Tema 6. Estimación por intervalos de confianza

A. Hermoso Carazo
Universidad de Granada

Curso 2020/2021

En muchas situaciones prácticas, el interés se centra, más que en dar una estimación puntual del parámetro o parámetros desconocidos, en obtener, a partir de los datos observados, un subconjunto del espacio paramétrico que contenga al verdadero valor del parámetro con un margen de error prefijado.

Estos subconjuntos, que se denominan *regiones de confianza* pueden tener una forma arbitraria, pero si el espacio paramétrico es unidimensional, las regiones de confianza de mayor interés son intervalos; a este tipo de regiones de confianza dedicamos nuestro estudio.

6.1. Planteamiento del problema y conceptos básicos

En términos generales, la *estimación por regiones de confianza* consiste en usar los datos muestrales para construir un subconjunto del espacio paramétrico para el que podamos afirmar, con un margen de error prefijado, que contiene al verdadero valor del parámetro.

Por ejemplo, supongamos que X representa la longitud de vida de cierto tipo de bombillas, y estamos interesados en hacer inferencia sobre la longitud de vida media, μ.

A partir de una serie de observaciones de X podemos dar una estimación puntual de μ (por ejemplo, 1000 horas); sin embargo, la estimación es sólo un valor concreto de un estimador (variable aleatoria) y no sabemos si este valor es más o menos representativo de los diferentes valores del estimador.

Intuitivamente, parece claro que una afirmación del tipo *"la vida media está comprendida entre 900 y 1100 horas con un margen de error del 5 %"* proporciona más información acerca de la vida media de las bombillas.

Región de confianza

Sea $X \to \{P_\theta;\ \ \theta \in \Theta\}$, $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de X con valores en χ^n y $S : \chi^n \longrightarrow \mathcal{P}(\Theta)$ una función independiente de θ. Diremos que $S(X_1, \ldots, X_n)$ es una región de confianza para θ al nivel de confianza $1 - \alpha$ $(0 < \alpha < 1)$ si:

$$\forall \theta \in \Theta, \ \ P_\theta\big(S(X_1, \ldots, X_n) \ni \theta\big) \geq 1 - \alpha.$$

Esto es, $S(X_1, \ldots, X_n) \subseteq \Theta$ es un subconjunto aleatorio de Θ y, sea cual sea el verdadero valor del parámetro, la probabilidad de que ese conjunto lo contenga es, como mínimo, $1 - \alpha$.

Obviamente, la función S debe verificar que cualquier conjunto de la forma $\{S(X_1, \ldots, X_n) \ni \theta\}$ es medible para poder calcular su probabilidad.

Nota: Al igual que los estimadores, las regiones de confianza son funciones de la muestra independientes del parámetro. Para cada realización muestral, $(x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$, el estimador proporciona un valor concreto del espacio paramétrico, $T(x_1, \ldots, x_n) \in \Theta$, mientras que la región de confianza proporciona un subconjunto de dicho espacio, $S(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{P}(\Theta)$.

Aquí nos centramos en espacios paramétricos unidimensionales, $\Theta \subseteq \mathbb{R}$, en los que las regiones de confianza de mayor interés son intervalos aleatorios, cuyos extremos están definidos por estadísticos muestrales:

- $(I_1(X_1,\ldots,X_n),\ I_2(X_1,\ldots,X_n)) \rightarrow$ *intervalos bilaterales.*
- $(-\infty,\ I(X_1,\ldots,X_n));\ \ (I(X_1,\ldots,X_n),\ +\infty) \rightarrow$ *intervalos unilaterales.*

Intervalo de confianza

Un intervalo aleatorio, $(I_1(X_1,\ldots,X_n),\ I_2(X_1,\ldots,X_n))$, se dice que es un intervalo de confianza para θ al nivel de confianza $1-\alpha$ $(0<\alpha<1)$ si:

$$\forall\theta\in\Theta,\quad P_\theta\big(I_1(X_1,\ldots,X_n)<\theta<I_2(X_1,\ldots,X_n)\big)\geq 1-\alpha.$$

Cotas de confianza (intervalos unilaterales)

- $I(X_1,\ldots,X_n)$ *es una cota de confianza superior al nivel $1-\alpha$ si:*
$$\forall\theta\in\Theta,\quad P_\theta\big(I(X_1,\ldots,X_n)>\theta\big)\geq 1-\alpha.$$
- $I(X_1,\ldots,X_n)$ *es una cota de confianza inferior al nivel $1-\alpha$ si:*
$$\forall\theta\in\Theta,\quad P_\theta\big(I(X_1,\ldots,X_n)<\theta\big)\geq 1-\alpha.$$

Interpretación del intervalo de confianza: Sea cual sea el verdadero valor del parámetro, la probabilidad de que el intervalo lo contenga es, al menos, $1-\alpha$.

Según la definición frecuentista de probabilidad, esto se interpreta como que el $(1-\alpha)100\,\%$ de las veces que se observa una muestra de tamaño n, el intervalo concreto obtenido,

$$(I_1(x_1,\ldots,x_n),\ I_2(x_1,\ldots,x_n))$$

contiene al verdadero valor del parámetro. Por tanto, cada vez que tomamos una muestra de tamaño n, tenemos una *confianza* del $(1-\alpha)100\,\%$ de que así ocurre, y de ahí la terminología.

Por ejemplo, si $1-\alpha=0.9$, el 90 % de las veces que se observa una muestra de tamaño n, el intervalo obtenido contiene al verdadero valor del parámetro y, por tanto, con cada muestra concreta, tenemos una confianza del 90 % (0.9 sobre 1) de que así ocurre.

Ejemplo 6.1.1: *Construir un intervalo de confianza bilateral para la media de una normal con varianza conocida, basado en una muestra de tamaño n de la variable.*

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{\mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2);\ \mu \in \mathbb{R}\}$.

Ya que $\overline{X}$ es el estimador óptimo (UMVUE) para μ, parece razonable construir el intervalo a partir de este estimador. Consideramos, por tanto, un intervalo de la forma $(\overline{X} - c_1,\ \overline{X} + c_2)$ y vamos a calcular los valores c_1 y c_2 de manera que éste sea un intervalo de confianza al nivel $1 - \alpha$:

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\quad P_\mu\left(\overline{X} - c_1 < \mu < \overline{X} + c_2\right) = P_\mu\left(\mu - c_2 < \overline{X} < \mu + c_1\right) \geq 1 - \alpha.$$

Ya que $\overline{X} \to \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2/n)$ y, por tanto, $Z = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$, esta condición puede expresarse como:

$$\forall \mu \in \mathbb{R},\quad P_\mu\left(\frac{-c_2}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \frac{c_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{-c_2}{\sigma_0/\sqrt{n}} < Z < \frac{c_1}{\sigma_0/\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \alpha.$$

Entonces, podemos tomar, por ejemplo,

$$\frac{-c_2}{\sigma_0/\sqrt{n}} = -z_{\alpha/2},\qquad \frac{c_1}{\sigma_0/\sqrt{n}} = z_{\alpha/2}$$

y despejando c_1 y c_2, obtenemos el siguiente intervalo de confianza para μ al nivel $1 - \alpha$:

Notaremos siempre z sub p al elemento que deja a su derecha una probabilidad p en una normal N(0,1).

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\sigma_0/\sqrt{n},\ \ \overline{X} + z_{\alpha/2}\sigma_0/\sqrt{n}\right).$$

Si, por ejemplo, $1 - \alpha = 0.95$, $z_{\alpha/2} = 1.96$ y el intervalo es

$$\left(\overline{X} - 1.96\sigma_0/\sqrt{n},\ \ \overline{X} + 1.96\sigma_0/\sqrt{n}\right),$$

lo que significa que, sea cual sea el valor de μ, la probabilidad de que este intervalo lo contenga es 0.95.

