

TOPOLOGÍA II

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

Competencias básicas

Las competencias que debe alcanzar un alumno en este curso son las siguientes:

(a) **Tema 0: Preliminares**

- Cocientes topológicos: discos con borde identificado y esquemas.

(b) **Tema 1: Grupo Fundamental**

- Comprensión del concepto de homotopía.
- Desarrollo de la intuición geométrica: teoría de retractos de deformación.
- El grupo fundamental de \mathbb{S}^1 y consecuencias: Teoremas del punto fijo de Brower, fundamental del Algebra, invarianza de la dimensión y del borde,...
- Manejo del Teorema de Seifert-Van Kampen como herramienta de cálculo.

(c) **Tema 2: Espacios Recubridores**

- Levantamiento de aplicaciones. Teorema de Monodromía.
- Acción del grupo fundamental de la base sobre la fibra de un punto.
- Acción del grupo de Automorfismos sobre el recubridor: recubridores regulares.
- Existencia y clasificación de los recubridores de un espacio.
- Recubridor universal y local simple-conexión.

(d) **Tema 3: Superficies Topológicas**

- Concepto de superficie y ejemplos.
- Poliedros y triangulaciones: característica de Euler y orientabilidad.
- El Teorema de Radó: representación poligonal y esquemas.
- Clasificación de las superficies compactas. Suma conexa de superficies.
- Superficies y teoría de recubridores.

TEMA 0: Preliminares

En este tema introductorio repasaremos algunos resultados elementales de topología.

1. Topología básica

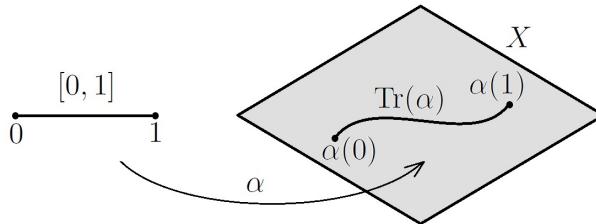
A lo largo de este curso (X, τ) denotará un espacio topológico. Usualmente, y en ausencia de ambigüedad, omitiremos la referencia a la topología τ y escribiremos simplemente X .

1.1. Arcos en un espacio topológico

Por definición, un *arco* en un espacio topológico X es una aplicación continua

$$\alpha: [0, 1] \rightarrow X,$$

donde el intervalo unidad $[0, 1]$ se entiende dotado de la topología eucliana usual. A los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$ se les llama *puntos inicial y final* del arco α respectivamente (y se dirá que α une o conecta los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$); también se dice que $\{\alpha(0), \alpha(1)\}$ son los *extremos* del arco α . El subespacio topológico de X dado por $\alpha([0, 1])$ será referido como *traza del arco* α , y escrito $\text{Tr}(\alpha)$. En ocasiones, y si ello no implica ambigüedad, identificaremos un arco con su traza.



El arco más simple que podemos construir sobre un espacio topológico es el constante, que para cada $p \in X$ viene definido por

$$\epsilon_p: [0, 1] \rightarrow X, \quad \epsilon_p(t) = p \quad \text{para todo } t \in [0, 1].$$

También es posible generar nuevos arcos a partir de unos dados de forma sencilla.

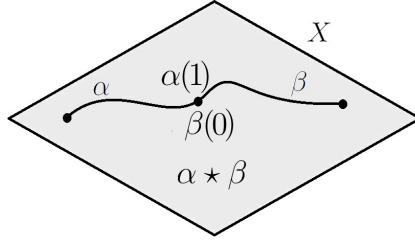
Definición 1.1 *Dados arcos $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha(1) = \beta(0)$ se definen*

- $\bar{\alpha}: [0, 1] \rightarrow X, \quad \bar{\alpha}(t) := \alpha(1 - t).$
- $\alpha * \beta: [0, 1] \rightarrow X, \quad \alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$

Obsérvese que $\text{Tr}(\bar{\alpha}) = \text{Tr}(\alpha)$, y los puntos inicial y final de $\bar{\alpha}$ son $\alpha(1)$ y $\alpha(0)$. Análogamente, $\text{Tr}(\alpha * \beta) = \text{Tr}(\alpha) \cup \text{Tr}(\beta)$ y los puntos inicial y final de $\alpha * \beta$ son $\alpha(0)$ y $\beta(1)$.

Definición 1.2 *Un espacio topológico X se dice arcoconexo si para cualesquiera $p, q \in X$ existe un arco $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ conectando p y q .*

Un espacio topológico X se dice localmente arcoconexo si todo punto admite una base de entornos arcoconexos (con la topología inducida).



Los ejemplos más simples de espacios arcoconexos son los subconjuntos convexos, y más generalmente los estrellados desde un punto, de un espacio euclíadiano. Recordemos que un subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se dice estrellado con centro $p_0 \in A$ si para todo punto $p \in A$ el segmento $[p_0, p] \subset A$. Trivialmente la imagen por una aplicación continua de un espacio arcoconexo es un espacio arcoconexo.

Es fácil ver que si $X = A \cup B$, con A y B subespacios arcoconexos no disjuntos, entonces X es arcoconexo. En efecto, fijado $x \in A \cap B$, para cualquiera $p \in X$ existe un arco $\alpha_p: [0, 1] \rightarrow X$ con traza en A si $p \in A$ ó en B si $p \in B$ satisfaciendo $\alpha_p(0) = x$ y $\alpha_p(1) = p$. Por tanto para cualesquiera $p, q \in X$ el arco $\bar{\alpha}_p * \alpha_q$ conecta p con q , de donde X es arcoconexo.

Dado un punto $p \in X$, la *arcocomponente* de p en X , que denotaremos por \mathcal{C}_p , se define como el mayor subespacio arcoconexo de X conteniendo a p . En otras palabras, \mathcal{C}_p es la unión de todos los subespacios arcoconexos de X que contienen a p . Como $\{p\}$ es un subespacio arcoconexo que contiene a p , $p \in \mathcal{C}_p$. Como la traza de un arco es arcoconexa, la identidad

$$\mathcal{C}_p = \{q \in X : \text{existe un arco en } X \text{ con uniendo } p \text{ y } q\}$$

es evidente. Obviamente \mathcal{C}_p , dotado con la topología inducida, es arcoconexo para todo $p \in X$. Además X es la unión disjunta de sus arcocomponentes.

Proposición 1.3 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (I) *Todo espacio arcoconexo es conexo.*
- (II) *Las arcocomponentes de un espacio localmente arcoconexo son abiertas (y por tanto también cerradas).*
- (III) *Todo espacio conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.*
- (IV) *Todo abierto conexo (dominio) de un espacio euclíadiano es arcoconexo.*

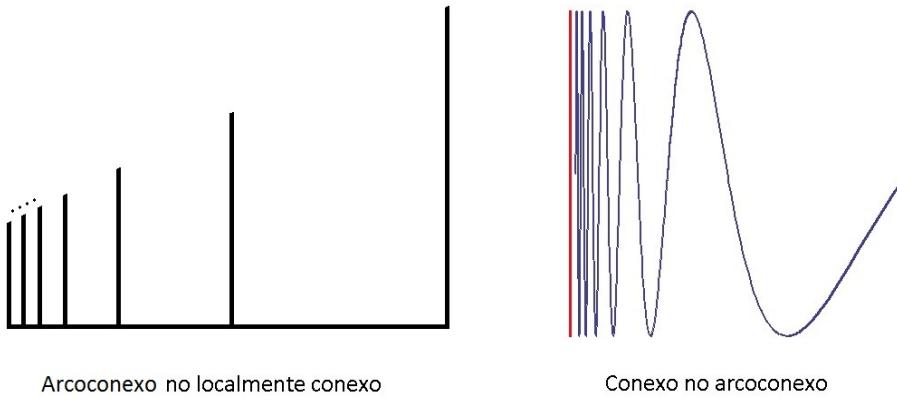
DEMOSTRACIÓN : Para probar (i) supongamos que X es un espacio arcoconexo y fijemos $x \in X$. Como arriba, para cada $p \in X$ existe un arco $\alpha_p: [0, 1] \rightarrow X$ con $\alpha_p(0) = x$ y $\alpha_p(1) = p$. Como la traza de un arco es conexa (imagen continua de un conexo), $X = \bigcup_{p \in X} \text{Tr}(\alpha_p)$ es unión de conexos con intersección no vacía, y por tanto es conexo.

Para probar (ii) asumamos que X es localmente arcoconexo. Sea \mathcal{C} una arcocomponente de X y tomemos un punto arbitrario $p \in \mathcal{C}$. Por arcoconexión local existe una base de entornos arcoconexos de p . Elijamos un entorno arcoconexo V de p , y observemos que $V \subset \mathcal{C}_p = \mathcal{C}$. Esto prueba que p es un punto interior de \mathcal{C} , y por tanto que \mathcal{C} es abierto. Como X es la unión *disjunta* de sus arcocomponentes, el complementario de una arcocomponente de X es la unión del resto de arcocomponentes de X , luego un subconjunto abierto. Esto prueba que cada arcocomponente es cerrada en X .

Para probar (iii) supongamos que X es conexo y localmente arcoconexo. Sea $\mathcal{C} \neq \emptyset$ una arcocomponente de X . Del item (ii) deducimos que \mathcal{C} es abierta y cerrada, de donde por la conexión de X inferimos que $\mathcal{C} = X$ y por tanto X es arcoconexo.

El item (iv) es corolario del (iii). Téngase en cuenta que un abierto de un espacio localmente arcoconexo es localmente arcoconexo, y por tanto los abiertos euclidianos son localmente arcoconexos. ■

Observación 1.4 Al igual que pasaba con la conexión topológica, existen espacios arcoconexos que no localmente arcoconexos. También se conocen espacios conexos que no son arcoconexos.



1.2. Identificaciones y cocientes topológicos

Repasaremos brevemente el concepto de identificación topológica y topología cociente, presentando algunos ejemplos. Recordemos que dada una aplicación sobreyectiva $f: X \rightarrow Y$, un conjunto $A \subset X$ se dice f -saturado si $f^{-1}(f(A)) = A$.

Definición 1.5 Sea (X, τ) un espacio topológico, Y un conjunto y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva.

- La topología final en Y para la aplicación f se define como

$$\tau(f) := \{O' \subset Y : f^{-1}(O') \in \tau\} = \{f(O) : O \in \tau \text{ y } f\text{-saturado}\}.$$

El espacio $(Y, \tau(f))$ es conocido como espacio identificación de (X, τ) vía f .

- Si τ' es una topología en Y , una aplicación $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ se dirá una identificación topológica si $\tau' = \tau(f)$.

La comprobación de que efectivamente $\tau(f)$ es una topología en Y es elemental.

Observación 1.6 Supongamos que (X, τ) es un espacio topológico y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. Es inmediato comprobar que:

- (a) $\tau(f)$ es la mayor topología en Y que hace a f continua, esto es, si τ' es una topología en Y y $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ es continua entonces $\tau' \subset \tau(f)$. En particular, reparemos en que $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau(f))$ es continua.

- (b) Un conjunto $F' \subset Y$ es cerrado en $(Y, \tau(f))$ si y sólo si $f^{-1}(F')$ es cerrado en τ .
- (c) $F' \subset Y$ es cerrado en $(Y, \tau(f))$ si y sólo si existe $F \subset X$ cerrado y f -saturado con $f(F) = F'$.
- (d) $(Y, \tau(f))$ es Hausdorff si y sólo si para cualesquiera $y_1, y_2 \in Y$, $y_1 \neq y_2$, existen abiertos f -saturados disjuntos $O_1, O_2 \in \tau$ tales que $f^{-1}(y_j) \subset O_j$, $j = 1, 2$.
- (e) $(Y, \tau(f))$ es II-Axioma de Numerabilidad si y sólo si existe una familia \mathcal{B} de abiertos f -saturados en X satisfaciendo las siguientes propiedades:
- \mathcal{B} es numerable.
 - Todo abierto f -saturado de X es unión de abiertos de \mathcal{B} .
- (f) Si (X, τ) es conexo (arcoc conexo, compacto) entonces $(Y, \tau(f))$ es conexo (arcoc conexo, compacto).

La siguiente proposición establece un criterio muy útil para el estudio de la continuidad de aplicaciones con dominio $(Y, \tau(f))$.

Proposición 1.7 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. Sea (Z, τ') un espacio topológico y $h: Y \rightarrow Z$ una aplicación. Entonces*

$$h: (Y, \tau(f)) \rightarrow (Z, \tau') \text{ es continua} \iff h \circ f: (X, \tau) \rightarrow (Z, \tau') \text{ es continua.}$$

DEMOSTRACIÓN: La implicación \implies es trivial ya que la composición de continuas es continua.

Para probar \impliedby tomemos un abierto arbitrario $O' \subset Z$. La continuidad de $h \circ f$ implica que $f^{-1}(h^{-1}(O')) \in \tau$, de donde $h^{-1}(O') \in \tau(f)$. Esto prueba que h es continua.

■

Existe una íntima relación entre la topología final y la topología cociente. Expliquemos los detalles.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Consideremos una relación de equivalencia R en X y construyamos el espacio cociente X/R . Denotemos por $\pi: X \rightarrow X/R$ a la correspondiente proyección.

Definición 1.8 *La topología final $\tau(\pi)$ en X/R para $\pi: X \rightarrow X/R$ es conocida como la topología cociente inducida por la relación R en X/R . El espacio topológico $(X/R, \tau(\pi))$ es referido como el espacio topológico cociente de (X, τ) por la relación R .*

En realidad el concepto de topología cociente no es sino una formulación equivalente del de identificación topológica. Para comprobarlo introduzcamos alguna notación.

Dada una aplicación sobreyectiva $f: X \rightarrow Y$, induciremos en X la siguiente relación de equivalencia:

$$p \sim_f q \iff f(p) = f(q).$$

Si denotamos por $[p]$ a la clase de equivalencia de $p \in X$ por \sim_f , y por $\pi_f: X \rightarrow X/\sim_f$, $\pi_f(p) = [p]$, a la correspondiente proyección al cociente, existe una única biyección $\hat{f}: X/\sim_f \rightarrow Y$ tal que $\hat{f} \circ \pi_f = f$. Para ser más precisos,

$$\hat{f}: X/\sim_f \rightarrow Y, \quad \hat{f}([p]) := f(p).$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \pi \downarrow & \nearrow \cong \hat{f} & \\ X/\sim_f & & \end{array}$$

Proposición 1.9 *Sea (X, τ) un espacio topológico y $f: X \rightarrow Y$ una aplicación sobreyectiva. Entonces*

$$\hat{f}: (X/\sim_f, \tau(\pi_f)) \rightarrow (Y, \tau(f))$$

es un homeomorfismo.

Esta proposición expresa el hecho de que, salvo un homeomorfismo canónico, todo espacio identificación es un cociente topológico.

DEMOSTRACIÓN: La biyectividad de \hat{f} es trivial.

Como $\hat{f} \circ \pi_f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau(f))$ coindice con la aplicación continua f , la Proposición 1.7 garantiza que $\hat{f}: (X/\sim_f, \tau(\pi_f)) \rightarrow (Y, \tau(f))$ es continua. Recíprocamente, como $\hat{f}^{-1} \circ f: (X, \tau) \rightarrow (X/\sim_f, \tau(\pi_f))$ coincide con la aplicación continua π_f , la Proposición 1.7 garantiza que $\hat{f}^{-1}: (Y, \tau(f)) \rightarrow (X/\sim_f, \tau(\pi_f))$ es continua. ■

Otro resultado interesante es el siguiente:

Corolario 1.10 *Sea (X_j, τ_j) un espacio topológico, R_j una relación de equivalencia en X_j y $\pi_j: X_j \rightarrow X_j/R_j$ la proyección al cociente, $j = 1, 2$. Si $f: (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ es una continua satisfaciendo $pR_1q \implies f(p)R_2f(q)$, entonces la única aplicación*

$$\hat{f}: (X_1/R_1, \tau(\pi_1)) \rightarrow (X_2/R_2, \tau(\pi_2))$$

tal que $\hat{f} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ f$ es continua.

En otras palabras, el corolario expresa la comutatividad del diagrama de aplicaciones asociado a las composiciones

$$X_1 \xrightarrow{\pi_1} (X_1/R_1, \tau(\pi_1)) \xrightarrow{\hat{f}} (X_2/R_2, \tau(\pi_2)), \quad X_1 \xrightarrow{f} X_2 \xrightarrow{\pi_2} (X_2/R_2, \tau(\pi_1))$$

Es interesante tener criterios manejables que simplifiquen el reconocimiento de las identificaciones topológicas, y por tanto, la comprensión de la naturaleza de algunos cocientes topológicos. A ese fin responde la siguiente proposición.

Proposición 1.11 *Una aplicación $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau')$ es una identificación topológica si satisface alguna de las siguientes condiciones:*

- (a) f es continua, sobreyectiva y abierta.
- (b) f es continua sobreyectiva y cerrada.
- (c) f es continua y sobreyectiva, (X, τ) es compacto e (Y, τ') es Hausdorff.
- (d) f es continua y existe $h: (Y, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ continua tal que $f \circ h = \text{Id}_Y$ (f tiene una inversa continua a la derecha).

DEMOSTRACIÓN: Probemos (a). Supongamos que f es continua, sobreyectiva y abierta y veamos que es una identificación topológica, esto es, que $\tau' = \tau(f)$. Como f es continua y sobreyectiva $\tau' \subset \tau(f)$, ya que la topología final es la más grande topología en Y haciendo continua a f . Tomemos ahora $O' \in \tau(f)$. Por definición de la topología final para f tenemos $f^{-1}(O') \subset \tau$, y como f es abierta y sobre que $O' = f(f^{-1}(O')) \in \tau'$. Esto prueba que $\tau(f) \subset \tau'$ y por tanto que $\tau' = \tau(f)$.

Item (b) es totalmente análogo al (a) por un argumento dual. Item (c) se sigue de (b) y del hecho de que toda aplicación continua de un compacto en un Hausdorff es cerrada.

Para probar (d) tomemos $O' \in \tau(f)$, esto es, satisfaciendo $O' \subset Y$ y $f^{-1}(O') \in \tau$. Usando las hipótesis y la continuidad de h inferimos que $O' = h^{-1}(f^{-1}(O')) \in \tau'$. Esto prueba que $\tau(f) \subset \tau'$, y como al ser f continua la otra inclusión siempre es cierta, también que $\tau(f) = \tau'$. ■

Estudiemos, como aplicación práctica del Corolario 1.10 y la Proposición 1.11, los tres modelos topológicos estandar del espacio proyectivo.

Definición 1.12 *Por definición, el espacio proyectivo \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}$, es el espacio cociente de la esfera euclíadiana (\mathbb{S}^n, τ_u) por la relación $p \sim q \iff p = \pm q$:*

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{S}^n / \sim, \tau_u / \sim).$$

De la Observación 1.6 se infiere que \mathbb{P}^n es un espacio arcoconexo, compacto, Hausdorff y II-Axioma de Numerabilidad.

Proposición 1.13 *Los siguientes espacios cocientes son homeomorfos al espacio proyectivo \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}$:*

(I) *El espacio cociente $((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1), n \in \mathbb{N}$, por la relación*

$$p \sim_1 q \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : p = \lambda q.$$

(II) *El espacio cociente $(\overline{\mathbb{B}}^n(0, 1) / \sim_2), n \in \mathbb{N}$, por la relación*

$$p \sim_2 q \iff \|p - q\| \in \{0, 2\}.$$

$$Aquí \overline{\mathbb{B}}^n(0, 1) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q\| \leq 1\}.$$

DEMOSTRACIÓN: La aplicación continua $f: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $f(p) := p/\|p\|$, es compatible con las relaciones de equivalencia en $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ y \mathbb{S}^n explicitadas en Proposición 1.13-(i) y Definición 1.2, respectivamente. Por tanto podemos utilizar el Corolario 1.10 e inducir una aplicación continua $\hat{f}: ((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1) \rightarrow \mathbb{P}^n$ entre los espacios topológicos cocientes. De igual forma la aplicación inclusión $i: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, obviamente continua, induce otra aplicación continua $\hat{i}: \mathbb{P}^n \rightarrow ((\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim_1)$ entre ambos cocientes, que claramente es la inversa de \hat{f} . Por tanto $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim_1$ y \mathbb{P}^n son homeomorfos, lo que prueba (i).

Comprobemos ahora (ii). Llamemos $\mathbb{S}_+^n := \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$ y \sim_0 la relación de equivalencia en \mathbb{S}_+^n dada por $p \sim_0 q \iff p = q$ ó $p, q \in \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} = 0\}$ y $p = \pm q$.

