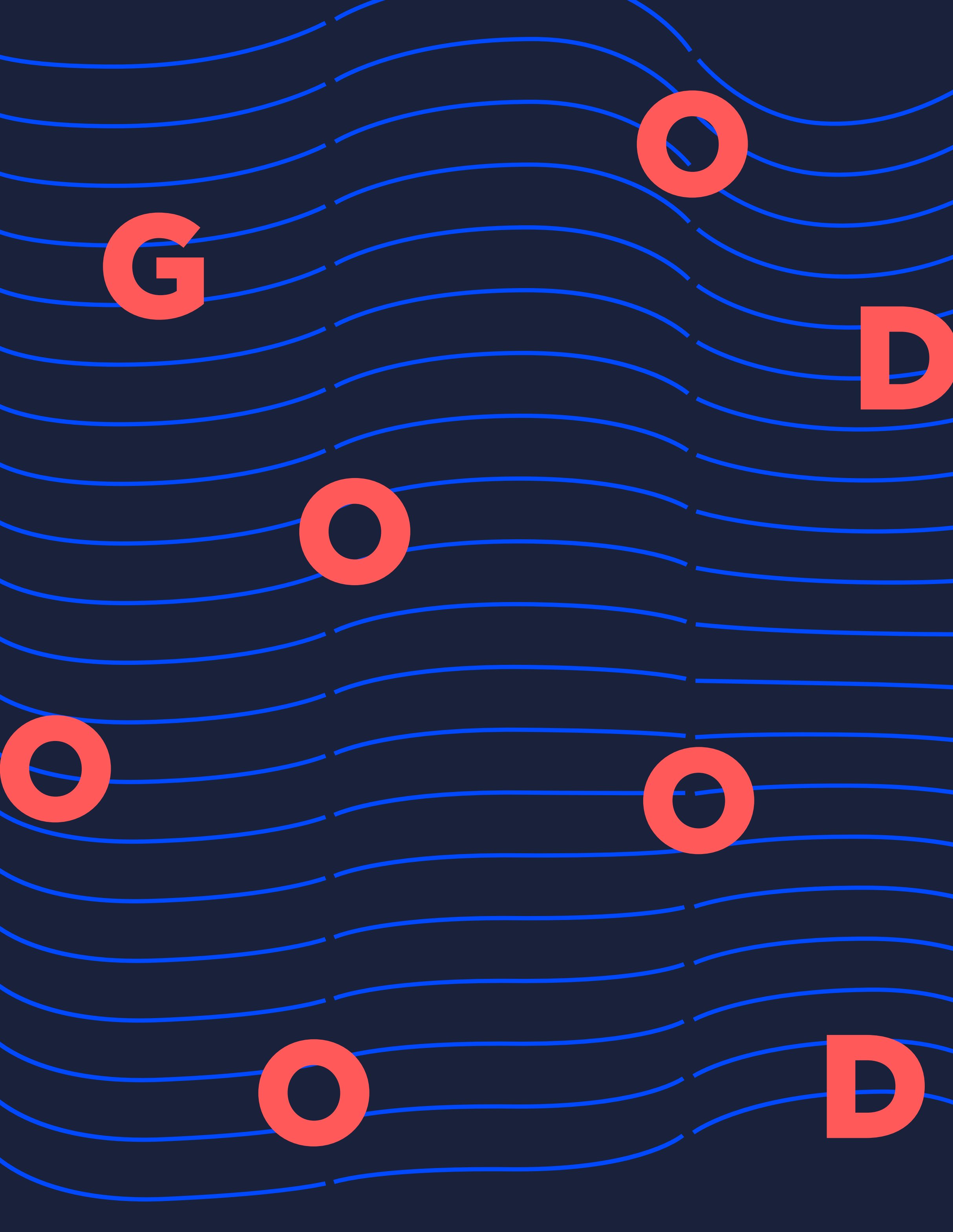
O
G
D
O
O
O
O
D

8 Problemas de contorno (ec. dif + cond cont)

$\boxed{\text{Ver si existe solución}}$

$\boxed{= r(t)}$ $\boxed{= 0}$

C y H

si H → SOL TRIV ⇒ C SOL UNICA

→ SOL NO TRIV ⇒ $\int_c^b r(t) \cdot y(t)\,dt = 0$

⇒ C SOL

Si es Homogeneo → Hallo sol

si es completo → MIRO si EXISTEN SOLUCIONES

si $y(a) \neq 0$ o/y $y(b) = 0$ → Transformación $w(t) = \dots$ para que $y(a) = 0$ ó $y(b) = 0$

