PRELIMINARES.

ESPACIO DE PROBABILIDAD $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

(i) Ω es un conjunto arbitrario

(ii) $\mathcal{A} \subset \Omega$ tiene estructura de σ-álgebra si verifica:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
- Cerrada para las uniones numerables
- Cerrada para la formación del complementario.

(ii) $P : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$, es una función de probabilidad si satisface los siguientes tres axiomas:

A1 $P(A) \geq 0, \quad \forall A \in \mathcal{A}$

A2 $P(\Omega) = 1$

A3 Para cualquier secuencia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ se sucesos disjuntos

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Propiedades básicas de la probabilidad

- $P(\emptyset) = 0$.
- Probabilidad del suceso complementario: $p(A^c) = 1 - P(A)$:
- Aditividad finita para procesos disjuntos $\quad P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$.
- Probabilidad de la diferencia y monotonía: $B \subseteq A \in \mathcal{A}$, $P(A - B) = P(A) - P(B)$, $P(B) \leq P(A)$.

- $A, B \in \mathcal{A},\ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- Principio de inclusión-exclusión para la unión finita de sucesos no disjuntos.
- Subaditividad: $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$.
- Desigualdad de Boole: $P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n^c)$

Probabilidad Condicionada

- $A \in \mathcal{A}$, con $P(A) > 0$, la aplicación $P(\cdot/A) : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$, tal que $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ es una función de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. El espacio $(\Omega, \mathcal{A}, P(\cdot/A))$ se llama *Espacio de probabilidad condicionado.*
- Teorema de la probabilidad compuesta $A_1, \ldots, A_{n-1}$ tales que $P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) > 0$, para todo $A_n \in \mathcal{A}$, se verifica la siguiente identidad:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1\cap A_2)\ldots P(A_n/A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}).$$

- Teorema de la probabilidad total: Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que define una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$, entonces

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i).$$

- Teorema de Bayes: Sea $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ una secuencia de sucesos que define una partición de Ω, siendo $P(A_i) > 0$, para $i \in \mathbb{N}$,

$$P(A_i/B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B/A_i)P(A_i)}, \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Independencia de sucesos

- $A, B \in \mathcal{A}$, son independientes si y sólo si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Independencia dos a dos de los sucesos de una clase $\mathcal{C}$,

$$\forall A, B \in \mathcal{C},\ P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- Independencia mutua de los sucesos de una clase $\mathcal{C}$.

$$\forall k \geq 2,\ \forall A_{i_1}, \ldots, A_{i_k} \in \mathcal{C}, \quad P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \prod_{l=1}^{k} P(A_{i_l}).$$

Variables aleatorias

- **Definición**: Una variable aleatoria sobre un espacio probabilístico base $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ es una función medible $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, i.e.,

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B},$$

donde $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega :\ X(\omega) \in B\}$, equivalentemente,

$$X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{A}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

siendo $X^{-1}((-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega :\ X(\omega) \leq x\}$. Se denota, como siempre, por $\mathcal{B}$ a la σ-álgebra de Borel, que es la mínima σ-álgebra sobre $\mathbb{R}$ que contiene a todos los intervalos.

- **Operaciones con variables aleatorias**
  - La suma y diferencia de dos variables aleatorias es una variable aleatoria sobre el mismo espacio probabilístico base, que se define puntualmente mediante la suma y diferencia de los respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.
  - El producto y cociente (si están bien definidos) de variables aleatorias es una variable aleatoria sobre el mismo espacio probabilístico base, que se define puntualmente mediante el producto y cociente de las respectivos valores puntuales de las variables aleatorias involucradas.
  - Lo mismo ocurre con el máximo y mínimo de dos variables aleatorias, así como con el módulo de una variable aleatoria.

- **Distribución de Probabilidad de una Variable Aleatoria**. Si X es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, se define su distribución de probabilidad como una función $P_X : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$, definida por

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in B\}) = P(X \in B), \quad \forall B \in \mathcal{B}.$$

- **Función de distribución de una variable aleatoria**. Es una función $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$, definida por

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x]), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- **Satisface las siguientes propiedades:**
  - Monótona no decreciente
  - Continua a la derecha
  - $\exists \lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, y $\exists \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$.

- **Cálculo de probabilidades de intervalos:**
  - $P_X([a,b]) = F_X(b) - F_X(a^-)$
  - $P_X((a,b]) = F_X(b) - F_X(a)$
  - $P_X([a,b)) = F_X(b^-) - F_X(a^-)$
  - $P_X((a,b)) = F_X(b^-) - F_X(a)$.

