Tema 2 Espacios recubridores

2.1 Definiciones y nociones básicas

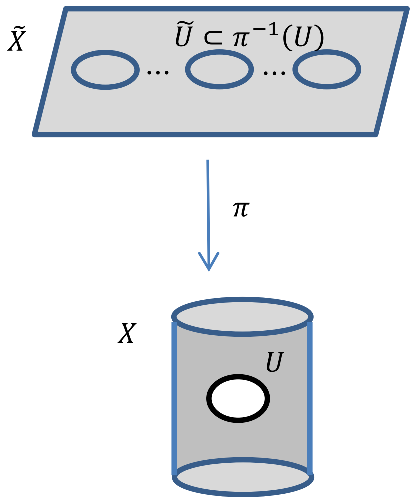
Definición

Sea X un espacio topológico. *Un (espacio) recubridor de* X es un par $(\tilde{X}, \pi)$, donde:

$i)$ $\tilde{X}$ es un espacio topológico.

$ii)$ $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ es un aplicación continua y sobreyectiva.

$iii)$ Todo punto $p \in X$ admite un entorno abierto y arcoconexo U en X tal que $\pi_{/U}: \widetilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo para todo arcocomponente $\widetilde{U}$ de $\pi^{-1}(U)$.



Al abierto U se llamará *entorno fundamental o distinguido* para el recubridor $(\tilde{X}, \pi)$. A la aplicación π se llama *aplicación recubridora*, al espacio X *base del recubridor* $(\tilde{X}, \pi)$, y a $\tilde{X}$ *el espacio recubridor*.

Dado $p \in X$, al conjunto $\pi^{-1}(p) \subset \tilde{X}$ se le llama *fibra del punto* p *para el recubridor* $(\tilde{X}, \pi)$. Un recubridor se dirá *finito* (y la aplicación recubridora *finita*) cuando la fibra $\pi^{-1}(p)$ sea finita para todo $p \in X$.

La familia $\mathcal{U} = \{U \subset X: U \text{ } es \text{ } entorno \text{ } distinguido \text{ } para \text{ } (\tilde{X}, \pi)\}$ es una base de la topología de X. Cada arcocomponente $\widetilde{U}$ de $\pi^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de $\tilde{X}$. Además, la aplicación π es abierta, y el conjunto de arcocomponente de $\pi^{-1}(U)$ está en correspondencia uno a uno con la fibra de p.

Ejercicio 1

Consideremos la aplicación recubridora $\rho: R \to S^1$ dada por $\rho(t) = e^{2\pi t i}$. Demostrar que $\rho_{/]0,2[}:]0,2[\to S^1$ es continua, abierta y sobreyectiva, pero no es recubridora.

Ejercicio 2

Construir explícitamente una aplicación recubridora $\rho: \widetilde{X} \to X$ donde:

$$\widetilde{X} = \left\{(x, y, z) \in R^3 : z = x^2 + y^2\right\} \quad X = \left\{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}$$

¿Existe una aplicación recubridora $\psi: X \to \widetilde{X}$?

Proposición

Si $f: Y \to X$ es un homeomorfismo local sobreyectivo y propio entre espacios de Hausdorff localmente compactos, entonces f es un aplicación recubridora finita.

Corolario

Supongamos que X e Y son espacios Hausdorff, Y compacto. Todo homeomorfismo local $f: Y \to X$ una aplicación recubridora.

Proposición

Sean $\pi_1: Y \to Z$ y $\pi_2: Z \to X$ aplicaciones recubridoras. Si π_2 es finita entonces $\pi_2 \circ \pi_1: Y \to X$ es recubridora.

Ejercicio 3

Sean $\boldsymbol{\rho}: \widetilde{\boldsymbol{X}} \to \boldsymbol{X}$ y $\boldsymbol{\psi}: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ aplicaciones recubridoras. Demostrar que si todas las fibras de $\boldsymbol{\psi}$ son finitas, entonces $\boldsymbol{\psi} \circ \boldsymbol{\rho}$ es una aplicación recubridora.

Definición

Sea X espacio topológico, y sea $G \subset Hom(X)$ un subgrupo. Consideremos la acción canónica de G sobre X: $\mu: GxX \to X$ $\mu(g,x) = g(x)$. Es habitual escribir $g.x$ en vez de $\mu(g,x)$ para todo $g \in G, x \in X$. La relación binaria en X:

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G: g.x = y$$

Es de equivalencia. El espacio topológico cociente $X/_{\sim}$ se denotará por $X/_G$ y será referido como *el espacio de órbitas asociado a la acción μ inducida por G*.

Definición

Sea X espacio topológico, y sea $G \subset Hom(X)$ un subgrupo. El subgrupo g se dirá que *actúa de forma propia y discontinua sobre X* (y la acción $\mu: GxX \to X$ inducida se dirá *propia y discontinua*) si para todo $x \in X$ existe un entorno abierto U de x en X, tal que $(g.U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{Id_X\}$ (aquí $g.U$ denota el conjunto $g(U)$). Al entorno U se llama *entorno dsitinguido (alrededor de x) para la acción*.

Teorema

Sea X espacio topológico, y sea $G \subset Hom(X)$ un subgrupo actuando de forma propia y discontinua sobre X. Entonces la proyección al espacio de órbitas $\pi: X \to X/_G$ es recubridora.

2.2. Levantamiento de aplicaciones al recubridor

Proposición

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, sea Y un espacio topológico conexo y sean $f_1, f_2: Y \to \tilde{X}$ dos aplicaciones continuas satisfaciendo $\pi \circ f_1 = \pi \circ f_2$. Si $A = \{y \in Y: f_1(y) = f_2(y)\} \neq \emptyset$ entonces $f_1 = f_2$.

Lema

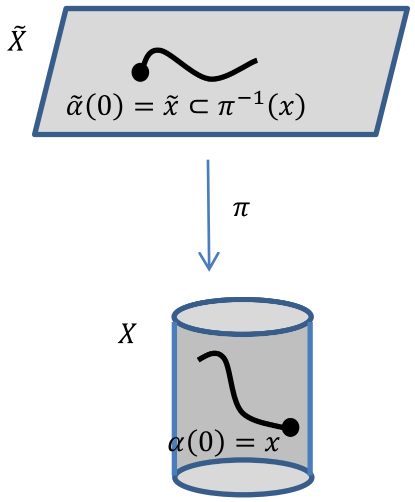
Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Dada $H: [0,1]^2 \to X$ continua con $H(0,0) = x_0$, existe una única aplicación $\widetilde{H}: [0,1]^2 \to X$ continua tal que $\pi \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$.

Corolario (Propiedad del levantamiento de arco)

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, y se considera un arco $\alpha: [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x_0$. Entonces existe un único arco $\tilde{\alpha}: [0,1] \to \tilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. A $\tilde{\alpha}$ se llama levantamiento de α via π con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.

Definición

Dado un recubridor $(\tilde{X}, \pi)$ de X, un arco $\alpha: [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x$ y $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, se denota por $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}: [0,1] \to \tilde{X}$ *el único levantamiento de de α via π con condición inicial* $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}$.



Corolario

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, y $y \in X$ y un arco $\alpha: [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Consideramos la aplicación $\eta_\alpha: \pi^{-1}(x) \to \pi^{-1}(y)$ dada por $\eta_\alpha(\tilde{x}) = \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)$. Entonces η_α es biyectiva, y en particular $\pi^{-1}(x)$ y $\pi^{-1}(y)$ tienen el mismo cardinal.

Definición (Número de hojas de un recubridor)

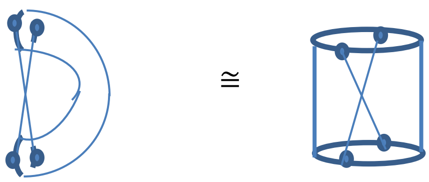
Dado un recubridor $(\tilde{X}, \pi)$ de X, se llama *número de hojas del recubridor* al cardinal de $\pi^{-1}(x)$, donde x es un punto aleatorio de X.

Ejercicio

Construir una aplicación recubridora de dos hojas $\rho: T \to K$ donde T es el toro y K es la botella de Klein. Deducir que R^2 es el recubridor universal de K.

Consideramos la aplicación de los antípodas, $A: T \to T$, $A(p) = -p$, A es un homeomorifsmo, y además, $A \circ A = Id_T$. Luego $\{Id_T, A\}$ es un subgrupo de $Homeo(T)$, con T de Hausdorff, y A no tiene puntos fijos, es decir, $G = \{Id_T, A\}$ actúa de forma propia y discontinua sobre T.

