



Enunciado

Sea R una relación de esquema $\{A, B, C, D, E, F\}$ que verifica el conjunto de dependencias funcionales

$$\{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DEC \rightarrow F, DF \rightarrow AB, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, DB \rightarrow C\}$$

Obtener el recubrimiento minimal del conjunto de dependencias.

Resolución

El algoritmo de cálculo del recubrimiento minimal de dependencias funcionales F' nos permite obtener un conjunto de dependencias funcionales que es equivalente a F (se pueden deducir las mismas propiedades que las que se deducen de F aplicando los axiomas y las reglas de Armstrong un número finito de veces).

El algoritmo consta de tres pasos, que se detallan a continuación.

El **primer paso** construye el conjunto $F^{(1)}$ en el que se simplifican las partes derechas de las dependencias de F aplicando la regla de descomposición a cada una de las dependencias que tengan varios atributos en su parte derecha. Dado que la dependencia $DF \rightarrow AB$ está en F , se le aplica la regla de descomposición, por lo que,

$$F^{(1)} = \{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DEC \rightarrow F, DF \rightarrow A, DF \rightarrow B, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, DB \rightarrow C\}$$

El **segundo paso** construye el conjunto $F^{(2)}$ en el que se simplifican las partes izquierdas de las dependencias de F buscando la existencia de dependencias entre atributos de la parte izquierda (a lo que se denominan *atributos extraños* o *raros*) de modo que se pueda aplicar la regla de pseudo-transitividad para reducir el número de atributos en la parte izquierda.

Análizamos la dependencia $AF \rightarrow C$ en busca de atributos raros, de modo que debemos examinar si F es raro con respecto a A y viceversa.

Se dice que F es raro con respecto a A si, y sólo si, $A \rightarrow F$ pertenece al conjunto F o se puede deducir de él (es decir, si pertenece a F^+). Como sabemos, la obtención de esta dependencia puede ser bastante complicada pero podemos saber si se puede deducir de F . La citada dependencia pertenece a F^+ si, y sólo si, se cumple que $F \in A^+$. Como podemos comprobar $A^+ = \{A\}$ y $F \notin A^+$, por lo que F no es raro con respecto a A . Ahora hemos de comprobar si A es raro con respecto a F , comprobando si $A \in F^+$. Como podemos comprobar, $F^+ = \{F\}$ por lo que $A \notin F^+$ y A no es raro con respecto a F . Dado que ninguno de los atributos en la parte izquierda de dependencia funcional es raro con respecto al otro, la dependencia no es simplificable.

Debemos repetir el proceso con las restantes dependencias que tengan una parte izquierda compuesta.

Seguimos con $DEC \rightarrow F$:

¿ $C \in DE^+$? $DE^+ = \{D, E, B, C, F, A\}$ por lo que $C \in DE^+$ y C es raro con respecto a DE . De modo que la dependencia queda transformada en $DE \rightarrow F$.

Dado que la dependencia que queda sigue teniendo varios atributos a la izquierda, es necesario seguir buscando atributos raros en el conjunto DE .

¿ $E \in D^+$? $D^+ = \{D, B, C\}$ por lo que $E \notin D^+$ y E no es raro con respecto a D . De modo que la dependencia $DE \rightarrow F$ no se puede transformar por eliminación de la E .

¿ $D \in E^+$? $E^+ = \{E\}$ por lo que $D \notin E^+$ y D no es raro con respecto a E . De modo que la dependencia $DE \rightarrow F$ no se puede transformar por eliminación de la D .

Las dependencias $DF \rightarrow A$ y $DF \rightarrow B$ pueden ser procesadas simultáneamente, al tener la parte izquierda igual. De hecho, podemos aprovechar el cálculo de D^+ realizado anteriormente para concluir que F no es raro con respecto a D . Sin embargo, queda por comprobar si D es raro con respecto a F . Para ello, calculamos $F^+ = \{F\}$ por lo que concluimos que F no es raro con respecto a D porque $D \notin F^+$. Por esta razón, las dependencias $DF \rightarrow A$ y $DF \rightarrow B$ no son simplificables en el paso 2.

