4 puntos

DOBLE GRADO en ING. INF. y MAT. 3/11/2021

① Sea $X = (C[0,1], \mathbb{R})$, con la norma uniforme $\|f\|_0 = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$, $\forall f \in X$. Si $1 \le p < +\infty$, se puede definir, también en X, la norma $\|\cdot\|_p$, como $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $\forall f \in X$.

Demuestra que $\forall p \in [1,+\infty)$, $\|f\|_p \le \|f\|_0$, $\forall f \in X$, pero que, sin embargo, $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_0$ no son equivalentes.

3 puntos

② Muestra un ejemplo de una sucesión $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de l_2, t.q. (x^n) converge a cero en l_∞ (con la norma habitual de l_∞) pero no converge a cero en l_2 (con la norma habitual de l_2).

③ Sea $X = C[0,1]$ con la norma uniforme. Prueba que los operadores lineales siguientes son continuos, calcula su norma y estudia si se alcanza.

a) 1'5 $T: X \longrightarrow X$, $(Tf)(t) = 5t^3 f(1/2)$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall f \in X$

b) 1'5 $T: X \longrightarrow X$, $(Tf)(t) = f(t^9)$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall f \in X$

Soluciones:

$$\|f\|_p^p = \int_0^1 |f(t)|^p dt \le \int_0^1 \|f\|_0^p dt = \|f\|_0^p$$

Luego $\|f\|_p \leq \|f\|_0$, $\forall f \in X$

Ahora bien, sea f_n dada por

$\|f_n\|_0 = n$; $\|f_n\|_p^p = \int_0^{1/n^p} |f_n(t)|^p dt \leq \int_0^{1/n^p} n^p dt = 1$

② $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \overset{n^2}{\cdots}, \frac{1}{n}, 0, 0, 0, \cdots) = x^n$

$\|x^n\|_{\ell_\infty} = \frac{1}{n}$, $\|x^n\|_{\ell_2} = \left(\frac{1}{n^2} + \overset{n^2}{\cdots} + \frac{1}{n^2}\right)^{1/2} = 1$

③ a) $\|Tf\|_0 = \max_{t\in[0,1]} |(Tf)(t)| = \max_{t\in[0,1]} |5t^3 f(1/2)| \leq$

$\leq |f(1/2)| 5 \leq 5\|f\|_0$

Así $\|T\| \leq 5$

Si $f \equiv 1$, $f \in \bar{B}_X(0;1)$, $\|Tf\|_0 = \|5t^3\|_0 = 5$

Así $\|T\| = 5$ y se alcanza.

b) $\|Tf\|_0 = \max_{t\in[0,1]} |(Tf)(t)| = \max_{t\in[0,1]} |f(t^9)| \leq \|f\|_0$

$\Rightarrow \|T\| \leq 1$

Si $f \equiv 1$, $f \in \bar{B}_X(0;1)$, $\|Tf\| = \|f(t^9)\|_0 = 1$

Luego $\|T\| = 1$ y se alcanza.