ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 1

1. Consideramos la ecuación $\dot{x} = X(t,x)$ donde $X \in C(D, \mathbb{R}^d)$ y $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ es un abierto conexo. Se supone que $x : I \to \mathbb{R}^d$ es una solución.

a) Demuestra que $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$

b) Se supone $X \in C^k(D, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$. Demuestra que $x \in C^{k+1}(I, \mathbb{R}^d)$.

c) Se supone ahora que X es continuo pero no C^1. ¿Puede ocurrir que $x(t)$ sea de clase C^2?

2. Se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x,y) = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

donde $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto dado. Se supone además que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

a) Utiliza el teorema de la función implícita para justificar la existencia de una solución $y \in C^1(I)$ definida en algún intervalo I que contiene a x_0 en su interior.

b) Deduce la misma conclusión a partir del teorema de Cauchy-Peano [Sugerencia: derivación implícita]

c) Da un ejemplo que demuestre la imposibilidad de obtener un resultado global que afirmara que la solución está definida en todo $\mathbb{R}$.

(3) Enuncia y demuestra un resultado de existencia para el problema de Cauchy de orden superior ($d \geq 2$)

$$x^{(d)} = f(t, x, x', \dots, x^{(d-1)}), \quad x(t_0) = x_0, \; x'(t_0) = x_{0,1}, \dots, \; x^{(d-1)}(t_0) = x_{0,d-1}.$$

[Sugerencia: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, $\dots$, $x_d = x^{(d-1)}$ reduce a primer orden]

(4) Dada $f \in C(\mathbb{R}^2)$ consideramos la ecuación integral

$$x(t) = 3e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)} f(s, x(s))\, ds$$

y buscamos soluciones continuas. Encuentra un problema de valores iniciales que sea equivalente.

(5) Discute en cada caso la validez de la afirmación:

(i) $\dot{x} = \dfrac{x^3}{1+x^6} + t$, $x(0) = 0$ admite solución definida en $]-1,1[$

(ii) $\ddot{x} + t x^2 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ admite solución definida en $\mathbb{R}$

(iii) $\ddot{x} + x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ admite solución definida en $\mathbb{R}$

(iv) $\dot{x} = t^2 + x^2$, $x(0) = 0$, admite una solución definida en algún intervalo $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ y además esta solución es estrictamente creciente

(6) Encuentra una solución de la ecuación integral

$$x(t) = 1 + \int_0^t (t-s)\, x(s)\, ds$$

con $x \in C(\mathbb{R})$.