Tema 7. Contraste de hipótesis

A. Hermoso Carazo
Universidad de Granada

Curso 2020/2021

El objetivo de la teoría de contraste de hipótesis es estudiar procedimientos que permitan decidir si una determinada hipótesis formulada sobre la distribución de una variable aleatoria es confirmada o invalidada por un conjunto de observaciones de dicha variable. Si la familia de distribuciones de la variable está representada por un modelo paramétrico, cualquier hipótesis sobre la distribución puede especificarse en términos del parámetro, y se dice que es una *hipótesis paramétrica*.

En este tema, después de establecer los conceptos generales, describiremos dos procedimientos de contraste, *test de Neyman-Pearson*, y *test de la razón de verosimilitudes*, que aplicaremos a problemas de contraste sobre los parámetros de una y dos poblaciones normales. Finalizaremos estableciendo la relación entre los problemas de contraste y estimación por regiones de confianza.

7.1. Planteamiento del problema y conceptos básicos

Dada una variable $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, y una muestra aleatoria simple, $(X_1, \ldots, X_n)$, se trata de decidir si una determinada hipótesis sobre la distribución de la variable (o, más específicamente, sobre el parámetro θ que la define) es invalidada o confirmada por los datos muestrales.

La hipótesis formulada en un problema de contraste se denomina genéricamente *hipótesis nula* y se denota por H_0, mientras que la contraria se denomina *hipótesis alternativa* y se nota H_1.

Toda hipótesis H_0 particiona el espacio paramétrico en dos subconjuntos: Θ_0, que contiene todos los valores de θ que satisfacen H_0, y $\Theta_1 = \Theta - \Theta_0$. Así, un problema de contraste se especifica de la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1 \end{array} \quad (\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1).$$

Si el conjunto $\Theta_i,\ i = 0, 1$ contiene un único elemento, H_i es *simple* y, bajo ella, la distribución de la variable queda totalmente especificada. En caso contrario, H_i es *compuesta*.

La resolución de un problema de contraste consiste en diseñar un procedimiento que indique, según los valores que se observen, si se acepta o no H_0.

Bajo el punto de vista clásico que aquí desarrollaremos, la hipótesis nula se formula como aquella en la que se tiene mayor confianza y los procedimientos se diseñan de forma que esta hipótesis no sea rechazada a no ser que los datos proporcionen gran evidencia para ello; por tanto, *H_0 y H_1 no son intercambiables*.

La formulación matemática de un procedimiento para decidir si se acepta o rechaza H_0 se realiza mediante lo que se denomina un *test de hipótesis*.

Test de hipótesis

Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ y $(X_1, \ldots, X_n) \in \chi^n$ una muestra aleatoria simple.

Un test de hipótesis para contrastar H_0 frente a H_1 es una función medible de la muestra, $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$, independiente de θ, con valores en $[0, 1]$, que indica la probabilidad (aleatoria) de rechazar H_0.

Esto es, $\varphi : \chi^n \to [0, 1]$ es medible, independiente de θ y, para cada realización muestral, $(x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ es la probabilidad de rechazar H_0 si se observan tales valores.

Existen básicamente dos tipos de tests:

- *Tests no aleatorizados*: *Toman únicamente los valores 0 y 1.*

  Un test de este tipo especifica totalmente la decisión que debe tomarse según la realización muestral: si $\varphi(x_1,\dots,x_n)=0$ se acepta H_0; si $\varphi(x_1,\dots,x_n)=1$, se rechaza H_0. Estos tests están determinados por lo que se denomina la *región de rechazo* o *región crítica*, el conjunto $C\subseteq\chi^n$ cuyos valores conducen al rechazo de H_0:

  $$\varphi_C(X_1,\dots,X_n)=\begin{cases}1, & (X_1,\dots,X_n)\in C\\[1em] 0, & (X_1,\dots,X_n)\notin C.\end{cases}$$

  El conjunto $C^c=\chi^n-C$ es la *región de aceptación* del test.

- *Tests aleatorizados*: *Pueden tomar cualquier valor en* $[0,1]$.

  Contienen a los anteriores, pero tienen una aplicación práctica más limitada, ya que no determinan la decisión final de aceptar o rechazar H_0, sino sólo la probabilidad de hacerlo. Por tanto, requieren procedimientos auxiliares para tomar la decisión final. Sin embargo, son de gran utilidad teórica, ya que, como se verá posteriormente, permiten dar solución óptima a muchos problemas de contraste.

Tipos de errores asociados a un test de hipótesis: La aplicación de un test específico a un determinado problema de contraste puede conducir a decisiones erróneas, y los errores que pueden cometerse son de dos tipos:

- *Error de tipo 1*: Rechazar H_0 siendo cierta.
- *Error de tipo 2*: Aceptar H_0 siendo falsa.

La solución óptima a un problema de contraste consiste en elegir una función test, $\varphi:\chi^n\to[0,1]$, cuya aplicación a dicho problema minimice los dos tipos de error.

Para medir estos errores se define la siguiente función.

Función de potencia de un test

Es una función sobre Θ que asigna a cada valor del parámetro, θ, la probabilidad media de rechazar H_0 si θ es el verdadero valor:

$$\beta_\varphi:\Theta\longrightarrow[0,1]$$
$$\theta\longmapsto\beta_\varphi(\theta)=E_\theta\left[\varphi(X_1,\dots,X_n)\right].$$

Claramente, interesa que $\beta_\varphi(\theta)$ sea pequeña para $\theta\in\Theta_0$, y grande para $\theta\in\Theta_1$. Por tanto, un test será óptimo si minimiza $\beta(\theta)$, $\forall\theta\in\Theta_0$, y maximiza $\beta(\theta)$, $\forall\theta\in\Theta_1$.

Sin embargo, en la práctica, no es posible generalmente encontrar un test con esta propiedad, ya que la disminución de $\beta(\theta)$ en Θ_0 conlleva usualmente la disminución de $\beta(\theta)$ en Θ_1. Así, como en el resto de problemas de inferencia, la forma de proceder bajo la aproximación clásica es restringir la búsqueda de tests óptimos a una subclase.

El criterio clásico para la elección de un test consiste en considerar exclusivamente los tests para los que las probabilidades medias de cometer un error de tipo 1 ($\beta_\varphi(\theta),\ \theta \in \Theta_0$) no superen cierto límite y, dentro de esta clase, buscar uno que minimice las probabilidades medias de cometer un error de tipo 2 ($1-\beta_\varphi(\theta),\ \theta \in \Theta_1$). Esta idea se formaliza con las siguientes definiciones.

Tamaño de un test

El tamaño de un test $\varphi(X_1, \ldots X_n)$ es el superior de las probabilidades medias de cometer un error de tipo 1:

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \longrightarrow \text{Tamaño de } \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\varphi(\theta).$$

Tema 7. Contraste de hipótesis A. Hermoso Carazo
7.1. Planteamiento del problema y conceptos básicos

Nivel de significación de un test

Un test $\varphi(X_1, \ldots X_n)$ tiene nivel de significación α ($\in [0,1]$) para un problema con hipótesis nula $H_0 : \theta \in \Theta_0$ si su tamaño es menor o igual que α:

$$\beta_\varphi(\theta) \leq \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta_0.$$

Ya que $\beta_\varphi(\theta) = E_\theta\left[\varphi(X_1, \ldots, X_n)\right]$, el nivel de significación marca una *cota superior para las probabilidades medias de cometer un error de tipo 1.*

Test uniformemente más potente

Sea $\varphi(X_1, \ldots X_n)$ un test con nivel de significación α para contrastar

$$\begin{array}{l} H_0 : \theta \in \Theta_0 \\ H_1 : \theta \in \Theta_1. \end{array}$$

Se dice que $\varphi(X_1, \ldots X_n)$ es uniformemente más potente al nivel de significación α si, para cualquier otro test $\varphi'(X_1, \ldots X_n)$ que tenga nivel de significación α, se tiene:

$$\beta_{\varphi'}(\theta) \leq \beta_\varphi(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta_1.$$

Con estas definiciones, la forma de proceder ante un problema de contraste es *fijar un nivel de significación y tratar de encontrar un test uniformemente más potente a dicho nivel*.

En la práctica, los niveles de significación se eligen pequeños (como mucho 0.2) con objeto de que sea poco probable rechazar H_0 siendo cierta (si H_0 es cierta, la probabilidad de que ocurra una realización que lleve al rechazo es pequeña). Esto se justifica porque, como comentamos anteriormente, H_0 es la hipótesis en la que se tiene mayor confianza, y la idea es no rechazarla a no ser que los datos proporcionen gran evidencia para ello.

Ejemplo 7.1.1: *En una campaña contra la tuberculosis, se aplica a los individuos un análisis que puede dar reacción positiva (A) o negativa ($\overline{A}$) con las siguientes probabilidades, $P(A/\text{enfermo}) = 0.95$ y $P(\overline{A}/\text{sano}) = 0.9$. Para concluir si un determinado individuo está enfermo, se le hacen de forma independiente tres análisis. Basándose en el número de resultados positivos, construir un test no aleatorizado al nivel 0.001. Calcular el tamaño de dicho test y su potencia frente a la hipótesis alternativa.*

Formulación del problema: Las hipótesis a contrastar en este problema son:

$$H_0: \textit{ El individuo está enfermo}$$
$$H_1: \textit{ El individuo está sano.}$$

La decisión de aceptar o rechazar H_0 se basará en el número de resultados positivos en las tres pruebas que se realizan; esto es, en el valor de la variable:

X : *Número de resultados positivos en tres pruebas independientes* $\longrightarrow B(3, p)$

$$Bajo\ H_0 \to p = P(A/\text{enfermo}) = 0.95.$$
$$Bajo\ H_1 \to p = P(A/\text{sano}) = 0.1.$$

Así, el problema consiste en contrastar las hipótesis paramétricas $H_0 : p = 0.95$ frente a $H_1 : p = 0.1$, basándose en una observación de la variable X, cuya distribución depende de p, $X \to \{B(3, p);\ p \in \{0.95,\ 0.1\}\}$.

Construcción del test: Una vez realizadas las pruebas, es razonable que un número alto de resultados positivos conduzca a aceptar H_0, y un número bajo a rechazarla. Entonces, construimos un test no aleatorizado reflejando esta idea, y determinamos la región de rechazo imponiendo el nivel de significación:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq k, \\ 0, & x > k. \end{cases} \longrightarrow \beta_\varphi(0.95) = E_{0.95}\big[\varphi(X)\big] = P_{0.95}\big(X \leq k\big) \leq 0.001.$$

Buscando en las tablas de la distribución $B(3, 0.95)$ encontramos:

$$k = 0 \longrightarrow P_{0.95}\,(X \leq 0) = P_{0.95}\,(X = 0) = 0.000125 < 0.001.$$

$$k = 1 \longrightarrow P_{0.95}\,(X \leq 1) = 0.00725 > 0.001.$$

Para respetar el nivel de significación 0.001, tomamos $k = 0$ y, por tanto:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x = 1, 2, 3, \end{cases}$$

lo que indica que sólo si las tres pruebas dan negativas se rechaza que el individuo está enfermo.

Tamaño y potencia de $\varphi(X)$:

Tamaño $\rightarrow$ $\beta_\varphi(0.95) = 0.000125.$

Potencia frente a $p = 0.1$ $\rightarrow$ $\beta_\varphi(0.1) = E_{0.1}\big[\varphi(X)\big] = P_{0.1}\big(X = 0\big) = 0.729.$

Notemos que si H_0 es cierta (el individuo está enfermo) la probabilidad de rechazarla con este test es muy pequeña, $P_{0.95}\,(X = 0) = 0.000125$; esto se ha conseguido imponiendo un nivel de significación pequeño, 0.001, para que sea muy poco probable rechazar que el individuo está enfermo si realmente lo está.

Ejemplo 7.1.2: *En el Ejemplo 7.1.1, probar que el siguiente test tiene también nivel de significación 0.001, y mayor potencia frente a la alternativa que el anterior,*

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 7/57, & x = 1, \\ 0, & x = 2, 3. \end{cases}$$

Nivel de significación: Calculamos la potencia bajo la hipótesis nula ($p = 0.95$):

$$\beta_{\varphi_a}(0.95) = E_{0.95}[\varphi_a(X)] = P_{0.95}(X = 0) + \frac{7}{57}P_{0.95}(X = 1) = 0.001.$$

Por tanto, el test se ajusta al nivel de significación 0.001.

Potencia frente a la alternativa ($p = 0.1$):

$$\beta_{\varphi_a}(0.1) = E_{0.1}[\varphi_a(X)] = P_{0.1}(X = 0) + \frac{7}{57}P_{0.1}(X = 1) = 0.7588 > \beta_{\varphi}(0.1).$$

En este ejemplo se muestra claramente cómo la aleatorización permite aumentar la potencia frente a la hipótesis alternativa (lo que disminuye la probabilidad de cometer un error de tipo 2) respetando el nivel de significación (que marca la máxima probabilidad de cometer error de tipo 1 permitida).

7.2. Test de Neyman-Pearson

El problema de contraste de hipótesis formulado como la búsqueda de un test uniformemente más potente a un nivel de significación prefijado no admite, en general, solución. Sin embargo, si las hipótesis del problema son simples, sí existe un test óptimo para cualquier nivel de significación.

La existencia y forma de este test se establecen en el siguiente resultado.

Lema de Neyman-Pearson

Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \{\theta_0, \theta_1\}\}$ *con funciones de densidad (o masa de probabilidad)* $f_0^n(x_1, \dots, x_n)$ $(\theta = \theta_0)$ *y* $f_1^n(x_1, \dots, x_n)$ $(\theta = \theta_1)$ *y* $(X_1, \dots, X_n)$ *una muestra aleatoria simple. Consideremos el problema:*

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta = \theta_1.$$

$a)$ *Sea* $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ *un test de la forma*

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & f_1^n(X_1, \dots, X_n) > k f_0^n(X_1, \dots, X_n), \\ \gamma(X_1, \dots, X_n), & f_1^n(X_1, \dots, X_n) = k f_0^n(X_1, \dots, X_n), \\ 0, & f_1^n(X_1, \dots, X_n) < k f_0^n(X_1, \dots, X_n), \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *y* $\gamma(X_1, \dots, X_n) \in [0, 1]$. *Si* $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ *tiene tamaño* α, *es de máxima potencia a nivel de significación* α.
Un test de esta forma se denomina test de Neyman-Pearson.

$b)$ *Para todo* $\alpha \in (0, 1]$ *existe un test de Neyman-Pearson de tamaño* α, *con* $\gamma(X_1, \dots, X_n) = \gamma$ *constante.*

Tema 7. Contraste de hipótesis A. Hermoso Carazo
7.2. Test de Neyman-Pearson

$c)$ *Si* $\varphi'(X_1, \dots, X_n)$ *es un test de tamaño* α *y es de máxima potencia a nivel de significación* α, $\varphi'(X_1, \dots, X_n)$ *es un test de Neyman-Pearson.*

$d)$ *El test de máxima potencia entre todos los de nivel de significación 0 (tamaño 0) es:*

$$\varphi_0(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & f_0^n(X_1, \dots, X_n) = 0 \\ 0, & f_0^n(X_1, \dots, X_n) > 0. \end{cases}$$

Demostración: Supondremos que X es de tipo continuo y, para simplificar los desarrollos, notaremos $\boldsymbol{X} = (X_1, \dots, X_n)$ a la muestra aleatoria simple y $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n$ a las realizaciones muestrales. Así,

$$\beta_\varphi(\theta_i) = E_{\theta_i}[\varphi(\boldsymbol{X})] = \int_{\chi^n} \varphi(\mathbf{x}) f_i^n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad i = 0, 1.$$

Una demostración totalmente similar puede hacerse con variables discretas, sustituyendo las densidades por las funciones masa de probabilidad y las integrales por sumas.

a) Si el test $\varphi(\boldsymbol{X})$ especificado tiene tamaño α ($\beta_\varphi(\theta_0)=\alpha$) y $\varphi'(\boldsymbol{X})$ es otro test con nivel de significación α ($\beta_{\varphi'}(\theta_0)\leq\alpha$), entonces $\varphi(\boldsymbol{X})$ es más potente que $\varphi'(\boldsymbol{X})$ ($\beta_\varphi(\theta_1)\geq\beta_{\varphi'}(\theta_1)$).

Consideremos la siguiente integral:

$$I=\int_{\chi^n}h(\mathbf{x})d\mathbf{x},\quad h(\mathbf{x})=\left[\varphi(\mathbf{x})-\varphi'(\mathbf{x})\right]\left[f_1^n(\mathbf{x})-kf_0^n(\mathbf{x})\right],\ \mathbf{x}\in\chi^n.$$

Teniendo en cuenta la forma de φ y que $\varphi'\in[0,1]$ tenemos:

- $f_1^n(\mathbf{x})>kf_0^n(\mathbf{x})\Rightarrow h(\mathbf{x})=\left[1-\varphi'(\mathbf{x})\right]\left[f_1^n(\mathbf{x})-kf_0^n(\mathbf{x})\right]\geq 0.$
- $f_1^n(\mathbf{x})<kf_0^n(\mathbf{x})\Rightarrow h(\mathbf{x})=\left[-\varphi'(\mathbf{x})\right]\left[f_1^n(\mathbf{x})-kf_0^n(\mathbf{x})\right]\geq 0.$
- $f_1^n(\mathbf{x})=kf_0^n(\mathbf{x})\Rightarrow h(\mathbf{x})=0.$

Esto es, $h\geq 0$ y, consecuentemente, $I\geq 0$. Entonces, desarrollando h tenemos:

$$I=\int_{\chi^n}\varphi(\mathbf{x})f_1^n(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\int_{\chi^n}\varphi'(\mathbf{x})f_1^n(\mathbf{x})d\mathbf{x}-k\left(\int_{\chi^n}\varphi(\mathbf{x})f_0^n(\mathbf{x})d\mathbf{x}-\int_{\chi^n}\varphi'(\mathbf{x})f_0^n(\mathbf{x})d\mathbf{x}\right)$$

$$=\beta_\varphi(\theta_1)-\beta_{\varphi'}(\theta_1)-k\big(\alpha-\beta_{\varphi'}(\theta_0)\big)\geq 0,$$

y, por tanto: $\beta_\varphi(\theta_1)-\beta_{\varphi'}(\theta_1)\geq k\big(\alpha-\beta_{\varphi'}(\theta_0)\big)$.

Así, como $k\geq 0$ y $\beta_{\varphi'}(\theta_0)\leq\alpha$, el segundo miembro es no negativo y, por tanto, el primero también. Esto es, $\beta_\varphi(\theta_1)\geq\beta_{\varphi'}(\theta_1)$.

b) Para todo $\alpha\in(0,1]$ existe un test de Neyman-Pearson de tamaño α, con $\gamma(\boldsymbol{X})=\gamma$ constante.

