

Aurora Hermoso Carazo y M^a Dolores Ruiz Medina

Final

Este examen pertenece al Banco de Exámenes de la Asociación de Estudiantes de Matemáticas de la Universidad de Granada. Si bien su autoría corresponde a los profesores ya citados, en la asociación nos encargamos de almacenarlos y ceder su uso a los estudiantes para que sea más satisfactoria su labor a la hora de preparar un examen.

1. **(1.25 puntos)** Formula el lema de Fisher y todos los resultados sobre distribuciones en el muestreo de una población normal, indicando su uso en la inferencia sobre cada uno de los parámetros.
2. **(2 puntos)** Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable X con función de densidad:

$$f_{\theta}(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{2} x^{-\frac{3}{2}}, \quad x > \theta.$$

Determinar cuáles son los valores de n para los que existe el UMVUE para θ , y encontrarlo en tales casos. ¿Es para dichos valores el UMVUE un estimador eficiente de θ ?

3. **(2 puntos)**

- a) Definición de intervalo de confianza. Describir el método de construcción basado en la desigualdad de Chebychev.
- b) Dada una muestra aleatoria simple de una variable con función de densidad:

$$f_{\theta}(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\theta}{x}}, \quad 0 < x < \frac{1}{\theta},$$

determinar un intervalo de confianza, de mínima longitud esperada para θ a nivel de confianza $1 - \alpha$, a partir de su estimador de máxima verosimilitud.

4. **(2 puntos)** Observar el test de razón de verosimilitudes de tamaño α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$ basado en una observación de una variable con distribución exponencial:

$$f_{\theta}(x) = \theta \exp(-\theta x), \quad x > 0.$$

¿Qué tamaños se alcanzan con dicho test?

5. **(1.5 puntos)** Describir el modelo de Gauss-Markov, especificando el significado y las hipótesis sobre cada componente.
Deducir el estimador de mínimos cuadrados del vector de efectos. Bajo hipótesis de normalidad, describir el test de la razón de verosimilitudes para la hipótesis lineal general.

6. **(1.25 puntos)** El peso atómico de 12 muestras de plomo (procedentes de desintegraciones radioactivas) se ha detectado por dos procedimientos diferentes, obteniéndose como resultados:

| | | | | | | |
|------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Procedimiento I | 206,34 | 207,42 | 207,25 | 206,81 | 206,53 | 206,56 |
| | 207,38 | 206,90 | 207,32 | 206,72 | 207,24 | 207,67 |
| Procedimiento II | 206,37 | 207,38 | 207,33 | 206,69 | 206,48 | 206,52 |
| | 207,31 | 206,94 | 207,21 | 206,58 | 207,18 | 207,55 |

Contrastar mediante el test de los signos y el test de los rangos signados si existe una diferencia significativa entre los dos procedimientos, en relación con la distribución de peso atómico. ¿Bajo qué condiciones es adecuado utilizar cada uno de los test?