Universidad de Granada — Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** **Soluciones** 28 de mayo de 2018

Ejercicio 1. Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones, y justifica brevemente tus respuestas:

1. La transformada de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R}^d)$ es siempre una función en $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.
2. La transformada de Fourier de una función no negativa en $L^1(\mathbb{R})$ es siempre una función no negativa.
3. Si $u = u(t,x)$ es una solución de la ecuación del calor $\partial_t u = \Delta u$ definida para $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$, entonces $v(t,x) := u(t+\lambda, x+v)$ es otra solución de la misma ecuación, cualesquiera que sean $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^d$.
4. En la reacción química $A + B \leftrightharpoons C$, donde las constantes de la reacción directa y la inversa son ambas $k > 0$, la concentración de C es siempre no decreciente en tiempo, independientemente de las concentraciones iniciales.

Solución

1. Cierto (visto en clase). Por la expresión de la transformada de Fourier, para $\xi \in \mathbb{R}^d$,

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| = (2\pi)^{-d/2} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix\xi} \, \mathrm{d}x \right| \leq (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \, \mathrm{d}x = (2\pi)^{-d/2} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

2. No siempre. Por ejemplo, la transformada de Fourier de la característica de un intervalo no es no negativa, como vimos en clase.
3. Verdadero. Puede verse directamente usando la regla de la cadena, ya que $\partial_t v(t,x) = \partial_t u(t+\lambda, x+v)$, $\Delta u(t,x) = \Delta u(t+\lambda, x+v)$.
4. Falso. La ecuación ordinaria para la concentración c de la especie C es $c' = k(ab - c)$. Si la condición inicial es tal que $a(0)b(0) < c(0)$, entonces la derivada de c es estrictamente negativa en $t = 0$, luego c es inicialmente decreciente.

Ejercicio 2. Consideramos el siguiente sistema de reacciones químicas, con constantes de reacción $k_1, k_2, k_3, k_4 > 0$:

$$A \xrightarrow{k_1} X, \qquad 2X + Y \xrightarrow{k_2} 3X$$
$$B + X \xrightarrow{k_3} Y + D, \qquad X \xrightarrow{k_4} E.$$

1. Usando la ley de acción de masas, escribe la ecuación diferencial ordinaria que satisfacen las concentraciones x, y de las especies X, Y.
2. Suponiendo que las concentraciones de A y B son constantes (e ignorando la concentración de D y E), encuentra todos los posibles valores de equilibrio de x, y.

Solución

1. Las ecuaciones obtenidas de la ley de acción de masas son

$$x' = k_1 a + k_2 x^2 y - k_3 b x - k_4 x,$$
$$y' = -k_2 x^2 y + k_3 b x.$$

2. Poniendo $x' = y' = 0$ en las ecuaciones anteriores obtenemos

$$0 = k_1 a + k_2 x^2 y - k_3 b x - k_4 x,$$
$$0 = -k_2 x^2 y + k_3 b x,$$

lo cual implica $x = k_1 a/k_4$, $y = k_3 b/(k_2 x) = k_3 k_4 b/(k_2 k_1 a)$. El equilibrio es único.

Ejercicio 3. Encuentra la solución (clásica y que conserve la masa) de la ecuación

$$\partial_t u = \partial_x^2 u - u,$$

donde $u = u(t, x)$ con $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, con condición inicial

$$u(0, x) = g(x) := e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(Sugerencia: el ejercicio se puede resolver usando la transformada de Fourier).

Solución Si aplicamos la transformada de Fourier en la variable x obtenemos

$$\partial_t \hat{u}(t, \xi) = -(\xi^2 + 1)\hat{u}(t, \xi),$$

lo cual implica que

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u}(0, \xi) e^{-(\xi^2+1)t} = \hat{u}(0, \xi) e^{-\xi^2 t} e^{-t}.$$

Sabemos que $\hat{u}(0, \xi) = \hat{g}(\xi) = e^{-\xi^2/2}$, luego

$$\hat{u}(t, \xi) = e^{-\xi^2 (t + \frac{1}{2})} e^{-t}.$$

Tomando la transformada de Fourier inversa y recordando la transformada de una Gaussiana,

$$u(t, x) = e^{-t}(2(t + \frac{1}{2}))^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t+2}} = \frac{1}{\sqrt{2t+1}} e^{-\frac{x^2}{4t+2} - t}.$$

Ejercicio 4. Demuestra que el funcional

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 (u(x) - \mathrm{sen}(x))^2 \,\mathrm{d}x,$$

definido para $u \in H_0^1(0, 1)$, tiene un mínimo y lo alcanza en una única función de $H_0^1(0, 1)$.(Sugerencia: puedes usar que la constante de Poincaré del intervalo $[0, 1]$ es π^2; es decir, $\pi^2 \int_0^1 u^2 \leq \int_0^1 (u')^2$ para toda $u \in H_0^1(0, 1)$.)

Solución Expandimos $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 u(x)^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 u(x)\,\mathrm{sen}(x) \,\mathrm{d}x - \int_0^1 (\mathrm{sen}(x))^2 \,\mathrm{d}x.$$

El último término es constante, luego consideramos

$$\widetilde{\mathcal{F}}(u) := \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 u(x)^2 \,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 u(x)\,\mathrm{sen}(x) \,\mathrm{d}x,$$

que alcanza su mínimo si y sólo si lo alcanza $\mathcal{F}$, y en las mismas funciones. Para aplicar el Teorema de Lax-Milgram podemos definir

$$a(u, v) := 2\int_0^1 u'(x) v'(x) \,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 u(x) v(x) \,\mathrm{d}x, \qquad \ell(v) := -2\int_0^1 u(x)\,\mathrm{sen}(x) \,\mathrm{d}x,$$

para $u, v \in H_0^1(0, 1)$. Comprobamos fácilmente que a es bilineal y continua, y que ℓ es bilineal y continua. Para ver que a es coerciva usamos la desigualdad de Poincaré

$$\int_0^1 u(x)^2 \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (u'(x))^2 \,\mathrm{d}x,$$

con lo cual

$$
\begin{aligned}
a(v,v) = 2\int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x - 2\int_0^1 v(x)^2\,\mathrm{d}x \\
\geq 2\int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi^2}\int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x = 2\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)\int_0^1 (v'(x))^2\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

para todo $v \in H_0^1(0,1)$. Usando esta desigualdad y de nuevo la desigualdad de Poincaré,

$$
\|v\|_{H^1}^2 = \int_0^1 (v')^2 + \int_0^1 v^2 \leq (1+\frac{1}{\pi^2})\int_0^1 (v')^2 \leq \frac{1+\frac{1}{\pi^2}}{2\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)} a(v,v) = \frac{\pi^2+1}{2(\pi^2-1)} a(v,v).
$$

Esto demuestra la coercividad. El teorema de Lax-Milgram nos dice entonces que existe un único mínimo del funcional $\mathcal{F}$. (Aunque no es parte del ejercicio, en este caso la función donde se alcanza el mínimo se puede calcular. ¿Puedes calcularla?)