Dado $\alpha\in(0,1]$, hacemos $\gamma(\boldsymbol{X})=\gamma$ en el test de Neyman-Pearson, $\varphi(\boldsymbol{X})$, y probamos que existen $k\geq 0$ y $\gamma\in[0,1]$ tales que el test tiene tamaño α. Esto es:

$$\alpha=E_{\theta_0}\left[\varphi(\boldsymbol{X})\right]=P_{\theta_0}\left(f_1^n(\boldsymbol{X})>kf_0^n(\boldsymbol{X})\right)+\gamma P_{\theta_0}\left(f_1^n(\boldsymbol{X})=kf_0^n(\boldsymbol{X})\right)\ ^1$$

$$=P_{\theta_0}\left(\frac{f_1^n(\boldsymbol{X})}{f_0^n(\boldsymbol{X})}>k\right)+\gamma P_{\theta_0}\left(\frac{f_1^n(\boldsymbol{X})}{f_0^n(\boldsymbol{X})}=k\right).$$

Equivalentemente, notando H_{θ_0} la función de distribución de $f_1^n(\boldsymbol{X})/f_0^n(\boldsymbol{X})\geq 0$ bajo P_{θ_0}, dado $\alpha\in(0,1]$, debemos encontrar $k\geq 0$ y $\gamma\in[0,1]$ tales que:

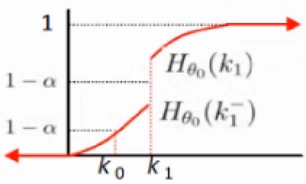
$$1-\alpha=H_{\theta_0}(k)-\gamma\big(H_{\theta_0}(k)-H_{\theta_0}(k^-)\big).$$

Existen dos posibilidades:

i) $\exists k_0\geq 0\ /\ H_{\theta_0}(k_0)=1-\alpha\ \rightarrow\ k=k_0,\ \gamma=0.$

ii) $\exists k_1\geq 0\ /\ H_{\theta_0}(k_1^-)\leq 1-\alpha<H_{\theta_0}(k_1)$

$$\rightarrow\ k=k_1,\ \gamma=\frac{H_{\theta_0}(k_1)-(1-\alpha)}{H_{\theta_0}(k_1)-H_{\theta_0}(k_1^-)}\in(0,1).$$



[1] $P_{\theta_0}\left(f_0^n(\boldsymbol{X})=0\right)=\int_{\{\mathbf{x}\in\chi^n\ /\ f_0^n(\mathbf{x})=0\}}f_0^n(\mathbf{x})d\mathbf{x}=0.$

c) Si $\varphi'(\boldsymbol{X})$ es un test de tamaño α y es de máxima potencia a nivel de significación α, $\varphi'(\boldsymbol{X})$ es un test de Neyman-Pearson.

Por el apartado b), dado $\alpha = E_{\theta_0}[\varphi'(\boldsymbol{X})]$, podemos encontrar un test de Neyman-Pearson de tamaño α, $\varphi(\boldsymbol{X})$. Puesto que los dos tests son de máxima potencia, ésta debe ser la misma para ambos. Así, $\varphi(\boldsymbol{X})$ y $\varphi'(\boldsymbol{X})$ tienen el mismo tamaño y la misma potencia. Por tanto, la integral del apartado a) se anula:

$$I = \int_{\chi^n} [\varphi(\mathrm{x}) - \varphi'(\mathrm{x})]\,[f_1^n(\mathrm{x}) - kf_0^n(\mathrm{x})]\,d\mathrm{x} = \beta_\varphi(\theta_1) - \beta_{\varphi'}(\theta_1) - k\Big(\beta_\varphi(\theta_0) - \beta_{\varphi'}(\theta_0)\Big) = 0.$$

Ya que, según se probó en el apartado a), el integrando es una función no negativa, $I = 0$ significa que el integrando es nulo (salvo, quizás, en conjuntos con medida de Lebesgue nula, que tienen probabilidades nulas). Esto es:

- $f_1^n(\mathrm{x}) > kf_0^n(\mathrm{x}) \Rightarrow \varphi'(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x}) = 1.$
- $f_1^n(\mathrm{x}) < kf_0^n(\mathrm{x}) \Rightarrow \varphi'(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x}) = 0.$

Por tanto:

$$\varphi'(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & f_1^n(\boldsymbol{X}) > kf_0^n(\boldsymbol{X}) \\ \gamma(\boldsymbol{X}), & f_1^n(\boldsymbol{X}) = kf_0^n(\boldsymbol{X}) \\ 0, & f_1^n(\boldsymbol{X}) < kf_0^n(\boldsymbol{X}), \end{cases}$$

lo que prueba que $\varphi'(\mathrm{X})$ es un test de Neyman-Pearson.

d) El test de máxima potencia entre todos los de nivel de significación 0 (tamaño 0) es:

$$\varphi_0(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} 1, & f_0^n(\boldsymbol{X}) = 0 \\ 0, & f_0^n(\boldsymbol{X}) > 0. \end{cases}$$

Puesto que $P_{\theta_0}\big(f_0^n(\boldsymbol{X}) = 0\big)$, es inmediato que el test $\varphi_0(\boldsymbol{X})$ tiene tamaño 0.

Si $\varphi_0'(\boldsymbol{X})$ es cualquier otro test de tamaño cero, $E_{\theta_0}\big[\varphi_0'(\boldsymbol{X})\big] = 0$, y al ser una función no negativa, debe anularse en $\{\mathrm{x} \in \chi^n \;/\; f_0^n(\mathrm{x}) > 0\}$. Esto es:

$$\varphi_0'(\boldsymbol{X}) = \begin{cases} \gamma(\boldsymbol{X}), & f_0^n(\boldsymbol{X}) = 0, \\ 0, & f_0^n(\boldsymbol{X}) > 0, \end{cases} \qquad \gamma(\boldsymbol{X}) \in [0,1].$$

Por tanto, $\varphi_0'(\boldsymbol{X}) \le \varphi_0(\boldsymbol{X})$ y, consecuentemente:

$$\beta_{\varphi_0'}(\theta_1) = E_{\theta_1}\big[\varphi_0'(\boldsymbol{X})\big] \le E_{\theta_1}\big[\varphi_0(\boldsymbol{X})\big] = \beta_{\varphi_0}(\theta_1).$$

Expresión del test en diferentes situaciones prácticas:

$$\chi_0 = \{x / f_0(x) > 0\}; \quad \chi_1 = \{x / f_1(x) > 0\}.$$

- $\chi_0 \supseteq \chi_1 \to \chi = \chi_0 \longrightarrow \chi^n = \{(x_1, \dots, x_n) \ / \ f_0^n(x_1, \dots x_n) \neq 0\}$.

  En esta situación, se puede dividir por $f_0^n(x_1, \dots x_n)$ y el test queda:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \dots, x_n) > k \\ \gamma, & \lambda(x_1, \dots, x_n) = k \\ 0, & \lambda(x_1, \dots, x_n) < k, \end{cases} \qquad \lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \dots, x_n)}{f_0^n(x_1, \dots, x_n)}.$$

- $\chi_1 \supseteq \chi_0 \to \chi = \chi_1 \longrightarrow \chi^n = \{(x_1, \dots, x_n) \ / \ f_1^n(x_1, \dots x_n) \neq 0\}$.

  Ahora, existen realizaciones muestrales con $f_0^n(x_1, \dots x_n) = 0$ y no se puede dividir. Sin embargo, en tal caso, $f_1^n(x_1, \dots x_n) > k f_0^n(x_1, \dots x_n)$, $\forall k \geq 0$, lo que significa que estas realizaciones conducen al rechazo de H_0 en cualquier test de Neyman-Pearson, y éste se expresa como:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & f_0^n(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ 1, & f_0^n(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \text{ y } \lambda(x_1, \dots, x_n) > k \\ \gamma, & f_0^n(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \text{ y } \lambda(x_1, \dots, x_n) = k \\ 0, & f_0^n(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \text{ y } \lambda(x_1, \dots, x_n) < k, \end{cases} \qquad \lambda = \frac{f_1^n}{f_0^n}.$$

Nota: Si $T(X_1, \dots X_n)$ es un estadístico suficiente para la familia de distribuciones considerada, por el teorema de factorización se tiene:

$$i = 0, 1, \quad f_i^n(x_1, \dots x_n) = h(x_1, \dots x_n) g_{\theta_i}(T(x_1, \dots x_n)), \quad (x_1, \dots x_n) \in \chi^n,$$

con $h(x_1, \dots x_n) > 0$, y el test de Neyman-Pearson se expresa como:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & g_{\theta_1}(T(X_1, \dots, X_n)) > k g_{\theta_0}(T(X_1, \dots, X_n)) \\ \gamma, & g_{\theta_1}(T(X_1, \dots, X_n)) = k g_{\theta_0}(T(X_1, \dots, X_n)) \\ 0, & g_{\theta_1}(T(x_1, \dots x_n)) < k g_{\theta_0}(T(x_1, \dots x_n)). \end{cases}$$

Por tanto, *el test de Neyman-Pearson es función de cualquier estadístico suficiente*, lo que vuelve a poner de manifiesto la importancia de tales estadísticos en los problemas de inferencia óptimos.

Ejemplo 7.2.1: *Sea* $(X_1, \ldots, X_n)$ *una muestra aleatoria simple de una variable* X *con distribución* $B(1, p)$*. Construir el test más potente de tamaño* α *para contrastar*

$$\begin{array}{l} H_0 : p = p_0 \\ H_1 : p = p_1 \end{array}$$

con $p_0,\ p_1 \neq 0, 1$*. Aplicarlo a* $n = 5,\ p_0 = 1/2,\ p_1 = 3/4,\ \alpha = 0.05$*.*

El espacio muestral es $\chi^n = \{0, 1\}^n$ y las funciones masa de probabilidad de la muestra bajo las hipótesis nula y alternativa son:

$$f_j^n(x_1, \ldots,\ x_n) = p_j^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} (1 - p_j)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}, \quad (x_1, \ldots,\ x_n) \in \chi^n, \quad j = 0, 1.$$

Ya que $p_0 \neq 0, 1$, $f_0^n \neq 0$ en χ^n, y el test de Neyman-Pearson es:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) > k \\ \gamma, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) = k \\ 0, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) < k, \end{cases} \qquad k \geq 0,\ \gamma \in [0, 1].$$

$$\lambda(X_1, \ldots, X_n) = \frac{f_1^n(X_1, \ldots,\ X_n)}{f_0^n(X_1, \ldots,\ X_n)} = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i} \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_0}\right)^{n - \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}.$$

Ya que $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ es función de $\lambda(X_1, \ldots, X_n)$, que a su vez es función del estadístico suficiente $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, el test depende de este estadístico.

Nos proponemos entonces expresar $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ directamente en términos de $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ y, para ello, estudiamos $\lambda(X_1, \ldots, X_n)$ como función de $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

Estudio de λ:

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n, \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{1 - p_1}{1 - p_0}\right)^n \left(\frac{p_1/p_0}{(1 - p_1)/(1 - p_0)}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}.$$

Vemos que si $\dfrac{p_1/p_0}{(1 - p_1)/(1 - p_0)} > 1$ o, equivalentemente, $p_1 > p_0$, λ crece estrictamente con $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

En caso contrario, si $p_1 < p_0$, λ decrece estrictamente con $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$.

Entonces, debemos estudiar separadamente ambas situaciones.

- $\boxed{p_1 > p_0}$ λ crece estrictamente con $\sum_{i=1}^{n} X_i$ y, por tanto:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} X_i > k' \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} X_i = k' \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} X_i < k'. \end{cases}$$

Los valores γ y k' se determinan imponiendo el tamaño del test, que se calcula teniendo en cuenta que H_0 es simple y $\sum_{i=1}^{n} X_i \underset{p=p_0}{\longrightarrow} B(n, p_0)$:

$$\alpha = E_{p_0}[\varphi(X_1, \ldots, X_n)] = P_{p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > k'\right) + \gamma P_{p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k'\right).$$

- $\boxed{p_1 < p_0}$ λ decrece estrictamente con $\sum_{i=1}^{n} X_i$ y, por tanto:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} X_i < k' \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} X_i = k' \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} X_i > k', \end{cases}$$

con γ y k' determinados por el tamaño:

$$\alpha = E_{p_0}[\varphi(X_1, \ldots, X_n)] = P_{p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < k'\right) + \gamma P_{p_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = k'\right).$$

Aplicación: Para contrastar $H_0 : p = 1/2$ frente a $H_1 : p = 3/4$ aplicamos el primer test ($p_1 > p_0$) con una muestra de tamaño $n = 5$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_5) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i > k' \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{5} X_i = k' \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i < k'. \end{cases}$$

Ahora determinamos k' y γ imponiendo que el test tenga tamaño $\alpha = 0.05$:

$$0.05 = P_{p=1/2}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > k'\right) + \gamma P_{p=1/2}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = k'\right).$$

Ya que $\sum_{i=1}^{5} X_i \underset{p=1/2}{\longrightarrow} B(5, 1/2)$, buscando en las tablas encontramos:

$$k' = 5 \to \begin{cases} P_{p=1/2}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 5\right) = 0 < 0.05 \\ P_{p=1/2}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 5\right) = 0.03125 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{0.05 - 0}{0.03125} > 1 \to \text{No válido.}$$

$$k' = 4 \to \begin{cases} P_{p=1/2}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 4\right) = 0.03125 < 0.05 \\ P_{p=1/2}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 4\right) = 0.15625 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \frac{0.05 - 0.03125}{0.15625} = 0.2.$$

Como $0.2 \in [0, 1]$, estos valores, $k' = 4$ y $\gamma = 0.2$ son la solución del problema.

Por tanto, el *test más potente de tamaño 0.05 para contrastar $H_0 : p = 1/2$ frente a $H_1 : p = 3/4$ a partir de 5 observaciones independientes de la variable es:*

$$\varphi(X_1, \ldots, X_5) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i = 5 \\ 0.2, & \sum_{i=1}^{5} X_i = 4 \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i = 0,\ 1,\ 2 \text{ ó } 3. \end{cases}$$

Ejemplo 7.2.2: *Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X con función de densidad*

$$f_\theta(x) = e^{\theta - x}, \quad x \geq \theta.$$

Construir el test más potente de tamaño α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, siendo $\theta_1 < \theta_0$. Estudiar la potencia de los diferentes tests en términos del tamaño.

En este caso, el conjunto de valores de la variable depende del parámetro, bajo H_0 es $\chi_0 = (\theta_0, +\infty)$, y bajo H_1, $\chi_1 = (\theta_1, +\infty)$.

Ya que $\theta_1 < \theta_0$, el conjunto de posibles valores que pueden obtenerse al observar X es $\chi = \chi_0 \cup \chi_1 = (\theta_1, +\infty)$. Por tanto, el espacio muestral es:

$$\chi^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \min x_i > \theta_1\}.$$

Las funciones de densidad bajo H_0 y H_1, para cada realización muestral son:

$$\begin{array}{c} (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \min x_i > \theta_1 \end{array} \longrightarrow \begin{cases} f_0^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \theta_1 < \min x_i \leq \theta_0 \\ e^{n\theta_0 - \sum_{i=1}^{n} x_i}, & \min x_i > \theta_0 \end{cases} \\ \\ f_1^n(x_1, \ldots, x_n) = e^{n\theta_1 - \sum_{i=1}^{n} x_i}. \end{cases}$$

Entonces, si algún valor observado es menor que θ_0, $f_0^n(x_1,\ldots,x_n)=0$ y no se puede dividir. Sin embargo, esa situación no es posible bajo H_0, de manera que, si ocurre, directamente se rechaza H_0.

Para el resto de realizaciones muestrales, en las que $f_0^n(x_1,\ldots,x_n)\neq 0$, se divide f_1^n por f_0^n y se expresa el test en términos del cociente. Así, definiendo:

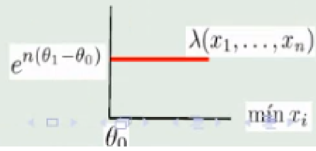
$$\lambda(x_1,\ldots,x_n)=\frac{f_1^n(x_1,\ldots,\ x_n)}{f_0^n(x_1,\ldots,\ x_n)}=e^{n(\theta_1-\theta_0)},\quad (x_1,\ldots,x_n)\in\chi^n\ /\ \min x_i>\theta_0,$$

la expresión general del test de Neyman-Pearson es:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, & \theta_1<\min x_i\leq\theta_0\\ 1, & \min x_i>\theta_0 \text{ y } \lambda(x_1,\ldots,x_n)>k\\ \gamma, & \min x_i>\theta_0 \text{ y } \lambda(x_1,\ldots,x_n)=k\\ 0, & \min x_i>\theta_0 \text{ y } \lambda(x_1,\ldots,x_n)<k,\end{cases}\qquad \begin{array}{l}k\geq 0,\ \gamma\in[0,1]\\ \forall(x_1,\ldots,x_n)\in\chi^n.\end{array}$$

Ahora, variando k, se concreta el test para cada tamaño $\alpha\in[0,1]$.

A la vista de λ, que sólo toma un valor, comenzamos dando a k dicho valor.



$$\boxed{k=e^{n(\theta_1-\theta_0)}}\longrightarrow\ \varphi(x_1,\ldots,x_n)=\begin{cases}1, & \theta_1<\min x_i\leq\theta_0\\ \gamma, & \min x_i>\theta_0,\end{cases}\qquad \gamma\in[0,1].$$

El tamaño de este test (H_0 es simple) es:

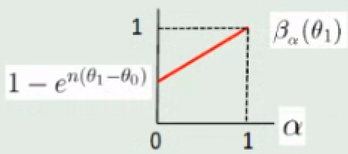
$$\alpha=E_{\theta_0}\left[\varphi(x_1,\ldots,x_n)\right]=P_{\theta_0}\left(\theta_1<\min x_i\leq\theta_0\right)+\gamma P_{\theta_0}\left(\min x_i>\theta_0\right)=\gamma.$$

Como $\gamma\in[0,1]$, que es el rango de valores de α, tenemos ya el test de Neyman-Pearson para un tamaño α arbitrario.

Test más potente de tamaño $\alpha\rightarrow\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)=\begin{cases}1, & \theta_1<\min X_i\leq\theta_0\\ \alpha, & \min X_i>\theta_0.\end{cases}$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1)=E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right]$

$$\begin{aligned}\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1)&=P_{\theta_1}\left(\theta_1<\min X_i\leq\theta_0\right)+\alpha P_{\theta_1}\left(\min X_i>\theta_0\right)\ [2]\\ &=1-e^{n(\theta_1-\theta_0)}+\alpha e^{n(\theta_1-\theta_0)}.\end{aligned}$$



Test óptimo a nivel de significación α:

Hay que maximizar la potencia entre todos los tests con tamaño menor o igual que α y, por tanto, el óptimo es φ_α.

