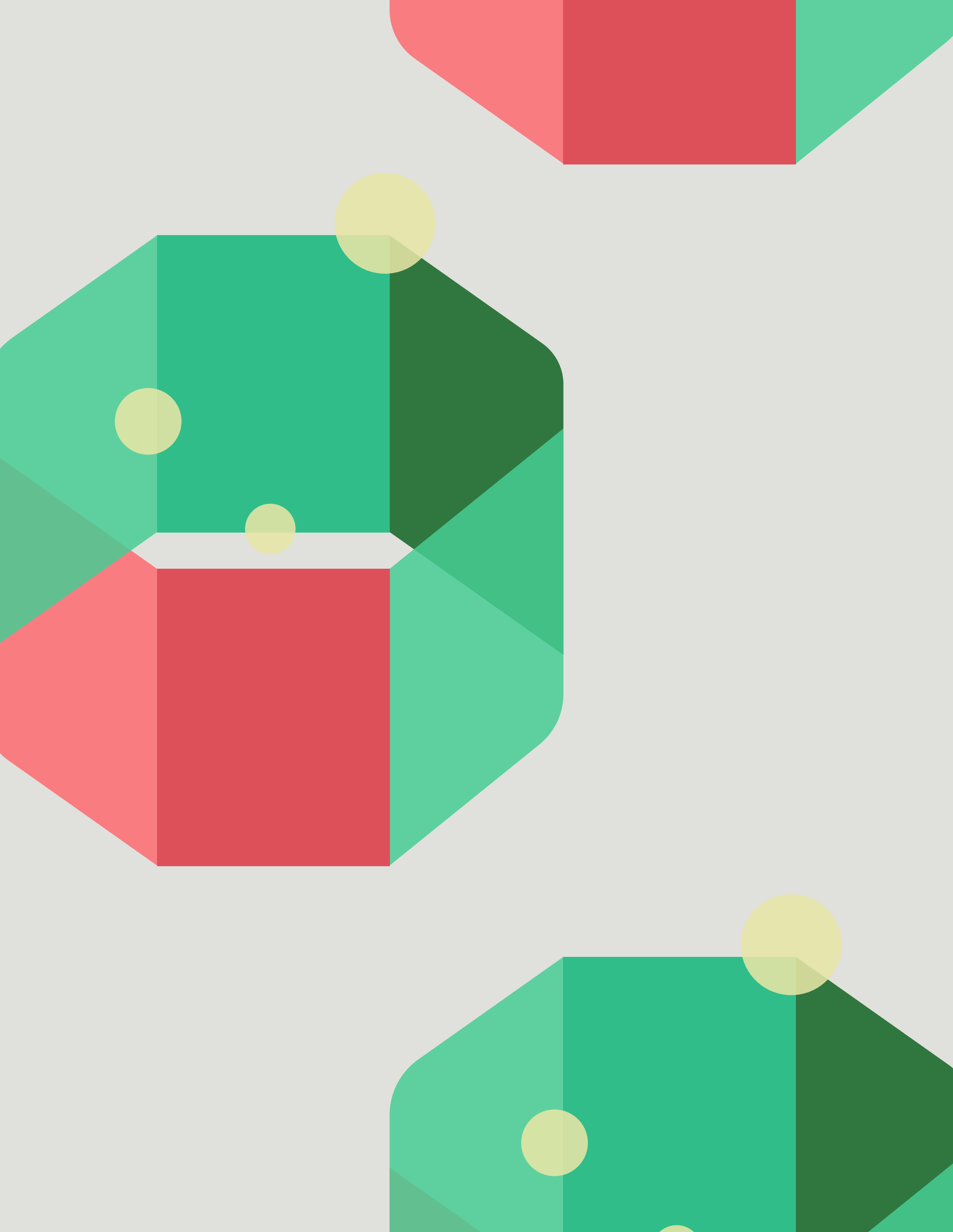

Condiciones de extremos libres

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y'(x))\, dx$$

$$D = \{ y \in C^2([a,b], \mathbb{R}^d) : y(a) = y_a \}$$

$$y \text{ pto crítico de } \mathcal{F} \Rightarrow \begin{cases} y \text{ cumple E-L} & (1) \\ \nabla_z F(b, y(b), y'(b)) = 0 & (2) \end{cases}$$