La aplicación $h: \overline{\mathbb{B}}^n(0, 1) \rightarrow \mathbb{S}_+^n$, $h(x) := (x, +\sqrt{1 - \|x\|^2})$, es un homeomorfismo compatible con las relaciones de equivalencia \sim_2 en $\overline{\mathbb{B}}^n(0, 1)$ y \sim_0 en \mathbb{S}_+^n , por lo que el Corolario 1.10 induce un homeomorfismo $\hat{h}: \overline{\mathbb{B}}^n(0, 1) / \sim_2 \rightarrow \mathbb{S}_+^n / \sim_0$. Para acabar, obsérvese que la aplicación $j: \mathbb{S}_+^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, $j(q) := [q]$, es una identificación topológica (esto es, $\tau(j) = \tau_u / \sim$) ya que es continua, sobreyectiva y va de un compacto en un Hausdorff; úsese Proposición 1.11-(c). Como $\sim_j = \sim_0$, la Proposición 1.9 garantiza que el cociente \mathbb{S}_+^n / \sim_0 es homeomorfo a \mathbb{P}^n , probando (ii). ■

Ejercicio 1.14 Las siguientes aplicaciones entre espacios euclidianos son identificaciones topológicas:

- (I) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$; utilícese Proposición 1.11-(a).

Como consecuencia,

$$\mathbb{R}/\sim \cong \mathbb{S}^1, \text{ donde } t \sim s \iff t - s \in \mathbb{Z}.$$

- (II) $[0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$, $t \mapsto e^{2\pi it} = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$; utilícese Proposición 1.11-(b).

Como consecuencia,

$$[0, 1]/\sim \cong \mathbb{S}^1, \text{ donde } t \sim s \iff |t - s| \in \{0, 1\}.$$

- (III) $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $(t_1, t_2) \mapsto (e^{2\pi it_1}, e^{2\pi it_2})$; utilícese Proposición 1.11-(a).

Como consecuencia,

$$\mathbb{R}^2/\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \text{ donde } (t_1, t_2) \sim (s_1, s_2) \iff t_j - s_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2.$$

- (IV) $[0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $(t_1, t_2) \mapsto (e^{2\pi it_1}, e^{2\pi it_2})$; utilícese Proposición 1.11-(b).

Como consecuencia,

$$[0, 1]^2/\sim \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, \text{ donde } (t_1, t_2) \sim (s_1, s_2) \iff |t_j - s_j| \in \{0, 1\}, j = 1, 2.$$

- (V) $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $p \mapsto p/\|p\|$, $n \in \mathbb{N}$; utilícese Proposición 1.11-(d).

Como consecuencia,

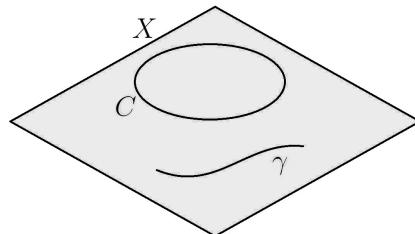
$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim \cong \mathbb{S}^n, n \in \mathbb{N}, \text{ donde } p \sim q \iff p/\|p\| = q/\|q\|.$$

2. Espacios cociente de discos topológicos

En esta sección vamos a presentar algunas construcciones sobre discos topológicos que serán de gran utilidad a lo largo del curso. Comencemos fijando alguna notación.

En lo que sigue X será un espacio topológico.

Definición 2.1 Por definición, un subespacio topológico $C \subset X$ es una curva de Jordan en X si es homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Análogamente, un subespacio topológico $\gamma \subset X$ es un arco de Jordan en X si es homeomorfo a $[0, 1]$. Un arco de Jordan abierto en X es un subespacio topológico $\gamma \subset X$ homeomorfo a $]0, 1[$.



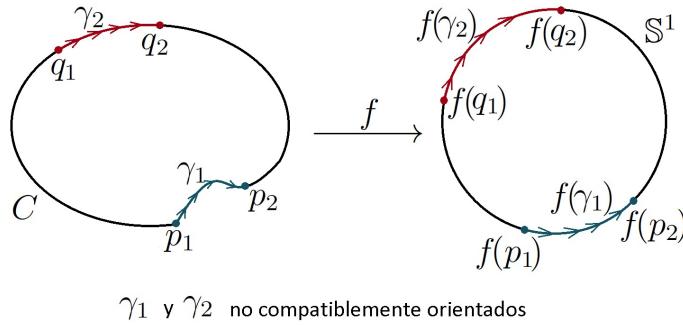
Si $\gamma \subset X$ es un arco de Jordan y $\alpha: [0, 1] \rightarrow \gamma$ es un homeomorfismo, a los puntos $\alpha(0)$ y $\alpha(1)$, que no dependen del homeomorfismo α utilizado, se les llama extremos del arco. Denotaremos por $V(\gamma) := \{\alpha(0), \alpha(1)\}$ al conjunto formado por los extremos del arco, e $\text{Int}(\gamma)$ al arco de Jordan abierto $\gamma \setminus V(\gamma)$. Por definición, una orientación de γ es una ordenación de sus extremos. Obviamente γ admite dos orientaciones, a saber $(\alpha(0), \alpha(1))$ y $(\alpha(1), \alpha(0))$.

Definición 2.2 Dado un arco de Jordan γ en la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ de extremos $\{p_1, p_2\}$, la orientación (p_1, p_2) se dirá positiva si al recorrer de forma continua γ de p_1 a p_2 se sigue el sentido contrario a las agujas del reloj, esto es, creciente respecto del argumento en \mathbb{S}^1 . En otro caso se dirá negativa.

La expresión recorrer un arco γ se identifica con establecer una parametrización $\alpha: [0, 1] \rightarrow \gamma$ que determine un sentido de recorrido de γ , esto es, empezando en $\alpha(0)$ y acabando en $\alpha(1)$ a través de los puntos $\alpha(t)$, $t \in [0, 1]$.

Definición 2.3 Sea C una curva de Jordan en X . Sean γ_1 y γ_2 dos arcos de Jordan orientados en C , y denotemos por (p_1, p_2) y (q_1, q_2) las orientaciones de γ_1 y γ_2 , respectivamente (con esta notación $V(\gamma_1) = \{p_1, p_2\}$ y $V(\gamma_2) = \{q_1, q_2\}$).

Los arcos γ_1 y γ_2 se dirán compatiblemente orientados si existe un homeomorfismo $f: C \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que las orientaciones $(f(p_1), f(p_2))$ de $f(\gamma_1)$ y $(f(q_1), f(q_2))$ de $f(\gamma_2)$ tienen el mismo carácter (esto es, ambas son positivas o negativas).



Para la consistencia de la anterior definición, es importante observar que la compatibilidad o no compatibilidad de las orientaciones dadas en γ_1 y γ_2 no depende del homeomorfismo $f: C \rightarrow \mathbb{S}^1$ auxiliar utilizado.

En efecto, si $h: C \rightarrow \mathbb{S}^1$ es otro homeomorfismo entonces $f \circ h^{-1}: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es un homeomorfismo de la circunferencia unidad y por tanto tiene un comportamiento monótono en el argumento, a saber, o bien $f \circ h^{-1}$ es creciente en el argumento (respeta el sentido positivo o contrario a las agujas del reloj) o $f \circ h^{-1}$ es decreciente en el argumento (revierte el sentido positivo en sentido negativo). Por tanto, si $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow C$ es una parametrización de γ_1 compatible con la orientación (p_1, p_2) (esto es, $(\gamma_1(0) = p_1$ y $\gamma_1(1) = p_2$) y análogamente $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow C$ respecto a (q_1, q_2) , se tiene que:

- Los arcos $h \circ \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ y $h \circ \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tienen el mismo carácter de monotonía (esto es, ambos son crecientes en el argumento o ambos son decrecientes) si y sólo si los arcos $f \circ \gamma_1 \equiv ((f \circ h^{-1}) \circ h) \circ \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ y $f \circ \gamma_2 \equiv ((f \circ h^{-1}) \circ h) \circ \gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tienen el mismo carácter de monotonía.
- Los arcos $h \circ \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ y $h \circ \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tienen distinto carácter de monotonía (uno es creciente en el argumento y el otro decreciente) si y sólo si los arcos $f \circ \gamma_1 \equiv ((f \circ h^{-1}) \circ h) \circ \gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ y $f \circ \gamma_2 \equiv ((f \circ h^{-1}) \circ h) \circ \gamma_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ tienen distinto carácter de monotonía.

De aquí se infiere, por definición, que la equivalencia o no equivalencia del carácter de las orientaciones $(f(p_1), f(p_2))$ en $f(\gamma_1)$ y $(f(q_1), f(q_2))$ en $f(\gamma_2)$ como arcos de \mathbb{S}^1 no depende del homeomorfismo f utilizado como habíamos anunciado.

Vamos a definir el concepto de disco topológico. Algunos matices requerirán del Teorema de Invarianza del Dominio, que enunciamos sin demostración a continuación.

Teorema 2.4 (Invarianza del Dominio) *Si $O \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 1$) es un subespacio topológico homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , entonces O es un abierto de \mathbb{R}^n .*

El Teorema de Invarianza del dominio afirma que todo subconjunto de \mathbb{R}^n que con la topología euclíadiana inducida es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , es de hecho un abierto de \mathbb{R}^n . En este curso probaremos algunas versiones particulares de este enunciado general, pero retengamos en la memoria su enunciado en este momento.

Definición 2.5 *Un disco topológico compacto es un espacio topológico homeomorfo al disco unidad cerrado*

$$\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

en \mathbb{R}^2 . De igual forma, un disco topológico abierto es un espacio topológico homeomorfo al disco unidad abierto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Observación 2.6 *Si X es un disco topológico compacto y $f: \overline{D} \rightarrow X$ es un homeomorfismo, los subconjuntos $f(\mathbb{S}^1)$ y $f(D)$ de X no dependen del homeomorfismo f .*

DEMOSTRACIÓN: En efecto, sea $h: \overline{D} \rightarrow X$ otro homeomorfismo, y consideremos los homeomorfismos $h^{-1} \circ f, f^{-1} \circ h: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$. Los subconjuntos $(h^{-1} \circ f)(D), (f^{-1} \circ h)(D) \subset \overline{D}$ han de ser abiertos en \mathbb{R}^2 , y por tanto contenidos en D , por el Teorema de Invarianza del Dominio (no pueden intersecar a \mathbb{S}^1). Las inclusiones $(f^{-1} \circ h)(D) \subseteq D$ y $(h^{-1} \circ f)(D) \subseteq D$ implican que $(h^{-1} \circ f)(D) = (f^{-1} \circ h)(D) = D$, esto es, $f(D) = h(D)$ y $f(\mathbb{S}^1) = h(\mathbb{S}^1)$. ■

Definición 2.7 *Si X es un disco topológico compacto y $f: \overline{D} \rightarrow X$ es cualquier homeomorfismo, en lo que sigue denotaremos por $Bd(X) := f(\mathbb{S}^1)$ y lo referiremos como la curva de Jordan borde de X . También diremos que C bordea el disco X o que X está bordeado por C . Análogamente escribiremos $Int(X) := X \setminus Bd(X)$ y lo referiremos como el interior de X . Ambos conceptos no dependen del homeomorfismo $f: \overline{D} \rightarrow X$ utilizado.*

El siguiente resultado técnico será de bastante utilidad.

Corolario 2.8 *Si X_1 y X_2 son discos topológicos compactos y $f: Bd(X_1) \rightarrow Bd(X_2)$ es un homeomorfismo, entonces existe $F: X_1 \rightarrow X_2$ homeomorfismo tal que $F|_{Bd(X_1)} = f$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $F_j: X_j \rightarrow \overline{D}$ un homeomorfismo cualquiera, $j = 1, 2$. Claramente

$$h := (F_2|_{Bd(X_2)}) \circ f \circ (F_1^{-1}|_{\mathbb{S}^1}): \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$$

es un homeomorfismo. Construyamos

$$H: \overline{D} \rightarrow \overline{D}, \quad H(p) = \begin{cases} \|p\| h\left(\frac{p}{\|p\|}\right) & \text{si } p \neq 0 \\ 0 & \text{si } p = 0 \end{cases},$$

y observemos que H un homeomorfismo en \overline{D} con $H|_{\mathbb{S}^1} = h$. Para acabar basta con definir el homeomorfismo $F := F_2^{-1} \circ H \circ F_1$ y comprobar que satisface $F|_{Bd(X_1)} = f$. ■

2.1. Discos topológicos planos

La mayoría de los discos topológicos compactos con los que vamos a trabajar serán subespacios topológicos de \mathbb{R}^2 . Introduciremos la siguiente:

Definición 2.9 Los subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^2$ que con la topología euclíadiana inducida sean discos topológicos compactos (respectivamente, abiertos) serán llamados discos planos compactos (respectivamente, abiertos).

Pretendemos comprender las propiedades topológicas globales de los discos planos para poder caracterizarlos. Comenzamos con la siguiente

Observación 2.10 Sea $X \subset \mathbb{R}^2$ un disco plano compacto. Entonces $\text{Int}(X)$ es una componente conexa acotada de $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$ con frontera $\text{Bd}(X)$.

DEMOSTRACIÓN : Por el Teorema de Invarianza del Dominio el conexo $\text{Int}(X)$ es abierto en $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$. Como $X = \text{Int}(X) \dot{\cup} \text{Bd}(X)$ es compacto en \mathbb{R}^2 (luego cerrado y acotado) se tiene que $\overline{\text{Int}(X)} = \overline{\text{Int}(X)}^X = X$, de donde

$$\overline{\text{Int}(X)}^{\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)} = \overline{\text{Int}(X)} \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)) = X \cap (\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)) = \text{Int}(X),$$

y por tanto $\text{Int}(X)$ es también cerrado en $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$. Inferimos que $\text{Int}(X)$ es abierto y cerrado en $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$, y en consecuencia es una componente conexa (acotada) de $\mathbb{R}^2 \setminus \text{Bd}(X)$. Claramente $\text{Fr}(\text{Int}(X)) = X \setminus \text{Int}(X) = \text{Bd}(X)$. ■

Surge de forma natural una pregunta de gran calado topológico:

¿Qué subespacios topológicos del plano son discos planos compactos?

El teorema clásico de Jordan-Schöenflies, cuya prueba está fuera de las posibilidades de este curso, nos dará la respuesta completa a esta cuestión.

Teorema 2.11 (Jordan-Schöenflies) Si C_1 y C_2 son dos curvas de Jordan en \mathbb{R}^2 y $f: C_1 \rightarrow C_2$ un homeomorfismo, existe $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ homeomorfismo tal que $F|_{C_1} = f$.

La consecuencia fundamental para nosotros de este resultado es el siguiente corolario, que caracteriza a los discos planos compactos como las regiones compactas que bordean las curvas de Jordan en \mathbb{R}^2 .

Corolario 2.12 Cualquier curva de Jordan C en \mathbb{R}^2 es frontera ó bordea (el interior de) un disco topológico compacto en \mathbb{R}^2 , y de hecho cualquier disco topológico compacto X de \mathbb{R}^2 es de esta naturaleza.

DEMOSTRACIÓN : Supongamos que C es una curva de Jordan. Basta con tomar cualquier homeomorfismo $f: C \rightarrow \mathbb{S}^1$, extenderlo a un homeomorfismo $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por el Teorema de Jordan-Schöenflies, y observar que el conjunto $X := F^{-1}(\overline{D})$ es un disco plano compacto con borde

$$\text{Bd}(X) = F^{-1}(\text{Bd}(\overline{D})) = F^{-1}(\mathbb{S}^1) = C.$$

Para el recíproco tomemos un disco compacto plano X en \mathbb{R}^2 , y simplemente recordemos que de la Observación 2.10 la curva de Jordan $\text{Bd}(X)$ bordea $\text{Int}(X)$. ■

Sin embargo, el corolario más conocido del Teorema de Jordan-Schöenflies es el siguiente teorema.

Corolario 2.13 (Teorema de la curva de Jordan) *El complemento de una curva de Jordan arbitraria C en el plano \mathbb{R}^2 tiene dos componentes conexas, una acotada llamada interior de C y otra no acotada llamada exterior de C , ambas con frontera la curva C .*

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que \mathbb{S}^1 parte \mathbb{R}^2 en dos componentes conexas con borde \mathbb{S}^1 ; a saber, el disco unidad abierto (acotado) y el exterior del disco unidad cerrado (no acotado). Como todo homeomorfismo entre una curva de Jordan C y \mathbb{S}^1 puede extenderse a un homeomorfismo de \mathbb{R}^2 , esta información topológica descrita sobre $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$ se traslada formalmente a $\mathbb{R}^2 \setminus C$. ■

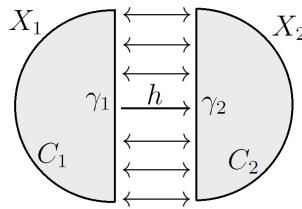
2.2. Pegado de discos topológicos por el borde

Sean X_1 y X_2 dos discos topológicos compactos *disjuntos*. Consideremos arcos de Jordan $\gamma_j \subset C_j := \text{Bd}(X_j)$, $j = 1, 2$, y un homeomorfismo $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$. Consideremos en $X := X_1 \cup X_2$ la topología suma, a saber, la que tiene por abiertos las uniones de abiertos de X_1 y X_2 .

Vamos explicar una operación topológica elemental, que referiremos como el *pegado* de los discos X_1 y X_2 por los arcos γ_1 y γ_2 vía el homomorfismo h . La clave es generar un nuevo espacio topológico \hat{X} a partir de X_1 , X_2 y $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$. Para ello definiremos la siguiente relación de equivalencia en X :

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{o} \quad \{p, q\} = \{r, h(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_1,$$

que materializará la identificación deseada. Escribiremos $\hat{X} := X/\sim$ al espacio cociente resultante y $\pi: X \rightarrow \hat{X}$ la correspondiente proyección. Es fácil comprobar que $\pi|_{X_j}: X_j \rightarrow \hat{X}$ es un embebimiento topológico, $j = 1, 2$.



Por otra parte, es claro que $C_j \setminus \text{Int}(\gamma_j)$ es un arco de Jordan en X_j , luego en X , $j = 1, 2$. En la unión de arcos de Jordan $C := (C_1 \setminus \text{Int}(\gamma_1)) \cup (C_2 \setminus \text{Int}(\gamma_2))$ podemos definir la relación de equivalencia restringida $p \sim_0 q \stackrel{\text{def}}{\iff} p \sim q$. Escribamos $\hat{C} := C/\sim_0$ y $\pi_0: C \rightarrow \hat{C}$ a la correspondiente proyección topológica al cociente. Por la naturaleza de \sim_0 , es inmediato comprobar que el espacio \hat{C} es una circunferencia topológica, esto es, es homeomorfo a \mathbb{S}^1 . Hágase como ejercicio.

Si $i: C \rightarrow X$ denota la inclusión, el Corolario 1.10 nos proporciona una aplicación continua $\hat{i}: \hat{C} \rightarrow \hat{X}$ satisfaciendo $\hat{i} \circ \pi_0 = \pi \circ i$. Por la naturaleza de las relaciones \sim_0 , $\hat{i}: \hat{C} \rightarrow \hat{X}$ es un embebimiento topológico.

El siguiente resultado describe la naturaleza topológica del resultado de pegar nuestros discos. En particular, prueba que el espacio \hat{X} obtenido no depende de los discos topológicos compactos considerados, de los arcos de Jordan elegidos en su borde, ni del homeomorfismo entre ellos considerado.

Proposición 2.14 *El espacio \hat{X} es un disco topológico compacto con $\text{Bd}(\hat{X}) = \hat{i}(\hat{C})$.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos

$$\overline{D}_1 := \overline{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \text{ y } \overline{D}_2 := \overline{D} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}.$$

El Teorema 2.11 garantiza que \overline{D}_1 y \overline{D}_2 son discos topológicos compactos, por lo que existen homeomorfismos $F_1: X_1 \rightarrow \overline{D}_1$ y $F_2: X_2 \rightarrow \overline{D}_2$.

Llamemos s al segmento $[-1, 1] \times \{0\}$. Componiendo con un conveniente homeomorfismo $G: \overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}_1$, no supone pérdida de generalidad asumir que $F_1(\gamma_1) = s$ (un tal $G: \overline{D}_1 \rightarrow \overline{D}_1$ se genera tras extender vía el Corolario 2.8 cualquier homeomorfismo $g: \text{Bd}(\overline{D}_1) \rightarrow \text{Bd}(\overline{D}_1)$ que aplique $F_1(\gamma_1)$ en s). Análogamente no supone restricción asumir $F_2(\gamma_2) = s$.

Recuperemos el homeomorfismo $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ sobre el que se construyó la relación de equivalencia \sim en X que dió lugar al cociente \hat{X} . Llamemos $\{p_1, p_2\} \subset X_1$ a los extremos de γ_1 , y observemos que $\{h(p_1), h(p_2)\} \subset X_2$ son los extremos de γ_2 .

Veamos que el Corolario 2.8 nos permite modificar F_2 para que $F_1(p) = F_2(h(p))$ para todo $p \in \gamma_1$. En efecto:

- Salvo permutar índices y cambiar F_2 por $S \circ F_2$, donde $S: \overline{D}_2 \rightarrow \overline{D}_2$ es la simetría $(x, y) \mapsto (-x, y)$, podemos asumir sin pérdida de fuerza que $F_1(p_1) = F_2(h(p_1)) = (-1, 0) \in s$ y $F_1(p_2) = F_2(h(p_2)) = (1, 0) \in s$.
- Cambiando F_2 por $J \circ F_2$, donde $J: \overline{D}_2 \rightarrow \overline{D}_2$ es un homeomorfismo satisfaciendo

$$J|_s = (F_1|_{\gamma_1}) \circ h^{-1} \circ (F_2^{-1}|_s), \quad J|_{\text{Bd}(D_2) \setminus s} = \text{Id}_{\text{Bd}(D_2) \setminus s},$$

(constrúyase con ayuda del Corolario 2.8), logramos que $F_1(p) = F_2(h(p))$ para todo $p \in \gamma_1$.

