José Cañizo

CANIZO@UGR.ES

Evaluación:

1ª prueba clase: 3 (A)
2ª prueba clase: 1'5 (B)
Ejercicios: 0'5
Examen final: vale 9'5 − (A) − (B)
(pero máximo 7).

Cálculo variaciones / optimización

C.V.: optimización en "dimensión infinita".
(En espacios de funciones).

* Física
* Teoría de control.
  (Industria, economía).

Ejemplo:

Tenemos un vehículo, queremos recorrer distancia L en tiempo T.

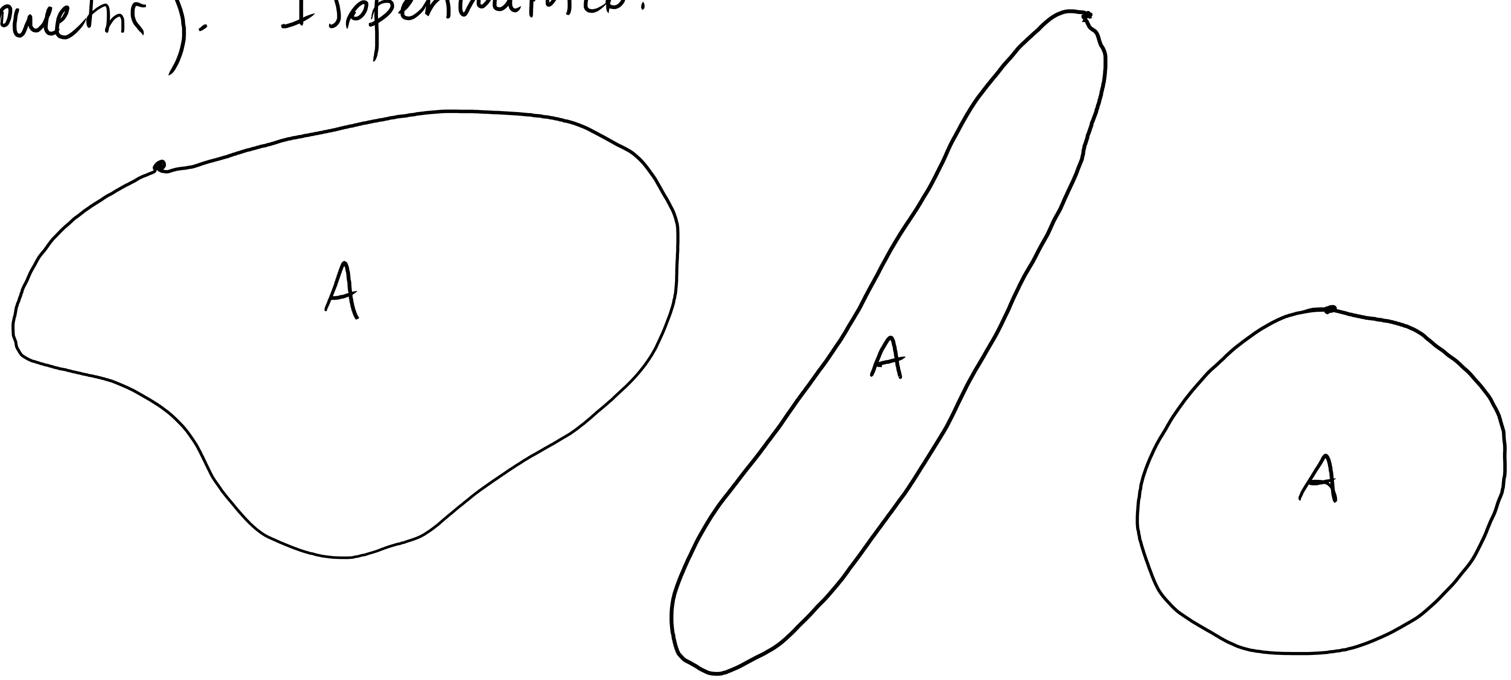
Gasto: depende de la aceleración: $y = y(t)$ posición del vehículo.

G: gasto total: $\displaystyle\int_0^T |y''(t)|^2 dt$

¿Con qué aceleración conseguimos gasto menor?

Ejemplos:

(Geometría). Isoperimétrico:



Def: $f : A \to \mathbb{R}$ A conjunto cualquiera.

f alcanza su máximo en $y_* \in A$ cuando

$$f(y_*) \geq f(y) \quad \forall\, y \in A.$$

(f tiene un máximo en y_*)

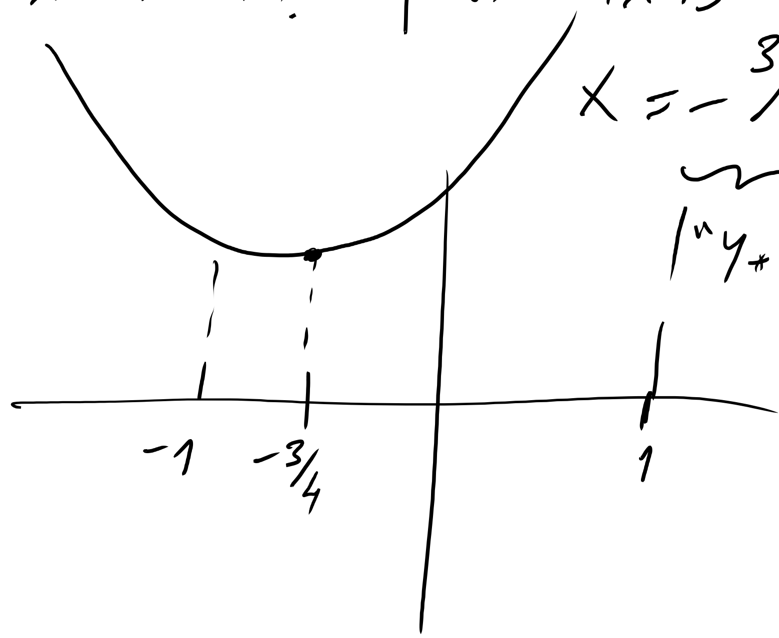
$y_* \equiv$ "punto donde alcanza el máximo"

$f(y_*) \equiv$ "valor máximo de f".

Ej: $\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \\ A = \mathbb{R} \end{array}\right\}$

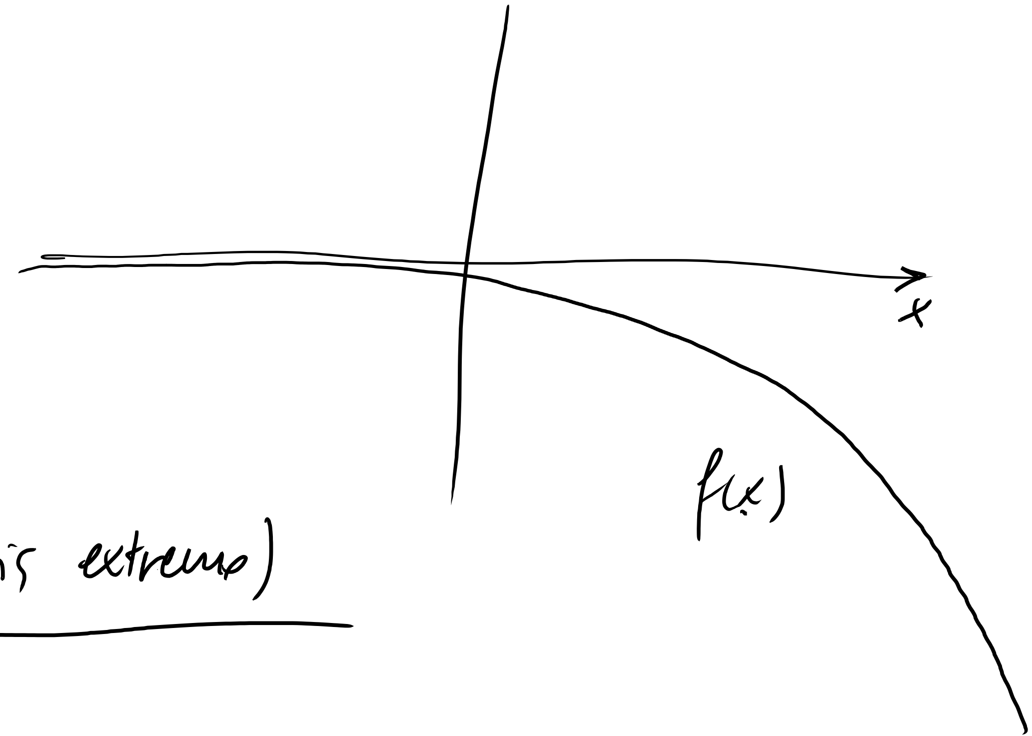
* mínimo? $f'(x) = 4x + 3 = 0$

$\underbrace{x = -3/4}_{\text{"}y_*\text{"}}$



$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^2 + 3x + 1 \\ A = [-1, 1]. \end{array}\right\}$

Ej: $\left.\begin{array}{l} f(x) = -e^x \\ A = \mathbb{R} \end{array}\right\}$



Teorema (Condición necesaria extremo)

$D \subseteq \mathbb{R}^d$, D abierto.

$f : D \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

Si f alcanza un extremo en $y_* \in D$, entonces

$$\partial_v f(y_*) = 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^d.$$

Def.: $\partial_v f(y) \equiv$ derivada direccional de f en la dirección de v

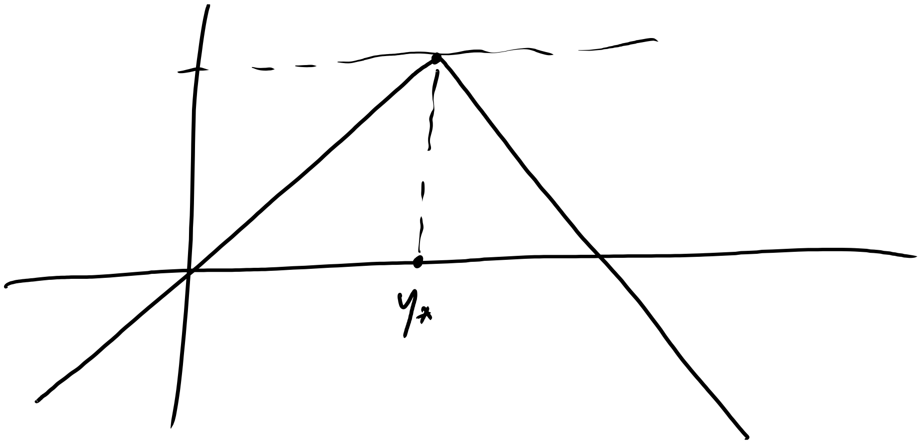
$$\partial_v f(y) := \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \big(f(y+\varepsilon v)\big) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(y+\varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon}$$

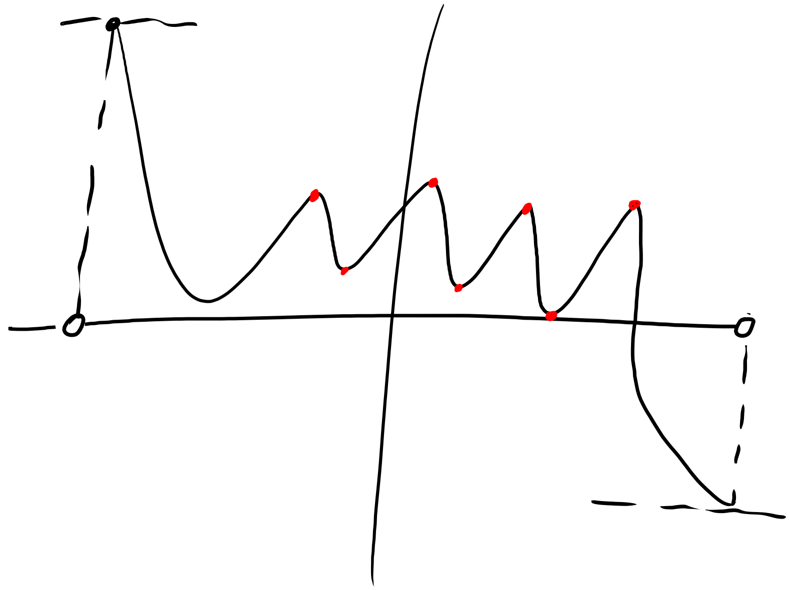
cuando este límite existe

Caso particular: si $f = f(x_1, \dots, x_d)$

$$\partial_{x_i} f(y) \equiv \partial_i f(y) = \partial_{e_i} f(y) \quad \text{donde } e_i \equiv (0, 0, \dots \overset{i)}{1}, 0, \dots, 0).$$

Ejemplos:





Ejemplos:

$f(x) = x^2 + 3x + 4$

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 4$ } no está acotada
$D = \mathbb{R}$

$f(x) = x^7 + 9x^8 - 3x^2 + 5x + 3$ }
$D = [-100, 100]$.

$$\boxed{\begin{aligned} f'(x) &= 7x^6 + 72x^7 - 6x + 5 \\ &= 0. \end{aligned}}$$

Teorema (condición suficiente de extremo)

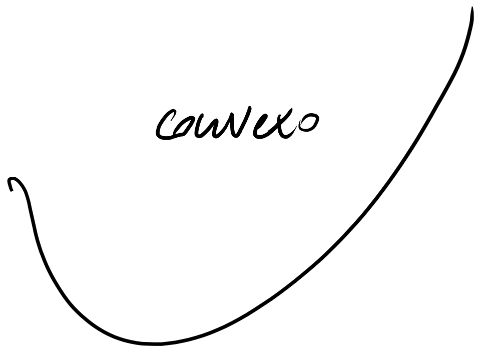
$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

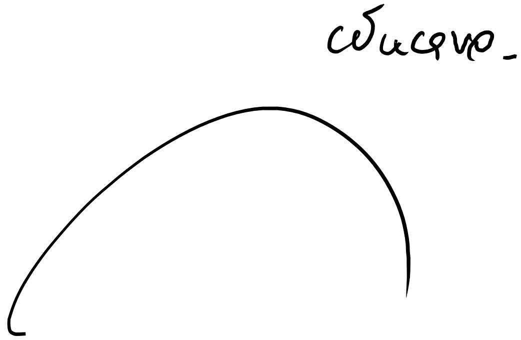
f es convexa.

Si $y_* \in D$ es tal que

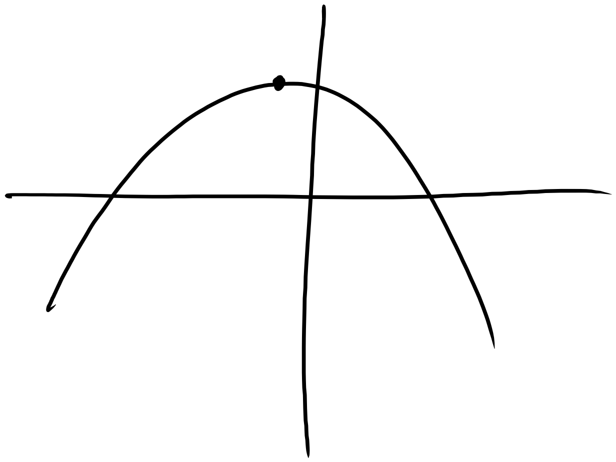
$$\partial_v f(y_*) = 0 \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^d$$

entonces f alcanza su mínimo en y_*.





Ejemplos:



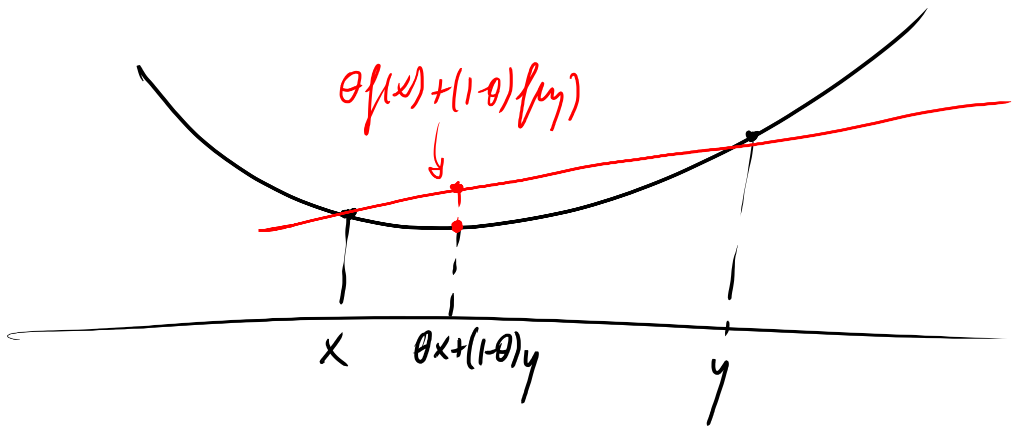
Definición (convexidad)

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ conjunto cualquiera.

f es convexa si:

$$f(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta f(x) + (1-\theta) f(y)$$

siempre que $\theta \in [0,1]$, $x \in D$, $y \in D$, $\theta x + (1-\theta) y \in D$.

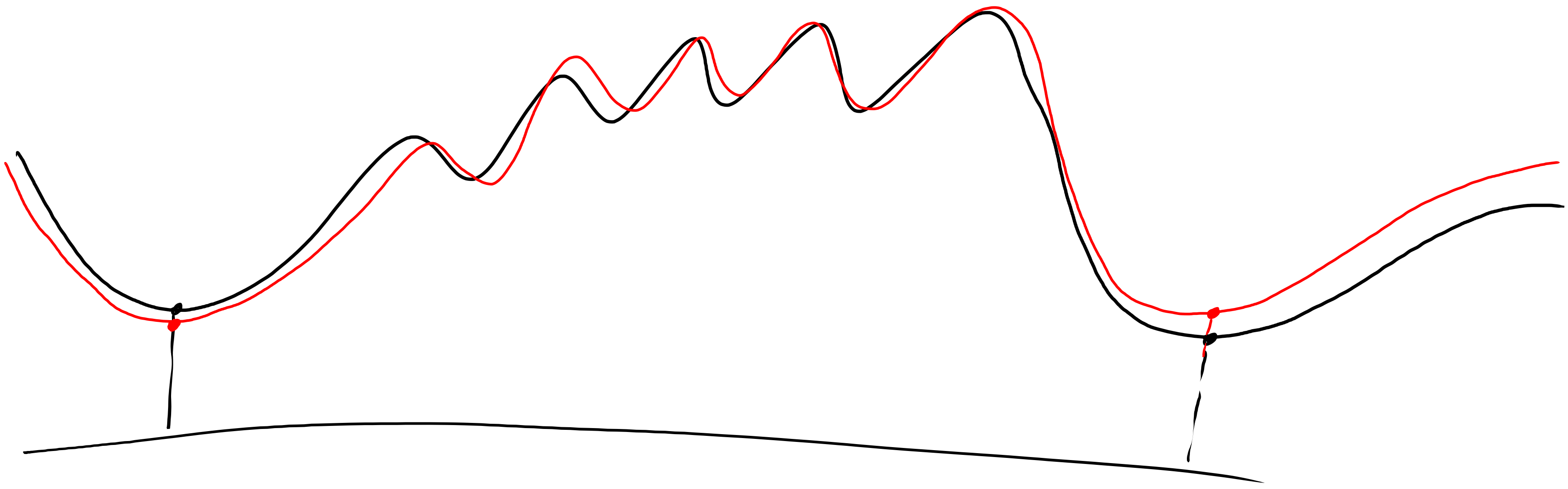


Definición:

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^d$ cualquiera.

Un punto crítico de f es $y \in D$ tal que

$$\partial_v f(y) = 0 \quad \text{siempre que} \quad \exists\, \partial_v f(y).$$



23 Febrero

Def. (Variación de una función)

$D \subseteq X$, X esp. vectorial. $F : D \to \mathbb{R}$.

Queremos definir $\delta_v F(y)$, para $v \in X$, $y \in D$.

Decimos que existe cuando:

* $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que $\underbrace{y + h \cdot v} \in D \ \forall\ h \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.
* $\exists$ el siguiente límite:

$$\boxed{\underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{F(y+\varepsilon v) - F(y)}{\varepsilon} = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(y+\varepsilon v)}}$$

En ese caso:

$$\delta_v F(y) :=$$

Def. (Punto crítico) $D \subseteq X$, X e.v., $F : D \to \mathbb{R}$.

$y \in D$ es un punto crítico de F cuando

$$\delta_v F(y) = 0 \quad \forall\ v \in X, \text{ para el que exista } \delta_v F(y).$$

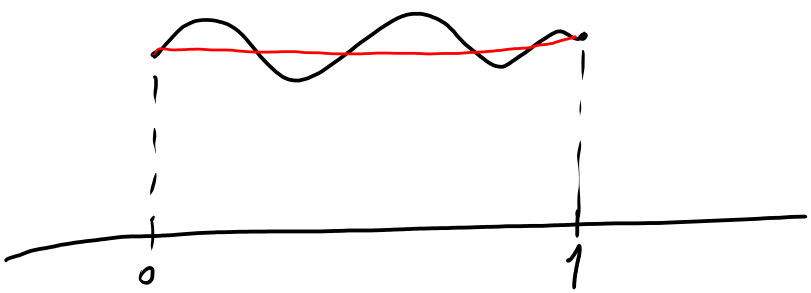
Teorema (condición necesaria)

$D \subseteq X$, X esp. vectorial. $F : D \to \mathbb{R}$.

Un extremo de F es siempre un punto crítico.

Ejemplo.

$$X = \{ y : [0,1] \to \mathbb{R} \,/\, y \in \mathcal{C}^1[0,1] \}$$



$$D = \{ y \in X \,/\, y(0) = y(1) = 1 \}$$

$$F(y) \equiv \text{longitud de } y = \int_0^1 |\alpha'(t)|\, dt = \boxed{\int_0^1 \sqrt{1 + |y'(t)|^2}\, dt}$$

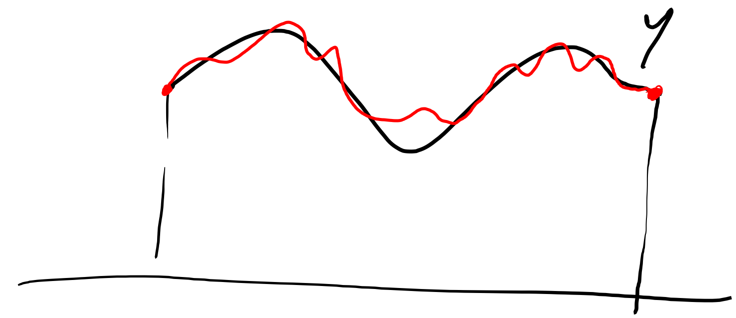
$\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (t, y(t))$$

$$\alpha'(t) = (1, y'(t))$$

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{1 + |y'(t)|^2}$$

Puntos críticos de F: $\quad y \in D$, $v \in \mathcal{C}^1[0,1]$ con $v(0)=v(1)=0$.



$$\delta_v F(y) =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} F(y+\varepsilon v) =$$

$$= \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_0^1 \sqrt{1+(y'(t)+\varepsilon v'(t))^2}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{1+(y'(t)+\varepsilon v'(t))^2}} \, 2\cdot (y'(t)+\varepsilon v'(t)) \cdot v'(t)\, dt \Bigg|_{\varepsilon=0}.$$

$$= \int_0^1 \frac{y'(t)\, v'(t)}{\sqrt{1+(y'(t))^2}}\, dt$$

Puntos críticos de F: funciones $y \in D$ que cumplen

$$\int_0^1 \frac{y'(t)\,v'(t)}{\sqrt{1+(y'(t))^2}}\,dt = 0 \quad \forall \quad v \in \mathcal{C}^1[0,1]$$
con $v(0)=v(1)=0$.