Una vez observada la muestra y obtenida una realización $(x_1, \ldots, x_n)$, se obtiene un intervalo real concreto, $(\overline{x} - 1.96\sigma_0/\sqrt{n},\ \ \overline{x} + 1.96\sigma_0/\sqrt{n})$ (por ejemplo, si $\sigma_0 = 2$, $n = 16$ y $\overline{x} = 5$, el intervalo es $(0.98,\ 9.02)$), y ya no tiene sentido hablar de probabilidad, ya que este intervalo no es aleatorio, sino fijo.

La interpretación ahora es que hay una confianza del 95 % de que el verdadero valor de μ esté dentro de este intervalo.

Nota: Todo intervalo aleatorio que contenga al anterior es también intervalo de confianza al mismo nivel (por ejemplo, $(\overline{X} - 2\sigma_0/\sqrt{n},\ \ \overline{X} + 2\sigma_0/\sqrt{n})$ es también intervalo de confianza al nivel 0.95). Además, los valores c_1 y c_2 han sido elegidos para dar un intervalo simétrico respecto de $\overline{X}$, pero no son los únicos que satisfacen la condición requerida.

La no unicidad de intervalos de confianza mostrada en ejemplo anterior obliga a usar algún criterio que, en cada situación, conduzca a seleccionar el óptimo. Uno de los criterios de optimalidad más intuitivos y comunes se basa en el hecho de que un intervalo es tanto más informativo cuanto menor sea su longitud. Ya que, en general, la longitud de un intervalo es aleatoria, se considera la longitud media, y surge la siguiente definición.

Intervalo de confianza de menor longitud esperada uniformemente

Sea $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ y $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple. Un intervalo $(I_1(X_1, \dots, X_n),\ I_2(X_1, \dots, X_n))$, con nivel de confianza $1-\alpha$, es de menor longitud esperada uniformemente a dicho nivel, si, para cualquier otro al mismo nivel, $(I_1'(X_1, \dots, X_n),\ I_2'(X_1, \dots, X_n))$, se tiene:

$$\forall \theta \in \Theta,\quad E_\theta\left[I_2(X_1, \dots, X_n) - I_1(X_1, \dots, X_n)\right] \leq E_\theta\left[I_2'(X_1, \dots, X_n) - I_1'(X_1, \dots, X_n)\right].$$

Generalmente, no es posible encontrar intervalos óptimos y, como en estimación puntual, se restringe la clase de intervalos considerados para hallar el óptimo. Normalmente, la restricción se hace tomando un estadístico de referencia (Ejemplo 6.1.1) y sólo los intervalos basados en él.

6.2. Construcción de intervalos: método pivotal

Existen diversos métodos generales para construir intervalos de confianza. Comenzamos describiendo uno de los más simples.

Intervalos de confianza basados en la desigualdad de Chebychev: *Si $T \equiv T(X_1, \dots, X_n)$ es un estimador insesgado de θ con varianza uniformemente acotada,*

$$E_\theta[T] = \theta,\quad Var_\theta[T] \leq c,\quad \forall \theta \in \Theta,$$

entonces, para todo $k > 0$, $(T-k,\ T+k)$ es una intervalo de confianza para θ al nivel de confianza $1 - c/k^2$.

En efecto, aplicando la desigualdad de Chebychev para $k > 0$ arbitrario:

$$\forall \theta \in \Theta,\quad P_\theta(|T-\theta| < k) \geq 1 - \frac{Var_\theta[T]}{k^2} \geq 1 - \frac{c}{k^2},$$

y ya que $P_\theta(|T-\theta| < k) = P_\theta(T-k < \theta < T+k)$ se tiene la condición de intervalo de confianza al nivel $1 - c/k^2$. Eligiendo $k = \sqrt{c/\alpha}$, se consigue un intervalo con nivel $1-\alpha$, para α arbitrario.

Aunque el método de la desigualdad de Chebychev es muy simple, tiene el inconveniente de que, generalmente, da lugar a intervalos de gran amplitud y, por lo tanto, poco informativos. Esto es debido a que se usa muy poca información sobre la distribución del estadístico de referencia (sólo su media y una cota de su varianza).

El siguiente método, uno de los más usados en la práctica, proporciona intervalos más informativos. Está basado en lo que se denomina un *pivote*.

Pivote para un parámetro

Es una función de la muestra y del parámetro, $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$, *tal que* $\forall \theta \in \Theta$, $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$ *es una variable aleatoria con distribución independiente de* θ.

Tema 6. Estimación por intervalos de confianza A. Hermoso Carazo
└─6.2. Construcción de intervalos: método pivotal

Método pivotal: *Si* $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$ *es un pivote estrictamente monótono con respecto a* θ*, a partir de él pueden construirse intervalos de confianza para* θ *a cualquier nivel como sigue:*

$i)$ *Se buscan* $\lambda_1, \lambda_2 \in Img(T)$ *tales que*

$$P_\theta\Big(\lambda_1 < T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) < \lambda_2\Big) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Ya que la distribución de $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ no depende de θ, los valores λ_1 y λ_2 tampoco dependen. Además, no son únicos.

$ii)$ *Se resuelven en* θ *las ecuaciones* $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) = \lambda_i, \ i = 1, 2:$

$$T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) = \lambda_i \ \rightarrow \ \widehat{\theta}_i(X_1, \ldots, X_n), \quad i = 1, 2.$$

La solución de ambas es única, debido a la monotonía estricta de T en θ.

$iii)$ *Se expresa* $i)$ *en términos de* $\widehat{\theta}_i(X_1, \ldots, X_n)$ *y se tiene el intervalo:*

T *creciente*: $\lambda_1 < T < \lambda_2 \Leftrightarrow \widehat{\theta}_1 < \theta < \widehat{\theta}_2$.

$$P_\theta\big(\widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n)\big) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

T *decreciente*: $\lambda_1 < T < \lambda_2 \Leftrightarrow \widehat{\theta}_2 < \theta < \widehat{\theta}_1$.

$$P_\theta\Big(\widehat{\theta}_2(X_1, \ldots, X_n) < \theta < \widehat{\theta}_1(X_1, \ldots, X_n)\Big) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Nota 1: Ya que λ_1 y λ_2 no son únicos, el método puede conducir a distintos intervalos al mismo nivel. Para minimizar la longitud, se procurará ajustar al máximo la condición $P_\theta(\lambda_1 < T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) < \lambda_2) \geq 1 - \alpha,\ \forall \theta \in \Theta$, imponiendo la igualdad (si la distribución de $T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta)$ es de tipo continuo, siempre será posible alcanzarla).

El método sirve también para determinar intervalos unilaterales a cualquier nivel de confianza, sin más que hacer $\lambda_1 = -\infty$ (o el menor valor de T), ó $\lambda_2 = +\infty$ (o el mayor valor de T):

$$P_\theta\Big(T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) < \lambda_2\Big) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

$$P_\theta\Big(T(X_1, \ldots, X_n;\ \theta) > \lambda_1\Big) \geq 1 - \alpha, \quad \forall \theta \in \Theta.$$

En estos casos, imponiendo la igualdad, el intervalo queda totalmente determinado.

Nota 2: Si $T(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ no es monótono en θ, el método sigue siendo aplicable, pero conduce a regiones de confianza que no son necesariamente intervalos.

Tema 6. Estimación por intervalos de confianza A. Hermoso Carazo
6.2. Construcción de intervalos: método pivotal

Métodos para la determinación de pivotes: El problema que se plantea generalmente para aplicar este método es la determinación del pivote adecuado a una situación concreta. No existe un método general para ello, pero sí algunos resultados parciales basados en el siguiente resultado:

Transformada integral de probabilidad: X *continua* $\Rightarrow F_X(X) \to U(0,1)$.