si es de 2º orden → Forma autoadjunta

# 9 Probleme de Sturm-Liouville

Tenemos un problema $\boxed{y'' + \lambda y' = 0}$

Ej:

Buscar valores propios $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ que nos den sol $y(t)$ no triviales, también el espacio propio

Para hallar los $B_n$, $\int_a^b \varphi_n \, dt = 1$

Formas de resolver ec. diff
saco A y B con las cond. iniciales

$$\boxed{ALGO \cdot \frac{d}{dt}(ALGO) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(ALGO)^2}$$

Porque $\nabla_z F^*(t,y,z) = \frac{z}{|z|}$

donde $F^*(t,y,z) = |z| + \cancel{x}(t)(|y|^2-1)$

P S-V cuando el det(sistema) = 0

$\Rightarrow$ hay sol no trivial

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

Serie de Fourier de $f$.

$(f \in L^1(-\pi,\pi))$.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$$

# Ecuación de reacción química

$$\underbrace{A + 3C}_{\text{reactivos}} \longrightarrow \underbrace{B + C}_{\text{productos}}$$

## Ecuaciones

$$\frac{d}{dt}\, a, b, c$$

## Ley de conservación

$$\frac{d}{dt}(a+b) = 0 \quad / \quad \frac{d}{dt}(b+2c) = 0$$

① $\partial_y F(t,y,z) = \frac{d}{dt} \partial_z F(t,y,z)$

usamos condiciones $\rightarrow A$, $\rightarrow B$

② Igual que ① pero para $\mathbb{R}^d$

③ Cuando además de las cond. tenemos restricciones alg o integrales, hay que igualarlas a 0 y,

$$F^*(t,y,z) = F(t,y,z) + \sum \lambda_i(t)\, \varphi_i(t)$$

y Ec E–L

④ Extremos libres, para calcular A y B

$\partial_z F(a, y(a), y'(a)) = 0$ derecho libre

$\partial_z F(b, y(b), y'(b)) = 0$ izq.

⑤ $\exists$ min $\Rightarrow$ convex

$\mathbb{R}$ $f'$ creciente

$\mathbb{R}^d$ Hess def pos

$F(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta F(x) + (1-\theta) F(y)$

⑥ Ver si está $py'' + qy = r$

si no $\Rightarrow$ Forma autoadjunta

$p(t) = C \cdot e^{\int a(t)}$

(H) : $\boxed{C}$

(H) $\rightarrow$ solo trivial $\rightarrow \boxed{C}$ sol única

$\rightarrow$ no trivial $\rightarrow \int_a^b r(t) y(t)\, dx = 0$

$\Rightarrow$ ⑥ sol.

⑥ si cond contorno $\neq 0$

creamos $w(t)$ que las cumple y

$$\tilde{y}(t) = y(t) - w(t)$$

⑦ sturm - liouville

$\Rightarrow$ igual que contorno pero en función de un $\lambda$

$\Rightarrow$ valores propios $\lambda_i$

$\Rightarrow$ función $y(t)$ asociada

$\Rightarrow$ espacio propio

⑧ Ec recciones químicas

# EXAMEN FINAL

1. Calcular extremos de un Funcional, mínimo, existencia de mínimo

2. Ecuación de reacciones químicas
   - Ecuaciones
   - Conservación
   - Conservación positiva
   - Existencia y unicidad
   - Equilibrio

