tema2teorIE.pdf

(Definitivo) Apuntes tema 2

Tema 2: Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales. [1]

Índice

En este tema se estudian resultados fundamentales relativos al muestreo de poblaciones normales tales como la distribución exacta (para muestras de cualquier tamaño) de estadísticos que surgen de forma natural en problemas concretos de Inferencia Estadística.

[1] Si encuentras algún error en el documento, escribe un correo electrónico a *melferizq@gmail.com*.

1. Introducción.

Entre las distribuciones de probabilidad continuas que ya han sido estudiadas destacan, por sus propiedades, algunas que serán utilizadas con mayor frecuencia. Por ejemplo, la distribución exponencial se emplea en problemas donde se estudia el tiempo de espera hasta que ocurre un suceso concreto bajo condiciones de falta de memoria (recordemos que la distribución exponencial es la única distribución continua con esta propiedad), mientras que la distribución normal puede aparecer al estudiar, entre otras, situaciones que se modelan con una distribución binomial de la que queremos conocer su comportamiento a largo plazo.

En este último caso, esto es así puesto que, casi siempre que un determinado efecto sea producido por un gran número de causas independientes, cuyas repercusiones individuales son despreciables (y de varianza finita), pero que se acumulan para dar lugar al resultado final, la distribución de este será, aproximadamente, normal (aunque cuidado: no siempre debemos generalizar y suponer que cualquier situación se modelará con una normal; debemos hacer las comprobaciones que sean necesarias).

Por tanto, podemos suponer que, en la mayoría de poblaciones que se vayan a estudiar, el modelo que mejor se adapta a ellas es normal, así que es razonable estudiar la distribución en el muestreo de los principales estadísticos de utilidad (vistos en el primer tema), correspondientes a una distribución de tipo normal.

En una primera aproximación, los problemas estadísticos relativos a una población con distribución teórica $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ solo pueden venir del desconocimiento de μ, de σ o de ambos parámetros simultáneamente. Parece lógico entonces que en su solución intervengan la media muestral, $\bar{X}$, y la cuasivarianza muestral, S^2, y que el principal interés se centre en conocer la distribución en el muestreo de dichos estadísticos, o de alguna función de ambos.

Nuestro objetivo de conocer tales distribuciones se vuelve más ambicioso al intentar efectuar comparaciones entre dos poblaciones normales independientes con distribuciones $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. En tal caso, deberemos estudiar nuevos estadísticos necesarios para ello, así como sus distribuciones en el muestreo.

2. Distribuciones χ^2 de Pearson, t de Student y F de Snedecor.

Consideramos una población descrita por una variable aleatoria unidimensional X, con distribución teórica $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, de la cual se obtiene una muestra aleatoria simple de tamaño n, $(X_1, \ldots, X_n)$. Recordemos que, en el primer tema, se demostró el siguiente resultado:

Distribución en el muestreo de la media muestral.

Proposición 1. *Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y $(X_1, \ldots, X_n)$ es una m.a.s. de X, entonces*

$$\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

2.1. Distribución χ^2 de Pearson.

Distribución χ^2 de Pearson.

Definición 1. *Se dice que una variable aleatoria X tiene una distribución χ^2 de Pearson con n grados de libertad ($n \in \mathbb{N}$), y se denota $X \rightsquigarrow \chi^2(n)$, si su función de densidad de probabilidad es*

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(n/2) \cdot 2^{n/2}} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x > 0$$

Observación 1. *La distribución χ^2 de Pearson es un caso particular de la distribución Gamma, $\Gamma(p, a)$, cuya función de densidad es*

$$f(x) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, \quad x > 0$$

De hecho, si comparamos ambas funciones de densidad, se obtiene que

$$X \rightsquigarrow \chi^2(n) \Leftrightarrow X \rightsquigarrow \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Propiedades de la distribución χ^2 de Pearson.