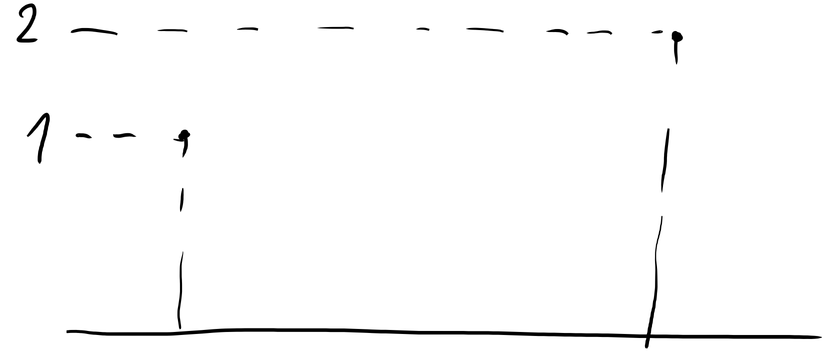
---

24 Febrero

$$F(y) = \int_0^1 \sqrt{1+|y'(t)|^2}\,dt$$

$X = \mathcal{C}^1[0,1]$.

$D = \{ y \in X \,/\, y(0) = y(1) = 1 \}$



F = la misma

$X = \mathcal{C}^1[0,1]$

$D = \{ y \in X \,/\, y(0)=1,\ y(1)=2 \}$

Ecuaciones Euler-Lagrange

Consideramos funciones (funcionales) del tipo:

$$\mathcal{F}(y) := \int_a^b F(t,y(t),y'(t))\,dt \qquad \begin{array}{c} a<b \in \mathbb{R} \\ F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R} \\ F\in\mathcal{C}^2 \end{array}$$

$$\mathfrak{X} = \mathcal{C}^2[a,b]$$

$$D = \{y\in\mathfrak{X} \,/\, y(a)=y_a,\ y(b)=y_b\}$$

¿Podemos encontrar / caracterizar los puntos críticos de $\mathcal{F}$?

Direcciones admisibles (para las que puedo calcular la derivada):

$$v\in\mathcal{C}^2[a,b], \quad v(a)=v(b)=0$$

$$\delta_v\mathcal{F}(y) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\mathcal{F}(y+\varepsilon v) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\int_a^b F(t,y(t)+\varepsilon v(t), y'(t)+\varepsilon v'(t))\,dt$$

$$= \int_a^b \partial_y F(t,y(t)+\varepsilon v(t),y'(t)+\varepsilon v'(t))\cdot v(t)\,dt\,\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$+ \int_a^b \partial_z F(t,y(t)+\varepsilon v(t),y'(t)+\varepsilon v'(t))\cdot v'(t)\,dt\,\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \partial_y F(t,y(t),y'(t))\,v(t)\,dt + \int_a^b \partial_z F(t,y(t),y'(t))\,v'(t)\,dt$$

$$\int_a^b \partial_z F(t,y(t),y'(t))\,v'(t)\,dt = \left[\begin{array}{ll} dv = v'(t)\,dt & v=v(t) \\ u = \partial_z F(t,y(t),y'(t)) & \\ du = \frac{d}{dt}\left[\partial_z F(t,y(t),y'(t))\right] & \end{array}\right]$$

$$= -\int_a^b v(t)\cdot\frac{d}{dt}\left[\partial_z F(t,y(t),y'(t))\right]dt + \cancelto{0}{v(t)\cdot\partial_z F(t,y(t),y'(t))\Big|_a^b}$$

$$\delta_v\mathcal{F}(y) = \int_a^b \partial_y F(t,y(t),y'(t))\,v(t)\,dt - \int_a^b v(t)\cdot\frac{d}{dt}\left[\partial_z F(t,y(t),y'(t))\right]dt$$

$$= \int_a^b v(t)\left[\partial_y F(t,y(t),y'(t)) - \frac{d}{dt}\left[\partial_z F(t,y(t),y'(t))\right]\right]dt$$

Uso el lema fundamental:

$$\Rightarrow \quad \boxed{\partial_y F(t,y(t),y'(t)) = \frac{d}{dt}\left[\partial_z F(t,y(t),y'(t))\right] \quad \forall\ t\in[a,b].}$$

Ec. Euler-Lagrange.

Lema fundamental c.v.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua

$$\int_a^b f(t)\,v(t)\,dt = 0 \quad \forall\, v\in \underbrace{\mathcal{C}_c^{\infty}(a,b)}.$$

Entonces, $f\equiv 0$ en $[a,b]$.

Def. $v\in \mathcal{C}_c^{\infty}(a,b)$ cuando:

v tiene derivadas de cualquier orden en (a,b)

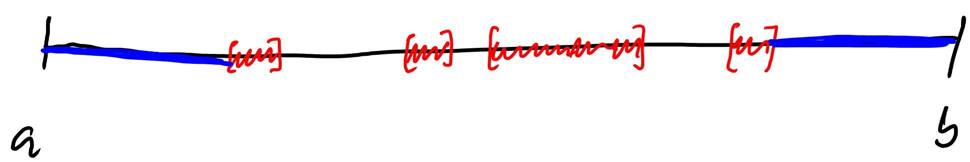
y $\mathrm{sop}(v)\subseteq(a,b)$ es compacto.

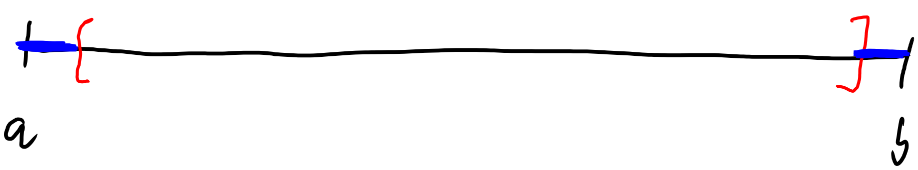
① $\mathrm{Sop}(v) := \overline{\{t\in(a,b) \,/\, v(t)\neq 0\}}$ (cierre en (a,b))

② Equivalentemente:

$\exists\, \delta>0$ tal que $v(t)\equiv 0$ en $(a,a+\delta)$

$v(t)\equiv 0$ en $(b-\delta,b)$





Ejemplo

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (y'(t))^2\,dt\,, \quad D = \{y \in \mathcal{C}^2[0,1] \,/\, y(0)=0,\ y(1)=1\}$$

Si y es un punto crítico, tiene que cumplir Euler-Lag.

$$F(t,y,z) = z^2.$$

$$\partial_y F(t,y,z) = 0$$

$$\partial_z F(t,y,z) = 2z$$

$$\underbrace{\partial_y F(t,y(t),y'(t))}_{0} = \frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\partial_z F(t,y(t),y'(t))}\Big]$$

$$\frac{d}{dt}\left(2y'(t)\right) = 2y''(t)$$

$$\boxed{y''(t) = 0}$$

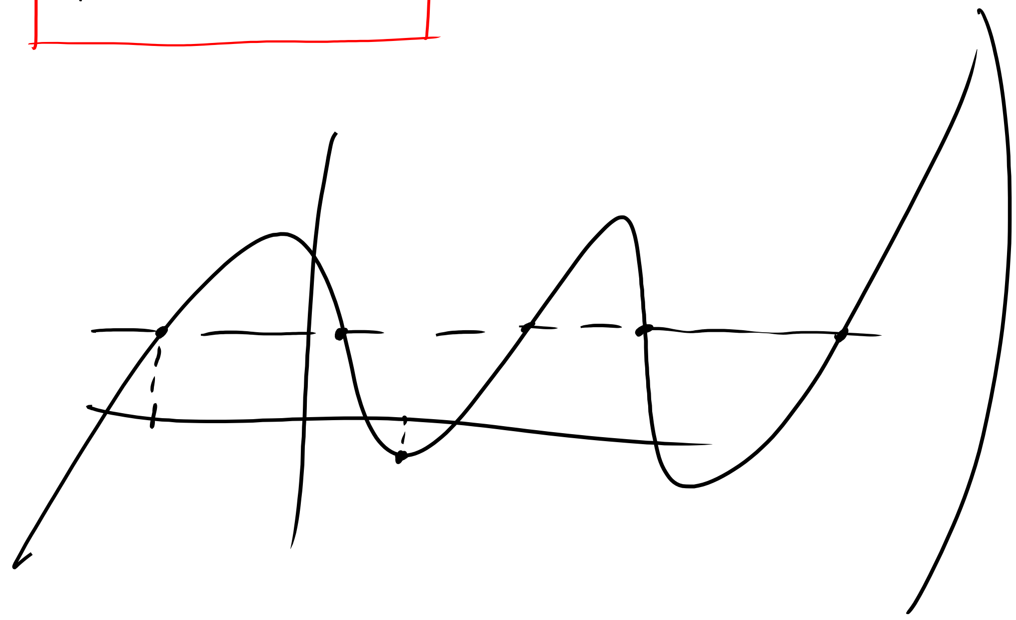
Condición: Si $\mathcal{F}$ tiene un extremo, tiene que ser una recta.

2 de marzo

Euler-Lagrange: un punto crítico del funcional
$$\int_a^b F(t,y(t),y'(t))\,dt \qquad \text{(con condiciones de frontera fijas)}$$
tiene que cumplir
$$\partial_y F(t,y(t),y'(t)) = \frac{d}{dt}\partial_z F(t,y(t),y'(t))$$

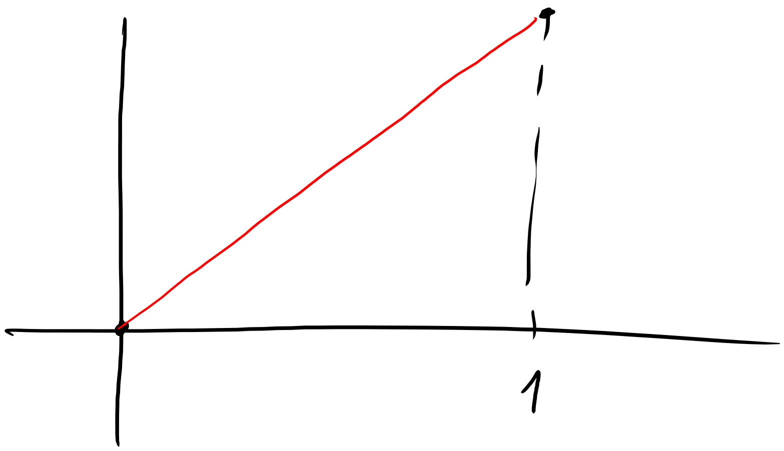
Ejemplo: gráfica más corta entre dos puntos:
$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 \sqrt{1+(y'(t))^2}\,dt \quad , \quad D = \{y \in \mathcal{C}^2[0,1] \,/\, y(0)=1=y(1)\}$$
$$F(t,y,z) = \sqrt{1+z^2} \quad , \quad \partial_y F = 0 , \quad \partial_z F = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$
$$0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{\sqrt{1+(y'(t))^2}}\right) \Rightarrow \frac{y'(t)}{\sqrt{1+(y'(t))^2}} = \text{const.}$$
$$\Rightarrow \boxed{y'(t) = \text{const.}}$$

$$\left(G(y'(t)) = C \quad \forall t \right.$$



$\left.\right)$

Caso distinto: mismo $\mathcal{F}$, $D=\{y\in \mathcal{C}^2[0,1] / \; y(0)=0, \; y(1)=1\}$



Si hay un mínimo $\Rightarrow$ tiene que ser la recta roja

(pero en principio no hemos demostrado que haya un mínimo).

Ejemplo: $\mathcal{F}(y)=\int_a^b \left(\frac{1}{2}(y'(t))^2-U(y(t))\right)dt$

$$D=\{y\in\mathcal{C}^2[a,b] / \; y(a)=y_a, \; y(b)=y_b\}$$

$U:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $U\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. potencial.

Ec. Euler-Lagrange: $F(t,y,z)=\frac{1}{2}z^2-U(y)$

$$\partial_y F=-U'(y), \quad \partial_z F=z$$

$$-U'(y(t))=\frac{d}{dt}(y'(t)) \quad \Big\| \quad \boxed{-U'(y(t))=y''(t)}.$$

2ª ley Newton

Euler-Lagrange para una función vectorial

Consideramos:

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(t, \underbrace{y(t)}_{\in\mathbb{R}^d}, \underbrace{y'(t)}_{\in\mathbb{R}^d})\, dt, \qquad y(t) = (y_1(t), \dots, y_d(t)).$$

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R}^d) \,/\, y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \}$$

$$y_a, y_b \in \mathbb{R}^d; \qquad F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

¿Puntos críticos de $\mathcal{F}$? Tomamos $v \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R}^d)$
con $v(a) = 0 \in \mathbb{R}^d$, $v(b) = 0 \in \mathbb{R}^d$.

$$\delta_v \mathcal{F}(y) = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F(t, \underbrace{y(t)+\varepsilon v(t)}, \underbrace{y'(t)+\varepsilon v'(t)})\, dt =$$

$$= \int_a^b \sum_{i=1}^d \partial_{y_i} F(t, y(t)+\varepsilon v(t), y'(t)+\varepsilon v'(t)) \cdot v_i(t) \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$+ \int_a^b \sum_{i=1}^d \partial_{z_i} F(t, y(t)+\varepsilon v(t), y'(t)+\varepsilon v'(t))\, v_i'(t)\, dt \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_a^b \nabla_y F(t,y(t),y'(t)) \underset{\text{prod. escalar}}{\cdot} v(t)\,dt + \int_a^b \nabla_z F(t,y(t),y'(t)) \underset{\text{prod. escalar}}{\cdot} v'(t)\,dt$$

$$\nabla_y F \equiv \left(\partial_{y_1} F, \dots, \partial_{y_d} F\right) \quad ; \quad \nabla_z F = \left(\partial_{z_1} F, \dots, \partial_{z_d} F\right).$$

$$\int_a^b \nabla_z F(t,y(t),y'(t)) \cdot v'(t)\,dt = \left[\begin{array}{l} dv = v'(t)\,dt \\ v = v(t) \quad / \quad du = \dfrac{d}{dt}\left[\nabla_z F(t,y(t),y'(t))\right] \\ u = \nabla_z F(t,y(t),y'(t)) \end{array} \right.$$

$$= -\int_a^b v(t) \cdot \frac{d}{dt}\left(\nabla_z F(t,y(t),y'(t))\right) dt + \cancelto{0}{v(t) \cdot \nabla_z F \Big|_{t=a}^{t=b}}$$

$$0 = \int_a^b \nabla_y F(t,y(t),y'(t)) \cdot v(t)\,dt - \int_a^b v(t) \cdot \frac{d}{dt}\left(\nabla_z F(t,y(t),y'(t))\right) dt$$

$$= \int_a^b v(t) \cdot \Big[\underbrace{\nabla_y F(t,y(t),y'(t)) - \frac{d}{dt} \nabla_z F(t,y(t),y'(t))}_{\in \mathbb{R}^d} \Big] dt$$

Lema fundamental (aplicado en cada coordenada):

$$\boxed{\nabla_y F(t,y(t),y'(t)) = \frac{d}{dt} \nabla_z F(t,y(t),y'(t))}$$

Euler-Lagrange.

Ejemplo:

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 |y'(t)|^2 dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^d (y_i'(t))^2 dt$$

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2([0,1];\mathbb{R}^d) ; \ y(0)=0, \ y(1) = (1,0,\dots,0) \}$$

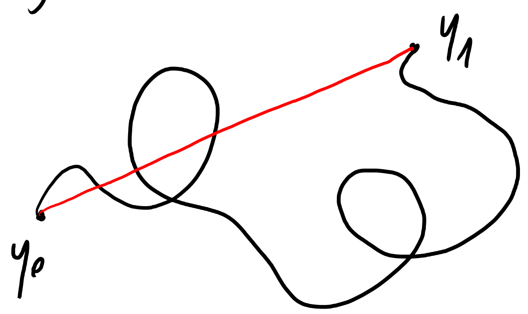
$$F(t,y,z) = |z|^2 = z_1^2 + \dots + z_d^2$$

$$\nabla_y F = 0. \qquad \nabla_z F = 2z = 2(z_1,\dots,z_d)$$

$$0 = \frac{d}{dt}(2y'(t)) = 2y''(t)$$

$y''(t) = 0$. (Los puntos críticos son rectas).

Ejemplo: Curva más corta entre dos puntos:



$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2([0,1];\mathbb{R}^2) \ / \ y(0)=y_0,\ y(1)=y_1 \}$$

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 |y'(t)|\, dt$$

3 de marzo

$$F(t,y,z) = |z| = \sqrt{z_1^2+z_2^2}$$

$\nabla_y F = 0.$ $\qquad \nabla_z F = \left(\frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}}, \frac{z_2}{\sqrt{z_1^2+z_2^2}} \right) = \frac{z}{|z|}$

Euler-Lagrange: $\boxed{0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{|y'(t)|} \right)}$

$\mathcal{F}$ es invariante por reparametrizaciones de la curva.

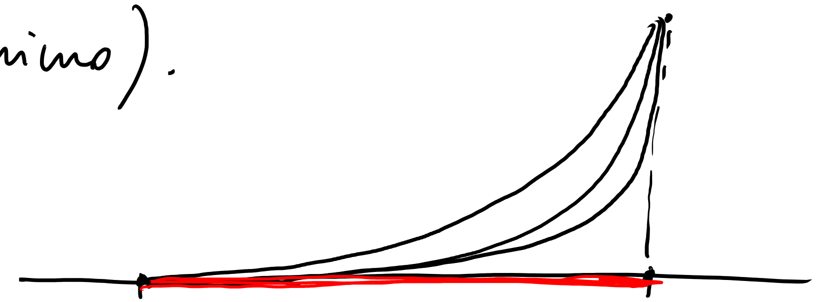
$\Rightarrow$ Si tengo un punto crítico, siempre puedo encontrar un punto crítico con la misma imagen ("la misma curva") y con $|y'(t)| = \text{const.}\ \forall\ t$.

Si es así:

$$0 = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{y'(t)}{|y'(t)|}}_{\text{const}} \Rightarrow \boxed{y''(t) = 0}$$

Ejemplo: $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 y(t)^2 dt$. $\quad D = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,1] / y(0) = 0, y(1) = 1 \}$

(Este problema no tiene mínimo).



Euler-Lagrange:

$F(t, y, z) = y^2$

$\partial_y F = 2y \quad , \quad \partial_z F = 0.$

$2y = 0 \quad , \quad y(t) = 0 \quad \forall t.$

Ejemplo $\mathcal{F}(y) = \int_a^b \Big(\underbrace{\frac{1}{2} |y'(t)|^2} - \underbrace{U(y(t))} \Big) dt$ "Funcional de acción".

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2([a,b]; \mathbb{R}^d) \,/\, y(a) = y_a,\ y(b) = y_b \}$$

$U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $U \in \mathcal{C}^2$ potencial

Puntos críticos:

$$F(t,y,z) = \frac{1}{2} |z|^2 - U(y)$$

$$\nabla_y F = -\nabla_y U(y) \qquad \nabla_z F = z = (z_1, \dots, z_d)$$

$$-\nabla_y U(y) = \frac{d}{dt}\big(y'(t)\big) = y''(t)$$

Ejemplo: 2 partículas: (y_1, y_2, y_3), (y_4, y_5, y_6)

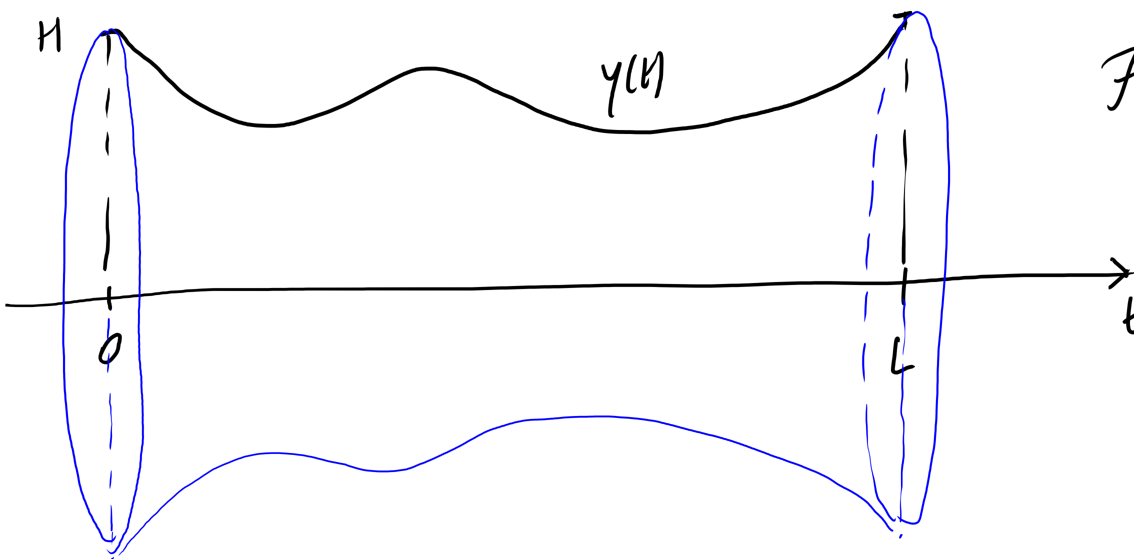
Potencial: $U(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = \dfrac{1}{|(y_1, y_2, y_3) - (y_4, y_5, y_6)|}$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_1, y_2, y_3) = -\nabla_{(y_1,y_2,y_3)} U(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(y_4, y_5, y_6) = -\nabla_{(y_4,y_5,y_6)} U(y_1, \dots, y_6)$$

Ejemplo: Superficies minimales de revolución:

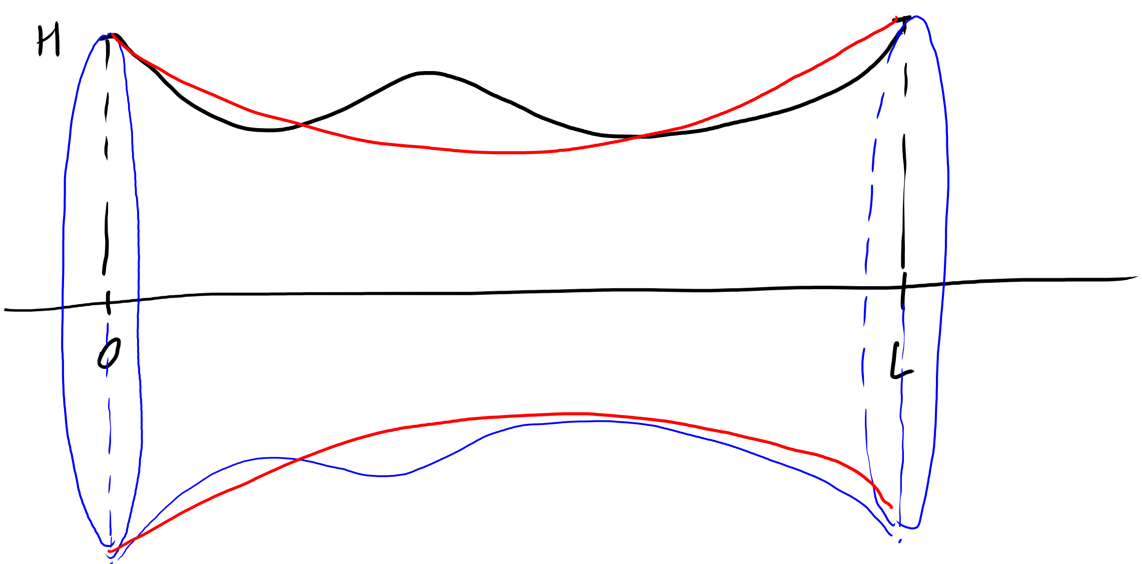
¿Área mínima posible?