# Calcular extremos

Cuando $y \to \mathbb{R}$

- Euler Lagrange → cond iniciales

$$F(t,y,z) \longrightarrow \partial_y F(t,y,z) = \frac{d}{dt}\partial_z F(t,y,z)$$

Cuando $y \to \mathbb{R}^d$

- Euler Lagrange → cond iniciales

$$F(t,y,z) \longrightarrow \nabla_y F(t,y,z) = \frac{d}{dt}\nabla_z F(t,y,z)$$

Cuando $y \to \mathbb{R}^d$ + rest

- Multiplicadores de Lagrange → cond iniciales + restricción alg | integral

$$\varphi_i(y(t)) = 0$$

$$F^*(t,y,z) = F(t,y,z) + \sum \lambda_i(t)\,\varphi_i(t)$$

Ec - Euler Lagrange → calculo $\lambda_i$

- Extremos libres → alguna cond inicial no está

Dcha → $\nabla_z F(t, y(b), y'(b)) = 0$

Izq → $\nabla_z F(t, y(a), y'(a)) = 0$

- Convexidad / Estricta

$$F(\theta y + (1-\theta) w) \le \theta F(y) + (1-\theta) F(w)$$

· $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$ — convexa ⟺ $f'' \geq 0$; est convexa ⟸ $f'' > 0$

· $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ — convexa ⟺ $f'$ creciente; est ⟺ $f'$ est. creciente

· $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$

convexa ⟺ Hess(f) → semi def pos

est ⟸ Hess(f) → def pos

- Condición suficiente de extremo
  - Convexa
  - $\partial_v \mathcal{F}(y_*)$ esté definida $\to$ $\bigcirc$

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ alcanza mínimo en $y_*$

$t \in \mathbb{R}$
$\Downarrow$
$x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

- Divergencia

$$\mathcal{F} = \int_\Omega F(x, y(x), \nabla y(x))\, dx \qquad F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

$$\text{Ec-E-L} \to \partial_y F(x, y(x), \nabla y(x)) = \mathrm{div}_x \left[\nabla_z F(x, y(x), \nabla y(x))\right]$$

$$\mathrm{div}\, X(x) = \partial_{x_1} X_1 + \partial_{x_2} X_2 + \cdots + \partial_{x_d} X_d$$

- Problema de contorno:

$$p\, y'(t) + q\, y(t) = r \quad + \text{ cond de contorno}$$

$$\left.\begin{array}{l} \alpha y(a) + \beta y'(a) = 0 \\ \partial y(b) + \gamma y'(b) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(a) = y(b) \\ y'(a) = y'(b) \end{array}\right\}$$

$$a\, y''(t) + b\, y'(t) + c\, y(t) = d$$

$$\Downarrow$$

$$(p y')' + q y' = r \qquad \text{(forma autoadjunta)}$$

$$\boxed{p = c \cdot e^{A(t)}} \qquad \boxed{\frac{q}{p} = \frac{c}{a}} \quad \boxed{\frac{r}{p} = \frac{d}{a}}$$

$$\begin{cases} p y'' + q y = r & \text{(C)} \\ + \text{ cond contorno} \end{cases} \qquad \begin{cases} p y'' + q y = 0 & \text{(H)} \\ + \text{ cond contorno} \end{cases}$$

- si (H) no tiene soluciones no triviales
  $\Rightarrow$ (C) tiene solución única
  (o si $p > 0$, $q < 0$)

- si (H) tiene soluciones no triviales
  $\Rightarrow$ (C) tiene sol $\Longleftrightarrow$ $\int_a^b y(t) r(t)\, dt = 0$
  $\forall y$ sol de (H)

si $y(a) \neq 0$ ó $y(b) \neq 0$

$w(t) \to$ que cumpla $w(a) = y(a)$, $w(b) = y(b)$

$\tilde{y}(t) = y(t) - w(t) \Rightarrow \tilde{y}(a) = \tilde{y}(b) = 0$

- Problemas de Sturm-Liouville

$(py')' + qy + \lambda w y = 0$ + cond contorno

¿Para que valores de $\lambda$ hay sol. no triviales?

