ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 13/01/2017

1. **(2 puntos)** Dual de un espacio de Hilbert (Teorema de representación de Riesz-Fréchet)

2. Considérese el espacio vectorial l_2 con el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n},\ \forall\ x = \{x_n\},\ y = \{y_n\} \in l_2$$

   Pruébese que, con la norma derivada del anterior producto escalar, la sucesión:

$$\begin{array}{l} X^1 = (1, 0, 0, ...) \\ X^2 = (1, 1/\sqrt{2}, 0, 0, ...) \\ \dots \\ X^k = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \dots, 1/\sqrt{k}, 0, 0, ...) \\ \dots \end{array}$$

   es de Cauchy pero no convergente.

3. (a) ¿Es $\mathbf{R}^3$ con la norma $\|x\| = |x_1|+|x_2|+|x_3|$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ un espacio prehilbertiano? Razónese adecuadamente la respuesta.

   (b) ¿Es $X = (C^1[a, b], \mathbf{R})$ con la norma $\|f\| = \int_a^b |f(t)|\ dt + \int_a^b |f'(t)|\ dt,\ \forall f \in X$ un espacio prehilbertiano? Razónese adecuadamente la respuesta.

   (c) sea B una base hilbertiana de un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita H. Demuéstrese que ningún subconjunto propio D de B (es decir $D \subset B, D \neq B$) es base hilbertiana de H.

   (d) A partir de una base hilbertiana de un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, constrúyanse infinitas bases hilbertianas diferentes.