Proposición 2.

i) *La función generatriz de momentos de una variable aleatoria $X \rightsquigarrow \chi^2(n)$ es*

$$M_X(t) = \frac{1}{(1-2t)^{n/2}}, \quad t < \frac{1}{2}$$

ii) *Los momentos no centrados de la distribución $\chi^2(n)$ vienen dados por*

$$E[X^k] = 2^k \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} + k\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

En particular, $E[X] = n, E[X^2] = n^2 + 2n \Rightarrow Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 = 2n$.

iii) ***Reproductividad.*** *Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes con $X_i \rightsquigarrow \chi^2(k_i)$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \chi^2\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)$$

iv) ***Relación entre las distribuciones χ^2 y $\mathcal{N}(0,1)$.*** *Si $X_1, \ldots, X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución común $\mathcal{N}(0,1)$, entonces:*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \rightsquigarrow \chi^2(n)$$

Demostración. Las propiedades *i), ii)* y *iii)* se pueden demostrar teniendo en cuenta que la distribución χ^2 es un caso particular de la distribución Gamma y, por tanto, se cumplirán sus mismas propiedades para los parámetros concretos considerados. Demostramos entonces la propiedad *iv).*

Vamos a probar que, si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, entonces $X^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$. Así, utilizando la reproductividad de la distribución χ^2, se tendrá que la suma de los cuadrados de n variables aleatorias normales tipificadas será igual a la suma de n distribuciones χ^2 con un grado de libertad, es decir, una distribución $\chi^2(n)$. Recordemos que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, entonces su función de densidad viene dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in \mathbb{R}$$

Aplicamos el teorema de cambio de variable unidimensional. Si $Y = X^2$, entonces se tiene la transformación $y = x^2$, luego $x = \pm\sqrt{y}$, así que consideramos las funciones $h_1(y) = \sqrt{y}, h_2(y) = -\sqrt{y}$. Así, por el teorema, se tiene que:

$$\begin{aligned} g_Y(y) &= f(h_1(y)) \left| \frac{\partial h_1(y)}{\partial y} \right| + f(h_2(y)) \left| \frac{\partial h_2(y)}{\partial y} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\sqrt{y})^2}{2} \right) \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{2\pi} \exp\left(\frac{-(-\sqrt{y})^2}{2} \right) \left| \frac{-1}{2\sqrt{y}} \right| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2} \right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-y^2}{2} \right) \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{\sqrt{y}}, \quad y > 0 \end{aligned}$$

Ahora, comparando la función $g_Y(y)$ con la función de densidad de la χ^2 (o con la función de densidad de la correspondiente distribución Gamma), se llega a que $Y = X^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$. Así, como dijimos antes, por la reproductividad de la distribución χ^2 se obtiene el resultado. ∎

Observación 2. *Como evaluar la función de densidad de la distribución $\chi^2(n)$ es complejo (debido a las propiedades de la función Γ, recordemos que es una integral), se dan tablas donde χ^2 está tabulada para valores de n pequeños. Para valores de n grandes, se utiliza que su distribución se puede aproximar por una $\mathcal{N}(n, 2n)$.*

Ejemplo 1. *Calcula el valor de k o la probabilidad indicada:*

1. $P[\chi^2(10) \geq k] = 0{,}005 \Rightarrow k = 25{,}1881$.
2. $P[\chi^2(45) \leq k] = 0{,}005 = 1 - P[\chi^2(45) \geq k] \Rightarrow P[\chi^2(45) \geq k] = 0{,}995 \Rightarrow k = 24{,}3110$.
3. $P[\chi^2(14) \geq 21{,}06] = 0{,}1$.
4. $P[\chi^2(20) \leq 12{,}44] = 1 - P[\chi^2(20) \geq 14{,}44] = 0{,}1$.

En la tabla se muestra la probabilidad de que la χ^2 deje valores por encima (a la derecha) de un número dado.