valores propios $\to \lambda$

funciones propias (asociadas a $\lambda$) $\to$ {sol. no trivial}

espacio propio (asociado a $\lambda$) $\to$ {sol del problema} $\to$ {func propias} $\cup$ {0}

Una vez sacamos las funciones propias, calculamos una base ortonormal,

$\int_a^b \varphi_n^2 = 1 \to$ saco $A_n$, $B_n$, y creo una base ortonormal de $L^2([a,b])$

- Cuando tenemos un funcional y queremos calcular su mínimo, nos sale un SL, entonces resolvemos como siempre

$\lambda_n = \ldots$

$\varphi_n = A \ldots B$ sabemos que para calcular $A$ y $B$ sabemos que

$$\int_a^b \varphi_n^2 = 1$$

sabemos que el mínimo de $F$ se alcanza en $\lambda_1$ está en $\pm \varphi_1$ y

# Ec. Reacciones Químicas

$$\underbrace{A + B}_{\text{reactivos}} \longrightarrow \underbrace{C}_{\text{productos}}$$

**Ejemplos:**

cte. proporcionalidad

$$A + B \xrightarrow{k} C \qquad \frac{d}{dt} a = -kab \qquad \frac{d}{dt} b = -kab \qquad \frac{d}{dt} c = kab$$

$$2A \xrightarrow{k} B \qquad \frac{d}{dt} a = -\underbrace{2}_{\text{cuanto gano o pierdo}}\underbrace{ka^2}_{\text{velocidad de la reacción}} \qquad \frac{d}{dt} = ka^2$$

$$A \xrightarrow{k} B + C \qquad \frac{d}{dt} a = -ka \qquad \frac{d}{dt} b = ka \qquad \frac{d}{dt} c = ka$$

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C \qquad \frac{d}{dt} a = -k_1 a \qquad \frac{d}{dt} b = k_1 a - k_2 b$$

$$\frac{d}{dt} c = k_2 b$$

$$2A + B \xrightarrow{k} C \qquad \frac{d}{dt} a = -2ka^2 b \qquad \frac{d}{dt} b = -ka^2 b$$

$$\frac{d}{dt} c = ka^2 b$$

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} B + C \qquad \frac{d}{dt} a = -k_1 a + k_2 bc$$

$$\frac{d}{dt} b = \frac{d}{dt} c = k_1 a - k_2 bc$$

$$2A + B \xrightarrow{k} 3A \qquad \frac{d}{dt} a = -2k a^2 b + 3k a^2 b = k a^2 b$$

$$\frac{d}{dt} b = -k a^2 b$$

$$S + E \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C \xrightarrow{k_3} P + E$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} s &= -k_1 se + k_2 \cdot c \\ \frac{d}{dt} e &= -k_1 se + k_2 \cdot c + k_3 c \\ \frac{d}{dt} c &= -k_2 c + k_1 se - k_3 c \\ \frac{d}{dt} p &= k_3 c \end{aligned}\right\}$$

- Conservación (si suma tiene que dar 0)

$A \xrightarrow{k} B$ $\quad \frac{d}{dt} a = -ka \qquad \frac{d}{dt} b = ka$

$$\frac{d}{dt}(a+b) = 0$$

$A + B \xrightarrow{k} C$ $\quad \frac{d}{dt} a = -kab \qquad \frac{d}{dt} b = -kab \qquad \frac{d}{dt} c = kab$

$$\frac{d}{dt}(a+b+2c) = 0$$

$2A \xrightarrow{k} B$ $\quad \frac{d}{dt} a = -2ka^2 \qquad \frac{d}{dt} = ka^2$

$$\frac{d}{dt}(a+2b) = 0$$

$A \xrightarrow{k} B + C$ $\quad \frac{d}{dt} a = -ka \qquad \frac{d}{dt} b = ka \qquad \frac{d}{dt} c = ka$

$$\frac{d}{dt}(2a+b+c) = 0$$

$A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} C + D$

$$\frac{d}{dt} a = -k_1 ab + k_2 cd$$

$$\frac{d}{dt} b = -k_1 ab + k_2 cd$$

$$\frac{d}{dt} c = k_1 ab - k_2 cd$$

$$\frac{d}{dt} d = k_1 ab - k_2 cd$$

$$\frac{d}{dt}(a+b+c+d) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(a+c) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(b+d) = 0$$