La aplicación

$$F: X \rightarrow \overline{D}, \quad F|_{X_1} := F_1, \quad F|_{X_2} = F_2,$$

está bien definida y es continua y sobreyectiva de un compacto en un Hausdorff, de donde es una identificación. Como la relación que induce \sim_F coincide con \sim , la Proposición 1.9 garantiza que la única aplicación $\hat{F}: \hat{X} \rightarrow \overline{D}$ tal que $\hat{F} \circ \pi = F$ es un homeomorfismo. Esto prueba que \hat{X} es un disco topológico cerrado.

Como $\text{Bd}(\hat{X}) = \hat{F}^{-1}(\mathbb{S}^1) = \pi(F^{-1}(\mathbb{S}^1)) = \pi(C) = \hat{i}(\hat{C})$, la proposición se sigue. ■

Observación 2.15 *La Proposición 2.14 se generaliza al caso $X_j \stackrel{\phi_j}{\cong} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}$ y $\gamma_j := \phi_j^{-1}([-1, 1])$, $j = 1, 2$. En este caso, si $h: \gamma_1 \rightarrow \gamma_2$ es un homeomorfismo y \sim es la relación asociada en $X = X_1 \cup X_2$ dada por*

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{o} \quad \{p, q\} = \{r, h(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_1,$$

el cociente topológico $\hat{X} := X/\sim$ es un disco topológico abierto.

Ejercicio 2.16 *Es un ejercicio ilustrativo probar que dados dos discos topológicos compactos y disjuntos X_1 y X_2 y un homeomorfismo $h: \text{Bd}(X_1) \rightarrow \text{Bd}(X_2)$, el cociente topológico $X_1 \cup X_2 / \sim$, donde \sim denota la relación de equivalencia en $X_1 \cup X_2$ definida por*

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{o} \quad \{p, q\} = \{r, h(r)\} \text{ para algún } r \in \text{Bd}(X_1),$$

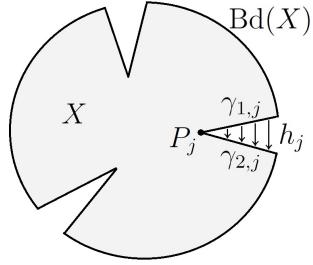
es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 .

Dejamos también como ejercicio el siguiente enunciado.

Ejercicio 2.17 Sea X es un disco topológico compacto y sean $\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j} \subset \text{Bd}(X)$, $j = 1, \dots, k$, arcos de Jordan tales que $\gamma_{1,j} \cap \gamma_{2,j} = P_j \in \text{Bd}(X)$, $j = 1, \dots, k$, y $(\gamma_{1,j} \cup \gamma_{2,j}) \cap (\gamma_{1,i} \cup \gamma_{2,i}) = \emptyset$, $i \neq j$. Sea $h_j: \gamma_{1,j} \rightarrow \gamma_{2,j}$ un homeomorfismo tal que $h(P_j) = P_j$, $j = 1, \dots, k$. Definamos la relación en X

$$p \sim q \iff p = q \quad \text{o} \quad \{p, q\} = \{r, h_j(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_{1,j} \text{ y } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Entonces $\hat{X} := X/\sim$ es un disco topológico compacto.



2.3. Discos topológicos con borde identificado

Sea X un disco topológico compacto. Escribamos por simplicidad $C = \text{Bd}(X)$ su circunferencia topológica borde ($\text{Int}(X) = X \setminus C$). Sea R_0 una relación de equivalencia en C , y definamos la siguiente relación de equivalencia en X :

$$pRq \iff p = q \quad \vee \quad \left(\{p, q\} \subset C \quad \wedge \quad pR_0q \right).$$

Llaremos S al espacio topológico cociente X/R , y denotemos por $\sigma: X \rightarrow S$ a la correspondiente proyección al cociente.

Observemos que:

- La inclusión natural $i: X \setminus C \rightarrow X$ induce un embebimiento $i_0: X \setminus C \rightarrow S$ dado por $i_0(p) := (\sigma \circ i)(p) = \sigma(p) \in S$.
- la inclusión $j: C \rightarrow X$ induce un embebimiento topológico $j_0: C/R_0 \rightarrow S$ determinado por la identidad $\sigma \circ j = j_0 \circ \sigma_0$, donde $\sigma_0: C \rightarrow C/R_0$ es la proyección al cociente.

Por tanto, salvo componer con i_0 podemos identificar el disco topológico abierto $X \setminus C$ con $i_0(X \setminus C) \subset S$, siendo la topología inducida por S sobre $X \setminus C \equiv i_0(X \setminus C)$ la misma que teníamos en $X \setminus C$. Análogamente, salvo componer con j_0 podemos identificar topológicamente C/R_0 con el subespacio topológico $j_0(C) \subset S$. Nótese que tanto S como $j_0(C)$ son arcoconexos al ser cocientes de espacios arcoconexos.

Vamos a estudiar algunos cocientes de discos topológicos compactos especiales con gran importancia para la teoría, como veremos en el Tema 3. Necesitamos introducir alguna notación.

Fijemos un conjunto infinito numerable \mathcal{U} de símbolos, que jugará un papel tácito o auxiliar en lo que sigue. Construyamos el conjunto $\mathcal{U} \times \{-1, 1\}$ y denotemos por

$$\pi: \mathcal{U} \times \{-1, 1\} \rightarrow \mathcal{U}$$

a la primera proyección. Por sencillez, identificaremos cada par $(b, \epsilon) \in \mathcal{U} \times \{-1, 1\}$ con la sílaba o carácter b^ϵ .

Definición 2.18 Un esquema (sobre \mathcal{U}) es una aplicación

$$\omega: \{1, \dots, k\} \rightarrow \mathcal{U} \times \{1, -1\}, \quad k \geq 2.$$

El número $k \in \mathbb{N}$ se referirá como la longitud de ω , y escribiremos $\text{Long}(\omega) = k$.

Si $\omega(j) = b_j^{\epsilon(j)}$, $j = 1, \dots, k$, ω se identificará con la expresión $b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$. Al conjunto $\text{sop}(\omega) := \{b_1, \dots, b_k\}$ se le llamará soporte de ω .

Un esquema ω se dirá binario si $\sharp((\pi \circ \omega)^{-1}(b)) \leq 2$ para todo $b \in \mathcal{U}$. Un esquema binario se dirá:

- binario puro si $\sharp((\pi \circ \omega)^{-1}(b)) \in \{0, 2\}$ para todo $b \in \mathcal{U}$.
- binario mixto $\sharp((\pi \circ \omega)^{-1}(b)) = 1$ para algún $b \in \mathcal{U}$.
- orientable si ω es inyectiva, y no-orientable en caso contrario.

Por simplicidad, las sílabas b^1 se escribirán simplemente b , para cada $b \in \mathcal{U}$. Por ejemplo, si b_1, b_2 y $b_3 \in \mathcal{U}$ entonces $b_1 b_1 b_1^{-1} b_2 b_2 b_3^{-1}$ es un esquema de longitud 6 sobre \mathcal{U} . El esquema $b_1 b_1^{-1} b_2 b_2 b_3^{-1}$ es binario mixto no orientable, mientras que $b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}$ es binario puro orientable.

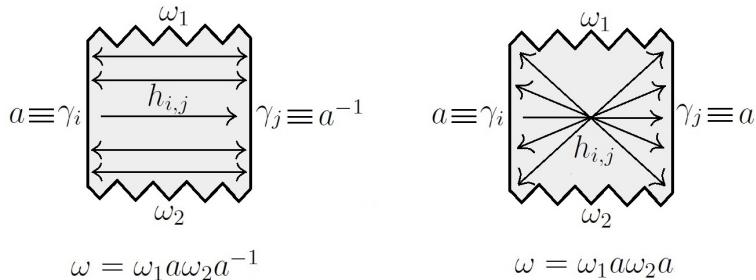
Definición 2.19 Dado un esquema $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$, una representación \mathfrak{r} de ω en un disco topológico compacto X es un par $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h})$ donde

(I) $\mathfrak{a} := \{\gamma_j: j = 1, \dots, k\}$ es una colección de arcos de Jordan orientados en $C := \text{Bd}(X)$, donde cada γ_j está ligado únicamente a la sílaba o carácter $b_j^{\epsilon_j}$ de ω para cada j , que satisface:

- $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ son dos a dos compatiblemente orientados en C ,
- $\text{Int}(\gamma_i) \cap \text{Int}(\gamma_j) = \emptyset$, $i \neq j$,
- $\gamma_j \cap \gamma_{j+1} \neq \emptyset$, $j = 1, \dots, k-1$, y $\gamma_k \cap \gamma_1 \neq \emptyset$, y
- $\cup_{j=1}^k \gamma_j = C$.

(II) \mathfrak{h} es una familia $\{h_{i,j}: \gamma_i \rightarrow \gamma_j: (i, j) \in I_\omega\}$ de homeomorfismos, donde $I_\omega := \{(i, j): 1 \leq i, j \leq k, b_i = b_j\}$, satisfaciendo:

- $h_{i,j}$ respeta las orientaciones de γ_i y γ_j si $\epsilon(i) = \epsilon(j)$, y las revierte si $\epsilon(i)\epsilon(j) = -1$.
- $h_{j,m} \circ h_{i,j} = h_{i,m}$ (en particular, $h_{i,i} = \text{Id}_{\gamma_i}$ y $h_{i,j} = h_{j,i}^{-1}$).



Toda representación τ de ω en X induce de forma natural una relación de equivalencia en X . Basta considerar la relación de equivalencia $\sim_{0,\tau}$ en C :

$$p \sim_{0,\tau} q \iff \{p, q\} = \{r, h_{i,j}(r)\}, \quad r \in \gamma_i, (i, j) \in I_\omega.$$

y extenderla de forma trivial a X :

$$p \sim_\tau q \iff p = q \quad \vee \quad (\{p, q\} \subset C \quad \wedge \quad p \sim_{0,\tau} q).$$

Definición 2.20 Denotaremos por S_τ y Γ_τ , respectivamente, a los cocientes topológicos X/\sim_τ y $C/\sim_{0,\tau}$ determinados por la representación τ de ω en X . Análogamente escribiremos $\sigma_\tau: X \rightarrow S_\tau$ y $\sigma_{0,\tau}: C \rightarrow \Gamma_\tau$ a las correspondientes proyecciones.

La información topológica sobre el espacio S_τ está esencialmente concentrada en el subespacio Γ_τ . Para comprender mejor su topología es aconsejable introducir la siguiente:

Definición 2.21 Un espacio topológico Γ se dice un grafo conexo si existe una exahusión $\emptyset = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_n = \Gamma$ por subespacios topológicos conexos de Γ , de forma que para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ existe un arco $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow \Gamma$ tal que

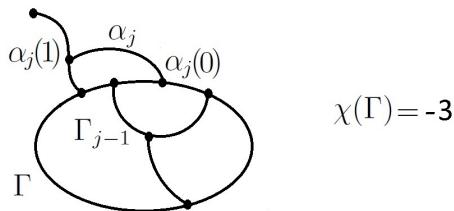
- $\alpha_j|_{[0,1]}$ es inyectiva (arco de Jordan) o $\alpha_j|_{[0,1]}$ es inyectiva y $\alpha_j(0) = \alpha_j(1)$ (curva de Jordan).
- $\Gamma_j = \Gamma_{j-1} \cup \alpha_j([0, 1])$.
- $\alpha_j|_{[0,1]} \cap \Gamma_{j-1} = \emptyset$ y $\Gamma_{j-1} \cap \{\alpha_j(0), \alpha_j(1)\} \neq \emptyset$.

Si existe una circunferencia topológica (curva de Jordan) $\gamma_j \subset \Gamma_j$ con $\alpha_j([0, 1]) \subset \gamma_j$, diremos que Γ_j añade un ciclo a Γ_{j-1} , $j = 1, \dots, n$. Si Γ_j añade un ciclo a Γ_{j-1} para todo $j = 1, \dots, n$ entonces Γ se dirá un n -ciclo.

A los extremos de los α_j se les llamará vértices de Γ , y se denotará por $V(\Gamma) = \bigcup_{j=1}^n \{\alpha_j(0), \alpha_j(1)\}$ al conjunto de todos ellos. A las componentes conexas de $\Gamma \setminus V(\Gamma)$ las llamaremos lados de Γ , y denotamos $E(\Gamma)$ al conjunto de todos ellos. El número entero

$$\chi(\Gamma) := -\#E(\Gamma) + \#V(\Gamma),$$

que coincide con $1 - k$ donde k es el número total de ciclos añadidos en la exahusión $\emptyset = \Gamma_0 \subset \Gamma_1 \subset \dots \subset \Gamma_n = \Gamma$, se llamará característica de Euler de Γ .



Observación 2.22 Como $C = \text{Bd}(X)$ es una curva de Jordan entonces $\Gamma_\tau = \sigma_\tau(C)$ es conexo. Además, por la naturaleza de la relación \sim_τ , claramente $\sigma_\tau(\gamma_i)$ es un arco de Jordan o una curva de Jordan con vértices $\sigma_\tau(V(\gamma_i))$. Por tanto Γ_τ puede ser descrito como un grafo conexo con vértices $V(\Gamma_\tau) = \bigcup_{i=1}^k \sigma_\tau(V(\gamma_i))$ y lados $E(\Gamma_\tau) = \{\sigma_\tau(\text{Int}(\gamma_i)): i = 1, \dots, k\}$. Para determinar de forma correcta los cardinales de $V(\Gamma_\tau)$ y $E(\Gamma_\tau)$, y por tanto $\chi(\Gamma_\tau)$, hay que seguir con cuidado las identificaciones inducidas por σ_τ .

Definición 2.23 Si ω es un esquema y τ una representación suya en un disco topológico compacto X , el espacio topológico S_τ se dirá una realización de ω . También diremos que $\sigma_\tau: X \rightarrow S_\tau$ es la identificación asociada a la realización S_τ .

El subespacio Γ_τ de S_τ será referido como el grafo conexo borde de S_τ .

Un mismo esquema puede admitir distintas realizaciones, pero parece natural pensar que éstas son identificables topológicamente. La clave para comprenderlo está de nuevo en el Corolario 2.8, y nos la da la siguiente proposición.

Proposición 2.24 Sean τ_1 y τ_2 dos representaciones del mismo esquema w en discos topológicos compactos X_1 y X_2 , respectivamente. Entonces existe un homeomorfismo $F: X_1 \rightarrow X_2$ compatible con \sim_{τ_1} y \sim_{τ_2} , induciendo un homeomorfismo $\hat{F}: S_{\tau_1} \rightarrow S_{\tau_2}$ tal que $\sigma_{\tau_2} \circ F = \hat{F} \circ \sigma_{\tau_1}$ (en particular, $\hat{F}(\Gamma_{\tau_1}) = \Gamma_{\tau_2}$). El homeomorfismo \hat{F} entre S_{τ_1} y S_{τ_2} así obtenido se dirá adaptado al esquema ω .

DEMOSTRACIÓN: Pongamos $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$. Llamemos $\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,k}$ a los arcos de Jordan orientados en $C_l := \text{Bd}(X_l)$ asociados a τ_l y denotemos por $h_{i,j}^{(l)}: \gamma_{l,i} \rightarrow \gamma_{l,j}$ a los homeomorfismos asociados a τ_l , $(i, j) \in I_\omega$, $l = 1, 2$.

Como los arcos los arcos $\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,k}$ están dispuestos de forma que engarzan final de $\gamma_{l,j}$ con principio de $\gamma_{l,j+1}$, e igualmente con $\gamma_{l,k}$ y $\gamma_{l,1}$, $l = 1, 2$, existe un homeomorfismo

$$f: C_1 \rightarrow C_2 \text{ tal que } f(\gamma_{1,j}) = \gamma_{2,j} \text{ para } j = 1, \dots, k.$$

Es más,

- la compatibilidad de las orientaciones de los arcos $\gamma_{l,1}, \dots, \gamma_{l,k}$, $l = 1, 2$,

y el hecho de que

- los homeomorfismos $h_{i,j}^{(1)}: \gamma_{1,i} \rightarrow \gamma_{1,j}$ y $h_{i,j}^{(2)}: \gamma_{2,i} \rightarrow \gamma_{2,j}$ preservan o revierten ambos la orientabilidad para todo $(i, j) \in I_\omega$,

nos permite elegir f para que además

$$h_{i,j}^{(1)} = (f|_{\gamma_{2,j}})^{-1} \circ h_{i,j}^{(2)} \circ (f|_{\gamma_{1,i}}) \quad \forall (i, j) \in I_\omega.$$

En efecto, para cada $\{(i, j), (j, i)\} \in I_\omega^2$, $i \neq j$, basta fijar primero un índice (tomaremos por ejemplo i), tomar cualquier homeomorfismo $f|_{\gamma_{1,i}}: \gamma_{1,i} \rightarrow \gamma_{2,i}$ preservando la orientación fijada en los arcos de Jordan, y finalmente definir

$$f|_{\gamma_{2,j}} = h_{i,j}^{(2)} \circ (f|_{\gamma_{1,i}}) \circ (h_{i,j}^{(1)})^{-1}: \gamma_{1,j} \rightarrow \gamma_{2,j}.$$

Por el Corolario 2.8 existe un homeomorfismo $F: \overline{\text{Int}(C_1)} \rightarrow \overline{\text{Int}(C_2)}$ tal que $F|_{C_1} = f$. Claramente

$$p \sim_{\tau_1} q \iff F(p) \sim_{\tau_2} F(q),$$

por lo que F induce un homeomorfismo $\hat{F}: S_{\tau_1} \rightarrow S_{\tau_2}$ tal que $\hat{F} \circ \sigma_{\tau_1} = \sigma_{\tau_2} \circ F$. Esto concluye la prueba. ■

Como consecuencia podemos establecer la siguiente definición.

Definición 2.25 Si $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ es un esquema, su realización en cualquier disco X auxiliar (única salvo homeomorfismos) será denotada por S_ω . Análogamente escribiremos por $\sigma_\omega: X \rightarrow S_\omega$ la identificación asociada. A veces es común identificar la expresión formal ω con su realización S_ω . De forma similar el grafo conexo borde Γ_ω y los vértices $V(\Gamma_\omega)$ están unívocamente determinados salvo homeomorfismos adaptados a ω .

En ocasiones es aconsejable utilizar realizaciones sencillas de ω desde un punto de vista geométrico. Por ejemplo, la realización de ω asociada a su representación canónica $\mathbf{r}_0 = (\mathbf{a}_0, \mathbf{h}_0)$ en \overline{D} (unívocamente determinada salvo isometrías lineales del plano) en la que:

- Todos los arcos de \mathbf{a}_0 en \mathbb{S}^1 tienen igual longitud euclíadiana.
- Los homeomorfismos \mathbf{h}_0 son transformaciones lineales del argumento en \mathbb{S}^1 , o equivalentemente, restricción de isometrías lineales euclidianas.

Las propiedades topológicas básicas de las realizaciones de esquemas están recogidas en la siguiente proposición.

Proposición 2.26 Dado un esquema ω , el espacio S_ω es arcoconexo, compacto, Hausdorff y II-Axioma de Numerabilidad.

DEMOSTRACIÓN: Por conveniencia utilicemos la realización $S_\omega \equiv S_{\mathbf{r}_0}$ de ω comentada en la Observación 1.6.

La arcoconexión y la compacidad de S_ω se siguen de la arcoconexión y compacidad de \overline{D} junto con Observación 1.6-(f).

Dado $p \in S_\omega$, llamemos $U_p(\epsilon) := \{x \in \overline{D}: \text{dist}(x, \sigma_\omega^{-1}(p)) < \epsilon\}$. Por la simetría de la representación canónica es claro que $U_p(\epsilon)$ es un abierto σ_ω -saturado en \overline{D} . Es más, como \overline{D} está dotado de la topología euclíadiana, la familia $\{\sigma_\omega(U_p(\epsilon)): p \in S_\omega, \epsilon > 0\}$ es una base de la topología cociente en S_ω .

Si p_1 y p_2 son puntos distintos en S_ω , los conjuntos $\sigma_\omega^1(p_1)$ y $\sigma_\omega^{-1}(p_2)$ son disjuntos y por tanto existe $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $U_{p_1}(\epsilon) \cap U_{p_2}(\epsilon) = \emptyset$. De Observación 1.6-(d) se sigue que S_ω es Hausdorff.