Gráfica de la función de densidad de $\chi^2(n)$.

Proposición 3. *La función de densidad de la distribución $\chi^2(n)$ cumple las siguientes propiedades:*

- *Es asimétrica a la derecha y unimodal.*
- *Para $n = 1$, $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$, y la función de densidad es estrictamente decreciente.*

- *Para $n = 2$, $f(0) = 1/2$, y la función de densidad es estrictamente decreciente.*
- *Para $n = 3$, $f(0) = 0$, crece hasta la moda, y luego decrece.*

2.2. Distribución t de Student.

Distribución t de Student.

Definición 2. *Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribuciones $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \rightsquigarrow \chi^2(n)$. Entonces, la variable aleatoria*

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

se dice que tiene una distribución t de Student con n grados de libertad, y se denota $T \rightsquigarrow t(n)$.

Propiedades de la distribución t de Student.

Proposición 4.

i) La función de densidad de probabilidad de una distribución $t(n)$ viene dada por

$$f_T(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{n\pi}}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

ii) Sea T una variable aleatoria con distribución $t(n)$, con $n > 1$. Entonces, se tiene que existen los momentos no centrados $E[T^r]$ para $r < n$, y se verifica que:

- *Si r es impar, entonces $E[T^r] = 0$.*
- *Si r es par, entonces*

$$E[T^r] = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-r}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

En particular, para $n > 2$, existen los momentos de primer y segundo orden, y se tiene $E[T] = 0, E[T^2] = Var[T] = \dfrac{n}{n-2}$.

Observación 3. *Evaluar la función de densidad de la distribución $t(n)$ puede ser demasiado complicado, así que se dan tablas donde está tabulada para valores de n pequeños. Para valores de n grandes, se utiliza que su distribución se puede aproximar por una $\mathcal{N}(0,1)$.*

Ejemplo 2. *Calcula el valor de k o la probabilidad indicada:*

1. $P[t(26) \geq k] = 0{,}05 \Rightarrow k = 1{,}7056$.
2. $P[t(20) \leq k] = 0{,}25 = 1 - P[t(20) \geq k] = 0{,}75 \Rightarrow P[t(20) \geq k] = 0{,}75 \Rightarrow k = -0{,}687$.
3. $P[t(26) \geq k] = 0{,}9 \Rightarrow k = -1{,}315$.

4. $P[t(21) \geq 1{,}721] = 0{,}05$.
5. $P[t(11) \leq 0{,}697] = 1 - P[t(11) \geq 0{,}697] = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.
6. $P[t(8) \leq -2{,}306] = P[t(8) \geq 2{,}306] = 0{,}025$.

En la tabla se muestra la probabilidad de que la distribución $t(n)$ deje valores por encima (a la derecha) de un número dado.

Gráfica de la función de densidad de $t(n)$.

Proposición 5. *La función de densidad de la distribución $t(n)$ de Student cumple las siguientes propiedades:*

- *Es simétrica alrededor del 0 y unimodal.*
- *Para $n \to +\infty$, se aproxima a la gráfica de $\mathcal{N}(0,1)$.*
- *Tiene colas mayores que las de la normal, que van reduciéndose y aproximándose a las de la normal cuando n crece.*
- *Es más aplastada que la de la normal, es decir, es platicúrtica, y su zona central va creciendo y aproximándose a la de la normal conforme n crece.*

2.3. Distribución F de Snedecor.

Distribución F de Snedecor.

Definición 3. *Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribuciones $X \rightsquigarrow \chi^2(m)$ e $Y \rightsquigarrow \chi^2(n)$. Entonces, la variable aleatoria*

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

se dice que tiene una distribución F de Snedecor con (m,n) grados de libertad, y se denota por $F \rightsquigarrow F(m,n)$.

Propiedades de la distribución F de Snedecor.