- **Variables Aleatorias Discretas** $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, es una variable aleatoria (v.a.) discreta si existe un conjunto numerable $E_X \subset \mathbb{R}$, tal que $P_X(X \in E_X) = 1$.

- **Función masa de probabilidad de una v.a. discreta**

$$p_X : E_X \longrightarrow [0,1], \quad p_X(x) = P(X = x), \quad \forall x \in E_X.$$

  Se tiene entonces $\sum_{x \in E_X} p_X(x) = 1$.

- **Caracterización de funciones masa de probabilidad**. Toda función defnida sobre un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$, no negativa y tal que la suma de sus valores es uno, es la función masa de probabilidad de alguna variable discreta con valores en dicho conjunto.

- **Caracterización de variables aleatorias discretas:** Una variable aleatoria es discreta si y sólo si su función de distribución crece únicamente a saltos. Los saltos de dicha función se localizan en los valores de la variable. La longitud de cada salto es la probabilidad con que la variable toma cada uno de dichos valores.

- **Variables aleatorias continuas**. $X : (\Omega, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$, es una v.a. continua si existe una función $f_X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

  f_X recibe el nombre de función de densidad de X y satisface:

(i) Es no negativa

(ii) Es integrable y $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)dx = 1$.

Cualquier función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo (i)–(ii) es la función de densidad de una v.a. continua. Además se tiene:

a) $\lim_{x\to-\infty} f_X(x) = \lim_{x\to\infty} f_X(x) = 0$.

b) f_X es continua salvo a lo sumo en un conjunto numerable de puntos (o conjunto de medida nula).

c) En los puntos de continuidad de f_X, se tiene que F_X es derivable y satisface
$$\frac{dF_X(x)}{dx} = f_X(x).$$

d) f_X se puede modificar en un conjunto numerable de puntos sin afectar a F_X.

- **Características de una v.a.**

(1) *Esperanza matemática de una variable aleatoria.*
Para v.a. discretas. $\exists \sum_{x\in E_X} |x| p_X(x) < \infty$, entonces
$$E[X] = \sum_{x\in E_X} x p_X(x) = \sum_{x\in E_X} x P(X = x).$$
Para v.a. continuas. $\exists \int_{\mathbb{R}} |x| f_X(x)dx < \infty$, entonces
$$E[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)dx.$$

(2) *Propiedades de la esperanza matemática.* La propiedades más destacadas son la linealidad y conservación del orden, así como algunas consecuencias inmediatas de las propiedades de integración respecto a medidas de probabilidad y el teorema de Convergencia Dominada.

(2) *Momentos de una v.a.* Para $k \geq 1$,
Para v.a. discretas. $\exists \sum_{x\in E_X} |x|^k p_X(x) < \infty$, entonces
$$m_k = E[X^k] = \sum_{x\in E_X} x^k p_X(x) = \sum_{x\in E_X} x^k P(X = x).$$

$\exists \sum_{x\in E_X} |x-E[X]|^k p_X(x) < \infty$, entonces

$$\mu_k = E[(X-E[X])^k] = \sum_{x\in E_X} (x-E[X])^k p_X(x) = \sum_{x\in E_X} (x-E[X])^k P(X=x).$$

Para v.a. continuas. $\exists \int_{\mathbb{R}} |x|^k f_X(x)dx < \infty$, entonces

$$m_k = E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f_X(x)dx.$$

$\exists \int_{\mathbb{R}} |x-E[X]|^k f_X(x)dx < \infty$, entonces

$$\mu_k = E[(X-E[X])^k] = \int_{\mathbb{R}} (x-E[X])^k f_X(x)dx.$$

(3) *Teorema de Markov.*

$$X \geq 0,\ \exists E[X] \Rightarrow P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0.$$

(4) *Desigualdad de Chebychev.*

$$\exists E[X^2] \Rightarrow P(|X-E[X]| \geq k) \leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{k^2}, \quad k > 0.$$

(5) *Función generatriz de momentos*$\exists E[\exp(tX)], \quad \forall t \in (-t_0, t_1), \quad t_0, t_1 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Se define la función generatriz de momentos (f.g.m) de X como $M_X : (-t_0, t_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$M_X(t) = E[\exp(tX)], \quad \forall t \in (-t_0, t_1).$$

(6) *Teorema de unicidad.* Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, determina unívocamente su distribución de probabilidad.

(7) *Relación con los momentos.* Si existe la función generatriz de momentos de una variable aleatoria, se tiene

$\exists E[X^k], \quad \forall k \in \mathbb{N}.$

$M_X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} E[X^j], \quad \forall t \in (-t_0, t_1)$

$E[X^k] = \frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}.$