Por último, para probar que S_ω es II-Axioma de Numerabilidad obsérvese que la familia de abiertos σ_ω -saturados de \overline{D}

$$\mathcal{B} := \{U_p(\epsilon): p \in \sigma_\omega(D \cap \mathbb{Q}^2), \epsilon \in \mathbb{Q}\} \cup \{U_{\sigma_\omega(e^{i\theta})}(\epsilon): \theta \in [0, 2\pi] \cap \mathbb{Q}, \epsilon \in \mathbb{Q}\}$$

satisface Observación 1.6-(e). ■

TEMA 1: Grupo Fundamental

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

En este tema introduciremos el primer invariante topológico de naturaleza algebraica conocido históricamente, que motivó el nacimiento de la Topología Algebraica moderna. Nos referimos al grupo fundamental de un espacio topológico o grupo de Pincaré. Haremos para ello un repaso de algunos aspectos básicos de la teoría de grupos.

3. Teoría de grupos algebraicos

La definición fundamental es la siguiente.

Definición 3.1 *Un grupo algebraico es un par (G, \cdot) , donde G es un conjunto no vacío y \cdot es una aplicación*

$$\cdot: G \times G \rightarrow G$$

satisfaciendo las siguientes propiedades (escribiremos $g_1 \cdot g_2$ en vez de $\cdot(g_1, g_2)$ para cualesquiera $g_1, g_2 \in G$):

- $(g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$ para cualesquiera $g_1, g_2, g_3 \in G$.
- Existe $e \in G$ tal que $g \cdot e = e \cdot g = g$ para cualesquiera $g \in G$. Este elemento es único y es conocido como elemento neutro del grupo.
- Para todo $g \in G$ existe $g^{-1} \in G$ tal que $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$. El elemento g^{-1} satisfaciendo esta propiedad es único (dependiendo de g) y es conocido como el elemento inverso o simétrico de g en el grupo.

Si adicionalmente

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \text{ para cualesquiera } g_1, g_2 \in G,$$

el grupo (G, \cdot) se dirá abeliano o commutativo.

Son muchos los ejemplos de grupos conocidos. Recordaremos algunos de los más significativos.

- $(\mathbb{C}^n, +), (\mathbb{R}^n, +), (\mathbb{Q}^n, +), (\mathbb{Z}^n, +), n \in \mathbb{N}$.
- $(\mathbb{Z}_k, +), k \in \mathbb{N}$ (enteros módulo k).
- $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.
- $(\mathrm{Gl}_n(\mathbb{C}), \cdot), (\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}), \cdot), n \in \mathbb{N}$.
- $(\mathcal{F}(X), \circ)$, donde $X \neq \emptyset$ es un conjunto, $\mathcal{F}(X) := \{f: X \rightarrow X : f \text{ biyectiva}\}$ y “ \circ ” es la composición de aplicaciones.

A continuación presentaremos una herramienta muy versátil para la construcción de nuevos grupos.

3.1. Producto libre de grupos

Sea $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ una familia disjunta de grupos, descritos con notación multiplicativa (G_α, \cdot) , $\alpha \in \Lambda$.

Definición 3.2 Una palabra construida sobre la familia $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una expresión $x_1x_2, \dots x_n$ donde $x_i \in G_{\alpha_i}$ para algún $\alpha_i \in \Lambda$. La palabra vacía (sin ninguna sílaba) se denominará por 1.

Una palabra $x_1x_2, \dots x_n$, $n \in \mathbb{N}$, se dirá reducida si

- x_i no es el Elemento Neutro de ningún grupo G_α , $\alpha \in \Lambda$, para todo $i = 1, \dots, n$.
- $n \geq 2$ y $\{x_i, x_{i+1}\} \not\subset G_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$ y para todo $i = 1, \dots, n$ (cuando $i = n$ entenderemos $x_{n+1} = x_1$).

Por convenio 1 es reducida.

Definición 3.3 El conjunto de las palabras reducidas construidas sobre $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ será denotado por

$$\bullet_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha.$$

En general dos palabras (no necesariamente reducidas) pueden multiplicarse por yuxtaposición, esto es

$$(x_1x_2 \dots x_n) \cdot (y_1y_2 \dots y_m) = x_1 \dots x_n y_1 \dots y_m,$$

Igualmente dos palabras reducidas pueden también multiplicarse por yuxtaposición y después convertirse en reducidas, esto es, si x_n e y_1 están en el mismo grupo entonces $x_n y_1$ se sustituye por $x_n \cdot y_1$ si ese producto no es el neutro. En caso de serlo se omite $x_n y_1$. Se procede así sucesivamente cuando sean posibles más reducciones. Esta multiplicación en $\bullet_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha$, denotada también por \cdot , le dota de estructura de grupo. En efecto, el elemento neutro de ese grupo será la palabra vacía 1. El inverso de la palabra reducida $x_1 \dots x_n$ es la palabra reducida $x_n^{-1} \dots x_1^{-1}$. La propiedad asociativa no es difícil de probar.

Definición 3.4 Al grupo $(\bullet_{\alpha \in \Lambda} G_\alpha, \cdot)$ se le llamará el producto libre de los grupos $\{G_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$.

Es claro que si el cardinal de Λ es al menos dos y los grupos no son triviales, el producto libre no es conmutativo, ya que si $x \in G_\alpha$ e $y \in G_\beta$ no son el neutro y $\alpha \neq \beta$, entonces las palabras reducidas xy e yx son diferentes.

Definición 3.5 El grupo libre con un generador $\{x\}$ es el conjunto

$$F(x) = \{\dots, x^{-2}, x^{-1}, 1, x, x^2 \dots\}$$

dotado del producto usual: $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$.

El grupo libre generado por un conjunto S es

$$F(S) = \bullet_{x \in S} F(x).$$

3.2. Teoría de subgrupos

En lo que sigue (G, \cdot) será un grupo arbitrario.

Definición 3.6 Un subconjunto $H \subset G$ se dirá un subgrupo de G si es estable para la operación de G , esto es, si $h_1 \cdot h_2 \in H$ y $h_1^{-1} \in H$ para cualesquiera $h_1, h_2 \in H$. En ese caso se escribirá $H \leq G$.

Es obvio que todo subgrupo de G es a su vez un grupo con la operación inducida, en particular con el mismo elemento neutro de G . Además la intersección de subgrupos es un subgrupo. Llamaremos

$$\text{Sub}(G) = \{H \subset G : H \leq G\}$$

a la familia formada por todos los subgrupos de G . Por ejemplo, el *centro* de G , que se define como

$$\mathcal{Z}(G) := \{h \in G : h \cdot g = g \cdot h \quad \forall g \in G\},$$

es un subgrupo de G .

Dado un subconjunto $A \subset G$, el conjunto

$$H(A) := \left\{ \prod_{j=1}^k a_j^{n_j} : a_1, \dots, a_k \in A, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}$$

es el *menor subgrupo* de G conteniendo a A , también llamado el *subgrupo de G generado por A* . Es fácil comprobar que $H(A)$ coincide con la intersección de todos los subgrupos de G que contienen a A . Un conjunto $A \subset G$ se dirá un *sistema de generadores* de G si $H(A) = G$.

Definición 3.7 Dado $H \leq G$ y $g \in G$, denotaremos por $g^{-1} \cdot H \cdot g := \{g^{-1} \cdot h \cdot g : h \in H\}$ al *subgrupo conjugado* de H según g . Dos subgrupos $H_1, H_2 \leq G$ se dirán *conjugados*, y se escribirá $H_1 \sim_c H_2$, si existe $g \in G$ tal que $g^{-1} \cdot H_1 \cdot g = H_2$. La relación de conjugación en $\text{Sub}(G)$ es de equivalencia, y el correspondiente cociente se denominará por

$$\mathcal{S}_c(G) := \text{Sub}(G)/\sim_c$$

Dado $H \leq G$, su clase de conjugación asociada viene dada por

$$[H] = \{g^{-1} H g : g \in G\} \in \mathcal{S}_c(G).$$

Definición 3.8 Un subgrupo $H \leq G$ se dirá *normal* si $g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$ para todo $h \in H$ y $g \in G$, esto es, si su clase de conjugación $[H] = \{H\}$. En ese caso se escribe $H \trianglelefteq G$.

Si $H \leq G$, la relación de equivalencia en G

$$g_1 R_{\text{dcha}} g_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists h \in H : g_2 = h \cdot g_1$$

determina las clases laterales derecha $H \cdot g := \{h \cdot g : h \in H\}$ de H en G . El cociente asociado será denotado $(G/H)_{\text{dcha}}$.

Análogamente la relación de equivalencia en G

$$g_1 R_{\text{izqda}} g_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists h \in H : g_2 = g_1 \cdot h$$

determina las clases laterales izquierda $g \cdot H := \{g \cdot h : h \in H\}$ de H en G . El cociente asociado será denotado $(G/H)_{\text{izqda}}$.

Definición 3.9 Si $H \trianglelefteq G$, entonces $R := R_{\text{dcha}} = R_{\text{izqda}}$, y la clase de equivalencia de $g \in G$ asociada a la relación R se denota indistintamente $g \cdot H = H \cdot g$. La operación del grupo G puede ser inducida en el cociente G/H de forma natural:

$$(g_1 \cdot H) \cdot (g_2 \cdot H) = (g_1 \cdot g_2) \cdot H,$$

dotando al cociente $(G/H, \cdot)$ de estructura de grupo (conocido como el grupo cociente de G sobre el subgrupo normal H).

Definición 3.10 Si A un subconjunto de G :

- $N(A) := \{\prod_{j=1}^k g_j^{-1} \cdot a_j^{n_j} \cdot g_j : (a_j, g_j, n_j) \in A \times G \times \mathbb{Z}, j = 1, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}$ es el menor subgrupo normal de G contenido a A , también llamado el subgrupo normal de G generado por A . Es fácil comprobar que $N(A)$ coincide con la intersección de todos los subgrupos normales de G que contienen a A .
- Si $H \leq G$, $N_0(H) := \{g \in G : g^{-1} \cdot H \cdot g = H\}$ es el mayor subgrupo de G que contiene a H como subgrupo normal, también llamado el normalizador de H en G . Es claro que $H \trianglelefteq N_0(H) \leq G$ y $N_0(H) = G$ si y solo si $H \trianglelefteq G$.

Proposición 3.11 Sea G un grupo, $A \subset G$ un subconjunto, y $\sigma: G \rightarrow G/N(A)$ el epimorfismo proyección. Si $B \subset G$ es otro subconjunto entonces

$$G/N(A \cup B) \cong (G/N(A))/N(\sigma(B)).$$

DEMOSTRACIÓN: Si $\sigma_0: G \rightarrow G/N(A \cup B)$ es la proyección, existe un único epimorfismo $\Phi: G/N(A) \rightarrow G/N(A \cup B)$ satisfaciendo $\Phi \circ \sigma = \sigma_0$ (éste viene dado por $\Phi(gN(A)) := gN(A \cup B)$ para cada $gN(A) \in G/N(A)$). No es difícil comprobar que $\text{Ker}(\Phi) = \{hN(A) : h \in B\} = \sigma(B)$, de donde el resultado se sigue por el primer teorema de isomorfía. ■

Dado un grupo G y dos elementos $g_1, g_2 \in G$, llamaremos *comutador* de g_1 y g_2 al elemento de G dado por la expresión

$$[g_1, g_2] := g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}.$$

Denotaremos por G_c al subgrupo normal de G generado por todos los comutadores:

$$G_c = N(\{[g_1, g_2] : g_1, g_2 \in G\}).$$

Definición 3.12 Dado un grupo G , el grupo cociente cociente

$$\mathcal{A}(G) := G/G_c$$

es conocido como grupo abelianizado de G .

Es inmediato comprobar que $\mathcal{A}(G)$ es un grupo abeliano.

Ejercicio 3.13 $\mathcal{A}(F(\{a_1, \dots, a_k\})) \cong \mathbb{Z}^k$.

SOLUCIÓN: El homomorfismo de grupos $\Phi: F(\{a_1, \dots, a_k\}) \rightarrow \mathbb{Z}^k$ únicamente determinado por

$$\Phi([a_j]) := (\delta_{i,j})_{i=1, \dots, k}, \quad j = 1, \dots, k,$$

es un epimorfismo con núcleo $F(\{a_1, \dots, a_k\})_c$ (aquí $\delta_{i,j}$ representa a la delta de Kronecker). El resultado se sigue del primer teorema de isomorfía. ■

3.3. Producto amalgamado de grupos

Acabaremos esta sección con la siguiente definición, que como veremos más adelante jugará un papel crucial en el enunciado del Teorema de Seifert-Van Kampen (Tema 1).

Definición 3.14 Consideremos tres grupos A , G_1 y G_2 disjuntos y homomorfismos $\Phi_1: A \rightarrow G_1$ y $\Phi_2: A \rightarrow G_2$. Se define el producto libre amalgamado $G_1 \bullet_A G_2$ como el grupo cociente $(G_1 \bullet G_2)/N(R)$, siendo $R = \{\Phi_1(a)\Phi_2(a)^{-1}: a \in A\}$.

La nomenclatura usada puede confundir ya que omitimos referencia a los homomorfismos Φ_i , $i = 1, 2$. Nótese que las clases en el grupo cociente $G_1 \bullet_A G_2$ de los elementos $\Phi_1(a)$ y $\Phi_2(a)$ son iguales para todo $a \in A$, esto es,

$$\pi(\Phi_1(a)) = \pi(\Phi_2(a)) \quad \forall a \in A$$

donde $\pi: G_1 \bullet G_2 \rightarrow G_1 \bullet_A G_2$ a la proyección al cociente. Observemos también que de forma canónica $G_j \subset G_1 \bullet G_2$, $j = 1, 2$, por lo que la expresión $\Phi_1(a)\Phi_2(a)^{-1}$ tiene sentido como producto en $G_1 \bullet G_2$ de los elementos $\Phi_1(a) \in G_1 \subset G_1 \bullet G_2$ y $\Phi_2(a)^{-1} \in G_2 \subset G_1 \bullet G_2$ (aquí $\Phi_2(a)^{-1}$ indica el elemento simétrico para el producto en el grupo G_2 de $\Phi_2(a)$).

De una forma más abstracta, si denotamos por $i_j: G_j \rightarrow G_1 \bullet G_2$, $j = 1, 2$, a las inclusiones naturales, el siguiente diagrama es comunitativo

$$\pi \circ i_1 \circ \Phi_1 = \pi \circ i_2 \circ \Phi_2.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & G_1 & & \\ & \nearrow \Phi_1 & & \searrow i_1 & \\ A & & & \rightarrow & G_1 \bullet G_2 \xrightarrow{\pi} G_1 \bullet_A G_2 \\ & \searrow \Phi_2 & & \nearrow i_2 & \\ & & G_2 & & \end{array}$$

Veamos un ejemplo práctico de esta construcción algebraica.

Ejercicio 3.15 Llamemos $A = F(a)$, $G_1 = F(b)$, $G_2 = F(c)$ a los grupos libres con generadores a, b, c respectivamente, y consideremos los homomorfismos de grupos

$$\Phi_1: A \rightarrow G_1, \quad \Phi_1(a^m) = b^{3m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

$$\Phi_2: A \rightarrow G_2, \quad \Phi_2(a^m) = c^{2m}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

Probar que el correspondiente producto amalgamado $G_1 \bullet_A G_2$ es canónicamente isomorfo al producto libre $\mathbb{Z} \bullet \mathbb{Z}_2$.

SOLUCIÓN: Consideremos la proyección al cociente

$$\pi: G_1 \bullet G_2 \rightarrow G_1 \bullet_A G_2,$$

y escribamos $\pi(x) = [x]$ para cada palabra reducida $x \in G_1 \bullet G_2$. Como para cada $a^m \in A$ tenemos

$$\Phi_1(a^m)\Phi_2(a^m)^{-1} = b^{3m}c^{-2m} \in R = \{\Phi_1(a)\Phi_2(a)^{-1}: a \in A\},$$

deducimos de la definición de $G_1 \bullet_A G_2 = G_1 \bullet G_2 / N(R)$ que

$$\pi(b^{3m}c^{-3m}) = [b^{3m}c^{-3m}] = [b]^{3m}[c]^{-2m} = e \quad \forall m \in \mathbb{Z},$$

donde $e = [1] \in G_1 \bullet_A G_2$ es el elemento neutro de $G_1 \bullet_A G_2$. En otras palabras, en $G_1 \bullet_A G_2$ se tiene la identidad

$$[b]^{3m} = [c]^{2m} \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Denotemos por $\epsilon: \mathbb{Z} \rightarrow \{0, 1\}$ a la aplicación reducción módulo 2. De (1) y haciendo la sustitución formal $[c]^{2m} \rightarrow [b]^{3m}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$, inferimos que si $x = b^{m_1}c^{n_1} \dots b^{m_k}c^{n_k}$ es una palabra construida sobre $\{G_1, G_2\}$ entonces un elemento típico de $G_1 \bullet_A G_2$ obedece al patrón

$$[x] = [b]^{m_1}[c]^{n_1} \dots [b]^{m_k}[c]^{n_k} = [b]^{m'_1}[c]^{\epsilon(n_1)} \dots [b]^{m'_k}[c]^{\epsilon(n_k)},$$

donde

$$m'_j = m_j + \frac{3}{2}(n_j - \text{sg}(n_j)\epsilon(n_j)), \quad j = 1, \dots, k,$$

y $\text{sg}(n) \in \{1, -1\}$ refiere de forma natural el signo de n para todo $n \in \mathbb{Z}$, a saber

$$\text{sg}(n) = 1 \text{ si } n \geq 0 \text{ y } \text{sg}(n) = -1 \text{ si } n < 0.$$

Si llamamos $F_2([c]) \cong \mathbb{Z}_2$ al grupo multiplicativo $\{1, [c]\}$, la aplicación

$$\Psi: G_1 \bullet G_2 \rightarrow F([b]) \bullet F_2([c]), \quad \Psi(b^{m_1}c^{n_1} \dots b^{m_k}c^{n_k}) = [b]^{m'_1}[c]^{\epsilon(n_1)} \dots [b]^{m'_k}[c]^{\epsilon(n_k)},$$

donde m'_j , $j = 1, \dots, k$, se definen como arriba, es un epimorfismo de grupos con $\text{Ker}(\Psi) = N(R)$. El primer Teorema de isomorfía nos dice que

$$G_1 \bullet_A G_2 = (G_1 \bullet G_2)/N(R) \cong F([b]) \bullet F_2([c]).$$

Dicho en otras palabras, salvo reducciones naturales, cada elemento $[b]^{m_1}[c]^{n_1} \dots [b]^{m_k}[c]^{n_k} \in G_1 \bullet_A G_2$ se identifica con un elemento típico del producto libre $F([b]) \bullet F_2([c])$. Salvo los isomorfismos canónicos $F([b]) \cong \mathbb{Z}$ y $F_2([c]) \cong \mathbb{Z}_2$, se concluye que $G_1 \bullet_A G_2$ es canónicamente isomorfo a $\mathbb{Z} \bullet \mathbb{Z}_2$. ■

El producto amalgamado satisface la siguiente propiedad universal.

Proposición 3.16 *Tres homomorfismos*

$$\Psi_1: G_1 \rightarrow H, \quad \Psi_2: G_2 \rightarrow H \quad y \quad \Psi_0: A \rightarrow H$$

tales que

$$\Psi_0 = \Psi_1 \circ \Phi_1 = \Psi_2 \circ \Phi_2$$

inducen un homomorfismo $\Psi: G_1 \bullet_A G_2 \rightarrow H$ tal que

$$\Psi_j = \Psi \circ (\pi \circ i_j) \quad y \quad \Psi \circ (\pi \circ i_j \circ \Phi_j) = \Psi_0, \quad j = 1, 2.$$

En otras palabras, el siguiente diagrama es comutativo:

DEMOSTRACIÓN: Consideremos el único homomorfismo $\Lambda: G_1 \bullet G_2 \rightarrow H$ extensión de los homomorfismos Ψ_1 y Ψ_2 . Como $\Psi_0 = \Psi_1 \circ \Phi_1 = \Psi_2 \circ \Phi_2$, el homomorfismo Λ contiene a $\{\Phi_1(a)\Phi_2(a)^{-1}: a \in A\}$ en su núcleo, se proyecta al cociente $G_1 \bullet_A G_2$ e induce canónicamente un único homomorfismo $\Psi: G_1 \bullet_A G_2 \rightarrow H$ tal que $\Psi \circ \pi = \Lambda$. Obviamente Ψ resuelve la proposición. ■

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G_1 & & \\
 & \nearrow \Phi_1 & \swarrow \pi \circ i_1 & & \\
 H & \xleftarrow{\Psi_0} & A & \xrightarrow{\Psi_1} & G_1 \bullet_A G_2 \\
 \uparrow \Psi & \nearrow \Phi_2 & \swarrow \Psi_2 & \xleftarrow{\Psi} & \\
 & \swarrow \pi \circ i_2 \circ \Phi_2 = \pi \circ i_1 \circ \Phi_1 & & &
\end{array}$$

4. Homotopía de arcos: Grupo Fundamental

Sea X un espacio topológico.

En este tema trataremos de forma recurrente con arcos en X , esto es, con aplicaciones continuas $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$. La idea crucial para entender todo lo que sigue es la de *deformación topológica* de arcos, también conocida en la literatura como homotopía de arcos.