- Equilibrio:

$A \xrightarrow{k} B \qquad \frac{d}{dt} a = -ka \qquad \frac{d}{dt} b = ka$

Eq: $0 = ka \Rightarrow (a = 0,\ b = cte)$

$a(t) + b(t) = a_0 + b_0$, espero que $(a(t), b(t)) \to (0, b_\infty)$

tq $a_0 + b_0 = b_\infty$

$A + B \xrightarrow{k} C \qquad \frac{d}{dt} a = -kab$

$\frac{d}{dt} b = -kab \qquad \frac{d}{dt} c = kab$

Eq: $0 = kab$ $\begin{cases} a = 0, & b = b_\infty, \quad c = c_\infty \\ a = a_\infty, & b = 0, \quad c = c_\infty \end{cases}$

Espero que $(a(t), b(t), c(t)) \longrightarrow (a_\infty, b_\infty, c_\infty)$

$$\begin{cases} a_0 + b_0 + 2c_0 = a_\infty + b_\infty + 2c_\infty \\ a_0 + c_0 = a_\infty + c_\infty \\ b_0 + c_0 = b_\infty + c_\infty \end{cases}$$

$\boxed{a_\infty = 0} \Rightarrow \boxed{c_\infty = a_0 + c_0} \quad \boxed{b_\infty = -a_0 + b_0}$

$(a(t), b(t), c(t)) \longrightarrow (0, -a_0 + b_0, a_0 + c_0)$

$\boxed{b_\infty = 0} \Rightarrow \boxed{c_\infty = b_0 + c_0} \quad \boxed{a_\infty = a_0 - b_0}$

- Conservación positiva + existencia y unicidad

- Ecuación de ondas $\partial_t u = \partial_x u$
    - Soluciones en $\mathbb{R}$ (Formule de d'Alembert)
    - Método de variables separadas

- Ec Laplace / Poisson

- Ec calor

$$A \underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} B + C$$

ecuaciones

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} a = -k_1 a + k_2 bc \\[2mm] \dfrac{d}{dt} b = k_1 a - k_2 bc \\[2mm] \dfrac{d}{dt} c = k_1 a - k_2 bc \end{cases}$$

Suponemos

$$\begin{cases} a_0 \geq 0 \\ b_0 \geq 0 \\ c_0 \geq 0 \end{cases}$$

conservación

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(2a+b+c) = 0 \\[2mm] \dfrac{d}{dt}(a+c) = 0 \\[2mm] \dfrac{d}{dt}(a+c) = 0 \end{cases}$$

conservación positividad

Tenemos que comprobar que si $a = 0 \Rightarrow a' \geq 0$

$$\frac{d}{dt} a = k_2 bc \geq 0$$

si $b = 0 \Rightarrow b' \geq 0$

$$\frac{d}{dt} b = k_1 a \geq 0$$

si $c = 0 \Rightarrow c' \geq 0$

$$\frac{d}{dt} c = k_1 a \geq 0$$

Existencia global en $(0, +\infty)$! ?

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -u_1 a + u_2 bc \\ 0 &= u_1 a - u_2 bc \\ 0 &= u_1 a - u_2 bc \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a_\infty = \frac{u_2}{u_1} b_\infty c_\infty}$$

Conservación

$$\left.\begin{aligned} a_\infty &= \frac{u_2}{u_1} b_\infty c_\infty \\ a_\infty + b_\infty &= a_0 + b_0 \\ a_\infty + c_\infty &= a_0 + c_0 \end{aligned}\right\}$$