Proposición 6.

i) La función de densidad de probabilidad de una distribución $F(m,n)$ viene dada por

$$g(f) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{m}{n}\right)^{m/2} f^{m/2-1} \left(1 + \frac{m}{n} f\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad f > 0$$

ii) Sea F una variable aleatoria con distribución $F(m,n)$. Entonces, se verifica que

$$E[F^r] = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad \text{para } 0 < r < \frac{n}{2}$$

En particular, $E[F] = \dfrac{n}{n-2}$ *si* $n > 2$, $E[F^2] = \dfrac{n^2(m+2)}{m(n-4)(n-2)}$ *si* $n > 4$, *luego se tiene que* $Var[F] = \dfrac{n^2(2m+2n-4)}{m(n-2)^2(n-4)}$ *si* $n > 4$.

iii) Se verifican las siguientes propiedades:

1. $F \rightsquigarrow F(m,n) \Leftrightarrow F^{-1} \rightsquigarrow F(n,m)$.
2. $T \rightsquigarrow t(n) \Leftrightarrow T^2 \rightsquigarrow F(1,n)$.

Demostración. Por su utilidad, solo vamos a demostrar los dos puntos del apartado *iii)*.

1. Si $F \rightsquigarrow F(m,n)$, entonces $F = \frac{X/m}{Y/n}$, donde $X \rightsquigarrow \chi^2(m), Y \rightsquigarrow \chi^2(n)$, con X e Y independientes. Así, se tiene que $F^{-1} = \frac{Y/n}{X/m}$, de nuevo el cociente de dos distribuciones χ^2 independientes, por tanto, una F de Snedecor, pero con los grados de libertad en orden inverso.
2. Si $T \rightsquigarrow t(n)$, entonces $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$, donde $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \rightsquigarrow \chi^2(n)$, con X e Y independientes. Por tanto, se tiene que $T^2 = \frac{X^2}{Y/n}$, y como ya demostramos que si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$ entonces $X^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$, se tiene que T^2 es el cociente de una $\chi^2(1)$ dividida entre su grado de libertad (1) y una $\chi^2(n)$ dividida entre su grado de libertad (n), ambas independientes, y por tanto, una $T^2 \rightsquigarrow F(1,n)$. El recíproco se demuestra siguiendo la misma cadena de pasos en sentido opuesto.

■

Observación 4. *Se dan tablas donde* $F(m,n)$ *está tabulada para valores de* m *y* n *grandes y pequeños (no se estudiará ningún resultado de convergencia de la distribución* F *de Snedecor).*

Ejemplo 3. *Calcula el valor de* k *o la probabilidad indicada:*

1. $P[F(7,3) \leq k] = 0{,}95 \Rightarrow k = 8{,}89$.
2. $P[F(8,4) \geq k] = 0{,}01 = 1 - P[F(8,4) \leq k] \Rightarrow P[F(8,4) \leq k] = 0{,}99 \Rightarrow k = 14{,}8$.
3. $P[F(2,2) \leq 19] = 0{,}95$.
4. $P[F(3,5) \geq 12{,}1] = 1 - P[F(3,5) \leq 12{,}1] = 1 - 0{,}99 = 0{,}01$.
5. $P[F(60,40) \leq k] = 0{,}05 \Rightarrow k = 0{,}05$.

En la tabla se muestra la probabilidad de que la F *deje valores por debajo (a la izquierda) de un número dado.*

Gráfica de la función de densidad de $F(m;n)$.