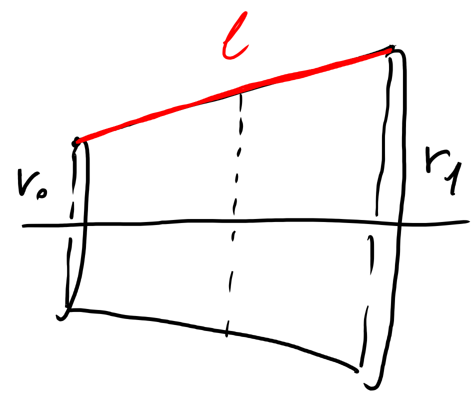


$$\mathcal{F}(y) \equiv \text{área de la superficie}$$

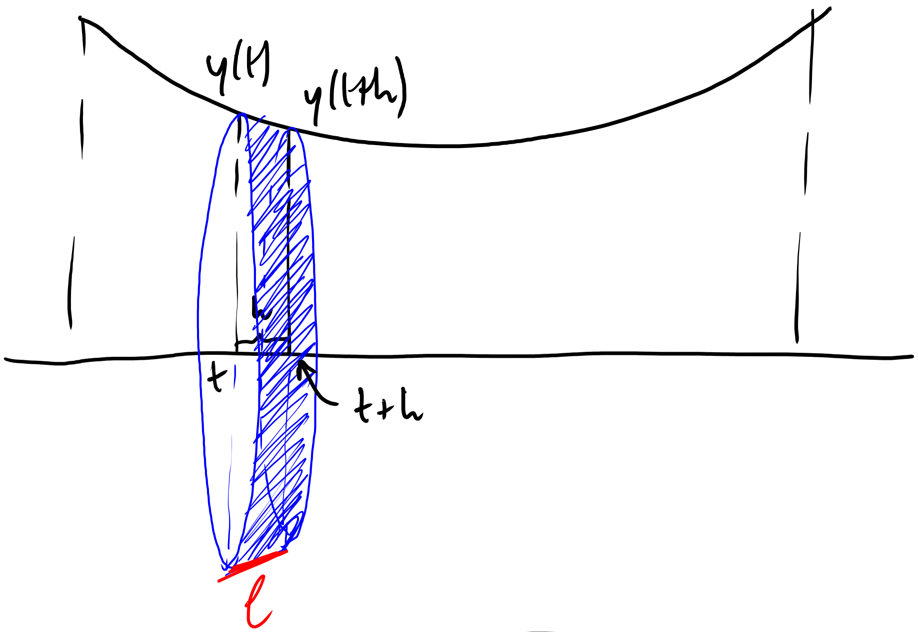
$$= \int_0^L 2\pi\, y(t)\, dt \quad \times$$

$\sqrt{1+(y'(t))^2}$



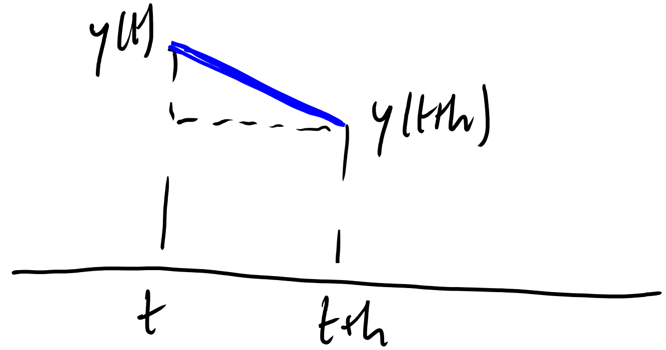


Área: $2\pi \dfrac{r_0+r_1}{2}\cdot \ell$



$$\text{Área} \approx 2\pi\, y(t) \cdot \ell \approx 2\pi\, y(t) \sqrt{1+(y'(t))^2} \cdot h$$

"dt"



$$\ell^2 = h^2 + (y(t+h)-y(t))^2$$

$$\ell = \sqrt{h^2 + (y(t+h)-y(t))^2}$$

$$= h\sqrt{1+\left(\frac{y(t+h)-y(t)}{h}\right)^2}$$

$$\approx h\sqrt{1+(y'(t))^2}$$

$$\boxed{F(y) = \int_0^L 2\pi\, y(t)\sqrt{1+(y'(t))^2}\, dt}$$

Superficie de revolución área mínima

$$\boxed{\mathcal{F}(y) = \int_0^L 2\pi\, y(t)\sqrt{1+(y'(t))^2}\,dt}$$

$\mathcal{D} = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,L] \,/\, y(0) = H = y(1) \}$

Buscamos ptos. críticos:

$$F(t,y,z) = 2\pi y\sqrt{1+z^2}$$

$$\partial_y F = 2\pi\sqrt{1+z^2}, \qquad \partial_z F = 2\pi y \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$$

E-L:
$$\sqrt{1+(y'(t))^2} = \frac{d}{dt}\left(y(t)\,\frac{y'(t)}{\sqrt{1+(y'(t))^2}} \right)$$

Factor integrante: multiplico todo por lo que hay en $\frac{d}{dt}(\dots)$

$$\underbrace{y\cdot y'}_{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left((y(t))^2\right)} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{y y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right)^2\right]$$

Luego:

$$y^2 = \frac{(y y')^2}{1+(y')^2} + C$$

$$y^2 (y')^2 = (1+(y')^2)\cdot(y^2 - C)$$

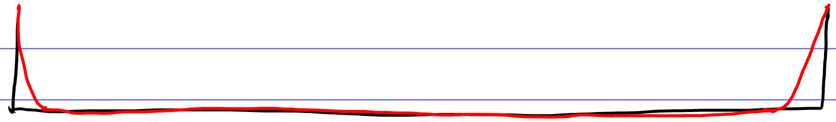
$$\cancel{y^2 (y')^2} = y^2 - C + \cancel{(y')^2 y^2} - (y')^2 \cdot C$$

$$\boxed{y^2 - C = (y')^2 \cdot C}$$

una solución: si $C=0$, $y(t)=0 \ \forall t$. (no está en el dominio).

$$(y')^2 = \frac{1}{C} y^2 - 1$$

otra solución:



si $y(t) = H \ \forall t$, $(y'(t)=0)$

$y^2(t) = C \Rightarrow C = H^2$. (Esta sí está en D $\Rightarrow$ es un pto. crítico).

Para encontrar las demás:

$$y = K \cosh u$$

$$y' = K \operatorname{senh} u \cdot u'$$

$$y^2 - C = (y')^2 \cdot C$$

$$K^2 (\cosh u)^2 - C = K^2 (\operatorname{senh} u)^2 \cdot (u')^2 \cdot C$$

$$(\cosh u)^2 - (\operatorname{senh} u)^2 = 1$$

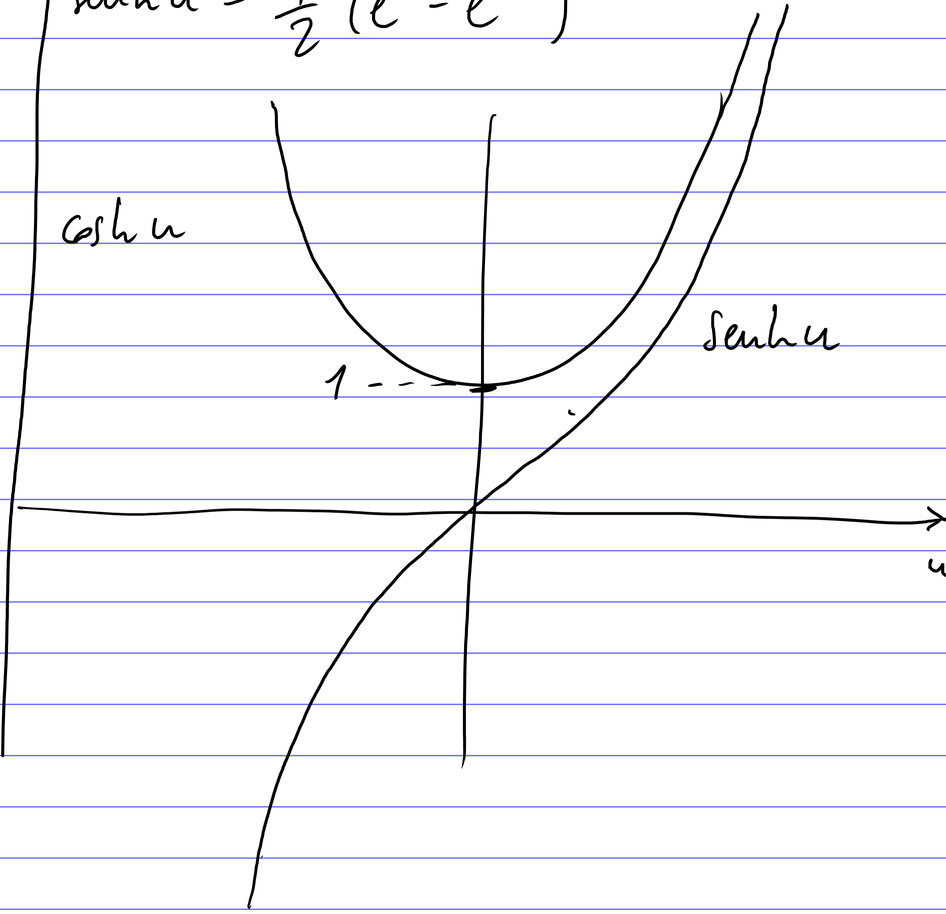
$$(\operatorname{senh} u)^2 = (\cosh u)^2 - 1$$

$$K^2 (\cosh u)^2 - C = K^2 \left((\cosh u)^2 - 1\right)(u')^2 \cdot C$$

$$K^2 (\cosh u)^2 - C = K^2 (\cosh u)^2 (u')^2 \cdot C$$
$$- K^2 (u')^2 \cdot C$$

$$\cosh u = \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)$$

$$\operatorname{senh} u = \frac{1}{2}\left(e^{u} - e^{-u}\right)$$



Podemos elegir $K^2 = C$ para simplificar:

$$C (\cosh u)^2 - C = C^2 (\cosh u)^2 (u')^2 - C^2 (u')^2$$

$$C \left(\cancel{(\cosh u)^2 - 1}\right) = C^2 (u')^2 \left(\cancel{(\cosh u)^2 - 1}\right)$$

$$1 = C (u')^2 \quad \| \quad (u')^2 = \frac{1}{C}$$

$$u'(t) = \frac{1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{K} \Rightarrow u(t) = u_0 + \frac{t}{K}$$

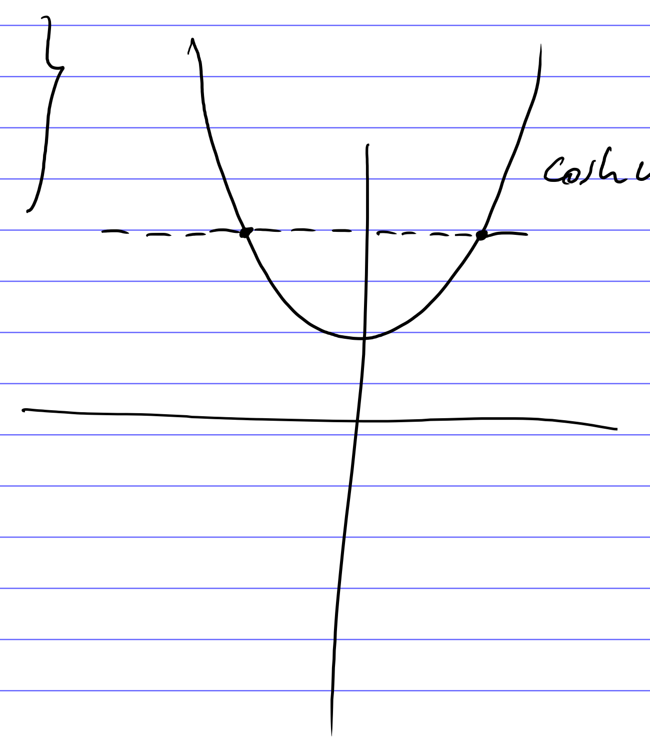
$$y(t) = K \cosh\left(u_0 + \frac{t}{K}\right)$$

Los ptos. críticos son trozos de gráfica de cosh.

(Las superficies son catenoides).

Condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = H = K \cosh(u_0) \\ y(L) = H = K \cosh\left(u_0 + \frac{L}{K}\right) \end{array}\right\}$$



Idea: $\cosh u_0 = \cosh\left(u_0 + \frac{L}{K}\right)$

$$\Rightarrow u_0 = -u_0 - \frac{L}{K}$$

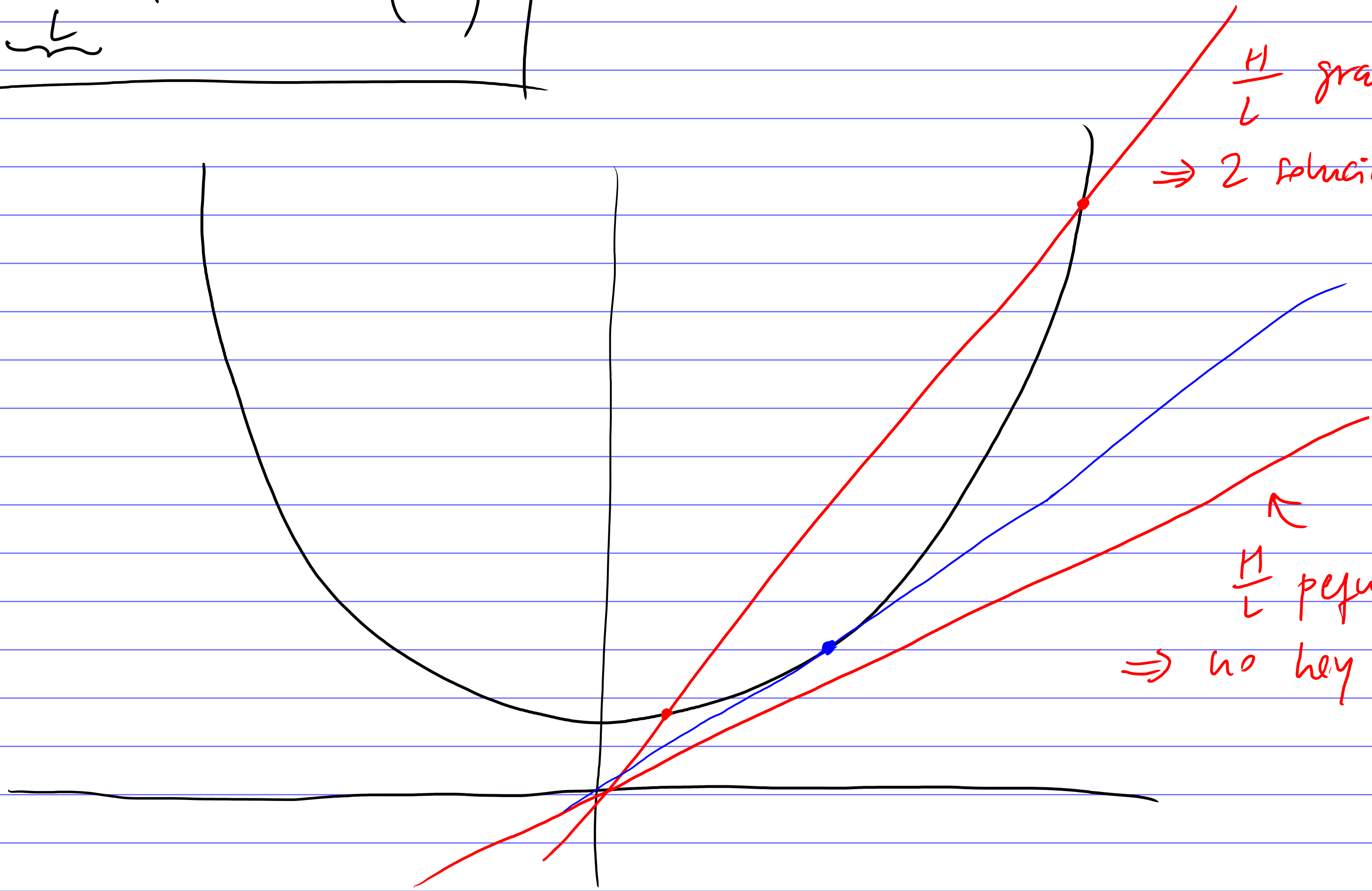
$$2u_0 = -\frac{L}{K} \qquad u_0 = -\frac{L}{2K}$$

Sólo me queda una ecuación:

$$H = K \cosh\left(\frac{L}{2K}\right)$$

$$\alpha = \frac{L}{2K}, \quad K = \frac{L}{2\alpha} \qquad \frac{1}{K} = \frac{2\alpha}{L}$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{2H}{L}}\alpha = \cosh(\alpha)}$$



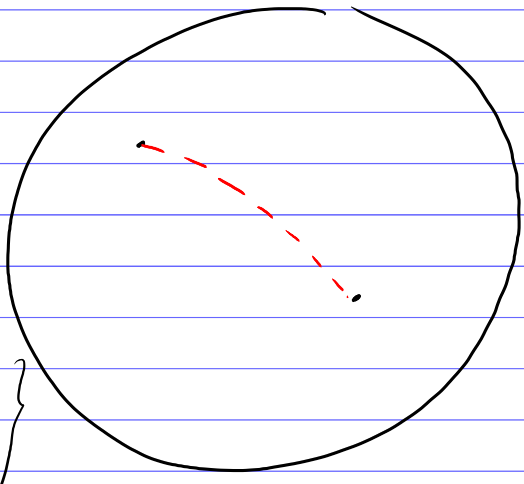
$\frac{H}{L}$ grande $\Rightarrow$ 2 soluciones

$\frac{H}{L}$ pequeño $\Rightarrow$ no hay solución.

8/3/2021 (10-11)

Ejemplo: geodésicas en la esfera.

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 |y'(t)|\,dt$$



$$D = \left\{ y \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}^d) \,/\, \begin{matrix} y(0)=y_0 \\ y(1)=y_1 \end{matrix},\ \begin{matrix} |y(t)|=1 \\ \forall t\in[0,1] \end{matrix} \right\}$$

No sirve la técnica anterior.

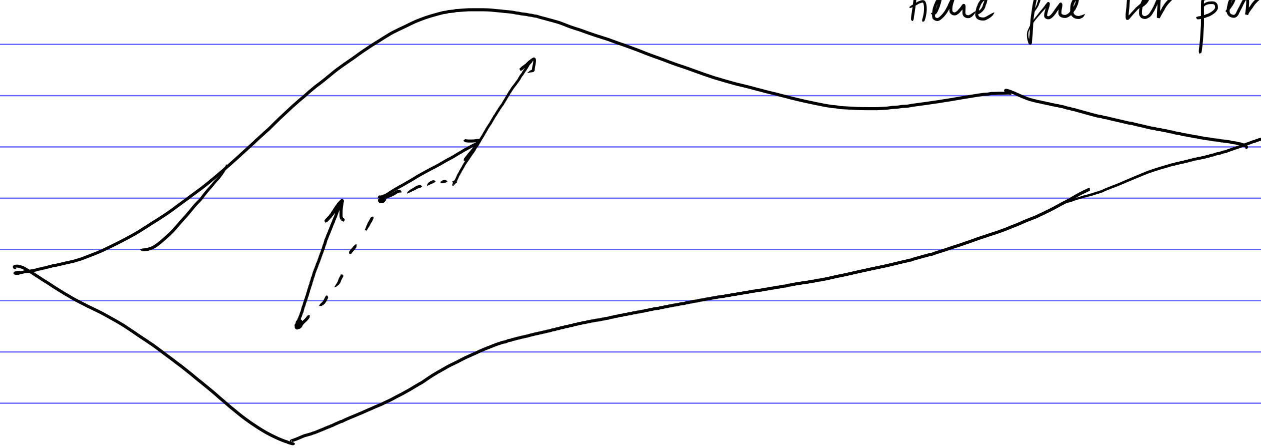
Ejemplo parecido en $\mathbb{R}^d$:

$f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d \,/\, |x| = 1\} = S^{d-1}$

¿Mínimos de f?

$\longrightarrow$ multiplicadores de Lagrange.

En los puntos críticos el gradiente tiene que ser perpendicular a la superficie.



Ejemplo: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) := |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$$D = S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 / |x| = 1\}$$

$$\nabla f(x) = 2x.$$

Teorema (multiplicadores Lagrange en $\mathbb{R}^d$)

$1 \leq m < d$ entero

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, $D = \{x \in \mathbb{R}^d / \varphi_i(x) = 0, i = 1, \dots, m\}$

$\varphi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$, $i = 1, \dots, m$.

Si f alcanza un extremo en $y_* \in D$, y además suponemos que

$$\text{rango}\left(\partial_{x_j} \varphi_i(y_*)\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,d}} = m.$$

entonces: $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ ("multiplicadores de Lagrange") tales que

$$\circledast \quad \nabla f^*(y_*) = 0$$

donde $f^*(x) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$

(es decir: $\circledast$ $\nabla f(y_*) = -\lambda_1 \nabla \varphi_1(y_*) - \dots - \lambda_m \nabla \varphi_m(y_*)$.)

Teorema (Extremos con restricciones algebraicas)

Consideramos

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(t, y(t), y'(t))\, dt$$

$1 \leq m < d$ entero.

$$D = \left\{ y \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^d) \;/\; \begin{array}{l} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{array}, \; \boxed{\varphi_i(y(t)) = 0}, \; \begin{array}{l} i = 1, \dots, m \\ t \in [a,b] \end{array} \right\}$$

$F : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ $\qquad \varphi_i : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$

$i = 1, \dots, m.$

Si $y_* \in D$ es un extremo de $\mathcal{F}$,

y además

$$\text{rango} \left(\partial_{y_j} \varphi_i(y_*(t)) \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,d}} = m$$

entonces $\exists$ $\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)$ tales que

$$\nabla_y F^*(t, y_*(t), y_*'(t)) = \frac{d}{dt} \nabla_z F^*(t, y_*(t), y_*'(t)) \quad \forall\, t \in [a,b]$$

donde $F^*(t, y, z) := F(t, y, z) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(t)\, \varphi_i(y).$

En el ejemplo de las geodésicas

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 |y'(t)|\, dt \qquad F(t,y,z) = |z|.$$

$$D = \left\{ y \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}^d) \;/\; \begin{matrix} y(0)=y_0 \\ y(1)=y_1 \end{matrix},\ \boxed{|y(t)|^2 = 1} \ \forall t\in[0,1] \right\} \qquad \varphi(y) = |y|^2 - 1.$$

$$F^*(t,y,z) = |z| + \lambda(t)\left(|y|^2 - 1\right)$$

Euler-Lagrange: $\nabla_y F^* = 2\lambda(t)\, y \quad , \quad \nabla_z F^* = \dfrac{z}{|z|}$

$$2\lambda(t)\, y(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{|y'(t)|}\right) \quad , \quad |y(t)|^2 = 1 \quad \forall t$$

Elijo una reparametrización con $|y'(t)| = C \quad \forall t$

$$2\lambda y = \frac{d}{dt}\frac{y'(t)}{C} = \frac{1}{C}\, y''(t)$$

$$\boxed{y'' = 2\lambda(t)\, C\, y} \quad \circledast$$

Idea para encontrar λ: $\quad |y(t)|^2 = 1 \quad \forall t$

deriva en t: $\quad 2\, y'(t)\cdot y(t) = 0 \quad \forall t$

otra vez: $\quad 2\, y''(t)\cdot y(t) + 2\, \underbrace{|y'(t)|}_{C}{}^2 = 0$

$$y''(t)\, y(t) = -C^2$$

Multiplico ⊛ per $y(t)$:

$$\underbrace{y''\cdot y}_{-C^2} = 2\lambda(t)\cdot C\, |y|^2 = 2\lambda(t)\cdot C$$

$$\Rightarrow \quad 2\lambda(t) = -C \qquad \boxed{\lambda(t) = -\frac{C}{2}}$$

9 de marzo

Restricciones integrales

Teo. Consideremos $\mathcal{F}(y) := \int_a^b F(t, y(t), y'(t))\, dt$ $\quad m \in \mathbb{N}$.

$$D = \left\{ y \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^d) \;/\; \begin{matrix} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{matrix},\ \int_a^b \boxed{\varphi_i(y(t), y'(t))}\, dt = 0 \;\; i = 1, \dots, m \right\}$$

$F : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$

$\varphi_i : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$

Si $y_* \in D$ es un extremo de $\mathcal{F}$, y además se cumplen unas condiciones técnicas de transversalidad de las φ_i, entonces $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nabla_y F^*(t, y_*(t), y_*'(t)) = \frac{d}{dt} \nabla_z F^*(t, y_*(t), y_*'(t)) \qquad (t \in [a,b])$$

donde $F^*(t, y, z) := F(t, y, z) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(y, z)$.

