Problemas 0. Curso 2016/17. Sugerencias.

(7) No es trivial. Sea

$$A = \{ (x_n) \in l_2 : |x_n| < 1, \forall n \in \mathbb{N} \}$$

Probar que A es abierto, con la norma usual de l_2: $\|(x_n)\| = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}$.

$$A \text{ es abierto} \Longleftrightarrow \mathring{A} = A$$
$$\Updownarrow$$
$$\forall (x_n) \in A \ \exists \delta > 0 : B_{l_2}((x_n);\delta) \subset A \qquad (*)$$

Sea $(x_n) \in A$, fijo. Entonces $|x_n| < 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Como $(x_n) \in A \subset l_2 \Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow \sum_{1}^{+\infty} |x_n|^2$ es una serie convergente $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Así, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0 \Rightarrow |x_n| < 1/2 \quad (**)$

Ahora bien, $|x_n| < 1$, $\forall n / 1 \leq n < n_0$. Luego

$\exists \mu > 0 \,/\, |x_n| + \mu < 1, \ \forall n$.

Si $(y_n) \in \ell_2$ verifica $\|(x_n)-(y_n)\|_{\ell_2} < \delta$, entonces

$$\|(x_n)-(y_n)\|^2 < \delta^2 \Rightarrow \sum_1^{+\infty} |x_n - y_n|^2 < \delta^2 \Rightarrow$$

$$|x_n - y_n| < \delta, \ \forall n \in \mathbb{N}. \Rightarrow |y_n| < |x_n| + |x_n - y_n|$$

$$< \begin{cases} n \leq n_0 & < 1-\mu+\delta < 1 \Leftrightarrow \delta < \mu \\ n > n_0 & < \frac{1}{2} + \delta < 1 \Leftrightarrow \delta < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, si $\delta < \min\{\mu, \frac{1}{2}\}$,

$B_{\ell_2}((x_n);\delta) \subset A \Rightarrow A$ es abierto.

(8) $\bar{X} = (C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$

$P = \{ f \in \bar{X} : f$ es un polinomio $\}$

P no es abierto pues $0 \in P$ y $0 \notin \mathring{P}$ ya que $\forall \varepsilon > 0$, la función $\varepsilon \operatorname{sen}(t)$ no es un polinomio (y $\|\varepsilon \operatorname{sen}(t)\|_0 \leq \varepsilon$)

(9) El funcional $L: \bar{X} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow \int^1 f(t)\,dt$$

es continuo y $\{f \in \overline{X} : \int_0^1 f(t)\,dt = 0\} = L^{-1}\{0\}$.