Proposición 7. *La función de densidad de la distribución* $F(m,n)$ *de Snedecor cumple las siguientes propiedades:*

- *Es asimétrica a la derecha y unimodal.*
- *Para* $m = 1, \lim_{f \to 0} g(x) = +\infty$, *y la función de densidad es estrictamente decreciente.*
- *Para* $m = 2, g(0) = 1$ *y la función de densidad es estrictamente decreciente.*
- *Para* $m \geq 3, g(0) = 0$, *crece hasta la moda y luego decrece.*

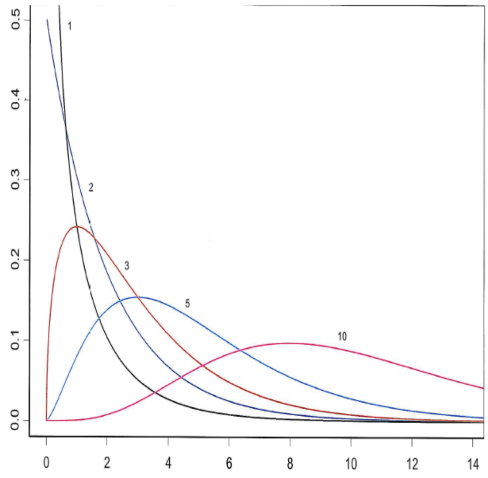

Figura 1: Funciones de densidad de casos particulares de $\chi^2(n)$.

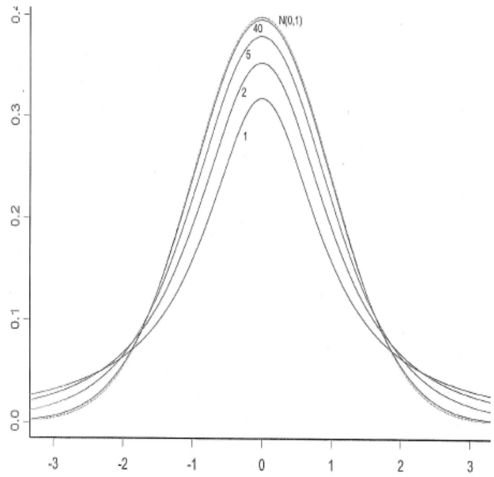

Figura 2: Funciones de densidad de casos particulares de $t(n)$.

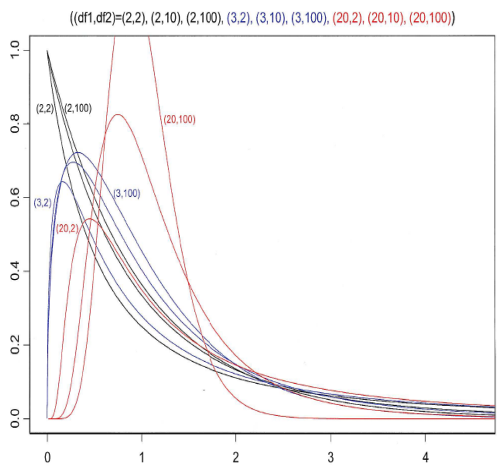

Figura 3: Funciones de densidad de casos particulares de $F(m, n)$.

3. Muestreo en poblaciones normales.

Vamos a estudiar, asociados a poblaciones que siguen una distribución normal, los estadísticos media muestral y cuasivarianza muestral y otros relacionados con ellos. En concreto, obtendremos la distribución en el muestreo de tales estadísticos, con el fin de poder hacer inferencia para una muestra tanto en una población normal unidimensional como en dos poblaciones normales unidimensionales.

3.1. Muestreo en una población normal unidimensional.

Teorema 1. *Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Entonces, $\bar{X}$ y $(X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ son independientes.*

Demostración. Recordemos que $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow M_X(t) = \exp\left(t\mu + \frac{\sigma^2}{2}t^2\right)$.