"Condiciones técnicas":

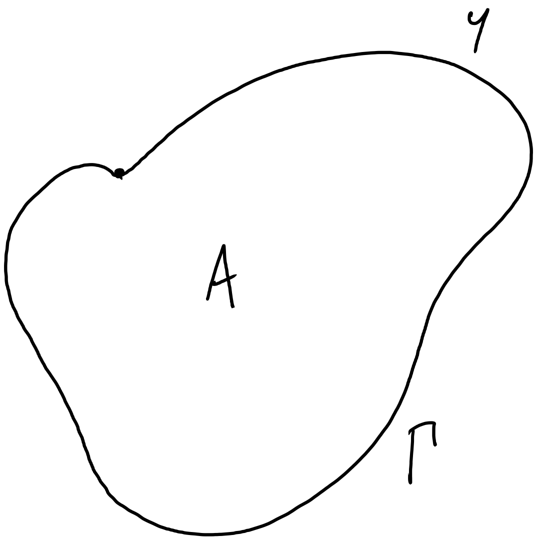
$$\forall\, v_1, \dots, v_m \in \mathcal{C}_0^2([a,b], \mathbb{R}^d) \quad \text{linealmente independientes}$$

que valen 0 en los extremos

$$\det \left(\delta_{v_j} \Phi_i(y_*) \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,m}} \neq 0.$$

donde $\displaystyle \Phi_i(y) := \int_a^b \varphi_i(y(t), y'(t))\, dt$

Ejemplo: problema isoperimétrico



longitud fija

¿Cuál es la curva que encierra área máxima, con longitud fija dada?

* Este problema es invariante por cambio de escala,
  * invariante por traslaciones y rotaciones.

→ Fijamos longitud 2π.

* Una curva continua cerrada y simple (que no se corta) en el plano encierra siempre una región acotada (Teo. curva de Jordan).

$$D = \left\{ \gamma \in \mathcal{C}^2([0,2\pi], \mathbb{R}^2) \;/\; \gamma(0) = (1,0) = \gamma(2\pi), \; \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|\,dt = 2\pi \right\}$$

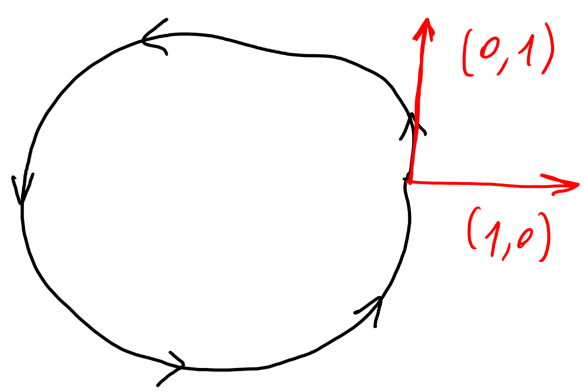
$$\tilde{D} = \left\{ \gamma \in D \;/\; \gamma \text{ sea simple}, \; |\gamma'(t)| = 1 \;\forall t, \; \text{recorrida en dirección antihoraria} \right\}$$

$\mathcal{F}(y) :=$ Área que encierra la curva y.

$|y'(t)| = 1 \quad \forall t$

$$= \int_A 1\, dx = \int_A \operatorname{div} X(x)\, dx = \int_\Gamma X(y)\cdot N(y)\cdot dS(y) = \int_0^{2\pi} X(y(t))\cdot N(y(t))\, dt = \circledast$$

$X(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}x_1, \ \frac{1}{2}x_2\right)$ $\quad \| \quad$ $N(y(t)) = (y_2'(t), -y_1'(t))$



$$\circledast = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{2}y_1(t), \tfrac{1}{2}y_2(t)\right)\cdot\left(y_2'(t), -y_1'(t)\right) dt$$

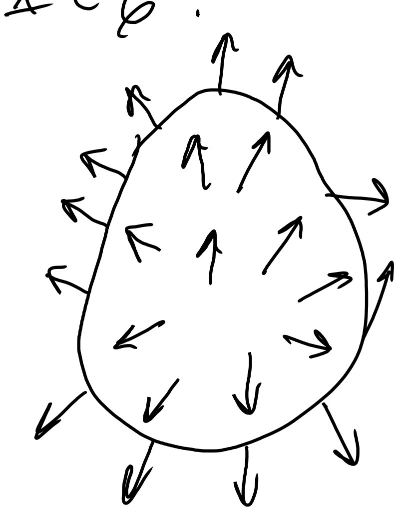
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y_1 \cdot y_2'\, dt - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y_2\cdot y_1'\, dt = \left| \begin{array}{l} dv = y_1' dt \\ u = y_2 \end{array}\right.$$

$$= \int_0^{2\pi} y_1(t)\cdot y_2'(t)\, dt - \underbrace{\frac{1}{2}\cancel{y_2(t)\, y_1(t)}\Big|_{t=0}^{t=2\pi}}_{0}$$

Teo. divergencia: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ acotado, con frontera $\mathcal{C}^1$.

$X : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ ("campo de vectores"), $X \in \mathcal{C}^1$.

$$\int_\Omega \operatorname{div} X(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} X(y)\cdot \underbrace{N(y)}_{\substack{\text{normal exterior a} \\ \text{la superficie } \partial\Omega.}} \overbrace{dS(y)}^{\text{integral de superficie}}$$



$$\operatorname{div} X(x) := \partial_{x_1} X_1(x) + \partial_{x_2} X_2(x) + \cdots + \partial_{x_d} X_d(x)$$

$x = (x_1, \dots, x_d)$

$X = (X_1, \dots, X_d)$. $\quad X(x) = (X_1(x), \dots, X_d(x))$.

10 de marzo

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^{2\pi} y_1(t)\cdot y_2'(t)\,dt \quad , \qquad \int_0^{2\pi} |y'(t)|\,dt = 2\pi .$$

$$\int_0^{2\pi} \left(|y'(t)| - 1\right) dt = 0 .$$

$\equiv$ área que encierra una curva y (para $y \in \tilde{D}$).

Usemos el resultado sobre restricciones integrales:

$$F(t,y,z) = F(t,y_1,y_2,z_1,z_2) = y_1 \cdot z_2 .$$

$$F^*(t,y,z) = y_1 \cdot z_2 + \lambda\left(|z| - 1\right)$$

Euler-Lagrange:

$$\nabla_y F^*(t,y,z) = \left(z_2 \ , \ 0 \right)$$

$$\nabla_z F^*(t,y,z) = \left(0, \ y_1\right) + \lambda \frac{z}{|z|} = \left(\lambda \frac{z_1}{|z|} , \ y_1 + \lambda \frac{z_2}{|z|}\right)$$

$$(y_2'(t), 0) = \frac{d}{dt}\left(\lambda \frac{y_1'(t)}{|y'(t)|}, y_1(t) + \lambda \frac{y_2'(t)}{|y'(t)|}\right)$$

Busco solamente puntos críticos que estén en $\tilde{D}$.

$$(y_2'(t), 0) = (\lambda y_1''(t), y_1'(t) + \lambda y_2''(t))$$

$$\circledast \quad y_1''(t) = \frac{1}{\lambda} y_2'(t), \quad y_2''(t) = -\frac{1}{\lambda} y_1'(t)$$

[si $\lambda = 0 \Rightarrow y_2' = 0, \quad 0 = y_1'$ no está en $\tilde{D}$].

Resolvemos $\circledast$. $w_1 := y_1', \quad w_2 := y_2'$.

$$w_1' = \frac{1}{\lambda} w_2, \quad w_2' = -\frac{1}{\lambda} w_1.$$

$$w_1'' = -\frac{1}{\lambda^2} w_1 \Rightarrow w_1(t) = A \cos\frac{t}{\lambda} + B \operatorname{sen}\frac{t}{\lambda}$$

Condiciones: $y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 0.$

$$y_1'(0) = 0, \quad y_2'(0) = 1 \qquad (w_1(0) = 0, \quad w_2(0) = 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{w_1(t) = B \operatorname{sen}\frac{t}{\lambda}}$$

$$\frac{1}{\lambda} w_2 = w_1' = \frac{B}{\lambda} \cos\frac{t}{\lambda}$$

$$\boxed{w_2(t) = B \cos\frac{t}{\lambda}} \qquad w_2(0) = 1 = B$$

$$y_1(t) = -\frac{1}{\lambda}\cos\frac{t}{\lambda} + C_1 \qquad y_1(0) = 1 = -\frac{1}{\lambda} + C_1$$

$$y_2(t) = \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}\frac{t}{\lambda} + C_2 \qquad y_2(0) = 0 = C_2$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= -\frac{1}{\lambda}\cos\frac{t}{\lambda} + 1 + \frac{1}{\lambda} \\ y_2(t) &= \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}\frac{t}{\lambda} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(2\pi) &= -\frac{1}{\lambda}\cos\frac{2\pi}{\lambda} + 1 + \frac{1}{\lambda} = 1 \\ y_2(2\pi) &= \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda} = 0 \end{aligned}\right| \quad \left.\begin{aligned} \cos\frac{2\pi}{\lambda} &= 1 \\ \operatorname{sen}\frac{2\pi}{\lambda} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{K}$, $K \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. ($K$ entero, $K \neq 0$).

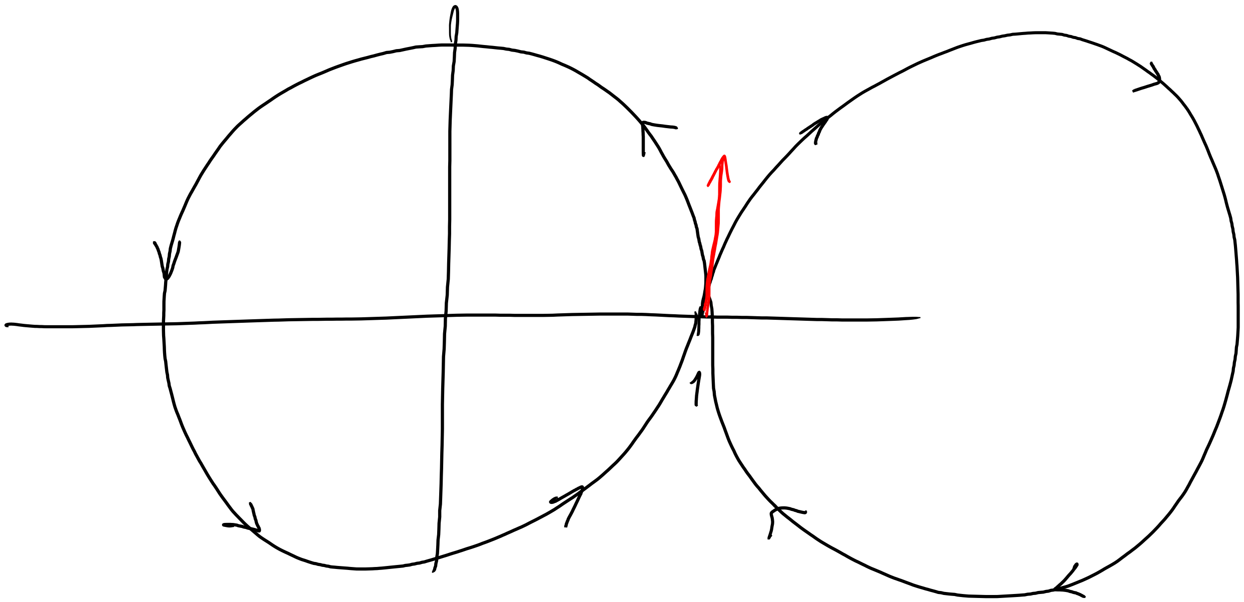
$K \equiv$ número de vueltas que doy a la circunferencia.
(circunferencia con radio $\frac{1}{K}$).

$\Rightarrow K = \pm 1$ para tener curva simple.

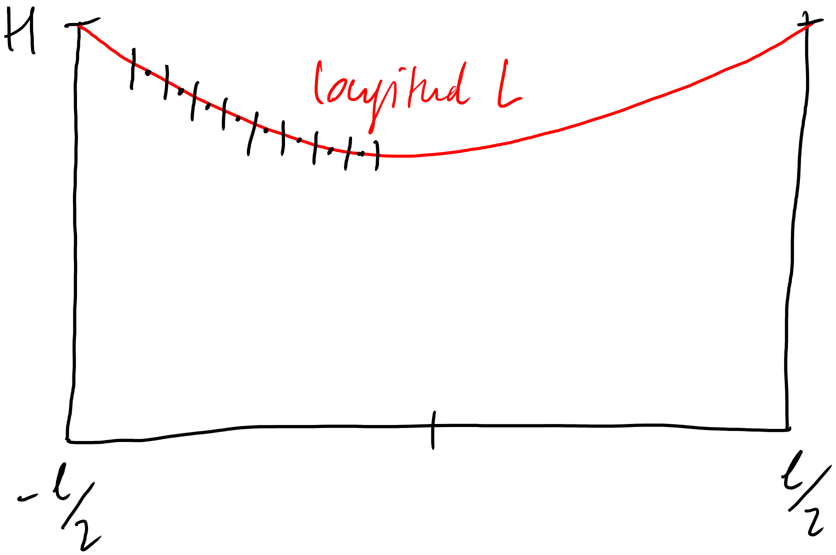
$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= -\frac{1}{\lambda}\cos\frac{t}{\lambda} + 1 + \frac{1}{\lambda} \\ y_2(t) &= \frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}\frac{t}{\lambda} \end{aligned}\right\}$$

$\ast\ \lambda = 1$: $\left.\begin{aligned} y_1(t) &= -\cos t + 2 \\ y_2(t) &= \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}$

$\ast\ \lambda = -1$: $\boxed{\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \cos t \\ y_2(t) &= \operatorname{sen} t \end{aligned}\right\}}$



Ejemplo: catenaria

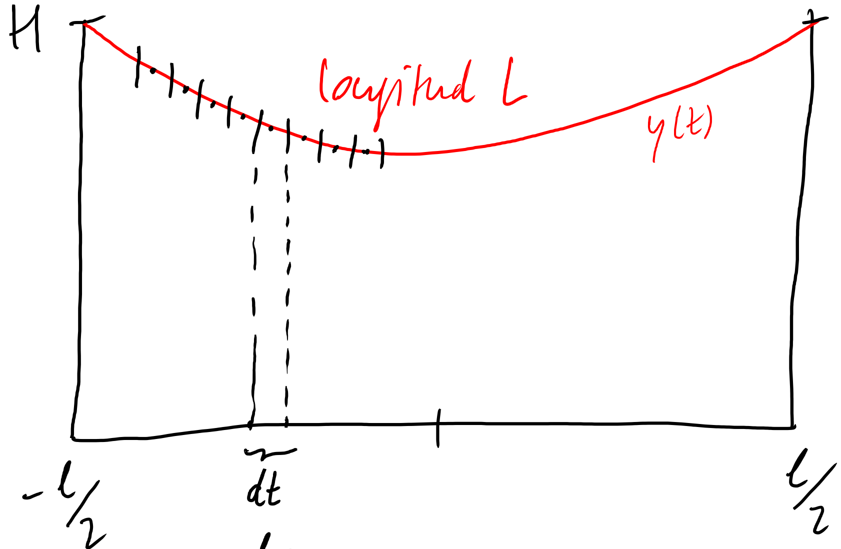


La cuerda adopta la forma con energía potencial mínima.

$$D = \left\{ y \in \mathcal{C}^2 \,/\, y\left(\tfrac{l}{2}\right) = y\left(-\tfrac{l}{2}\right) = H, \quad \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt = L \right\}$$

15 marzo

Ejemplo: catenaria

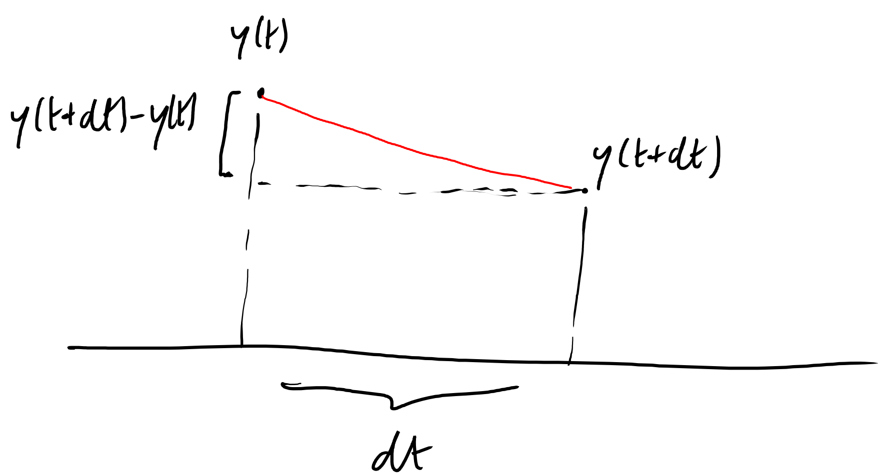


La cuerda adopta la forma con energía potencial mínima.

$$D = \left\{ y \in \mathcal{C}^2 \ / \ y\left(\tfrac{l}{2}\right) = y\left(-\tfrac{l}{2}\right) = H, \ \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt = L \right\}$$

gráfica de y $\equiv$ forma de la cuerda.

$$\mathcal{F}(y) = g \int_{-l/2}^{l/2} y(t) \cdot \sqrt{1 + (y'(t))^2} \cdot dt \equiv \text{energía potencial de la cuerda.}$$



$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \sqrt{1+(y'(t))^2}\, dt = L$$ es lo mismo que

$$\int_{-\ell/2}^{\ell/2} \left(\sqrt{1+(y'(t))^2} - \frac{L}{\ell} \right) dt = 0$$

¿Puntos críticos? $F(t,y,z) = y\sqrt{1+z^2}$

$$F^*(t,y,z) = y\sqrt{1+z^2} + \lambda\left(\sqrt{1+z^2} - \frac{L}{\ell}\right)$$

$$\partial_y F^*(t,y,z) = \sqrt{1+z^2}$$

$$\partial_z F^*(t,y,z) = \frac{yz}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{\lambda z}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{(y+\lambda)z}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\sqrt{1+(y'(t))^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{(y(t)+\lambda)\, y'(t)}{\sqrt{1+(y'(t))^2}} \right)$$

$$w(t) := y(t)+\lambda \quad , \quad w' = y'$$

$$\sqrt{1+(w'(t))^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{w(t)\, w'(t)}{\sqrt{1+(w'(t))^2}} \right)$$

misma ecuación que habíamos resuelto en el caso de la superficie de revolución.

$\Rightarrow$ sabemos que $\quad w(t) = K\cosh\left(u_0 + \dfrac{t}{K}\right)$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \underline{\underline{K}}\cosh\left(\underline{\underline{u_0}} + \frac{t}{K}\right) - \underline{\underline{\lambda}}$$

K, u_0, λ tienen que cumplir:

$$y\left(-\frac{l}{2}\right) = H, \quad y\left(l/2\right) = H, \quad \int_{-l/2}^{l/2} \sqrt{1+(y'(t))^2}\, dt = L.$$

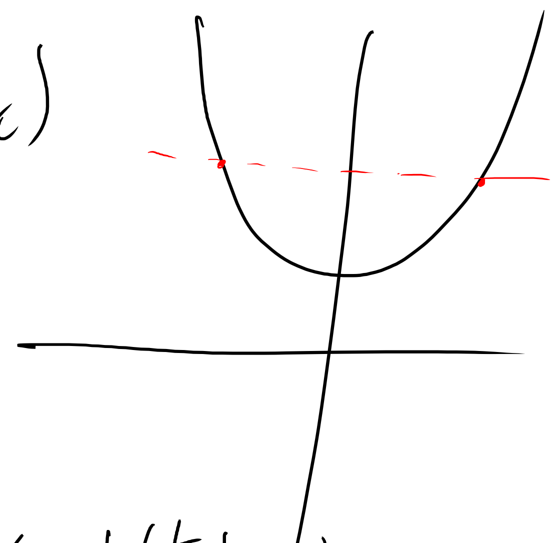
es decir:

$$H = K\cosh\left(u_0 - \frac{l}{2K}\right) - \lambda \quad , \quad H = K\cos\left(u_0 + \frac{l}{2K}\right) - \lambda$$

$$\Rightarrow \quad \cosh\left(u_0 - \frac{l}{2K}\right) = \cosh\left(u_0 + \frac{l}{2K}\right)$$

$$\Rightarrow \quad u_0 - \frac{l}{2K} = -\left(u_0 + \frac{l}{2K}\right)$$

$$2u_0 = 0 \quad , \quad \boxed{u_0 = 0}$$



$$* \; H = K\cosh\left(\frac{l}{2K}\right)$$

$$y(t) = K\cosh\left(\frac{t}{K}\right) - \lambda.$$

Uso la ecuación de la longitud: $y'(t) = \operatorname{senh}\left(\frac{t}{K}\right)$

$$1 + (y'(t))^2 = 1 + \left(\operatorname{senh}\left(\frac{t}{K}\right)\right)^2 = \left(\cosh\left(\frac{t}{K}\right)\right)^2$$

$[\cosh^2 - \operatorname{senh}^2 = 1]$

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{l/2} \sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt = \int_{-l/2}^{l/2} \cosh\left(\frac{t}{K}\right) dt = K \operatorname{senh}\left(\frac{t}{K}\right)\Bigg|_{t=-\frac{l}{2}}^{t=\frac{l}{2}}$$

$$= K \operatorname{senh}\left(\frac{l}{2K}\right) - K \operatorname{senh}\left(-\frac{l}{2K}\right)$$

$$= 2K \operatorname{senh}\left(\frac{l}{2K}\right).$$

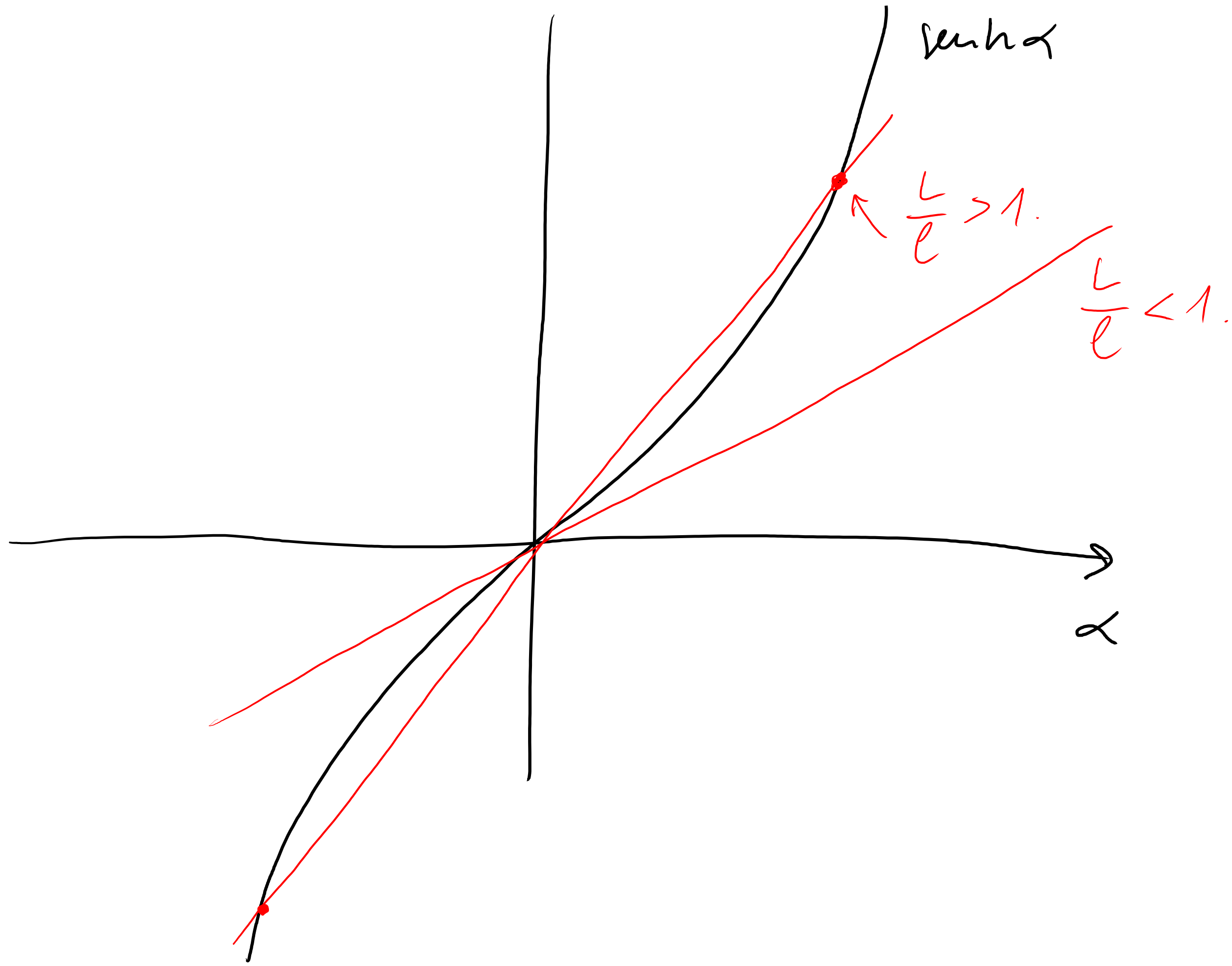
La ecuación queda:

$$2K \operatorname{senh}\left(\frac{l}{2K}\right) = L$$

Cambio $\alpha := \frac{l}{2K}$, $K = \frac{l}{2\alpha}$

$$\frac{l}{\alpha} \operatorname{senh}(\alpha) = L \qquad \boxed{\operatorname{senh}\alpha = \frac{L}{l} \cdot \alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{senh}\alpha = \frac{L}{\ell}\cdot\alpha}$$



Ejemplo Calcular puntos críticos: (extremales).

$$F(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y(t))^2 - (y'(t))^2 \right) dt$$

* $D = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,\frac{\pi}{2}] \,/\, y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 \}$

$$F(t,y,z) = y^2 - z^2, \qquad \partial_y F = 2y, \quad \partial_z F = -2z$$

$$2y(t) = -\frac{d}{dt}\left(2y'(t)\right) = -2y''(t)$$

$$y''(t) = -y(t)$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = A\cos t + B \operatorname{sen} t$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 = A \\ y(\frac{\pi}{2}) = 1 = B \end{array}\right] \quad \boxed{y(t) = \operatorname{sen} t}$$

* $D = \mathcal{C}^2[0,\frac{\pi}{2}]$. ¿Puntos críticos?