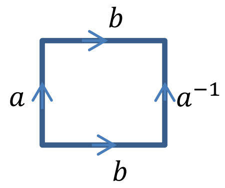
Sea $\pi: T \to {}^{T}/_{G}$ es un recubridor de dos hojas, si $G.p \in {}^{T}/_{G}$ entonces $\pi^{-1}(G.p) = \{p, -p\}$.



Veamos que ${}^{T}/_{G} \cong K$. Sea T^+ la mitad derecha del toro que es homeomorfo al cilindro acotado. Si se supone el cilindro centrado en cero, cada punto de la circunferencia superior se identifica en el espacio de órbitas con su antípoda en la circunferencia inferior.

$$\begin{tikzcd} T^+ \arrow[r] \arrow[dr, "\hat{\imath} = \pi \circ i"'] & T \arrow[d, "\pi"] \\ & T/G \end{tikzcd}$$

Como $\hat{\imath}$ es una identificación, entonces la identificación del cilindro es:



Es decir, la botella de Klein, R^2 recubre a T, T recubre a K (finito), entonces R^2 recubre a K, y por lo tanto, R^2 es un recubrimiento universal.

Ejemplos

a.- (R, ρ) es un recubridor de infinitas hojas de S^1.

b.- (S^n, π) es un recubridor de dos hojas de RP^n.

c.- (S^n, π_n) es un recubridor de n hojas de S^1.

Corolario (Propiedad del levantamiento de homotopías)

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, y sean dos arcos $\alpha, \beta: [0,1] \to X$ con $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Supongamos que existe una homotopía de α en β (con extremos fijos). Entonces, los arcos $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ y $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$tienen los mismos extremos y la aplicación $\tilde{H}$ es una homotopía de $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ (con extremos fijos).

Teorema de Monodromía

Si $(\tilde{X}, \pi)$ es un recubridor de X, y sean $x \in X$ y $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, entonces $\pi_*: \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \to \Pi_1(X, x)$ es un monomorfismo de grupos.

Corolario

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, y sean $x \in X$. Sean $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$ y $\tilde{\alpha}: [0,1] \to \tilde{X}$ un arco con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_1 \; y \; \tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$. Entonces

$$\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)\right) = [\alpha]^{-1} * \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)\right)$$

donde α es el lazo $\pi \circ \tilde{\alpha}$ (con base x). Como consecuencia $\left\{\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})\right) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\right\}$ es una clase de conjugación de subgrupos en $\Pi_1(X, x)$.

Definición

Se denota por $Rec(X)$ *el conjunto de todos los recubridores* de X, esto es;

$$Rec(X) = \{(\tilde{X},\pi):(\tilde{X},\pi) es \text{ recubridor de } X\}$$

Fijamos $x \in X$ y sea el conjunto $S_c(\Pi_1(X,x))$ de las clases de conjugación de subgrupos de $\Pi_1(X,x)$, se define:

$$\Delta_x: Rec(X) \to S_c(\Pi_1(X,x)) \ \Delta_x(\tilde{X},\pi) = \left\{\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x})\right): \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\right\}$$

Teorema

Sea $\pi: \tilde{X} \to X$ una aplicación recubridora, sea $f: Y \to X$ una aplicación continua y sea $y_0 \in Y$, $x_0 \in f(y_0) \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a.- Existe $\tilde{f}: Y \to \tilde{X}$ continua tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$.

b.- $f_*(\Pi_1(Y,y_0)) \subset \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_0)\right)$.

Corolario

Sea (Y,π) un recubridor de X, sea $A \subset X$ un subespacio topológico arcoconexo y denotemos por $i: A \to X$ a la aplicación inclusión. Supongamos $i_*(\Pi_1(A,x))\, \pi(\Pi_1(Y,y))$ para algunos $x \in A$ e $y \in \pi^{-1}(x)$. Entonces $\pi_{/\tilde{A}}: \tilde{A} \to A$ es un homeomorfismo, donde $\tilde{A}$ es la arcocomponente de $\pi^{-1}(A)$ que contiene a y.

Proposición

Sea $(G,.)$ un grupo topológico con elemento neutro $e \in G$, sea $\pi: \tilde{G} \to G$ una aplicación recubridora y elegimos $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Entonces $\tilde{G}$ admite una estructura de grupo topológico con elemento neutro $\tilde{e}$ que convierte a π en un homomorfismo de grupos.

Corolario

X tiene como máximo, salvo isomorfismos, tantos recubridores como clases de conjugación de subgrupos tengan su grupo fundamental.

Ejemplo

1.- Si X es simplemente conexo, entonces el grupo fundamental es el trivial, y solo tiene una única clase de conjugación, así salvo isomorfismo, (X, Id_X) es su único recubrimiento.

2.- El grupo fundamental de S^1 es Z que es abeliano, luego sus clases de conjugación de subgrupos son sus subgrupos. Luego solo son sus recubrimientos (R,ρ) y (S^n,π_m), salvo isomorfismos.

3.- El grupo fundamental de RP^n es Z_2 que es abeliano, luego sus clases de conjugación de subgrupos son sus subgrupos. Luego solo son sus recubrimientos (RP^n, Id_{RP^n}) y $(S^2,\pi_{antípoda})$, salvo isomorfismos.

2.3.- La acción del grupo fundamental sobre la fibra

Teorema

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, y sean $x \in X$ fijo. La aplicación

$$.: \ \pi^{-1}(x) x \Pi_1(X,x) \to \pi^{-1}(x) \quad y.[\alpha] = \tilde{\alpha}_y(1)$$

es una acción transitiva por la derecha del grupo $\Pi_1(X,x)$ sobre la fibra $\pi^{-1}(x)$ de x.

Además, para cada $y \in \pi^{-1}(x)$ el subgrupo de isotropía asociado a la acción en el punto y, que se define por $H_y = \{[\alpha] \in \Pi_1(X,x) : y.[\alpha] = y\}$ coincide con $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)$.

Corolario

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, y sean $x \in X$ fijo. Entonces para cada $y \in \pi^{-1}(x)$ la aplicación

$$\left({\Pi_1(X,x)} \big/ {\Pi_1(\tilde{X}, y)} \right)_{dcha} \to \pi^{-1}(x) \quad \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) * [\alpha] \to \tilde{\alpha}_y(1)$$

es biyectiva.

Proposición

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X. Entonces:

(i) X es Hausdorff $\Longrightarrow$ $\tilde{X}$ es Hausdorff.

$(ii\ )$ $\tilde{X}$ es II-Axioma de numerabilidad $\Longrightarrow$ X es II-Axioma de numerabilidad.

(iii) Si $(\tilde{X}, \pi)$ tiene una cantidad numerable de hojas.

$\tilde{X}$ es II-Axioma de numerabilidad $\Longleftrightarrow$ X es II-Axioma de numerabilidad

Corolario

Sea X espacio topológico II-Axioma de numerabilidad y con grupo fundamental numerable. Entonces todo recubridor de X es II-Axioma de numerabilidad.

2.4.- Transformaciones de recubridores

Definición

Sean $(\tilde{X}_j, \pi_j)$ $j = 1{,}2$, dos espacios recubridores de X.

Un homomorfismo de recubridores Φ de $(\tilde{X}_1, \pi_1)$ en $(\tilde{X}_2, \pi_2)$ es una aplicación continua $\Phi: \tilde{X}_1 \longrightarrow \tilde{X}_2$ satisfaciendo $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$.

Un homomorfismo de recubridores Φ de $(\tilde{X}_1, \pi_1)$ en $(\tilde{X}_2, \pi_2)$ se dirá un *isomorfismo de recubridores* si Φ es un homeomorfismo.

Si $(\tilde{X},\pi)$ es un recubridor de X, a los isomorfismos de $(\tilde{X},\pi)$ en $(\tilde{X},\pi)$ se les llama *automorfismos* de $(\tilde{X},\pi)$.

Observación

Dado un espacio topológico:

a.- La composición de dos homomorfismos entre recubridores de X es un momomorfismo de recubridores de X.

b.- El inverso de un isomorfismo entre dos recubridores de X es un isomorfismo de recubridores de X

c.- Si $(\tilde{X},\pi)$ es un recubridor de X entonces $Id_{\tilde{X}}$ es un automorfismo de $(\tilde{X},\pi)$.