Si $\bar{X}$ y $(X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})$ fueran independientes, entonces su función generatriz de momentos conjunta sería el producto de las funciones generatrices de momentos marginales, luego debemos demostrar que se cumple la siguiente igualdad:

$$M_{(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})}(t, t_1, \ldots, t_n) \overbrace{=}^{¿?} M_{\bar{X}}(t) M_{(X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})}(t_1, \ldots, t_n)$$

Por la definición de función generatriz de momentos, se tiene que

$$M_{(\bar{X}, X_1 - \bar{X}, \ldots, X_n - \bar{X})}(t, t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{E}\left[\exp\left\{t\bar{X} + \sum_{i=1}^{N} t_i(X_i - \bar{X})\right\}\right] = (1)$$

Como $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ y $\sum_{i=1}^{n} t_i(X_i - \bar{X}) = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i - \bar{X} \sum_{i=1}^{n} t_i$, entonces:

$$(1) = \mathrm{E}\left[\exp\left\{\frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} t_i X_i - \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i\right\}\right] = \mathrm{E}\left[\exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i t}{n} + t_i X_i - X_i \bar{t}\right)\right\}\right]$$
$$= \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{X_i t}{n} + t_i X_i - X_i \bar{t}\right)\right] = \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left\{X_i\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right)\right\}\right] = (2)$$

Como todas las variables aleatorias que componen la muestra aleatoria simple son independientes (ind) e idénticamente distribuidas (i.d), se tiene entonces:

$$(2) \underbrace{=}_{\text{ind}} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[\exp\left\{X_i\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right)\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right) \underbrace{=}_{\text{i.d}} \prod_{i=1}^{n} M_X\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{\mu\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n} + t - \bar{t}\right)^2\right\} = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\mu\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{n} + t - \bar{t}\right)^2\right]\right\}$$
$$= \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \mu\frac{t}{n} + \sum_{i=1}^{n} t_i\mu - \sum_{i=1}^{n} \bar{t}\mu + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right)^2\right\} = (3)$$

Como $\sum_{i=1}^{n} t_i\mu - \sum_{i=1}^{n} \bar{t}\mu = \mu\left(\sum_{i=1}^{n} t_i - \sum_{i=1}^{n} \bar{t}\right) = \mu\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t}) = \mu \cdot 0 = 0$, entonces:

$$(3) = \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} \mu\frac{t}{n} + \frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{t}{n} + t_i - \bar{t}\right)^2\right\} = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t^2}{n} + \sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\frac{t}{n}(t_i - \bar{t})\right)\right\}$$
$$= \exp\left\{\left(\mu t + \frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{n}\right) + \left(\frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2\right)\right\} = \exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{n}\right\}\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2\right\}$$

donde $\exp\left\{\mu t + \frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{n}\right\} = M_{\bar{X}}(t)$ y $\exp\left\{\frac{\sigma^2}{2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2\right\} = M_{(X_1-\bar{X},\dots,X_n-\bar{X})}(t_1,\dots,t_n)$. ■

Corolario 1. *Bajo las mismas hipótesis del Teorema 1, se tiene:*

i) $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

ii) ***Lema de Fisher (L.F).*** $\bar{X}$ *y* S^2 *son independientes.*

iii) $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$.

iv) $\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$.

Demostración.

i) Aunque este resultado ya ha sido demostrado en el tema 1, volvemos a probarlo ahora pues, en este caso, el Teorema 1 hace evidente su demostración, ya que si calculamos la función generatriz de momentos de $\bar{X}$, se tiene:

$$M_{\bar{X}}(t) = M_{(\bar{X},X_1-\bar{X},\dots,X_n-\bar{X})}(t,0,\dots,0) = \exp\left(t\mu + \frac{\sigma^2}{2n}t^2\right)$$

que es la función generatriz de momentos de una $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

ii) Por el Teorema 1, se tiene que $\forall i = 1,\dots,n$, las diferencias $X_i - \bar{X}$ son independientes de $\bar{X}$, luego cualquier combinación lineal de esas diferencias, en particular, la cuasivarianza muestral S^2, también lo será.

iii) Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, sabemos que $\frac{X-\mu}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, y por la relación entre las distribuciones χ^2 y $\mathcal{N}(0,1)$ se tiene que $\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2 \rightsquigarrow \chi^2(1)$. Así, $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n)$.

Por otro lado, $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1} \Rightarrow \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}$.