(Lo terminaremos luego).

Extremos libres

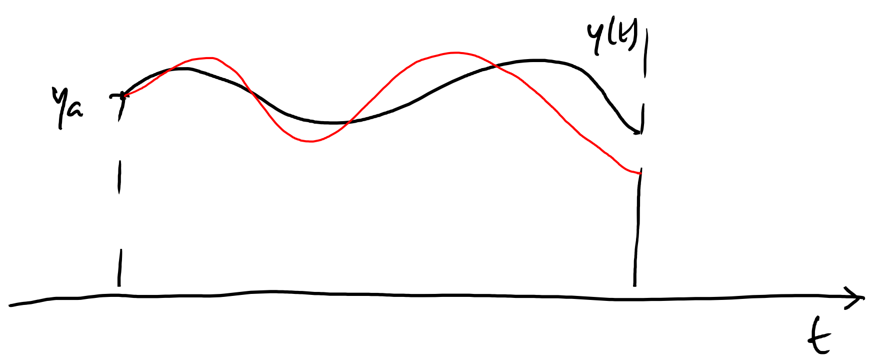
Consideramos $\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(t, y(t), y'(t))\, dt$

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^d) ; \ y(a) = y_a \}$$

$$F : [a,b] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad y_a \in \mathbb{R}^d.$$

¿Puntos críticos? Deben cumplir

$$\delta_v \mathcal{F}(y) = 0 \qquad \forall \ v \in \mathcal{C}^2([a,b], \mathbb{R}^d), \quad v(a) = 0.$$



Como $\delta_v \mathcal{F}(y) = 0 \quad \forall \ v \in \mathcal{C}_c^\infty((a,b), \mathbb{R}^d)$

$\Rightarrow$ y cumple ec. Euler-Lagrange

Calculamos como la otra vez:

$$\delta_v \mathcal{F}(y) = \int_a^b v(t)\nabla_y F(t,y(t),y'(t))\,dt + \int_a^b \underbrace{v'(t)}_{dv}\overbrace{\nabla_z F(t,y(t),y'(t))}^{u}\,dt$$

$$= \int_a^b v\nabla_y F(t,y,y')\,dt - \int_a^b v(t)\frac{d}{dt}\nabla_z F(t,y,y')\,dt \qquad \left\| \begin{array}{l} u = \nabla_z F(t,y,y'), \\ dv = v'(t)\,dt \end{array} \right.$$

$= 0$ porque y cumple E-L.

$$+ \nabla_z F(t,y(t),y'(t))\,v(t)\Big|_{t=a}^{t=b}$$

$$= \nabla_z F(b,y(b),y'(b))\,v(b) - \nabla_z F(a,y(a),y'(a))\,\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{v(a)}$$

$$= \nabla_z F(b,y(b),y'(b))\cdot v(b) = 0.$$

pto. crítico.

$$\Rightarrow \boxed{\nabla_z F(b,y(b),y'(b)) = 0.}$$

Conclusión:

* Extremo dcho. libre $\Rightarrow$ $\nabla_z F(b,y(b),y'(b)) = 0.$
* Extremo izq. libre $\Rightarrow$ $\nabla_z F(a,y(a),y'(a)) = 0.$

Ejemplo Calcular puntos críticos: (extremales).

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left((y(t))^2 - (y'(t))^2 \right) dt \qquad F(t,y,z) = y^2 - z^2$$
$$\nabla_z F = -2z$$

* $D = \mathcal{C}^2[0,\frac{\pi}{2}]$. Euler-Lag: $y'' = -y$

  * Extremo 0 libre: $-2y'(0) = 0$ $\quad y'(0) = 0$
  * Extremo $\frac{\pi}{2}$ libre: $-2y'(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0$.

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= A\cos t + B\,\text{sen}\, t \\ y'(t) &= -A\,\text{sen}\, t + B\cos t \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} y'(0) &= B = 0 \\ y'(\tfrac{\pi}{2}) &= -A = 0 \end{aligned}$$

$y \equiv 0$ es el único punto crítico.

* $D = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,\frac{\pi}{2}] / y(\frac{\pi}{2}) = 1 \}$

$$y'' = -y \quad \Rightarrow \quad y(t) = A\cos t + B\,\text{sen}\, t$$

Extremo izq. libre: $y'(0) = 0 \Rightarrow B = 0$.

Extremo dcho: $y(\frac{\pi}{2}) = 1 \Rightarrow A\cos\frac{\pi}{2} = 1$ X

$\cancel{0 = 1}$

$\Rightarrow$ no hay puntos críticos.

Ejemplo $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (y'(t))^2 dt$,

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,1] \,/\, y(0) = 0,\ y(1) = 1,\ \int_0^1 y(s)\,ds = 1 \}$$

¿Puntos críticos?

$$F(t,y,z) = z^2, \qquad F^*(t,y,z) = z^2 + \lambda y$$

$$\partial_y F^* = \lambda, \quad \partial_z F^* = 2z$$

Euler-Lag: $\lambda = \frac{d}{dt}(2y'(t)) = 2y''(t)$

$$y''(t) = \frac{\lambda}{2}.$$ Soluciones:

$$y(t) = \frac{\lambda}{4} t^2 + C_1 t + C_2$$

Extremos: $0 = y(0) = C_2$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = y(1) = \frac{\lambda}{4} + C_1 \\ \text{Integral: } \int_0^1 \left(\frac{\lambda}{4} t^2 + C_1 t\right) dt = \frac{\lambda}{12} + \frac{C_1}{2} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{encontramos } C_1, \lambda.$$

Hasta ahora:

- Condición necesaria de extremo ($\delta_v \mathcal{F}(y) = 0 \quad \forall\, v$ admisible).
- Para funcionales de tipo integral, esto implica ec. Euler-Lagrange
- Para funcionales integrales con restricciones (algebraicas / integrales)
  $\Rightarrow$ ec. Euler-Lagrange con multiplicadores.
- Para extremos libres $\Rightarrow$ condiciones en los extremos.

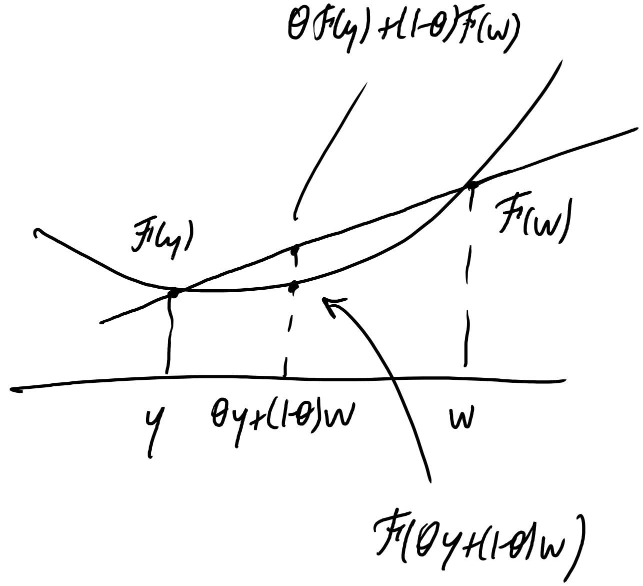
Queremos ver

- Condición suficiente de extremo.

Def.- (Convexidad/concavidad)

$\mathcal{F}: D \to \mathbb{R}$. $D \subseteq \mathbb{X}$ espacio vectorial.

Decimos que $\mathcal{F}$ es <u>convexa</u> cuando



$$\mathcal{F}(\theta y+(1-\theta)w) \leq \theta \mathcal{F}(y)+(1-\theta)\mathcal{F}(w)$$

$$\forall\, y, w \in D, \quad \forall\, \theta \in (0,1)$$

siempre que $\theta y+(1-\theta)w \in D$.

* $\mathcal{F}$ <u>estrictamente convexa</u> cuando la desigualdad siempre es estricta.
* cóncava/estrictamente $\to$ lo mismo con $\geq$ / $>$ en lugar de $\leq$ / $<$.

<u>Ejemplos</u>:

* Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f es $\mathcal{C}^2$

$$f \text{ convexa} \Leftrightarrow f'' \geq 0$$

$$f \text{ estrictamente convexa} \Leftarrow f'' > 0$$

$$\not\Rightarrow \quad (\text{ejemplo, } f(x)=x^4).$$

* Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, f es $\mathcal{C}^1$

f convexa $\Leftrightarrow$ f' es creciente

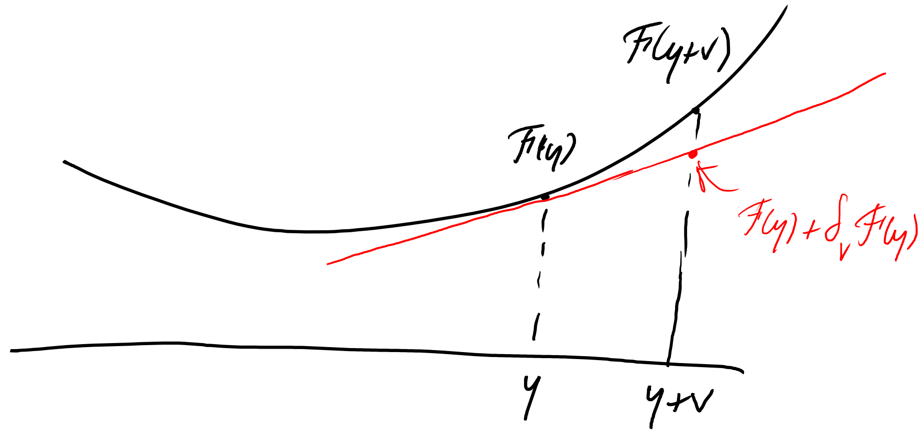
f estrictamente convexa $\Leftrightarrow$ f' estrictamente creciente.

* Si $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$, f es $\mathcal{C}^2$.

f convexa $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Hess}(f)$ (semi) definida positiva (no estrictamente).

f estrictamente convexa $\Leftarrow$ $\mathrm{Hess}(f)$ estrictamente definida positiva.

16 de marzo



Lema

X e.v., $D \subseteq X$.

$\mathcal{F}: D \to \mathbb{R}$ convexa. Se cumple:

$$\mathcal{F}(y+v) \geq \mathcal{F}(y) + \delta_v \mathcal{F}(y)$$

$\forall\, y \in D$, $v \in X$ tal que $y+v \in D$ y existe $\delta_v \mathcal{F}(y)$.

* Si $\mathcal{F}$ estrictamente convexa $\Rightarrow$ la desigualdad es estricta siempre que $v \neq 0$.

Casos particulares:

* Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, $f \in \mathcal{C}^1$,

$$f(y+v) \geq f(y) + v f'(y)$$

$$\left[\text{Observación: } \delta_v f(y) := \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(y+\varepsilon v) = f'(y+\varepsilon v)\cdot v\Big|_{\varepsilon=0} = f'(y)\cdot v\right].$$

* Si $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ convexa, $f \in \mathcal{C}^1$

$$f(y+v) \geq f(y) + v \cdot \nabla f(y)$$

$$\left[\text{Observación: } \delta_v f(y) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} f(y+\varepsilon v) = \nabla f(y+\varepsilon v)\cdot v\Big|_{\varepsilon=0} = \nabla f(y)\cdot v.\right.$$

Dem del lema. Uso desigualdad para y, $y+v$

$$y+\varepsilon v = \theta y + (1-\theta)(y+v) \quad \text{para } \theta = 1-\varepsilon$$
$$= (1-\varepsilon) y + \varepsilon (y+v)$$

$$\mathcal{F}(y+\varepsilon v) \leq (1-\varepsilon)\mathcal{F}(y) + \varepsilon \mathcal{F}(y+v)$$

$$\frac{\mathcal{F}(y+\varepsilon v) - \mathcal{F}(y)}{\varepsilon} \leq \mathcal{F}(y+v) - \mathcal{F}(y)$$

$\lim_{\varepsilon \to 0}$ da el resultado.

desigualdad estricta — queda por hacer.

Teorema (condición suficiente de extremo)

X e.v. $D \subseteq X$. $\mathcal{F}: D \to \mathbb{R}$ convexa. Si $y_* \in D$ cumple que:

$\forall\, v \in X$ tal que $y_* + v \in D$,

① $\delta_v \mathcal{F}(y_*)$ está definida

② $\delta_v \mathcal{F}(y_*) = 0$.

Entonces $\mathcal{F}$ alcanza un mínimo en y_*.

Si $\mathcal{F}$ estrictamente convexa $\Rightarrow$ es el único mínimo de $\mathcal{F}$.

Dem. Tomamos otro $y \in D$.

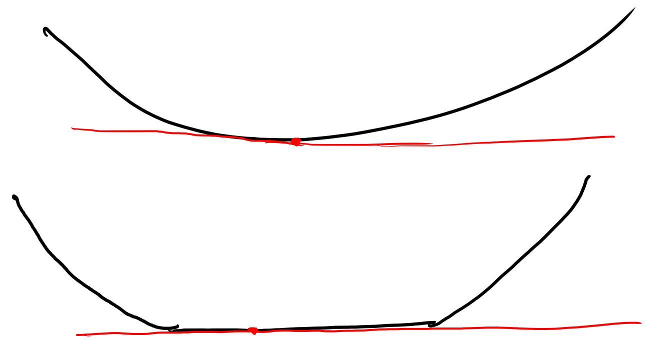
$$v := y - y_* \quad \text{de forma que}$$

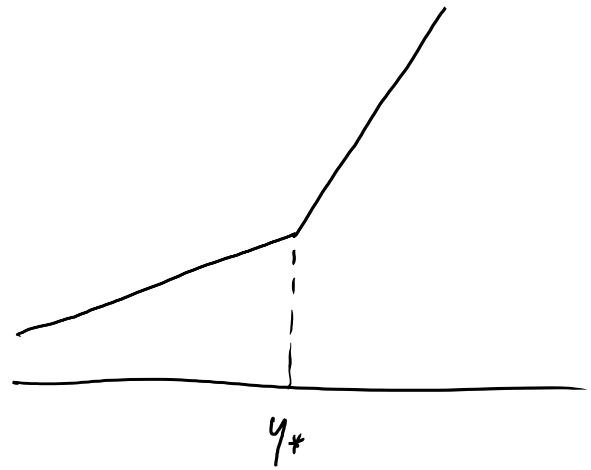
$$y = y_* + v$$

Por el lema de antes,

$$\underbrace{\mathcal{F}(y_*+v)}_{\mathcal{F}(y)} \geq \mathcal{F}(y_*) + \underbrace{\delta_v \mathcal{F}(y_*)}_{0}$$

$$\mathcal{F}(y) \geq \mathcal{F}(y_*) \Rightarrow y_* \text{ mínimo.}$$





Si $\mathcal{F}$ estrictamente convexa, tomamos $y \neq y_*$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(y) > \mathcal{F}(y_*) \quad \checkmark$$

Convexidad para funcionales de forma integral

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(t, y(t), y'(t))\,dt \,, \quad D = \left\{ y \in \mathcal{C}^2([a,b];\mathbb{R}^d) \;/\; \begin{array}{l} y(a) = y_a \\ y(b) = y_b \end{array} \right\}$$

¿Cuándo puedo decir que $\mathcal{F}$ sea convexa?

Tomo $y, w \in D$

$$\theta \mathcal{F}(y) + (1-\theta)\mathcal{F}(w) = \theta \int_a^b F(t,y,y')\,dt + (1-\theta)\int_a^b F(t,w,w')\,dt$$

$$= \int_a^b \left[\theta F(t,y,y') + (1-\theta) F(t,w,w') \right] dt$$

(Si $F = F(t,y,z)$ es convexa como función de (y,z))

$$\geq \int_a^b F(t, \theta y + (1-\theta) w, \theta y' + (1-\theta) w')\,dt$$

$$= \mathcal{F}(\theta y + (1-\theta) w).$$

Lema. Para un funcional de tipo integral,

* Si F es convexa en (y,z) $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ convexo
* Si F es estrict. convexa en (y,z) $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ estrictamente convexo
* Si F sólo depende de (t,y)

  $\Rightarrow$ mismos resultados, usando sólo convexidad en y

Ejemplos. * $\mathcal{F}(y) := \int_0^1 (y(t))^2\,dt$, $D = \mathcal{C}^2[0,1]$.

Es convexo porque $F(y) = y^2$ es convexa

estrictamente convexo porque $F(y) = y^2$ es estrict. conv.

* $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 |y(t)|^2\,dt$, $D = \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}^d)$.

$$F(y) = |y|^2 \qquad \text{Hess}\,F(y) = \begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Hess}\,F(y) = \left(\partial_{y_i}\partial_{y_j} F(y)\right)_{\substack{i=1,\dots,d \\ j=1,\dots,d}}$$

$\mathcal{F}$ estrict. convexo.

* $\mathcal{F}(y) = \int_a^b (y'(t))^2\,dt$ $\quad D = \mathcal{C}^2[0,1]$.

* Convexo porque la función $(y,z) \mapsto z^2$ es convexa.

$F(y,z) = z^2$ no es estrictamente convexa.

$$\underset{(y,z)}{\text{Hess}}\,F(y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{semidefinida positiva.}$$

$\mathcal{F}$ es estrictamente convexo?

NO $\quad \mathcal{F}(y) = 0 \ \forall\, y$ constante.

17 marzo

Ejemplo $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 e^{2t}\left((y'(t))^2 + (y(t))^2\right) dt$,

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,1] \,/\, y(0)=0,\ y(1) = e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}} \}$$

¿Extremos de $\mathcal{F}$?

Ptos. críticos: $F(t,y,z) = e^{2t}(z^2+y^2)$

$$\partial_y F = e^{2t}\cdot 2y \ , \quad \partial_z F = e^{2t}\cdot 2z$$

$$2e^{2t}y(t) = 2\frac{d}{dt}\left(e^{2t}y'(t)\right) = 4e^{2t}y' + 2e^{2t}y''$$

$$y = 2y' + y'' \qquad \left[y'' + 2y' - y = 0 \right]$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$y(t) = Ae^{(-1+\sqrt{2})t} + Be^{(-1-\sqrt{2})t}$$

$$0 = y(0) = A + B \ ; \quad y(1) = e^{\sqrt{2}} - e^{-\sqrt{2}} = Ae^{-1+\sqrt{2}} - Ae^{-1-\sqrt{2}}$$

$$1 = \frac{A}{e} \qquad A = e.$$

$$y(t) = e^{\sqrt{2}t} - e^{-\sqrt{2}t}$$

$y(t) = 2\,\mathrm{senh}(\sqrt{2}t)$ único punto crítico.

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 e^{2t}\left((y'(t))^2 + (y(t))^2\right) dt, \qquad \text{¿convexidad?}$$

$$F(t,y,z) = e^{2t}(z^2+y^2)$$

$$\mathrm{Hess}_{(y,z)} F(t,y,z) = \begin{pmatrix} \boxed{2e^{2t}} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

Definida positiva (estrictamente)

$\Rightarrow \mathcal{F}$ estrict. convexo.

$\Rightarrow y$ es un mínimo.

<u>Ejemplo</u>. Curva más corta entre dos puntos:

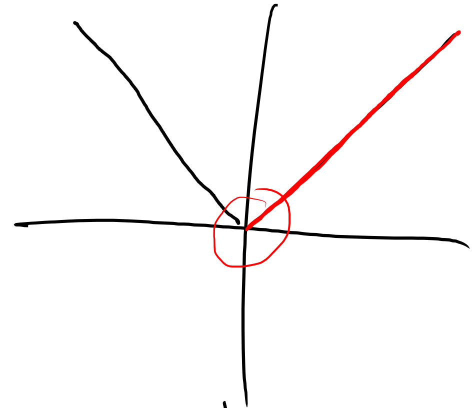
$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 |y'(t)|\,dt, \qquad D = \{\mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}^d) \,/\, y(0)=y_0,\ y(1)=y_1\}$$

Euler-Lagrange $\Rightarrow$ los puntos críticos son rectas.

¿Convexidad de $\mathcal{F}$?

$$F(z) = |z| = \sqrt{z_1^2 + \cdots + z_d^2}$$

$d=1$



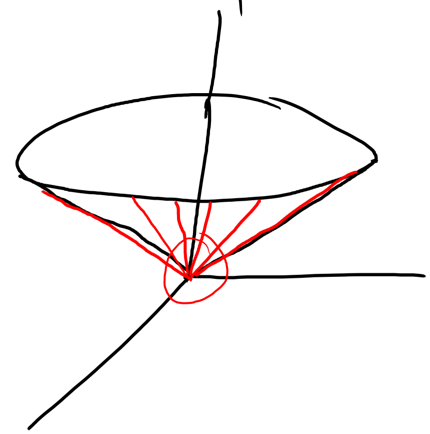
$$F(\theta z + (1-\theta) w) =$$

$$= |\theta z + (1-\theta) w| \leq$$

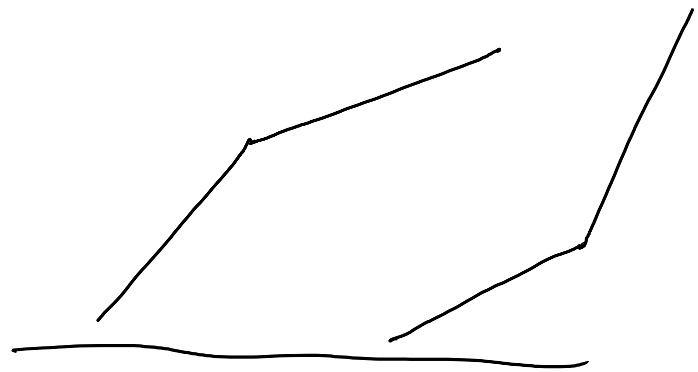
$$\leq \theta |z| + (1-\theta) |w|$$

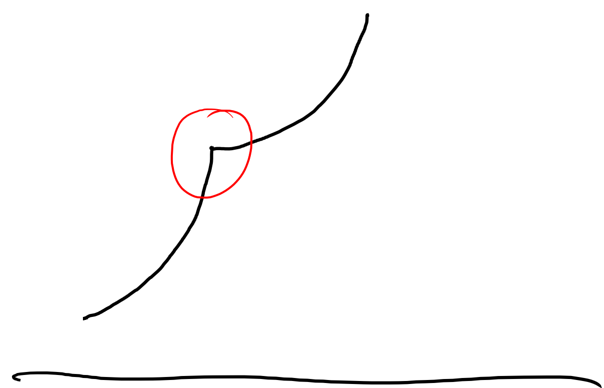
$\Rightarrow$ F es convexa.