[2] $P_{\theta_1}\left(\min X_i>\theta_0\right)=\left(\int_{\theta_0}^{+\infty}e^{\theta_1-x}dx\right)^n=e^{n(\theta_1-\theta_0)}$

Ejemplo 7.2.3: *Sea* $(X_1, \dots, X_n)$ *una muestra aleatoria simple de una variable* X *con densidad*

$$f_\theta(x) = e^{\theta - x}, \quad x \geq \theta.$$

Construir el test más potente de tamaño α *para contrastar* $H_0 : \theta = \theta_0$ *frente a* $H_1 : \theta = \theta_1$*, siendo* $\theta_0 < \theta_1$*, y estudiar la potencia en términos del tamaño.*

Ahora, $\chi_0 = (\theta_0, +\infty) \supset \chi_1 = (\theta_1, +\infty)$ y, por tanto, $\chi = \chi_0 \cup \chi_1 = (\theta_0, +\infty)$ y el espacio muestral es

$$\chi^n = (\theta_0, +\infty)^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \min x_i > \theta_0\}.$$

Las funciones de densidad bajo H_0 y H_1, para cada realización muestral son:

$$\begin{matrix} (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \min x_i > \theta_0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} f_0^n(x_1, \dots, x_n) = e^{n\theta_0 - \sum\limits_{i=1}^n x_i}. \\ \\ f_1^n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0 & \theta_0 < \min x_i \leq \theta_1 \\ e^{n\theta_1 - \sum\limits_{i=1}^n x_i}, & \min x_i > \theta_1. \end{cases} \end{cases}$$

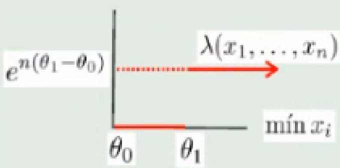
En esta ocasión, $f_0^n \neq 0$ en χ^n y podemos dividir en la expresión general del test.

El test de Neyman-Pearson se expresa como sigue:

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \dots, x_n) > k \\ \gamma, & \lambda(x_1, \dots, x_n) = k \\ 0, & \lambda(x_1, \dots, x_n) < k, \end{cases} \qquad \begin{matrix} k \geq 0, \ \gamma \in [0, 1] \\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in \chi^n. \end{matrix}$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \dots, x_n)}{f_0^n(x_1, \dots, x_n)} = \begin{cases} 0, & \theta_0 < \min x_i \leq \theta_1 \\ e^{n(\theta_1 - \theta_0)}, & \min x_i > \theta_1, \end{cases}$$

Dando valores a k obtenemos la expresión concreta de φ para los distintos tamaños, $\alpha \in [0, 1]$.



A la vista de λ, estudiamos el test para $k = e^{n(\theta_1 - \theta_0)}$ y $k = 0$, los dos posibles valores de λ.

- $\boxed{k = e^{n(\theta_1-\theta_0)}} \to \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} \gamma, & \min X_i > \theta_1 \\ 0, & \theta_0 < \min X_i \leq \theta_1, \end{cases} \quad \gamma \in [0,1].$

  El tamaño de este test es:

  $$\alpha = E_{\theta_0}\left[\varphi(X_1,\ldots,X_n)\right] = \gamma P_{\theta_0}\left(\min X_i > \theta_1\right)^3 = \gamma e^{n(\theta_0-\theta_1)}.$$

  Puesto que $\gamma \leq 1$, con un test de este tipo sólo se pueden alcanzar tamaños $\alpha \leq e^{n(\theta_0-\theta_1)}$. Para conseguir un tamaño específico, α, hay que tomar $\gamma = \alpha / e^{n(\theta_0-\theta_1)}$.

- $\boxed{k = 0} \to \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \min X_i > \theta_1 \\ \gamma, & \theta_0 < \min X_i \leq \theta_1, \end{cases} \quad \gamma \in [0,1].$

  El tamaño de este test es:

  $\alpha = P_{\theta_0}\left(\min X_i > \theta_1\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\theta_0 < \min X_i \leq \theta_1\right) = e^{n(\theta_0-\theta_1)} + \gamma\left(1 - e^{n(\theta_0-\theta_1)}\right).$

  Como $\gamma \geq 0$, sólo se pueden alcanzar tamaños $\alpha \geq e^{n(\theta_0-\theta_1)}$. Para conseguir un tamaño específico, α, debe tomarse $\gamma = (\alpha - e^{n(\theta_0-\theta_1)})/(1 - e^{n(\theta_0-\theta_1)})$.

3

$$P_{\theta_0}\left(\min X_i > \theta_1\right) = \left(P_{\theta_0}\left(X > \theta_1\right)\right)^n = \left(\int_{\theta_1}^{+\infty} e^{\theta_0 - x} dx\right)^n = e^{n(\theta_0-\theta_1)}$$

Test más potente de tamaño α:

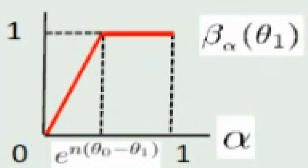
$$\alpha \leq e^{n(\theta_0-\theta_1)} \longrightarrow \varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{e^{n(\theta_0-\theta_1)}}, & \min X_i > \theta_1 \\ 0, & \theta_0 < \min X_i \leq \theta_1. \end{cases}$$

$$\alpha \geq e^{n(\theta_0-\theta_1)} \longrightarrow \varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \min X_i > \theta_1 \\ \dfrac{\alpha - e^{n(\theta_0-\theta_1)}}{1 - e^{n(\theta_0-\theta_1)}}), & \theta_0 < \min X_i \leq \theta_1. \end{cases}$$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right]$

- $\alpha \leq e^{n(\theta_0-\theta_1)} \longrightarrow \beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = \dfrac{\alpha}{e^{n(\theta_0-\theta_1)}} P_{\theta_1}\left(\min X_i > \theta_1\right) = \dfrac{\alpha}{e^{n(\theta_0-\theta_1)}}.$
- $\alpha \geq e^{n(\theta_0-\theta_1)} \longrightarrow \beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = 1.$

$\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1)$ crece con α y alcanza el máximo (1) en $\alpha = e^{n(\theta_0-\theta_1)}$ (una vez alcanzada la potencia máxima no se debería seguir aumentando el tamaño).



Test óptimo a nivel de significación α:

- $\alpha \leq e^{n(\theta_0-\theta_1)} \to \varphi_\alpha.$
- $\alpha \geq e^{n(\theta_0-\theta_1)} \to \varphi_{e^{n(\theta_0-\theta_1)}}$

7.3. Test de razón de verosimilitudes

El test de Neyman-Pearson proporciona la solución óptima al problema de contrastar hipótesis simples. Sin embargo, el problema de contraste de hipótesis arbitrarias no admite, en general, solución óptima, y resulta necesario disponer de algún método para la construcción de tests que pueda aplicarse a cualquier situación.

El método más común, que además proporciona en muchas situaciones tests uniformemente más potentes, es el de *razón de verosimilitudes*.

Test de razón de verosimilitudes

Sea $(X_1, \ldots, X_n) \in \chi^n$ una muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$.
El test de razón de verosimilitudes para contrastar $H_0 : \theta \in \Theta_0$ frente a $H_1 : \theta \in \Theta_1$ se define como:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) < c \\ 0, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) \geq c \end{cases} \qquad c \in (0, 1],$$

siendo

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\theta \in \Theta_0} L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)}{\sup\limits_{\theta \in \Theta} L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)}, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n.$$

$L_{x_1,\ldots,x_n}$ es la función de verosimilitud asociada a $(x_1, \ldots, x_n)$, y la constante c se determina imponiendo el tamaño o nivel de significación requerido.

Justificación: Un valor pequeño de $\lambda(x_1, \ldots, x_n)$ indica que la máxima verosimilitud que dan los valores $\theta \in \Theta_0$ a los datos observados es pequeña en relación a la verosimilitud que le dan otros valores fuera de Θ_0. En tal caso, es razonable pensar que el verdadero valor de θ esté fuera de Θ_0 y rechazar H_0.

Notemos que el estadístico de contraste, denominado *cociente o razón de verosimilidues* toma valores en $[0,1]$. Por tanto, para $c > 1$ y $c \leq 0$ resultan los tests triviales, $\varphi(X_1,\ldots,X_n) \equiv 1$ y $\varphi(X_1,\ldots,X_n) \equiv 0$, de tamaños 1 y 0, respectivamente. Para valores intermedios, $c \in (0,1]$, se obtienen diferentes tamaños $\alpha \in (0,1)$.

Hay que indicar que, al ser un test no aleatorizado, en general no es posible alcanzar cualquier tamaño $\alpha \in (0,1)$, aunque siempre cabe la posibilidad de aleatorizarlo:

$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(X_1,\ldots,X_n) < c \\ \gamma, & \lambda(X_1,\ldots,X_n) = c \\ 0, & \lambda(X_1,\ldots,X_n) > c. \end{cases}$$

Puede probarse que si las hipótesis a contrastar son simples, el test aleatorizado coincide con el test de Neyman-Pearson. También, como éste, es función de cualquier estadístico suficiente:

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{h(x_1,\ldots,x_n) \sup\limits_{\theta\in\Theta_0} g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))}{h(x_1,\ldots,x_n) \sup\limits_{\theta\in\Theta} g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))} = \frac{\sup\limits_{\theta\in\Theta_0} g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))}{\sup\limits_{\theta\in\Theta} g_\theta(T(x_1,\ldots,x_n))}.$$

Ejemplo 7.3.1: *Se sabe que el número de accidentes por semana en cierta carretera tiene distribución de Poisson con media no superior a 2.5. Después de algunas modificaciones en la vía, y para confirmar si el número medio de accidentes por semana sigue sin superar el valor 2.5, se realiza un estudio basado en el número de accidentes durante cuatro semanas elegidas al azar.*

a) Plantear y resolver el problema de contraste adecuado a esta situación.

b) Si los datos observados han sido: 4, 3, 2 y 3, ¿qué conclusión se obtiene sobre el número medio de accidentes semanales al nivel de significación 0.05?

$a)$ *Planteamiento y resolución:* Se trata de un problema de contraste sobre la media de la variable

X: *Número de accidentes semanales tras las modificaciones* $\rightarrow \{\mathcal{P}(\theta);\ \theta > 0\}$.

$$H_0 : \theta \leq 2.5$$
$$H_1 : \theta > 2.5.$$

Al ser las hipótesis compuestas, aplicamos el *test de razón de verosimilitudes*.

Para obtener el estadístico de contraste, partimos de la función de verosimilitud asociada a una realización muestral arbitraria, $x_1,\ldots,x_4 \in \mathbb{N}\cup\{0\}$:

$$L_{x_1,\ldots,x_4}(\theta) = P_\theta(X_1 = x_1,\ldots,X_4 = x_4) = \frac{e^{-4\theta}\theta^{\sum_{i=1}^{4} x_i}}{x_1!\cdots x_4!}, \quad \theta \in \mathbb{R}^+.$$

Cálculo de $\lambda(x_1,\ldots,x_4) = \dfrac{\sup\limits_{\theta\leq 2.5} L_{x_1,\ldots,x_4}(\theta)}{\sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_4}(\theta)}$. Buscamos los extremos de L:

$$\ln L_{x_1,\ldots,x_4}(\theta) = -4\theta + \ln\theta \sum_{i=1}^{4} x_i - \ln(x_1!\cdots x_4!).$$

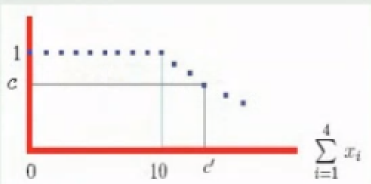
$$\frac{d\ln L_{x_1,\ldots,x_4}(\theta)}{d\theta} = -4 + \frac{\sum\limits_{i=1}^{4} x_i}{\theta} = 0 \Rightarrow \widehat{\theta}(x_1,\ldots,x_4) = \overline{x} \rightarrow \text{Máximo de } L.$$

- $\sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_4}(\theta) = L_{x_1,\ldots,x_4}(\overline{x})$.
- $\sup\limits_{\theta\leq 2.5} L_{x_1,\ldots,x_4}(\theta) = \begin{cases} L_{x_1,\ldots,x_4}(\overline{x}), & \overline{x}\leq 2.5 \\ L_{x_1,\ldots,x_4}(2.5), & \overline{x}\geq 2.5. \end{cases}$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_4) = \begin{cases} 1, & \overline{x}\leq 2.5 \left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_i \leq 10\right) \\ e^{-10}\left(10e \Big/ \sum\limits_{i=1}^{4} x_i\right)^{\sum\limits_{i=1}^{4} x_i}, & \overline{x}\geq 2.5 \left(\sum\limits_{i=1}^{4} x_i \geq 10\right). \end{cases}$$ [4]

[4] $h(x) = \left(\frac{10e}{x}\right)^x \rightarrow \ln h(x) = x\big(\ln(10e) - \ln x\big) \rightarrow \frac{d\ln h(x)}{dx} = \ln(10e) - \ln x - 1 = 0 \Rightarrow x = 10.$
$\frac{d^2\ln h(x)}{dx^2}\Big|_{x=10} = -1/x\Big|_{x=10} < 0 \;\Rightarrow\; x = 10$ es un máximo de $h(x)$.

Por tanto, $\lambda(x_1,\ldots,x_4)$, como función de $\sum\limits_{i=1}^{4} x_i$, tiene la siguiente representación:



Región de rechazo del test:

$\lambda(x_1,\ldots,x_4) < c,\ 0 < c \leq 1$

$\Updownarrow$

$\sum\limits_{i=1}^{4} x_i > c',\ \ c' \geq 10$

Entonces, la expresión general del TRV es:

$$\varphi(X_1,\ldots,X_4) = \begin{cases} 1, & \sum\limits_{i=1}^{4} X_i > c' \quad (c'\geq 10) \\ 0, & \sum\limits_{i=1}^{4} X_i \leq c'. \end{cases}$$

El valor c' se determina imponiendo el nivel de significación requerido:

$$\textit{Tamaño: } \sup_{\theta\leq 2.5} E_\theta\big[\varphi(X_1,\ldots,X_4)\big] = \sup_{\theta\leq 2.5} P_\theta\left(\sum_{i=1}^{4} X_i > c'\right) \leq \alpha.$$

El superior se calcula teniendo en cuenta que $\sum\limits_{i=1}^{4} X_i \rightarrow \mathcal{P}(4\theta)$ y que, como función de θ, $P_\theta\left(\sum\limits_{i=1}^{4} X_i > c'\right)$ es creciente.

5

Por tanto, el superior se alcanza en el mayor valor, $\theta = 2.5$, y c' se determina a partir la siguiente condición:

$$P_{\theta=2.5}\Big(\sum_{i=1}^{4} X_i > c'\Big) \leq \alpha, \qquad \sum_{i=1}^{4} X_i \underset{\theta=2.5}{\longrightarrow} \mathcal{P}(10).$$

b) TRV a nivel de significación 0.05: Buscando en las tablas de la $\mathcal{P}(10)$:

$c' = 15 \rightarrow P_{\theta=2.5}\Big(\sum_{i=1}^{4} X_i > 15\Big) = 0.0488 < 0.05$ (se respeta el n.s.).

$c' = 14 \rightarrow P_{\theta=2.5}\Big(\sum_{i=1}^{4} X_i > 14\Big) = 0.0835 > 0.05$ (no válido, supera el n.s.).

$$\varphi(X_1,\ldots,X_4) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{4} X_i > 15 \\ 0, & \sum_{i=1}^{4} X_i \leq 15. \end{cases}$$

---

[5] $T \rightarrow \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow f(\lambda) = P_\lambda(T > a) = \sum_{t=a+1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!}$ es creciente:

$$\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{t=a+1}^{+\infty} \frac{1}{t!}\left[-e^{-\lambda}\lambda^t + e^{-\lambda}t\lambda^{t-1}\right] = -\sum_{t=a+1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^t}{t!} + \sum_{t=a+1}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{t-1}}{(t-1)!}$$

$$= -P_\lambda(X > a) + P_\lambda(X > a-1) = P_\lambda(X = a) > 0.$$

Problema 1

Se toma una observación de una variable con distribución de Poisson para contrastar que la media vale 1 frente a que vale 2.

$a)$ *Construir un test no aleatorizado con nivel de significación 0.05 para el contraste planteado. Calcular las probabilidades de cometer error de tipo 1 y de tipo 2, el tamaño y la potencia del test frente a la hipótesis alternativa.*

$b)$ *¿Cómo debe aleatorizarse el test para alcanzar el tamaño 0.05? ¿Cuál es la potencia de este test?*

$$X \to \{\mathcal{P}(\lambda);\ \lambda = 1,\ 2\} \longrightarrow \begin{array}{l} H_0 : \lambda = 1 \\ H_1 : \lambda = 2. \end{array}$$

a) *Construir un test no aleatorizado con nivel de significación 0.05:*

Ya que $\lambda = E_\lambda[X]$, es razonable rechazar H_0 para grandes valores de X:

$$\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X > k \\ 0, & X \leq k. \end{cases}$$

Nivel de significación 0.05:

$$\sup_{\lambda=1} \beta_\varphi(\lambda) = \beta_\varphi(1) = E_{\lambda=1}\left[\varphi(X)\right] = P_{\lambda=1}\left(X > k\right) \leq 0.05.$$

$$\begin{array}{l} k = 3 \ \to \ P_{\lambda=1}\left(X > 3\right) = 0.019 < 0.05 \\ \\ k = 2 \ \to \ P_{\lambda=1}\left(X > 2\right) = 0.0803 > 0.05 \end{array} \longrightarrow \varphi(X) = \begin{cases} 1, & X > 3 \\ 0, & X \leq 3. \end{cases}$$

$*$ *Probabilidad de cometer error de tipo 1* $\to P_{\lambda=1}\left(X > 3\right) = 0.019.$

$*$ *Probabilidad de cometer error de tipo 2* $\to P_{\lambda=2}\left(X \leq 3\right) = 0.8571.$

$*$ *Tamaño* $\to \sup_{\lambda=1} \beta_\varphi(\lambda) = \beta_\varphi(1) = E_{\lambda=1}\left[\varphi(X)\right] = P_{\lambda=1}\left(X > 3\right) = 0.019.$

$*$ *Potencia frente a la hipótesis alternativa:*

$$\beta_\varphi(2) = E_{\lambda=2}\left[\varphi(X)\right] = P_{\lambda=2}\left(X > 3\right) = 0.1429.$$

b) *¿Cómo debe aleatorizarse el test para alcanzar el tamaño 0.05? ¿Cuál es la potencia de este test?*

Aleatorizamos φ en el punto 3, límite de las regiones de rechazo y aceptación:

$$\varphi_a(X) = \begin{cases} 1, & X > 3 \\ \gamma, & X = 3 \\ 0, & X < 3. \end{cases}$$

$*$ *Tamaño 0.05:*

$$\sup_{\lambda=1} \beta_{\varphi_a}(\lambda) = \beta_{\varphi_a}(1) = E_{\lambda=1}\left[\varphi_a(X)\right] = P_{\lambda=1}(X > 3) + \gamma P_{\lambda=1}(X = 3)$$
$$= 0.019 + \gamma 0.0613 = 0.05 \Rightarrow \gamma = 0.5057.$$

$*$ *Potencia frente a la alternativa:*

$$\beta_{\varphi_a}(2) = E_{\lambda=2}\left[\varphi_a(X)\right] = P_{\lambda=2}(X > 3) + \gamma P_{\lambda=2}(X = 3)$$
$$= 0.1429 + (0.5057)(0.1804) = 0.2341 > \beta_{\varphi}(2).$$

Vemos que con la aleatorización se aumenta el tamaño (al límite permitido por el nivel de significación) y se aumenta también la potencia.