Calculemos la función generatriz de momentos de $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$.

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2} &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}+\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})^2}{\sigma^2}+\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}+\frac{2}{\sigma^2}(\bar{X}-\mu)\underbrace{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X})}_{=0}\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\sum_{i=1}^n (\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}=\dfrac{n(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2}=\dfrac{(\bar{X}-\mu)^2}{\sigma^2/n}=\dfrac{(\bar{X}-\mu)}{\sigma/\sqrt{n}}\rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$, ya que se tiene $\bar{X}\rightsquigarrow\mathcal{N}\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$, entonces $\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2\rightsquigarrow\chi^2(1)$. Se tiene entonces:

$$\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu)^2}{\sigma^2}}_{Y_1}=\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\bar{X}^2)}{\sigma^2}+\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2=\underbrace{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}}_{Y_2}+\underbrace{\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2}_{Y_3}$$

Por tanto, $M_{Y_1}(t)=\mathrm{E}[e^{tY_1}]=\mathrm{E}[e^{t(Y_2+Y_3)}]=\mathrm{E}[e^{tY_2}e^{tY_3}]\overbrace{=}^{(1)}\mathrm{E}[e^{tY_2}]\mathrm{E}[e^{tY_3}]=M_{Y_2}(t)M_{Y_2}(t)$, donde en la igualdad (1) hemos aplicado el Lema de Fisher, que nos asegura que como $\bar{X}$ y S^2 son independientes, entonces Y_2 e Y_3 también lo son, luego la esperanza de su producto (y de cualquier producto construido a partir de transformaciones de Y_2 e Y_3) es el producto de sus esperanzas.

Como $Y_1\rightsquigarrow\chi^2(n)$ por ser la suma de n variables aleatorias normales tipificadas, y ya demostramos que $Y_3\rightsquigarrow\chi^2(1)$, entonces se tiene:

$$(1-2t)^{-n/2}=M_{Y_2}(t)\cdot(1-2t)^{-1/2}\underbrace{\Rightarrow}_{Divido}M_{Y_2}(t)=(1-2t)^{-(n-1)/2}$$

donde $(1-2t)^{-(n-1)/2}$ es la función generatriz de momentos de una $\chi^2(n-1)$. Por tanto, $Y_2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\rightsquigarrow\chi^2(n-1)$.

iv) Recordemos que si $X\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,1)$ e $Y\rightsquigarrow\chi^2(n)$ son independientes, entonces $\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}\rightsquigarrow t(n)$.

Como $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\rightsquigarrow\rightsquigarrow\mathcal{N}(0,1)$, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\rightsquigarrow\chi^2(n-1)$, y ambas son independependientes (L.F):

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{\cancel{(n-1)}S^2}{\sigma^2\cancel{(n-1)}}}}=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}:\frac{S}{\sigma}=\frac{\bar{X}-\mu}{\cancel{\sigma}/\sqrt{n}}\cdot\frac{\cancel{\sigma}}{S}=\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\rightsquigarrow t(n-1)$$

■

Así, hemos obtenido una serie de estadísticos que usaremos para hacer inferencias sobre los parámetros de una población normal unidimensional en diferentes situaciones:

- Inferencia sobre μ:

σ_0^2 conocida:	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$
σ^2 desconocida:	$\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \rightsquigarrow t(n-1)$

- Inferencia sobre σ^2:

μ_0 conocida:	$\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n)$
μ desconocida:	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$

3.2. Muestreo en dos poblaciones normales unidimensionales.

Sean $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ dos variables aleatorias. Consideramos dos muestras aleatorias simples $(X_1, \ldots, X_{n_1})$, $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ de X e Y, respectivamente. Sean $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ sus medias muestrales y sus cuasivarianzas.

Proposición 8. $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Demostración. Basta con tipificar la variable $\bar{X}-\bar{Y} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1-\mu_2, \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$. ■

Lema extendido de Fisher.