Definición

Si $(\tilde{X},\pi)$ es un recubridor de X , se denota por $\mathcal{A}(\tilde{X},\pi)$ al grupo (respecto a la composición) de los automorfismo de $(\tilde{X},\pi)$.

Ejemplos

1.- Sea (R,ρ) el recubridor universal de S^1, entonces $\mathcal{A}(R,\rho) \cong \Pi_1(S^1,1) \cong Z$

$$\mathcal{A}(R,\rho) = \{\varphi_n: Z \to Z: \varphi_n(k) = n + k \ \ \forall k \in Z\}$$

2.- Sea (S^n,π) el recubridor universal de RP^n $n \geq 2$, entonces

$$\mathcal{A}(S^n,\pi) \cong \Pi_1(RP^n,\pi(N)) \cong Z_2$$

$$\mathcal{A}(S^n,\pi) = \{Id_{S^n}, A \ donde \ \pi \circ A = \pi\}$$

Corolario

Sean $(\tilde{X}_j,\pi_j)$ $j = 1,2,$ dos espacios recubridores de X. Si $\Phi,\psi: (\tilde{X}_1,\pi_1) \longrightarrow (\tilde{X}_2,\pi_2)$ son homomorfismos recubridores distintos, entonces $\Phi(y) \neq \psi(y) \ \ \forall y \in \tilde{X}_1$.

Corolario

Sean $(\tilde{X}_j,\pi_j)$ $j = 1,2,$ dos espacios recubridores de X, y sean $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$ $j = 1,2.$

(I) Existe un homomorfismo $\Phi: (\tilde{X}_1,\pi_1) \longrightarrow (\tilde{X}_2,\pi_2)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ si y solo si

$$(\pi_1)_*\left(\Pi_1(\tilde{X}_1,y_1)\right) \subseteq (\pi_2)_*\left(\Pi_1(\tilde{X}_2,y_2)\right)$$

(II) Existe un isomorfismo $\Phi: (\tilde{X}_1,\pi_1) \longrightarrow (\tilde{X}_2,\pi_2)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ si y solo si

$$(\pi_1)_*\left(\Pi_1(\tilde{X}_1,y_1)\right) = (\pi_2)_*\left(\Pi_1(\tilde{X}_2,y_2)\right)$$

Proposición

Sean $(\tilde{X}_j, \pi_j)$ $j = 1,2$, dos espacios recubridores de X y $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \longrightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ un homomorfismo, entonces $(\tilde{X}_1, \Phi)$ es un recubridor de $\tilde{X}_2$.

Corolario

Sean $(\tilde{X}_j, \pi_j)$ $j = 1,2$, dos espacios recubridores de X y sean $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$ $j = 1,2$. Si $(\pi_1)_*\left(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)\right) \subseteq (\pi_2)_*\left(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2)\right)$ entonces $\tilde{X}_1$ recubre a $\tilde{X}_2$.

2.5.- El grupo de automorfismos. Recubridores regulares.

Proposición

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X. Entonces la acción

$$\mu: Aut(\tilde{X}, \pi) x \tilde{X} \to \tilde{X} \quad (\Phi, \mathrm{y}) \to \Phi.\mathrm{y} = \Phi(y)$$

es propia y discontinua.

Corolario (Construcción de Recubridores)

Sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X, $G \leq Aut(\tilde{X}, \pi)$ un subgrupo y $(\tilde{X}, \pi_0)$ el recubridor asociado al espacio de órbitas $\tilde{X}/_G$:

$$\pi_0: \tilde{X} \to \tilde{X}/_G \quad y \to G.y$$

Entonces la única aplicación $\tilde{\pi}: \tilde{X}/_G \to X$ tal que $\tilde{\pi} \circ \pi_0 = \pi$, esto es, definida por

$$\tilde{\pi}(G.y) = \pi(y) \ \ \forall G.y \in \tilde{X}/_G$$

es recubridora.

Proposición

Sea X un espacio topológico, sea $(\tilde{X}, \pi)$ un recubridor de X y fijemos $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$ $j = 1,2$. Se toma $\tilde{\alpha}$ cualquier arco en $\tilde{X}$ con $\tilde{\alpha}(0) = y_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = y_2$, y llamamos $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$. Entonces $\exists\ \Phi \in Aut(\tilde{X}, \pi)$ con $\Phi(y_1) = y_2 \Leftrightarrow [\alpha] \in N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)\right)\right)$.

Definición

Fijados $y \in \pi^{-1}(x)$ y $[\alpha] \in N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right)$ la proposición anterior garantiza que existe un automorfismo $\Phi_y([\alpha])$ de $(\tilde{X}, \pi)$ con $\Phi_y([\alpha])(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$, que es único. Se denota Υ a la aplicación $\Upsilon: N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right) \to Aut(\tilde{X}, \pi)$ $\ \Upsilon([\alpha]) = \Phi_y([\alpha])$.

Teorema

Sean X un espacio topológico y $(\tilde{X},\pi)$ un recubridor de X y fijemos $x\in X$ e $y\in\pi^{-1}(x)$. Entonces la aplicación $\Upsilon: N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right)\right)\to Aut(\tilde{X},\pi)$ $\Upsilon([\alpha])=\Phi_y([\alpha])$ es un epimorfismo de grupos con $Ker\Upsilon=\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right)$.

En particular, por el primer teorema de isomorfía para grupos

$$N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right)\right)\Big/\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right)\cong Aut(\tilde{X},\pi)$$

Observación

Si además, $y_j\in\pi_j^{-1}(x)$ $j=1,2$ y $[\alpha]\in\Pi_1(X,x)$ es tal que $\tilde{\alpha}_{y_1}(1)=y_2$ entonces

$$N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y_2)\right)\right)=[\alpha]^{-1}*N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y_1)\right)\right)*[\alpha]$$

Ambos subgrupos conjugados de $\Pi_1(X,x)$ son isomorfos a $Aut(\tilde{X},\pi)$. Téngase en cuenta que

$$\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y_2)\right)=[\alpha]^{-1}*\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y_1)\right)*[\alpha]$$

Definición

Sea $(\tilde{X},\pi)$ un recubridor de X se dirá *regula*r si existe $x\in X$ tal que la acción

$$\mu: Aut(\tilde{X},\pi)x\pi^{-1}(x)\to\pi^{-1}(x)\quad(\Phi,\mathrm{y})\to\Phi.\mathrm{y}=\Phi(y)$$

es transitiva.

Observación

μ_x es transitiva para algún $x\in X$ si y solo si μ_x es transitiva para todo $x\in X$. Por tanto, $(\tilde{X},\pi)$ es regular si y solo si μ_x es transitiva para todo $x\in X$.

Proposición

Sea $(\tilde{X},\pi)$ un recubridor de X. Son equivalentes:

a.- $(\tilde{X},\pi)$ es regular.

b.- Para todo $x\in X$ e $y\in\pi^{-1}(x)$, $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right)$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X,x)$.

c.- Existen $x\in X$ e $y\in\pi^{-1}(x)$ tales que $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right)$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X,x)$.

Corolario

Si $(\tilde{X},\pi)$ es un recubridor regular de X, $\in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, entonces:

a.- $\tilde{Y}: {}^{\Pi_1(X,x)}\big/_{\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right)} \to Aut(\tilde{X},\pi)$ $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X},y)\right) * [\alpha] \to \Phi_y([\alpha])$ es un isomorfismo de grupos.

b.- Si $\pi_0: \tilde{X} \to {}^{\tilde{X}}\big/_{Aut(\tilde{X},\pi)}$ es la proyección al espacio de órbitas ${}^{\tilde{X}}\big/_{Aut(\tilde{X},\pi)}$, existe un homeomorfismo $\tilde{\pi}: {}^{\tilde{X}}\big/_{Aut(\tilde{X},\pi)} \to X$ tal que $\tilde{\pi} \circ \pi_0 = \pi$.

Corolario

Si G es un grupo de homeomorfismos que actúa de forma propia y discontinua sobre el espacio X y $\pi: X \to {}^{X}\big/_{G}$ es la proyección al espacio de órbitas, entonces (X,π) es un recubridor regular y $Aut(X,\pi) = G$.

Recíprocamente, si $(\tilde{X},\pi)$ es un recubridor regular de X entonces X es homeomorfo al espacio de órbitas ${}^{\tilde{X}}\big/_{Aut(\tilde{X},\pi)}$, y salvo ese homeomorfismo la proyección recubridora π no es sino la proyección al espacio de órbitas $\tilde{X} \to {}^{\tilde{X}}\big/_{Aut(\tilde{X},\pi)}$.