Ej. 7.2

urna 10 bolas. Blancas y negras.

Contrastar nº bolas blanca frente a negras.

~~$H_0: \theta =$~~

~~$H_1: \theta =$~~

Vamos a modelar el problema.

Tenemos $X :=$ número de bolas blancas obtenidas en ~~las~~ tres repeticiones independientes de una ~~B~~ Bernouilli de parámetro p.

p = probabilidad de blancos en la urna.

Sea N = número total de blancos, entonces tenemos que $\frac{N}{10} = p$

$$X \sim B\left(3, \frac{N}{10}\right) \equiv B(3, p)$$

$$\begin{cases} H_0 : N = 5 \\ H_1 : N = \{6, 7\} \end{cases} \iff \boxed{\begin{array}{l} H_0 : p = 0.5 \\ H_1 : p = 0.6 \text{ ó } 0.7 \end{array}}$$

contraste, y el test es

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, 1 \\ 1 & x = 2, 3 \end{cases}$$

Así tenemos que calcular el tamaño, y la potencia frente a la alternativa.

- Tamaño: $\sup_{\theta \in \Theta_0} \beta_\varphi(\theta) \equiv \sup_{\theta = 0.5} \beta_\varphi(\theta) = \beta_\varphi(0.5) =$

$$= E_{0.5}[\varphi(X)] = P_{0.5}(X=1)\cdot 0 + P_{0.5}(X=2) + $$
$$+ P_{0.5}(X=3) =$$

7.4

$$\beta_\varphi(0.5) = 0\cdot P_{0.5}(X=1) + 1\cdot P_{0.5}(X=2 \text{ ó } 3) =$$
$$= P_{0.5}(X=2) + P_{0.5}(X=3) = \binom{3}{2} 0.5^2\, 0.5 +$$
$$+ \binom{3}{3} 0.5^3 = \left[\binom{3}{2} + \binom{3}{3}\right] 0.5^3$$
$$= (3+1)\, 0.5^3 = 0.5$$

El tamaño del test es 0.5. (Bastante alto, mucha probabilidad de cometer error de tipo 1, i.e., rechazo H_0 siendo verdadera)

La potencia frente a las alternativas es:

$$- \beta_\varphi(\theta = 0.6) = \binom{3}{2} 0.6^2\, 0.4 + \binom{3}{3} 0.6 \cdot 0.4^2 =$$
$$= 1\cdot P_{0.6}(X=2) + 1\cdot P_{0.6}(X=3) =$$
$$= 0.528 \quad \mathbf{0,648}$$

$$- \beta_\varphi(\theta = 0.7) = \binom{3}{2} 0.7^2\, 0.3 + \binom{3}{3} 0.7 \cdot 0.3^2 =$$
$$= 0.504. \quad \mathbf{0,784}$$

⑤ Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una m.a.s. de $X \rightsquigarrow \{P(\lambda); \lambda > 0\}$. Encontrar el test más potente de tamaño α para resolver el problema de contraste

$H_0: \lambda = \lambda_0$

$H_1: \lambda = \lambda_1$

Utilizamos el lema de Neyman-Pearson.

$X \rightsquigarrow \{P(\lambda); \lambda > 0\} \iff P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$, $\mathcal{X} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\to \mathcal{X}^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ e. muestral

$$f_0^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \quad f_1^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}^n$$

Como $f_0^n \neq 0$ en $\mathcal{X}^n$, podemos dividir, y el test de Neyman-Pearson queda:

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(X_1, \dots, X_n) > K \\ \gamma, & \lambda(X_1, \dots, X_n) = K \\ 0, & \lambda(X_1, \dots, X_n) < K \end{cases} \quad \text{con } K \geq 0, \ \gamma \in [0, 1]$$

$$\lambda(X_1, \dots, X_n) = \frac{f_1^n(X_1, \dots, X_n)}{f_0^n(X_1, \dots, X_n)} = \frac{e^{-n\lambda_1} \lambda_1^{\sum_{i=1}^n x_i}}{e^{-n\lambda_0} \lambda_0^{\sum_{i=1}^n x_i}} = e^{n(\lambda_0 - \lambda_1)} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

Y como $e^{n(\lambda_0 - \lambda_1)}$ es una constante, podemos de estudiar $\lambda(X_1, \dots, X_n)$ como $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}$. Además, al ser $\sum_{i=1}^n x_i$ el estadístico suficiente, conocimos que el test de N-P era función de ese estadístico.

Veamos cuando $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < 1$ (para que al despejar con el logaritmo, me cambie la desigualdad de signo, además $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^{\sum_{i=1}^n x_i}$ sería decreciente).

$\underline{\lambda_1 < \lambda_0}$ λ decrece estrictamente con $\sum_{i=1}^n X_i$, y obtendríamos

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^n X_i < K' \\ \gamma, & \sum_{i=1}^n X_i = K' \\ 0, & \sum_{i=1}^n X_i > K' \end{cases}$$

Los valores γ y K' se determinan imponiendo el tamaño del test.

Como la hipótesis es simple (el tamaño coincide con la potencia de λ_0) y

$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim P(n\lambda_0)$

$$\alpha = E_{\lambda_0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < K'\right) + \gamma P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = K'\right)$$

(Si nos dieran α, despejamos γ calculando dichas probabilidades y obtendríamos el test más potente de tamaño α).

$\underline{\lambda_0 < \lambda_1}$ λ crece estrictamente con $\sum_{i=1}^{n} X_i$ y el test nos queda:

$$\varphi(\underline{X}) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{n} X_i > K' \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{n} X_i = K' \\ 0, & \sum_{i=1}^{n} X_i < K' \end{cases}$$

Por lo tanto, para un tamaño α, podríamos despejar γ como:

$$\alpha = E_{\lambda_0}[\varphi(\underline{X})] = P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > K'\right) + \gamma P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = K'\right)$$

Aplicación. El no. de llamadas por minuto $\sim P(\lambda)$. En cinco minutos se reciben 12, ¿puede aceptarse que el no. medio de llamadas por minuto es 1'5, frente a que sea 2, al nivel de significación 0'05? Calcular la potencia del test obtenido.

Las hipótesis son:

H_0: 1'5 llamadas por minuto $\lambda_0 = 1'5$

H_1: 2 " " $\lambda_1 = 2$ ya que $E[X] = \lambda$ con $X \sim P(\lambda)$.

Como $1'5 < 2$, estamos en la última situación. Como X cuenta el no. de llamadas en un minuto, y esperamos cinco $\Rightarrow n = 5$. Sabemos que el tamaño del test viene por:

$$\alpha = P_{1'5}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > K'\right) + \gamma P_{1'5}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = K'\right) = 0'05$$

Probamos $k'=1$, $P_{1'5}\left(\sum_{i=1}^{4} X_i > 1\right) + \gamma P_{\lambda_0}\left(\sum_{i=1}^{4} X_i = 1\right) = 0'05$

$P_{1'5}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > 1\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 1\right) - P\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = 0\right) = 1 - 4'14\cdot 10^{-3} - 5'53\cdot 10^{-4} \simeq 0'99 \neq 0'05$

No, γ quedaría negativo, y $\gamma \in [0,1]$

Despejamos γ en función de las probabilidades y utilizamos las tablas:

$$\gamma = \frac{0'05 - P_{1'5}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i > k'\right)}{P_{1'5}\left(\sum_{i=1}^{5} X_i = k'\right)}$$

Para $k'=3$: $\gamma = \frac{0'05 - 0'0737}{\quad}$ (No nos vale, es negativo).

$k'=4$: $\gamma = \frac{0'05 - 0'0266}{0'0471} = 0'496815 \in [0,1]$

$k'=5$: $\gamma = -\frac{32}{47}$ Tampoco vale.

Luego, el test de N-P nos queda; para este nivel de significación y tamaño de la muestra:

$$\varphi(X_1,\dots,X_5) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i > 4 \\ 0'4968, & \sum_{i=1}^{5} X_i = 5 \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i < 4 \end{cases}$$

Como $12 > 4$, rechazamos la hipótesis de que el nº. medio sea 1'5.

En una centralita el número de llamadas por minuto sigue una distribución de Poisson. Si en cinco minutos se han recibido 12 llamadas, ¿puede aceptarse que el número medio de llamadas por minuto es 1.5, frente a que dicho número es 2, a nivel de significación 0.05? Calcular la potencia del test obtenido.

$$\begin{array}{l} H_0 : \lambda = 1.5 \\ H_1 : \lambda = 2 \end{array} \quad \longrightarrow \ \lambda_1 > \lambda_0.$$

El test más potente a n.s. 0.05, es el de Neyman-Pearson de tamaño 0.05:

$$\varphi(X_1, \dots, X_5) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i > k' \\ \gamma, & \sum_{i=1}^{5} X_i = k' \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i < k', \end{cases} \qquad \gamma \in [0,1].$$

$$P_{\lambda=1.5}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i > k'\Big) + \gamma P_{\lambda=1.5}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i = k'\Big) = 0.05, \qquad \sum_{i=1}^{5} X_i \underset{\lambda=1.5}{\longrightarrow} \mathcal{P}(7.5).$$

$$* \ P_{\lambda=1.5}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i > 12\Big) = 0.0427 < 0.05.$$

$$* \ P_{\lambda=1.5}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i > 11\Big) = 0.0793 > 0.05$$

Relación 7. Contraste de hipótesis A. Hermoso Carazo
Problema 3

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0427}{P_{\lambda=1.5}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i = 12\Big)} = \frac{0.05 - 0.0427}{0.0366} = 0.19945.$$

$$\varphi(X_1, \dots, X_5) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i > 12 \\ 0.19945, & \sum_{i=1}^{5} X_i = 12 \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i < 12. \end{cases}$$

En la situación observada, el número total de llamadas ha sido 12. Por tanto, la conclusión es rechazar H_0 con probabilidad 0.19945 (habría que efectuar un experimento de aleatorización auxiliar para tomar la decisión final).

$$\gamma = \frac{0.05 - 0.0427}{P_{\lambda=1.5}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i = 12\Big)} = \frac{0.05 - 0.0427}{0.0366} = 0.19945.$$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_5) = \begin{cases} 1, & \sum_{i=1}^{5} X_i > 12 \\ 0.19945, & \sum_{i=1}^{5} X_i = 12 \\ 0, & \sum_{i=1}^{5} X_i < 12. \end{cases}$$

En la situación observada, el número total de llamadas ha sido 12. Por tanto, la conclusión es rechazar H_0 con probabilidad 0.19945 (habría que efectuar un experimento de aleatorización auxiliar para tomar la decisión final).

Potencia del test frente a la hipótesis alternativa:

$$\beta_\varphi(2) = P_{\lambda=2}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i > k'\Big) + 0.19945 P_{\lambda=2}\Big(\sum_{i=1}^{5} X_i = k'\Big) \underset{\uparrow}{=} 0.2272.$$

$$\sum_{i=1}^{5} X_i \underset{\lambda=2}{\longrightarrow} \mathcal{P}(10)$$

Problema 4

Dada una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$, deducir el test más potente de tamaño arbitrario para contrastar hipótesis simples sobre μ.

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu = \mu_1$$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & f_1^n(X_1, \ldots, X_n) > k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \\ \gamma, & f_1^n(X_1, \ldots, X_n) = k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \\ 0, & f_1^n(X_1, \ldots, X_n) < k f_0^n(X_1, \ldots, X_n), \end{cases} \quad k \geq 0, \;\; \gamma \in [0, 1].$$

$$\chi_0 = \chi_1 = \mathbb{R} \Rightarrow \chi^n = \mathbb{R}^n \Rightarrow f_0^n(x_1, \ldots, x_n) \neq 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\Downarrow \;\; \forall x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) > k \\ \gamma, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) = k \\ 0, & \lambda(x_1, \ldots, x_n) < k \end{cases} \qquad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \ldots, x_n)}{f_0^n(x_1, \ldots, x_n)}.$$

$$k \geq 0, \;\; \gamma \in [0, 1].$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1/(\sigma_0^n(2\pi)^{n/2})e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_1)^2/2\sigma_0^2}}{1/(\sigma_0^n(2\pi)^{n/2})e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2/2\sigma_0^2}}$$

$$= \exp\left(\frac{-n(\mu_1^2-\mu_0^2)+2(\mu_1-\mu_0)\sum_{i=1}^{n}x_i}{2\sigma_0^2}\right).$$

* $\mu_1 > \mu_0 \Rightarrow \lambda(x_1,\ldots,x_n)$ crece estrictamente con $\sum_{i=1}^{n} x_i$ (equivalentemente, con $\overline{x}$).

* $\mu_1 < \mu_0 \Rightarrow \lambda(x_1,\ldots,x_n)$ decrece estrictamente con $\sum_{i=1}^{n} x_i$ (equivalentemente, con $\overline{x}$).

$\boxed{\mu_1 > \mu_0} \longrightarrow \lambda(x_1,\ldots,x_n)$ crece estrictamente con $\overline{x}$.

$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \overline{X} > k' \\ \gamma, & \overline{X} = k' \\ 0, & \overline{X} < k', \end{cases} \qquad \gamma \in [0,1].$$

Ya que $\overline{X}$ es de tipo continuo, $\{\overline{X} = k'\}$ es un suceso nulo bajo H_0 y H_1, y podemos tomar un valor arbitrario para γ (por ejemplo, $\gamma = 0$).

El valor k' se determina imponiendo el tamaño del test, que se calcula teniendo en cuenta que $\overline{X} \underset{\mu=\mu_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2/n)$:

$$\alpha = \sup_{\mu=\mu_0} \beta_\varphi(\mu) = \beta_\varphi(\mu_0) = E_{\mu_0}[\varphi(X_1,\ldots,X_n)] = P_{\mu_0}\left(\overline{X} > k'\right)$$

$$= P_{\mu_0}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{k'-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{k'-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = z_\alpha.$$

$\Downarrow$ TMP de tamaño α

$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \overline{X} > \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ 0, & \overline{X} \le \mu_0 + z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$\boxed{\mu_1 < \mu_0} \longrightarrow \lambda(x_1, \dots, x_n)$ decrece estrictamente con $\overline{x}$.

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \overline{X} < k' \\ \gamma, & \overline{X} = k' \\ 0, & \overline{X} > k', \end{cases} \qquad \gamma \in [0,1].$$

Ya que $\overline{X}$ es de tipo continuo, $\{\overline{X} = k'\}$ es un suceso nulo bajo H_0 y H_1, y podemos tomar un valor arbitrario para γ (por ejemplo, $\gamma = 0$).

El valor k' se determina imponiendo el tamaño del test, que se calcula teniendo en cuenta que $\overline{X} \underset{\mu=\mu_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}(\mu_0, \sigma_0^2/n)$:

$$\alpha = \sup_{\mu=\mu_0} \beta_\varphi(\mu) = \beta_\varphi(\mu_0) = E_{\mu_0}\left[\varphi(X_1, \dots, X_n)\right] = P_{\mu_0}\left(\overline{X} < k'\right)$$

$$= P_{\mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{k' - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \frac{k' - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = z_{1-\alpha} = -z_\alpha.$$

$\Downarrow$ TMP de tamaño α

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \overline{X} < \mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \\ 0, & \overline{X} \geq \mu_0 - z_\alpha \dfrac{\sigma_0}{\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Problema 5

Dada una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con distribución $U(-\theta, \theta)$, deducir el test más potente de tamaño α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$ y calcular su potencia. ¿Cuál es el test óptimo fijado un nivel de significación arbitrario?

$$(X_1, \dots, X_n) \ m.a.s. \ de \ X \to U(-\theta, \theta) \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{array}$$

$$f_j^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\theta_j)^n}, \quad \text{máx}\,|x_i| < \theta_j, \quad j = 0, 1.$$

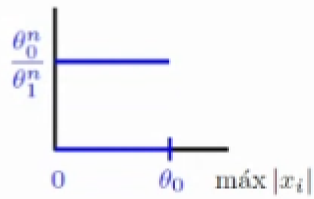
$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & f_1^n(X_1, \dots, X_n) > k f_0^n(X_1, \dots, X_n) \\ \gamma, & f_1^n(X_1, \dots, X_n) = k f_0^n(X_1, \dots, X_n) \\ 0, & f_1^n(X_1, \dots, X_n) < k f_0^n(X_1, \dots, X_n), \end{cases} \qquad k \geq 0, \ \gamma \in [0,1].$$

$$\chi_0^n = (-\theta_0, \theta_0)^n, \ \ \chi_1^n = (-\theta_1, \theta_1)^n \ \Rightarrow \chi^n = \chi_0^n \cup \chi_1^n = \begin{cases} (-\theta_1, \theta_1)^n, & \theta_1 > \theta_0 \\ (-\theta_0, \theta_0)^n, & \theta_1 < \theta_0. \end{cases}$$

$$\boxed{\theta_1 > \theta_0} \longrightarrow \chi^n = (-\theta_1, \theta_1)^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ \text{máx}\,|x_i| < \theta_1\right\}$$

$$\begin{array}{c}(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \text{máx}\,|x_i| < \theta_1\end{array} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f_0^n(x_1,\ldots,x_n) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{(2\theta_0)^n}, & \text{máx}\,|x_i| < \theta_0 \\ 0, & \theta_0 \leq \text{máx}\,|x_i| < \theta_1. \end{array} \right. \\ \\ f_1^n(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{1}{(2\theta_1)^n}. \end{array} \right.$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{f_1^n(x_1,\ldots,x_n)}{f_0^n(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}, \quad \text{máx}\,|x_i| < \theta_0.$$



$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \left\{ \begin{array}{lll} 1, & \theta_0 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 & \\ 1, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_0 \ \text{ y } \ \lambda(X_1,\ldots,X_n) > k \\ \gamma, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_0 \ \text{ y } \ \lambda(X_1,\ldots,X_n) = k \\ 0, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_0 \ \text{ y } \ \lambda(X_1,\ldots,X_n) < k. \end{array} \right. \qquad k \geq 0, \ \gamma \in [0,1].$$

$$\boxed{k = \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}} \longrightarrow \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \theta_0 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ \gamma, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_0, \end{array} \right. \qquad \gamma \in [0,1].$$

Tamaño: $E_{\theta_0}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right]$

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\theta_0 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_1\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\text{máx}\,|X_i| < \theta_0\right) = \gamma \in [0,1].$$

$$\Downarrow$$

Test más potente de tamaño $\alpha \longrightarrow \varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & \theta_0 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ \alpha, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_0. \end{array} \right.$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right]$

$$\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = P_{\theta_1}\left(\theta_0 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_1\right) + \alpha P_{\theta_1}\left(\text{máx}\,|X_i| < \theta_0\right)^1 = 1 - \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n} + \alpha\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}.$$

Test óptimo a nivel de significación α: Ya que la potencia crece estrictamente con el tamaño, el test de mayor potencia a nivel de significación α es φ_α.