Por tanto:

- Si la variable considerada es de tipo continuo, con función de distribución F_θ, $-2\ln F_\theta(X_i) \to \chi^2(2)$ (cambio de variable) y aplicando la reproductividad de la distribución χ^2, se obtiene el siguiente un pivote que, si es monótono en θ, da lugar a intervalos de confianza:

$$T(X_1, \ldots, X_n; \theta) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln F_\theta(X_i) \to \chi^2(2n).$$

- Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es un estadístico con distribución de tipo continuo, la variable $F_\theta^T(T) \to U(0,1)$ constituye un pivote; si es monótono en θ, da lugar a intervalos de confianza.

Ejemplo 6.2.1: *Dada una muestra $(X_1, \dots, X_n)$ de una variable con función de densidad $f_\theta(x) = \theta x^{\theta-1},\ 0 < x < 1$, construir un intervalo de confianza para θ de nivel $1-\alpha$.*

La función de distribución de esta variable en su conjunto de valores es $F_\theta(x) = x^\theta,\ 0 < x < 1$. Por tanto, la siguiente función es un pivote:

$$T(X_1, \dots, X_n; \theta) = -2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i^\theta = -2\theta \sum_{i=1}^{n} \ln X_i \to \chi^2(2n).$$

Ya que $-2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i > 0$, $T(X_1, \dots, X_n; \theta)$ es estrictamente creciente en θ y se tiene:

$$\forall \theta > 0, \quad P_\theta(\lambda_1 < T < \lambda_2) = P_\theta\left(-\frac{\lambda_1}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} < \theta < -\frac{\lambda_2}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} \right).$$

Por tanto, buscando λ_1 y λ_2 tales que $P\left(\lambda_1 < \chi^2(2n) < \lambda_2\right) = 1-\alpha$, obtendremos un intervalo de confianza para θ al nivel $1-\alpha$. Por ejemplo, con $\lambda_1 = \chi^2_{2n;1-\alpha/2}$ y $\lambda_2 = \chi^2_{2n;\alpha/2}$ el intervalo obtenido es el de colas iguales:

$$\left(-\frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i},\ -\frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} \ln X_i} \right).$$

Recordatorio del TEMA 2: vemos que las distribuciones que nos dan son pivotes para distintos parámetros.

ESQUEMA DE RESULTADOS

Variable	Distribución	Uso
$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mathcal{N}(0,1)$	Inferencia sobre μ cuando σ^2 es conocida
$\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$t(n-1)$	Inferencia sobre μ cuando σ^2 es desconocida
$\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n)$	Inferencia sobre σ^2 cuando μ es conocida
$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$\chi^2(n-1)$	Inferencia sobre σ^2 cuando μ es desconocida

6.3. Intervalos de confianza en una población normal

A continuación, aplicamos el método pivotal para construir intervalos de confianza para los parámetros de una población normal, basándonos en los resultados del Tema 2, que proporcionan pivotes monótonos para dichos parámetros.

Estos intervalos son de enorme utilidad práctica ya que, si los tamaños muestrales son grandes, muchos estadísticos importantes como, por ejemplo, los momentos muestrales no centrados (por el *teorema central del límite*) o los estimadores de máxima verosimilitud, tienen distribución aproximadamente normal.

En todo lo que sigue trabajaremos con una muestra aleatoria simple de la variable bajo estudio, $(X_1,\ldots,X_n)$, usaremos el método pivotal, y minimizando uniformemente la longitud media de los intervalos bilaterales, obtendremos los intervalos de confianza óptimos a cualquier nivel, tanto para la media como para la varianza.

Los intervalos obtenidos, como veremos, están basados en el UMVUE correspondiente a cada parámetro.

Intervalos de confianza para la media con varianza conocida

$$(X_1,\ldots,X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu,\sigma_0^2);\quad \mu\in\mathbb{R}\}$$

Consideramos el siguiente pivote, estrictamente decreciente en μ:

$$\textit{Pivote: } T_\mu \equiv T(X_1,\ldots,X_n;\ \mu) = \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1).$$

Así, $\forall \mu\in\mathbb{R},\ P_\mu(\lambda_1 < T_\mu < \lambda_2) = F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)$, siendo F_Z la función de distribución de $Z\to\mathcal{N}(0,1)$. Esta probabilidad se expresa como sigue:

$$P_\mu\left(\lambda_1 < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma_0/\sqrt{n}} < \lambda_2\right) = P_\mu\left(\overline{X}-\lambda_2\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X}-\lambda_1\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

Por tanto, cada par de valores λ_1,λ_2 tales que $F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha$ determinan un intervalo de confianza para μ al nivel $1-\alpha$:

$$\left(\overline{X}-\lambda_2\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X}-\lambda_1\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

Intervalos unilaterales:

- $\lambda_1=-\infty \to F_Z(\lambda_2)=1-\alpha \to \lambda_2=z_\alpha \longrightarrow \left(\overline{X}-z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ +\infty\right).$
- $\lambda_2=+\infty \to 1-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha \to \lambda_1=z_{1-\alpha}=-z_\alpha \longrightarrow \left(-\infty,\ \overline{X}+z_\alpha\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$

Intervalos bilaterales:

Si λ_1 y λ_2 son finitos, podemos encontrar diferentes pares satisfaciendo $F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1-\alpha$ y, por tanto, diferentes intervalos bilaterales a nivel $1-\alpha$. Buscamos el que minimice uniformemente la longitud media:

$$E_\mu\left[\left(\overline{X} - \lambda_1\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - \lambda_2\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)\right] = (\lambda_2 - \lambda_1)\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \forall \mu \in \mathbb{R}.$$

Así, el problema es minimizar $\lambda_2 - \lambda_1$ sujeto a $F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1-\alpha$, y la solución es $f_Z(\lambda_1) = f_Z(\lambda_2)$, siendo $f_Z = F'_Z$ la función de densidad de $Z \to \mathcal{N}(0,1)$ [1]. Como f_Z es simétrica, ha de ser $\lambda_1 = \pm\lambda_2$, y ya que $F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) = 1-\alpha$, $\lambda_1 = -\lambda_2 = -z_{\alpha/2}$ y el intervalo buscado es:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$$

1

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda\left[F_Z(\lambda_2) - F_Z(\lambda_1) - (1-\alpha)\right].$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -1 - \lambda f_Z(\lambda_1) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 1 + \lambda f_Z(\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_Z(\lambda_1) = f_Z(\lambda_2).$$

Intervalos de confianza para la media con varianza desconocida

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$$

Ahora, consideramos el siguiente pivote, estrictamente decreciente en μ:

$$\textit{Pivote: } T_\mu \equiv T(X_1, \ldots, X_n;\ \mu) = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \to t(n-1).$$

Este pivote es similar al anterior, con σ_0 sustituido por S, lo que cambia la distribución $\mathcal{N}(0,1)$ por la $t(n-1)$. Esto hace que los intervalos se obtengan similarmente, y sean análogos a los anteriores.

