DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

$(X_1, \dots, X_n)$ m.a.s

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{(\theta-1)^2}, \quad 0 < x < \theta - 1$$

Encontrar, si existe, UMVUE para $1/(\theta-1)$

Como $0 < \theta - 1 \Rightarrow \theta \in (1, +\infty)$, pues $\theta - 1 \in (0, +\infty)$

Por otro lado $\mathcal{X}_\theta = (0, \theta-1) \Rightarrow \bigcup_{\theta \in (1,+\infty)} \mathcal{X}_\theta = (0, +\infty) \Rightarrow \mathcal{X}^n = (0, +\infty)^n$

Ya he visto el espacio paramétrico $(1, +\infty)$ y el muestral $(0, +\infty)^n$ para una muestra aleatoria simple $(X_1, \dots, X_n)$

Con esto calculo la función de distribución para una muestra aleatoria simple $(X_1, \dots, X_n)$

$$f_\theta^n(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(x_1) \cdots f_\theta(x_n) = \cancel{\frac{2x_1}{(\theta-1)^2} \cdots \frac{2x_n}{(\theta-1)^2}} =$$

$$= \frac{2x_1}{(\theta-1)^2} I_{[x_1 < \theta - 1]} \cdots \frac{2x_n}{(\theta-1)} I_{[x_n < \theta-1]} =$$

$$= \frac{2^n}{(\theta-1)^{2n}} I_{[x_{(n)} < \theta - 1]} \cdot \prod_{i=1}^n x_i$$

donde $I_{[x_i < \theta-1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i < \theta - 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$, y en particular $I_{[x_{(n)} < \theta - 1]} = \begin{cases} 1 & \text{si } \max x_i < \theta - 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Tomando como estadístico $T(X_1, \dots, X_n) = X_{(n)} = \max(X_1, \dots, X_n)$,

y $h(x_1, \dots, x_n) = 2^n \quad g_\theta(x_1, \dots, x_n) = \dfrac{\prod_{i=1}^n x_i}{(\theta-1)^{2n}} I_{[x_{(n)} < \theta - 1]}$

por el teorema de factorización es un estadístico suficiente.

Para ver la completitud primero calculo la función de distribución y la de densidad.

$$F_{(n)}(x) = (F(x))^n = \left(\int_0^x \frac{2t}{(\theta-1)^2} dt\right)^n = \left(\frac{2}{(\theta-1)^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x\right)^n =$$

$$= \frac{x^{2n}}{(\theta-1)^{2n}}$$

DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

, derivando obtenemos

$$f_{(n)}(x) = 2n \frac{x^{2n-1}}{(\theta-1)^{2n}}$$

~~Ahora con esto veamos que si $E[g(T)]=0 \quad \forall\theta\in\Theta \Rightarrow g(T)=0$~~

Veamos que $E[g(T)]=0$ con g una función medible $\Rightarrow$

$$\Rightarrow P[g(T)=0]=1 \quad \forall\theta\in\Theta$$

$$E[g(T)] = \int_0^{\theta-1} g(t)\, 2n \frac{x^{2n-1}}{(\theta-1)^{2n-1}} = 0 \quad \forall\theta\in(1,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2n}{(\theta-1)^{2n-1}} \int_0^{\theta-1} g(t)\, x^{2n-1} = 0 \quad \forall\theta\in(1,+\infty) \Leftrightarrow \int_0^{\theta-1} g(t)\, x^{2n-1} = 0 \quad \forall\theta\in(1,+\infty)$$

~~Teorema Fundamental del Cálculo~~ Teorema Fundamental del Cálculo

$$\Rightarrow \quad g(\theta-1)(\theta-1)^{2n-1} = 0 \quad \forall\theta\in(1,+\infty)$$

Como $\theta\in(1,+\infty) \Rightarrow (\theta-1)>0 \Rightarrow (\theta-1)^{2n-1}>0 \Rightarrow g(\theta-1)=0 \quad \forall\theta\in(1,+\infty)$

$$\Rightarrow g(\theta-1)=0 \quad \forall\theta-1\in(0,+\infty)=\mathbb{R}^+$$

$$P_\theta(g(T)=0) \geq P(T\in\mathbb{R}^+) = 1 \Rightarrow P(g(T)=0)=1$$

Con esto obtenemos la completitud, luego $T(X_1,\ldots,X_n) = X_{(n)} = \max(X_1,\ldots,X_n)$ es un estadístico suficiente y completo

Para hallar el UMVUE, si existe, buscamos un estimador insesgado con momento de orden 2 finito.