$d=2$



F <u>no</u> es estrictamente convexa.





Ejemplo. $\mathcal{F}(y) = \int_1^2 (t y'(t) + y(t))\, dt$

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2[1,2] \,/\, y(1)=1,\ y(2)=2 \}$$

¿Extremos de $\mathcal{F}$?

$$F(t,y,z) = tz + y \quad , \quad \partial_y F = 1, \quad \partial_z F = t$$

$$1 = \frac{d}{dt} t = 1 \qquad\qquad 1 = 1.$$

$\mathcal{F}$ es constante en D!

$$\underbrace{\int_1^2 t y'(t)\, dt} = -\int_1^2 y(t) + t y(t) \Big|_{t=1}^{t=2}$$

$$= \underbrace{-\int_1^2 y(t) dt} + \underbrace{2y(2) - y(1)}_{3}$$

Ejemplo $\mathcal{F}(y) = \displaystyle\int_1^2 (t y'(t) + y(t))\, dt$ $\qquad$ $F(t,y,z) = tz + y$

$\partial_z F = t$

$D = \mathcal{C}^2[1,2]$

Euler-Lagrange: $1 = 1$

Extremos libres: $\partial_z F(1, y(1), y'(1)) = 0 \quad \| \quad 1 = 0$

$\partial_z F(2, y(2), y'(2)) = 0 \quad \| \quad 2 = 0$ $\quad \times$

$\Rightarrow$ no hay puntos críticos en este dominio.

(A pesar de esto, $\mathcal{F}$ es cóncava y convexa — es lineal).

22 de marzo

* Euler-Lag. con 1 función $y:[a,b]\to\mathbb{R}$.
* E-L. con d funciones: $y:[a,b]\to\mathbb{R}^d$.
* Condiciones con extremos libres
* E-L. $y:\Omega\to\mathbb{R}$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$. ?

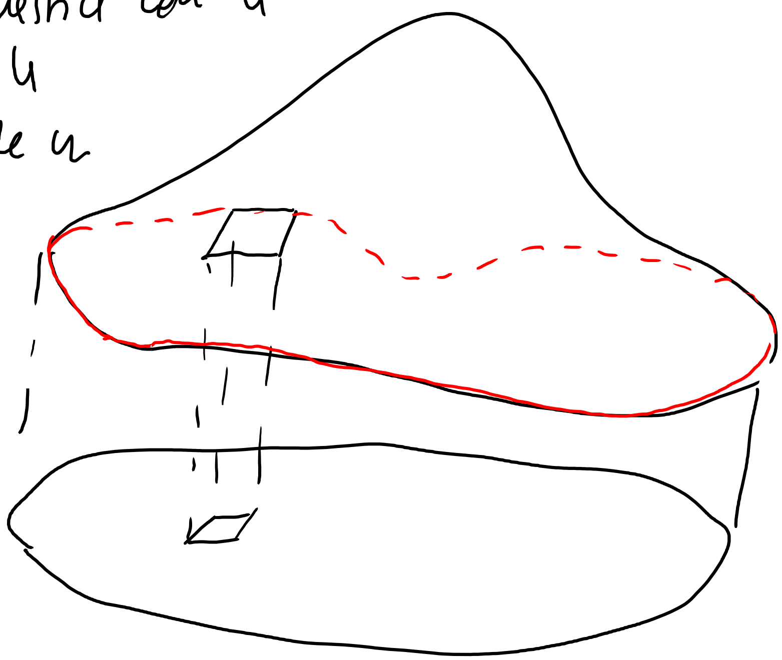
Ejemplo típico:

$$\mathcal{F}(y)=\underbrace{\int_\Omega |\nabla y(x)|^2\,dx}_{\text{aproximación a la energía elástica de una lámina elástica con la forma de la gráfica de } u}$$

$D=\{y\in\mathcal{C}^2(\overline{\Omega})\ /\ y=g \text{ en } \partial\Omega\}$

$\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ abierto, acotado.

$g:\partial\Omega\to\mathbb{R}$ continua.



Euler-Lagrange con varias variables

$$\mathcal{F}(y) = \int_\Omega F(x, y(x), \nabla y(x))\, dx \qquad \mathcal{D} = \{ y \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) \,/\, y = f \text{ en } \partial\Omega \}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto, acotado.

$f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua.

$F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

F es $\mathcal{C}^2$.

$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$

$y(x) \in \mathbb{R}$

$\nabla y(x) = (\partial_{x_1} y(x), \partial_{x_2} y(x), \dots, \partial_{x_d} y(x))$.

$$F = F(x, y, z) = F(x_1, \dots, x_d, y, z_1, \dots, z_d)$$

¿Puntos críticos de $\mathcal{F}$? Tomamos $v \in \mathcal{C}^2_c(\Omega)$ ✓

$v \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ ✓

$v \in \mathcal{C}^2_0(\overline{\Omega})$ ✓

$\uparrow$

$v = 0$ en $\partial\Omega$.

$$0 = \delta_v \mathcal{F}(y) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \mathcal{F}(y+\varepsilon v) = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \int_\Omega F(x, y(x)+\varepsilon v(x), \nabla y(x) + \varepsilon \nabla v(x))\, dx$$

$$= \int_\Omega \partial_y F(x, y+\varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v)\, v\, dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$+ \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \partial_{z_i} F(x, y+\varepsilon v, \nabla y + \varepsilon \nabla v)\, \partial_{x_i} v\, dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_\Omega \partial_y F(x, y, \nabla y)\, v\, dx + \int_\Omega \nabla_z F(x, y, \nabla y) \cdot \nabla v\, dx$$

?

$$\nabla_z F = (\partial_{z_1} F, \dots, \partial_{z_d} F).$$

Tª divergencia

$X : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ $\qquad$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abto, acotado, $\partial\Omega$ $\mathcal{C}^1$ a trozos.

$X \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. "campo de vectores".

$$\int_\Omega \operatorname{div}(X(x))\, dx = \int_{\partial\Omega} X(x)\cdot N(x)\, dS(x)$$

$dS(x)$ → integral de superficie

$N(x)$ → normal exterior a Ω en $x \in \partial\Omega$.

$$\operatorname{div} X(x) = \partial_{x_1} X_1(x) + \partial_{x_2} X_2(x) + \dots + \partial_{x_d} X_d(x)$$

$$X(x) = (X_1(x), \dots, X_d(x))$$

$$x = (x_1, \dots, x_d).$$

Consecuencias:

$X : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ $\qquad$ $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abto, acotado, $\partial\Omega$ $\mathcal{C}^1$ a trozos.

$X \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$. "campo de vectores".

$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$.

② $$\int_\Omega X(x)\cdot \nabla f(x)\, dx = -\int_\Omega \operatorname{div}(X(x))\cdot f(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} f(x)\, X(x)\, N(x)\, dS(x)$$

"Fórmula de Green".

① $$\int_a^b g(x)\cdot f'(x)\, dx = -\int_a^b g'(x) f(x)\, dx - f(b)g(b) + f(a)g(a)$$

Dem. ①. $(gf)' = g'f + gf'$

$$\int_a^b (gf)' = \int_a^b g'f + \int_a^b gf'$$

$$\shortparallel$$

$$g(b)f(b) - g(a)f(a).$$

②. $$\operatorname{div}\big(f(x)\cdot X(x)\big) = \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i}\big(f(x)\cdot X_i(x)\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \partial_{x_i} f(x)\cdot X_i(x) + \sum_{i=1}^{d} f(x)\,\partial_i X_i(x) =$$

$$= \nabla f(x)\cdot X(x) + f(x)\cdot \operatorname{div} X(x).$$

$$\int_\Omega \operatorname{div}(f(x)\cdot X(x))\,dx = \int_\Omega \nabla f\cdot X + \int_\Omega f\cdot \operatorname{div} X$$

$$\shortparallel$$

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\cdot X(x)\cdot N(x)\,dS(x).$$

✓

Habíamos calculado que:

$$\delta_v \mathcal{F}(y) = \int_\Omega \partial_y F(x,y,\nabla y)\, v \, dx + \int_\Omega \nabla_z F(x,y,\nabla y)\cdot \nabla v \, dx$$

?

$$= \int_\Omega \partial_y F \cdot v \, dx - \int_\Omega \mathrm{div}_x \left[\nabla_z F(x,y,\nabla y) \right] \cdot v \, dx$$

$$= \int_\Omega v \left[\partial_y F(x,y(x),\nabla y(x)) - \mathrm{div}_x \left[\nabla_z F(x,y(x),\nabla y(x)) \right] \right] dx = 0.$$

<u>Lema fundamental en $\mathbb{R}^d$</u>

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, f continua $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abierto.

$$\int_\Omega v(x) f(x)\, dx = 0 \quad \forall\, v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

$$\Rightarrow f \equiv 0 \text{ en } \Omega.$$

Deducimos:

$$\boxed{\partial_y F(x,y(x),\nabla y(x)) = \operatorname{div}_x\left[\nabla_z F(x,y(x),\nabla y(x))\right] \quad \forall\ x\in\Omega}$$

<u>Volvemos al ejemplo:</u>

$$\mathcal{F}(y) = \int_\Omega |\nabla y(x)|^2 dx = \int_\Omega \left[(\partial_{x_1} y(x))^2 + (\partial_{x_2} y(x))^2 + \dots + (\partial_{x_d} y(x))^2\right] dx.$$

$$F(x,y,z) = z_1^2 + \dots + z_d^2 = |z|^2.$$

$$\partial_y F = 0. \qquad \nabla_z F = 2z.$$

Euler-Lagrange: $$0 = \operatorname{div}_x(2\nabla y(x)) = 2\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}(\partial_{x_i} y(x)) =$$

$$= 2\sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 y(x) = 2\Delta y(x).$$

$$\boxed{\Delta y(x) = 0\ ,\ x\in\Omega}$$ Ec. Laplace.

Ejemplos (convexidad)

* $\mathcal{F}(y) = \int_2^3 (t-1)\, y(t)^2\, dt$, $\quad D = \mathcal{C}^2[2,3]$.

¿(Estrictamente) convexo?

$F(t,y,z) = (t-1)y^2$ $\quad$ F estrictamente convexa en y.
porque $(t-1) > 0$ en $t \in [2,3]$.

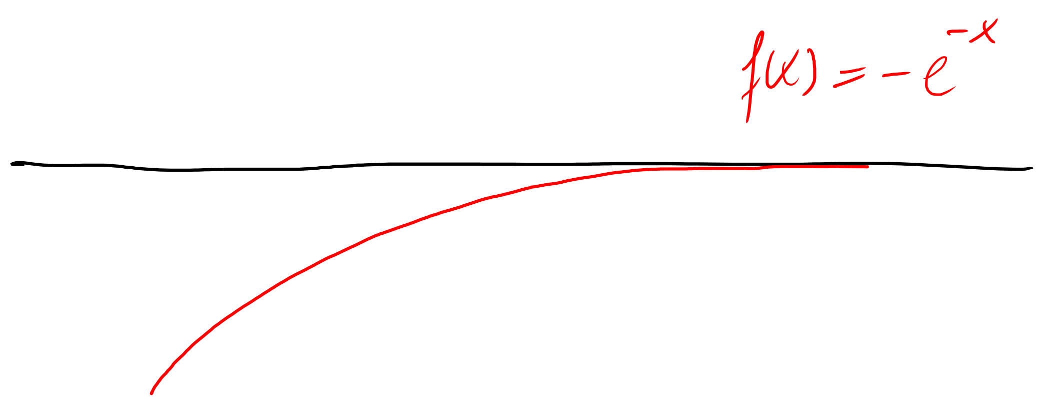
$\Rightarrow \mathcal{F}$ estrictamente convexo.

[$y \equiv 0$ es el único pto. crítico, el único mínimo].

* ~~$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cóncava, acotada superiormente $\Big\} \Rightarrow f$ alcanza un máximo en algún punto de $\mathbb{R}$.~~

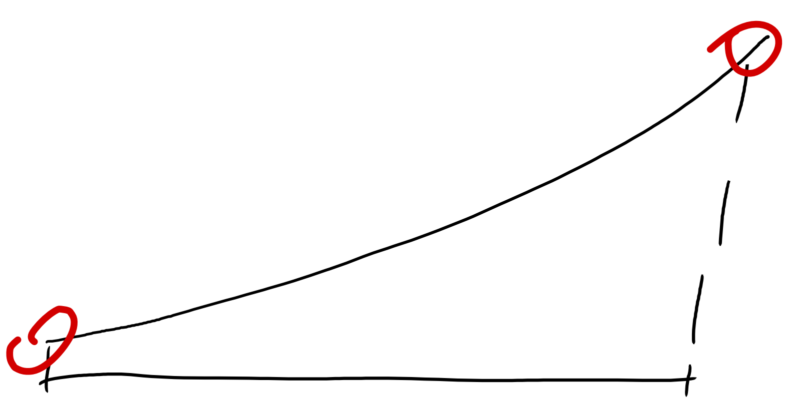
NO ES cierto

EXAMEN



* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexa $\Rightarrow f$ tiene un punto crítico.

NO $\Rightarrow$ TIENE 2



* $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 \left(e^{y(t)} + (y''(t))^2 \right) dt \qquad D = \mathcal{C}^2[0,1].$

¿Convexo? ¿Estrictamente?

o ver que es convexo para y, y'. y', y''

$$\mathcal{F}(\theta y_1 + (1-\theta) y_2) = \int_0^1 \left[e^{\theta y_1(t) + (1-\theta) y_2(t)} + \left(\theta y_1''(t) + (1-\theta) y_2''(t) \right)^2 \right] dt \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left[\theta e^{y_1(t)} + (1-\theta) e^{y_2(t)} + \theta (y_1''(t))^2 + (1-\theta)(y_2''(t))^2 \right] dt =$$

$$= \theta \mathcal{F}(y_1) + (1-\theta) \mathcal{F}(y_2).$$

* $\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (y'(t))^2 e^{2t}\,dt - \int_0^1 (y(t))^2 e^{2t}\,dt \qquad D = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,1] / \ y(0)=0,\ y(1)=1 \}$

¿Extremos?

Ptos. críticos: $F(t,y,z) = z^2 e^{2t} - y^2 e^{2t}$

$$\partial_y F = -2y e^{2t}, \qquad \partial_z F = 2z e^{2t}$$

$$-2ye^{2t} = 2(y'e^{2t})' = 2y''e^{2t} + 4y'e^{2t}$$

$$-y = y'' + 2y' \qquad \boxed{y'' + 2y' + y = 0}$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0. \qquad \lambda = -1 \text{ doble}$$

$$(\lambda+1)^2 = 1$$

$$y(t) = Ae^{-t} + Bte^{-t}.$$

$$y(0) = A = 0. \quad , \ y(1) = \frac{B}{e} = 1 \Rightarrow B = e$$

$y(t) = te^{1-t}$ único punto crítico.

¿$\mathcal{F}$ es convexa/cóncava?

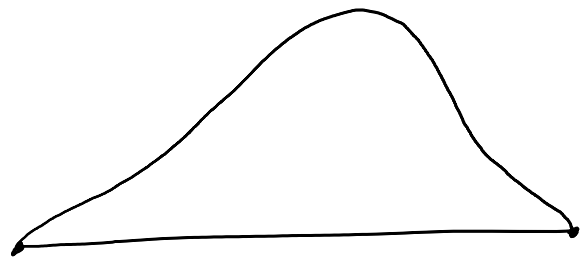
$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 (y'(t))^2 e^{2t}\,dt - \int_0^1 (y(t))^2 e^{2t}\,dt$$

$$F(t,y,z) = z^2 e^{2t} - y^2 e^{2t} \qquad \operatorname{Hess}_{(y,z)}(F) = \begin{pmatrix} -2e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

→ no sabemos si $\mathcal{F}$ es cóncavo o convexo, o nada.

Ejemplo. ¿Es cierto que $\int_0^1 u(t)^2\,dt \le \int_0^1 (u'(t))^2\,dt \quad \forall\, u \in \mathcal{C}^2[0,1]$ con $u(0)=u(1)=0$.

Desigualdad de Poincaré.



Traducción:

$$\int_0^1 \left((u(t))^2-(u'(t))^2\right) dt \le 0 \ ?$$

$$F(t,u,z) = u^2 - z^2$$

Euler-Lagrange: $u'' = -u$

$$u(t) = A\cos t + B \operatorname{sen} t$$

$$0 = u(0) = A$$

$$0 = u(1) = B \operatorname{sen} 1 \Rightarrow B = 0.$$

$y \equiv 0$ es el único punto crítico.

Pero F no sabemos que sea cóncavo/convexo.

Idea: $\displaystyle\int_0^1 u^2 \leq \int_0^1 (u')^2$

Es suficiente demostrarlo cuando $\displaystyle\int_0^1 (u'(t))^2 dt = 1$.

Dem. Supongamos que:

$$\int_0^1 w^2 \leq 1 \quad \forall\ w \in \mathcal{C}^2[0,1] \,/\, w(0)=w(1)=0, \ \int_0^1 (w'(t))^2 dt = 1.$$

Tomo $u \in \mathcal{C}_0^2[0,1]$, $u \not\equiv 0$. $\quad w(t) := \dfrac{1}{\left(\int_0^1 (u'(t))^2 dt\right)^{1/2}} \cdot u(t)$

$$\int_0^1 (w(t))^2 dt = 1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 w^2 \leq 1 \Rightarrow \int_0^1 u^2 \cdot \frac{1}{\int_0^1 (u')^2} \leq 1$$

$$\int_0^1 u^2 \leq \int_0^1 (u')^2.$$

Así que podemos estudiar:

$$\mathcal{F}(u) = \int_0^1 (u(t))^2 dt \quad , \quad D = \{ u \in \mathcal{C}_0^2[0,1] \,/\, \int_0^1 (u'(t))^2 dt = 1 \}$$

Queremos encontrar el máximo de $\mathcal{F}$ en D.

¿Puntos críticos?

$$F(t,y,z) = y^2 , \qquad F^*(t,y,z) = y^2 + \lambda (z^2 - 1)$$

$$\partial_y F^* = 2y \quad , \quad \partial_z F^* = 2\lambda z .$$

E-L: $\quad 2y = 2\lambda y'' \qquad y'' = \frac{1}{\lambda} y \qquad$ (cuando $\lambda \neq 0$).

Soluciones: $\quad y(t) = A e^{\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} + B e^{-\frac{t}{\sqrt{\lambda}}} \qquad$ cuando $\lambda > 0$.

$$y(t) = A \cos\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) + B \,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}\right) \quad \text{cuando } \lambda < 0 .$$

23 de marzo

Principios variacionales en física

Ejemplo: $\mathcal{F}(y) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} m |y'(t)|^2 - U(y(t))\right) dt$

$\frac{1}{2} m |y'(t)|^2 \equiv$ energía potencial en tiempo t.

$U \equiv$ energía potencial $\qquad$ (fuerza $= -\nabla U$)

Ec. Euler-Lagrange: $F(t, y, z) = \frac{1}{2} m |z|^2 - U(y)$

$$\nabla_y F = -\nabla U(y), \quad \nabla_z F = m z$$

$$\boxed{m\, y''(t) = -\nabla U(y)}$$

Principio de Hamilton

Definimos para un sistema físico:

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b (T - U)\, dt$$

$T \equiv$ energía cinética

$U \equiv$ energía potencial

funcional de acción.

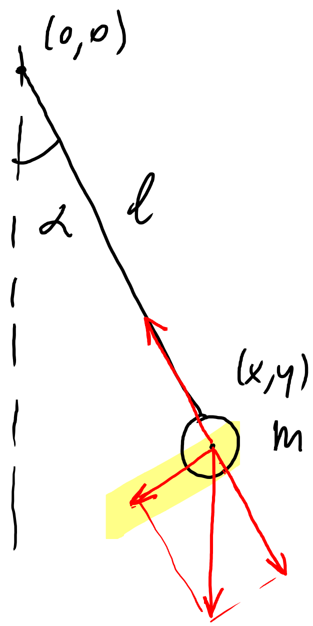
Las trayectorias del sistema son puntos críticos del funcional de acción.

* sirve para sistemas conservativos
* válido para cualquier número de partículas
* válido en cualquier sistema de coordenadas
* válido para sistemas con restricciones pasivas (que no requieren energía / extraen energía).

Ejemplos

* 1 partícula — lo hemos visto.

Péndulo. ¿Ecuaciones de movimiento?



Elijo coordenadas: $\alpha = \alpha(t)$

Cambio:
$$\left.\begin{aligned} x &= l \operatorname{sen} \alpha \\ y &= -l \cos \alpha \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} x' &= l \cos \alpha \cdot \alpha' \\ y' &= l \operatorname{sen} \alpha \cdot \alpha' \end{aligned}$$

E. cinética:
$$T = \frac{1}{2} m \left((x'(t))^2 + (y'(t))^2 \right)$$
$$= \frac{1}{2} m \, l^2 (\alpha')^2 \left((\cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha)^2 \right)$$
$$= \frac{1}{2} m l^2 (\alpha')^2$$

E. potencial: $U = mg \cdot y = -mgl \cos\alpha$

$$F(y) = \int_a^b \left(\frac{1}{2} m l^2 (\alpha')^2 + mgl \cos\alpha \right) dt$$

Euler-Lagrange: $F(t,\alpha,z) = \frac{1}{2} m l^2 z^2 + m g l \cos\alpha$

$$\partial_\alpha F = -mgl \operatorname{sen}\alpha \quad , \quad \partial_z F = m l^2 z$$

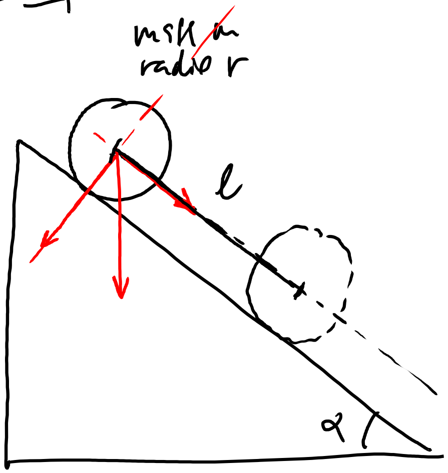
$$-mgl \operatorname{sen}\alpha = \frac{d}{dt}(m l^2 \alpha') = m l^2 \alpha''$$

$$\boxed{\alpha'' = -\frac{g}{l} \operatorname{sen}\alpha}$$

Aproximación: $\operatorname{sen}\alpha \sim \alpha$ para ángulo α pequeño.

$$\alpha'' = -\frac{g}{l}\alpha$$

Ejemplo.



Coordenadas: $l \equiv$ distancia recorrida.

$$x = l\cos\alpha \qquad x' = l'\cos\alpha$$

$$y = -l\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad y' = -l'\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}m\left((x')^2+(y')^2\right) = \frac{1}{2}m(l')^2$$

(con deslizamiento).

$$U = mgy = -mgl\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$F(t,l,z) = \frac{1}{2}mz^2 + mgl\,\mathrm{sen}\,\alpha$$

$$\partial_l F = mg\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad \partial_z F = mz$$

$$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha = l''\cdot m$$

$$\boxed{g\,\mathrm{sen}\,\alpha = l''}$$

Sin deslizamiento:

$$T = \frac{1}{2} m \left((x')^2 + (y')^2\right) + \text{energía de rotación}$$

$$\frac{1}{2} I \underset{\sim}{\omega}^2$$

velocidad angular

momento de inercia

$$U = mgy = -mg\, l \operatorname{sen} \alpha \qquad I = \frac{1}{2} m r^2 \quad (\text{disco uniforme}).$$

ángulo de giro de la rueda.