Dem:

y pto crítico $\Rightarrow$ cumple E-L

$d_v \mathcal{F}(y) = 0 \quad \forall v$ para el que esté definida

$$v \text{ admisible} \Leftrightarrow \begin{cases} v \in C^2([a,b), \mathbb{R}^d) \\ v(a) = 0 \end{cases}$$

$$d_v \mathcal{F}(y) = \int_a^b \left[v(x) \nabla_y F(x, y(x), y'(x)) + \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \nabla_z F(x, y(x), y'(x)) \right) v'(x) \right] dx$$

$$= \int_a^b (v \cdot \nabla_y F + v' \nabla_z F)\, dx$$

$$= \int_a^b v \cdot \nabla_y F - \int_a^b v' \cdot \nabla_z F + v \cdot \nabla_z F \Big|_{x=a}^{x=b}$$

$$= \int_a^b v \underbrace{\left(\nabla_y F - \frac{d}{dx} \nabla_z F \right)}_{=0} + v(b) \nabla_z F(b, y(b), y'(b))$$

$$= v(b) \nabla_z F(b, y(b), y'(b)) = 0 \quad \forall v \text{ admisible}$$

$\Rightarrow$ esto es 0

Si se cumplen ① y ②, la misma cuenta demuestra que $d_v F(y) = 0$ $\forall v$ admisible

$\Rightarrow y$ pto. crítico

Ejemplo: $F(y) = \int_0^1 (y'(x))^2 \, dx$

$$D = C^2[0,1]$$

ptos criticos $\quad y'' = 0$

$$y'(a) = 0$$

$$y'(b) = 0$$

$$F(x,y,z) = z^2$$

$$\partial_z F = 2z$$

$$\partial_z F(a, y(a), y'(a)) = y'(a) \cdot 2$$

$$\partial_z F(b, y(b), y'(b)) = y'(b) \cdot 2$$

los ptos criticos son ctes

Ejemplo: mismo F

$$D = \{ y \in C^2[0,1] : y(0) = 0 , y(1) = 1 \}$$

ptos críticos: $y'' = 0$

$$y(x) = x \quad , \quad x \in [0,1]$$

Ejemplo: mismo F

$$D = \{ y \in C^2[0,1) : y(0) = 1 \}$$

pto crítico
$$\left.\begin{array}{l} y'' = 0 \\ y'(1) = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right\}$$
por estar en D

Única sol: $y(x) = 1 \quad , \quad x \in [0,1]$

Ejemplo: $\mathcal{F}(y) = \int_\Omega |\nabla y(x)|^2 \, dx$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, acotado

$D = \{ y \in C^2(\bar{\Omega}) : y = 0 \text{ en } \underset{\text{borde}}{\partial \Omega} \}$

situación general: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ abto acotado

$$\mathcal{F}(y) = \int_\Omega F(\overset{\mathbb{R}^d}{x}, \overset{\mathbb{R}}{y(x)}, \underbrace{\nabla y(x)}_{\mathbb{R}^d}) \, dx$$

$D = \{ y \in C^2(\bar{\Omega}) : y = f \text{ en } \partial \Omega \}$

$F = \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $F \in C^2$

Resultados sobre calculo en varias variables

Teorema de Divergencia

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ abto. acotado con frontera C^1

$\mathbb{X} : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}^d$, $\mathbb{X} \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbb{X}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \mathbb{X}(x)\, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Normal} \\ \text{exterior}}}{N(x)}\, dS(x)$$

$$\mathbb{X}(x) = (X_1(x), \dots , X_d(x))$$

$$x = (x_1, \dots , x_d)$$

$\operatorname{div} \mathbb{X}(x) =$

$$\partial_{x_1} \mathbb{X}_1(x) + \dots + \partial_{x_d} X_d(x)$$