Test Temas 1, 2 y 3 Inferencia Estadística

Sean $(X_1,\dots,X_6)$, $(Y_1,\dots,Y_6)$ muestras aleatorias simples independientes de dos poblaciones, $N(7,\sigma^2)$ y $N(10,\sigma^2)$, respectivamente, con medias muestrales $\bar{X}$ e $\bar{Y}$. Calcular (sin interpolación) $P(Z>1.8298)$ siendo

$$Z=\frac{\bar{X}-\bar{Y}+3}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{6}(Y_i-\bar{Y})^2}}\sqrt{10}.$$

$\underbrace{(1'8299\cdot\sqrt{3})}$

$Z\sqrt{3} \rightsquigarrow t(10) \Rightarrow$ Tabla t

- a. 0.995
- b. 0.005
- c. 0.05
- d. 0.95

$\sigma_1^2=\sigma_2^2=\sigma^2$ desconocidas $\quad \dfrac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}}\sqrt{\dfrac{n_1+n_2-2}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1+n_2-2)$

Sea $(X_1,\cdots,X_n)$ una m.a.s. de X, variable aleatoria con función de densidad

$f_\theta(x)=e^{x+\theta},\quad x<-\theta,$

y sean $X_{(1)}=\min X_i$ y $X_{(n)}=\max X_i$. Las funciones de distribución, $F_{X_{(i)}}$, y de densidad, $f_{X_{(i)}}$, verifican:

- a. $f_{X_{(n)}}(x)=ne^{(n-1)(x+\theta)},\quad x<-\theta$
- b. $F_{X_{(n)}}(x)=e^{n(x+\theta)},\quad x<-\theta$
- c. $F_{X_{(1)}}(x)=1-e^{n(x+\theta)},\quad x<-\theta$
- d. $f_{X_{(1)}}(x)=n(1-e^{x+\theta})^{n} \quad x<-\theta$

$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}e^{x+\theta}=e^{x+\theta}-0$

$F_{X(n)}(x)=(F_X(x))^n$

Sea

$(X_1,\cdots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X\to\{P_\theta,\ \theta\in\Theta\}$ y $T\equiv T(X_1,\cdots,X_n)$ un estadístico muestral:

- a. Si T es suficiente y completo, cualquier transformación de T también lo es.
- b. Si T es suficiente, entonces T^4 es suficiente.
- c. Si T es completo y $E_\theta[T^2]=1,\ \forall\theta\in\Theta$, entonces $P_\theta(T=1)=1,\ \forall\theta\in\Theta$.
- d. Si $\ln T$ es suficiente y completo, T también lo es.

sufi. por ser trans. biunívoca.

completo: $E_\theta[g(T)]=0\ \forall\theta$

$"E_\theta[\underbrace{g(\exp}_{h}(\ln(T)))]$

lnT compl. $\Rightarrow$ $P_\theta[h(\ln(T))=0]=1$

$" P_\theta[g(T)=0]$

Sea $(X_1,\dots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de X con $E[X]=\mu$ y $Var[X]=\sigma^2$. Los momentos muestrales no centrados (A_k) y centrados (B_k) verifican:

a. $E[A_1]=\mu$ y $Var[A_1]=\sigma^2/n$. Lo pone en los apuntes (pg.10 pdf)

b. $E[A_1]=\mu$ y $Var[B_2]=\sigma^2$.

c. $E[B_1]=0$ y $Var[A_2]=\sigma^2$.

d. $E[B_1]=0$ y $E[B_2]=\sigma^2$.

Sea $(X_1,\cdots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable X con función de densidad $f_\theta(x)=\theta x^{\theta-1}, 0<x<1,$ con $\theta>0$.

a. $\prod_{i=1}^{n} X_i$ no recoge toda la información de la muestra sobre el parámetro.

b. Ninguna de las otras respuestas es correcta.

c. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ es un estadístico suficiente y completo

$\sum \ln x_i \Leftarrow$ sufi. y compl.

$\Rightarrow \frac{\sum \ln}{n}$ sufi y completo (trans. biuniv.)

d. $\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$ es un estadístico suficiente, pero no completo. (ver argumento del último de la página anterior)

Teorema: Si se tiene una v.a. $X \rightsquigarrow \{F_\theta, \theta\in\Theta\}$ con familia de funciones asociadas, $\{f_\theta(x),\theta\in\Theta\}$, siendo f.d.d. o f.m.p. según el caso, donde la familia de distribuciones es exponencial k-paramétrica, entonces la familia de distribuciones asociadas a $(X_1,\dots,X_n)$ (que es una m.a.s. de X) es también exponencial k-paramétrica:

$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)=\exp\left\{\sum_{h=1}^{k}Q_h(\theta)\left(\sum_{i=1}^{n}T_h(x_i)\right)+\sum_{i=1}^{n}S(x_i)+nD(\theta)\right\},\ (x_1,\dots,x_n)\in\chi^n,$$

y se tiene:

- El estadístico $(\sum_{i=1}^n T_1(X_i),\dots,\sum_{i=1}^n T_k(X_i))$ es suficiente para θ.
- Si $k\le n$ y el conjunto imagen de la función $Q(\theta)=(Q_1(\theta),\dots,Q_k(\theta))$ contiene a un abierto de $\mathbb{R}^k$, el estadístico $(\sum_{i=1}^n T_1(X_i),\dots,\sum_{i=1}^n T_k(X_i))$ es también completo.

