{5}{z_5^3\sqrt[5]{11}}, \underset{5}{z_5^4\sqrt[5]{11}}) = \mathbb{Q}(z_5\sqrt[5]{11}, z_5^2\sqrt[5]{11} \dots)$$

PREGUNTA 2: El cuerpo de descomposición de la familia $\Sigma = \{x^5 - p \in \mathbb{Q}[x] : \text{p primo}\}$:

a) Es una extensión finita de $\mathbb{Q}$ con grado $\leq 5!$.

b) No existe.

c) Es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ contenida en el cuerpo de los algebraicos.

SOLUCIÓN: c)

$x^5 = p \to x_1 = \sqrt[5]{p},\ x_2 = z_5\sqrt[5]{p},\ x_3 = z_5^2\sqrt[5]{p},\ x_4 = z_5^3\sqrt[5]{p},\ x_5 = z_5^4\sqrt[5]{p}$

$\mathbb{Q}(g) = \underbrace{\mathbb{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)}_{\text{algebraico}}$

$x^5 - p$ $\boxed{p \text{ primo}}$

irreducible de $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \Rightarrow \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_5)$ es algebraica sobre $\mathbb{Q}$ siempre.

s $\Sigma = \{x^5 - p \in \mathbb{Q}[x] \mid p \text{ primo}\}$:

$\in \mathbb{Q}[x]$

PREGUNTA 3: Se tiene que:

a) No se puede triplicar el volumen de cualquier cubo con construcciones con regla y compás a partir de 0 y 1.

b) Ningún ángulo se pueden trisecar con regla y compás a partir de 0 y 1.

c) Con regla y compás a partir de 0 y 1 se puede construir un cuadrado con área el doble de la de un círculo dado.

SOLUCIÓN: a)

PREGUNTA 4: El cuerpo de descomposición de la familia de polinomios $\Sigma = \{x^4 + 4, x^2 + 1\}$:

a) $\mathbb{Q}(i, \sqrt{2})$.

b) $\mathbb{Q}(i)$.

c) No existe.

SOLUCIÓN: b)

$\mathbb{Q}(i) = \{a + bi,\ a, b \in \mathbb{Q}\}$

$\mathbb{Q}(x^2+1) = \mathbb{Q}(i)$ $\quad \sqrt{2} \cdot \sqrt{i} \cdot i$

$x^4 + 4 = 0 \to x^4 = -4$ $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$ $\quad \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$x^2 = z \quad z^2 = -4 \quad z = \pm 2i$

$\sqrt{2i} = \sqrt{2}\, i$

$-\sqrt{2i} = -\sqrt{2}\, i$

$\sqrt{-2i} = \sqrt{2i}\, i$

$-\sqrt{-2i} = -\sqrt{2i}\, i$

$\sqrt{i} \cdot i = i^{1/2} \cdot i = \sqrt{i^3}$

PREGUNTA 5: Dados los polinomios: $x^2 - x + 1, x^2 + x + 1, x^2 + x - 1$:.

a) Sólo 2 de ellos tienen el mismo cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

b) Los 3 tienen diferente cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

c) Los 3 tienen el mismo cuerpo de descomposición sobre $\mathbb{Q}$.

SOLUCIÓN: a)

$x^5 - 11 \longrightarrow \sqrt[5]{11}$ $\quad \sqrt[5]{11} \quad z_5 \sqrt[5]{11} \quad z_5^4 \sqrt[5]{11}$

$\underbrace{\mathbb{Q}(z_5 \sqrt[5]{11}, z_5^2 \sqrt[5]{11}, z_5^3 \sqrt[5]{11}, z_5^4 \sqrt[5]{11})}_{20}$ $\mathbb{Q}$

- $x^2 - x + 1$ $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$

  $x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$

- $x^2 + x + 1$ $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{3}i)$

  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \end{cases}$

- $x^2 + x - 1$ $\quad \mathbb{Q}(\sqrt{5})$

  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4}}{2} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

PREGUNTA 6: La afirmación: "la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})/\mathbb{Q}$. con $n \geq 3$ es normal":

a) Es verdadera o falsa dependiendo de n.

b) Es siempre verdadera.

c) Es siempre falsa.

SOLUCIÓN: c)

$\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})/\mathbb{Q}$ $\quad x^n - 2 \to \{\sqrt[n]{2}, z_n\sqrt[n]{2}, \ldots, z_n^{n-1}\sqrt[n]{2}\} \not\subset \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}) \Rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt[n]{2})/\mathbb{Q}$ $n \geq 3$ no es normal

n $n \geq 3$, es normal"

PREGUNTA 7: La clausura normal de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3})$ es:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt[12]{6})$

b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3}, \omega)$

c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3})$

SOLUCIÓN: b)

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

La clausura normal de la extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3})$ es: ¿?

No normal

a. $\mathbb{Q}(\sqrt[12]{6})$.

b. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3}, \omega)$.

no Normal

c. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3})$. $\quad \mathrm{Irr}(\sqrt[6]{3}, \mathbb{Q}) = x^6 - 3$ No tiene raíces en $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3})$ por ejemplo, $z_6\sqrt[6]{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[6]{3})$

PREGUNTA 8: A partir de los puntos del plano $(0,0)$ y $(1,0)$ el punto:

a) $(\frac{3}{4}, \sqrt[5]{3})$ es construible con regla y compás.

b) $(\frac{3}{4}\sqrt[8]{15}, \frac{5}{7}\sqrt{3})$ es construible con regla y compás.

c) $(\sqrt[24]{2}, \sqrt[4]{3})$ es construible con regla y compás.