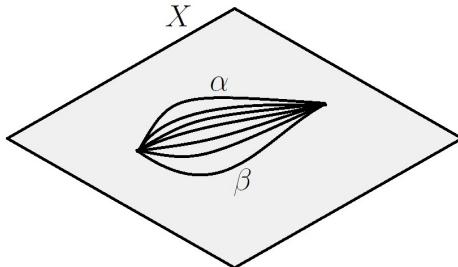
Definición 4.1 Sean X espacio topológico y $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow X$ arcos en X . Una homotopía de α en β es una aplicación continua $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ satisfaciendo

$$H(t, 0) = \alpha(t), \quad H(t, 1) = \beta(t) \text{ para todo } t \in [0, 1].$$

Aquí se entiende $[0, 1] \times [0, 1]$ dotado con la topología euclíadiana inducida por \mathbb{R}^2 .

En caso de que $\alpha(0) = \beta(0)$ y $\alpha(1) = \beta(1)$, una homotopía $H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ de α en β se dirá con extremos fijos si además

$$H(0, s) = \alpha(0) = \beta(0) \text{ y } H(1, s) = \alpha(1) = \beta(1) \text{ para todo } s \in [0, 1].$$



Homotopía con extremos fijos de α en β

Observación 4.2 Salvo mención explícita de lo contrario, en lo que sigue todas las homotopías de arcos consideradas serán con **extremos fijos**.

Observación 4.3 Sea $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ un arco. Si $h: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es un homeomorfismo tal que $h(0) = 0$ y $h(1) = 1$, el arco $\alpha \circ h$ se dirá una reparametrización de α preservando la orientación.

Todo arco $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ es homotópico con extremos fijos a cualquiera reparametrización suya $\alpha \circ h: [0, 1] \rightarrow X$ preservando la orientación. Basta con definir la homotopía:

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad H(t, s) = \alpha((1-s)t + sh(t)).$$

La homotopía de arcos tiene unas propiedades agradables que vamos a describir a continuación.

Definición 4.4 *Dados p y q puntos en un espacio topológico X , denotemos*

$$\Omega_{p,q}(X) = \{\alpha: [0, 1] \rightarrow X / \alpha \text{ es un arco con } \alpha(0) = p \text{ y } \alpha(1) = q\}.$$

Dos arcos $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$ se dirán homotópicos, y se escribirá $\alpha \simeq \beta$, si existe una homotopía H de α en β .

Proposición 4.5 *La relación binaria \simeq es de equivalencia en $\Omega_{p,q}(X)$.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos de comprobar que es reflexiva, simétrica y transitiva.

Reflexividad: Dado $\alpha \in \Omega_{p,q}(X)$, la homotopía

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad H(t, s) := \alpha(t)$$

prueba que $\alpha \simeq \alpha$.

Simetría: Sean $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$. Supongamos que $\alpha \simeq \beta$ y sea $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ una homotopía de α en β . La aplicación

$$\tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad \tilde{H}(t, s) := H(t, 1 - s)$$

prueba que $\beta \simeq \alpha$.

Transitividad: Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_{p,q}(X)$ y supongamos que $\alpha \simeq \beta$ y $\beta \simeq \gamma$. Consideremos $H_1: [0, 1]^2 \rightarrow X$ y $H_2: [0, 1]^2 \rightarrow X$ homotopías de α en β y de β en γ , respectivamente. La aplicación $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ dada por

$$H(t, s) := \begin{cases} H_1(t, 2s) & \text{si } s \in [0, 1/2] \\ H_2(t, 2s - 1) & \text{si } s \in [1/2, 1] \end{cases}$$

prueba que $\alpha \simeq \gamma$. ■

El caso $p = q$ es especialmente interesante y motiva la siguiente

Definición 4.6 (Espacio de lazos) *Dados X espacio topológico y $p \in X$, escribiremos $\Omega_p(X) := \Omega_{p,p}(X)$ y llamaremos lazos con base el punto p a los arcos de $\Omega_p(X)$.*

Denotaremos $\Pi_1(X, p)$ al espacio cociente $\Omega_p(X)/\simeq$. Si $\alpha \in \Omega_p(X)$ su clase en $\Pi_1(X, p)$ se denotada por $[\alpha]$, y a los elementos de $\Pi_1(X, p)$ les llamaremos clases de homotopía de lazos en X con base el punto p .

Como conjunto de elementos, $\Pi_1(X, p)$ será el grupo fundamental de X en p . Sin embargo, para dotar a $\Pi_1(X, p)$ de la estructura algebraica de grupo hace falta un esfuerzo mayor que pasará por introducir una ley de composición interna apropiada. La clave para poder hacerlo está en el producto de arcos introducido en la Definición 1.1, tal y como se explica en las siguientes proposiciones.

Proposición 4.7 *Sean X un espacio topológico y puntos $p, q, r \in X$. Sean $\alpha, \alpha' \in \Omega_{p,q}(X)$ y $\beta, \beta' \in \Omega_{q,r}(X)$ arcos tales que $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$.*

Entonces $\alpha \star \beta \simeq \alpha' \star \beta'$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $H_1: [0, 1]^2 \rightarrow X$ y $H_2: [0, 1]^2 \rightarrow X$ homotopías de α en α' y de β en β' , respectivamente. La aplicación $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ dada por

$$H(t, s) := \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ H_2(2t - 1, s) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

es una homotopía de $\alpha \star \beta$ en $\alpha' \star \beta'$. ■

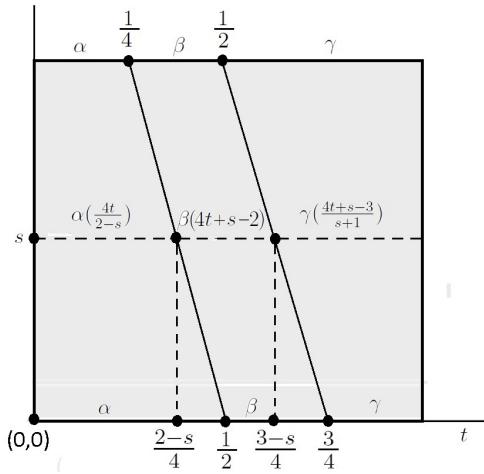
Proposición 4.8 Sean X espacio topológico, p, q, r y $s \in X$, y $\alpha \in \Omega_{p,q}(X)$, $\beta \in \Omega_{q,r}(X)$, y $\gamma \in \Omega_{r,s}(X)$. Las siguientes propiedades son ciertas:

$$(I) \quad \alpha \star (\beta \star \gamma) \simeq (\alpha \star \beta) \star \gamma.$$

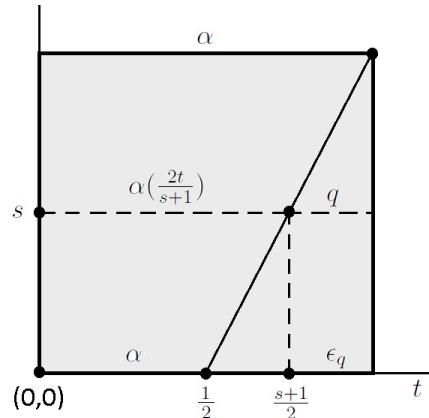
$$(II) \quad \epsilon_p \star \alpha \simeq \alpha \star \epsilon_q \simeq \alpha.$$

$$(III) \quad \alpha \star \bar{\alpha} \simeq \epsilon_p.$$

DEMOSTRACIÓN: La homotopía $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$, $H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{4t}{2-s}) & \text{si } t \in [0, \frac{2-s}{4}] \\ \beta(4t + s - 2) & \text{si } t \in [\frac{2-s}{4}, \frac{3-s}{4}] \\ \gamma(\frac{4t+s-3}{s+1}) & \text{si } t \in [\frac{3-s}{4}, 1] \end{cases}$ prueba que $\alpha \star (\beta \star \gamma) \simeq (\alpha \star \beta) \star \gamma$, luego (I).

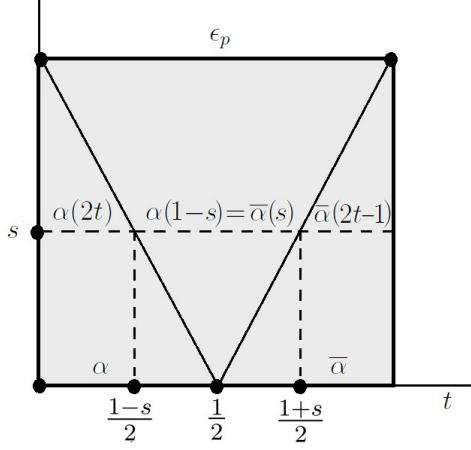


$$\text{La homotopía } H: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad H(t, s) = \begin{cases} \alpha(\frac{2t}{s+1}) & \text{si } t \in [0, \frac{s+1}{2}] \\ q & \text{si } t \in [\frac{s+1}{2}, 1] \end{cases}$$



prueba que $\alpha \star \epsilon_q \simeq \alpha$. Análogamente se demuestra que $\epsilon_p \star \alpha \simeq \alpha$, de aquí (II).

Por último, la homotopía $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$, $H(t, s) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1-s}{2}] \\ \alpha(1-s) = \bar{\alpha}(s) & \text{si } t \in [\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}] \\ \bar{\alpha}(2t-1) & \text{si } t \in [\frac{1+s}{2}, 1] \end{cases}$ prueba que $\alpha \star \bar{\alpha} \simeq \epsilon_p$, luego (III). Nótese que $\{\alpha(2t): t \in [1, \frac{1-s}{2}]\}$ parametriza el sur-



barco $\alpha|_{[0,1-s]}$ de α , mientras que $\{\bar{\alpha}(2t-1): t \in [\frac{1+s}{2}, 1]\}$ parametriza el subbarco $\bar{\alpha}|_{[s,1]}$ de $\bar{\alpha}$. Ambos subarcos tienen la misma traza aunque se recorren en sentido contrario, y degeneran en el punto p cuando $s \rightarrow 1$. ■

Como consecuencia tenemos el siguiente teorema, que es el resultado central de este tema.

Teorema 4.9 *Sea X un espacio topológico y $p \in X$ un punto arbitrario. La ley de composición interna*

$$\star: \Pi_1(X, p) \times \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(X, p), \quad [\alpha] \star [\beta] := [\alpha \star \beta]$$

está bien definida y dota al conjunto $\Pi_1(X, p)$ de estructura de grupo algebraico.

DEMOSTRACIÓN : La Proposición 4.7 muestra que la operación \star está bien definida en clases de equivalencia (no depende del representante elegido), mientras que la Proposición 4.8 garantiza que $(\Pi_1(X, p), \star)$ es un grupo. ■

Definición 4.10 *El grupo $(\Pi_1(X, p), \star)$ es conocido como Grupo Fundamental o de Poincaré del espacio X en el punto p .*

Aunque la definición del grupo fundamental no ha requerido arcoconexión, esa propiedad topológica resulta bastante natural para que la construcción sea canónica desde un punto de vista global. Ése es el mensaje de fondo de la siguiente proposición.

Proposición 4.11 *Sean p y q puntos en la misma arcocomponente de un espacio topológico X , y tomemos un arco $f: [0, 1] \rightarrow X$ conectando p con q , esto es, con $f(0) = p$ y $f(1) = q$. Consideremos*

$$\mathcal{U}_f: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(X, q), \quad \mathcal{U}_f([\alpha]) = [\bar{f} \star \alpha \star f].$$

Entonces \mathcal{U}_f está bien definido y es un isomorfismo entre los grupos fundamentales $(\Pi_1(X, p), \star)$ y $(\Pi_1(X, q), \star)$.

Además, si $g: [0, 1] \rightarrow X$ es otro arco conectando p y q se tiene que

$$\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g \iff g \star \bar{f} \in \mathcal{Z}(\Pi_1(X, p)),$$

donde $\mathcal{Z}(\Pi_1(X, p))$ representa el centro del grupo $\Pi_1(X, p)$. En particular \mathcal{U}_f no depende de f cuando $\Pi_1(X, p)$ es abeliano.

DEMOSTRACIÓN : La Proposición 4.7 garantiza que \mathcal{U}_f está bien definida y la Proposición 4.8 que \mathcal{U}_f es un isomorfismo de grupos con inverso $\mathcal{U}_{\bar{f}}$.

Por otra parte, de las anteriores proposiciones también es claro que

$$\mathcal{U}_f([\alpha]) = \mathcal{U}_g([\alpha]) \iff [\bar{f} \star \alpha \star f] = [\bar{g} \star \alpha \star g] \iff [g \star \bar{f}] \star [\alpha] = [\alpha] \star [g \star \bar{f}]$$

para todo $[\alpha] \in \Pi_1(X, p)$, por lo que $\mathcal{U}_f = \mathcal{U}_g \iff g \star \bar{f} \in \mathcal{Z}(\Pi_1(X, p))$. ■

Corolario 4.12 *El grupo fundamental $\Pi_1(X, p)$ está únicamente determinado salvo isomorfismos por la arcocomponente \mathcal{C}_p del punto p .*

En particular, si X es arcoconexo entonces la clase de isomorfía de $\Pi_1(X, p)$ no depende del punto $p \in X$. En este caso podemos relajar la notación y escribir simplemente $\Pi_1(X)$ sin enfatizar el punto base.

La importancia del grupo fundamental radica en que es un invariante topológico. Este hecho se deducirá fácilmente de la siguiente proposición.

Proposición 4.13 *Sean X e Y espacios topológicos y $\varphi: X \rightarrow Y$ una aplicación continua. Consideremos $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$ y los correspondientes $\varphi \circ \alpha, \varphi \circ \beta \in \Omega_{\varphi(p), \varphi(q)}(Y)$. Se tiene que*

$$\alpha \simeq \beta \implies \varphi \circ \alpha \simeq \varphi \circ \beta.$$

En particular:

- *La aplicación*

$$\varphi_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi(p)), \quad \varphi_*([\alpha]) := [\varphi \circ \alpha]$$

está bien definida y es un homomorfismo de grupos.

- *Si $\psi: Y \rightarrow Z$ es otra aplicación continua y consideramos los homomorfismos de grupos $\psi_*: \Pi_1(Y, \varphi(p)) \rightarrow \Pi_1(Z, \psi(\varphi(p)))$ y $(\psi \circ \varphi)_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Z, \psi(\varphi(p)))$, entonces se tiene que $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.*

DEMOSTRACIÓN : Para la primera parte de la proposición tomemos $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ una homotopía de α en β , y observemos que $\varphi \circ H: [0, 1]^2 \rightarrow Y$ es una homotopía de $\varphi \circ \alpha$ en $\varphi \circ \beta$.

Por tanto $\varphi_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi(p))$ está bien definida. Para comprobar que φ_* es un morfismo de grupos tómense $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, p)$ y observe que

$$\varphi_*([\alpha] \star [\beta]) = \varphi_*([\alpha \star \beta]) = [\varphi \circ (\alpha \star \beta)] = [(\varphi \circ \alpha) \star (\varphi \circ \beta)] = \varphi_*([\alpha]) \star \varphi_*([\beta]).$$

El comportamiento functorial respecto a la composición es obvio de las definiciones. ■

Corolario 4.14 (Invarianza topológica del Grupo Fundamental) *Si $\varphi: X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo de espacios topológicos entonces $\varphi_*: \Pi_1(X, p) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi(p))$ es un isomorfismo de grupos con $(\varphi_*)^{-1} = (\varphi^{-1})_*$.*

DEMOSTRACIÓN : Basta con utilizar que $(\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\Pi_1(X, p)}$ para todo espacio topológico X y punto $p \in X$, y tener en cuenta la proposición anterior para las composiciones $\varphi \circ \varphi^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ \varphi$. ■

Este corolario tiene gran utilidad. Pensemos que, como consecuencia del mismo, dos espacios topológicos con grupos fundamentales no isomorfos no pueden ser homeomorfos. Este hecho tendrá implicaciones profundas como veremos más adelante.

5. Cálculo del grupo fundamental: ejemplos básicos

En este tema abordaremos algoritmos complejos para el cálculo del grupo fundamental. Estudiemos ahora algunos ejemplos sencillos que son de bastante utilidad.

Ejercicio 5.1 *El grupo fundamental de un subconjunto estrellado de \mathbb{R}^n es trivial. En particular, todo subconjunto convexo de \mathbb{R}^n (luego el propio \mathbb{R}^n) tiene grupo fundamental trivial.*

SOLUCIÓN : Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n$ estrellado con centro $x_0 \in A$, esto es, tal que $[x_0, x] \subset A$ para todo $x \in A$. Por supuesto A se entiende dotado de la topología euclíadiana inducida.

Dado un lazo $\alpha \in \Omega_{x_0}(A)$, la aplicación bien definida

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow A, \quad H(t, s) := (1 - s)\alpha(t) + sx_0$$

prueba que $\alpha \simeq \epsilon_{x_0}$, y por tanto que $\Pi_1(A, x_0) = \{[\epsilon_{x_0}]\} \equiv \{0\}$. ■

La siguiente proposición prueba que el grupo fundamental es productivo.

Proposición 5.2 *Sean X_1 e X_2 espacios topológicos, $X_1 \times X_2$ el espacio topológico producto y $\pi_j: X_1 \times X_2 \rightarrow X_j$, $j = 1, 2$, las proyecciones.*

Entonces, para cualesquiera $p \in X_1$ y $q \in X_2$ la aplicación

$$(\pi_{1*}, \pi_{2*}): \Pi_1(X_1 \times X_2, (p, q)) \rightarrow \Pi_1(X_1, p) \times \Pi_1(X_2, q),$$

es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN : Por la definición de la topología producto, las proyecciones son aplicaciones continuas. Consideremos el homomorfismo de grupos (ver Proposición 4.13)

$$\Lambda := (\pi_{1*}, \pi_{2*}): \Pi_1(X_1 \times X_2, (p, q)) \rightarrow \Pi_1(X_1, p) \times \Pi_1(X_2, q).$$

Será suficiente con probar que es un isomorfismo, y para ello bastará con garantizar que tiene una inversa. Para ello consideramos la aplicación

$$\Theta: \Pi_1(X_1, p) \times \Pi_1(X_2, q) \rightarrow \Pi_1(X_1 \times X_2, (p, q)), \quad \Theta([\alpha_1], [\alpha_2]) := [(\alpha_1, \alpha_2)].$$

No es difícil demostrar que Θ está bien definida. En efecto, si $\alpha_j \simeq \alpha'_j$ vía una homotopía $H_j: [0, 1]^2 \rightarrow X_j$, $j = 1, 2$, entonces $(\alpha_1, \alpha_2) \simeq (\alpha'_1, \alpha'_2)$ via la homotopía $(H_1, H_2): [0, 1]^2 \rightarrow X_1 \times X_2$. Esto demuestra que Θ no depende del representante elegido para la definición.

El hecho de que Λ y Θ son uno inverso del otro es un ejercicio trivial. ■

Otra familia de espacios topológicos para la que es posible deducir información sobre su grupo fundamental es la de los *grupos topológicos*.

Definición 5.3 *Un grupo topológico es un par (G, \cdot) donde:*

- G es un espacio topológico
- $\cdot: G \times G \rightarrow G$ es una ley de composición interna en G que le dota de estructura de grupo algebraico.

- La aplicación $G \times G \rightarrow G$, $(a, b) \mapsto a \cdot b^{-1}$, es continua, o equivalentemente,

$$\therefore G \times G \rightarrow G, (a, b) \mapsto a \cdot b, \quad y \quad (\)^{-1}: G \rightarrow G, a \mapsto a^{-1},$$

son continuas.

Teorema 5.4 Si (G, \cdot) es un grupo topológico y $e \in G$ es su Elemento Neutro, entonces $\Pi_1(G, e)$ es abeliano.

DEMOSTRACIÓN: Introduzcamos en $\Pi_1(G, e)$ una nueva ley de composición interna, distinta a \star , asociada a la estructura de grupo topológico. Para ello definimos:

$$\cdot: \Pi_1(G, e) \times \Pi_1(G, e) \rightarrow \Pi_1(G, e), \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta],$$

donde $\alpha \cdot \beta: [0, 1] \rightarrow G$ viene dado por $(\alpha \cdot \beta)(t) := \alpha(t) \cdot \beta(t)$ para todo $t \in [0, 1]$.

Como siempre, hay que garantizar que \cdot está bien definida en clases. Para ello consideremos $\alpha_j \simeq \alpha'_j$ en $\Omega_e(G)$ via una homotopía $H_j: [0, 1]^2 \rightarrow G$, $j = 1, 2$, y observemos que $H_1 \cdot H_2: [0, 1]^2 \rightarrow G$ (definida de forma natural) es una homotopía de $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ en $\alpha'_1 \cdot \alpha'_2$.