Sea $h(T)$ dicho UMVUE,

Imponiendo $E[h(T)] = 1/\theta-1$

$$E[h(T)] = \int_0^{\theta-1} h(t)\, 2n \frac{t^{2n-1}}{(\theta-1)^{2n}}\, dt = \frac{1}{\theta-1} \quad \forall\theta\in(1,+\infty) \Rightarrow$$

DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70244432-W

$$\Rightarrow \frac{2n}{(\theta-1)^{2n}} \int_0^{\theta-1} h(t)\, t^{2n-1}\, dt = \frac{1}{\theta-1} \quad \forall \theta \in (1,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{\theta-1} h(t)\, t^{2n-1}\, dt = \frac{(\theta-1)^{2n-1}}{2n} \xRightarrow{\text{Teorema Fundamental del cálculo}} h(\theta-1)(\theta-1)^{2n-1} = (2n-1)\frac{(\theta-1)^{2n-2}}{2n}$$

$$\Rightarrow h(\theta-1) = (2n-1)\frac{(\theta-1)^{2n-2}}{2n(\theta-1)^{2n-1}} = \frac{2n-1}{2n(\theta-1)} \quad \forall \theta \in (1,+\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(\theta-1) = \frac{2n-1}{2n(\theta-1)} \quad \forall \theta-1 \in (0,+\infty) \Rightarrow h(T) = \frac{2n-1}{2nT} \quad \forall T \in \mathbb{R}^+$$

$\Rightarrow h(T) = \dfrac{2n-1}{2nT}$ es un candidato a UMVUE

Como $\dfrac{2n-1}{2n} \in \mathbb{R}^+$ y $\dfrac{1}{T} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \dfrac{2n-1}{2nT} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow h(T)$ es estimador de $\dfrac{1}{\theta-1}$ que también toma valores en $\mathbb{R}^+$, pues $\theta-1$ los toma en $\mathbb{R}^+$

Por otro lado

$$E[h(T)^2] = \cancel{\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 E\left[\left(\frac{1}{T}\right)^2\right]} \int_0^{\theta-1} \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2 t^2} \cdot 2n \frac{t^{2n-1}}{(\theta-1)^{2n}}\, dt =$$

$$= \frac{(2n-1)^2 \cdot 2n}{4n^2(\theta-1)^{2n}} \int_0^{\theta-1} t^{2n-3}\, dt = \frac{(2n-1)^2 \cdot 2n}{4n^2(\theta-1)^{2n}} \cdot \left(\frac{t^{2n-2}}{2n-2}\right)_0^{\theta-1} =$$

$$= \frac{(2n-1)^2\, 2n}{4n^2(\theta-1)^{2n}} \frac{(\theta-1)^{2n-2}}{(2n-2)} = \frac{(2n-1)^2\, 2n}{(2n-2)\,4n^2(\theta-1)^{2n}} \quad \theta-1 \in (0,+\infty)$$

$= \dfrac{(2n-1)^2}{4(n-1)\,n\,(\theta-1)^2}$ $\quad \theta-1 \in (0,+\infty)$ como $\dfrac{1}{(\theta-1)}$ está acotado, pues

$\theta-1 \in (0,+\infty) \Rightarrow E[h(T)^2] < \infty$ si $n \geq 2$

y si $n \geq 2$

Luego $h(T) = \dfrac{2n-1}{2nT}$ es UMVUE para $\dfrac{1}{\theta-1}$ solo cuando $n \geq 2$