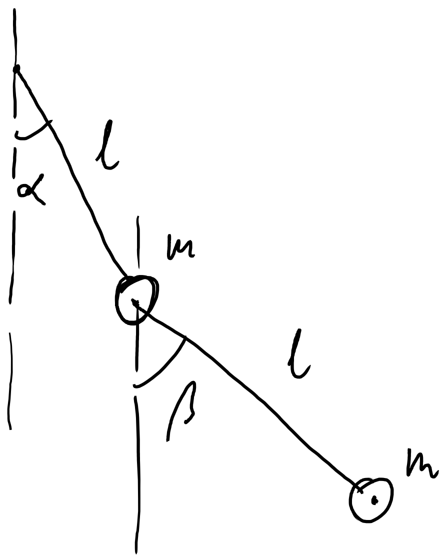
$$l = \theta \cdot r \qquad \theta = \frac{l}{r} \qquad \theta' = \omega = \frac{l'}{r}$$

$$T = \frac{1}{2} m (l')^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \frac{(l')^2}{r^2} = m (l')^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} m (l')^2$$

$$F = \left(\frac{3}{4} m z^2 + mg\, l \operatorname{sen} \alpha\right)$$

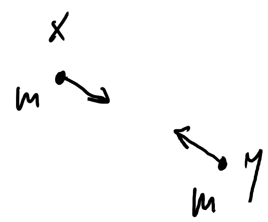
$$\partial_l F = mg \operatorname{sen} \alpha \qquad \partial_z F = \frac{3}{2} m z$$

$$g \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{2} l'' \qquad \boxed{l'' = \frac{2}{3} g \operatorname{sen} \alpha}$$



l
α
m
l
β
m

24 marzo



Ejemplo: 2 partículas, posiciones $x=(x_1,x_2,x_3)$, $y=(y_1,y_2,y_3)$.

E. cinética: $\frac{1}{2} m |x'|^2 + \frac{1}{2} m |y'|^2$.

E. potencial: $U(x-y)$

$$\mathcal{F}(x,y) = \int_a^b (T-U) = \int_a^b \left[\frac{1}{2} m \left(|x'|^2+|y'|^2\right) - U(x-y)\right] dt$$

$$F(t,x,y,\underset{\substack{\uparrow\\ x'}}{z},\underset{\substack{\uparrow\\ y'}}{w}) = \frac{1}{2} m \left(|z|^2+|w|^2\right) - U(x-y)$$

$$\nabla_x F = -\nabla U(x-y), \quad \nabla_z F = m z$$

$$\nabla_y F = \nabla U(x-y), \quad \nabla_w F = m w$$

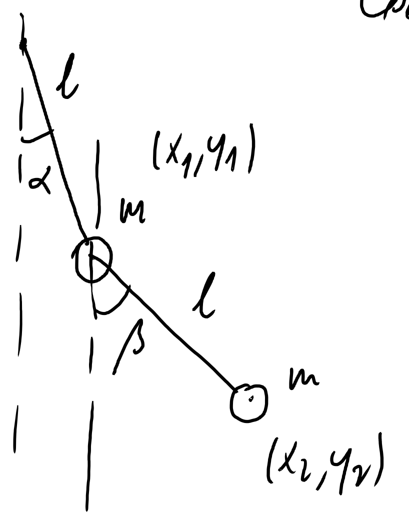
Euler-Lagrange

$$\left.\begin{aligned} -\nabla U(x-y) &= m x'' \\ \nabla U(x-y) &= m y'' \end{aligned}\right\}$$

Normalmente $\nabla U(v) = -\nabla U(-v)$

$$\left.\begin{aligned} -\nabla U(x-y) &= m x'' \\ -\nabla U(y-x) &= m y'' \end{aligned}\right\}$$

Ejemplo: péndulo doble



Coordenadas: α, β

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 = l \operatorname{sen}\alpha & x_2 = l \operatorname{sen}\beta + l \operatorname{sen}\alpha \\ y_1 = -l\cos\alpha & y_2 = -l\cos\beta - l\cos\alpha \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ll} x_1' = \alpha' l \cos\alpha & x_2' = \beta' l \cos\beta + \alpha' l \cos\alpha \\ y_1' = \alpha' l \operatorname{sen}\alpha & y_2' = \beta' l \operatorname{sen}\beta + \alpha' l \operatorname{sen}\alpha \end{array}$$

E. cinética:

$$T = \frac{1}{2} m \left[(x_1')^2 + (y_1')^2 + (x_2')^2 + (y_2')^2 \right]$$

E. potencial:

$$U = mg y_1 + mg y_2 =$$

$$= -mgl\,(2\cos\alpha - \cos\beta)$$

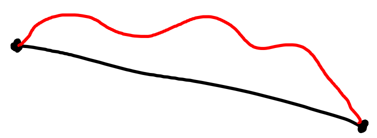
$$\mathcal{F}(\alpha, \beta) = \int_a^b (T - U)\, dt$$

$$F(t, \tilde{\alpha}, \beta, \underset{\substack{\uparrow \\ \alpha'}}{z}, \underset{\substack{\uparrow \\ \beta'}}{w}) = [\dots]$$

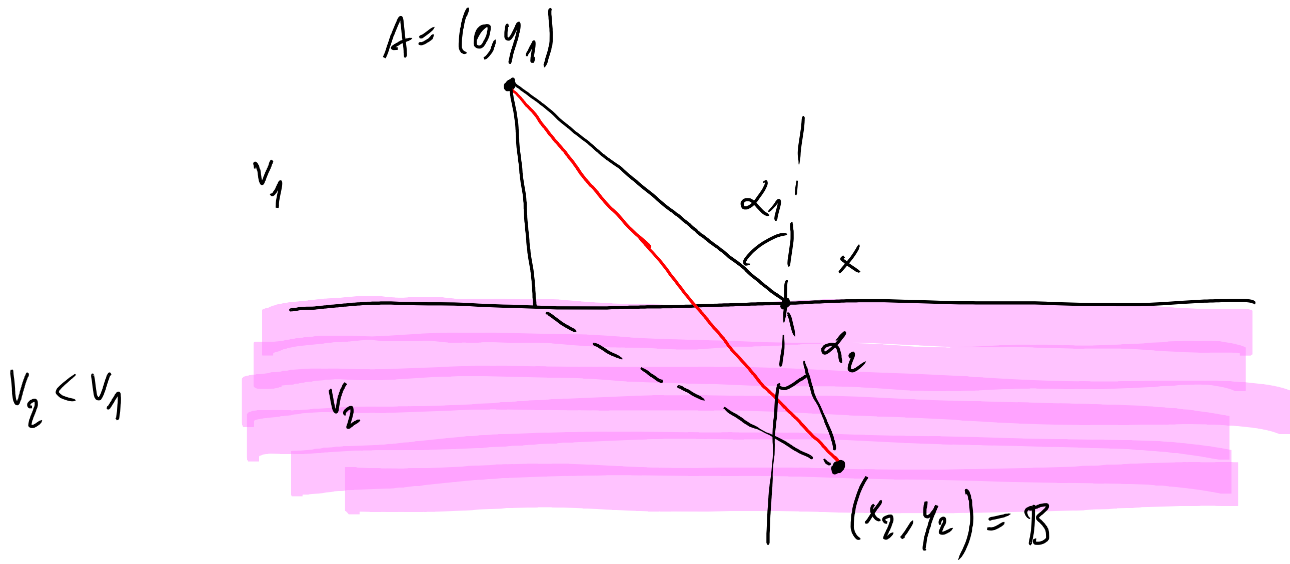
Principio de Fermat:

Un rayo de luz que viaja entre dos puntos sigue la trayectoria que requiera el menor tiempo posible.

Ejemplos * En un medio homogéneo, va en línea recta.



* Al cambiar de medio:

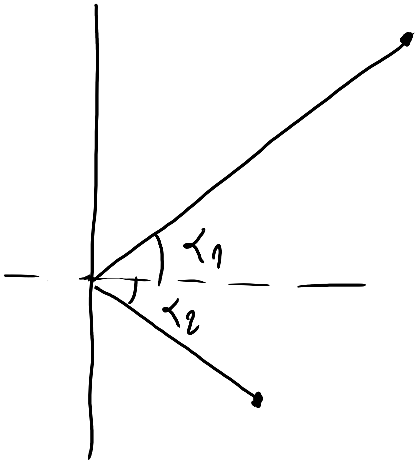


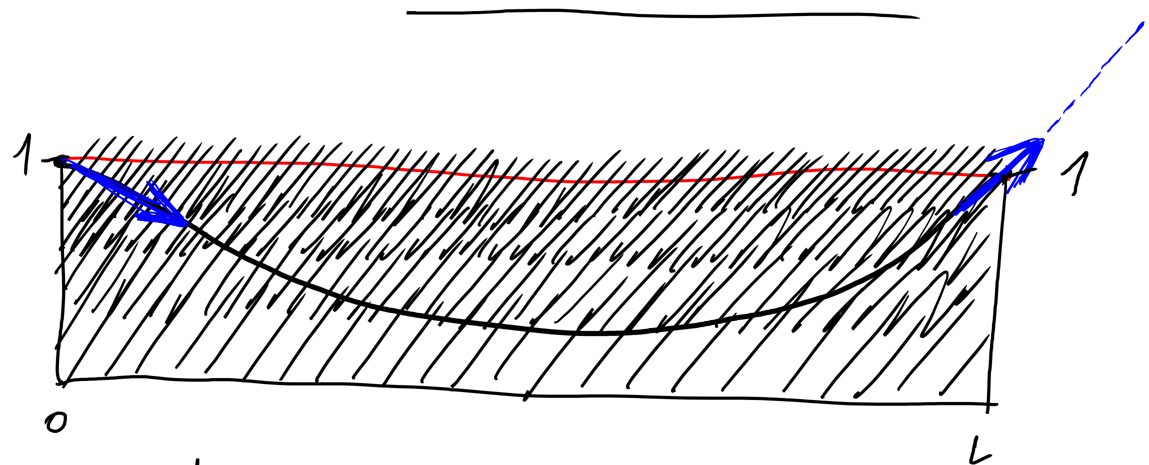
Tiempo de la trayectoria que pasa por x:

$F(x) = |A-x|\frac{1}{v_1} + |B-x|\frac{1}{v_2}$, buscamos el mínimo de F.

⇝ Ley de Snell: $\boxed{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_1} = \dfrac{v_2}{v_1}}$ Refracción

Ley de reflexión: $\alpha_1 = \alpha_2$.



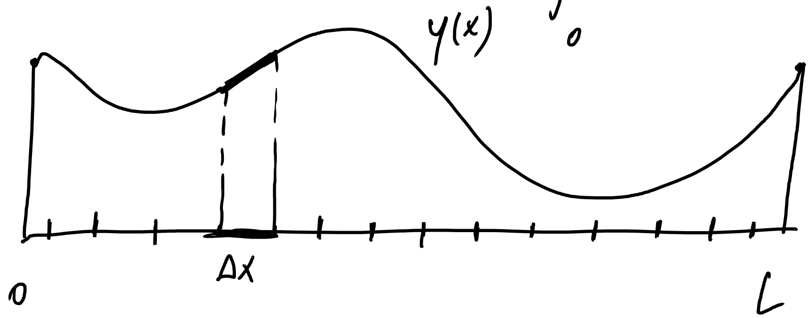


Supongamos que $v \sim \dfrac{1}{d}$

$$D = \{ y \in \mathcal{C}^2[0,L] \,/\, y(0) = y(L) = 1 \}$$

Densidad $= d(y)$, d creciente.

Tiempo en recorrer y: $\mathcal{F}(y) = \displaystyle\int_0^L \sqrt{1+(y'(x))^2}\cdot d(y(x))\,dx$



Problemas de contorno

Planteamiento general:

$$(p(t)\, y'(t))' + q(t)\, y(t) = r(t) \quad \text{en} \quad (a,b)$$

$q, r : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas

$p : [a,b] \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^1$, $p(t) > 0 \quad \forall\, t \in [a,b]$.

+ condiciones de contorno:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\, y(a) + \beta\, y'(a) &= 0 \\ \delta\, y(b) + \gamma\, y'(b) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &\alpha, \beta \text{ no ambas nulas} \\ &\delta, \gamma \text{ no ambas nulas} \end{aligned}$$

"condiciones separadas"

o bien

$$\left.\begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned}\right\}$$

"condiciones periódicas".

* Por ahora no sabemos si hay solución.

Ejemplos

① $\left.\begin{array}{l} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \end{array}\right\}$ $p \equiv 1, \quad q \equiv 1, \quad r \equiv 0.$
cond. separadas, $\alpha = 1, \beta = 0, \quad \delta = 1, \gamma = 0.$

$$y(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t \qquad (y'' = -y)$$

$$0 = y(0) = A, \qquad 2 = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = B$$

$$\boxed{y(t) = 2\operatorname{sen} t}$$

② $\left.\begin{array}{l} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 2 \end{array}\right\}$ $y(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t$

$$0 = y(0) = A.$$

$$2 = y(\pi) = -A$$

X

③ $\left.\begin{array}{l} y''+y=0 \\ y(0)=0,\quad y(2\pi)=0 \end{array}\right\}$ $y(t)=A\cos t+B\,\mathrm{sen}\,t$

$0=y(0)=A.\qquad 0=y(2\pi)=A.$

$\left[\, y(t)=B\,\mathrm{sen}\,t,\qquad B\in\mathbb{R}. \right]$

④ $\left.\begin{array}{l} y''+y=0 \\ y(0)=y(2\pi),\quad y'(0)=y'(2\pi) \end{array}\right\}$ $\left[\begin{array}{c} y(t)=A\cos t+B\,\mathrm{sen}\,t \\ A,B\in\mathbb{R}. \end{array}\right]$

⑤ $\left.\begin{array}{l} y''-y=0 \\ y(0)=y(\pi),\quad y'(0)=y'(\pi) \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} y(t)=Ae^{t}+Be^{-t}. \\ y'(t)=Ae^{t}-Be^{-t} \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} A+B=Ae^{\pi}+Be^{-\pi} \\ A-B=Ae^{\pi}-Be^{-\pi} \end{array}\right\}$

$2A=2Ae^{\pi}\Rightarrow A=0.$

$\Rightarrow B=0.$

$\boxed{y(t)\equiv 0 \quad \text{única solución}}$

Forma autoadjunta

En general, un problema de contorno (de 2º orden) es:

$$\star \quad a(t)\, y''(t) + b(t)\, y'(t) + c(t)\, y(t) = d(t).$$

+ cond. contorno.

$(a>0 \ \forall t)$ $\quad a, b, c, d$ continuas.

Siempre podemos escribirlo como

$$\star \quad (p y')' + q y = r \qquad \text{(forma autoadjunta)}.$$

¿Cómo?

$$p y'' + p' y' + q y = r$$

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \dfrac{p'}{p} y' + \dfrac{q}{p} y = \dfrac{r}{p} \\[2ex] y'' + \dfrac{b}{a} y' + \dfrac{c}{a} y = \dfrac{d}{a} \end{array}\right\} \text{ tienen que ser iguales.}$$

$$\frac{p'}{p} = \frac{b}{a} \qquad \frac{q}{p} = \frac{c}{a} \qquad \frac{r}{p} = \frac{d}{a}$$

$$p' = \frac{b}{a} \cdot p \Rightarrow \boxed{p(t) = C e^{\int_a^t \frac{b(s)}{a(s)} ds}}, \quad \boxed{\text{elijo } c = 1.}$$

$$\left[\begin{array}{c} p' = a(t) \cdot p \Rightarrow p(t) = C e^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R} \\ A'(t) = a(t). \end{array} \right]$$

$$\boxed{q = p \cdot \frac{c}{a}, \quad r = p \cdot \frac{d}{a}.}$$

Alternativa de Fredholm

$$\text{(C)} \begin{cases} (py')' + fy = r \\ + \text{ cond contorno} \end{cases} \qquad \text{(H)} \begin{cases} (py')' + fy = 0 \\ + \text{ cond contorno} \end{cases}$$

Teorema.

* Si (H) no tiene soluciones no triviales

  $\Rightarrow$ (C) tiene sol única.

* Si (H) tiene sol. no triviales:

  (C) tiene sol. $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b r(t)\, y(t)\, dt = 0$

  $\forall$ y sol. de (H).

En este caso,
la dimensión del espacio de soluciones de (C) y (H) es la misma

Analogía en $\mathbb{R}^d$.

$M \in \mathcal{M}_{d\times d}$ $\qquad My = r \quad$ (C)

$r \in \mathbb{R}^d$ dado $\qquad M^T y = 0 \quad$ (H)

(1) Si (H) tiene solo solución trivial. $\Leftrightarrow$ M es no singular

$\Leftrightarrow$ $y = M^{-1} r$ es la única sol. de (C).

(2) Si (H) tiene soluciones no triviales.

Tomamos x con $M^T x = 0$.

* Suponemos que (C) tiene sol. y. $(My = r)$.

$$\langle x, r \rangle = \langle x, My \rangle = \langle M^T x, y \rangle = 0.$$

* Suponemos que $\langle x, r \rangle = 0$ $\forall$ x con $M^T x = 0$.

$\Leftrightarrow$ r perpendicular a $Ker(M^T)$

$\Leftrightarrow$ r perpendicular a $(Im(M))^\perp$

$\Leftrightarrow$ $r \in Im(M)$.

$\Leftrightarrow$ $\exists\, y \in \mathbb{R}^d \,/\, My = r$. $\Leftrightarrow$ (C) tiene sol.

Ejemplos

(1) $\left.\begin{array}{l} y''-y=\cos t \\ y(0)=y(1)=0 \end{array}\right\}$ (C) $\qquad \left.\begin{array}{l} y''-y=0 \\ y(0)=y(1)=0 \end{array}\right\}$ (H)

(H) tiene soluciones $y(t)=Ae^{t}+Be^{-t}$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=A+B=0 \\ y(1)=Ae+\frac{B}{e}=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=B=0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e & \frac{1}{e}\end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow$ (C) tiene sol. única.

(2) $\left.\begin{array}{l} y''+y=\cos t \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{array}\right\}$ (C) $\qquad \left.\begin{array}{l} y''+y=0 \\ y(0)=y(\pi)=0 \end{array}\right\}$ (H)

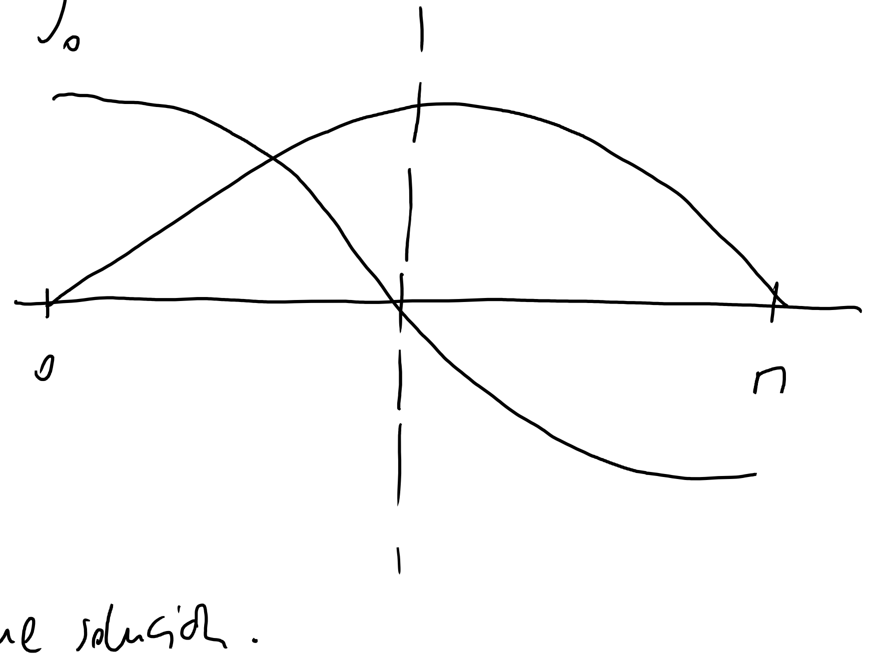
Sol. de (H): $y(t)=A\cos t+B\operatorname{sen} t$

$y(0)=A=0, \quad y(\pi)=-A=0.$

$y(t)=B\operatorname{sen} t, \quad B\in\mathbb{R}$

(C) tiene solución $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^\pi \cos t\cdot B\operatorname{sen} t\,dt=0 \quad \forall B\in\mathbb{R}.$

$\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^\pi \cos t\operatorname{sen} t\,dt=0$ ✓



$\Rightarrow$ (C) tiene solución.

(sus soluciones forman un espacio afín de dim 1).

(3) $\left.\begin{array}{l} y'' + y = 1 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array}\right\}$ (C) $\qquad \left.\begin{array}{l} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{array}\right\}$ (H)

(H): $y(t) = A\cos t + B\,\mathrm{sen}\,t$

$y(t) = B\,\mathrm{sen}\,t, \quad B \in \mathbb{R}.$

(C) tiene sol. $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{sen}\,t\,dt = 0$ ✗

$\Rightarrow$ (C) no tiene sol.

(5) $\left.\begin{array}{l} y'' = f(t) \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{array}\right\}$ (C) $\qquad \left.\begin{array}{l} y'' = 0 \\ y'(0) = y'(1) = 0 \end{array}\right\}$ (H).

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ dada. $\qquad$ Soluciones de (H): $y(t) = C, \quad C \in \mathbb{R}$

(C) tiene sol. $\Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt = 0.$

(5) $y'' - 2y' + y = \dfrac{1}{1+t^2}$ $\qquad y(0) = 0, \quad y(1) = 2.$ $\qquad (*)$

Elijo w que cumple $w(0) = 0$, $w(1) = 2$.

$$w(t) = 2t.$$

$\tilde{y}(t) := y(t) - w(t)$ $\qquad y' = \tilde{y}' + w'$

$\tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0.$ $\qquad y'' = \tilde{y}'' + w''$

$$\tilde{y}'' + w'' - 2(\tilde{y}' + w') + \tilde{y} + w = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{y}'' - 2\tilde{y}' + \tilde{y} = \dfrac{1}{1+t^2} \underbrace{-w'' + 2w' - w}_{4-2t} \\ \tilde{y}(0) = \tilde{y}(1) = 0 \end{array}\right\} \quad (C)$$

(H): Soluciones: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 = (\lambda - 1)^2$

$\lambda = 1$, doble

$$\tilde{y}(t) = Ae^t + Bte^t$$

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{y}(0) = A = 0 \\ \tilde{y}(1) = B \cdot e = 0 \end{array}\right\} \quad A = B = 0$$

$\Rightarrow$ (C) tiene sol única. $\Rightarrow$ $(*)$ tiene sol única.

Suponemos que las condiciones de contorno son:

$$y(a) = y(b) = 0.$$

$$(py')' + qy = r \qquad Ly := (py')' + qy.$$

Calculamos: $[\, x, y \in \mathcal{C}^2[a,b] \ / \ x(a) = x(b) = y(a) = y(b) = 0 \,]$.

$$\int_a^b x \cdot Ly \, dt = \underbrace{\int_a^b x \,(py')' \, dt} + \int_a^b x\, q\, y \, dt$$

$$\int_a^b x\,(py')' \, dt = -\int_a^b x' p\, y' \, dt + \cancelto{0}{x\, p\, y' \Big|_{t=a}^{t=b}}$$

$$= \int_a^b (x'p)'\, y \, dt - \cancelto{0}{x' p\, y \Big|_{t=a}^{t=b}}$$

$$\int_a^b x\cdot Ly\,dt = \int_a^b [(x'p)'+xq]\,y\,dt = \int_a^b Lx\cdot y\,dt$$

"Fórmula de Green".