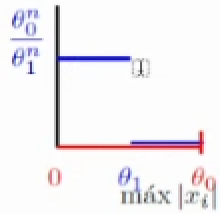
1

$$P_{\theta_1}\left(\text{máx}\,|X_i| < \theta_0\right) = \left(P_{\theta_1}\left(X < \theta_0\right)\right)^n = \left(\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{2\theta_1} dx\right)^n = \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}.$$

$\boxed{\theta_1 < \theta_0} \longrightarrow \chi^n = (-\theta_0, \theta_0)^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \;/\; \text{máx}\, |x_i| < \theta_0\}$

$$\begin{matrix}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \\ \text{máx}\,|x_i| < \theta_0\end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} f_0^n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{1}{(2\theta_0)^n} \cdot \\ \\ f_1^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{(2\theta_1)^n}, & \text{máx}\,|x_i| < \theta_1 \\ 0, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|x_i| < \theta_0. \end{cases} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \ldots, x_n)}{f_0^n(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{cases} \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}, & \text{máx}\,|x_i| < \theta_1 \\ 0, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|x_i| < \theta_0. \end{cases}$$



$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) > k \\ \gamma, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) = k \qquad k \geq 0,\ \gamma \in [0, 1]. \\ 0, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) < k. \end{cases}$$

$$\boxed{k = \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}} \longrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \gamma, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ 0, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_0, \end{cases} \qquad \gamma \in [0, 1].$$

Tamaño: $E_{\theta_0}\left[\varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\right]$

$$\alpha = \gamma P_{\theta_0}\left(\text{máx}\,|X_i| < \theta_1\right) = \gamma \left(\int_{-\theta_1}^{\theta_1} \frac{1}{2\theta_0} dx\right)^n = \gamma \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}.$$

* Para conseguir el test de tamaño α hay que tomar $\gamma = \alpha \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$.
* $\gamma = \alpha \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n} \in [0, 1] \Rightarrow \alpha \leq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$.

$$\Downarrow$$

T.M.P. de tamaño $\alpha \leq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n} \longrightarrow \varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \alpha \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ 0, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_0. \end{cases}$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\right] = \alpha \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n} P_{\theta_1}\left(\text{máx}\,|X_i| < \theta_1\right) = \alpha \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$.

Test óptimo a nivel de significación $\alpha \leq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$: Ya que la potencia crece estrictamente con el tamaño, el test de mayor potencia a nivel de significación α es φ_α.

$$\boxed{k=0} \longrightarrow \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ \gamma, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_0, \end{cases} \qquad \gamma \in [0,1].$$

Tamaño: $E_{\theta_0}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right]$

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\text{máx}\,|X_i| < \theta_1\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\theta_1 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_0\right) = \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n} + \gamma\left(1 - \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}\right).$$

* Para conseguir el test de tamaño α hay que tomar $\gamma = \dfrac{\alpha - \theta_1^n/\theta_0^n}{1-\theta_1^n/\theta_0^n}$.
* $\gamma = \dfrac{\alpha - \theta_1^n/\theta_0^n}{1-\theta_1^n/\theta_0^n} \in [0,1] \Rightarrow \alpha \geq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$.

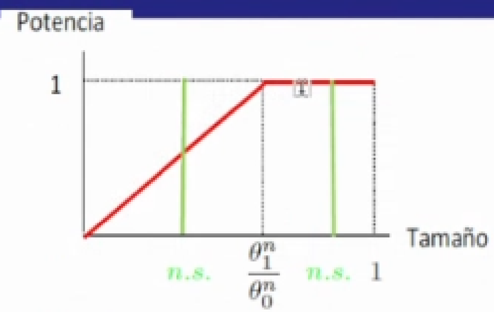
$$\Downarrow$$

T.M.P. de tamaño $\alpha \geq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n} \longrightarrow \varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ \dfrac{\alpha - \theta_1^n/\theta_0^n}{1-\theta_1^n/\theta_0^n}, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_0. \end{cases}$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right] = 1.$

Test óptimo a nivel de significación $\alpha \geq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$: Todos los tests con tamaño comprendido en $[\theta_1^n/\theta_0^n,\ \alpha]$ tienen n.s. α y potencia 1 (la máxima). Por lo tanto, el test óptimo es el de menor tamaño; esto es, $\varphi_{\frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}}$.

$$\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = \begin{cases} \alpha\dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}, & \alpha \leq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n} \\ 1, & \alpha \geq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n} \end{cases}$$



* Test óptimo a nivel de significación $\alpha \leq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$:

$$\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} \alpha\dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ 0, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_0. \end{cases}$$

* Test óptimo a nivel de significación $\alpha \geq \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$:

$$\varphi_{\frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}}(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{máx}\,|X_i| < \theta_1 \\ 0, & \theta_1 \leq \text{máx}\,|X_i| < \theta_0. \end{cases}$$

Problema 6

Deducir el test más potente de tamaño arbitrario para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta = \theta_1$, basándose en una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta.$$

Deducir el test óptimo para un nivel de significación arbitrario.

$$(X_1, \ldots, X_n) \ m.a.s. \ de \ X \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} H_0 : \theta = \theta_0 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{array}$$

$$f_j^n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\theta_j^n}{\prod_{i=1}^n x_i^2}, \quad \text{mín}\, x_i > \theta_j, \quad j = 0, 1.$$

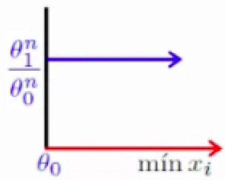
$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & f_1^n(X_1, \ldots, X_n) > k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \\ \gamma, & f_1^n(X_1, \ldots, X_n) = k f_0^n(X_1, \ldots, X_n) \qquad k \geq 0, \ \gamma \in [0, 1]. \\ 0, & f_1^n(X_1, \ldots, X_n) < k f_0^n(X_1, \ldots, X_n), \end{cases}$$

$$\chi_0^n = (\theta_0, +\infty)^n, \ \chi_1^n = (\theta_1, +\infty)^n \ \Rightarrow \chi^n = \chi_0^n \cup \chi_1^n = \begin{cases} (\theta_1, +\infty)^n, & \theta_1 < \theta_0 \\ (\theta_0, +\infty)^n, & \theta_1 > \theta_0. \end{cases}$$

$\boxed{\theta_1 < \theta_0} \longrightarrow \chi^n = (\theta_1, +\infty)^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ \min x_i > \theta_1\right\}$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \atop \min x_i > \theta_1 \longrightarrow \begin{cases} f_0^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \theta_1 < \min x_i \leq \theta_0 \\ \dfrac{\theta_0^n}{\prod_{i=1}^n x_i^2}, & \min x_i > \theta_0. \end{cases} \\ \\ f_1^n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\theta_1^n}{\prod_{i=1}^n x_i^2}. \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \ldots, x_n)}{f_0^n(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}, \quad \min x_i > \theta_0.$$



$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \theta_1 < \min X_i \leq \theta_0 \\ 1, & \min X_i > \theta_0 \ \text{ y } \ \lambda(X_1, \ldots, X_n) > k \\ \gamma, & \min X_i > \theta_0 \ \text{ y } \ \lambda(X_1, \ldots, X_n) = k \\ 0, & \min X_i > \theta_0 \ \text{ y } \ \lambda(X_1, \ldots, X_n) < k. \end{cases} \qquad k \geq 0, \ \gamma \in [0, 1].$$

$$\boxed{k = \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}} \longrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \theta_1 < \min X_i \leq \theta_0 \\ \gamma, & \min X_i > \theta_0, \end{cases} \qquad \gamma \in [0, 1].$$

Tamaño: $E_{\theta_0}\left[\varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\right]$

$$\alpha = P_{\theta_0}(\theta_1 < \min X_i \leq \theta_0) + \gamma P_{\theta_0}(\min X_i > \theta_0) = \gamma \in [0, 1].$$

$$\Downarrow$$

Test más potente de tamaño α $\longrightarrow \varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \theta_1 < \min X_i \leq \theta_0 \\ \alpha, & \min X_i > \theta_0. \end{cases}$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\right]$

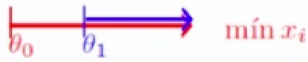
$$\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = P_{\theta_1}(\theta_1 < \min X_i \leq \theta_0) + \alpha P_{\theta_1}(\min X_i > \theta_0) =^{2} 1 - \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n} + \alpha \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}.$$

Test óptimo a nivel de significación α: Ya que la potencia crece estrictamente con el tamaño, el test de mayor potencia a nivel de significación α es φ_α.

2

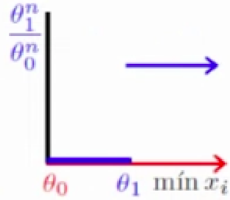
$$P_{\theta_1}(\min X_i > \theta_0) = \left(P_{\theta_1}(X > \theta_0)\right)^n = \left(\int_{\theta_0}^{+\infty} \frac{\theta_1}{x^2} dx\right)^n = \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}.$$

$\boxed{\theta_1 > \theta_0} \longrightarrow \chi^n = (\theta_0, +\infty)^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \ / \ \min x_i > \theta_0\right\}$



$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \atop \min x_i > \theta_0 \longrightarrow \begin{cases} f_0^n(x_1, \ldots, x_n) = \dfrac{\theta_0^n}{\prod\limits_{i=1}^n x_i^2}. \\[2ex] f_1^n(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0, & \theta_0 < \min x_i \leq \theta_1 \\ \dfrac{\theta_1^n}{\prod\limits_{i=1}^n x_i^2}, & \min x_i > \theta_1. \end{cases} \end{cases}$$

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \frac{f_1^n(x_1, \ldots, x_n)}{f_0^n(x_1, \ldots, x_n)} = \begin{cases} 0, & \theta_0 < \min x_i \leq \theta_1 \\ \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}, & \min x_i > \theta_1. \end{cases}$$



$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) > k \\ \gamma, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) = k \\ 0, & \lambda(X_1, \ldots, X_n) < k. \end{cases} \qquad k \geq 0, \ \gamma \in [0,1].$$

$$\boxed{k = \frac{\theta_1^n}{\theta_0^n}} \longrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \gamma, & \min X_i > \theta_1 \\ 0, & \theta_0 < \min X_i \leq \theta_1, \end{cases} \qquad \gamma \in [0,1].$$

Tamaño: $E_{\theta_0}\left[\varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\right]$

$$\alpha = \gamma P_{\theta_0}\left(\min X_i > \theta_1\right) = \gamma \left(\int_{\theta_1}^{+\infty} \frac{\theta_0}{x^2} dx\right)^n = \gamma \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}.$$

$*$ Para conseguir el test de tamaño α hay que tomar $\gamma = \alpha \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$.

$*$ $\gamma = \alpha \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n} \in [0,1] \Rightarrow \alpha \leq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$.

$$\Downarrow$$

T.M.P. de tamaño $\alpha \leq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n} \longrightarrow \varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} \alpha \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}, & \min X_i > \theta_1 \\ 0, & \theta_0 < \min X_i \leq \theta_1. \end{cases}$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1, \ldots, X_n)\right] = \alpha \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n} P_{\theta_1}\left(\min X_i > \theta_1\right) = \alpha \dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}$.

Test óptimo a nivel de significación $\alpha \leq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$: Ya que la potencia crece estrictamente con el tamaño, el test de mayor potencia a nivel de significación α es φ_α.

$$\boxed{k=0} \longrightarrow \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{mín}\, X_i > \theta_1 \\ \gamma, & \theta_0 < \text{mín}\, X_i \leq \theta_1, \end{cases} \qquad \gamma \in [0,1].$$

Tamaño: $E_{\theta_0}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right]$

$$\alpha = P_{\theta_0}\left(\text{mín}\, X_i > \theta_1\right) + \gamma P_{\theta_0}\left(\theta_0 < \text{mín}\, X_i \leq \theta_1\right) = \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n} + \gamma\left(1 - \frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}\right).$$

$*$ Para conseguir el test de tamaño α hay que tomar $\gamma = \dfrac{\alpha - \theta_0^n/\theta_1^n}{1-\theta_0^n/\theta_1^n}$.

$*$ $\gamma = \dfrac{\alpha - \theta_0^n/\theta_1^n}{1-\theta_0^n/\theta_1^n} \in [0,1] \Rightarrow \alpha \geq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$.

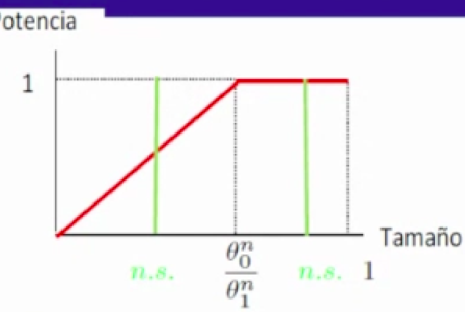
$$\Downarrow$$

T.M.P. de tamaño $\alpha \geq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n} \longrightarrow \varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{mín}\, X_i > \theta_1 \\ \dfrac{\alpha - \theta_0^n/\theta_1^n}{1-\theta_0^n/\theta_1^n}, & \theta_0 < \text{mín}\, X_i \leq \theta_1. \end{cases}$

Potencia: $\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = E_{\theta_1}\left[\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n)\right] = 1.$

Test óptimo a nivel de significación $\alpha \geq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$: Todos los tests con tamaño comprendido en $[\theta_0^n/\theta_1^n,\ \alpha]$ tienen n.s. α y potencia 1 (la máxima). Por lo tanto, el test óptimo es el de menor tamaño; esto es, $\varphi_{\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}}$.

$$\beta_{\varphi_\alpha}(\theta_1) = \begin{cases} \alpha\dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}, & \alpha \leq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n} \\ 1, & \alpha \geq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n} \end{cases}$$



$*$ Test óptimo a nivel de significación $\alpha \leq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$:

$$\varphi_\alpha(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} \alpha\dfrac{\theta_1^n}{\theta_0^n}, & \text{mín}\, X_i > \theta_1 \\ 0, & \theta_0 < \text{mín}\, X_i \leq \theta_1. \end{cases}$$

$*$ Test óptimo a nivel de significación $\alpha \geq \dfrac{\theta_0^n}{\theta_1^n}$:

$$\varphi_{\frac{\theta_0^n}{\theta_1^n}}(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \text{mín}\, X_i > \theta_1 \\ 0, & \theta_0 < \text{mín}\, X_i \leq \theta_1. \end{cases}$$

Problema 8

Sea X una observación de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

Construir el test de razón de verosimilitudes de tamaño α arbitrario para contrastar

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0.$$

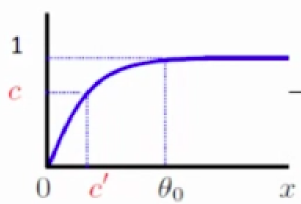
$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 = (0, \theta_0], \quad \chi = \mathbb{R}^+$$

$$T.R.V : \varphi(X) = \begin{cases} 1, & \lambda(X) < c, \quad 0 < c \le 1 \\ 0, & \lambda(X) \ge c, \end{cases} \longrightarrow \lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta=\theta_0} L_x(\theta)}{\sup\limits_{\theta\le\theta_0} L_x(\theta)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Función de verosimilitud asociada a $x \in \mathbb{R}^+$: $L_x(\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}, \quad \theta \le \theta_0.$

$$\ln L_x(\theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta} \longrightarrow \frac{\partial \ln L_x(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2} = 0 \Rightarrow \widehat{\theta}(x) = x \rightarrow \text{Máximo.}$$

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta=\theta_0} L_x(\theta)}{\sup\limits_{\theta\le\theta_0} L_x(\theta)} = \frac{L_x(\theta_0)}{\sup\limits_{\theta\le\theta_0} L_x(\theta)} = \begin{cases} \dfrac{L_x(\theta_0)}{L_x(x)} = \dfrac{x}{\theta_0} e^{1-x/\theta_0}, & 0 < x \le \theta_0 \text{[4]} \\ 1, & x > \theta_0. \end{cases}$$



$$\longrightarrow T.R.V : \varphi(X) = \begin{cases} 1, & X < c' \quad (0 < c' \le \theta_0) \\ 0, & X \ge c' \end{cases}$$

Tamaño: $\sup\limits_{\theta=\theta_0} E_\theta[\varphi(X)] = E_{\theta_0}[\varphi(X)]$

$$\alpha = P_{\theta_0}(X < c') = \int_0^{c'} \frac{1}{\theta_0} e^{-x/\theta_0} dx = 1 - e^{-c'/\theta_0}.$$

$*$ Para conseguir el test de tamaño α hay que tomar $c' = -\theta_0 \ln(1-\alpha)$.

$*$ $c' = -\theta_0 \ln(1-\alpha) \in (0, \theta_0] \Rightarrow 0 < \alpha \le 1 - e^{-1}$.