Seguimos la comprobación con $DE \rightarrow B$. Sin embargo y aprovechando que los cierres de D y E se han calculado anteriormente, podemos concluir que ambos atributos no son raros con respecto al otro, y la dependencia permanece inalterada en el paso 2.

Seguimos la comprobación con $DB \rightarrow C$. Aprovechando que hemos calculado el cierre de D anteriormente, podemos deducir que B es raro con respecto a D porque $B \in D^+$ y, por tanto, podemos simplificar la dependencia eliminando el atributo raro B . La dependencia queda, pues, como $D \rightarrow C$.

En resumen, $F^{(2)} = \{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, DF \rightarrow B, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, D \rightarrow C\}$.

El **tercer paso** construye el conjunto $F^{(3)}$, en el que se simplifican dependencias completas, eliminándolas por ser redundantes (deducibles por combinación de otras). Para ello, procesamos cada dependencia eliminándola del conjunto considerado y tratando de deducirla de nuevo de las restantes. Como hemos visto, tratar de deducir una dependencia puede llegar a ser tedioso, pero basta con calcular el cierre de atributos de la parte izquierda de la dependencia con respecto a las dependencias restantes (menos la eliminada). Si la parte derecha de la dependencia está incluida en el cierre, la dependencia es deducible del conjunto de las restantes, incluso después de haberla eliminado, por lo que es redundante y puede eliminarse de $F^{(3)}$ definitivamente.

Empezamos con la evaluación de la posible redundancia de $D \rightarrow B$. Evaluamos el cierre D^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, DF \rightarrow B, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, D \rightarrow C\}$ y

obtenemos $D^+ = \{D, C\}$. Dado que $B \notin D^+$ para ese sub-conjunto de dependencias funcionales, la dependencia $D \rightarrow B$ no puede deducirse de las demás y no es redundante.

Procedemos con la evaluación de la posible redundancia de $AF \rightarrow C$. Después de calcular el cierre AF^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{D \rightarrow B, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, DF \rightarrow B, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, D \rightarrow C\}$, observamos que $C \notin AF^+ = \{A, F\}$ con respecto a ese sub-conjunto de dependencias funcionales por lo que la dependencia $AF \rightarrow C$ no puede deducirse de las demás y no es redundante.

Para ver si $DE \rightarrow F$ es redundante, basta con calcular DE^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DF \rightarrow A, DF \rightarrow B, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, D \rightarrow C\}$. Como podemos observar, $F \notin DE^+ = \{D, E, B, C\}$ por lo que la dependencia $DE \rightarrow F$ no puede deducirse de las demás y no es redundante.

Para ver si $DF \rightarrow A$ es redundante, basta con calcular DF^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow B, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, D \rightarrow C\}$. Como podemos observar, $A \notin DF^+ = \{D, F, B, C\}$ por lo que la dependencia $DF \rightarrow A$ no puede deducirse de las demás y no es redundante.

Para ver si $DF \rightarrow B$ es redundante, basta con calcular DF^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, B \rightarrow D, DE \rightarrow B, D \rightarrow C\}$. Como podemos observar, $B \in DF^+ = \{D, F, B, A, C\}$ por lo que la dependencia $DF \rightarrow B$ puede deducirse de las demás y es redundante. Dicha dependencia no será considerada en el futuro para ningún cálculo.

Para ver si $B \rightarrow D$ es redundante, basta con calcular D^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, DE \rightarrow B, D \rightarrow C\}$ (nótese que la dependencia determinada como redundante ya no se incluye en el conjunto). Como podemos observar, $D \notin B^+ = \{B\}$ por lo que la dependencia $B \rightarrow D$ no puede deducirse de las demás y no es redundante.

Para ver si $DE \rightarrow B$ es redundante, basta con calcular DE^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, B \rightarrow D, D \rightarrow C\}$. Como podemos observar, $B \in DE^+ = \{D, E, B, F, A, C\}$ por lo que la dependencia $DE \rightarrow B$ puede deducirse de las demás y es redundante. Por lo que no será considerada en adelante.