$\forall(\mu, \sigma^2)$, $P_{\mu,\sigma^2}(\lambda_1 < T_\mu < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1)$, siendo F_T la función de distribución de la $t(n-1)$. Además,

$$P_{\mu,\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < \lambda_2\right) = P_{\mu,\sigma^2}\left(X - \lambda_2\frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} - \lambda_1\frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

de manera que cada par λ_1, λ_2 tales que $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha$ determina un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza $1-\alpha$:

$$\left(\overline{X} - \lambda_2\frac{S}{\sqrt{n}}, \quad \overline{X} - \lambda_1\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

Intervalos unilaterales:

- $\lambda_1 = -\infty \to \lambda_2 = t_{n-1;\alpha} \longrightarrow \left(\overline{X} - t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}},\ +\infty\right).$
- $\lambda_2 = +\infty \to \lambda_1 = t_{n-1;1-\alpha} = -t_{n-1;\alpha} \longrightarrow \left(-\infty,\ \overline{X} + t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$

Intervalos bilaterales:

Si λ_1 y λ_2 son finitos, existen diferentes pares tales que $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha$ y, por tanto, diferentes intervalos bilaterales a nivel $1-\alpha$. Buscamos el que minimice uniformemente la longitud media:

$$E_{\mu\sigma^2}\left[\left(\overline{X} - \lambda_1\frac{S}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{X} - \lambda_2\frac{S}{\sqrt{n}}\right)\right] = (\lambda_2 - \lambda_1)\, E_{\mu,\sigma^2}\left[\frac{S}{\sqrt{n}}\right],\ \forall \mu \in \mathbb{R}\, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+.$$

Ya que el segundo factor no depende de λ_1, λ_2, el problema se reduce, como antes, a minimizar $\lambda_2 - \lambda_1$ sujetos a $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha$.

Como ya hemos probado, la solución a este problema es $f_T(\lambda_1) = f_T(\lambda_2)$, siendo ahora $f_T = F_T'$ la función de densidad de la $t(n-1)$. De nuevo, la simetría de esta distribución conduce al intervalo simétrico, de colas iguales:

$$\left(\overline{X} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$$

Intervalos de confianza para μ a nivel de confianza $1-\alpha$

Varianza conocida

- $\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$
- $\left(\overline{X} - z_{\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \ +\infty\right).$
- $\left(-\infty,\ \ \overline{X} + z_{\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right).$

Varianza desconocida

- $\left(\overline{X} - t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + t_{n-1;\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$
- $\left(\overline{X} - t_{n-1;\alpha}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \ +\infty\right).$
- $\left(-\infty,\ \ \overline{X} + t_{n-1;\alpha}\frac{S}{\sqrt{n}}\right).$

Los bilaterales minimizan uniformemente la longitud media.

Intervalos de confianza para la varianza con media conocida

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2);\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$$

Consideramos el siguiente pivote, estrictamente decreciente en σ^2:

$$\textit{Pivote: } T_{\sigma^2} \equiv T(X_1, \ldots, X_n;\ \sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} \to \chi^2(n).$$

Entonces, $\forall \sigma^2 \in \mathbb{R}^+,\ P_{\sigma^2}(\lambda_1 < T_{\sigma^2} < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1)$, donde F_T es la función de distribución de $\chi^2(n)$, y esta probabilidad se expresa como:

$$P_{\sigma^2}\left(\lambda_1 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\sigma^2} < \lambda_2\right) = P_{\sigma^2}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\lambda_2} < \sigma^2 < \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\lambda_1}\right).$$

Por lo tanto, cada par de valores λ_1, λ_2 tales que $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha$ determinan un intervalo de confianza para σ^2 al nivel de confianza $1 - \alpha$:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\lambda_2},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\lambda_1}\right).$$

Intervalos unilaterales:

- $\lambda_1 = 0 \to F_T(\lambda_2) = 1 - \alpha \to \lambda_2 = \chi^2_{n;\alpha} \longrightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\alpha}},\ +\infty\right).$
- $\lambda_2 = +\infty \to 1 - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha \to \lambda_1 = \chi^2_{n;1-\alpha} \longrightarrow \left(0,\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha}}\right).$

Intervalos bilaterales:

Si λ_1 y λ_2 son finitos, minimizamos uniformemente la longitud media:

$$E_{\sigma^2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\lambda_1} - \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2}{\lambda_2}\right] = \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) E_{\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu_0)^2\right],\ \forall \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$$

Puesto que el segundo factor no depende de λ_1, λ_2, el problema se reduce a minimizar $\lambda_1^{-1} - \lambda_2^{-1}$ con λ_1, λ_2 sujetos a $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1 - \alpha$. [2]

[2] $L(\lambda_1, \lambda_2, \lambda) = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} + \lambda[F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) - (1 - \alpha)]$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -\frac{1}{\lambda_1^2} - \lambda f_T(\lambda_1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \frac{1}{\lambda_2^2} + \lambda f_T(\lambda_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f_T(\lambda_1)\lambda_1^2 = f_T(\lambda_2)\lambda_2^2.$$

Existen tablas que proporcionan las soluciones de $f_T(\lambda_1)\lambda_1^2 = f_T(\lambda_2)\lambda_2^2$, dando lugar al intervalo de menor longitud esperada uniformemente. La asimetría de la distribución $\chi^2(n)$ hace que, en este caso, dicho intervalo no sea el de colas iguales. Sin embargo, la diferencia no es suficientemente importante (sobre todo para grandes muestras), y en la práctica se usa el intervalo de confianza de colas iguales, $\lambda_1 = \chi^2_{n,1-\alpha/2}$ y $\lambda_2 = \chi^2_{n,\alpha/2}$:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha/2}}, \ \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}} \right).$$

Intervalos de confianza para la varianza con media desconocida

$$(X_1, \dots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$$

Los intervalos se construyen a partir del siguiente pivote, estrictamente decreciente como función de σ^2:

$$\textit{Pivote: } T_{\sigma^2} \equiv T(X_1, \dots, X_n;\ \sigma^2) = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \to \chi^2(n-1)$$

El razonamiento usado en el caso de media conocida, conduce a intervalos análogos, cambiando $\sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu_0)^2$ por $(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2$ y la distribución $\chi^2(n)$ por $\chi^2(n-1)$.

Intervalos de confianza para σ^2 a nivel de confianza $1-\alpha$

Media conocida

- $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha/2}},\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}} \right).$
- $\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\alpha}},\ +\infty \right);\qquad \left(0,\ \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;1-\alpha}} \right).$

Media desconocida

- $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}} \right).$
- $\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\alpha}},\ +\infty \right);\qquad \left(0,\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;1-\alpha}} \right).$

Los bilaterales son aproximadamente iguales a los de menor longitud media uniformemente.

Ejemplo 6.3.1: *En una experiencia genética se eligieron, con reemplazamiento, 20 moscas de una caja experimental, y al medir las longitudes de ala se obtuvieron las siguientes: 93, 90, 97, 90, 93, 91, 96, 94, 91, 91, 88, 93, 95, 91, 89, 92, 87, 88, 90 y 86 (en décimas de milímetro). Suponiendo que la longitud de ala sigue una distribución normal, calcular un intervalo de confianza al nivel 0.9 para cada uno de los parámetros.*

$$X : \textit{Longitud de ala} \to \{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2);\ \mu \in \mathbb{R}^+,\quad \sigma^2 \in R^+\}$$

Intervalos de confianza para μ *y* σ^2:

$$\left(\overline{X} - t_{n-1;\ \alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1;\ \alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \right); \qquad \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}} \right).$$

Para una muestra de tamaño $n=20$ y nivel de confianza $1-\alpha=0.9$, se tiene $t_{19;\ 0.05}=1.729$, $\chi^2_{19;\ 0.05}=30.14$ y $\chi^2_{19;\ 0.95}=10.12$, y los intervalos son:

$$\left(\overline{X} - 1.729\frac{S}{\sqrt{20}},\ \overline{X} + 1.729\frac{S}{\sqrt{20}} \right), \qquad \left(\frac{19S^2}{30.14},\ \frac{19S^2}{10.12} \right)$$

Ya que en la realización muestral obtenida los valores de $\overline{X}$ y S son $\overline{x}=91.25$ y $s=2.93571$, a partir de estos datos se deduce que hay una confianza del 90 % de que la longitud de ala media esté en el intervalo $(90.115,\ 92.385)$ y, también, una confianza del 90 % de que la varianza esté en $(5.433,\ 16.18)$.