Proposición

Si $\Phi \in Aut(Y,\pi)$, entonces Φ es (la restricción a Y de) una transformación de $M\ddot{o}ebius$.

Corolario

Existen polinomios P para los que el recubridor (Y,π) no es regular.

2.6.- Existencia y clasificación de Recubridores

Teorema

Sean $(\tilde{X}_j, \pi_j)$ $j = 1,2$, dos espacios recubridores de X. Son equivalentes:

(i) $(\tilde{X}_1, \pi_1) \cong (\tilde{X}_2, \pi_2)$.

(ii) $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ para todo $x \in X$.

(iii) $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ para algún $x \in X$.

En particular, para todo $x \in X$ la aplicación

$$\tilde{\Delta}_x: R(x) \to S_c(\Pi_1(X,x)) \quad \tilde{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) = \Delta_x(\tilde{X}, \pi)$$

inducida por $\Delta_x(\tilde{X}, \pi)$ en el cociente $R(x)$ es inyectiva.

Definición

Un recubridor (Y, π) de X se dirá *universal* si $\Pi_1(Y) \cong \{0\}$, o equivalentemente, si $\tilde{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) = \{[\varepsilon_x]\}$ para algún (luego para todo) $x \in X$.

Corolario

Si X admite recubridor universal (Y, π_0), entonces:

a.- Y recubre a $\tilde{X}$ para cualquier recubridor $(\tilde{X}, \pi)$ de X.

b.- (Y, π_0) es un recubridor regular.

c.- Si $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, la aplicación siguiente es un isomorfismo:

$$\tilde{\mathbf{Y}}: \mathbf{\Pi_1}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{Aut}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{\pi_0}) \quad [\boldsymbol{\alpha}] \to \mathbf{\Phi}_{\boldsymbol{y}}([\boldsymbol{\alpha}])$$

Teorema

Si un espacio topológico $\boldsymbol{X}$ admite recubridor universal si y solo si la aplicación $\tilde{\Delta}_x: \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{S_c}(\mathbf{\Pi_1}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x}))$ es biyectiva para algún (luego para todo) $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Ejercicio

Construir una aplicación recubridora de dos hojas $\rho: C \to M$ donde C es el cilindro infinito y M es la cinta de Möbius infinita. Deducir que R^2 es el recubridor universal de M.

Sea $C: \{(x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 = 1\}$ y $A: C \to C \;\; A(p) = -p$, es homeomorfismo de C en sí mismo, y $A \circ A = Id_C$ y sea $G = \{Id_C, A\} \leq Homeo(C)$ y como C es de Hausdorff y G es finito, entonces G actúa de forma propia y discontinua sobre C, y por lo tanto, $\pi: {}^{C}/_{G} \to C$ es una aplicación recubridora de dos hojas: $\pi^{-1}(G, p) = \{p, -p\} \;\; \forall p \in C$.

Veamos ahora que ${}^{C}/_{G} \cong M$, y se considera $B = C \setminus \{x0\}$

$$B \cong \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] xR = B´$$

Sea $f: B´ \to {}^{C}/_{G} \;\; f: \pi_B \circ h$ es una identificación

$$(x, y) \sim_f (x´, y´) \Leftrightarrow (x, y) = (x´, y´) \text{ ó } |x - x´| = 1 \; e \; y = -y´$$

Luego ${}^{B´}/_{\sim_f} \cong {}^{C}/_{G}$ y como ${}^{C}/_{G}$ es la cinta de Möbius infinita. Es decir, R^2 recubre a C, C recubre a $M(infinita)$, entonces R^2 recubre a $M(infinita)$, R^2 es un recubridor universal de M.

2.7.- Existencia de recubridor universal

Definición

Un abierto arcoconexo U de un espacio topológico X se dice que satisface la propiedad de *semilocal simple conexión* si el homomorfismo $i_*: \Pi_1(U, x) \to \Pi_1(X, x)$ inducido por la inclusión $i: U \to X$ es trivial (esto es, constante $[\varepsilon_x] \in \Pi_1(X, x)$).

Un espacio topológico X se dirá *semilocalmente simplemente conexo* si todo punto admite un entorno abierto arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo.

Observación

Si X es semilocalmente simplemente conexo entonces la familia de abiertos semilocalmente simplemente conexos en X son una base de la topología de X.

Teorema

Un espacio topológico X admite recubridor universal si y solo si es semilocalmente simplemente conexo.

Ejercicios del tema 2 Espacios recubridores

Ejercicio 1

Consideremos la aplicación recubridora $\rho: R \to S^1$ dada por $\rho(t) = e^{2\pi t i}$. Demostrar que $\rho_{/]0,2[}:]0,2[\to S^1$ es continua, abierta y sobreyectiva, pero no es recubridora.

Ejercicio 2

Construir explícitamente una aplicación recubridora $\rho: \widetilde{X} \to X$ donde:

$$\widetilde{X} = \{(x, y, z) \in R^3: z = x^2 + y^2\} \quad X = \{(x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

¿Existe una aplicación recubridora $\psi: X \to \widetilde{X}$?

Ejercicio 3

Sean $\rho: \widetilde{X} \to X$ y $\psi: X \to Y$ aplicaciones recubridoras. Demostrar que si todas las fibras de ψ son finitas, entonces $\psi \circ \rho$ es una aplicación recubridora.

Si todas las fibras de ψ son finitas, entonces ψ es finita, y por lo tanto, por la proposición anterior $\psi \circ \rho$ es recubridora.

Sea $y \in Y$ un punto arbitrario, y se considera un entorno distinguido U en Y para ψ alrededor de y. Se llama $\psi^{-1}(y) = \{z_1, \dots, z_n\}$ finita, entonces

$$\psi^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^{n} V_j \quad con\, \psi_{/V_j}: V_j \to U\; es\; un\; homeomorfismo\; j = 1, \dots, n$$

Se considera un entorno distinguido W_j en X alrededor de z_j para el recubridor ρ, $j = 1, \dots, n$.

Obsérvese que la arcocomponente conteniendo a y es un entorno distinguido para ψ:

$$U_0 \subset \bigcap_{j=1}^{n} \psi(W_j \cap V_j) \subset U$$

Por tanto, si $U_j = V_j \cap \psi^{-1}(U_0)$, $j = 1, \dots, n$ entonces

$$\psi^{-1}(U_0) = \bigcup_{j=1}^{n} U_j \quad con\, \psi_{/U_j}: U_j \to U_0\; es\; un\; homeomorfismo\; j = 1, \dots, n$$

Por otra parte, al ser $U_j = V_j \cap \psi^{-1}(U_0) = \left(\psi_{/V_j}\right)^{-1}(U_0) \subset W_j \cap V_j \subset W_j$ para cada j, es claro que

$$\rho^{-1}(U_j) = \bigcup_{p \in \rho^{-1}(z_j)} U_{j,p}$$

$$con\, \rho_{/U_j}: U_{j,p} \to U_j\; es\; un\; homeomorfismo\; p \in \rho^{-1}(z_j)\; j = 1, \dots, n$$

Como conclusión:

$$(\psi \circ \rho)^{-1}(U_0) = \rho^{-1}\left(\psi^{-1}(U_0)\right) = \rho^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{n} U_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} \rho^{-1}(U_j) = \bigcup_{j=1}^{n}\left(\bigcup_{p \in \rho^{-1}(z_j)} U_{j,p}\right)$$

$$con\, (\psi \circ \rho)_{/U_{j,p}}: U_{j,p} \to U_0\; es\; un\; homeomorfismo\; p \in \rho^{-1}(z_j)\; j = 1, \dots, n$$

Es decir, U_0 es un entorno distinguido para $\psi \circ \rho$ alrededor de y, entonces $\psi \circ \rho$ es una aplicación recubridora.

Ejercicio 4

Construir una aplicación recubridora de dos hojas $\rho: T \to K$ donde T es el toro y K es la botella de Klein

Ejercicio 5

Construir una aplicación recubridora de dos hojas $\rho: C \to M$ donde C es el cilindro infinito y M es la cinta de Möbius infinita. Deducir que R^2 es el recubridor universal de M.

Ejercicio 7

Sea $\rho: \widetilde{X} \to X$ una aplicación recubridora donde $\widetilde{X}$ es arcoconexo. Dados puntos $x_0 \in X$ y $\widetilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$, probar que $\rho_*: \Pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \to \Pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo si y solo si ρ es un homeomorfismo.