A continuación hagamos el siguiente cálculo:

$$\alpha \star \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2t) \cdot e & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ e \cdot \beta(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = (\alpha \star \epsilon_e) \cdot (\epsilon_e \star \beta).$$

Análogamente,

$$\alpha \star \beta(t) = \begin{cases} e \cdot \alpha(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \beta(2t - 1) \cdot e & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = (\epsilon_e \star \beta) \cdot (\alpha \star \epsilon_e).$$

Pero $(\alpha \star \epsilon_e) \cdot (\epsilon_e \star \beta) \simeq \alpha \cdot \beta$ y $(\epsilon_e \star \beta) \cdot (\alpha \star \epsilon_e) \simeq \beta \cdot \alpha$, de donde $\alpha \star \beta \simeq \alpha \cdot \beta \simeq \beta \cdot \alpha$, y simétricamente $\beta \star \alpha \simeq \alpha \cdot \beta \simeq \beta \cdot \alpha$. Esto prueba que $[\alpha] \star [\beta] = [\beta] \star [\alpha]$ y el teorema. ■

6. El Grupo Fundamental de \mathbb{S}^1

Nuestro objetivo inmediato será calcular explícitamente el grupo fundamental de la circunferencia \mathbb{S}^1 . En lo que sigue identificaremos $\mathbb{S}^1 \equiv \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$. Como \mathbb{S}^1 es un grupo topológico con el producto de números complejos, a priori sabemos por el Teorema 5.4 que $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$ ha de ser abeliano.

Un ingrediente fundamental para nuestro estudio serán las propiedades topológicas de la aplicación exponencial

$$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad \rho(t) := e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t) \equiv (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \quad (2)$$

que recordamos a continuación:

- (a) $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua, abierta y sobreyectiva.
- (b) ρ es un homomorfismo entre los grupos $(\mathbb{R}, +)$ y (\mathbb{S}^1, \cdot) : $\rho(t+s) = \rho(t) \cdot \rho(s)$.
- (c) ρ es periódica con periodo fundamental 1: $\rho(t+1) = \rho(t)$.
- (d) Si $t_0 \in \rho^{-1}(z)$, $z \in \mathbb{S}^1$, entonces $\rho^{-1}(z) = t_0 + \mathbb{Z}$. En particular $\rho^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.
- (e) Para todo $t_0 \in \mathbb{R}$, $\rho|_{[t_0, t_0+1]}: [t_0, t_0+1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ es biyectiva.

(f) Para todo $z \in \mathbb{S}^1$ existe un abierto $U \subset \mathbb{S}^1$ tal que:

- $z \in U$.
- Si V es una arcocomponente de $\rho^{-1}(U)$ entonces $\rho|_V: V \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Todos las propiedades anteriores son bien conocidas. Quizá merezca un mínimo comentario la prueba del ítem (f). En efecto, sea $z \in \mathbb{S}^1$ y definamos $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-z\}$ y nótese que $z \in U$. Dado $t_0 \in \rho^{-1}(-z)$ es claro que $\rho^{-1}(U) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [t_0 + m, t_0 + m + 1]$, donde los conjuntos $[t_0 + m, t_0 + m + 1]$, $m \in \mathbb{Z}$, son las arcocomponentes de $\rho^{-1}(U)$. Si $V =]t_0 + m, t_0 + m + 1[$ es una arcocomponente cualquiera de $\rho^{-1}(U)$, el ítem (e) garantiza que $\rho|_V: V \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Necesitaremos el siguiente resultado de levantamiento.

Lema 6.1 *Dada $H: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua con $H(0,0) = 1$, existe una única aplicación $\tilde{H}: [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\rho \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0,0) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad de \tilde{H} es evidente. En efecto, admitamos que existen dos aplicaciones \tilde{H} y \tilde{H}' satisfaciendo la tesis del Lema. Como $\rho \circ (\tilde{H} - \tilde{H}')$ constante e igual a $1 \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, la aplicación continua $\tilde{H} - \tilde{H}': [0,1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ha de tener su imagen contenida en \mathbb{Z} . Al ser $[0,1]^2$ conexo lo mismo ocurre con $(\tilde{H} - \tilde{H}')([0,1]^2)$, de donde concluimos que $\tilde{H} - \tilde{H}'$ ha de ser constante e igual a $(\tilde{H} - \tilde{H}')(0,0) = 0$, esto es, que $\tilde{H} = \tilde{H}'$.

Probemos ahora la existencia de \tilde{H} .

Consideremos el recubrimiento por abiertos de \mathbb{S}^1 dado por

$$\mathcal{U} = \{U_1 := \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}, U_2 := \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}\}.$$

Como $C = [0,1]^2$ es un espacio métrico compacto (con la distancia euclíadiana inducida), existe el llamado *número de Lebesgue* $\epsilon > 0$ para el recubrimiento abierto $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$ de C . Esto significa que cualquier subconjunto $A \subset C$ con diámetro euclíadiano $< \epsilon$ satisface $A \subset H^{-1}(U_j)$ para algún $j \in \{1, 2\}$. De aquí que podamos elegir una partición $0 = t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$ de $[0,1]$ tal que

$$H([t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}]) \subset U_j \text{ para algún } j \in \{1, 2\}, i, h = 1, \dots, k \quad (3)$$

(bastará con garantizar que $|t_{j+1} - t_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$).

Numeremos C_1, \dots, C_N , $N = k^2$, la familia de cuadrados $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}]: i, h = 1, \dots, k\}$ de acuerdo al siguiente criterio:

- $C_1 = [t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$.
- $K_j := \bigcup_{i \leq j} C_i$ es conexo, $j = 1, \dots, N$.
- $L_j := K_j \cap C_{j+1}$ es conexo y consiste en uno o dos lados borde comunes a las regiones poliédricas K_j y C_{j+1} .

La construcción de \tilde{H} se hará por un procedimiento inductivo. Llamemos

$$H_j = H|_{K_j}: K_j \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad j = 1, \dots, N.$$

Observemos que $H_1(C_1) \subset U_1$ y sea V_1 la arcocomponente de $\rho^{-1}(U_1) \subset \mathbb{R}$ conteniendo a 0 (ver la propiedad (f) de la proyección $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$). Recordemos que $\rho|_{V_1}: V_1 \rightarrow U_1$ es un homeomorfismo que aplica $0 \in V_1$ en $1 \in \mathbb{S}^1$. La aplicación

$$\tilde{H}_1 := (\rho|_{V_1})^{-1} \circ H_1: K_1 \equiv C_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

es obviamente continua y satisface $\rho \circ \tilde{H}_1 = H_1$ y $\tilde{H}_1(0, 0) = 0$.

Supongamos construida $\tilde{H}_j: K_j \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $\rho \circ \tilde{H}_j = H_j$ y $\tilde{H}_j(0, 0) = 0$, $1 \leq j < N$.

Procedamos a cerrar el proceso inductivo construyendo una aplicación continua $\tilde{H}_{j+1}: K_{j+1} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo $\rho \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$ y $\tilde{H}_{j+1}(0, 0) = 0$. En efecto, primero observemos que $H_{j+1}(C_{j+1}) = H(C_{j+1}) \subset U_{j+1}$ para algún $j+1 \in \{1, 2\}$; ver la ecuación (3). Como

- $H_j(L_j) \subset H_{j+1}(C_{j+1}) \subset U_{j+1}$,
- $H_j(L_j)$ es arcoconexo y
- $\rho(\tilde{H}_j(L_j)) = H_j(L_j)$,

por la propiedad (f) de ρ existe una arcocomponente V_{j+1} de $\rho^{-1}(U_{j+1}) \subset \mathbb{R}$ conteniendo a $\tilde{H}_j(L_j)$ tal que $\rho|_{V_{j+1}}: V_{j+1} \rightarrow U_{j+1}$ un homeomorfismo. La aplicación

$$\tilde{H}_{j+1} := \begin{cases} \tilde{H}_j & \text{sobre } K_j \\ (\rho|_{V_{j+1}})^{-1} \circ (H_{j+1}|_{C_{j+1}}) & \text{sobre } C_{j+1} \end{cases}$$

está bien definida, es continua, y satisface $\rho \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$ y $\tilde{H}_{j+1}(0, 0) = 0$, cerrando la inducción.

Para acabar la prueba del Lema basta con elegir $\tilde{H} = \tilde{H}_N$. ■

Como consecuencia tenemos la siguiente propiedad de levantamiento de arco.

Corolario 6.2 (Propiedad del levantamiento de arco) *Sea $\alpha: [0,1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ un arco con $\alpha(0) = 1$. Entonces existe un único arco $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN : La unicidad es obvia razonando como en la prueba del Lema 6.1.

Procedamos a probar la existencia de $\tilde{\alpha}$. Para ello basta con definir

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad H(t, s) := \alpha(t),$$

que claramente satisface las hipótesis del Lema 6.1, y considerar la aplicación \tilde{H} dada en él. Obviamente el arco $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\alpha}(t) := \tilde{H}(t, 0)$, resuelve el corolario. ■

Corolario 6.3 (Propiedad del levantamiento de homotopías) *Sean α y β arcos en \mathbb{S}^1 con $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Supongamos que existe una homotopía H de α en β . Entonces:*

- Los arcos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ dados por el Corolario 6.2 tienen los mismos extremos.
- La aplicación \tilde{H} dada por el Lema 6.1 es una homotopía (con extremos fijos) de $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$.

DEMOSTRACIÓN: Consideremos la aplicación \tilde{H} dada en el Lema 6.1 y los levantamientos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ dados en el Corolario 6.2.

Por la unicidad del Corolario 6.2, $\tilde{\alpha} = \tilde{H}(\cdot, 0)$.

Como $\tilde{H}(0, \cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es un arco con punto inicial 0 que se proyecta en el arco constante ϵ_1 en \mathbb{S}^1 , por la unicidad del levantamiento de arcos concluimos que $\tilde{H}(0, \cdot)$ es el arco constante ϵ_0 en \mathbb{R} . De aquí que, de nuevo por el Corolario 6.2, $\tilde{\beta} = \tilde{H}(\cdot, 1)$.

Finalmente, como $\tilde{H}(1, \cdot): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es un arco que se proyecta en el arco constante $\epsilon_{\alpha(1)}$ en \mathbb{S}^1 , por la unicidad del levantamiento de arcos concluimos que $\tilde{H}(1, \cdot)$ es el arco constante $\epsilon_{\tilde{H}(1, 0)} = \epsilon_{\tilde{\alpha}(1)}$ en \mathbb{R} .

Uniendo toda esa información concluimos que \tilde{H} es una homotopía de $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$. ■

Este último corolario será trascendental, en lenguaje sencillo expresa que arcos homotópicos en \mathbb{S}^1 se levantan a arcos homotópicos en \mathbb{R} por la aplicación $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$.

La construcción del levantamiento $\tilde{\alpha}$ a partir de α en el Corolario 6.2 es en cierto sentido implícita. En el caso de que α sea diferenciable es posible establecer una fórmula directa para este cálculo.

Ejercicio 6.4 Si $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2): [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ es un arco de clase C^1 con $\alpha(0) = (1, 0)$, entonces su levantamiento vía ρ a \mathbb{R} viene dado por:

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t (\alpha_1(s)\alpha'_2(s) - \alpha'_1(s)\alpha_2(s))ds$$

De forma explícita, y para cada $n \in \mathbb{Z}$, el lazo $\alpha_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, $\alpha_n(t) := e^{2n\pi it}$, se levanta con condición inicial $\tilde{\alpha}_n(0) = 0$ al arco $\tilde{\alpha}_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\tilde{\alpha}_n(t) := nt$.

El concepto de grado de un lazo en \mathbb{S}^1 será el ingrediente algebraico necesario para interpretar el grupo fundamental de la circunferencia.

Definición 6.5 Dado un lazo $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ con base el punto $1 \in \mathbb{S}^1$, definimos el grado de α como

$$\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) \in \mathbb{Z},$$

donde $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ representa el levantamiento de α con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = 0$.

Nótese que la condición $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ implica $\rho \circ \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = 1$, por lo que efectivamente $\deg(\alpha) \in \mathbb{Z}$ como se enfatiza en la definición. El grado es interesante para la topología porque tiene un buen comportamiento respecto a la homotopía, como muestra la siguiente

Proposición 6.6 Dados $\alpha, \beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ dos lazos con base el punto $1 \in \mathbb{S}^1$, se tiene que

$$\alpha \simeq \beta \iff \deg(\alpha) = \deg(\beta).$$

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $\alpha \simeq \beta$. Por el Corolario 6.3, los correspondientes levantamientos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ con condición inicial 0 son también homotópicos: $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$. Esto implica que $\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \deg(\beta)$.

Recíprocamente, supongamos que $\deg(\alpha) = \deg(\beta)$. Consideremos los correspondientes levantamientos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ con condición inicial 0. Al ser $\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1) = \deg(\beta)$, la aplicación continua

$$\tilde{H}: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{H}(t, s) := (1-s)\tilde{\alpha}(t) + s\tilde{\beta}(t)$$

es una homotopía con extremos fijos que garantiza $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$. Al ser ρ continua, $\alpha = \rho \circ \tilde{\alpha} \simeq \rho \circ \tilde{\beta} = \beta$ vía la homotopía $\rho \circ \tilde{H}$, lo que concluye la proposición. ■

Como consecuencia de este análisis podemos enunciar el teorema central de esta sección que materializa el cálculo del grupo fundamental de la circunferencia.

Teorema 6.7 *La aplicación*

$$\deg: (\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \star) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), \quad \deg([\alpha]) := \deg(\alpha),$$

está bien definida y es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: La Proposición 6.6 garantiza que $\deg: (\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1), \star) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ está bien definida en clases de homotopía.

La inyectividad es consecuencia también de la Proposición 6.6. En cuanto a la sobreyectividad simplemente téngase en cuenta que $\deg([\alpha_n]) = n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$; ver Ejercicio 6.4.

Para concluir solo resta probar que \deg es un homomorfismo de grupos. En efecto, tomemos $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. Tenemos que

$$\deg([\alpha] \star [\beta]) = \deg([\alpha \star \beta]) = \deg(\alpha \star \beta) = \widetilde{\alpha \star \beta}(1).$$

Pero por unicidad del levantamiento es inmediato comprobar que

$$\widetilde{\alpha \star \beta}(t) := \begin{cases} \widetilde{\alpha}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(2t - 1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

por lo que $\deg([\alpha] \star [\beta]) = \widetilde{\alpha \star \beta}(1) = \widetilde{\alpha}(1) + \widetilde{\beta}(1) = \deg([\alpha]) + \deg([\beta])$.

Esto acaba la demostración. ■

6.1. $\Pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$: consecuencias

En esta sección recopilaremos algunas consecuencias topológicas del cálculo del grupo fundamental de \mathbb{S}^1 .

Comenzaremos con esta proposición.

Proposición 6.8 *Si \overline{D} denota el disco unidad cerrado $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, no existe ninguna aplicación continua $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $f|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y admitamos existe una tal f . Llamemos $i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \overline{D}$ a la aplicación inclusión, obviamente continua, y observemos que $f \circ i: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es la aplicación $\text{Id}_{\mathbb{S}^1}$.

Si denotamos $i_*: \mathbb{Z} \equiv \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \Pi_1(\overline{D}, 1)$ y $f_*: \Pi_1(\overline{D}, 1) \rightarrow \Pi_1(\mathbb{S}^1) \equiv \mathbb{Z}$ a los correspondientes homomorfismos entre grupos fundamentales, la Proposición 4.13 nos garantiza que

$$f_* \circ i_* = (\text{Id}_{\mathbb{S}^1})_* = \text{Id}_{\mathbb{Z}}.$$

Del Ejercicio 5.1 deducimos que $\Pi_1(\overline{D}, 1) = \{[\epsilon_1]\} \equiv \{0\}$. De aquí que f_* , y por tanto $f_* \circ i_*$, sea el homomorfismo nulo, una contradicción. ■

Como consecuencia podemos demostrar el siguiente teorema del punto fijo en dimensión dos, cuya generalización a dimensión arbitraria es cierta aunque requiere de otro tipo de herramientas para su demostración.

Teorema 6.9 (Punto fijo de Brower) *Sea $f: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ una aplicación continua. Entonces existe $p_0 \in \overline{D}$ tal que $f(p_0) = p_0$.*

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y admitamos que existe $f: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ sin puntos fijos. La contradicción se generará probando que entonces existe una aplicación continua $r: \overline{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$ satisfaciendo $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$, lo que es contrario a la Proposición 6.8.

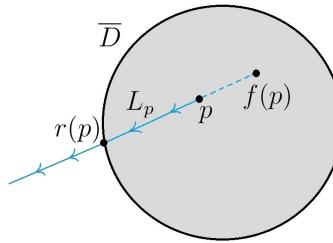
Tomemos $p \in \overline{D}$. Como $p \neq f(p)$, la convexidad estricta de \overline{D} garantiza que la semirecta

$$L_p := \{p + \lambda(p - f(p)): \lambda \geq 0\}$$

corta \mathbb{S}^1 en un único punto

$$r(p) := L_p \cap \mathbb{S}^1,$$

y que además $r(p) = p$ cuando $p \in \mathbb{S}^1$.



Este hecho es evidente por consideraciones geométricas, pero no obstante admite una demostración formal analítica. En efecto, es inmediato que

$$\|p + \lambda(p - f(p))\|^2 = 1 \iff \lambda^2 \|f(p) - p\|^2 + 2\lambda \langle p, p - f(p) \rangle + (\|p\|^2 - 1) = 0.$$

Un análisis sencillo de esta ecuación nos dice:

- El discriminante como polinomio en λ

$$4(\langle p, p - f(p) \rangle^2 + \|f(p) - p\|^2(1 - \|p\|^2)) \geq 0$$

ya que $\|p\| \leq 1$, por lo que la ecuación en λ tiene dos raíces reales.

- Como $p \neq f(p)$ y son de norma ≤ 1 , $\langle p, p - f(p) \rangle > 0$ y existe una raíz $\lambda_-(p) < 0$:

$$\lambda_-(p) = \frac{1}{\|p - f(p)\|^2} (-\langle p, p - f(p) \rangle - \sqrt{\langle p, p - f(p) \rangle^2 + \|p - f(p)\|^2(1 - \|p\|^2)})$$

- Como el t. i. es $\|p\|^2 - 1 \leq 0$ y el coeficiente líder $\|f(p) - p\|^2 > 0$, la otra raíz $\lambda_+(p)$ ha de ser ≥ 0 :

$$\lambda_+(p) = \frac{1}{\|p - f(p)\|^2} (-\langle p, p - f(p) \rangle + \sqrt{\langle p, p - f(p) \rangle^2 + \|p - f(p)\|^2(1 - \|p\|^2)})$$

Por tanto, $r(p)$ está únicamente determinado y viene dado por la expresión

$$r(p) = p + \lambda_+(p)(p - f(p)).$$

Esto demuestra que $r: \overline{D} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua, y como $\lambda_+(p) = 0$ cuando $p \in \mathbb{S}^1$, que $r|_{\mathbb{S}^1} = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$, lo que concluye la prueba. ■

Evidentemente el teorema del punto fijo de Brower se aplica para aplicaciones continuas $f: X \rightarrow X$, donde X es un disco topológico compacto arbitrario, afirmando que f tiene un punto fijo. La demostración de este hecho se deja como ejercicio trivial. Comentaremos ahora una de sus consecuencias más conocidas.

Teorema 6.10 (Teorema de Perron-Fröbenius) *Sea $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada real de orden n con todos sus coeficientes positivos. Entonces A tiene un valor propio positivo.*

Por el teorema de Bolzano todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene al menos una raíz real. Aplicando este hecho al polinomio característico de A se deduce que A tiene al menos un valor propio real, el Teorema de Perron-Fröbenius proporciona información extra al respecto.

DEMOSTRACIÓN: Sean $X = \mathbb{S}^2 \cap [0, +\infty]^3$ e $Y = \overline{D} \cap [0, \infty]^2$, donde como siempre $\overline{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Es claro que Y es un disco topológico compacto (es una región convexa de \mathbb{R}^2 bordeada por una curva de Jordan). Como $\pi: X \rightarrow Y$, $\pi(x, y, z) = (x, y)$, es un homeomorfismo, o en otras palabras X es un grafo sobre Y , inferimos que X es un disco topológico compacto también.

La aplicación

$$f: X \rightarrow X, \quad f(p) = \frac{A \cdot p}{\|A \cdot p\|}$$

está bien definida ya que, por nuestras hipótesis sobre la matriz A ,

$$\|A \cdot p\| > 0 \quad \text{y} \quad A \cdot p / \|A \cdot p\| \in X \quad \text{para todo } p \in X.$$

Como f es claramente continua, el Teorema del punto fijo de Brower nos garantiza que f tiene un punto fijo $p_0 \in X$. De aquí que

$$f(p_0) = p_0 \iff A \cdot p_0 = \|A \cdot p_0\| p_0,$$

de donde p_0 es un vector propio de A con valor propio asociado $\|A \cdot p_0\| > 0$. Esto concluye el teorema. ■

Una de las consecuencias más sorprendentes del hecho de que $\Pi_1(\mathbb{S}^1, 1) = \mathbb{Z}$ es el Teorema Fundamental del Álgebra, originalmente demostrado por Gauss.

Teorema 6.11 (Teorema Fundamental del Álgebra) *Sea $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función polinómica de la forma*

$$P(z) = a_0 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n, \tag{4}$$

donde $n \geq 1$.

Entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

En ese caso podemos definir

$$H: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad H(t, s) := \frac{P(\frac{s}{1-s}e^{2\pi it})}{|P(\frac{s}{1-s}e^{2\pi it})|} \frac{|P(\frac{s}{1-s})|}{P(\frac{s}{1-s})}.$$

Esta aplicación es claramente continua en su dominio. Nuestro objetivo es probar que admite una extensión continua a $[0, 1]^2$, esto es, que puede ser definida con continuidad en los puntos $(t, 1)$, $t \in [0, 1]$. Esto es consecuencia de la siguiente observación.

Consideremos una sucesión $\{(t_k, s_k)\}_{k \in \mathbb{N}} \subset [0, 1] \times [0, 1[$ convergiendo a $(t, 1)$, donde $t \in [0, 1]$. Se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H(t_k, s_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{P(\frac{s_k}{1-s_k} e^{2\pi i t_k})}{|P(\frac{s_k}{1-s_k} e^{2\pi i t_k})|} \frac{|P(\frac{s_k}{1-s_k})|}{P(\frac{s_k}{1-s_k})} = e^{2\pi i n t} = \alpha_n(t),$$

donde simplemente se ha tenido en cuenta que $\{\frac{s_k}{1-s_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow +\infty$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow t$, la expresión de $P(z)$ en (4), y el álgebra básica de límites.

Por tanto, extendiendo H a $[0, 1] \times \{1\}$ por la expresión

$$H(t, 1) = e^{2\pi i n t}, \quad t \in [0, 1],$$

construimos una aplicación continua $H: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$.

Una comprobación estándar nos dice que $H(t, 0) = H(0, s) = H(1, s) = 1$, por lo que H es una homotopía en \mathbb{S}^1 de ϵ_1 en α_n . Esto contradice que $n = \deg(\alpha_n) \neq 0 = \deg(\epsilon_1)$ (ver Proposición 6.6 o Teorema 6.7), concluyendo la prueba. ■

7. Equivalencias homotópicas

Como bien sabemos dos espacios homeomorfos tienen el mismo grupo fundamental, salvo isomorfismos. Sin embargo existen condiciones topológicas más débiles que el homeomorfismo que nos permiten extraer la misma conclusión. En esta sección las estudiaremos con detalle.

Definición 7.1 *Sea X un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio topológico. Una retracción de X en A es una aplicación continua $r: X \rightarrow A$ satisfaciendo $r|_A = \text{Id}_A$, o equivalentemente, $r \circ i = \text{Id}_A$ donde $i: A \rightarrow X$ es la aplicación inclusión. En este caso se dice que A es un retracto de X .*

Proposición 7.2 *Si $r: X \rightarrow A$ es una retracción, $i: A \rightarrow X$ es la aplicación inclusión y $a \in A$, entonces*

- $r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a)$ es un epimorfismo y
- $i_*: \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$ es un monomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Como $r \circ i = \text{Id}_A$ deducimos que $(r \circ i)_* = r_* \circ i_* = (\text{Id}_A)_* = \text{Id}_{\Pi_1(A, a)}$. La proposición se sigue trivialmente. ■

El ejemplo más simple de retracción es la aplicación constante $r: X \rightarrow \{p\}$ para cada $p \in X$. En otras palabras, todo punto es un retracto del espacio que lo contiene.

Ejercicio 7.3 *Las siguientes aplicaciones entre espacios euclidianos son retracciones:*

- $n: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $n(q) = \frac{q}{\|q\|}$.
- $n|_{\overline{B}(0,1) \setminus \{0\}}: \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n$, donde $\overline{B}(0, 1) = \{p \in \mathbb{R}^n: \|p\| \leq 1\}$.
- $p: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\} \equiv \mathbb{S}^1$, $p(x, y, z) := (x, y, 0)$.
- $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := \left(\frac{1}{\|(x,y)\|}(x, y), z\right)$.

7.1. Retractos de deformación

Una situación particularmente interesante es cuando un espacio puede ser deformado en un retracto suyo de forma continua. El concepto que da sentido a esta idea se trata en la siguiente definición.

Definición 7.4 *Dado un espacio topológico X y un subespacio suyo $A \subset X$, se dice que A es un retracto de deformación de X si existen una retracción $r: X \rightarrow A$ y una aplicación continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ satisfaciendo:*

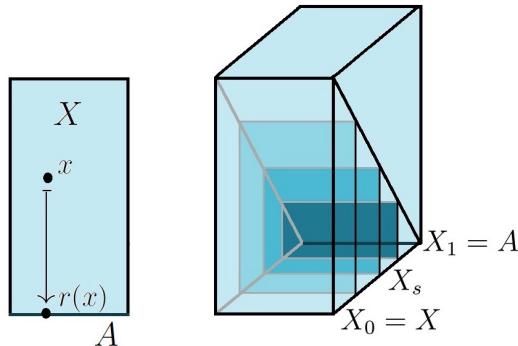
- $H(x, 0) = x$ para todo $x \in X$.
- $H(x, 1) = r(x)$ para todo $x \in X$.

Si adicionalmente

$$H(a, s) = a \text{ para todo } (a, s) \in A \times [0, 1],$$

entonces se dice que A es un retracto fuerte de deformación de X .

A las aplicaciones H y r se les llamará una deformación y retracción asociadas al retracto (fuerte) de deformación A de X , respectivamente.



Si el parámetro s en la anterior definición se interpreta como medida del tiempo transcurrido y definimos $H_s := H(\cdot, s) : X \rightarrow X$ para cada $s \in [0, 1]$, las aplicaciones

$$\{H_s : s \in [0, 1]\}$$

materializan una deformación entre la aplicación identidad en X (instante $s = 0$) y la retracción $r: X \rightarrow A$ (instante $s = 1$). En otras palabras, si denotamos por $X_s := H_s(X) \subset X$, $s \in [0, 1]$, los subespacios $\{X_s : s \in [0, 1]\}$ de X reflejan una deformación continua del espacio total X ($s = 0$) en el subespacio (retracto) $A \subset X$ ($s = 1$).

Ejercicio 7.5 *Las siguientes aplicaciones realizan retractos fuertes de deformación:*

- El centro p_0 de un conjunto estrellado A (en un espacio euclíadiano \mathbb{R}^n) es un retracto fuerte de deformación de A :

$$H: A \times [0, 1] \rightarrow A, H(q, s) := (1 - s)q + sp_0.$$

- \mathbb{S}^n es un retracto fuerte de deformación de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$:

$$H: (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, h(q, s) := (1 - s)q + s\mathbf{n}(q),$$

$$\text{donde } \mathbf{n}: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^n, \mathbf{n}(q) = \frac{q}{\|q\|}.$$

- \mathbb{S}^n es un retracto fuerte de deformación de $\overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}$:

$$H: (\overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}, H(q, s) := (1 - s)q + s(n|_{\overline{B}(0, 1) \setminus \{0\}})(q).$$

- \mathbb{S}^1 es un retracto fuerte de deformación de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$:

$$H: (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, H(q, s) = (1 - s)q + s p(q),$$

donde $p: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\} \equiv \mathbb{S}^1$, $p(x, y, z) := (x, y, 0)$.

- $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ es un retracto fuerte de deformación de $\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$:

$$H: (\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}) \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}, H(q, s) = (1 - s)q + s f(q),$$

donde $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := (\frac{1}{\|(x, y)\|}(x, y), z)$.

Observación 7.6 Si A es un retracto de deformación de X , $\{C_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ son las arcocomponentes de A y \hat{C}_α es la arcocomponente de X conteniendo a C_α para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces:

- $r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$, y por tanto $\hat{C}_\alpha \neq \hat{C}_\beta$, $\alpha \neq \beta$.
- $\{\hat{C}_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ con las arcocomponentes de X .
- Si $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ y $r: X \rightarrow A$ son una deformación y retracción asociadas a A como retracto de deformación de X , entonces $H|_{\hat{C}_\alpha \times [0, 1]}: \hat{C}_\alpha \times [0, 1] \rightarrow \hat{C}_\alpha$ y $r|_{\hat{C}_\alpha}: \hat{C}_\alpha \rightarrow C_\alpha$ son una deformación y retracción asociadas a C_α como retracto de deformación de \hat{C}_α .

DEMOSTRACIÓN : Tomemos $r: X \rightarrow A$ y $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ una retracción y deformación asociadas a A como retracto de deformación de X .

Si $p \in X$, la curva $H(p, s)$ conecta p y $r(p) \in A$, de donde se deduce que la arcocomponente de p en X está en la familia $\{\hat{C}_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$. Esto prueba que $\{\hat{C}_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$ son las arcocomponentes de X .

Por otra parte, sean p y $q \in A \cap \hat{C}_\alpha$ para algún $\alpha \in \Lambda$, y sea $c: [0, 1] \rightarrow X$ un arco en X conectándolos, con traza necesariamente en \hat{C}_α . Entonces $r(c(t))$ es un arco en A conectando $p = r(p)$ y $q = r(q)$, por lo que p y q están en la misma arcocomponente de A (a saber, C_α). Esto prueba que $r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha$ para todo α , y por tanto que $\hat{C}_\alpha \neq \hat{C}_\beta$, $\alpha \neq \beta$.

Como $\hat{C}_\alpha \times [0, 1]$ es arcoconexo y H es continua, $H(\hat{C}_\alpha \times [0, 1])$ está contenido en una arcocomponente de X . De otro lado $H(\hat{C}_\alpha \times \{1\}) = r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha$, de donde inferimos que $H(\hat{C}_\alpha \times [0, 1])$ está contenido en la arcocomponente de X que contiene a C_α , a saber \hat{C}_α . De aquí que $H|_{\hat{C}_\alpha \times [0, 1]}: \hat{C}_\alpha \times [0, 1] \rightarrow \hat{C}_\alpha$ sea una deformación que realiza C_α como retracto de deformación de \hat{C}_α , con retracción asociada $r|_{\hat{C}_\alpha}: \hat{C}_\alpha \rightarrow C_\alpha$. ■

A veces es útil el siguiente resultado.

Proposición 7.7 Sea $F: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo. Si A es un retracto (fuerte) de deformación de Y entonces $F^{-1}(A)$ es un retracto (fuerte) de deformación de X .

DEMOSTRACIÓN: Si $H: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ y $r: Y \rightarrow A$ son una deformación y retracción asociadas a A como retracto (fuerte) de deformación de Y , basta observar que la aplicación continua

$$\hat{H}: X \times [0, 1] \rightarrow X, \quad \hat{H}(x, s) := (F^{-1} \circ H)((F(x), s)),$$

realiza a $F^{-1}(A)$ como retracto (fuerte) de deformación de X . ■

Ejercicio 7.8 Denotemos por $B(p, \epsilon)$ a la bola euclíadiana $\{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p\| < \epsilon\}$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, y sean $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2$.

Entonces $\overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$ es un retracto fuerte de deformación de $B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}$.

SOLUCIÓN: Recordemos que $\overline{B}(p, \epsilon) = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q - p\| < \epsilon\}$ para cada $p \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$. La aplicación

$$r: B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\} \rightarrow \overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, \quad r(q) = \begin{cases} q & \text{si } q \in \overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\} \\ \epsilon_1 \frac{q-p}{\|q-p\|} + p & \text{si } q \in B(p, \epsilon_2) \setminus \overline{B}(p, \epsilon_1) \end{cases},$$

es una retracción de $B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}$ en $\overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$, mientras que la deformación

$$H: (B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}) \times [0, 1] \rightarrow B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, \quad H(q, s) = (1-s)q + sr(q),$$

prueba que $\overline{B}(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$ es un retracto fuerte de deformación de $B(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}$ con retracción asociada r . ■

Teorema 7.9 Sea X un espacio topológico, y sea $A \subset X$ un retracto fuerte de deformación con $r: X \rightarrow A$ una retracción asociada. Entonces dado $a \in A$ se tiene que:

$$r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a) \text{ e } i_*: \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a) \text{ son isomorfismos,}$$

uno inverso del otro.

DEMOSTRACIÓN: Para evitar ambigüedades, si un lazo α basado en a tiene traza contenida en A , denotaremos por $[\alpha]_A \in \Pi_1(A, a)$ su clase de homotopía en A , y análogamente por $[\alpha]_X \in \Pi_1(X, a)$ su clase de homotopía en X .

Siguiendo la demostración de la Proposición 7.2, es suficiente con garantizar que $r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a)$ es un monomorfismo de grupos. Para ello tomemos $[\alpha]_X \in \Pi_1(X, a)$ y supongamos que $r_*([\alpha]_X) = [\epsilon_a]_A$. Hemos de probar que $[\alpha]_X = [\epsilon_a]_X$.

Consideremos una deformación $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ asociada a A como retracto fuerte de X , con $r: X \rightarrow A$ como retracción asociada. Es fácil comprobar que la aplicación continua

$$\hat{H}: [0, 1]^2 \rightarrow X, \quad \hat{H}(t, s) = H(\alpha(t), s)$$

es una homotopía *con extremos fijos* (aquí se usa que $H(a, s) = a$ para todo $a \in A$) entre los lazos $H(\cdot, 0) = \alpha$ y $H(\cdot, 1) = r \circ \alpha$ en el espacio X , y por tanto $[\alpha]_X = [r \circ \alpha]_X$. Pero por ser $r_*([\alpha]_X) = [r \circ \alpha]_A = [\epsilon_a]_A$, el lazo $r \circ \alpha$ (que está contenido en A) se deforma homotópicamente en el espacio A (¡luego en el espacio X !) en el lazo ϵ_a . Esto implica que $[r \circ \alpha]_X = [\epsilon_a]_X$, de donde $[\alpha]_X = [\epsilon_a]_X$ como queríamos demostrar. ■

Definición 7.10 Un espacio topológico X se dice *contrátil* si admite como retracto de deformación a un punto $\{p_0\} \subset X$. En caso de que $\{p_0\}$ sea retracto fuerte de deformación de X diremos que el espacio es *fuertemente contrátil*.

Todo espacio contrátil es arcoconexo por la Observación 7.6. Como comentamos en el Ejercicio 7.5, todo estrellado (luego todo convexo) en \mathbb{R}^n es fuertemente contrátil. En particular el propio \mathbb{R}^n .

Definición 7.11 Un espacio topológico X se dice simplemente conexo si es arcoc conexo y $\Pi_1(X, p) = \{[\epsilon_p]\}$ para algún $p \in X$ (luego para todo $p \in X$).

Como consecuencia del Teorema 7.9 tenemos el siguiente:

Corolario 7.12 Todo espacio topológico fuertemente contráctil es simplemente conexo.

Veremos más adelante (ver Corolario 7.21) que este enunciado es cierto para espacios contráctiles.

Ejercicio 7.13 Como consecuencia del Ejercicio 7.5 y del Teorema 7.9:

- Todo subconjunto estrellado de \mathbb{R}^n es simplemente conexo. Esto se aplica a subconjuntos $A \subset \mathbb{R}^n$ convexos (estrellados desde cualquiera de sus puntos), y por tanto al propio \mathbb{R}^n .
- Si $p \in \mathbb{S}^n$ entonces $\Pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, p)$ es isomorfo a $\Pi_1(\mathbb{S}^n, p)$.
- Si $p \in \mathbb{S}^1$ entonces $\Pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, (p, 0))$ es isomorfo a $\Pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}$.
- Si $p \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ entonces $\Pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}, p)$ es isomorfo a $\Pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, p) \cong \mathbb{Z}$.

Ejercicio 7.14 Probar que el grupo fundamental de la Cinta de Möbius es isomorfo a \mathbb{Z} .

SOLUCIÓN: Recordemos que la cinta de Möbius *compacta* M se define como el cociente topológico del cuadrado euclidiano $[-1, 1]^2$ bajo la relación de equivalencia

$$(x, y)R(x', y') \iff (x, y) = (x', y') \vee \left(\{x, x'\} = \{-1, 1\} \wedge y = -y' \right).$$

Normalmente se escribe $M = [-1, 1]^2/R$. La cinta de Möbius *no compacta* M_0 se genera a partir de la misma relación de equivalencia pero sobre la banda vertical $[-1, 1] \times \mathbb{R}$: $M_0 := ([-1, 1] \times \mathbb{R})/R$. Por brevedad sólo trataremos el caso de la compacta, aunque el de M_0 es totalmente análogo y se llega a la misma conclusión.

Si llamamos $\pi: [-1, 1]^2 \rightarrow M$ a la proyección al cociente, el subespacio topológico $S := \pi([-1, 1] \times \{0\}) \subset M$ es homeomorfo a \mathbb{S}^1 . La clave es observar que S es un retracto fuerte de deformación de M y usar el Teorema 6.7. En efecto, la retracción viene dada por la única aplicación $r: M \rightarrow S$ tal que $r \circ \pi = \pi \circ r_0$, donde $r_0: [-1, 1]^2 \rightarrow [-1, 1] \times \{0\}$, $r_0(x, y) = (x, 0)$, mientras que la deformación $H: M \times [-1, 1] \rightarrow M$ viene dada por la expresión $H(\pi(x, y), s) := \pi((1-s)(x, y) + s(x, 0))$. Ambas aplicaciones están bien definidas y son continuas por la teoría básica de identificaciones. ■

El siguiente Teorema tendrá muchas aplicaciones prácticas.

Teorema 7.15 Sea X un espacio topológico conexo y localmente arcoc conexo.

Supongamos que la topología de X admite una base \mathcal{B} satisfaciendo

- (I) \mathcal{B} es numerable (luego X es II-Axioma de Numerabilidad).
- (II) B es simplemente conexo para todo $B \in \mathcal{B}$.

Entonces $\Pi_1(X, x)$ es numerable para todo $x \in X$.

La condición de simple-conexión en el ítem (ii) se puede relajar por la de semilocal simple conexión (ver Definición 14.10), sin que ello afecte a la tesis del teorema.

DEMOSTRACIÓN: Dado un par $B, B' \in \mathcal{B}$ (puede ser $B = B'$), nuestras hipótesis implican que cada arcocomponente de $B \cap B'$ es un abierto de X , y por tanto contiene un abierto de \mathcal{B} . Como la familia $\mathcal{C}_{B,B'}$ de arcocomponentes de $B \cap B'$ está formada por conjuntos disjuntos dos a dos y \mathcal{B} es numerable, deducimos que $\mathcal{C}_{B,B'}$ ha de ser numerable. Por tanto,

$$\mathcal{C}_{\mathcal{B}} := \bigcup_{(B,B') \in \mathcal{B}^2} \mathcal{C}_{B,B'}$$

es igualmente numerable. Para cada $C \subset \mathcal{C}_{\mathcal{B}}$ elijamos $x_C \in C$ y formemos el conjunto claramente numerable

$$\Xi := \{x_C : C \in \mathcal{C}_{\mathcal{B}}\}.$$

Para cada $B \in \mathcal{B}$ y puntos $x, y \in B \cap \Xi$, fijemos un arco $\gamma_{x,y}^B : [0, 1] \rightarrow B$ con $\gamma_{x,y}^B(0) = x$ y $\gamma_{x,y}^B(1) = y$. Nuevamente la familia de arcos

$$\Gamma := \{\gamma_{x,y}^B : B \in \mathcal{B}, x, y \in B \cap \Xi\}$$

es numerable.

Fijemos $x_0 \in \Xi$. Nuestro objetivo va a ser demostrar que $\Pi_1(X, x_0)$ es numerable. Introduzcamos una familia *numerable* de lazos en X con base x_0 , que llamaremos *especiales*. Un lazo $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ se dirá *especial* si $\gamma = \gamma_1 \star \dots \star \gamma_k$ con:

- $\gamma_j = \gamma_{y_{j-1}, y_j}^{B_j} \in \Gamma$, donde $y_{j-1}, y_j \in B_j \cap \Xi$ para $2 \leq j \leq k - 1$.
- $\gamma_1 = \gamma_{x_0, y_1}^{B_1}$ y $\gamma_k = \gamma_{y_{k-1}, x_0}^{B_k}$, donde $x_0, y_1 \in B_1 \cap \Xi$ e $y_k, x_0 \in B_k \cap \Xi$.

La clave de la demostración se centra en garantizar que para todo $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$ existe $\gamma \in [\alpha]$ tal que γ es especial. Esto probaría que $\Pi_1(X, x_0)$ está descrito por las clases de homotopía de los lazos especiales, y por tanto es numerable.

Tomemos un lazo $\alpha : [0, 1] \rightarrow X$ con base x_0 arbitrario, y consideremos el recubrimiento abierto $\{\alpha^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\}$ del compacto $[0, 1]$. La existencia de número de Lebesgue para este recubrimiento y un razonamiento típico nos permite encontrar $0 = t_0 < t_1 \dots < t_k = 1$ tales que $\alpha([t_{j-1}, t_j]) \subset B_j \in \mathcal{B}$, $j = 1, \dots, k$. Definamos $\alpha_j : [0, 1] \rightarrow B_j \subset X$, $\alpha_j(s) = \alpha((1-s)t_{j-1} + st_j)$, $j = 1, \dots, k$, y observemos que $\alpha = \alpha_1 \star \dots \star \alpha_k$. Sea C_j la arcocomponente de $B_j \cap B_{j+1}$ conteniendo a $\alpha_j(1) = \alpha_{j+1}(0) = \alpha(t_j)$, y llamemos $y_j = x_{C_j} \in \Xi$, $1 \leq j \leq k - 1$. Sea $\sigma_j : [0, 1] \rightarrow C_j \subset B_j \cap B_{j+1}$ un arco con $\sigma_j(0) = y_j$ y $\sigma_j(1) = \alpha(t_j)$, $j = 1, \dots, k - 1$.