---

[4]

$$x < \theta_0 \rightarrow \ln\lambda(x) = -\ln\theta_0 + \ln x + 1 - \frac{x}{\theta_0} \rightarrow \frac{\partial \ln\lambda(x)}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\theta_0} > 0.$$

TRV de tamaño α $(\leq 1-e^{-1})$ $\rightarrow$ $\varphi(X) = \begin{cases} 1, & X < -\theta_0 \ln(1-\alpha) \\ 0, & X \geq -\theta_0 \ln(1-\alpha). \end{cases}$

Problema 9

En base a una observación de $X \rightarrow \{B(n,p);\ p \in (0,1)\}$, *deducir el test de razón de verosimilitudes para contrastar la hipótesis de que el parámetro* p *no supera un determinado valor,* p_0.

$$p \in (0,1), \qquad \begin{array}{l} H_0 : p \leq p_0 \\ H_1 : p > p_0, \end{array} \qquad \chi = \{0,1,\dots,n\}$$

$$T.R.V:\ \varphi(X) = \begin{cases} 1, & \lambda(X) < c, \quad 0 < c \leq 1 \\ 0, & \lambda(X) \geq c, \end{cases} \longrightarrow \lambda(x) = \frac{\sup\limits_{p \leq p_0} L_x(p)}{\sup\limits_{p \in (0,1)} L_x(p)}, \quad \forall x \in \chi.$$

Función de verosimilitud asociada a $x \in \{0,1,\dots,n\}$:

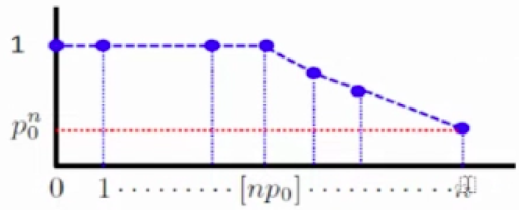
$$L_x(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad p \in (0,1)$$

$$\downarrow$$

Se maximiza en x/n *(R4-P6)*

$$\lambda(x)=\frac{\sup\limits_{p\leq p_0} L_x(p)}{\sup\limits_{p\in(0,1)} L_x(p)}=\frac{\sup\limits_{p\leq p_0} L_x(p)}{L_x\left(\frac{x}{n}\right)}=\begin{cases}\dfrac{L_x\left(\frac{x}{n}\right)}{L_x\left(\frac{x}{n}\right)}=1, & \dfrac{x}{n}\leq p_0\\[2ex] \dfrac{L_x(p_0)}{L_x\left(\frac{x}{n}\right)}=\dfrac{p_0^x(1-p_0)^{n-x}}{\left(\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}, & \dfrac{x}{n}>p_0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1, & x=0,\dots,[np_0]\\[1ex] \dfrac{p_0^x(1-p_0)^{n-x}}{\left(\frac{x}{n}\right)^n\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-x}}, & x=[np_0]+1,\dots,n.\end{cases}$$



$$\varphi(X)=\begin{cases}1, & X>c' \quad ([np_0]\leq c'\leq n)\\ 0, & X\leq c'.\end{cases}$$

Tamaño:

$$\alpha=\sup_{p\leq p_0}\beta_\varphi(p)=\sup_{p\leq p_0}E_p\left[\varphi(X)\right]=\sup_{p\leq p_0}P_p\left(X>c'\right)\overset{5}{=}P_{p_0}\left(X>c'\right).$$

---

5 $f(p)=P_p(X>c)=\sum\limits_{x=c+1}^{n}\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$

$$\frac{df(p)}{dp}=\sum_{x=c+1}^{n}\binom{n}{x}\left[xp^{x-1}(1-p)^{n-x}-(n-x)p^x(1-p)^{n-x-1}\right]$$

$$=\sum_{x=c+1}^{n}\binom{n}{x}xp^{x-1}(1-p)^{n-x}-\sum_{x=c+1}^{n-1}\binom{n}{x}(n-x)p^x(1-p)^{n-x-1}$$

$$=n\sum_{x=c+1}^{n}\binom{n-1}{x-1}p^{x-1}(1-p)^{n-x}-n\sum_{x=c+1}^{n-1}\binom{n-1}{x}p^x(1-p)^{n-x-1}$$

$$=nP(Y\geq c)-nP(Y\geq c+1)>0\ \Rightarrow\ f(p)\ \textit{creciente}.\quad Y\to B(n-1,p)$$

Problema 10

Sea X una variable con función de densidad

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

Basándose en una observación de X, deducir el test de razón de verosimilitudes de tamaño arbitrario para contrastar

$$H_0 : \theta \leq \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0.$$

$$\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 = \mathbb{R}^+, \quad \chi = (0,1)$$

$$T.R.V : \varphi(X) = \begin{cases} 1, & \lambda(X) < c, \quad 0 < c \leq 1 \\ 0, & \lambda(X) \geq c, \end{cases} \longrightarrow \lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \leq \theta_0} L_x(\theta)}{\sup\limits_{\theta > 0} L_x(\theta)}, \quad x \in (0,1).$$

Función de verosimilitud asociada a $x \in (0,1)$: $L_x(\theta) = \theta x^{\theta-1}, \quad \theta \in \mathbb{R}^+$.

$$\ln L_x(\theta) = \ln\theta + (\theta - 1)\ln x \longrightarrow \frac{\partial \ln L_x(\theta)}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta} + \ln x = 0 \Rightarrow \widehat{\theta}(x) = -\frac{1}{\ln x} \in \mathbb{R}^+.$$

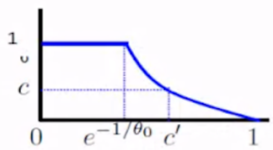
$$\widehat{\theta}(x) = -\frac{1}{\ln x} \text{ Máximo.}$$

Relación 7. Contraste de hipótesis A. Hermoso Carazo
Problema 10

$$\lambda(x) = \frac{\sup\limits_{\theta \leq \theta_0} L_x(\theta)}{\sup\limits_{\theta \in \mathbb{R}^+} L_x(\theta)} = \frac{\sup\limits_{\theta \leq \theta_0} L_x(\theta)}{L_x(\widehat{\theta}(x))} = \begin{cases} \dfrac{L_x(\widehat{\theta}(x))}{L_x(\widehat{\theta}(x))}, & \widehat{\theta}(x) \leq \theta_0 \\[2ex] \dfrac{L_x(\theta_0)}{L_x(\widehat{\theta}(x))}, & \widehat{\theta}(x) > \theta_0. \end{cases}$$

$$\downarrow \widehat{\theta}(x) = -\frac{1}{\ln x}$$

$$= \begin{cases} 1, & 0 < x \leq e^{-1/\theta_0} \\ \theta_0(-\ln x) x^{\theta_0 + 1/\ln x}, & e^{-1/\theta_0} < x < 1. \end{cases}$$



6

$\boxed{e^{-1/\theta_0} < x < 1} \rightarrow \ln\lambda(x) = \ln\theta_0 + \ln(-\ln x) + (\theta_0 + \frac{1}{\ln x})\ln x$

$$\frac{\partial \ln\lambda(x)}{\partial x} = \frac{1}{x\ln x} + \frac{\theta_0}{x} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\ln x} + \theta_0\right) < 0 \rightarrow \lambda \text{ decrece.}$$

* $\lambda(e^{-1/\theta_0}) = 1.$
* $\lim\limits_{x\to 1} \ln\lambda(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \lambda(x) = 0.$

$$T.R.V. \quad \varphi(X) = \begin{cases} 1, & X > c' \quad (e^{-1/\theta_0} \leq c' < 1) \\ 0, & X \leq c'. \end{cases}$$

Tamaño:

$$\alpha = \sup_{\theta \leq \theta_0} \beta_\varphi(\theta) = \sup_{\theta \leq \theta_0} E_\theta\left[\varphi(X)\right] = \sup_{\theta \leq \theta_0} P_\theta\left(X > c'\right) = \sup_{\theta \leq \theta_0} \int_{c'}^{1} \theta x^{\theta-1} dx$$
$$= \sup_{\theta \leq \theta_0} \left(1 - c'^{\theta}\right) = 1 - c'^{\theta_0}.$$

- ∗ Para conseguir el test de tamaño α hay que tomar $c' = (1-\alpha)^{1/\theta_0}$.
- ∗ $c' = (1-\alpha)^{1/\theta_0} \in [e^{-1/\theta_0}, 1) \Rightarrow 0 < \alpha \leq 1 - e^{-1}$.

TRV de tamaño $\alpha \leq 1 - e^{-1} \rightarrow \varphi(X) = \begin{cases} 1, & X > (1-\alpha)^{1/\theta_0} \\ 0, & X \leq (1-\alpha)^{1/\theta_0}. \end{cases}$

7.4. Contrastes sobre los parámetros de una normal

En esta sección desarrollamos los tests de razón de verosimilitudes para resolver problemas de contraste sobre la media y la varianza de una variable con distribución normal. Concretamente, los problemas que vamos a resolver son:

$$\begin{array}{lll} H_0 : \mu = \mu_0 & H_0 : \mu \leq \mu_0 & H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 & H_1 : \mu > \mu_0 & H_1 : \mu < \mu_0. \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 & H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 & H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 & H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 & H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2. \end{array}$$

Como es natural, en los contrastes sobre cada parámetro, analizaremos los casos en que el otro parámetro es conocido o no.

Observaremos que, como en los intervalos de confianza, los tests se basan en el UMVUE correspondiente a cada parámetro y, por tanto, son función del estadístico suficiente y completo en cada situación.

Contrastes sobre la media con varianza conocida

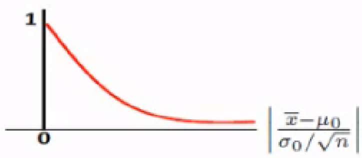
$$(X_1, \dots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2);\ \mu \in \mathbb{R}\}$$

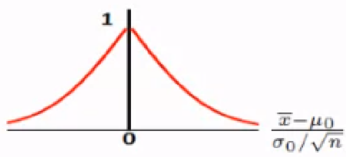
F. de verosimilitud: $L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = \dfrac{1}{(\sigma_0^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$

- $\sup_{\mu\in\mathbb{R}} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x}).$
- $\sup_{\mu\leq\mu_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = \begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x}), & \overline{x} \leq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq 0 \right) \\ L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0), & \overline{x} \geq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq 0 \right). \end{cases}$
- $\sup_{\mu\geq\mu_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu) = \begin{cases} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0), & \overline{x} \leq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq 0 \right) \\ L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x}), & \overline{x} \geq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq 0 \right). \end{cases}$

En estos tests, el estadístico de contraste va a depender de la función:

$$\frac{L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x})} = \exp\left\{ -\frac{(\overline{x}-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2/n} \right\}.$$





Por tanto, los tests serán función del siguiente estadístico:

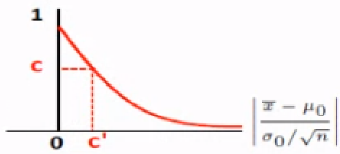
$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \underset{\mu=\mu_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_1 : \mu \neq \mu_0 \end{array}} \quad \sigma^2 = \sigma_0^2 \longrightarrow \lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu=\mu_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu)}{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R}} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu)}.$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x})}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$\lambda(x_1, \dots, x_n) < c$



$$TRV: \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > c' \quad (c' \geq 0) \\ 0, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \leq c'. \end{cases}$$

Tamaño: $\alpha = P_{\mu_0}\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > c'\right); \quad \dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \underset{\mu=\mu_0}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1).$

Por tanto, para conseguir el test de un tamaño específico, α, tenemos que tomar $c' = z_{\alpha/2}$. Este valor satisface la restricción de no negatividad, $z_{\alpha/2} \geq 0,\ \forall\alpha \in [0,1]$. Por tanto:

TRV de tamaño $\alpha \in [0,1]$:

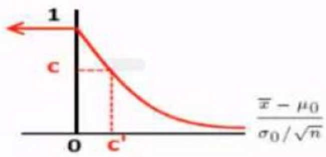
$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| > z_{\alpha/2} \\ 0, & \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right| \leq z_{\alpha/2}. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu > \mu_0 \end{array}}\ \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \longrightarrow\ \lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu\leq\mu_0} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu)}{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R}} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu)}.$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq 0 \\ \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x})}, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases} \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$\lambda(x_1,\ldots,x_n) < c$



$$TRV: \quad \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > c' \quad (c' \geq 0) \\ 0, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq c'. \end{cases}$$

Tamaño: $\alpha = \sup\limits_{\mu\leq\mu_0} P_\mu\left(\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > c'\right) = \sup\limits_{\mu\leq\mu_0} P_\mu(\overline{X} > \mu_0 + c'\sigma_0/\sqrt{n})$

$$= \sup_{\mu\leq\mu_0} P_\mu\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) \quad [Z \to \mathcal{N}(0,1)]$$

$$= \sup_{\mu\leq\mu_0} P\left(Z > \frac{\mu_0-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) = P(Z > c').$$

Para conseguir el test de un tamaño específico, α, tenemos que tomar $c' = z_\alpha$. Para que ese valor satisfaga la restricción $c' \geq 0$, ha de ser $\alpha \leq 1/2$. Por tanto:

TRV de tamaño $\alpha \leq 1/2$:

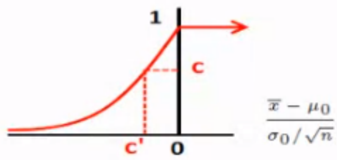
$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > z_\alpha \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq z_\alpha. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}} \ \sigma^2 = \sigma_0^2 \ \longrightarrow \ \lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu \geq \mu_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu)}{\sup\limits_{\mu \in \mathbb{R}} L_{x_1,\dots,x_n}(\mu)}.$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \dfrac{L_{x_1,\dots,x_n}(\mu_0)}{L_{x_1,\dots,x_n}(\overline{x})}, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \leq 0 \\ 1, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases} \qquad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$\lambda(x_1, \dots, x_n) < c$



$$TRV: \quad \varphi(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < c' \quad (c' \leq 0) \\ 0, & \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq c'. \end{cases}$$

Tamaño: $\alpha = \sup\limits_{\mu \geq \mu_0} P_\mu\left(\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < c'\right) = \sup\limits_{\mu \geq \mu_0} P_\mu\left(\overline{X} < \mu_0 + c'\sigma_0/\sqrt{n}\right)$

$$= \sup_{\mu \geq \mu_0} P_\mu\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) \quad [Z \to \mathcal{N}(0,1)]$$

$$= \sup_{\mu \geq \mu_0} P\left(Z < \frac{\mu_0 - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} + c'\right) = P(Z < c')$$

Ahora, para obtener el test de un tamaño específico, α, tenemos que tomar $c' = z_{1-\alpha}$. Para que ese valor satisfaga la restricción $c' \leq 0$, ha de ser $\alpha \leq 1/2$. Por tanto:

TRV de tamaño $\alpha \leq 1/2$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha} \\ \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \geq z_{1-\alpha}. \end{cases}$$

Contrastes sobre la media con varianza desconocida

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R};\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$$

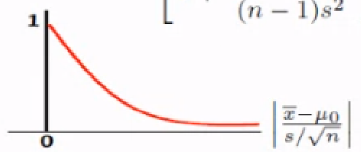
F.V: $L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2) = \dfrac{1}{(\sigma^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+.$

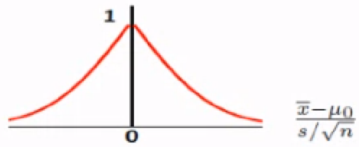
- $\sup\limits_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2) = L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2), \quad \widehat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}.$
- $\sup\limits_{\mu = \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2) = L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2), \quad \widehat{\sigma}_0^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{n}.$
- $\sup\limits_{\mu \leq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2), & \overline{x} \leq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq 0\right) \\ \\ L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2), & \overline{x} \geq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq 0\right). \end{cases}$
- $\sup\limits_{\mu \geq \mu_0, \sigma^2 \in \mathbb{R}+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu, \sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0, \widehat{\sigma}_0^2), & \overline{x} \leq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq 0\right) \\ \\ L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x}, \widehat{\sigma}^2), & \overline{x} \geq \mu_0 \left(\Leftrightarrow \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq 0\right). \end{cases}$

El estadístico de contraste en estos tests va a depender de la función:

$$\frac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2)} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}\right]^{n/2} = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2+n(\overline{x}-\mu_0)^2}\right]^{n/2}$$

$$= \left[\frac{1}{1+\dfrac{n(\overline{x}-\mu_0)^2}{(n-1)s^2}}\right]^{n/2}.$$





Por tanto, los tests ahora serán función del estadístico:

$$\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} \underset{\mu=\mu_0}{\longrightarrow} t(n-1).$$

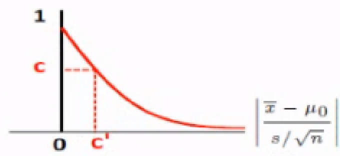
Nota: Los cocientes de verosimilitudes tienen una representación similar a los del caso con varianza conocida, y la distribución del estadístico, $t(n-1)$, es también similar a la $\mathcal{N}(0,1)$.

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0:\mu=\mu_0 \\ H_1:\mu\neq\mu_0 \end{array}}\ \sigma^2\in\mathbb{R}^+ \ \longrightarrow\ \lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu=\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2)}{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2)}.$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2)},\quad \forall(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) < c$$



$$TRV:\quad \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| > c' \quad (c'\geq 0) \\[2ex] 0, & \left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right| \leq c'. \end{cases}$$

Tamaño: $\alpha = \sup\limits_{\sigma^2\in\mathbb{R}^+} P_{\mu_0,\sigma^2}\left(\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > c'\right) = P\left(|T|>c'\right);\quad T\to t(n-1).$

Para conseguir el test de un tamaño específico, α, tenemos que tomar $c' = t_{n-1;\alpha/2}$, que satisface la restricción $t_{n-1;\alpha/2} \geq 0,\ \forall \alpha \in [0,1]$. Por tanto:

TRV de tamaño $\alpha \in [0,1]$:

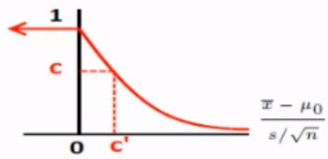
$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{n-1;\alpha/2} \\ 0, & \left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \leq t_{n-1;\alpha/2} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \mu \leq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{array}}\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup\limits_{\mu\leq\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2)}{\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2)}.$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq 0 \\ \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu_0,\widehat{\sigma}_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2)}, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \geq 0 \end{cases} \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$\lambda(x_1,\ldots,x_n) < c$



$$TRV: \quad \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} > c' \quad (c' \geq 0) \\ 0, & \dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \leq c'. \end{cases}$$

Tamaño:

$$\alpha = \sup_{\mu\leq\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}} > c'\right) = \sup_{\mu\leq\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}(\overline{X} > \mu_0 + c'S/\sqrt{n})$$

$$= \sup_{\mu\leq\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} > \frac{\mu_0-\mu}{S/\sqrt{n}} + c'\right) \quad [T \rightarrow t(n-1)]$$

$$= \sup_{\mu\leq\mu_0,\sigma^2\in\mathbb{R}^+} P_{\mu,\sigma^2}\left(T > \frac{\mu_0-\mu}{S/\sqrt{n}} + c'\right) = P(T > c').$$

Para obtener el test de tamaño α, tenemos que tomar $c' = t_{n-1;\alpha}$. Para que ese valor satisfaga la restricción $c' \geq 0$, ha de ser $\alpha \leq 1/2$. Por tanto:

TRV de tamaño $\alpha \leq 1/2$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\alpha} \\ \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1;\alpha}. \end{cases}$$

Para obtener el test de tamaño α, tenemos que tomar $c' = t_{n-1;1-\alpha}$. Para que ese valor satisfaga la restricción $c' \leq 0$, ha de ser $\alpha \leq 1/2$. Por tanto:

TRV de tamaño $\alpha \leq 1/2$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;1-\alpha} \\ \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \geq t_{n-1;1-\alpha}. \end{cases}$$

TESTS E INTERVALOS PARA LA MEDIA EN POBLACIONES NORMALES

Contraste	Región de rechazo $\sigma^2 = \sigma_0^2$ conocida	Región de rechazo σ^2 desconocida
$H_0 : \mu = \mu_0$ $H_1 : \mu \neq \mu_0$	$\left\lvert \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} \right\rvert > z_{\alpha/2}$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$	$\left\lvert \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \right\rvert > t_{n-1;\ \alpha/2}$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \right)$
$H_0 : \mu \leq \mu_0$ $H_1 : \mu > \mu_0$	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > z_\alpha$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ +\infty \right)$	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;\ \alpha}$ $\mu_0 \notin \left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha}\frac{S}{\sqrt{n}},\ +\infty \right)$
$H_0 : \mu \geq \mu_0$ $H_1 : \mu < \mu_0$	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha}$ $\mu_0 \notin \left(-\infty,\ \overline{X} + z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \right)$	$\frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;\ 1-\alpha}$ $\mu_0 \notin \left(-\infty,\ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha}\frac{S}{\sqrt{n}} \right)$

Contrastes sobre la varianza con media conocida

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2);\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$$

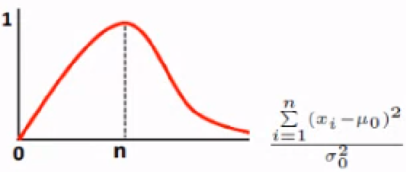
F. Verosimilitud: $L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2) = \dfrac{1}{(\sigma^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 \in \mathbb{R}^+.$

- $\displaystyle\sup_{\sigma^2 \in \mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2) = L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2), \qquad \widehat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_0)^2}{n}.$
- $\displaystyle\sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \leq \sigma_0^2 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \right) \\ L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \geq \sigma_0^2 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \right). \end{cases}$
- $\displaystyle\sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \leq \sigma_0^2 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \right) \\ L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2), & \widehat{\sigma}_0^2 \geq \sigma_0^2 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \right). \end{cases}$

En estos tests, el estadístico de contraste va a depender de la función:

$$\frac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)} = \left(\frac{\widehat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{-n\widehat{\sigma}_0^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\}$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\}.$$



Por tanto, los tests serán función del siguiente estadístico:

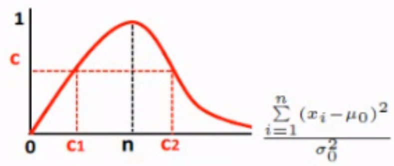
$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \underset{\sigma^2=\sigma_0^2}{\longrightarrow} \chi^2(n).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{array}} \quad \mu = \mu_0 \longrightarrow \lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup_{\sigma^2=\sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2)}{\sup_{\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2)}$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)}, \quad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) < c$$



$$TRV: \quad \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c_1 \text{ ó } \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c_2 \\ 0, & c_1 \leq \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq c_2, \end{cases}$$

con $c_1 \leq n$, $c_2 \geq n$, $(c_1/n)^{n/2}e^{-c_1/2+n/2} = (c_2/n)^{n/2}e^{-c_2/2+n/2}$.