$\Longrightarrow$) Como $\Pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \subseteq \Pi_1(X, x_0)$ siempre. Como ρ_* es un isomorfismo, entonces $\Pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \cong \Pi_1(X, x_0)$, por un corolario, se tiene que ρ es un homeomorfismo.

$\Longleftarrow$) Un homeomorfismo conserva los grupos fundamentales, luego necesariamente ρ_* es un isomorfismo.

Ejercicio 8

Sea $\rho: \widetilde{X} \to X$ una aplicación recubridora y $f: Y \to X$ continua, siendo Y conexo y localmente arcoconexo. ¿Existen siempre levantamientos de f si X es simplemente conexo? ¿Y si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo? ¿Y si Y es simplemente conexo?

Sea X es simplemente conexo e $y_0 \in Y$, entonces $x_0 = f(y_0)$ y $\widetilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$, y $f_*(\pi, (Y, y_0))$ será subgrupo de $\Pi_1(X, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ y $\rho_*\left(\pi, (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right)$ será subgrupo de $\Pi_1(X, x_0) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$.

Necesariamente entonces $f_*(\pi, (Y, y_0)) \subseteq \rho_*\left(\pi, (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right)$, y por el teorema de levantamiento de aplicaciones, existe un levantamiento de f.

Si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo, entonces $\rho_*\left(\pi, (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$ y como

$$f_*(\pi, (Y, y_0)) \subseteq \rho_*\left(\pi, (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$$

Luego existirá levantamiento de f si $f_*(\pi, (Y, y_0)) = \{[\varepsilon_{x_0}]\}$.

Y si Y es simplemente conexo, $f_*(\pi, (Y, y_0)) = \{[\varepsilon_{x_0}]\} \subseteq \rho_*\left(\pi, (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)\right)$, y por lo tanto, no necesariamente.

Ejercicio 9

Sea $\rho_n: S^1 \to S^1$ la aplicación recubridora dada por $\rho_n(z) = z^n$ con $n \in Z$ y $n \neq 0$. Demostrar que hay levantamientos de ρ_m mediante ρ_n si y solo si $m = nk$ para algún $k \in Z$. En tal caso, se cumple que $\widetilde{\rho}_m = \rho_k$, donde $\widetilde{\rho}_m$ es el único levantamiento de ρ_m con $\widetilde{\rho}_m(1) = 1$.

Hay levantamientos de ρ_m vía $\rho_n \Leftrightarrow \rho_{m*}\left(\Pi_1(S^1)\right) \subseteq \rho_{n*}\left(\Pi_1(S^1)\right) \Leftrightarrow \langle[\alpha]^m\rangle \subseteq \langle[\alpha]^n\rangle \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow mZ \subseteq nZ$$

Lo cual ocurre si y solo si m es múltiplo de n, esto es, $m = nk$ para algún $k \in Z$. En cuyo caso existe un único $\widetilde{\rho}_m: S^1 \to S^1$ continua tal que $\rho_n \circ \widetilde{\rho}_m = \rho_m$ y $\widetilde{\rho}_m(1) = 1$.

Efectivamente $\rho_n\left(\rho_k(z)\right) = \rho_n\left(z^k\right) = z^{nk} = z^m = \rho_m(z)\ \forall z \in S^1$.

Ejercicio 10

Sea X un espacio conexo y localmente arcoconexo con grupo fundamental finito. Sean $f, g: X \to R$ funciones continuas tales que $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$, para cada $x \in X$. Demostrar que existe una función continua $h: X \to R$ tal que $cos(h(x)) = f(x)$ y $sen(h(x)) = g(x)$, para cada $x \in X$. ¿Hasta qué punto es h única?

Como $\|(f(x), g(x))\| = 1 \Longrightarrow \big(f(x), g(x)\big) \in S^1\ \ \forall x \in X$

$$X \xrightarrow{(f,g)} S^1 \ \ y \ \ X \xrightarrow{h} R \xrightarrow{\rho} S^1 \Longrightarrow \rho \circ h = (f, g)$$

Como R recubre a S^1 vía $\rho: R \to S^1$ $\rho(t) = (cost, sent)$, se busca un levantamiento de (f, g) a R, que existe si:

$$(f, g)_*\big(\Pi_1(X, x_0)\big) \subseteq \rho_*\big(\Pi_1(R, 0)\big) = F([\alpha]) = Z$$

$$(f, g)_*\big(\Pi_1(X, x_0)\big)\ finito \leq \Pi_1(S^1) = Z$$

El único subgrupo finito de Z es $\{0\}$ luego $(f, g)_*\big(\Pi_1(X, x_0)\big) = \{[\varepsilon_{x_0}]\} \subseteq F([\alpha])$.

Además esta aplicación h es única y $\rho \circ h = (f, g)$, esto es:

$$(\cos(h), sen(h)) = (f, g)$$

Ejercicio 11

(El grupo fundamental de la botella de Klein) Para cada $n, m \in Z$ se define $f_{n,m}: R^2 \rightarrow R^2$ como:

$$f_{n,m}(x,y) = (x, (-1)^n y) + (n, m)$$

Se denota $G = \{f_{n,m}: n, m \in Z\}$, Se pide lo siguiente:

a.- Demostrar que cada aplicación $f_{n,m}$ es una traslación o una simetría deslizante.

Si n es par:

$$f_{n,m}(x,y) = (x,y) + (n,m) \Longrightarrow f_{n,m} \; es\ una\ traslación$$

Si n es impar:

$$f_{n,m}(x,y) = (x,-y) + (n,m) \Longrightarrow f_{n,m} \; es\ una\ simetría\ compuesta\ con\ traslación$$

$$\Longrightarrow f_{n,m} \; es\ un\ simetría\ deslizante$$

b.- Probar que $G \leq Homeo(R^2)$ y que G es propiamente discontinuo.

$$f_{0,0}(x,y) = (x,y) + (0,0) = (x,y) \;\; \forall (x,y) \in R^2 \Longrightarrow f_{0,0} \in Id_{R^2} \Longrightarrow Id_{R^2} \in G$$

Dados $n_1, m_1, n_2, m_2 \in Z$ y se consideran $f_{n_1,m_1}, f_{n_2,m_2} \in G$:

$$f_{n_1,m_1} \circ \left(f_{n_2,m_2}\right)^{-1}(x,y) = f_{n_1,m_1}\left(\left(f_{n_2,m_2}\right)^{-1}(x,y)\right) = f_{n_1,m_1}(x^{-n_2}, (-1)^{-n_2} y - m_2) =$$

$$= (x - n_2 + n_1, (-1)^{-n_2+n_1} y - (-1)^{n_1} m_2 + m_1) = f_{n_1-n_2,(-1)^{n_1}m_2+m_1} \in G$$

$$\left(f_{n,m}\right)^{-1}(x,y) = (x, (-1)^n y) + (-n,-m) = (x, (-1)^{-n} y) + (-n,-m) = f_{-n,-m}(x,y)$$

Además, G actúa de forma propia y discontinua, por un ejercicio.

c.- Deducir la existencia de una aplicación recubridora $p: R^2 \rightarrow K$, donde K es la botella de Klein. Concluir que $\Pi_1(K) \cong G$.

El espacio de órbitas de ${R^2}/{G}$ es la botella de Klein K, la proyección $p: R^2 \rightarrow {R^2}/{G}$ es recubridora.