Por último, para ver si $D \rightarrow C$ es redundante, basta con calcular D^+ con respecto al conjunto de dependencias restante $\{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, B \rightarrow D\}$. Como podemos observar, $C \notin D^+ = \{D, B\}$ por lo que la dependencia $D \rightarrow C$ no puede deducirse de las demás y no es redundante.

Después de evaluar cada dependencia del conjunto $F^{(2)}$, nos queda un conjunto $F^{(3)} = \{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, B \rightarrow D, D \rightarrow C\}$.

De modo que el recubrimiento minimal de F es $F' = F^{(3)} = \{D \rightarrow B, AF \rightarrow C, DE \rightarrow F, DF \rightarrow A, B \rightarrow D, D \rightarrow C\}$



Enunciado

Sea R una relación de esquema $\{A, B, C, D, E, F\}$ que verifica el siguiente conjunto de dependencias funcionales

$$F = \{AB \rightarrow D, B \rightarrow E, AD \rightarrow E, AE \rightarrow B, DE \rightarrow F, E \rightarrow B\}$$

Determinar todas las claves candidatas de la relación.

Resolución

En primer lugar, sería recomendable establecer los tipos de atributos en función de si aparecen a la izquierda en todas las dependencias funcionales en las que aparece, a la derecha en todas las dependencias funcionales en las que aparece, a la izquierda de alguna y a la derecha en otra o en ninguna dependencia funcional:

- *atributos independientes* (no aparecen en ninguna dependencia): $\{C\}$
- *atributos equivalentes*: Equivalencia B-E
- *atributos que aparecen a la izquierda en todas las dependencias en las que aparecen*: $\{A\}$
- *atributos que aparecen a la izquierda de alguna dependencia funcional y a la derecha de otra*: $\{D, E, B\}$
- *atributos que aparecen a la derecha en todas las dependencias en las que aparecen*: $\{F\}$

Establecidos los tipos, podemos aplicar el algoritmo de extracción de claves candidatas:

1º Eliminación de atributos independientes:

$$R_{SI} = R - \{C\} = \{A, B, D, E, F\}$$

2º Eliminación de equivalencias:

Existe una equivalencia entre los atributos B y E, por lo que seleccionamos uno de los dos atributos para ser sustituido en la relación. Seleccionamos B para ser sustituido, por lo que:

$$R_{SIE} = R_{SI} - \{B\} = \{A, D, E, F\} \text{ y } F_{SIE} = \{AE \rightarrow D, E \rightarrow E, AD \rightarrow E, AE \rightarrow E, DE \rightarrow F, E \rightarrow E\} = \{AE \rightarrow D, AD \rightarrow E, AE \rightarrow E, DE \rightarrow F\}$$

3º Procesamiento de atributos que aparecen sólo a la izquierda:

$$K_p = \{A\} = A$$



Puesto que disponemos de un candidato, debemos comprobar si es clave, generando el cierre transitivo de atributos:

$K_p^+ = \{A\} \neq R_{SIE}$ por lo que A no es una clave pero debe participar en todas las claves, por lo que es necesario proceder al paso 4.

4º Procesamiento de atributos que aparecen a la izquierda y a la derecha:

Para ello, construimos un conjunto de candidatos tomando el candidato del paso 3 y lo combinamos con todos los atributos que estén a la izquierda en alguna dependencia y a la derecha en otra, y no hayan sido generado por el candidato del paso 3. Es decir, habría que combinar el conjunto $\{A\}$ (del paso 3) con los atributos D y E porque ninguno de los dos aparecen en el cierre transitivo de A.

$$K_p' = \{AD, AE\}$$

Al haber candidatos, comprobamos si el primero es clave, calculando su cierre transitivo:

$$AD^+ = \{A, D, E, F\} = R_{SIE} \text{ por lo que AD es una clave para } R_{SIE}, CK_{SIE} = \{AD\} \text{ y } K_p' = \{AE\}$$

Procedemos con el candidato AE:

$$AE^+ = \{A, E, D, F\} = R_{SIE} \text{ por lo que AE es una clave para } R_{SIE}, CK_{SIE} = \{AD, AE\} \text{ y } K_p' = \{\}$$

Al no quedar candidatos que explorar, damos por concluido el paso 4.