6.4. Intervalos de confianza en dos poblaciones normales

Basándonos de nuevo en el método pivotal y los resultados del Tema 2 relativos al muestreo en dos poblaciones normales, construimos ahora los intervalos de confianza óptimos para la diferencia de medias y el cociente de varianzas de tales poblaciones, basados en muestras independientes de cada una de ellas.

Las hipótesis en todo lo que sigue son:

- $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ *m.a.s. de* $X \to \{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2);\ \mu_1 \in \mathbb{R},\ \sigma_1^2 \in \mathbb{R}^+\}$.
- $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ *m.a.s. de* $Y \to \{\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2);\ \mu_2 \in \mathbb{R},\ \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+\}$.
- $(X_1, \ldots, X_{n_1})$ *y* $(Y_1, \ldots, Y_{n_2})$ *independientes.*

Como es usual, notaremos $\overline{X}$, $\overline{Y}$, S_1^2, S_2^2 a las medias y cuasivarianzas muestrales.

Intervalos de confianza para la diferencia de medias

Varianzas conocidas:

Pivote: $$T(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2};\ \mu_1 - \mu_2) = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \to \mathcal{N}(0, 1).$$

Tiene la misma estructura y distribución que el de la media con varianza conocida. Por tanto, la obtención de los intervalos es totalmente similar (cambiar $\overline{X}$ por $\overline{X} - \overline{Y}$, μ por $\mu_1 - \mu_2$, y $\sigma/\sqrt{n}$ por $\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$).

Varianzas desconocidas, pero iguales: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

Pivote:

$$T(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2};\ \mu_1 - \mu_2) = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \to t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}.$$

Tanto la estructura como la distribución son como las del pivote para la media con varianza desconocida y, por tanto, los intervalos se obtienen como aquellos.

Intervalos de confianza para $\mu_1 - \mu_2$ a nivel de confianza $1-\alpha$

Varianzas conocidas

- $\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \quad \overline{X} - \overline{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$
- $\left(-\infty, \quad \overline{X} - \overline{Y} + z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$
- $\left(\overline{X} - \overline{Y} - z_{\alpha}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \quad +\infty\right).$

Varianzas desconocidas, pero iguales

- $\left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \quad \overline{X} - \overline{Y} + t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right).$
- $\left(-\infty, \quad \overline{X} - \overline{Y} + t_{n_1+n_n-2;\ \alpha} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right).$
- $\left(\overline{X} - \overline{Y} - t_{n_1+n_2-2;\ \alpha} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \quad +\infty\right).$

Los bilaterales minimizan uniformemente la longitud media.

Intervalos de confianza para el cociente de varianzas

Medias conocidas:

Pivote:

$$T\left(X_1, \ldots, X_{n_1}, Y_1, \ldots, Y_{n_2};\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \frac{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \mu_2)^2 \Big/ n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2 \Big/ n_1\sigma_1^2} \to F(n_2, n_1)$$

$\forall \sigma_1^2, \sigma_2^2 \in \mathbb{R}^+,\ P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}(\lambda_1 < T_{\sigma_1^2,\sigma_2^2} < \lambda_2) = F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1)$, siendo F_T la función de distribución de $F(n_2, n_1)$, y esta probabilidad se expresa como:

$$P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 < \frac{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \mu_2)^2 \Big/ n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2 \Big/ n_1\sigma_1^2} < \lambda_2\right)$$

$$= P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1 \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \mu_2)^2/n_2} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \lambda_2 \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \mu_2)^2/n_2}\right).$$

Intervalos de confianza para el cociente de varianzas

Medias conocidas:

Pivote:

$$T\left(X_1,\dots,X_{n_1},Y_1,\dots,Y_{n_2};\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)=\frac{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2\Big/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2\Big/n_1\sigma_1^2}\rightarrow F(n_2,n_1)$$

$\forall \sigma_1^2,\sigma_2^2\in\mathbb{R}^+,\ P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}(\lambda_1<T_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}<\lambda_2)=F_T(\lambda_2)-F_T(\lambda_1)$, siendo F_T la función de distribución de $F(n_2,n_1)$, y esta probabilidad se expresa como:

$$P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1<\frac{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2\Big/n_2\sigma_2^2}{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2\Big/n_1\sigma_1^2}<\lambda_2\right)$$

$$=P_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left(\lambda_1\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\lambda_2\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}\right).$$

Por tanto, cada par de valores λ_1,λ_2 tales que $F_T(\lambda_2)-F_T(\lambda_1)=1-\alpha$ determinan un intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 al nivel $1-\alpha$:

$$\left(\lambda_1\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ \lambda_2\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}\right).$$

Intervalos unilaterales:

- $\lambda_1=0\rightarrow F_T(\lambda_2)=1-\alpha\rightarrow\lambda_2=F_{n_2,n_1;\alpha}\longrightarrow\left(0,\ F_{n_2,n_1;\alpha}\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}\right)$
- $\lambda_2=+\infty\rightarrow\lambda_1=F_{n_2,n_1;1-\alpha}\longrightarrow\left(F_{n_2,n_1;1-\alpha}\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ +\infty\right)$

Intervalos bilaterales:

Si λ_1 y λ_2 son finitos, podemos encontrar diferentes pares satisfaciendo $F_Z(\lambda_2)-F_Z(\lambda_1)=1-\alpha$ y, por tanto, diferentes intervalos bilaterales a nivel $1-\alpha$. Buscamos el que minimice uniformemente la longitud media:

$$(\lambda_2-\lambda_1)E_{\sigma_1^2,\sigma_2^2}\left[\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}\right],\quad\forall\sigma_1^2,\sigma_2^2\in\mathbb{R}^+.$$

Así, el problema es minimizar $\lambda_2 - \lambda_1$ sujeto a $F_T(\lambda_2) - F_T(\lambda_1) = 1-\alpha$, y su solución, como en el caso de la media con varianza conocida, es $f_T(\lambda_2) = f_T(\lambda_1)$.

De nuevo, la asimetría de la distribución F hace que estos valores no sean los de colas iguales, aunque en la práctica la diferencia no es significativa y son estos los que se usan, $\lambda_1 = F_{n_2,n_1;1-\alpha/2}$ y $\lambda_2 = F_{n_2,n_1;\alpha/2}$. Así, se obtiene el siguiente intervalo que aproxima al óptimo:

$$\left(F_{n_2,n_1;\,1-\alpha/2} \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ \ F_{n_2,n_1;\,\alpha/2} \frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2} \right).$$

Medias desconocidas:

Pivote: $T\left(X_1,\dots,X_{n_1},Y_1,\dots,Y_{n_2};\ \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right) = \dfrac{S_2^2\big/\sigma_2^2}{S_1^2\big/\sigma_1^2} \to F(n_2-1,n_1-1).$

Es similar en estructura y distribución al anterior y los intervalos son análogos, cambiando $\dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}$ y $F(n_2,n_1)$ por S_1^2/S_2^2 y $F(n_2-1,n_1-1)$.

Intervalos de confianza para σ_1^2/σ_2^2 a nivel de confianza $1-\alpha$

Medias conocidas

- $\left(F_{n_2,n_1;\,1-\alpha/2} \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ \ F_{n_2,n_1;\,\alpha/2} \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2} \right).$
- $\left(0,\ \ F_{n_2,n_1;\,\alpha} \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2}\right);\qquad \left(F_{n_2,n_1;\,1-\alpha} \dfrac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\mu_1)^2/n_1}{\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\mu_2)^2/n_2},\ \ +\infty\right).$

Medias desconocidas

- $\left(F_{n_2-1,n_1-1;\,1-\alpha/2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ \ F_{n_2-1,n_1-1;\,\alpha/2}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right).$
- $\left(0,\ \ F_{n_2-1,n_1-1;\,\alpha}\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\right);\qquad \left(F_{n_2-1,n_1-1;\,1-\alpha}\dfrac{S_1^2}{S_2^2},\ \ +\infty\right).$

Los intervalos bilaterales son aproximadamente iguales a los que minimizan uniformemente la longitud media.