Consideramos el homomorfismo $p_*: \Pi_1(R^2) \rightarrow \Pi_1\left({R^2}/{G}\right) \cong \Pi_1(K)$

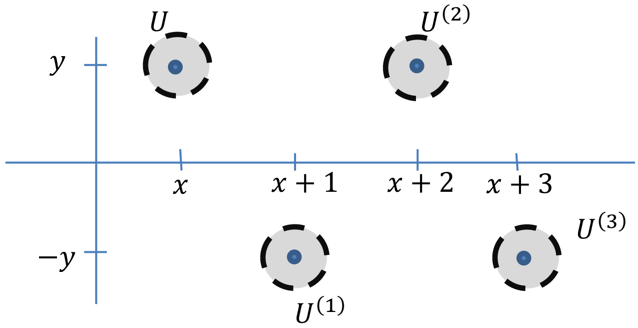
$$G \cong \frac{\Pi_1(K)}{p_*\left(\Pi_1(R^2)\right)} \cong \Pi_1(K)$$

Ejercicio 12

Sea $\phi: R^2 \to R^2$ el movimiento rígido dado por $\phi(x,y) = (x+1,-y)$. Para cada $n = 1,2$ se define $G_n = \langle\phi^n\rangle = \{(\phi^n)^k: k \in Z\}$. Se pide lo siguiente:

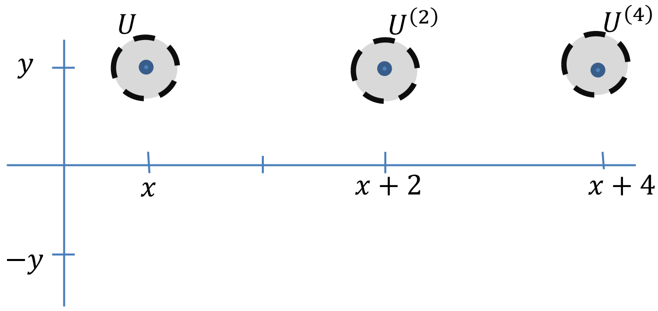
a.- Probar que las proyecciones $p_n: R^2 \to {R^2}/{G_n}$ son aplicaciones recubridoras.

Sea $G_1 = \langle\phi\rangle = \{\phi^k: k \in Z\}$, veamos que G_1 actúa de forma propia y discontinua sobre R^2.



Como $U \cap U^{(k)} = \emptyset \ \ \forall k \in Z^*$, es decir, U es un entorno distinguido de (x,y), y es cierto para cada $(x,y) \in R^2$, en consecuencia G_1 actúa de forma propia y discontinua sobre R^2, y la proyección al espacio de órbitas $p_1: R^2 \to {R^2}/{G_1}$ es una aplicación recubridora.

Sea $G_2 = \langle\phi^2\rangle = \left\{\left(\phi^2\right)^k: k \in Z\right\} = \{\phi^{2k}: k \in Z\}$, veamos que G_1 actúa de forma propia y discontinua sobre R^2.



Como $U \cap U^{(2k)} = \emptyset \ \ \forall k \in Z^*$, es decir, U es un entorno distinguido de (x,y), y es cierto para cada $(x,y) \in R^2$, en consecuencia G_2 actúa de forma propia y discontinua sobre R^2, y la proyección al espacio de órbitas $p_2: R^2 \to {R^2}/{G_2}$ es una aplicación recubridora.

b.- Probar que $Aut(R^2, p_n) \cong Z \cong \Pi_1\left(R^2/_{G_n}\right)$ para cada $n = 1, 2$.

Sea $n = 1$, $G_1 = \langle\phi\rangle = \{\phi^k : k \in Z\}$, como ϕ es un homeomorfismo de R^2 en R^2, entonces, $\phi^k : k \in Z$ también lo son, $G_1 \leq Homeo(R^2, R^2)$ y además, $p_1 \circ \phi^k = p_1$,

Sea $(x, y) \in R^2$, $p_1\big((x, y)\big) = [(x, y)]$ y sea $k \in Z$

$$(p_1 \circ \phi^k)\big((x, y)\big) = p_1\left(\phi^k(x, y)\right) = p_1\left(\big(x + k, (-1)^k y\big)\right) =$$

$$= \left[\big(x + k, (-1)^k y\big)\right] = [(x, y)] = p_1\big((x, y)\big) \quad \forall (x, y) \in R^2 \;\; \forall k \in Z$$

Entonces $G_1 \leq Aut(R^2, p_1)$. Sea $\varphi \in Aut(R^2, p_1)$, $(0,0) \in R^2$, $(0,0) \in {p_1}^{-1}\big((0,0)\big)$

$$\varphi(0,0) = (0,0) \in {p_1}^{-1}\big((0,0)\big) = \{(k, 0) : k \in Z\} = Zx\{0\} = \{\phi^k(0,0) : k \in Z\}$$

Existe $k \in Z$ tal que $\varphi(0,0) = \phi^k(0,0) \Longrightarrow \varphi = \phi^k \in G_1 \Longrightarrow Aut(R^2, p_1) \leq G_1$.

En consecuencia: $Aut(R^2, p_1) = G_1 = \{\phi^k : k \in Z\} \cong Z \cong \Pi_1\left(R^2/_{G_1}\right)$.

Sea $n = 2$, $G_1 = \langle\phi\rangle = \{\phi^{2k} : k \in Z\}$, como ϕ es un homeomorfismo de R^2 en R^2, entonces, $\phi^{2k} : k \in Z$ también lo son, $G_2 \leq Homeo(R^2, R^2)$ y además, $p_2 \circ \phi^{2k} = p_2$,

Sea $(x, y) \in R^2$, $p_2\big((x, y)\big) = [(x, y)]$ y sea $k \in Z$

$$(p_2 \circ \phi^{2k})\big((x, y)\big) = p_2\left(\phi^{2k}(x, y)\right) = p_1\big((x + 2k, y)\big) =$$

$$= [(x + 2k, y)] = [(x, y)] = p_2\big((x, y)\big) \quad \forall (x, y) \in R^2 \;\; \forall k \in Z$$

Entonces $G_2 \leq Aut(R^2, p_2)$. Sea $\varphi \in Aut(R^2, p_2)$, $(0,0) \in R^2$, $(0,0) \in {p_2}^{-1}\big((0,0)\big)$

$$\varphi(0,0) = (0,0) \in {p_2}^{-1}\big((0,0)\big) = \{(2k, 0) : k \in Z\} = Zx\{0\} = \{\phi^{2k}(0,0) : k \in Z\}$$

Existe $k \in Z$ tal que $\varphi(0,0) = \phi^{2k}(0,0) \Longrightarrow \varphi = \phi^{2k} \in G_2 \Longrightarrow Aut(R^2, p_2) \leq G_2$.

En consecuencia: $Aut(R^2, p_2) = G_2 = \{\phi^{2k} : k \in Z\} \cong Z \cong \Pi_1\left(R^2/_{G_2}\right)$.

c.- Demostrar que $R^2/_{G_n}$ es homeomorfo al cociente $([-1, 1]xR)/_{R}$, donde

$$\boldsymbol{(x, y)R(x', y') \Leftrightarrow (x, y) = (x', y') \text{ ó } \{x, x'\} = \{1, -1\} \; e \; y = (-1)^n y'}$$

Ejercicio 13

Sea $X = S^1 x R$ y sea $\phi: X \to X$ dada por $\phi(x, y, z) = \left(-y, x, z + \frac{1}{4}\right)$.

Se define $G = \langle \phi \rangle = \{\phi^n : n \in Z\}$.

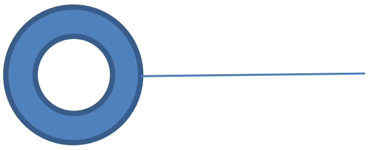
a.- Probar que G es un subgrupo de homeomorfismos propio y discontinuo de X.

b.- Probar que $X/_G$ es una superficie compacta conexa y clasificarla.

Ejercicio 14

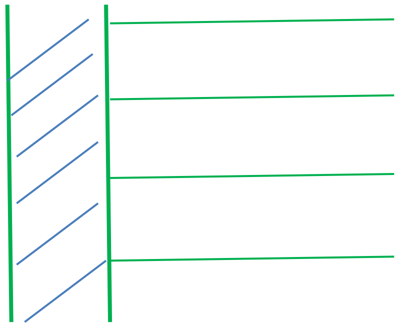
Sea $X = \{p \in R^2 : {}^{1}/_{2} \leq \|p\| \leq 2\} \cup \{(t, 0): t \geq 2\}$

a.- Calcular el recubridor universal de X.



El conjunto X es semilocalmente simplemente conexo, admite recubridor universal.

Sea $Y = [0,1]xR \cup \{(t, s): t \geq 1 \;\; s \in Z\}$:



Y sea $\pi: Y \to X$ y sea $p = (x, y)$

$$\pi(p) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x\right) e^{2y\pi i} \; si(x, y) \in [0,1]xR \\ (x + 1,0) \;\;\; si(x, y) \in \{(x, y): x \geq 1 \;\; y \in Z\} \end{cases}$$

$${}^{1}/_{2} \leq \|p\| \leq 2 \Longrightarrow {}^{1}/_{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2 \Longrightarrow {}^{1}/_{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

$$e^{2y\pi i}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x\right) = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x\right)(cos2\pi y, sen2\pi y)$$

$$a(x)e^{2y\pi i} = (a(x)cos2\pi y, a(x)sen2\pi y) \Longrightarrow {}^{1}/_{2} \leq \sqrt{(a(x)cos2\pi y)^2 + (a(x)sen2\pi y)^2} \leq 2$$

$$\Longrightarrow {}^{1}/_{2} \leq a(x) = A + Bx \leq 2 \;\; \forall x \in [0,1]$$

Se trata de una aplicación recubridora, entonces Y es un recubridor de X, y como Y es simplemente conexo, entonces es el recubridor universal.

b.- Calcular todos los recubridores de X.

