Topología II: Conceptos Básicos

Daniel Monjas Miguélez

22 de noviembre de 2021

Índice

1. Grupo Fundamental

Definición: Sea X un espacio topológico. Un lazo en X con base un punto del espacio, $x \in X$ es un arco $\alpha : [0,1] \to X$ continuo con $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. Se denota $\Omega_x(X)$ al conjunto de todos los lazos en X con base x.

Sean $\alpha,\ \beta \in \Omega_x(X)$, se define el producto de lazo como

$$\alpha * \beta : [0,1] \to X$$
$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & si\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Defினción: Sean $\alpha,\ \beta \in \Omega_x(X)$, se dicen que son homotópicos, y se denota por $\alpha \sim \beta$, si existe una aplicación:

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X \quad continua\, y :$$

- $H(t,0) = \alpha(t) \quad \forall t \in [0,1]$, es decir, $H(*,0) = \alpha$.
- $H(t,1) = \beta(1) \quad \forall t \in [0,1]$, es decir, $H(*,1) = \beta$.
- $H(0,s) = H(1,s) = x \quad \forall s \in [0,1]$, es decir, $H(0,*) = H(1,*) = \varepsilon_x$

Se dice que H es un homotopía de α a β, y se escribe:

$$H : \alpha \sim \beta$$

Propiedades de las homotopías:

1. Si $\alpha \in \Omega_x(X)$, entonces $\alpha \sim \alpha$ con $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ tal que $H(t,s) = \alpha(t)$.
2. Si $h : [0,1] \to [0,1]$ es un homomorfismo con $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$ entonces $\alpha \sim \alpha \circ h$ donde $\alpha \circ h$ es un reparametrización de α preservando orientación.
3. Sea $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$. Si $\alpha \sim \beta$ entonces $\beta \sim \alpha$.
4. Sean $\alpha,\ \beta \in \Omega_x(X)$. Si $\alpha \sim \beta$ y $\beta \sim \gamma$ entonces $\alpha \sim \gamma$.

Proposición: Sean X un espacio topológicos y puntos $p, q, r \in X$. Sean $\alpha, \alpha' \in \Omega_{p,q}(X)$ y $\beta, \beta' \in \Omega_{q,r}(X)$ arcos tales que $\alpha \sim \alpha'$ y $\beta \sim \beta'$. Entonces $\alpha * \beta \sim \alpha' * \beta'$.

Proposición: Sean X un espacio topológico y puntos $p, q, r, s \in X$. Sean $\alpha \in \Omega_{p,q}(X)$, $\beta \in \Omega_{q,r}(X)$ y $\gamma \in \Omega_{r,s}(X)$. Las siguientes propiedades son ciertas:

- $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma)$
- $(\alpha * \varepsilon_p = \varepsilon_p * \alpha = \alpha$
- $\alpha * \overline{\alpha} = \varepsilon_p$