Sea $(X_1,\cdots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable X con función de densidad $\frac{\theta}{x}(\ln x)^{\theta-1}$, $1<x<e$, con $\theta>0$.

a. Ninguna de las otras respuestas es correcta.

b. $\ln(\prod_{i=1}^{n}X_i)$ es un estadístico suficiente y completo. Th. exp.

c. $\prod_{i=1}^{n}\ln X_i$ es un estadístico suficiente y completo.

d. Conocido el valor de $\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$, la muestra no proporciona información adicional sobre el parámetro.

Sea $(X_1, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta,\ \theta \in \Theta\}$ y $T \equiv T(X_1, \cdots, X_n)$ un estadístico muestral:

- a. Si $T > 0$ y T^2 es suficiente, entonces $\sqrt{T}$ también lo es.
- b. Si T no es suficiente, su distribución condicionada a cualquier realización muestral depende de θ.
- c. Si T es completo y $E_\theta[T] = E_\theta[T^2],\ \forall\theta \in \Theta$, entonces $P_\theta(T = 0) = 1,\ \forall\theta \in \Theta$.
- d. Si T es suficiente, cualquier transformación de T también lo es.

Sea $(X_1, \cdots, X_n)$ una m.a.s. de X, variable aleatoria con función de densidad
$f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1},\ \ 0 < x < 1,$
y sean $X_{(1)} = \min X_i$ y $X_{(n)} = \max X_i$. Las funciones de distribución, $F_{X_{(i)}}$, y de densidad, $f_{X_{(i)}}$, verifican:

- a. $f_{X_{(n)}}(x) = n\theta x^{n\theta-1},\ \ 0 < x < 1$
- b. $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - x^{n\theta},\ \ 0 < x < 1$
- c. $F_{X_{(n)}}(x) = (1 - x^\theta)^n,\ \ 0 < x < 1$
- d. $f_{X_{(1)}}(x) = n\theta(1 - x^\theta)^{n-1},\ \ 0 < x < 1$

Sean $(X_1, \ldots, X_6)$, $(Y_1, \ldots, Y_6)$ muestras aleatorias simples independientes de dos poblaciones, $\mathcal{N}(10, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}(12, \sigma^2)$, respectivamente, con medias muestrales $\bar{X}$ e $\bar{Y}$. Calcular (sin interpolación) $P(Z > 0.57863)$ siendo

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} + 2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6}(X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^{6}(Y_i - \bar{Y})^2}}.$$

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} \overbrace{-(10-12)}^{+2}}{\sqrt{\cdots\cdots}}\sqrt{30} \rightsquigarrow t(10) \Rightarrow \sqrt{30}\, Z \rightsquigarrow t(10)$$

Tabla t $(Z > 3.1693)$

- a. 0.005
- b. 0.995
- c. 0.25

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}}\sqrt{\frac{n_1+n_2-2}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \rightsquigarrow t(n_1+n_2-2)$$

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X con $E[X] = \mu$ y $Var[X] = \sigma^2$. Los momentos muestrales no centrados (A_k) y centrados (B_k) verifican:

- a. $E[B_1] = 0$ y $Var[A_1] = \sigma^2$.
- b. $E[A_1] = \mu$ y $E[B_1] = 0$.
- c. $E[A_1] = \mu$ y $Var[A_1] = \sigma^2$.
- d. $E[B_1] = 0$ y $E[B_2] = \sigma^2$.

Apuntes.

Sean $(X_1, \cdots, X_n)$, $(Y_1, \cdots, Y_m)$ muestras independientes de poblaciones normales con medias μ_1, μ_2 y varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Las medias y cuasivarianzas muestrales, $\bar{X}$, $\bar{Y}$, S_1^2, S_2^2, verifican:

- a. $\dfrac{\sum_{i=1}^{m-1}(Y_i - \mu_2)^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(m)$.
- b. $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_1)}{S_1} \rightsquigarrow t(n-1)$.
- c. $\dfrac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma\sqrt{1/(n+m)}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- d. $\dfrac{S_2^2}{S_1^2} \rightsquigarrow F(n-1, m-1)$.

Tabla 1.