Problema 1

Sea $\overline{X}$ la media de una muestra aleatoria de tamaño n de una población $\mathcal{N}(\mu, 16)$. Encontrar el menor valor de n para que $(\overline{X}-1,\ \overline{X}+1)$ sea un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza 0.9.

Ya que $(\overline{X}-1,\ \overline{X}+1)$ es un intervalo simétrico respecto de $\overline{X}$, tomamos el de menor longitud esperada a ese nivel e imponemos que éste lo contenga.

Teniendo en cuenta que α =0.1 y $z_{0.05} = 1.64485$:

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow \left(\overline{X} - 1.64485\frac{4}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + 1.64485\frac{4}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$1.64485\frac{4}{\sqrt{n}} \leq 1 \ \Rightarrow\ \sqrt{n} \geq 6.5794 \ \Rightarrow\ n \geq 43.288.$$

Se requiere, como mínimo, 44 observaciones muestrales.

Problema 2

La altura en cm. de los individuos varones de una población sigue una distribución $\mathcal{N}(\mu, 56.25)$. Si en una muestra aleatoria simple de tamaño 12 de dicha población se obtiene una altura media de 175 cm., determinar un intervalo de confianza para μ al nivel de confianza 0.95.

¿Qué tamaño de muestra es necesario para que el intervalo de confianza a dicho nivel tenga longitud menor que 1 cm?

I.C. para μ con $\sigma^2 = \sigma_0^2$ a nivel $1-\alpha$ $\longrightarrow \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right)$

$$\Big\downarrow\ n = 12,\ \sigma_0 = 7.5,\ \alpha = 0.05\ \rightarrow\ z_{0.025} = 1.96$$

$$\left(\overline{X} - 1.96\,\frac{7.5}{\sqrt{12}},\ \overline{X} + 1.96\,\frac{7.5}{\sqrt{12}}\right).$$

$$\Big\downarrow\ \overline{x} = 175$$

$$\left(175 - 1.96\,\frac{7.5}{\sqrt{12}},\ 175 + 1.96\,\frac{7.5}{\sqrt{12}}\right) = (170.76,\ 179.24)\ (cm).$$

Tamaño de muestra para que el intervalo tenga longitud menor que 1:

$$2z_{\alpha/2}\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} = 2\times 1.96\ \frac{7.5}{\sqrt{n}} < 1 \Rightarrow \sqrt{n} > 2\times 1.96\times 7.5 = 29.4.$$

$$\Downarrow$$

$$n > 864.36$$

Se requieren al menos 865 observaciones.

Problema 3

Una fábrica produce tornillos cuyo diámetro medio es 3 mm. Se seleccionan aleatoria e independientemente 12 de estos tornillos y se miden sus diámetros, que resultan ser 3.01, 3.05, 2.99, 2.99, 3.00, 3.02, 2.98, 2.99, 2.97, 2.97, 3.02 y 3.01. Suponiendo que el diámetro es una variable aleatoria con distribución normal, determinar un intervalo de confianza para la varianza al nivel de confianza 0.99, y una cota superior de confianza al mismo nivel. Interpretar los resultados en términos de la desviación típica del diámetro de los tornillos.

I.C. para σ^2 *con* $\mu = \mu_0$ *a n.c.* $1-\alpha \longrightarrow \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ \alpha/2}},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\ 1-\alpha/2}}\right)$

$$n = 12,\ \mu_0 = 3,\ \alpha = 0.01\ \rightarrow\ \chi^2_{12;\ 0.005} = 28.2997\ ,\ \chi^2_{12;\ 0.995} = 3.0738$$

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-3)^2}{28.2997},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-3)^2}{3.0738}\right) \xrightarrow{\sum_{i=1}^{12}(x_i-3)^2=0.006} (0.00021,\ \ 0.00195)\ (mm^2).$$

Cota superior de confianza al nivel $1-\alpha \longrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\,1-\alpha}}$.

$$\downarrow n=12,\ \mu_0=3,\ \alpha=0.01 \ \rightarrow\ \chi^2_{12;\,0.99}=3.5706$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-3)^2}{\chi^2_{12;\,0.99}} \xrightarrow{\sum_{i=1}^{12}(x_i-3)^2=0.006} \frac{0.006}{3.5706}=0.00168\ (mm^2).$$

Relación 6. Estimación por intervalos de confianza A. Hermoso Carazo
└ Problema 3

Cota superior de confianza al nivel $1-\alpha \longrightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2}{\chi^2_{n;\,1-\alpha}}$.

$$\downarrow n=12,\ \mu_0=3,\ \alpha=0.01 \ \rightarrow\ \chi^2_{12;\,0.99}=3.5706$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-3)^2}{\chi^2_{12;\,0.99}} \xrightarrow{\sum_{i=1}^{12}(x_i-3)^2=0.006} \frac{0.006}{3.5706}=0.00168\ (mm^2).$$

Interpretación en términos de la desviación típica:

- *Con una confianza del 99 %, podemos asegurar que la desviación típica del diámetro de los tornillos está comprendida entre* $\sqrt{0.00021}$ *mm. y* $\sqrt{0.00195}$ *mm; esto es, entre 0.01449 mm. y 0.04416 mm.*
- *También, con una confianza del 99 %, podemos asegurar que la desviación típica es menor o igual que* $\sqrt{0.00168}=$ *0.04099 mm.*

Problema 4

Las notas en cierta asignatura de 7 alumnos de una clase, elegidos de forma aleatoria e independiente son: 4.5, 3, 6, 7, 1.5, 5.2 y 3.6. Suponiendo que las notas tienen distribución normal, dar un intervalo de confianza para la varianza de las mismas al nivel de confianza 0.95.

I.C. para σ^2 con μ desconocida a n.c. $1-\alpha \longrightarrow$ $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ \alpha/2}}, \ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1;\ 1-\alpha/2}} \right)$

$$\downarrow \ n=7,\ \alpha=0.05 \ \rightarrow \ \chi^2_{6;\ 0.025}=14.4494,\ \chi^2_{6;\ 0.975}=1.2373$$

$$\left(\frac{6S^2}{14.4494}, \ \frac{6S^2}{1.2373} \right).$$

$$\downarrow \ \overline{x}=4.4 \ \rightarrow \ 6s^2=\sum_{i=1}^{7}(x_i-\overline{x})^2=20.98$$

$$\left(\frac{20.98}{14.4494}, \ \frac{20.98}{1.2373} \right) = (1.45196,\ 16.95628).$$

Problema 5

Dos muestras independientes, cada una de tamaño 7, de poblaciones normales con igual varianza, producen medias 4.8, 5.4 y cuasivarianzas muestrales 8.38 y 7.62, respectivamente. Encontrar un intervalo de confianza para la diferencia de medias al nivel de confianza 0.95.

