## ALGEBRA III (Doble grado Informática-Matemáticas) Prueba parcial (31/10/2019)

## **EJERCICIOS**

- (1) [2.5 puntos] Considerar el cuerpo de números  $E = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$ .
  - (a) Determinar el grado de la extensión  $E/\mathbb{Q}$  y una base de ella. Discutir también su normalidad.
  - (b) Describe los elementos del grupo  $G = G(E/\mathbb{Q})$  y determina sus respectivos órdenes.
  - (c) Prueba que  $G \cong D_4 = \langle r, s \mid r^4 = 1 = s^2, sr = r^3 s \rangle$ .
  - (d) Determina a que subgrupos de G corresponden, por la Conexión de Galois, los subcuerpos  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2})$  y  $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2})$ .
  - (c) Determina a que subcuerpos de E corresponden, por la conexión de Galois, los subgrupos cíclicos de G.
- (2) [2.5 puntos] Sea  $z = z_{10}$ .
  - (a) Determina el polinomio  $\Phi_{10}$ , el grado de la extensión  $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$  y muestra una base de la misma.
  - (b) Calcula, expresando el resultado en función la base, la suma  $(z+z^9)$  +
  - $(z^3+z^7)$  y el producto  $(z+z^9)(z^3+z^7)$ . (c) Argumenta que  $z+z^9$  y  $z^3+z^7$  son las raíces del polinomio  $x^2-x-1$ y entonces que  $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$  y que  $\cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ . (d) Describe el grupo  $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$  y el retículo de sus subgrupos.

  - (e) Describe el retículo de subcuerpos de  $\mathbb{Q}(z)$ .

Tiempo: 1 hora y 45 minutos.

$$\frac{2.a}{\Phi_{1}\Phi_{2}\Phi_{5}} = \frac{X^{10}-1}{X^{10}(X^{11})} = X^{1}-X^{2}+X^{2}-X+1$$

$$\frac{1}{\Phi_{1}\Phi_{2}\Phi_{5}} = \frac{X^{10}-1}{X^{10}(X^{11})} = X^{1}-X^{2}+X^{2}-X+1$$

$$\frac{1}{\Phi_{1}\Phi_{2}\Phi_{5}} = \frac{1}{\Phi_{0}} = \frac{1}{\Phi_{0$$

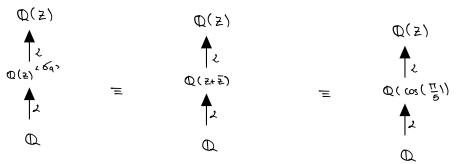
(c) En general, el polinomio mónico de grado 2 que tiene como raíces  $\alpha$  y  $\beta$  es  $(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta.$ 

(d) 
$$G = G(Q(t)/Q) \approx Z_{10} = \frac{1}{3} I_{1}3_{1}7_{1}, 9 \Rightarrow G(Q(t)/Q) = \frac{1}{3} G(Q(t)/Q) \Rightarrow Q(z) \rightarrow Q(z)$$

$$Q = Inmersiones tal que G(z) = Z', i = 1,3,7,9$$

4617

(e)



Ejercicio 7. Sea n > 2 y  $z = z_n$  la raíz n-ésima primitiva de la unidad.

- (1) Observando que  $(z+\bar{z})=2\cos\frac{2\pi}{n}$ , probar que z y  $\bar{z}$  son las raíces del polinomio  $x^2-2\cos\frac{2\pi}{n}x+1\in\mathbb{R}[x]$ .
- (2) Argumentar que  $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \leq \mathbb{Q}(z)$ , pero  $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \neq \mathbb{Q}(z)$ .
- $(3)\ \operatorname{Probar}\ \operatorname{que}\ \operatorname{Irr}(z,\mathbb{Q}(\cos\tfrac{2\pi}{n})) = x^2 2\cos\tfrac{2\pi}{n}\,x + 1\ y\ \operatorname{que}\ [\mathbb{Q}(z):\mathbb{Q}(\cos\tfrac{2\pi}{n})] = 2.$
- (4) Probar que  $[\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{n}):\mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$  y que el polinomio  $Irr(\cos \frac{2\pi}{n},\mathbb{Q})$  es de grado  $\varphi(n)/2$ .

ÎNDICACIÓN DE SOLUCIÓN: (1) Puesto que  $z^{-1}=\overline{z}$ , tenemos las igualdades  $z\overline{z}=1$  y  $z+\overline{z}=2\cos(\frac{2\pi}{n})$ , de donde el z y  $\overline{z}$  son las raíces raíz del polinomio  $x^2-2\cos(\frac{2\pi}{n})x+1$ .

- $(2)\cos(\frac{2\pi}{n})=\frac{1}{2}(z+\bar{z})=\frac{1}{2}(z+z^{n-1})\in\mathbb{Q}(z).$  Los cuerpos son distintos pues  $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})\leq\mathbb{R}$  y  $z\notin\mathbb{R}$  al ser  $n\geq3.$
- (4) Se deduce de los apartados anteriores, teniendo en cuenta la torre