Sea $(X_1, \cdots, X_n)$ una m.a.s. de X, variable aleatoria con función de densidad
$f_\theta(x) = e^{x+\theta},\ \ x < -\theta,$
y sean $X_{(1)} = \min X_i$ y $X_{(n)} = \max X_i$. Las funciones de distribución, $F_{X_{(i)}}$, y de densidad, $f_{X_{(i)}}$, verifican:

- a. $F_{X_{(n)}}(x) = e^{nx+\theta},\ \ x < -\theta$
- b. $f_{X_{(n)}}(x) = ne^{n(x+\theta)},\ \ x < -\theta$
- c. $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - e^{n(x+\theta)},\ \ x < -\theta$
- d. $f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - e^{x+\theta})^{n-1},\ \ x < -\theta$

$F_X(x) = e^{x+\theta}$

$\boxed{f_{X(n)}(x) = n(F(x))^{n-1} f(x)}$

Sea $(X_1, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria simple

de una variable X con función de densidad $\frac{\theta}{x}(\ln x)^{\theta-1}, \quad 1 < x < e,$ con $\theta > 0$.

- a. Ninguna de las otras respuestas es correcta.
- b. $\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ es un estadístico suficiente y completo.
- c. El estadístico $\prod_{i=1}^{n} (\ln X_i)^{\theta-1}$ recoge toda la información de la muestra sobre el parámetro.
- d. $\prod_{i=1}^{n} \ln X_i/n$ es un estadístico suficiente y completo.

ver una pregunta anterior.

Sean $(X_1, \cdots, X_n)$, $(Y_1, \cdots, Y_m)$ muestras independientes de poblaciones normales con medias μ_1, μ_2 y varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Las medias y cuasivarianzas muestrales, $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$, verifican:

- a. $(\bar{Y} - \bar{X}) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 \frac{n+m}{nm}\right)$.
- b. $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n-1)$.
- c. $\frac{\bar{X} - \mu_1}{S_1/\sqrt{n-1}} \rightsquigarrow t(n-1)$.
- d. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F(n,m)$.

Tabla 1.

Sean $(X_1, \cdots, X_n)$, $(Y_1, \cdots, Y_m)$ muestras independientes de poblaciones normales con medias μ_1, μ_2 y varianzas $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. Las medias y cuasivarianzas muestrales, $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$, verifican:

- a. $\frac{S_1^2}{S_2^2} \rightsquigarrow F(n,m)$.
- b. $(\bar{X} - \bar{Y}) \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2 \frac{n+m}{nm}\right)$.
- c. $\frac{\bar{X} - \mu_1}{S_1/\sqrt{n}} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$.
- d. $\frac{nS_1^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi^2(n)$.

Tabla 2.

Sea

$(X_1, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \rightarrow \{P_\theta, \ \theta \in \Theta\}$ y $T \equiv T(X_1, \cdots, X_n)$ un estadístico

muestral:

- a. Si $T > 0$ y T^3 es suficiente, entonces $\ln T$ también lo es.
- b. Si T es suficiente, entonces T^2 también lo es.
- c. Si T es completo y $E_{\theta_0}[T^3] = 0$, entonces $P_{\theta_0}(T = 0) = 1$.
- d. Si T es suficiente para $\{P_\theta, \ \theta \in \Theta\}$, lo es para $\{P_\theta, \ \theta \in \Theta'\}$, para cualquier $\Theta' \supseteq \Theta$.

Sea $(X_1, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria simple

de una variable X con función de densidad $f_\theta(x) = \theta/x^{\theta+1}, \quad x > 1,$ con $\theta > 0$.

- a. Ninguna de las otras respuestas es correcta.
- b. $\sum_{i=1}^{n} \ln X_i$ es un estadístico completo, pero no suficiente.
- c. El estadístico $\prod_{i=1}^{n} X_i^{\theta+1}$ recoge toda la información de la muestra sobre el parámetro.
- d. $\prod_{i=1}^{n} X_i/n$ es un estadístico suficiente y completo.

$\Rightarrow \quad f_\theta(x) = \exp\{\ln \theta - (\theta+1)\ln x\}$

$\ln \prod X_i = \sum \ln X_i$ sufi. y compl.

$\prod X_i$ func. biunívoca de $\ln \prod X_i$

$\Rightarrow$ completo

$\Rightarrow \frac{\prod X_i}{n}$ sufi. y compl.

Sea

$(X_1, \cdots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de $X \rightarrow \{F_\theta, \ \theta \in \Theta\}$ y $T \equiv T(X_1, \cdots, X_n)$ un estadístico muestral:

- a. Si T es suficiente, entonces $|T|$ es suficiente.
- b. Si la distribución condicionada de T a cualquier realización muestral es independiente de θ, entonces T es suficiente.
- c. Si T es suficiente y completo, cualquier transformación biunívoca de T también lo es.
- d. Si T es completo, T^2 no tiene por qué serlo.

Quitar mi selección