I.C. para $\mu_1-\mu_2$ con varianzas desconocidas pero iguales a n.c. $1-\alpha$:

$$\overline{X}-\overline{Y} \mp t_{n_1+n_1-2;\ \alpha/2}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

$$\downarrow \ n_1=7,\ n_2=7,\ \alpha=0.05 \ \rightarrow \ t_{12;\ 0.025}=2.1788$$

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-2.1788\sqrt{\frac{6S_1^2+6S_2^2}{12}}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}}, \ \overline{X}-\overline{Y}+2.1788\sqrt{\frac{6S_1^2+6S_2^2}{12}}\sqrt{\frac{1}{7}+\frac{1}{7}} \right).$$

$$\downarrow \ \overline{x}=4.8,\ \ \overline{y}=5.4,\ \ s_1^2=8.38,\ \ s_2^2=7.62$$

$$\left(-0.6-2.1788\sqrt{\frac{96}{12}}\sqrt{\frac{2}{7}}, \ -0.6+2.1788\sqrt{\frac{96}{12}}\sqrt{\frac{2}{7}} \right) = (-3.89404,\ 2.69404)$$

Problema 6

La siguiente tabla presenta los salarios anuales (en miles de euros) de dos grupos de recién graduados de dos carreras diferentes. Suponiendo normalidad en los salarios de ambos grupos, determinar un intervalo de confianza para el cociente de las varianzas al nivel de confianza 0.90.

G.1	16.3	18.2	17.5	16.1	15.9	15.4	15.8	17.3	14.9	15.1				
G.2	13.2	15.1	13.9	14.7	15.6	15.8	14.9	18.1	15.6	15.3	16.2	15.2	15.4	16.6

I.C. para σ_1^2/σ_2^2 con medias desconocidas a nivel $1-\alpha$:

$$\left(F_{n_2-1,n_1-1;\ 1-\alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2},\ F_{n_2-1,n_1-1;\ \alpha/2} \frac{S_1^2}{S_2^2} \right).$$

$$\downarrow\ n_1 = 10,\ n_2 = 14,\ \alpha = 0.1\ \rightarrow\ F_{13,9;0.95} = 0.3684,\ F_{13,9;0.05} = 3.04878$$

$$\left(0.3684 \frac{S_1^2}{S_2^2},\ 3.04878 \frac{S_1^2}{S_2^2} \right).$$

$$\downarrow\ \overline{x} = 16.25,\quad \overline{y} = 15.4,\quad s_1^2 = 1.18722,\quad s_2^2 = 1.35231.$$

$$(0.32343,\ 2.67659).$$

El intervalo para σ_2^2/σ_1^2 es $(1/2.67659,\ 1/0.32343)$

Problema 7

Con objeto de estudiar la efectividad de un agente diurético, se eligen al azar 11 pacientes, aplicando dicho fármaco a seis de ellos y un placebo a los cinco restantes. La variable observada en esta experiencia fue la concentración de sodio en la orina a las 24 horas, que se supone tiene una distribución normal en ambos casos. Los resultados observados fueron:

DIURÉTICO: 20.4, 62.5, 61.3, 44.2, 11.1, 23.7

PLACEBO: 1.2, 6.9, 38.7, 20.4, 17,2

a) *Calcular un intervalo de confianza para el cociente de las varianzas al nivel 0.95.*

b) *Suponiendo que las varianzas son iguales, calcular un intervalo de confianza para la diferencia de las medias al nivel de confianza 0.9, y una cota inferior de confianza al mismo nivel. Interpretar los resultados.*

a) *I.C. para σ_2^2/σ_1^2 con medias desconocidas a nivel $1-\alpha$:*

$$\left(F_{n_1-1,n_2-1;\ 1-\alpha/2}\frac{S_2^2}{S_1^2},\ \ F_{n_1-1,n_2-1;\ \alpha/2}\frac{S_2^2}{S_1^2}\right).$$

$$\downarrow\ n_1=6,\ n_2=5,\ \alpha=0.05\ \rightarrow\ F_{5,4;\ 0.025}=9.36,\quad F_{5,4;\ 0.975}=0.135.$$

$$\left(0.135\ \frac{S_2^2}{S_1^2},\ \ 9.36\ \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)$$

$$\downarrow\ \overline{x}=37.2,\ \overline{y}=16.88,\ s_1^2=483.12,\ s_2^2=208.517.$$

$$(0.05827,\ \ 4.03982).$$

El intervalo de confianza para σ_1^2/σ_2^2 al nivel 0.95 es:

$$(1/4.03982,\ 1/0.05827)=(0.24754,\ 17.16247).$$

Nota: En lo que sigue trabajaremos bajo la hipótesis de que $\sigma_1^2=\sigma_2^2$. Esta es una suposición razonable ya que hay una confianza del 95 % de que el cociente σ_2^2/σ_1^2 esté en el intervalo $(0.05827,\ \ 4.03982)$, que contiene al valor 1.

b) *I.C. para $\mu_1-\mu_2$ con $\sigma_1^2=\sigma_2^2$, al nivel $1-\alpha$:*

$$\overline{X}-\overline{Y}\mp t_{n_1+n_2-2;\ \alpha/2}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}.$$

$$\downarrow\ n_1=6,\ n_2=5,\ \alpha=0.1,\ t_{9;\ 0.05}=1.833$$

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-1.833\sqrt{\frac{5S_1^2+4S_2^2}{9}}\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}},\ \ \overline{X}-\overline{Y}+1.833\sqrt{\frac{5S_1^2+4S_2^2}{9}}\sqrt{\frac{1}{6}+\frac{1}{5}}\right)$$

$$\downarrow\ \overline{x}=37.2,\ \overline{y}=16.88,\ s_1^2=483.12,\ s_2^2=208.517$$

$$(-0.77096,\ \ 41.41096).$$

A partir de los datos podemos afirmar, con una confianza del 90 %, que $\mu_1-\mu_2$ está comprendida entre -0.77096 y 41.41096 o, equivalentemente, que $\mu_2-\mu_1$ está en $(-41.41096,\ \ 0.77096)$.

Cota inferior de confianza para $\mu_1-\mu_2$ al nivel 0.9 :

$$\overline{X}-\overline{Y}-t_{n_1+n_2-2;\ \alpha}\sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\ \xrightarrow{t_{9;0.1}=1.383}\ 4.40685.$$

Con un 90 % de confianza, podemos afirmar que $\mu_1-\mu_2$ es mayor que 4.40685

Problema 8

Sea $(X_1,\ldots,X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria con distribución $U(0,\theta)$. Dado un nivel de confianza arbitrario, calcular el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente basado en un estadístico suficiente.

Estadístico suficiente $\longrightarrow T = \max(X_1,\ldots,X_n)$.

$$\forall\theta\in\mathbb{R}^+,\quad F_\theta^T(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{t^n}{\theta^n}, & 0\le t<\theta \\ 1, & t\ge\theta. \end{cases}$$

$$\Downarrow\ T\in(0,\theta),\ \forall\theta\in\mathbb{R}^+$$

$$F_\theta^T(T) = \frac{T^n}{\theta^n} \to U(0,1).$$

$\dfrac{T^n}{\theta^n}$ es un pivote, estrictamente decreciente en θ.

$$\forall\theta\in\mathbb{R}^+,\ \underbrace{P_\theta\left(a<\frac{T^n}{\theta^n}<b\right)} = P_\theta\left(\frac{1}{b}<\frac{\theta^n}{T^n}<\frac{1}{a}\right) = P_\theta\left(\frac{T}{b^{1/n}}<\theta<\frac{T}{a^{1/n}}\right).$$

$a,b\in[0,1]\ \longrightarrow\ b-a$

$$\forall a,b\in[0,1]\ /\ b-a=1-\alpha\ \Rightarrow\left(\frac{T}{b^{1/n}},\ \frac{T}{a^{1/n}}\right)\ \text{I.C. a nivel } 1-\alpha.$$

$$\downarrow\ b=a+1-\alpha\le 1\Rightarrow a\le\alpha$$

$$\forall a\in[0,\alpha]\Rightarrow\left(\frac{T}{(a+1-\alpha)^{1/n}},\ \frac{T}{a^{1/n}}\right)\ \text{I.C. a nivel } 1-\alpha.$$

Longitud media: $E_\theta[T]\left(a^{-1/n}-(a+1-\alpha)^{-1/n}\right)$

Minimizar $L(a)=a^{-1/n}-(a+1-\alpha)^{-1/n},\quad a\in[0,\alpha]$:

$$\frac{dL(a)}{da} = -\frac{1}{na^{1+1/n}}+\frac{1}{n(a+1-\alpha)^{1+1/n}}<0\quad (a<a+1-\alpha)\longrightarrow L \text{ decreciente.}$$

Por tanto, el mínimo de valor de L se alcanza en el máximo valor de $a\to a=\alpha$

$$\Downarrow$$

I.C. basado en T de menor longitud media uniformemente $\longrightarrow \left(T,\ \dfrac{T}{\alpha^{1/n}}\right)$.