Teorema 2. *Los vectores $(\bar{X}, \bar{Y})$ y (S_1^2, S_2^2) son independientes.*

Demostración. Como X e Y son independientes, entonces:

$$M_{(\bar{X},S_1^2)}M_{(\bar{Y},S_2^2)} \underbrace{=}_{\text{L.F}} M_{\bar{X}}(t_1)M_{S_1^2}(t_3)M_{\bar{Y}}(t_2)M_{S_2^2}(t_4)$$

Por tanto:

$$M_{(\bar{X},\bar{Y},S_1^2,S_2^2)}(t_1,t_2,t_3,t_4) = M_{(\bar{X},\bar{Y})}(t_1,t_2)M_{(S_1^2,S_2^2)}(t_3,t_4)$$

luego $(\bar{X}, \bar{Y})$ y (S_1^2, S_2^2) son independientes. ■

Corolario 2.

i) $\dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2} \rightsquigarrow F(n_1,n_2)$.

ii) $\dfrac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1-1,n_2-1)$.

En particular, si $\sigma_1=\sigma_2$, *se tiene que* $\dfrac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F(n_1-1,n_2-1)$.

iii) $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2}+\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}}}\sqrt{\dfrac{n_1+n_2-2}{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1+n_2-2)$.

En particular, si $\sigma_1=\sigma_2$, *entonces* $\dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sqrt{\dfrac{n_1+n_2-2}{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1+n_2-2)$.

Demostración.

i) Como $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1)$ y $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2)$, y son independientes por el lema extendido de Fisher, entonces:

$$\frac{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2\cdot n_1}}{\dfrac{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}{\sigma_2^2\cdot n_2}} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sigma_1^2\cdot n_1}\cdot\frac{\sigma_2^2\cdot n_2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\mu_2)^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot\frac{n_2}{n_1} \rightsquigarrow F(n_1,n_2)$$

ii) Como $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1-1)$ y $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2-1)$, y son independientes por el lema extendido de Fisher, entonces:

$$\frac{\dfrac{\cancel{(n_1-1)}S_1^2}{\sigma_1^2\cdot\cancel{(n_1-1)}}}{\dfrac{\cancel{(n_2-1)}S_2^2}{\sigma_1^2\cdot\cancel{(n_2-1)}}} = \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1-1,n_2-2)$$

iii) Para construir una t de Student necesitamos una variable normal tipificada y una χ^2 que sean independientes. De la Proposición 8 obtenemos la que será el numerador de la variable aleatoria, y para el denominador necesitaremos una $\chi^2(n_1+n_2-2)$. Del punto *iii)* del Corolario 1 se deduce que:

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1-1), \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_2-1) \Rightarrow \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}+\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \rightsquigarrow \chi^2(n_1-n_2-1)$$

Ahora, dividiendo la distribución $\mathcal{N}(0,1)$ que hemos considerado entre la χ^2 recién obtenida (dividida por sus grados de libertad) y simplificando el resultado, se termina la demostración puesto que son independientes, por el lema extendido de Fisher.

■

Así, hemos obtenido los estadísticos que usaremos para hacer inferencias sobre los parámetros de dos poblaciones normales unidimensionales en los siguientes casos:

- Inferencia sobre $\mu_1 - \mu_2$ (comparación de medias):

σ_1^2, σ_2^2 conocidas:
$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ desconocidas:
$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}} \sqrt{\frac{n_1 + n_2 - 2}{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1 + n_2 - 2)$$

- Inferencia sobre $\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ (comparación de varianzas):

μ_1, μ_2 conocidas:
$$\frac{n_2}{n_1} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \frac{\sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1)^2}{\sum_{i=1}^{n_2} (Y_i - \mu_2)^2} \rightsquigarrow F(n_1, n_2)$$

μ_1, μ_2 desconocidas:
$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \rightsquigarrow F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$