SOLUCIÓN: b)

PREGUNTA 9: Se tiene que:

a) La torre $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\pi) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\pi})$ asegura que $\sqrt{\pi} + 2$ es construible con regla y compás.

b) Ninguna de las respuestas incluidas es cierta.

c) $\sqrt{\pi} + 2$ es construible con regla y compás desde $0, 1, \pi$.

SOLUCIÓN: c)

PREGUNTA 10: La afirmación "el polígono regular de $2n$ lados, $n \geq 2$, es construible con regla y compás a partir de 0 y 1":

a) Es verdadera o falsa dependiendo de n.

b) Siempre es verdadera.

c) Es siempre falsa.

SOLUCIÓN: a)

PREGUNTA 11: Se tiene que, a partir de 0 y 1:

a) El polígono regular de 23 lados no se puede construir con regla y compás.

b) Cualquier polígono regular de $2n$ lados se puede construir con regla y compás.

c) Si p es un primo impar, cualquier polígono regular de p lados se puede construir con regla y compás.

SOLUCIÓN: a)

PREGUNTA 12: El cuerpo de descomposición del polinomio $(x^6-4)(x^2-3) \in \mathbb{Q}[x]$:

a) Es $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, i)$.

b) Es $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})$.

c) Es $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$.

SOLUCIÓN: a)

$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad \sqrt[6]{4} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{4}, i)$

$\sqrt[3]{2}$

$\parallel$

$\mathbb{Q}(\sqrt[6]{4}, i, \sqrt{3})$

$x^6 = 4 \rightarrow \sqrt[6]{4},\ \omega\sqrt[6]{4},\ \omega^2\sqrt[6]{4},\ -\sqrt[6]{4},\ -\omega\sqrt[6]{4},\ -\omega^2\sqrt[6]{4}$

$x^2 = 3 \quad \sqrt{3},\ \omega\sqrt{3},\ \omega^2\sqrt{3}$

$\mathbb{Q}(\omega, \sqrt{3})$

io $(x^6-4)(x^2-3) \in \mathbb{Q}[x]$:

PREGUNTA 13: Se tiene que:

a) La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{-5})/\mathbb{Q}$ es normal.

b) La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{-5})/\mathbb{Q}$ es normal.

c) La extensión $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})/\mathbb{Q}$ es normal.

SOLUCIÓN: b)

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\, i$

$\sqrt[3]{-5} = \alpha$

$\alpha^3 = -5$

$x^3 = -5 \rightarrow \sqrt[3]{-5},\ \omega\sqrt[3]{-5},\ \omega^2\sqrt[3]{-5}$

$\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$

PREGUNTA 14: El polígono regular de $2n$ lados, $n \geq 2$:

a) Puede no ser construible con regla y compás a partir de 0 y 1.

b) Nunca es construible con regla y compás a partir de 0 y 1.

c) Siempre es construible con regla y compás a partir de 0 y 1.

SOLUCIÓN: a)

PREGUNTA 15: El cuerpo de descomposición de la familia $\Sigma = \{x^p + px + p \in \mathbb{Q}[x] : \text{p primo}\}$:

a) Es $\mathbb{C}$.

b) Es una extensión algebraica de $\mathbb{Q}$ contenida en el cuerpo de los algebraicos.

c) No existe.

SOLUCIÓN: b)

PREGUNTA 16: El grupo $G(\mathbb{Q}(z_{14})/\mathbb{Q})$ es:

a) de orden 6 y cíclico.

b) de orden 6 y no cíclico.

c) de orden distinto de 6.

SOLUCIÓN: a)

PREGUNTA 17: Si K es un cuerpo de números tal que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \leq K \leq \mathbb{Q}(\sqrt{2}, z_n)$, la afirmación "$K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es una extensión normal y su grupo de Galois es abeliano" es:

a) siempre falsa

b) siempre cierta.

c) a veces verdad y a veces falsa, depende de K

SOLUCIÓN: b)

PREGUNTA 18: Si $n > m \geq 2$ son números naturales tales que $\phi(n) = \phi(m)$, la afirmación "$\mathbb{Q}(z_n) = \mathbb{Q}(z_m)$" es:

a) siempre cierta.

b) siempre falsa.

c) a veces verdad y a veces falsa, depende de n y de m.

SOLUCIÓN: c)

PREGUNTA 19: Si $p \geq 3$ es un primo, la igualdad $\Phi_{2_p} = x^{p-1} - x^{p-2} + \cdots - x + 1$ es:

a) siempre falsa.

b) siempre verdad.

c) a veces verdad y a veces falsa, depende de p.

SOLUCIÓN: b)

PREGUNTA 20: Selecciona las afirmaciones correctas:

a) $\Phi_{24}(x) = \Phi_{12}(x^2) \neq \Phi_6(x^4)$

b) $\Phi_{24}(x) = \Phi_{12}(x^2) = \Phi_6(x^4)$

c) $\Phi_{24}(x) \neq \Phi_{12}(x^2) = \Phi_6(x^4)$

SOLUCIÓN: b)