Sea $G = \{\tau_m : m \in Z\} \subset Homeo(Y)$ porque las traslaciones son homeomorfismos.

$$\tau_m : Y \to Y \quad \tau_m(x, y) = (x, y + m)$$

Como τ_m es un homeomorfismo y τ_m es biyectiva, es decir, $G \leq Aut(Y, \pi)$

Sea $\emptyset \in Aut(Y, \pi)$ se considera $(2,0) \in X$ $(1,0) \in \pi^{-1}\big((2,0)\big)$, entonces

$$\emptyset(1,0) \in \pi^{-1}\big((2,0)\big) = \{1\}xZ = \{\tau_m(1,0) : m \in Z\}$$

Existe $k \in Z : \emptyset(1,0) = \tau_k(1,0) \Longrightarrow \emptyset = \tau_k \in G \Longrightarrow Aut(Y, \pi) \leq G \Longrightarrow G = Aut(Y, \pi)$

Sea la aplicación $\hat{\Delta}_{(2,0)} : R(X) \to S_c\Big(\Pi_1\big(X, (2,0)\big)\Big)$ es biyectiva, y como $\Pi_1\big(X, (2,0)\big) \cong Z$ abeliano, $S_c\Big(\Pi_1\big(X, (2,0)\big)\Big) = Sub\Big(\Pi_1\big(X, (2,0)\big)\Big)$, y como por el isomorfismo $\widehat{\Upsilon} : \Pi_1\big(X, (2,0)\big) \to Aut(Y, \pi)$, se puede asociar a cada subgrupo H_k de $\Pi_1\big(X, (2,0)\big)$ un subgrupo de $G_k \leq Aut(Y, \pi) = G$, y mediante el recubridor $\hat{\pi}_k : {}^{Y}\!/_{G_k} \to X$ donde ${}^{Y}\!/_{G_k}$ es el espacio de órbitas.

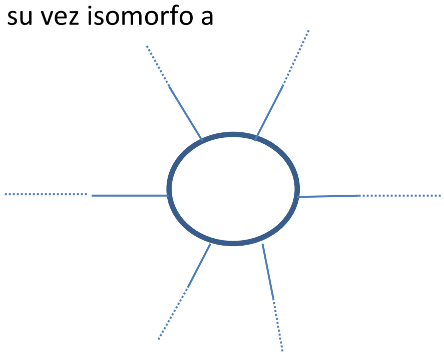
$$Sub\big(Aut(Y, \pi)\big) = \big\{\langle \tau_m \rangle : m \in N \cup \{0\}\big\}$$

a.- Si $G_0 = \langle \tau_0 \rangle = \{Id_Y\}$.

Si $\rho_0 : Y \to {}^{Y}\!/_{G_0}$ es la proyección al espacio de órbitas, entonces el recubridor universal factoriza como $\pi = \hat{\pi}_0 \circ \rho_0$ con $\hat{\pi}_0 : {}^{Y}\!/_{G_0} \to X$ recubridora dada por $\hat{\pi}_0(G_0.p) = \pi(p)$ isomorfo a Y.

b.- Si $G_k = \langle \tau_k \rangle$.

Si $\rho_k : Y \to {}^{Y}\!/_{G_k}$ es la proyección al espacio de órbitas, entonces el recubridor universal factoriza como $\pi = \hat{\pi}_k \circ \rho_k$ con $\hat{\pi}_k : {}^{Y}\!/_{G_k} \to X$ recubridora dada por $\hat{\pi}_k(G_k.p) = \pi(p)$ isomorfo a Y_k, que es a su vez isomorfo a



Ejercicio 15

a.- Sea $\pi: X \to X$ recubridora con número de hojas mayor que uno, entonces probar que $\Pi_1(X, x_0)$ es infinito.

b.- Probar que R^2 es el recubridor universal de $C = \{p \in R^2 : {}^{1}/_{2} \leq \|p\| \leq 2\}$.

c.- Determinar todos los recubridores de

$$X = \{(x, y, 0): x^2 + y^2 = 1\} \cup \{p \in R^3 : \|p - (2, 0, 0)\| = 1\}$$

a.- Si $G_0 = \langle \tau_0 \rangle = \{Id_Y\}$.

b.- Si $G_0 = \langle \tau_1 \rangle$.

c.- Si $G_k = \langle \tau_k \rangle \; k \geq 2$

Ejercicio 16

Sea $\tau_m: R \to R\ \ \tau_m(t) = t + m\ \ \ m \in Z$ **y sea** $A: S^2 \to S^2\ \ A(p) = -p$**. En** RxS^2 **se considera**

$$G = \left\{\tau_m x Id_{S^2} : m \in Z\right\} \cup \{\tau_m x A : m \in Z\}$$

a.- Probar que G **es un subgrupo de homeomorfismos en** RxS^2 **que actúa de forma propia y discontinua sobre** RxS^2**.**

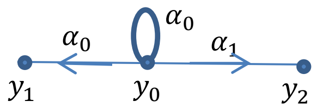
b.- Calcular ${RxS^2}/{G}$**.**

Ejercicio 17

¿Existe una aplicación recubridora de 3 hojas $\rho; X \to RP^2$arcoconexo?

Como $\Pi_1(RP^2) \cong Z_2$, por lo que tendría que ser $\Pi_1(X) \leq \Pi_1(RP^2) \cong Z_2$, luego $\Pi_1(X) \cong \{1\}$ y $\Pi_1(X) \cong Z_2$. Pero si el recubridor es de 3 hojas.

Si $x_0 \in RP^2$, $\# \rho^{-1}(x_0) = 3$, y como es arcoconexo en X, se pueden hacer hasta 3 arcos no homotópicos que unan puntos de la fibra, si fijamos $y_0 \in \rho^{-1}(x_0)$:



Por lo que $\# \Pi_1(X, y_0) \geq 3$ y no pueden inyectarse en $\Pi_1(RP^2)$. Luego no existe una aplicación recubridora de 3 hojas $\rho; X \to RP^2$arcoconexo.

Ejercicio 18

Sea X un espacio topológico y $f, g: X \to S^n$ aplicaciones continuas. Prueba que si

$$\|f(x) - g(x)\| < 2 \ \forall x \in X$$

entonces f y g son homotópicas.

Se define $H: Xx[0,1] \to S^n$ como

$$H(x,s) = \frac{(1-s)f(x) + sg(x)}{\|(1-s)f(x) + sg(x)\|} \quad \forall x \in X \ \forall s \in [0,1]$$

Veamos que está bien definida:

Si no estuviera es porque existe $x \in X \ \ s \in [0,1]$ tal que $(1-s)f(x) + sg(x) = 0$

$$sg(x) = (s-1)f(x) \Longrightarrow \|sg(x)\| = \|(s-1)f(x)\| \Longrightarrow |s|\|g(x)\| = |s-1|\|f(x)\|$$

$$\Longrightarrow s = 1 - s \Longrightarrow s = \frac{1}{2}$$

Luego se tiene que

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) = 0 \Longrightarrow g(x) = -f(x)$$

$$\Longrightarrow \|f(x) - g(x)\| = \|f(x) + f(x)\| = 2\|f(x)\| = 2¡¡$$

Es claro que H es continua en $Xx[0,1]$, y además:

$$H(x,0) = \frac{f(x))}{\|f(x)\|} = f(x) \ \forall x \in X \quad H(x,1) = \frac{g(x))}{\|g(x)\|} = g(x) \ \forall x \in X$$

Así f y g son homotópicas.

Ejercicio 19

Probar los siguientes enunciados.

a.- La Botella de Klein se recubre a sí misma con más de una hoja.

Un modelo topológico para la botella de Klein es el espacio de órbitas ${S^1xS^1}/{G}$ donde $G = \langle A \rangle = \{Id_{S^1xS^1}, A\}$ donde $A: S^1xS^1 \to S^1xS^1$, $A(p) = -p$. Además, $G \leq Aut(S^1xS^1)$ que actúa de forma propia y discontinua sobre el toro, S^1xS^1.