Tamaño:

$$\alpha = P_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c_1\right) + P_{\sigma_0^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c_2\right); \quad \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \underset{\sigma^2=\sigma_0^2}{\longrightarrow} \chi^2(n).$$

Para conseguir el test de un tamaño específico, α, hay que encontrar c_1 y c_2 satisfaciendo todas las ecuaciones anteriores, lo que, en la práctica, no es simple. Por tanto, normalmente se trabaja con el test de colas iguales, que no se diferencia sustancialmente:

$$c_1 = \chi^2_{n;1-\alpha/2}; \quad c_2 = \chi^2_{n;\alpha/2}.$$

Para todo $\alpha \in [0,1]$, $\chi^2_{n;1-\alpha/2} \leq \chi^2_{n;\alpha/2}$, y se verifica también la condición del tamaño. Así, resulta el siguiente test aproximado:

TRV (≈) de tamaño $\alpha \in [0,1]$:

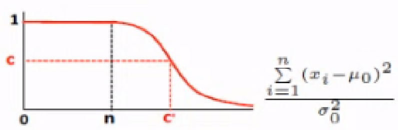
$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;1-\alpha/2} \ \text{ó} \ \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n;\alpha/2} \\ 0, & \chi^2_{n;1-\alpha/2} \leq \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n;\alpha/2}. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{array}} \quad \mu = \mu_0 \longrightarrow \lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup\limits_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2)}{\sup\limits_{\sigma^2 \in \mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2)}$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \\ \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)}, & \dfrac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \end{cases} \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$\lambda(x_1,\ldots,x_n) < c$



$$\text{TRV}: \quad \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c' \quad (c' \geq n) \\ 0, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq c'. \end{cases}$$

Tamaño:

$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > c' \right) = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2} > c' \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right)$$

$$= [Y \to \chi^2(n)] = \sup_{\sigma^2 \leq \sigma_0^2} P\left(Y > c' \frac{\sigma_0^2}{\sigma^2} \right) = P(Y > c').$$

Para obtener el test de tamaño específico α, hay que tomar $c' = \chi^2_{n;\alpha}$, y la restricción $\chi^2_{n;\alpha} \geq n$ obliga a $\alpha = P\left(Y > \chi^2_{n;\,\alpha}\right) \leq P\left(Y > n\right)$.

TRV de tamaño $\alpha \leq P\left(Y > n\right),\ Y \to \chi^2(n)$:

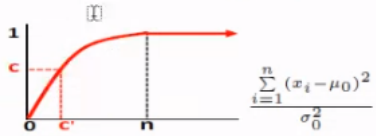
$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n;\alpha} \\ \\ 0, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n;\alpha} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}} \quad \mu = \mu_0 \ \to \ \lambda(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\sup\limits_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2)}{\sup\limits_{\sigma^2 \in \mathbb{R}+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma^2)}$$

$$\lambda(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\sigma_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\widehat{\sigma}_0^2)}, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \leq n \\ 1, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq n \end{cases} \qquad \forall (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Región de rechazo del TRV:

$\lambda(x_1,\ldots,x_n) < c$



$$\textit{TRV}: \ \varphi(x_1,\ldots,x_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c' \quad (c' \leq n) \\ \\ 0, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^n (x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq c'. \end{cases}$$

Tamaño:

$$\alpha = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < c'\right) = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\mu_0)^2}{\sigma^2} < c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right)$$

$$= [Y \to \chi^2(n)] = \sup_{\sigma^2 \geq \sigma_0^2} P\left(Y < c'\frac{\sigma_0^2}{\sigma^2}\right) = P(Y < c').$$

Para obtener el test de tamaño específico α, hay que tomar $c' = \chi^2_{n;1-\alpha}$, y la restricción $\chi^2_{n;1-\alpha} \leq n$ obliga a $\alpha = P\left(Y < \chi^2_{n;1-\alpha}\right) \leq P\left(Y < n\right)$.

TRV de tamaño $\alpha \leq P\left(Y < n\right),\ Y \to \chi^2(n)$:

$$\varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;1-\alpha} \\ 0, & \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n;1-\alpha}. \end{cases}$$

Contrastes sobre la varianza con media desconocida

$$(X_1,\ldots,X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2);\quad \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2\in\mathbb{R}^+\}$$

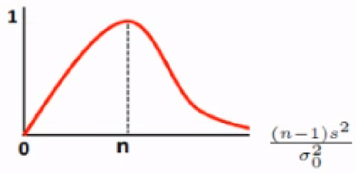
F.V: $L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2) = \dfrac{1}{(\sigma^2)^{n/2}(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad \mu\in\mathbb{R},\ \sigma^2\in\mathbb{R}^+.$

- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\in\mathbb{R}^+} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2) = L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2),\quad \widehat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n} = \dfrac{(n-1)s^2}{n}.$
- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2=\sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2) = L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2).$
- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\leq\sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2), & \widehat{\sigma}^2\leq\sigma_0^2 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq n\right) \\ L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}^2\geq\sigma_0^2 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq n\right). \end{cases}$
- $\sup\limits_{\mu\in\mathbb{R},\sigma^2\geq\sigma_0^2} L_{x_1,\ldots,x_n}(\mu,\sigma^2) = \begin{cases} L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2), & \widehat{\sigma}^2\leq\sigma_0^2 \quad \left(\Leftrightarrow \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq n\right) \\ L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}_0^2), & \widehat{\sigma}^2\geq\sigma_0^2 \end{cases}$

En estos tests, el estadístico de contraste va a depender de la función:

$$\frac{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\sigma_0^2)}{L_{x_1,\ldots,x_n}(\overline{x},\widehat{\sigma}^2)} = \left(\frac{\widehat{\sigma}^2}{\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{\frac{-n\widehat{\sigma}^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\}$$
$$= \left(\frac{(n-1)s^2}{n\sigma_0^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2}{2\sigma_0^2} + \frac{n}{2}\right\}.$$

Es la misma función que aparecía en el caso de media conocida, cambiando $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}$ por $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$:



Por tanto, los tests son totalmente similares a los del caso anterior, cambiando el estadístico y la distribución por:

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \underset{\sigma^2=\sigma_0^2}{\longrightarrow} \chi^2(n-1).$$

$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{array}}$ *TRV ($\approx$) de tamaño* $\alpha \in [0, 1]$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \ \text{ó} \ > \chi^2_{n-1;\alpha/2} \\ 0, & \chi^2_{n-1;1-\alpha/2} \leq \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1;\alpha/2}. \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{array}}$ *TRV de tamaño* $\alpha \leq P(Y > n)$, $\ Y \to \chi^2(n-1)$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\alpha} \\ 0, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi^2_{n-1;\alpha} \end{cases}$$

$\boxed{\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \\ H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{array}}$ *TRV de tamaño* $\alpha \leq P(Y < n)$, $\ Y \to \chi^2(n-1)$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;1-\alpha} \\ 0, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{n-1;1-\alpha}. \end{cases}$$

TESTS E INTERVALOS PARA LA VARIANZA EN POBLACIONES NORMALES

Contraste	Región de rechazo $\mu = \mu_0$ conocida	Región de rechazo μ desconocida
$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}$ ó $> \chi^2_{n;\ \alpha/2}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha/2}}, \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}} \right)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}$ ó $> \chi^2_{n-1;\ \alpha/2}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}}, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}} \right)$
$H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n;\ \alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha}}, +\infty \right)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\ \alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha}}, +\infty \right)$
$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$ $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n;\ 1-\alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(0, \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha}} \right)$	$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\ 1-\alpha}$ $\sigma_0^2 \notin \left(0, \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha}} \right)$

7.5. Contrastes sobre los parámetros de dos normales

A menudo se presenta el problema de comparar dos poblaciones normales, para lo que deben compararse sus medias y sus varianzas. De forma similar a como se han obtenido los tests de razón de verosimilitudes en una población normal unidimensional, se pueden obtener tests para comparar los parámetros de dos poblaciones, basándose en los resultados correspondientes del Tema 2.

Para ello, se considera una muestra aleatoria simple de cada población, ambas independientes, y se parte de la función de verosimilitud asociada a cada par de realizaciones muestrales:

- $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ *m.a.s. de* $X \to \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$.
- $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ *m.a.s. de* $X \to \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ *y* $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ *independientes.*

$$L_{x_1,\ldots,x_{n_1},y_1,\ldots,y_{n_2}}(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2) = L_{x_1,\ldots,x_{n_1}}(\mu_1,\sigma_1^2)\ L_{y_1,\ldots,y_{n_2}}(\mu_2,\sigma_2^2).$$

Contraste	Región de rechazo, σ_2^2, σ_2^2 conocidas	Región de rechazo, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocida
$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$	$\dfrac{\lvert\overline{X}-\overline{Y}\rvert}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\alpha/2}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$	$\dfrac{\lvert\overline{X}-\overline{Y}\rvert}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} \mp t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right)$
$H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ $H_1 : \mu_1 > \mu_2$	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} > z_{\alpha}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ +\infty\right)$	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}$ $0 \notin \left(\overline{X}-\overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ +\infty\right)$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

Nota: Para aplicar los tests e intervalos con varianzas desconocidas *hay que contrastar previamente su igualdad* mediante el test correspondiente.

Contraste	Región de rechazo, μ_1, μ_2 conocidas
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2} < F_{n_1,n_2;\,1-\alpha/2}$ ó $> F_{n_1,n_2;\,\alpha/2}$ $1 \notin \left(F_{n_2,n_1;\,1-\alpha/2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ F_{n_2,n_1;\,\alpha/2}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2} \right)$
$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2} > F_{n_1,n_2;\,\alpha}$ $1 \notin \left(F_{n_2,n_1;\,1-\alpha}\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ +\infty \right)$

Contraste	Región de rechazo, μ_1, μ_2 desconocidas
$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1;\ 1-\alpha/2}$ ó $> F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}$ $1 \notin \left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2},\ \ F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2} \right)$
$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$ $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$\frac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha}$ $1 \notin \left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha} \frac{S_1^2}{S_2^2},\ \ +\infty \right)$

7.6. Dualidad entre estimación por intervalos y contraste de hipótesis

Aunque responden a distintos planteamientos, los problemas de contraste de hipótesis y de estimación por regiones de confianza están íntimamente relacionados en el sentido de que toda región de confianza al nivel $1-\alpha$ determina la región de aceptación de un test con nivel de significación α para contrastar cualquier hipótesis simple, y recíprocamente.

Teorema de dualidad

Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ *y* $(X_1, \ldots, X_n)$ *una muestra aleatoria simple de* X. *Para cada* $\theta_0 \in \Theta$ *consideramos un conjunto* $A(\theta_0) \subseteq \chi^n$ *y, para cada realización muestral,* $(x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$, *definimos:*

$$\varphi_{\theta_0}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & (x_1, \ldots, x_n) \notin A(\theta_0) \\ 0, & (x_1, \ldots, x_n) \in A(\theta_0) \end{cases}$$

$$S(x_1, \ldots, x_n) = \big\{\theta \in \Theta \ / \ (x_1, \ldots, x_n) \in A(\theta)\big\} \subseteq \Theta.$$

Cada test $\varphi_{\theta_0}(X_1, \ldots, X_n)$ *aplicado al contraste de* $H_0 : \theta = \theta_0$ *frente a* $H_1 : \theta \neq \theta_0$ *tiene nivel de significación* α *si y sólo si* $S(X_1, \ldots, X_n)$ *es una región de confianza para* θ *al nivel de confianza* $1 - \alpha$.

Demostración: Fijado $\theta_0 \in \Theta$, de las definiciones de φ_{θ_0} y S se tiene:

$$\varphi_{\theta_0}(X_1, \ldots, X_n) = 1 \Leftrightarrow \theta_0 \notin S(X_1, \ldots, X_n)$$

y, por tanto:

$$E_{\theta_0}\left[\varphi_{\theta_0}(X_1, \ldots, X_n)\right] = P_{\theta_0}\big(\varphi_{\theta_0}(X_1, \ldots, X_n) = 1\big)$$
$$= 1 - P_{\theta_0}\big(S(X_1, \ldots, X_n) \ni \theta_0\big), \ \forall \theta_0 \in \Theta.$$

Así:

$$E_{\theta_0}\left[\varphi_{\theta_0}(X_1, \ldots, X_n)\right] \leq \alpha, \ \forall \theta_0 \in \Theta \ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \ P_{\theta_0}\big(S(X_1, \ldots, X_n) \ni \theta_0\big) \geq 1 - \alpha, \ \forall \theta_0 \in \Theta.$$

La primera condición significa que cada test $\varphi_{\theta_0}(X_1, \ldots, X_n)$ tiene nivel de significación α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$, mientras que la segunda significa que $S(X_1, \ldots, X_n)$ es una región de confianza para θ a nivel de confianza $1 - \alpha$. Por tanto, ambas afirmaciones son equivalentes. □

Esta dualidad proporciona otro método para construir tests para H_0 simple: calcular un intervalo de confianza para θ y aceptar $H_0 : \theta = \theta_0$ si θ_0 está en él. Si el intervalo tiene n.c. $1-\alpha$, estos tests tendrán n.s. α.

El intervalo adecuado depende de H_1, a la que no se hace referencia en el *teorema de dualidad*. Como norma general, se sigue el siguiente criterio:

- $H_0 : \theta = \theta_0$
  $H_1 : \theta > \theta_0$ ó $\theta < \theta_0$

  Se construye un intervalo bilateral, $\big(I_1(X_1,\dots,X_n),\ I_2(X_1,\dots,X_n)\big)$, y se rechaza H_0 si θ_0 queda fuera del intervalo:

$$\varphi(X_1,\dots,X_n) = \begin{cases} 1, & I_1(X_1,\dots,X_n) \geq \theta_0 \text{ ó } I_2(X_1,\dots,X_n) \leq \theta_0 \\ 0, & I_1(X_1,\dots,X_n) < \theta_0 < I_2(X_1,\dots,X_n). \end{cases}$$

- $H_0 : \theta = \theta_0$
  $H_1 : \theta > \theta_0$ $\longrightarrow$ $\Theta = [\theta_0, +\infty)$.

  Se calcula un intervalo de confianza unilateral acotado inferiormente, como Θ, $\big(I(X_1,\dots,X_n),\ +\infty\big)$ (cota inferior de confianza), y se rechaza H_0 si esta cota supera a θ_0:

$$\varphi(X_1,\dots,X_n) = \begin{cases} 1, & I(X_1,\dots,X_n) \geq \theta_0 \\ 0, & I(X_1,\dots,X_n) < \theta_0. \end{cases}$$

Tema 7. Contraste de hipótesis A. Hermoso Carazo
└7.6. Dualidad entre estimación por intervalos y contraste de hipótesis

- $H_0 : \theta = \theta_0$
  $H_1 : \theta < \theta_0$ $\longrightarrow$ $\Theta = (-\infty, \theta_0]$.

  Se calcula un intervalo de confianza acotado superiormente, como Θ, $\big(-\infty,\ I(X_1,\dots,X_n)\big)$ (cota superior de confianza), y se rechaza H_0 si no contiene a θ_0:

$$\varphi(X_1,\dots,X_n) = \begin{cases} 1, & I(X_1,\dots,X_n) \leq \theta_0 \\ 0, & I(X_1,\dots,X_n) > \theta_0. \end{cases}$$

Nota: La dualidad se extiende al caso de hipótesis nulas compuestas, como se ha visto en los contrastes de la forma $H_0 : \theta \leq \theta_0$ ó $H_0 : \theta \geq \theta_0$ para los parámetros de poblaciones normales.

Ejemplo 7.6.1: *Consideremos dos poblaciones normales con parámetros desconocidos. Usando la dualidad, construir un test de nivel de significación α para contrastar:*

$$H_0 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 = \delta$$
$$H_1 : \sigma_1^2/\sigma_2^2 \neq \delta.$$

Comprobar el tamaño del test.