5º Incorporación de atributos independientes:

Puesto que hay atributos independientes que fueron aislados en el paso 1, este paso modifica las claves obtenidas incorporando los atributos independientes a todas las claves, por lo que $CK' = \{ACD, ACE\}$.

6º Incorporación de atributos equivalentes:

Al existir equivalencias entre atributos, toda clave que incluya un atributo equivalente genera otra clave en la que el atributo que se quedó en R_{SIE} se sustituye por el atributo que se eliminó de dicha relación, por lo que $CK = \{ACD, ABC, ACE\}$



Enunciado

Sea R una relación de esquema $\{A, B, C, D, E\}$, que verifica el siguiente conjunto de dependencias funcionales

$$F = \{AB \rightarrow D, AC \rightarrow D, AD \rightarrow B, CD \rightarrow E\}$$

y con AC como única clave candidata. Determinar si la relación está en Forma Normal de Boyce y Codd, asumiendo que está en segunda y tercera forma normal sin comprobarlo. Si no está en Forma Normal de Boyce y Codd, realizar una descomposición hasta que todas las relaciones que integran la descomposición estén en dicha forma normal.

Resolución propuesta

La relación R esté en Forma Normal de Boyce y Codd si, y sólo si, todas las dependencias tienen a su izquierda una clave candidata. Según esta norma, podemos decir que la relación no está en BCNF porque $AB \rightarrow D$, $AD \rightarrow B$ y $CD \rightarrow E$ forman parte de F' y AB , AD y CD no son claves candidatas de la relación.

Para conseguir una normalización, debemos aplicar el Teorema de Heath sobre una de las dependencias que no cumplen la forma normal.

Empezamos normalizando por $CD \rightarrow E$:

$R_1 = \{C, D, E\}$, $F_1 = \{CD \rightarrow E\}$, $CK_1 = \{CD\}$, **R_1 está en FNBC** puesto que todas las dependencias funcionales de F_1 tienen una clave candidata de R_1 a su izquierda.

$R_2 = \{A, B, C, D\}$, $F_2 = \{AB \rightarrow D, AC \rightarrow D, AD \rightarrow B\}$, $CK_2 = \{AC\}$, R_2 no está en BCNF porque $AB \rightarrow D$ y $AD \rightarrow B$ forman parte de F_2 pero AB y AD no son claves candidatas de R_2 .

Es necesario normalizar la relación R_2 mediante la aplicación del Teorema de Heath aplicado sobre alguna dependencia que no cumpla la forma normal. Escogemos $AD \rightarrow B$:

$R_{2,1} = \{A, B, D\}$, $F_{2,1} = \{AB \rightarrow D, AD \rightarrow B\}$, $CK_{2,1} = \{AB, AD\}$, **$R_{2,1}$ está en BCNF** porque todas sus dependencias tienen a la izquierda una llave candidata de $R_{2,1}$.

$R_{2,2} = \{A, C, D\}$, $F_{2,2} = \{AC \rightarrow D\}$, $CK_{2,2} = \{AC\}$, **$R_{2,2}$ está en BCNF** porque todas sus dependencias tienen a la izquierda una llave candidata de $R_{2,2}$.

El resultado de nuestra normalización es el conjunto de relaciones:

$$\{(\{C, D, E\}, r_1), (\{A, B, D\}, r_{2,1}), (\{A, C, D\}, r_{2,2})\}$$



En realidad y en este caso, no existen normas para la normalización, pero sí existen heurísticas para elegir las dependencias que no cumplen la forma normal y a las que se debe aplicar el Teorema de Heath, con el fin de provocar el menos impacto (o pérdida de dependencias funcionales):

- se ha elegido normalizar por $CD \rightarrow E$ en primer lugar porque el atributo E sólo aparece a la derecha de cualquier dependencia funcional, lo que no afecta a dependencias en las que el atributo aparezca a la izquierda,
- se ha elegido normalizar por $AD \rightarrow B$ (en vez de por $AB \rightarrow D$, aunque ambos atributos a la derecha también aparecen a la izquierda) porque B aparece un número menor de veces en las demás dependencias, y su aislamiento puede provocar un menor daño en el resto de las dependencias.