Sea $S^1 = \{z \in C: |z| = 1\}$ y sea $k \in N$, y la aplicación:

$$f_k: S^1xS^1 \to S^1xS^1, f_k(z_1, z_2) = \left(z_1^k, z_2^k\right)$$

Satisface $f_k \circ A \in \{f_k, A \circ f_k\}$. Por tanto, si $\pi: S^1 \to S^1$

$$K = {S^1xS^1}/{G}$$

Existe una única aplicación, $\pi_k: K \to K$, tal que $\pi_k \circ \pi = \pi \circ f_k$. Como π y f_k son recubridoras finitas, entonces π_k es una aplicación recubridora finita.

b.- El espacio S_ω realización del esquema $\omega = aaa$ admite recubridor universal. Determinar cuántos recubridores admite S_ω.

Para demostrar que S_ω admite recubridor universal, es suficiente con garantizar que todo punto $p \in S_\omega$ admite un entorno U simplemente conexo.

Sea Γ_ω el grafo conexo borde de S_ω, y se observa que en este caso Γ_ω consiste de un solo lazo que se corresponde con a: $\Gamma_\omega = a$. Hay que discutir casos:

Caso 1: Cuando $p \in {S_\omega}/{\Gamma_\omega}$, es el caso trivial pues basta elegir $U = {S_\omega}/{\Gamma_\omega} \cong D(0,1)$.

Caso 2: Se supone que $p \in \Gamma_\omega = a$, y se toma un arco de Jordan abierto $l \subset a$ conteniendo a p. Y se elige U como unión de tres semidiscos D_1, D_2, D_3 en S_ω con $l \subset borD_i$ $i = 1,2,3$ y $D_j \cap D_h = l$ $\forall j, h \in \{1,2,3\}$. En efecto U es simplemente conexo, que consiste de tres semidiscos encajando en un arco de Jordan y describiendo una típica figura libro de tres hojas.

Es decir, S_ω tiene recubridor universal.

Si fijamos $p_0 \in a$, por el Teorema de Seifert-Van Kampen nos dice que

$$\Pi_1(S_\omega, p_0) \cong {F(a)}/{N(a^3)} \cong Z_3[a]$$

Como $\Delta: Rec(S_\omega) \to Sub_c\left(\Pi_1(S_\omega, p_0)\right)$, y $Z_3[a]$ es abeliano, y como 3 es número primo:

$$Sub_c\left(\Pi_1(S_\omega, p_0)\right) = \{\{0\}, Z_3[a]\}$$

Sólo hay dos recubridores de S_ω, que corresponden con el universal (Y, π_0) y con $\left(S_\omega, Id_{S_\omega}\right)$.

c.- Todo espacio con grupo fundamental finito admite una cantidad finita de recubridores.

Sea X espacio con $\Pi_1(X,x)$ finito, donde $x \in X$. Como en el apartado anterior, se sabe que existe una aplicación inyectiva:

$$\Delta: Rec(X) \to Sub_c\big(\Pi_1(X,x)\big)$$

Como $\Pi_1(X,x)$ es finito se infiere que $Sub_c\big(\Pi_1(X,x)\big)$ es finito, y por tanto, que $Rec(X)$ es finito.

Ejercicio 20

En el espacio topológico producto $\boldsymbol{S^2xS^2}$ se considera el conjunto de transformaciones

$$\boldsymbol{G = \{Id_{S^2xS^2}, Id_{S^2}xA, AxId_{S^2}, AxA\} \quad A: S^2 \to S^2 \quad A(p) = -p}$$

a.- Demostrar que $\boldsymbol{G}$ es un grupo de homeomorfismos de $\boldsymbol{S^2xS^2}$ que actúa de forma propia y discontinua sobre $\boldsymbol{S^2xS^2}$.

Como Id_{S^2} yA son homeomorfismos, todo elemento de G es un homeomorfismo por ser producto de homeomorfismos. Como $A \circ A = Id_{S^2}$, es inmediato que si $\phi, \psi \in G$ entonces $\phi^{-1}, \phi \circ \psi \in G$. Por tanto, G es un grupo de automorfismos de S^2xS^2. Como G es finito y S^2xS^2 es T_2, G actuará de forma propia y discontinua sobre S^2xS^2 si y solo si $\phi(p) \neq p$ para todo $p \in S^2xS^2$ y $\phi \in G \setminus Id_{S^2xS^2}$; esta condición es inmediata toda vez que A no tiene puntos fijos.

b.- Probar que el espacio de órbitas $\boldsymbol{{S^2xS^2}/{G}}$ es homeomorfo a $\boldsymbol{RP^2xRP^2}$.

Se sabe que RP^2 es el espacio de órbitas ${S^2}/{G_0}$ donde $G_0 = \{Id_{S^2}, A\}$. Sea $\pi_0: S^2 \to {S^2}/{G_0}$ la correspondiente proyección recubridora y se define:

$$f: S^2xS^2 \to RP^2xRP^2 \quad f(p,q) = \big(\pi_0(p), \pi_0(q)\big)$$

Claramente f es continua, ya que lo son sus componentes, y sobreyectiva ya que lo es π_0. Como S^2xS^2 es compacto y RP^2xRP^2 es T_2, f es una identificación. Se denota $\sim_f$ a la relación de equivalencia en S^2xS^2 inducida por f:

$${S^2xS^2}/{\sim_f} \cong RP^2xRP^2$$

$$(p_1,q_1)\sim_f(p_2,q_2) \Leftrightarrow f(p_1,q_1) = f(p_2,q_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\pi_0(p_1) = \pi_0(p_2)\\ \pi_0(q_1) = \pi_0(q_2)\end{cases} \Leftrightarrow p_1 = \pm p_2 \;\; q_1 = \pm q_2$$

$$\Leftrightarrow \exists \phi \in G: \phi(p_1,q_1) = (p_2,q_2)$$

$${S^2xS^2}/{\sim_f} \cong {S^2xS^2}/{G} \cong RP^2xRP^2$$

c.- Clasificar los recubridores de RP^2xRP^2.

Sea $\pi: S^2xS^2 \to {S^2xS^2}/_G \cong RP^2xRP^2$ ala proyección recubridora al espacio de órbitas. Como S^2xS^2 es simplemente conexo, (S^2xS^2, π) es el recubridor universal de RP^2xRP^2, y como ${S^2xS^2}/_G \cong RP^2xRP^2$, y $G = Aut(S^2xS^2, \pi)$. En estas condiciones, dado un subgrupo $H \leq G$ y la correspondiente proyección al espacio de órbitas, $\pi_H: S^2xS^2 \to {S^2xS^2}/_H$, se sabe que la proyección universal π factoriza a través una aplicación recubridora $\tilde{\pi}_H: {S^2xS^2}/_H \to {S^2xS^2}/_G$, esto es, $\pi = \tilde{\pi}_H \circ \pi_H$. Además, salvo identificar subgrupos en la misma clase de conjugación:

$$Rec\left({S^2xS^2}/_G\right) \cong Rec(RP^2xRP^2) = \left\{\left({S^2xS^2}/_H, \tilde{\pi}_H\right): H \leq G\right\}$$

Como G es abeliano y $H_0 = \{Id_{S^2xS^2}\}$, $H_1 = \{Id_{S^2xS^2}, Id_{S^2}xA\}$, $H_2 = \{Id_{S^2xS^2}, AxId_{S^2}\}$, $H_3 = \{Id_{S^2xS^2}, AxA\}$ y $H_4 = G$, son los cinco subgrupos de G, inferimos que hay exactamente cinco recubridores distintos, salvo isomorfismos, de ${S^2xS^2}/_G \cong RP^2xRP^2$, donde

$${S^2xS^2}/_{H_0} \cong S^2xS^2 \qquad {S^2xS^2}/_{H_1} \cong S^2xRP^2 \qquad {S^2xS^2}/_{H_2} \cong RP^2xS^2$$

$$RP^2\, {S^2xS^2}/_{H_4} \cong RP^2xRP^2$$

Y $RP^2\, {S^2xS^2}/_{H_3}$ no es identificable a ningún modelo conocido.

Ejercicio 21

Sea $\phi: R^2 \longrightarrow R^2$ el movimiento rígido dado por $\phi(x, y) = (x + 1, -y)$. Para cada $n = 1,2$ se define $G_n = \langle \phi^n \rangle = \{(\phi^n)^k : k \in Z\}$. Se pide:

E