PRELIMINARES II.
DISTRIBUCIONES DISCRETAS

Distribución Degenerada $X \sim D(c)$

- $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $P(X = c) = 1$, para un cierto $c \in \mathbb{R}$.
- *Función de distribución* F_X tal que $F_X(c^-) = 0$, y $F_X(c) = F_X(x) = 1$, para cualquier $x > c$.
- *Función generatriz de momentos* $M_X(t) = \exp(tc)$, $t \in \mathbb{R}$.
- *Momentos* $m_k = c^k$ y $\mu_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
- *Caracterización* Una variable X es degenerada si y sólo si $\mathrm{Var}(X) = 0$.

Distribución Uniforme Discreta

$$X \sim \mathcal{U}(x_1, \ldots, x_n),\ x_i \in \mathbb{R},\ P(X = x_i) = \frac{1}{n},\ i = 1, \ldots, n.$$

- *Función de distribución*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ \frac{i-1}{n} & x_{i-1} \leq x < x_i,\ i = 2, \ldots, n \\ 1 & x \geq x_n \end{cases}$$

- *Esperanza matemática de una función medible*

$$E[g(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(x_i).$$

- *Casos especiales* $E[X] = \overline{X}$, y $\mathrm{Var}(X) = S^2$, denotando, como es usual, por S^2 la varianza muestral.

Distribución de Bernoulli $X \sim B(1,p)$ $0 < p < 1$

- *Función Masa de Probabilidad* $P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1.$
- *Función de Distribución* $F_X(x) = 0$, para $x < 0$, $F_X(x) = 1 - p$, para $0 \leq x < 1$, y $F_X(x) = 1$, para $x \geq 1$.
- *Función Generatriz de Momentos* $M_X(t) = pe^t + (1-p)$, $t \in \mathbb{R}$
- *Momentos* $m_k = p$, y $\mu_k = (1-p)^k p + (-p)^k(1-p)$, para $k \in \mathbb{N}$.
- *Media* $E[X] = p$.
- *Varianza* $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

Distribución de Binomial $X \sim B(n,p)$ $0 < p < 1$, $n \in \mathbb{N}$

- *Función Masa de Probabilidad* $P(X = x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$.
- *Función Generatriz de Momentos* $M_X(t) = (pe^t + (1-p))^n$, $t \in \mathbb{R}$.
- $E[X] = np$.
- $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

Distribución de Poisson $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$

- *Función Masa de Probabilidad* $P(X = x) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots,$
- *Aproximación mediante el modelo Binomial* Cuando el número n de pruebas de Bernoulli tiende a ser infinito para un suceso con escasa probabilidad de ocurrencia, la distribución Binomial aproxima a una distribución de Poisson (ley de los sucesos raros)
- *Función Generatriz de Momentos* $M_X(t) = \exp(\lambda(e^t - 1))$, $t \in \mathbb{R}$.
- *Media y Varianza* $E[X] = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.

Distribución Geométrica $X \sim \mathcal{G}(p)$ $(0 < p < 1)$

- Indica el número de fracasos antes de que ocurra el primer éxito
- *Función de Distribución* $F_X(x) = 0$, para $x < 0$, y, para $x \geq 0$, $F_X(x) = 1 - (1-p)^{[x]+1}$.
- *Función Generatriz de Momentos*

$$M_X(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^t}, \quad t < -\ln(1-p).$$

- $E[X] = \frac{1-p}{p}$.
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- *Propiedad de falta de memoria*
- *Caracterización* Es la única distribución con valores enteros positivos que verifica la propiedad de falta de memoria.

Distribución Binomial Negativa $X \sim \mathcal{BN}(k, p)$ $k \in \mathbb{N}, \quad (0 < p < 1)$

- Indica el número de fracasos antes del k-ésimo éxito.
- Distribución de Pascal o Tiempo de Espera $X + k$ indica el número de pruebas hasta el k-ésimo éxito.
- *Función Masa de Probabilidad*

$$P(X = x) = \frac{(x+k-1)!}{x!(k-1)!}(1-p)^x p^k, \quad x \in \mathbb{N}$$

- *Función Generatriz de Momentos*

$$M_X(t) = \left[\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right]^k, \quad t < -\ln(1-p).$$

- $E[X] = \frac{k(1-p)}{p}$.
- $\mathrm{Var}(X) = \frac{k(1-p)}{p^2}$.

Distribución Hipergeométrica

$X \sim H(N, N_1, n),\ \ N, N_1, n \in \mathbb{N},\ \ N_1, n \leq N$

- X indica el número de elementos, de los n que constituyen una muestra aleatoria sin reemplazamiento de una población con N individuos, que pertenecen a una subpoblación con N_1 individuos.

- *Función Masa de Probabilidad*

$$P(X = x) \;=\; \frac{(N_1!/x!(N_1 - x)!)\,((N - N_1)!/(n - x)!(N - N_1 - n + x)!)}{N!/n!(N - n)!}$$
$$x = 0, \ldots, n, \quad x \leq N_1,\ n - x \leq N - N_1.$$

- $E[X] = n\frac{N_1}{N}$.

- $\mathrm{Var}(X) = n\frac{N_1}{N}\left(1 - \frac{N_1}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

- Aproxima a una distribución Binomial $\mathcal{B}(n, p)$ cuando $N, N_1 \to \infty$, con $N_1/N \to p$, y siendo n el parámetro de la Hipergeométrica, que define el número de pruebas de Bernoulli en el modelo Binomial que aproxima.