Partimos del intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 (con medias desconocidas) al nivel $1-\alpha$:

$$I \equiv \left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2},\ \ F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2} \right),$$

y construimos el test dual, que rechaza H_0 si $\delta \notin I$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2} < \delta \ \text{ ó } \ F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2} > \delta \\ \\ 0, & F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2} < \delta < F_{n_2-1,n_2-1;\ \alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2}. \end{cases}$$

Nótese que, si $\delta = 1$, éste es el TRV de tamaño α presentado anteriormente. [6]

---

[6]

$$\frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2}} = F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}; \quad \frac{1}{F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2}} = F_{n_1-1,n_2-1;\ 1-\alpha/2}.$$

$$\varphi(X_1,\ldots,X_n)=\begin{cases}1, & \frac{S_1^2}{S_2^2}<\delta F_{n_1-1,n_2-1;\ 1-\alpha/2} \text{ ó } \frac{S_1^2}{S_2^2}>\delta F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}\\ 0, & \delta F_{n_1-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}<\delta F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}.\end{cases}$$

Comprobemos el tamaño:

$$\sup_{H_0} E_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}[\varphi(X_1,\ldots,X_n)]$$

$$=\sup_{\mu_1,\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\delta}\left[1-P_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\delta F_{n_1-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}<\delta F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}\right)\right]$$

$$=\sup_{\mu_1,\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\delta}\left[1-P_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(F_{n_1-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{\delta}<F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}\right)\right]$$

$$=\sup_{\mu_1,\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}=\delta}\left[1-P_{\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(F_{n_1-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2}<\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}<F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}\right)\right]$$

$$\left[\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}=\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2\sigma_2^2}\to F(n_1-1,n_2-1)\right]=1-(1-\alpha)=\alpha.$$

Ejemplo 7.6.2: *Consideremos dos poblaciones normales con la misma varianza. Usando la dualidad, construir un test de nivel de significación α para contrastar:*

$$H_0:\mu_1-\mu_2=\delta$$
$$H_1:\mu_1-\mu_2>\delta$$

A la vista del espacio paramétrico, $\mu_1-\mu_2\in[\delta,+\infty)$, partimos del siguiente intervalo de confianza confianza unilateral para $\mu_1-\mu_2$, a nivel $1-\alpha$:

$$I\equiv\left(\overline{X}-\overline{Y}-t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ +\infty\right).$$

Así, el test dual, que rechaza H_0 si $\delta\notin I$, es:

$$\varphi(X_1,\ldots,X_n)=\begin{cases}1, & \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}>t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}\\[2ex] 0, & \dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-\delta}{\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}.\end{cases}$$

Problema 11

Un fabricante de coches asegura que la distancia media recorrida con un galón de gasolina es al menos 30 millas. Probados 9 coches de esta fábrica, la distancia media recorrida con un galón de gasolina ha sido 26 millas, y la suma de los cuadrados 6106 millas al cuadrado.

a) *Suponiendo que la distancia recorrida por estos coches con un galón de gasolina tiene distribución normal, contrastar la hipótesis del fabricante a partir de estos datos, a nivel de significación 0.01.*

b) *¿Qué conclusión se obtendría de estos mismos datos, al mismo nivel de significación, si se sabe que la desviación típica de la variable considerada es 5.5?*

a) X : *Millas recorridas por un coche con un galón de gasolina* $\longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 30 \\ H_1 : \mu < 30 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \sigma^2 \ \textit{desconocida.}$$

TRV de tamaño $\alpha \leq 1/2 \longrightarrow \varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} < t_{n-1;1-\alpha} \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_{n-1;1-\alpha}. \end{cases}$

$\downarrow \ \mu_0 = 30, \ n = 9, \ \alpha = 0.01 \to t_{n-1;1-\alpha} = t_{8;0.99} = -t_{8;0.01} = -2.8965.$

$$\varphi(X_1, \dots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - 30}{S/3} < -2.8965 \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - 30}{S/3} > -2.8965. \end{cases}$$

$$\overline{x} = 26, \ \sum_{i=1}^{9} x_i^2 = 6106 \Rightarrow s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{9}(x_i - \overline{x})^2}{8} = \frac{\sum_{i=1}^{9} x_i^2 - 9\overline{x}^2}{8} = 2.75 \Rightarrow \frac{\overline{x} - 30}{s/3} = -7.2363.$$

$$\Downarrow$$

Ya que $-7.2363 < -2.8965$, *los datos dan evidencia para rechazar la hipótesis del fabricante al nivel 0.01.*

b) X : *Millas recorridas por un coche con un galón de gasolina* $\rightarrow \mathcal{N}(\mu, 5.5^2)$

$$\begin{array}{l} H_0 : \mu \geq 30 \\ H_1 : \mu < 30 \end{array} \longrightarrow \sigma^2 \textit{ conocida.}$$

TRV de tamaño $\alpha \leq 1/2 \longrightarrow \varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} < z_{1-\alpha} \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} > z_{1-\alpha}. \end{cases}$

$\downarrow \ \mu_0 = 30, \ \sigma_0 = 5.5, \ n = 9, \ \alpha = 0.01 \rightarrow \ z_{0.99} = -2.33.$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{X} - 30}{5.5/3} < -2.33 \\ 0, & \dfrac{\overline{X} - 30}{5.5/3} > -2.33. \end{cases}$$

$$\overline{x} = 26 \ \Rightarrow \ \frac{\overline{x} - 30}{5.5/3} = -2.1818.$$

$$\Downarrow$$

Como $-2.1818 > -2.33$*, ahora los datos no dan evidencia para rechazar la hipótesis del fabricante.*

Problema 12

Un fabricante de baterías asegura que la desviación típica del tiempo de vida de las mismas es, a lo sumo, 70 horas. Una muestra de 26 baterías tomadas al azar ha dado una cuasidesviación típica de 84 horas. Haciendo las hipótesis adecuadas de normalidad, ¿proporcionan los datos evidencia para rechazar la hipótesis del fabricante al nivel 0.02?.

X : *Tiempo de vida de las baterías* $\longrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{array}{l} H_0 : \sigma^2 \leq 4900 \\ H_1 : \sigma^2 > 4900 \end{array} \longrightarrow \mu \textit{ desconocida.}$$

TRV de tamaño α
$\alpha \leq P\left(\chi^2(n-1) > n\right)^7 \longrightarrow \varphi(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} 1, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1;\alpha} \\ 0, & \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} < \chi^2_{n-1;\alpha}. \end{cases}$

$\downarrow \ \sigma_0 = 70,\ n = 26,\ \alpha = 0.02 \ \rightarrow \ \chi^2_{25;0.02}{}^8 = 41.869.$

$$\varphi(X_1,\ldots,X_{26}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{25S^2}{4900} > 41.869 \\ 0, & \dfrac{25S^2}{4900} < 41.869. \end{cases}$$

$$s = 84 \ \Rightarrow \ \chi^2_{exp} = \frac{25s^2}{4900} = 36$$

$$\Downarrow$$

Ya que $36 < 41.869$, los datos no dan evidencia para rechazar la hipótesis del fabricante al nivel 0.02.

---

[7] $n = 26 \longrightarrow P\left(\chi^2(25) > 26\right) > P\left(\chi^2(25) > 26.143\right) = 0.4$

[8] $\chi^2_{25;0.01} = 44.314;\quad \chi^2_{25;0.025} = 40.6465$

Problema 13

Un profesor asegura que tiene un método de enseñanza mejor que el usado tradicionalmente. Para comprobar si tiene razón se selecciona de forma aleatoria e independiente dos grupos de alumnos, A y B, utilizándose el nuevo método con el grupo A y el tradicional con el B. A final de curso se hace un examen a los alumnos, obteniéndose las siguientes puntuaciones:
Grupo A: 6, 5, 4, 7, 3, 5.5, 6, 7, 6
Grupo B: 5, 4, 5, 6, 4, 6, 5, 3, 7
Supuesto que las puntuaciones de cada grupo siguen una distribución normal, ¿proporcionan estos datos evidencia para rechazar el nuevo método, con un nivel de significación 0.05?

Se dispone de muestras aleatorias simples independientes de las variables:

X : Puntuación de los alumnos instruidos con el método del profesor $\rightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$

Y : Puntuación de los alumnos instruidos con el método tradicional $\rightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

$$\begin{matrix} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 \end{matrix} \longrightarrow \sigma_1^2,\ \sigma_2^2 \ desconocidas.$$

- *Contraste de igualdad de varianzas:*

$$\begin{matrix} H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{matrix} \longrightarrow \mu_1,\ \mu_2 \text{ desconocidas.}$$

T.R.V. de tamaño α :

$$\varphi(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1;\,1-\alpha/2} \text{ ó } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n_1-1,n_2-1;\,\alpha/2} \\ 0, & F_{n_1-1,n_2-1;\,1-\alpha/2} < \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1,n_2-1;\,\alpha/2}. \end{cases}$$

$\downarrow$ $n_1 = n_2 = 9,\ \alpha = 0.05 \ \rightarrow F_{8,8;\,0.975} = 0.226,\ F_{8,8;\,0.025} = 4.43.$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_9, Y_1, \ldots, Y_9) = \begin{cases} 1, & \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < 0.226 \text{ ó } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > 4.43 \\ 0, & 0.226 < \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < 4.43. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \overline{x} = 5.5 & s_1^2 = 1.75 \\ \overline{y} = 5 & s_2^2 = 1.5 \end{matrix} \Rightarrow F_{exp} = s_1^2/s_2^2 = 1.1666.$$

$$\Downarrow$$

Como $1.1666 \in (0.226, 4.43)$, los datos no dan evidencia para rechazar H_0, la igualdad de varianzas, al nivel 0.05.

- *Contraste de medias:* $\begin{matrix} H_0: \mu_1 \geq \mu_2 \\ H_1: \mu_1 < \mu_2 \end{matrix} \longrightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ desconocidas.

T.R.V. de tamaño $\alpha \leq 1/2$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\,\alpha} \\ 0, & \dfrac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \leq t_{n_1+n_2-2;\,\alpha} \end{cases}$$

$\downarrow$ $n_1 = n_2 = 9,\ \alpha = 0.05 \ \rightarrow t_{16;\,0.05} = 1.746.$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_9, Y_1, \ldots, Y_9) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{\dfrac{8S_1^2 + 8S_2^2}{16}}\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}}} > 1.746 \\ 0, & \dfrac{\overline{Y} - \overline{X}}{\sqrt{\dfrac{8S_1^2 + 8S_2^2}{16}}\sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{9}}} \leq 1.746. \end{cases}$$

$$t_{exp} = \frac{\overline{y} - \overline{x}}{\sqrt{\dfrac{8s_1^2 + 8s_2^2}{16}}\sqrt{\dfrac{2}{9}}} = -0.832 < 1.746 \rightarrow$$

Los datos no dan evidencia para rechazar el método del profesor a n.s. 0.05.

Problema 14

A partir de las siguientes observaciones de muestras independientes de dos poblaciones normales, contrastar, al nivel de significación 0.01, si la media de la primera población supera en al menos una unidad la media de la segunda.
MUESTRA 1: 132, 139, 126, 114, 122, 132, 141, 126.
MUESTRA 2: 124, 141, 118, 116, 114, 132, 145, 123, 121.

$$X \to \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \to \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \longrightarrow \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2 + 1 \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2 + 1. \end{array}$$

$$\downarrow Y' = Y + 1, \ \mu_2' = \mu_2 + 1$$

$$X \to \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ Y' \to \mathcal{N}(\mu_2', \sigma_2^2) \longrightarrow \begin{array}{l} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2' \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2' \end{array} \longrightarrow \sigma_1^2, \sigma_2^2 \ desconocidas.$$

Para resolver el problema usaremos la muestra de X, $(X_1 \ldots, X_8)$, y la de Y' obtenida a partir de la de Y, $(Y_1' \ldots, Y_9') = (Y_1 + 1 \ldots, Y_9 + 1)$, ambas independientes.

Debe contrastarse en primer lugar la igualdad de varianzas.

- *Contraste de igualdad de varianzas:* Este contraste puede hacerse directamente con las muestras de X e Y, ya que las varianzas de Y e Y' coinciden.

$$X \to \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \ Y \to \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \longrightarrow \begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array} \longrightarrow \mu_1, \mu_2 \ desconocidas.$$

T.R.V. de tamaño α :

$$\varphi(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1, n_2-1; \, 1-\alpha/2} \text{ ó } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n_1-1, n_2-1; \, \alpha/2} \\ 0, & F_{n_1-1, n_2-1; \, 1-\alpha/2} < \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1, n_2-1; \, \alpha/2}. \end{cases}$$

$$\downarrow n_1 = 8, \ n_2 = 9 \ \ \alpha = 0.01 \ \to F_{7,8; \, 0.995} = 0.1152, \ F_{7,8; \, 0.005} = 7.6923.$$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_8, Y_1, \ldots, Y_9) = \begin{cases} 1, & \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < 0.1152 \text{ ó } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > 7.6923 \\ 0, & 0.1152 < \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < 7.6923. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{x} = 129 & s_1^2 = 79.1428 \\ \overline{y} = 126 & s_2^2 = 121 \end{array} \Rightarrow F_{exp} = s_1^2 / s_2^2 = 0.654.$$

$$\Downarrow$$

Como $0.654 \in (0.1152, 7.6923)$, no hay evidencia para rechazar la igualdad de varianzas al nivel 0.01.

- *Contraste de medias:* $\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 \geq \mu_2' \\ H_1 : \mu_1 < \mu_2' \end{array} \longrightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \text{ desconocidas.}$

T.R.V. de tamaño $\alpha \leq 1/2$:

$$\varphi(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1', \ldots, Y_{n_2}') = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{Y}' - \overline{X}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\,\alpha} \\ 0, & \dfrac{\overline{Y}' - \overline{X}}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2'^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \leq t_{n_1+n_2-2;\,\alpha} \end{cases}$$

$$\overline{Y}' = \overline{Y} + 1; \quad S_2'^2 = S_2^2$$

$\downarrow \; n_1 = 8, \; n_2 = 9, \; \alpha = 0.01 \; \rightarrow \; t_{15;\,0.01} = 2.602.$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_8, Y_1, \ldots, Y_9) = \begin{cases} 1, & \dfrac{\overline{Y} - \overline{X} + 1}{\sqrt{\dfrac{7S_1^2 + 8S_2^2}{15}}\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}}} > 2.602 \\ 0, & \dfrac{\overline{Y} - \overline{X} + 1}{\sqrt{\dfrac{7S_1^2 + 8S_2^2}{15}}\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}}} \leq 2.602. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{x} = 129 & s_1^2 = 79.1428 \\ \overline{y} = 126 & s_2^2 = 121 \end{array} \Rightarrow t_{exp} = \dfrac{\overline{y} - \overline{x} + 1}{\sqrt{\dfrac{7s_1^2 + 8s_2^2}{15}}\sqrt{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{9}}} < 0 < 2.602.$$

$$\Downarrow$$

Los datos no dan evidencia para rechazar H_0 *a nivel de significación 0.01.*

Problema 15

Una central lechera recibe diariamente leche de dos granjas A y B. Para comparar la calidad de los productos recibidos se ha medido el contenido en grasa en muestras de leche tomadas al azar de cada una de las granjas, con los siguientes resultados:

	Contenido en grasa (%)					
Granja A	14	12	15	15	11	16
Granja B	20	18	18	19	15	

a) ¿Puede suponerse, a nivel de significación 0.05, que el contenido medio en grasa de la leche de las dos granjas es el mismo? Especificar las hipótesis bajo las que se resuelve este problema.

b) Calcular un intervalo de confianza, a nivel de confianza 0.9, para la varianza del contenido en grasa de la leche de la granja B. A partir de dicho intervalo, deducir si puede aceptarse que la varianza de esta población es igual a 3. Especificar el problema de contraste y el test utilizado; calcular su tamaño.

Hipótesis:

∗ Normalidad de las variables consideradas:

$$X : \textit{Contenido en grasa de la leche de la granja A} \rightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y : \textit{Contenido en grasa de la leche de la granja B} \rightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$$

∗ Muestreo aleatorio simple de cada variable.

∗ Muestras independientes.

a) $$\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2. \end{array} \longrightarrow \sigma_1^2,\ \sigma_2^2\ desconocidas.$$

- *Contraste de igualdad de varianzas:*

$$X \to \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2),\ Y \to \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \longrightarrow \begin{array}{l} H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{array} \longrightarrow \mu_1,\ \mu_2 \text{ desconocidas.}$$

T.R.V. de tamaño α :

$$\varphi(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1, n_2-1;\ 1-\alpha/2} \text{ ó } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > F_{n_1-1, n_2-1;\ \alpha/2} \\ 0, & F_{n_1-1, n_2-1;\ 1-\alpha/2} < \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < F_{n_1-1, n_2-1;\ \alpha/2}. \end{cases}$$

$\downarrow$ $n_1 = 6,\ n_2 = 5,\ \alpha = 0.05 \ \to F_{5,4;\ 0.975} = 0.135,\ F_{5,4;\ 0.025} = 9.36.$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_6, Y_1, \ldots, Y_5) = \begin{cases} 1, & \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < 0.135 \text{ ó } \dfrac{S_1^2}{S_2^2} > 9.36 \\ 0, & 0.135 < \dfrac{S_1^2}{S_2^2} < 9.36. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{x} = 13.83 & s_1^2 = 3.76 \\ \overline{y} = 18 & s_2^2 = 3.5 \end{array} \Rightarrow F_{exp} = s_1^2/s_2^2 = 1.075.$$

$$\Downarrow$$

Como $1.075 \in (0.135, 9.36)$, *no hay evidencia para la igualdad de varianzas al nivel 0.05.*

- *Contraste de medias:* $\begin{array}{l} H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array} \longrightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ *desconocidas.*

T.R.V. de tamaño α :

$$\varphi(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2}) = \begin{cases} 1, & \dfrac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} > t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} \\ 0, & \dfrac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{\sqrt{\dfrac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \leq t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} \end{cases}$$

$\downarrow$ $n_1 = 6,\ n_2 = 5,\ \alpha = 0.05 \ \to t_{9;\ 0.025} = 2.262.$

$$\varphi(X_1, \ldots, X_6, Y_1, \ldots, Y_5) = \begin{cases} 1, & \dfrac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{\sqrt{\dfrac{5S_1^2 + 4S_2^2}{9}} \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}}} > 2.262 \\ 0, & \dfrac{|\overline{X} - \overline{Y}|}{\sqrt{\dfrac{5S_1^2 + 4S_2^2}{9}} \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{5}}} \leq 2.262. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} \overline{x} = 13.83 & s_1^2 = 3.76 \\ \overline{y} = 18 & s_2^2 = 3.5 \end{array} \Rightarrow t_{exp} = \frac{|\overline{x} - \overline{y}|}{\sqrt{\dfrac{5s_1^2 + 4s_2^2}{9}}\sqrt{\dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{9}}} = 3.604 > 2.262.$$

$$\Downarrow$$

Los datos dan evidencia para rechazar $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ a nivel de significación 0.05.

b) I.C. para σ_2^2 (media desconocida) $\longrightarrow \left(\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\chi^2_{n_2-1;\ \alpha/2}}, \ \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\chi^2_{n_2-1;\ 1-\alpha/2}} \right)$

$\downarrow n_2 = 5, \ \alpha = 0.1 \ \to \ \chi^2_{4;\ 0.05} = 9.49, \ \chi^2_{4;\ 0.95} = 0.711 \ \longrightarrow \left(\dfrac{4S_2^2}{9.49}, \ \dfrac{4S_2^2}{0.711} \right)$

$$\Downarrow \ s_2^2 = 3.5$$

$$(1.4752, \ 19.69057).$$

Contraste: Se puede aceptar que $\sigma_2^2 = 3$ al nivel de significación 0.1, ya que el 3 pertenece al intervalo. El problema de contraste planteado y el test usado son:

$$H_0 : \sigma_2^2 = 3$$
$$H_1 : \sigma_2^2 \neq 3.$$

$$\varphi(Y_1, \ldots, Y_5) = \begin{cases} 1, & 3 \notin \left(\dfrac{4S_2^2}{\chi^2_{4;\ 0.05}}, \ \dfrac{4S_2^2}{\chi^2_{4;\ 0.95}} \right) \Leftrightarrow \dfrac{4S_2^2}{3} < \chi^2_{4;\ 0.95} \ \text{ó} \ \dfrac{4S_2^2}{3} > \chi^2_{4;\ 0.05} \\ 0, & 3 \in \left(\dfrac{4S_2^2}{\chi^2_{4;\ 0.05}}, \ \dfrac{4S_2^2}{\chi^2_{4;\ 0.95}} \right) \Leftrightarrow \chi^2_{4;\ 0.95} < \dfrac{4S_2^2}{3} < \chi^2_{4;\ 0.05} \end{cases}$$

Tamaño: $P_{\sigma_2^2=3}\left(\dfrac{4S_2^2}{3} < \chi^2_{4;\ 0.95} \right) + P_{\sigma_2^2=3}\left(\dfrac{4S_2^2}{3} > \chi^2_{4;\ 0.05} \right) = 0.05 + 0.05 = 0.1.$