Lema: $x,y \in \mathcal{C}^2[a,b]$, cumplen condiciones de contorno.

$$Ly := (py')' + qy$$

$$\int_a^b x\cdot Ly = \int_a^b Lx\cdot y \qquad \text{"Fórmula de Green".}$$

(Simetría de L).

Parte de demostración del t^a Fredholm:

$$\left.\begin{array}{l}(py')'+qy = r\\ +\text{ cond. contorno}\end{array}\right\} \text{(C)} \qquad \left.\begin{array}{l}(py')'+qy = 0\\ +\text{ cond. contorno}\end{array}\right\} \text{(H)}$$

Si (H) tiene sol. no trivial x

, (C) tiene sol. y

$$\Rightarrow \int_a^b x r = \int_a^b x\,Ly = \int_a^b \underbrace{Lx}_{0}\cdot y = 0$$

12 abril

$$\left.\begin{array}{l}(py')' + qy = r \\ + \text{ cond. contorno}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\mathcal{F}(y) = \displaystyle\int_a^b \left[\frac{1}{2} p (y'(t))^2 - \frac{1}{2} q \cdot (y(t))^2 + r \cdot y(t)\right] dt \\ D = \{ y \in \mathcal{C}^2[a,b] \,/\, \text{cond. contorno} \}\end{array}\right.$$

$$F(t,y,z) = \frac{1}{2} p z^2 - \frac{1}{2} q y^2 + ry$$

$$\partial_y F = -qy + r \quad \| \quad \partial_z F = pz$$

$$(py')' = -qy + r \quad \checkmark \quad \text{(Euler-Lagrange)}.$$

Teo.
$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{F}(y) = \displaystyle\int_a^b \left[\frac{1}{2} p (y'(t))^2 - \frac{1}{2} q \cdot (y(t))^2 + r \cdot y(t)\right] dt \\ D = \{ y \in \mathcal{C}^2[a,b] \,/\, y(a) = y(b) = 0 \}\end{array}\right\} \circledast$$

Suponemos que $p > 0$ en $[a,b]$, $q < 0$ en $[a,b]$.

Entonces $\circledast$ tiene un único mínimo en D.

Dem. $F(t,y,z) = \frac{1}{2} p z^2 - \frac{1}{2} q y^2 + r y$

es convexa en (y,z).

$\partial_{yy} F = -q \qquad \partial_{zz} F = p \qquad \mathrm{Hess}_{(y,z)} F = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix}$

$\partial_{zy} F = 0$

$\Rightarrow \mathcal{F}$ estrictamente convexa.

Euler-Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l}(py')' + qy = r \\ y(a) = y(b) = 0\end{array}\right\} \text{(C)} \qquad \text{¿Tiene solución?}$$

$$\rightsquigarrow \left.\begin{array}{l}(py')' + qy = 0 \\ y(a) = y(b) = 0\end{array}\right\} \text{(H)} \qquad \text{¿Tiene soluciones no triviales?}$$

* (H) no tiene soluciones no triviales. (Ahora lo vemos).

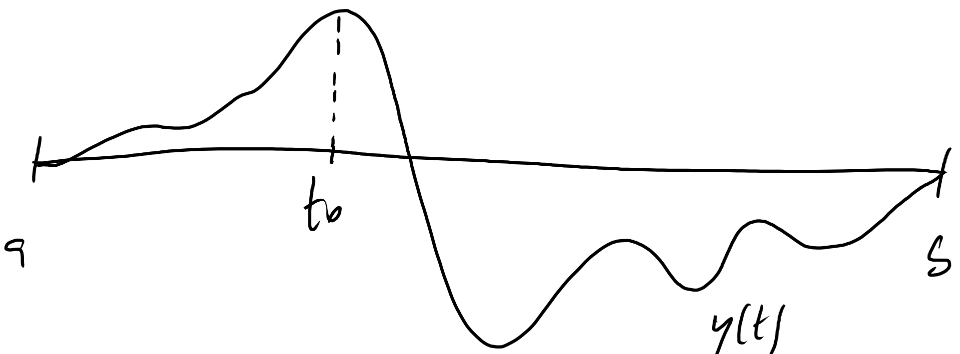
$\Rightarrow$ (C) tiene sol. única (Alt. Fredholm).

$\Rightarrow \mathcal{F}$ tiene un único mínimo.

* (H) no tiene soluciones no triviales.

Dem. Supongamos que y es solución no trivial.

Puedo suponer que $y(t) > 0$ en algún punto $t \in (a,b)$.



y alcanza su máximo en algún $t_0 \in (a,b)$. $\left\{ \begin{array}{l} y'(t_0) = 0. \\ y''(t_0) \leq 0. \end{array} \right.$

$$(py')' + qy = 0$$

$$p(t)\,y''(t) + p'(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0.$$

$$\underbrace{\underbrace{p(t_0)}_{>0}\ \underbrace{y''(t_0)}_{\leq 0}}_{\leq 0} + p'(t_0)\cancel{y'(t_0)}^{0} + \underbrace{\underbrace{q(t_0)}_{<0}\ \underbrace{y(t_0)}_{>0}}_{<0} = 0 \quad \times$$

$\Rightarrow$ la única sol. es la trivial.

Ejemplo:

* $y'' + y' - ty = \cos t$, $\quad y(1) = y(2) = 0$

Forma autoadjunta:

- $y'' + y' - ty = \cos t$
$(py')' + qy = r$
$py'' + p'y' + qy = r$
- $y'' + \frac{p'}{p} y' + \frac{q}{p} y = \frac{r}{p}$

$\frac{p'}{p} = 1 \quad p' = p, \quad p(t) = e^t.$

$\frac{q}{p} = -t \quad , \quad q = -te^t.$

$r = p \cdot \cos t = e^t \cos t.$

Teorema $\Rightarrow$ solución única

* $y'' + y' - ty = \cos t, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 3.$

$w(t) := 1 + t.$

$\tilde{y} := y - w. \qquad \tilde{y}(1) = 0, \quad \tilde{y}(2) = 0.$

$$\left.\begin{aligned} y &= \tilde{y} + w \\ y' &= \tilde{y}' + w' \\ y'' &= \tilde{y}'' + w'' \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} &\boxed{\tilde{y}'' + \tilde{y}' - t\tilde{y}} + w'' + w' - tw = \cos t \\ &\tilde{y}(1) = 0, \quad \tilde{y}(2) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Teorema $\Rightarrow$ hay solución única para $\tilde{y}$

$\Rightarrow$ hay sol. única para y.

Problemas Sturm-Liouville

$$\text{(SL)}\quad \left.\begin{array}{l}(py')' + qy + \lambda w y = 0 \\ + \text{ condiciones contorno}\end{array}\right\}$$

¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ hay soluciones no triviales?

$p, q, w \in \mathcal{C}[a,b]$, $\quad p \in \mathcal{C}^1[a,b]$, $\quad p > 0$ en $[a,b]$.

valor propio: λ para el cual hay sol. no trivial

función propia (asociada a λ): solución no trivial.

espacio propio asociado a λ: $\{$soluciones del problema$\}$

$= \{$funciones propias$\} \cup \{0\}$.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{array}\right\}$$

$\star\ \lambda < 0$: $\quad y(t) = A e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot t} + B e^{-\sqrt{|\lambda|}\, t}$

$$y'(t) = \sqrt{|\lambda|}\, A e^{\sqrt{|\lambda|}\, t} - \sqrt{|\lambda|}\, B e^{-\sqrt{|\lambda|}\, t}$$

$$\left.\begin{array}{l} A e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot\pi} + B e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} = A e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} + B e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot\pi} \\ A e^{\sqrt{|\lambda|}\,\pi} - B e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} = A e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} - B e^{\sqrt{|\lambda|}\cdot\pi} \end{array}\right\}$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{\sqrt{|\lambda|}\,\pi} - e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} & e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} - e^{\sqrt{|\lambda|}\,\pi} \\ e^{\sqrt{|\lambda|}\,\pi} - e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} & -e^{-\sqrt{|\lambda|}\,\pi} + e^{\sqrt{|\lambda|}\,\pi} \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

* $\lambda = 0$: $\quad y'' = 0$, $\quad y(t) = A + Bt$.

$$\left.\begin{array}{l} y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{array}\right\} \quad \boxed{y(t) = A}$$

para $A \neq 0$ es no trivial

$\lambda = 0$ es valor propio.

$\boxed{\text{Espacio propio generado por } y(t) \equiv 1.}$

* $\lambda > 0$. $\quad y'' + \lambda y = 0$, $\quad y(t) = A\cos(t\sqrt{\lambda}) + B\sin(t\sqrt{\lambda})$.

$$y'(t) = -\sqrt{\lambda}\, A \sin(t\sqrt{\lambda}) + \sqrt{\lambda}\, B\cos(t\sqrt{\lambda}).$$

$y(-\pi) = y(\pi)$: $\quad A\cancel{\cos(\pi\sqrt{\lambda})} + B\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = A\cancel{\cos(-\pi\sqrt{\lambda})} + B\sin(-\pi\sqrt{\lambda})$

$y'(-\pi) = y'(\pi)$: $\quad -A\sin(\pi\sqrt{\lambda}) + B\cancel{\cos(\pi\sqrt{\lambda})} = -A\sin(-\pi\sqrt{\lambda}) + B\cancel{\cos(-\pi\sqrt{\lambda})}$

$$\left.\begin{array}{l} 2B\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \\ 2A\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \end{array}\right\}$$

* $\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \leftarrow$ me interesa esto.

o bien

$A = B = 0$

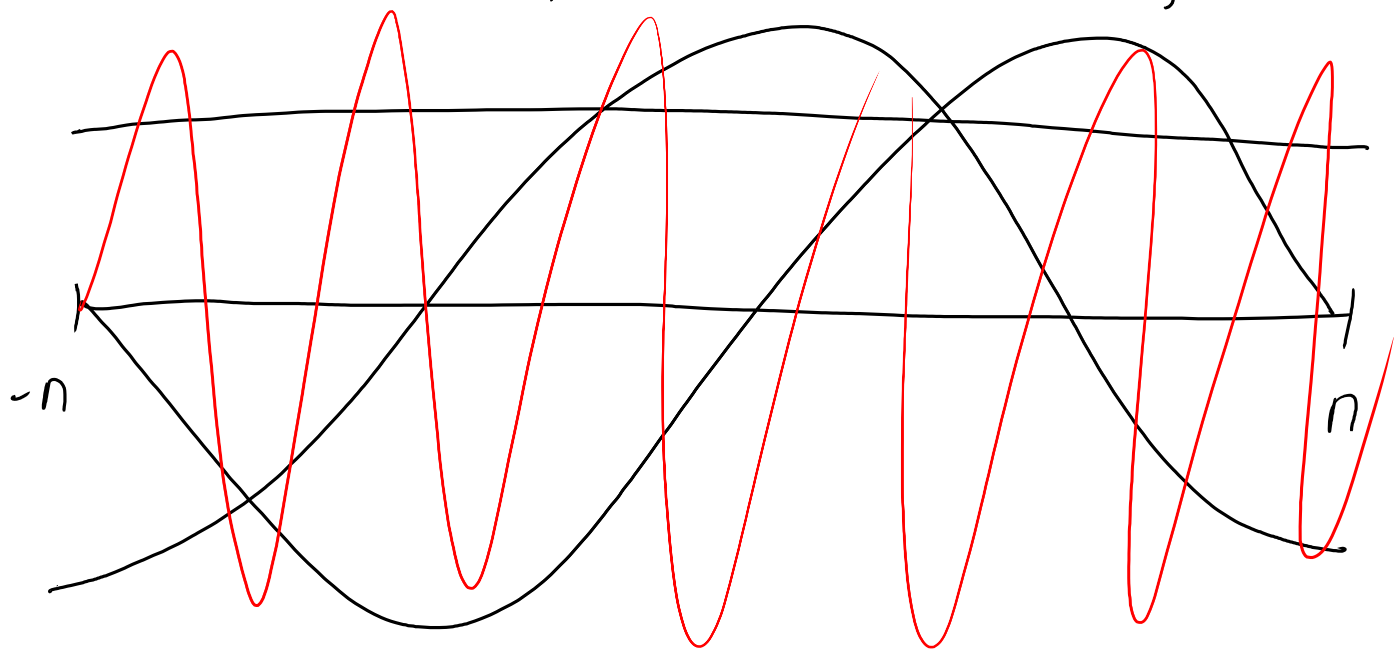
$$\sin(\pi\sqrt{\lambda}) = 0 \iff \pi\sqrt{\lambda} = n\pi$$

$n \geq 1$ entero

$\lambda = n^2$, $n \geq 1$ entero valores propios.

$y(t) = A\cos(nt) + B\,\mathrm{sen}(nt)$ funciones propias.

Espacio propio generado por $\{\cos(nt), \mathrm{sen}(nt)\}$.



Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) = 0 \end{array}\right\}$$

* $\lambda < 0 \Rightarrow$ no hay sol. no trivial.

* $\lambda = 0$: $y(t) = A + Bt$.

$\Rightarrow y(t) \equiv 0$, no hay.

* $\lambda > 0$: $y(t) = A\cos(t\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(t\sqrt{\lambda})$.

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A\cos(-\pi\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(-\pi\sqrt{\lambda}) \\ 0 = A\cos(\pi\sqrt{\lambda}) + B\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) \end{array}\right\}$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos(\pi\sqrt{\lambda}) & -\mathrm{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) \\ \cos(\pi\sqrt{\lambda}) & \mathrm{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) \end{pmatrix} =$$

$$= 2\cos(\pi\sqrt{\lambda})\,\mathrm{sen}(\pi\sqrt{\lambda}) = \mathrm{sen}(2\pi\sqrt{\lambda})$$

para tener sol. no triviales necesito $\mathrm{sen}(2\pi\sqrt{\lambda}) = 0$.

$$2\pi\sqrt{\lambda} = n\pi \qquad 2\sqrt{\lambda} = n \qquad \lambda = \frac{n^2}{4},\ n \geq 1.$$

$$\boxed{\lambda = \frac{n^2}{4},\ n \geq 1. \quad \text{valores propios}}$$

$$0 = A\cos\left(-\pi\frac{n}{2}\right) + B\,\mathrm{sen}\left(-\pi\frac{n}{2}\right)$$

Funciones propias

* n par: $A\cos\left(-\pi\frac{n}{2}\right) = 0 \Rightarrow A = 0$. $\quad y(t) = B\,\mathrm{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)$

* n impar: $B\,\mathrm{sen}\left(-\pi\frac{n}{2}\right) = 0 \Rightarrow B = 0$. $\quad y(t) = A\cos\left(\frac{nt}{2}\right)$.

Propiedades generales

Si hay soluciones no triviales de (SL) para $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

Dem. y sol. no trivial. $Ly := (py')' + qy$.

$$Ly = -\lambda w y.$$

$$\underbrace{\int_a^b y\,\overline{Ly}}_{\in \mathbb{R}} = \int_a^b Ly \cdot \overline{y} = -\int_a^b \lambda w\, y \cdot \overline{y} = -\lambda \underbrace{\int_a^b w\,|y|^2}_{\in \mathbb{R}}.$$

porque

$$\underbrace{\int_a^b y\,\overline{Ly}} = \int_a^b Ly \cdot \overline{y} = \underbrace{\overline{\left(\int_a^b y\,\overline{Ly}\right)}}$$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.

13 abril

Prob. Sturm-Liouville.

$$\left.\begin{array}{l}(py')' + qy + \lambda w y = 0 \\ + \text{ cond. contorno}\end{array}\right\} \text{ Sturm-Liouville} \quad \text{SL}$$

* Los valores propios son reales
* Funciones propias correspondientes a valores propios distintos son perpendiculares:

φ_1 asociada a λ_1
φ_2 asociada a λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \int_a^b w\varphi_1\varphi_2 = 0.$

<u>Dem.</u> $Ly = (py')' + qy$

$$L\varphi_1 = -\lambda_1 w \varphi_1$$
$$L\varphi_2 = -\lambda_2 w \varphi_2$$

$$\int_a^b \varphi_1 L\varphi_2 = \int_a^b L\varphi_1 \cdot \varphi_2$$

$$-\lambda_2 \int_a^b \varphi_1\varphi_2 w = -\lambda_1 \int_a^b \varphi_1\varphi_2 w$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{\int_a^b \varphi_1\varphi_2 w}_{\Rightarrow \text{ es } 0.} = 0$$

Teo. Sturm-Liouville

Consideremos (SL) con condiciones de contorno separadas.

* Los valores propios forman una sucesión $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ con $\lambda_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$.
* Los espacios propios asociados a λ_n tienen dim. 1 $\forall n$.
* Si tomamos φ_n generador del esp. propio de λ_n, tal que:

$$\int_a^b \varphi_n^2 \cdot w = 1.$$

Entonces $(\varphi_n)_{n\geq 1}$ es una base ortonormal de $L^2((a,b), w)$.

Esp de Hilbert

* V esp. vectorial, un producto escalar (real) es $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que es:

  * bilineal $\langle \lambda v + \mu w, z \rangle = \lambda \langle v, z \rangle + \mu \langle w, z \rangle$ $\forall$ $v, w, z \in V$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.
  * simétrica $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$
  * def. positiva $\langle v, v \rangle \geq 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

* V esp. vectorial, un producto escalar (complejo) es $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ que es:

  * bilineal (conjugado) $\langle \lambda v + \mu w, z \rangle = \bar{\lambda} \langle v, z \rangle + \bar{\mu} \langle w, z \rangle$ $\forall$ $v, w, z \in V$, $\mu, \lambda \in \mathbb{C}$.
  * hermítico $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
  * def. positiva $\langle v, v \rangle \geq 0$, $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Def.: Un esp. Hilbert (real o complejo) es un esp. vectorial con un prod. escalar que además es completo en la norma asociada.

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ prod escalar,

$\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ es una norma.

<u>Base ortonormal (numerable)</u> (H esp. Hilbert)

Es una sucesión $(\varphi_1, \varphi_2, \dots)$ (finita o no) en H

tal que: ① $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 1$ si $i=j$
$= 0$ si $i \neq j$.

② para cualquier $v \in H$ existe $(\mu_i)_{i \geq 1}$ en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

tal que $v = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n$

(límite en el sentido de $\|\cdot\|$.)

Equivalentemente:

②' el espacio vectorial generado por $\{\varphi_n / n \geq 1\}$

es denso en H.

* Desigualdad Cauchy-Schwarz:

$$|\langle v, w\rangle| \leq \|v\|\,\|w\| \qquad \forall\ v, w \in H.$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) = 0 \end{array}\right\} \qquad \lambda = \frac{n^2}{4} \quad \text{v. propios.}$$

$$\varphi_n = B_n \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right) \qquad n \text{ par}$$

$$\varphi_n = A_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) \qquad n \text{ impar}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} B_n^2 \left(\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\right)^2 dt = 1$$

$$\shortparallel \quad B_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right)\right)^2 dt = B_n^2\, \pi$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

$\lambda = \frac{n^2}{4}$ v. propios.

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right) & n \text{ par} \\ \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left(\frac{nt}{2}\right) & n \text{ impar} \end{array}\right\}$$

<u>Otro ejemplo</u>

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda y \\ y(-\pi) = y(\pi) \\ y'(-\pi) = y'(\pi) \end{array}\right\}$$

$\lambda_n = n^2 \quad , \quad n \geq 0$

$\varphi_n = C \qquad n = 0$

$\varphi_n = A_n \cos(nt) + B_n \operatorname{sen}(nt) \quad , \quad n \geq 1.$

Base de $L^2(-\pi,\pi)$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nt) \,/\, n \geq 1 \right\}$$

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} C^2 = 2\pi C^2$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

$$\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt) \operatorname{sen}(nt)\, dt = 0 \right]$$

14 abril

* funciones propias asociadas a v. propios distintos son ortogonales.
* valores propios son reales.
* el conjunto de valores propios es infinito
  sin puntos de acumulación,
  y además las combinaciones lineales de funciones propias son
  densas en $L^2((a,b), w)$.

no lo probamos.

Interpretación variacional

(SL) $\left\{ \begin{array}{l} (py')' + qy + \lambda w y = 0 \\ + \text{cond. contorno} \end{array} \right\}$

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(y) = \displaystyle\int_a^b \left(p (y')^2 - q y^2 \right) dt \\ \mathcal{D} = \left\{ y \in \mathcal{C}^2[a,b] \,/\, \text{cumplen cond. contorno} \quad \displaystyle\int_a^b w (y(t))^2 dt = 1 \right\} \end{array} \right.$

Euler-Lagrange para $\mathcal{F}$:

$$F(t,y,z) = pz^2 - qy^2$$

$$F^*(t,y,z) = pz^2 - qy^2 - \lambda w y^2$$

$$\partial_y F^* = -2qy - 2\lambda w y, \quad \partial_z F^* = 2pz$$

$$-qy - \lambda w y = (py')'$$

puntos críticos de (*) $\Leftrightarrow$ soluciones no triviales de (SL).

¿Extremos de $\mathcal{F}$?

Reescribimos $\mathcal{F}$ en función de las coordenadas en una base de funciones propias.

Supongamos cond. contorno separadas:

$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ sucesión valores propios

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ funciones propias asociadas a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$

tales que $\displaystyle\int_a^b w(\varphi_n)^2 = 1, \quad n = 1, 2, \ldots$

Si $y \in D$,

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n \qquad Ly = (py')' + qy.$$

$$* \int_a^b y \cdot Ly = \int_a^b y\,(py')' + \int_a^b y\, q \cdot y =$$

$$= -\int_a^b p(y')^2 + \int_a^b q y^2 = -\mathcal{F}(y).$$

$$* \quad F(y) = -\int_a^b y \cdot Ly = -\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n\right) L\left(\sum_{m=1}^{\infty} \mu_m \varphi_m\right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n \mu_m \int_a^b \varphi_n L \varphi_m =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n \mu_m \underbrace{\int_a^b \varphi_n w \varphi_m}_{0 \text{ si } n\neq m,\ 1 \text{ si } n=m} \lambda_m =$$

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_n$$

Restricción: $\displaystyle\int_a^b y^2 \cdot w = 1 = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n\right)^2 \cdot w =$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \mu_n \mu_m \int_a^b \varphi_n \varphi_m \cdot w = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 = 1$$

(En general en un espacio de Hilbert H con base $(\varphi_n)_{n\geq 1}$:

$$\text{Si } v = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \varphi_n \,, \qquad \|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 . \quad)$$

Identidad de Parseval.

Mínimo de F se alcanza cuando $\mu_1 = 1$, $\mu_n = 0 \quad \forall\, n \geq 2$.

(porque: $\displaystyle F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \lambda_n \geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 = \lambda_1$

$F(\varphi_1) = \lambda_1$).

El mínimo se alcanza en $\pm\varphi_1$, y su valor es λ_1.

Teo. F alcanza su mínimo en $\pm\varphi_1$ (la primera función propia, normalizada), y $F(\varphi_1) = \lambda_1$ (el primer valor propio de (SL)).

(no tiene máximo).

Ejemplo

$$\mathcal{F}(y) = \int_{-\pi}^{\pi} (y')^2, \quad D = \{ y \in \mathcal{C}^2[-\pi,\pi] \,/\, y(-\pi) = y(\pi) = 0, \int_{-\pi}^{\pi} y^2 = 1 \}$$

$$p = 1, \quad q = 0, \quad w = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0 \\ y(-\pi) = y(\pi) = 0 \end{array}\right\} \text{SL}$$

valores propios: $\lambda_n = \frac{n^2}{4}$, $n \geq 1$ entero

funciones propias:

$$\varphi_n(t) = A \cos\left(\frac{nt}{2}\right), \quad n \text{ par}$$

$$\varphi_n(t) = B \operatorname{sen}\left(\frac{nt}{2}\right), \quad n \text{ impar}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}$$

$$\varphi_1 = B \operatorname{sen}\frac{t}{2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\frac{t}{2}.$$

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1^2 = B^2 \int_{-\pi}^{\pi} \left(\operatorname{sen}\frac{t}{2}\right)^2 dt = B^2 \pi \Rightarrow B = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

mínimo de $\mathcal{F}$ se alcanza en $\varphi_1(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}\frac{t}{2}$.

y vale $\frac{1}{4}$.