Problema 9

Utilizando la desigualdad de Chebychev, dar un intervalo de confianza para p a nivel de confianza arbitrario, basado en una muestra de tamaño arbitrario de una variable aleatoria con distribución $B(1, p)$.

Buscamos un estimador insesgado en p, con varianza uniformemente acotada. Probamos con el UMVUE, $\overline{X}$:

$$E_p\left[\overline{X}\right] = p, \quad Var_p\left[\overline{X}\right] = \frac{p(1-p)}{n}, \quad \forall p \in (0,1).$$

$$p(1-p) \leq 1/4, \quad \forall p \in (0,1) \Rightarrow Var_p\left[\overline{X}\right] \leq 1/4n, \quad \forall p \in (0,1)$$

$$\Downarrow \; D.\ Chebychev$$

$$\forall k > 0, \quad \underbrace{P_p\left(|\overline{X} - p| < k\right)}_{P_p\left(\overline{X} - k < p < \overline{X} + k\right)} \geq 1 - \frac{Var_p\left[\overline{X}\right]}{k^2} \geq \underbrace{1 - \frac{1}{4nk^2}}_{1-\alpha \Rightarrow k = \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}}, \quad \forall p \in (0,1).$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\overline{X} - \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}, \quad \overline{X} + \frac{1}{2\sqrt{n\alpha}}\right).$$

Problema 10

Para una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{\theta^2}, \quad 0 < x < \theta,$$

encontrar el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente a nivel de confianza $1-\alpha$, basado en un estadístico suficiente

---

Estadístico suficiente $\longrightarrow$ $T = \max(X_1, \ldots, X_n)$ (*Teorema de Factorización*)

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+, \; F_\theta(x) = \int_0^x \frac{2t}{\theta^2} dt = \frac{x^2}{\theta^2}, \quad 0 \leq x < \theta \quad \Rightarrow \quad F_\theta^T(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{t^{2n}}{\theta^{2n}}, & 0 \leq t < \theta \\ 1, & t \geq \theta. \end{cases}$$

$$\Downarrow \; T \in (0, \theta), \; \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

$$F_\theta^T(T) = \frac{T^{2n}}{\theta^{2n}} \to U(0,1).$$

$\frac{T^{2n}}{\theta^{2n}}$ *es un pivote, estrictamente decreciente en* θ.

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+, \ \underbrace{P_\theta\left(a < \frac{T^{2n}}{\theta^{2n}} < b\right)}_{a,b\in[0,1] \ \longrightarrow \ b-a} = P_\theta\left(\frac{1}{b} < \frac{\theta^{2n}}{T^{2n}} < \frac{1}{a}\right) = P_\theta\left(\frac{T}{\sqrt{b^{1/n}}} < \theta < \frac{T}{\sqrt{a^{1/n}}}\right).$$

$$\forall a,b \in [0,1] \ / \ b-a = 1-\alpha \ \Rightarrow \left(\frac{T}{\sqrt{b^{1/n}}}, \ \frac{T}{\sqrt{a^{1/n}}}\right) \ \textit{I.C. a nivel } 1-\alpha.$$

$$\downarrow \ b = a+1-\alpha \leq 1 \Rightarrow a \leq \alpha$$

$$\forall a \in [0,\alpha] \Rightarrow \left(\frac{T}{\sqrt{(a+1-\alpha)^{1/n}}}, \ \frac{T}{\sqrt{a^{1/n}}}\right) \ \textit{I.C. a nivel } 1-\alpha.$$

Longitud media: $E_\theta[T]\left(\sqrt{a^{-1/n}} - \sqrt{(a+1-\alpha)^{-1/n}}\right)$

Minimizar $L(a) = \sqrt{a^{-1/n}} - \sqrt{(a+1-\alpha)^{-1/n}}, \quad a \in [0,\alpha]$:

$$\frac{dL(a)}{da} = -\frac{1}{2na^{1+2/n}} + \frac{1}{2n(a+1-\alpha)^{1+2/n}} < 0 \ \ (a < a+1-\alpha) \longrightarrow L \text{ decrece.}$$

Por tanto, el mínimo de valor de L se alcanza en el máximo valor de $a \to a = \alpha$

$$\Downarrow$$

I.C. basado en T de menor longitud media uniformemente $\longrightarrow \left(T, \ \frac{T}{\sqrt{\alpha^{1/n}}}\right)$

Problema 11

Para una muestra de tamaño n de una variable aleatoria con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2}, \quad x > \theta$$

encontrar el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente a nivel de confianza $1-\alpha$, basado en el estimador máximo verosímil de θ.

Estimador máximo verosímil $\longrightarrow \ T = \min(X_1, \ldots, X_n)$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^+, \ F_\theta(x) = \int_\theta^x \frac{\theta}{t^2}dt = 1 - \frac{\theta}{x}, \quad x > \theta \quad \Rightarrow \quad F_\theta^T(t) = \begin{cases} 0, & t < \theta \\ 1 - \frac{\theta^n}{t^n}, & t \geq \theta. \end{cases}$$

$$\Downarrow \ T > \theta, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+$$

$$F_\theta^T(T) = 1 - \frac{\theta^n}{T^n} \to U(0,1).$$

Puesto que $\frac{\theta^n}{T^n}$ tiene también distribución $U(0,1)$, es también pivote, y, para mayor comodidad, trabajamos con éste, que es estrictamente creciente en θ.

$$\forall\theta \in \mathbb{R}^+, \quad \underbrace{P_\theta\left(a < \frac{\theta^n}{T^n} < b\right)}_{} = P_\theta\left(Ta^{1/n} < \theta < Tb^{1/n}\right).$$

$$a, b \in [0,1] \longrightarrow b - a$$

$$\forall a, b \in [0,1] \;/\; b - a = 1 - \alpha \;\Rightarrow \left(Ta^{1/n}, \;\; Tb^{1/n}\right) \;\; \textit{I.C. a nivel } 1-\alpha.$$

$$\downarrow \; b = a + 1 - \alpha \leq 1 \Rightarrow a \leq \alpha$$

$$\forall a \in [0,\alpha] \Rightarrow \left(Ta^{1/n}, \;\; T(a+1-\alpha)^{1/n}\right) \;\; \textit{I.C. a nivel } 1-\alpha.$$

Longitud media: $E_\theta[T]\left((a+1-\alpha)^{1/n} - a^{1/n}\right)$

Minimizar $L(a) = (a+1-\alpha)^{1/n} - a^{1/n}, \quad a \in [0,\alpha]$:

$$\frac{dL(a)}{da} = \frac{1}{n(a+1-\alpha)^{1-1/n}} - \frac{1}{na^{1-1/n}} < 0 \;\; (a+1-\alpha > a) \longrightarrow L \text{ decreciente.}$$

Por tanto, L alcanza el mínimo valor en el máximo valor de $a \to a = \alpha$.

$$\Downarrow$$

I.C. basado en T de menor longitud media uniformemente $\longrightarrow \left(T\alpha^{1/n}, \;\; T\right)$.