Obsérvese que $\alpha_j \simeq \bar{\sigma}_{j-1} \star \gamma_{y_{j-1}, y_j}^{B_j} \star \sigma_j$ ya que ambos lazos están contenidos en el simplemente conexo B_j y conectan los puntos $\alpha(t_{j-1})$ y $\alpha(t_j)$, $2 \leq j \leq k - 1$. Por un razonamiento similar $\alpha_1 \simeq \gamma_{x_0, y_1}^{B_1} \star \sigma_1$ y $\alpha_k \simeq \bar{\sigma}_{k-1} \star \gamma_{y_{k-1}, x_0}^{B_k}$.

Por tanto

$$\alpha \simeq (\gamma_{x_0, y_1}^{B_1} \star \sigma_1) \star \dots \star (\bar{\sigma}_{j-1} \star \gamma_{y_{j-1}, y_j}^{B_j} \star \sigma_j) \star \dots \star (\bar{\sigma}_{k-1} \star \gamma_{y_{k-1}, x_0}^{B_k}),$$

esto es,

$$\alpha \simeq \gamma_{x_0, y_1}^{B_1} \star \dots \star \gamma_{y_{k-1}, x_0}^{B_k}.$$

Esto prueba que α es homotópico a un lazo especial y concluye la demostración. ■

7.2. Homotopía de aplicaciones: tipo de homotopía

La siguiente definición trata sobre la idea de deformación en el contexto más general posible.

Definición 7.16 Dados dos espacios topológicos X e Y , dos aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$ se dicen homotópicas, y lo escribiremos $\varphi_1 \simeq \varphi_2$, si existe una aplicación continua $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ satisfaciendo:

$$H(x, 0) = \varphi_1(x) \quad \forall x \in X \quad \wedge \quad H(x, 1) = \varphi_2(x) \quad \forall x \in X.$$

Si $A \subset X$, las aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$ se dirán homotópicas relativas a A , y escribiremos $\varphi_1 \simeq_A \varphi_2$, si existe $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ como arriba satisfaciendo además:

$$H(a, s) = \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \text{ para todo } a \in A.$$

Por ejemplo, si $A \subset X$ es un retracto de deformación vía H con una retracción asociada r , es inmediato que $\text{Id}_X \simeq r$. Si A es un retracto fuerte de deformación de X se tiene $\text{Id}_X \simeq_A r$.

Cuando $X = [0, 1]$ las aplicaciones φ_j , $j = 1, 2$, son arcos y la relación \simeq se corresponde con la homotopía libre (sin extremos fijos) de arcos. La relación $\simeq_{\{0,1\}}$ no es sino la homotopía de extremos fijos \simeq que sirvió para construir el grupo fundamental.

El siguiente resultado establece que cualesquiera aplicaciones homotópicas inducen los mismos homomorfismos entre grupos fundamentales, salvo isomorfismos naturales.

Teorema 7.17 Sean X e Y espacios topológicos y sean $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas. Supongamos que $\varphi_1 \simeq \varphi_2$ vía $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, fijemos $x_0 \in X$ y llamemos $\gamma: [0, 1] \rightarrow Y$ al arco uniendo $\varphi_1(x_0)$ y $\varphi_2(x_0)$ definido por $\gamma(s) := H(x_0, s)$.

Dados los homomorfismos de grupos

$$(\varphi_1)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)), \quad (\varphi_2)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_2(x_0))$$

y el isomorfismo

$$\mathcal{U}_\gamma: \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \rightarrow \Pi_1(Y, \varphi_2(x_0)), \quad \mathcal{U}_\gamma([\beta]) = [\bar{\gamma} \star \beta \star \gamma]$$

(ver Proposición 4.11), se tiene que $\mathcal{U}_\gamma \circ (\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*$.

$$\begin{array}{ccc} \Pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{(\varphi_1)_*} & \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)) \\ (\varphi_2)_* \searrow & & \swarrow \mathcal{U}_\gamma \\ & \Pi_1(Y, \varphi_2(x_0)) & \end{array}$$

En particular los homomorfismos $(\varphi_1)_*$ y $(\varphi_2)_*$ son iguales salvo isomorfismos.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $C = [0, 1]^2$ y $\text{Bd}(C) = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$, donde

$$L_1 = \{1\} \times [0, 1], \quad L_2 = [0, 1] \times \{1\}, \quad L_3 = \{0\} \times [0, 1], \quad L_4 = [0, 1] \times \{0\}.$$

Consideremos arcos de Jordan (esto es, embebimientos) $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow C$, $j = 1, 2, 3, 4$, parametrizados para que:

- $\alpha_j([0, 1]) = L_j$, $j = 1, 2, 3, 4$, y
- $\alpha_1(0) = (1, 0) = \alpha_4(1)$, $\alpha_1(1) = (1, 1) = \alpha_2(0)$, $\alpha_2(1) = (0, 1) = \alpha_3(0)$, $\alpha_3(1) = (0, 0) = \alpha_4(1)$.

Definamos

$$\alpha := \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4: [0, 1] \rightarrow C$$

y obsérvemos que α es un lazo en C con base $(1, 0)$ y traza $\text{Bd}(C)$. Además α es uno a uno excepto por los puntos inicial y final que coinciden con $(1, 0)$.

Tomemos $[\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$ y definamos la aplicación continua

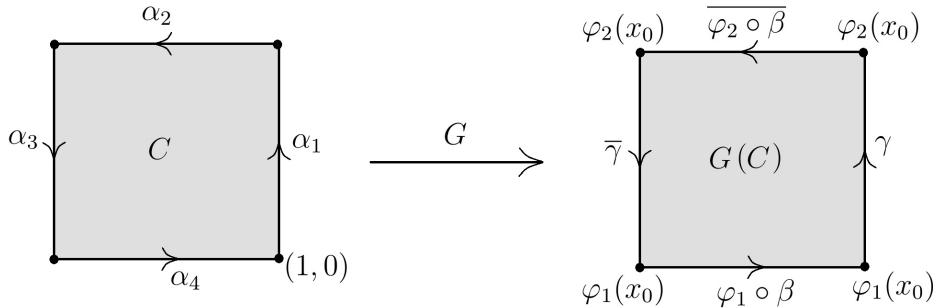
$$G: C \rightarrow Y, \quad G(t, s) = H(\beta(t), s).$$

Como α es un lazo con base $(1, 0)$ en C , el arco $G \circ \alpha$ es un lazo en Y con base $G((1, 0)) = \varphi_1(x_0)$ en Y . Teniendo en cuenta que $H(\cdot, 0) = \varphi_1$, $H(\cdot, 1) = \varphi_2$, $H(x_0, \cdot) = \gamma$, y la Observación 4.3, de la definición de G deducimos que

$$G \circ \alpha_1 \simeq \gamma, \quad G \circ \alpha_2 \simeq \overline{\varphi_2 \circ \beta}, \quad G \circ \alpha_3 \simeq \bar{\gamma}, \quad G \circ \alpha_4 \simeq \varphi_1 \circ \beta,$$

donde todas las homotopías son con extremos fijos. Por tanto

$$G \circ \alpha \simeq (G \circ \alpha_1) * (G \circ \alpha_2) * (G \circ \alpha_3) * (G \circ \alpha_4) \simeq \gamma * (\overline{\varphi_2 \circ \beta}) * \bar{\gamma} * (\varphi_1 \circ \beta).$$



$$\alpha := \alpha_1 * \alpha_2 * \alpha_3 * \alpha_4$$

$$G \circ \alpha \simeq \gamma * (\overline{\varphi_2 \circ \beta}) * \bar{\gamma} * (\varphi_1 \circ \beta)$$

Al ser C simplemente conexo (de hecho es convexo), $[\alpha] = [\epsilon_{(1,0)}]$ en $\Pi_1(C, (1, 0))$, de donde

$$[G \circ \alpha] = G_*([\alpha]) = G_*([\epsilon_{(0,1)}]) = [\epsilon_{\varphi_1(x_0)}] \in \Pi_1(Y, \varphi_1(x_0)),$$

esto es,

$$\gamma * (\overline{\varphi_2 \circ \beta}) * \bar{\gamma} * (\varphi_1 \circ \beta) \simeq \epsilon_{\varphi_1(x_0)}.$$

De aquí que

$$(\overline{\varphi_2 \circ \beta}) * \bar{\gamma} * (\varphi_1 \circ \beta) \simeq \bar{\gamma} \iff (\overline{\varphi_2 \circ \beta}) * \bar{\gamma} * (\varphi_1 \circ \beta) * \gamma \simeq \epsilon_{\varphi_1(x_0)} \iff \bar{\gamma} * (\varphi_1 \circ \beta) * \gamma \simeq \varphi_2 \circ \beta,$$

y por tanto $\mathcal{U}_\gamma([\varphi_1 \circ \beta]) = [\varphi_2 \circ \beta]$. En otras palabras, $\mathcal{U}_\gamma \circ (\varphi_1)_*$ y $(\varphi_2)_*$ coinciden sobre cualquiera $[\beta] \in \Pi_1(X, x_0)$, lo que concluye la prueba. ■

Corolario 7.18 Sean $\varphi_1, \varphi_2: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas y $x_0 \in X$. Supongamos que $\varphi_1 \simeq_{\{x_0\}} \varphi_2$ y llamemos $y_0 = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$.

Entonces $(\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$ una deformación que materialice el hecho $\varphi_1 \simeq_{\{x_0\}} \varphi_2$. El Teorema 7.17 nos dice que $\mathcal{U}_\gamma \circ (\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*$. Bajo nuestras hipótesis $\gamma = \epsilon_{y_0}$, por lo que $\mathcal{U}_\gamma = \text{Id}_{\Pi_1(Y, y_0)}$ y el corolario se sigue. ■

Definición 7.19 (Equivalencia homotópica) Sean X e Y dos espacios topológicos. Una aplicación continua $f: X \rightarrow Y$ se dirá una equivalencia homotópica si existe $g: Y \rightarrow X$ continua tal que

$$g \circ f \simeq \text{Id}_X \quad y \quad f \circ g \simeq \text{Id}_Y.$$

En ese caso se dirán que f y g son inversas homotópicas.

Dos espacios X e Y se dicen del mismo tipo de homotopía si existe una equivalencia homotópica entre ellos.

Obviamente todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica, pero lo recíproco no es cierto. Un espacio contráctil nos proporcionará fácilmente un contraejemplo. Sin embargo, la equivalencia homotópica es suficiente para garantizar isomorfismo entre grupos fundamentales.

Teorema 7.20 Sean X e Y espacios topológicos, y sea $f: X \rightarrow Y$ una equivalencia homotópica con inversa homotópica $g: Y \rightarrow X$. Fijemos $x_0 \in X$.

Entonces $f_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ vía una deformación $H_1: X \times [0, 1] \rightarrow X$ con $H_1(\cdot, 0) = g \circ f$ y $H_1(\cdot, 1) = \text{Id}_X$. Llamemos $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow X$ al arco $\gamma_1(\cdot) = H_1(x_0, \cdot)$, consideremos el isomorfismo $\mathcal{U}_{\gamma_1}: \Pi_1(X, g(f(x_0))) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$, y recordemos que por el Teorema 7.17 se tiene que

$$\mathcal{U}_{\gamma_1} \circ (g \circ f)_* = (\text{Id}_X)_* = \text{Id}_{\Pi_1(X, x_0)},$$

donde $(g \circ f)_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0)))$. Inferimos que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$ es un isomorfismo, donde

$$f_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0)) \quad y \quad g_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0))),$$

y por tanto que g_* es un epimorfismo (y f_* es un monomorfismo).

De forma paralela, $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ vía $H_2: Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ con $H_2(\cdot, 0) = f \circ g$ y $H_2(\cdot, 1) = \text{Id}_Y$. Como antes, si llamamos $\gamma_2(\cdot) = H_2(f(x_0), \cdot)$ y consideramos el isomorfismo $\mathcal{U}_{\gamma_2}: \Pi_1(Y, f(g(f(x_0)))) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$, tenemos que

$$\mathcal{U}_{\gamma_2} \circ (f \circ g)_* = (\text{Id}_Y)_* = \text{Id}_{\Pi_1(Y, f(x_0))},$$

donde ahora $(f \circ g)_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, f(g(f(x_0))))$.

Como arriba $(f \circ g)_* = \hat{f}_* \circ g_*$ es un isomorfismo, donde ahora

$$g_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0))) \quad y \quad \hat{f}_*: \Pi_1(X, f(g(f(x_0)))) \rightarrow \Pi_1(Y, f(g(f(x_0)))).$$

Por tanto g_* es un monomorfismo (y \hat{f}_* un epimorfismo).

Como consecuencia $g_*: \Pi_1(Y, f(x_0)) \rightarrow \Pi_1(X, g(f(x_0)))$ es un isomorfismo. Juntando este hecho con la información anterior, $f_*: \Pi_1(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ es también un isomorfismo. Esto concluye la prueba. ■

A modo de ejemplo, si $A \subset X$ es un retracto de deformación con una retracción asociada $r: X \rightarrow A$, e $i: A \rightarrow X$ denota la aplicación inclusión, entonces r e i son equivalencias homotópicas una inversa de la otra. En efecto, basta con considerar la deformación $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$ con $H(\cdot, 0) = \text{Id}_X$ y $H(\cdot, 1) = i \circ r$, y observar que $r \circ i = \text{Id}_A \simeq \text{Id}_A$ y $i \circ r \simeq \text{Id}_X$ vía H .

Como consecuencia trivial es válido el siguiente resultado, ya probado anteriormente en el Teorema 7.9 para retractos fuertes de deformación.

Corolario 7.21 Sean $A \subset X$ un retracto de deformación de X , $r: X \rightarrow A$ una reacción asociada e $i: A \rightarrow X$ la aplicación inclusión.

Entonces para cada $a \in A$ las aplicaciones

$$r_*: \Pi_1(X, a) \rightarrow \Pi_1(A, a) \text{ e } i_*: \Pi_1(A, a) \rightarrow \Pi_1(X, a)$$

son isomorfismos de grupos.

En particular, todo espacio topológico contráctil es simplemente conexo.

8. El Grupo Fundamental de las Esferas

En esta sección calcularemos el grupo fundamental de las esferas \mathbb{S}^n , $n \geq 2$.

Para abordarlo probaremos un caso particular del Teorema de Seifert-Van Kampen, que se estudiará más adelante, cuya demostración es además bastante inspiradora.

Proposición 8.1 Sea X un espacio topológico, y sean $U, V \subset X$ suconjuntos satisfaceciendo:

- U y V son abiertos simplemente conexos (con la topología inducida).
- $U \cap V$ es arcoconexo y no vacío.
- $U \cup V = X$.

Entonces X es simplemente conexo.

DEMOSTRACIÓN: Como U y V son arcoconexos, $U \cap V \neq \emptyset$ y $X = U \cup V$, es inmediato concluir que X es arcoconexo. Resta demostrar que X tiene grupo fundamental trivial en algún punto (luego en todo punto por ser arcoconexo).

Fijemos $x_0 \in U \cap V$, tomemos $[\alpha] \in \Pi_1(X, x_0)$ y probemos que $[\alpha] = [\epsilon_{x_0}]$.

Tomemos $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ un representante de $[\alpha]$ y sea $\epsilon > 0$ un número de Lebesgue para el recubrimiento abierto $\{\alpha^{-1}(U), \alpha^{-1}(V)\}$ de $[0, 1]$. Esto quiere decir que $J \subset \alpha^{-1}(U)$ o $J \subset \alpha^{-1}(V)$ para todo subconjunto $J \subset [0, 1]$ con diámetro $\text{diam}(J) \leq \epsilon$. Fijemos una partición

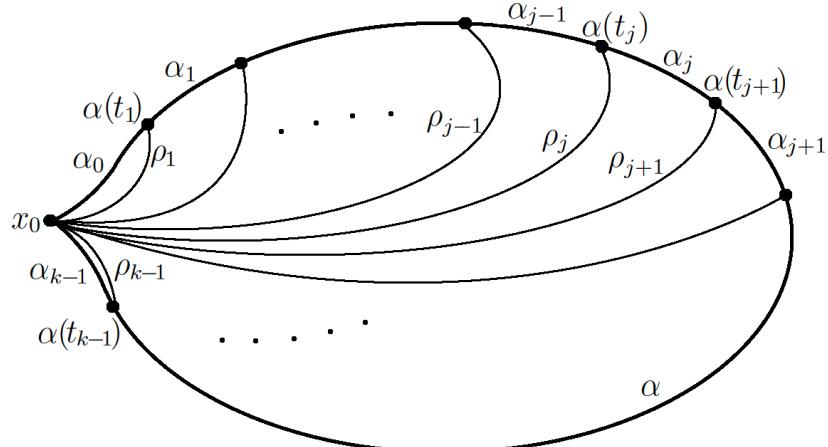
$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$$

de $[0, 1]$ con $|t_{j+1} - t_j| < \epsilon$ para todo $j = 0, \dots, k - 1$; en particular $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subset U$ ó $\alpha([t_j, t_{j+1}]) \subset V$ para todo $j = 0, \dots, k - 1$. Definamos $\alpha_j: [0, 1] \rightarrow X$, $\alpha_j(t) = \alpha((1-t)t_j + t t_{j+1})$, $j = 0, \dots, k - 1$, y notemos que

- $\alpha_j([0, 1]) \subset U$ ó $\alpha_j([0, 1]) \subset V$.
- $\alpha_j(0) = \alpha(t_j)$, $\alpha_j(1) = \alpha(t_{j+1})$.

Aprovechando la arcoconexión de U , V y $U \cap V$, es posible elegir arcos $\rho_j: [0, 1] \rightarrow X$ para $j = 1, \dots, k - 1$ de acuerdo al siguiente criterio:

- $\rho_j(0) = x_0$ y $\rho_j(1) = \alpha_{j-1}(1) = \alpha_j(0) = \alpha(t_j)$.
- Si $\alpha_{j-1}([0, 1]) \cup \alpha_j([0, 1]) = \alpha([t_{j-1}, t_j]) \cup \alpha([t_j, t_{j+1}]) \subset U$ (respectivamente, V) entonces $\rho_j([0, 1]) \subset U$ (respectivamente, V).
- Si $\alpha_{j-1}([0, 1])$ y $\alpha_j([0, 1])$ (o equivalentemente, $\alpha([t_{j-1}, t_j])$ y $\alpha([t_j, t_{j+1}])$) están contenidos uno en U y otro en V , entonces $\rho_j([0, 1]) \subset U \cap V$.



Teniendo en cuenta nuestras definiciones se observa que

- $(\alpha_0 \star \bar{\rho}_1)([0, 1]) \subset U \text{ ó } V,$
- $(\rho_j \star \alpha_j \star \bar{\rho}_{j+1})([0, 1]) \subset U \text{ ó } V, j = 1, \dots, k - 2, \text{ y}$
- $(\rho_{k-1} \star \alpha_{k-1})([0, 1]) \subset U \text{ ó } V.$

Com U y V son simplemente conexos, los lazos en U ó en V con base x_0

$$\alpha_0 \star \bar{\rho}_1, \quad \rho_j \star \alpha_j \star \bar{\rho}_{j+1}, \quad j = 1, \dots, k - 2, \quad \text{y} \quad \rho_{k-1} \star \alpha_{k-1}$$

se pueden deformar homotópicamente en U ó en V , luego en X , al lazo constante ϵ_{x_0} . Por tanto,

$$\alpha_0 \star \dots \star \alpha_{k-1} \simeq (\alpha_0 \star \bar{\rho}_1) \star (\rho_1 \star \alpha_1 \star \bar{\rho}_2) \star \dots \star (\rho_{k-2} \star \alpha_{k-2} \star \bar{\rho}_{k-1}) \star (\rho_{k-1} \star \alpha_{k-1}) \simeq \epsilon_{x_0}.$$

De la Observación 4.3 se tiene que $\alpha \simeq \alpha_0 \star \dots \star \alpha_{k-1}$, por lo que $[\alpha] = [\alpha_0 \star \dots \star \alpha_{k-1}] = [\epsilon_{x_0}]$ como queríamos demostrar. ■

Corolario 8.2 *La esfera S^n es simplemente conexa para todo $n \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN: Fijado $p \in S^n$, los abiertos $U := S^n \setminus \{-p\}$ y $V := S^n \setminus \{p\}$ son homeomorfos a \mathbb{R}^n vía las correspondientes proyecciones estereográficas, y por tanto simplemente conexos. Como $U \cap V \neq \emptyset$ y es arcoconexo, el resultado se sigue de la la Proposición 8.1. ■

8.1. Algunas consecuencias

A continuación vamos a desglosar algunas de las consecuencias topológicas más relevantes del cálculo del grupo fundamental de las esferas.

8.1.1. El Teorema de Invarianza de la Dimensión

Recordemos que, usando la conexión topológica como herramienta, es fácil demostrar que un abierto de \mathbb{R} no puede ser homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , $n > 1$. Vamos a extender ese resultado a su versión dos dimensional.

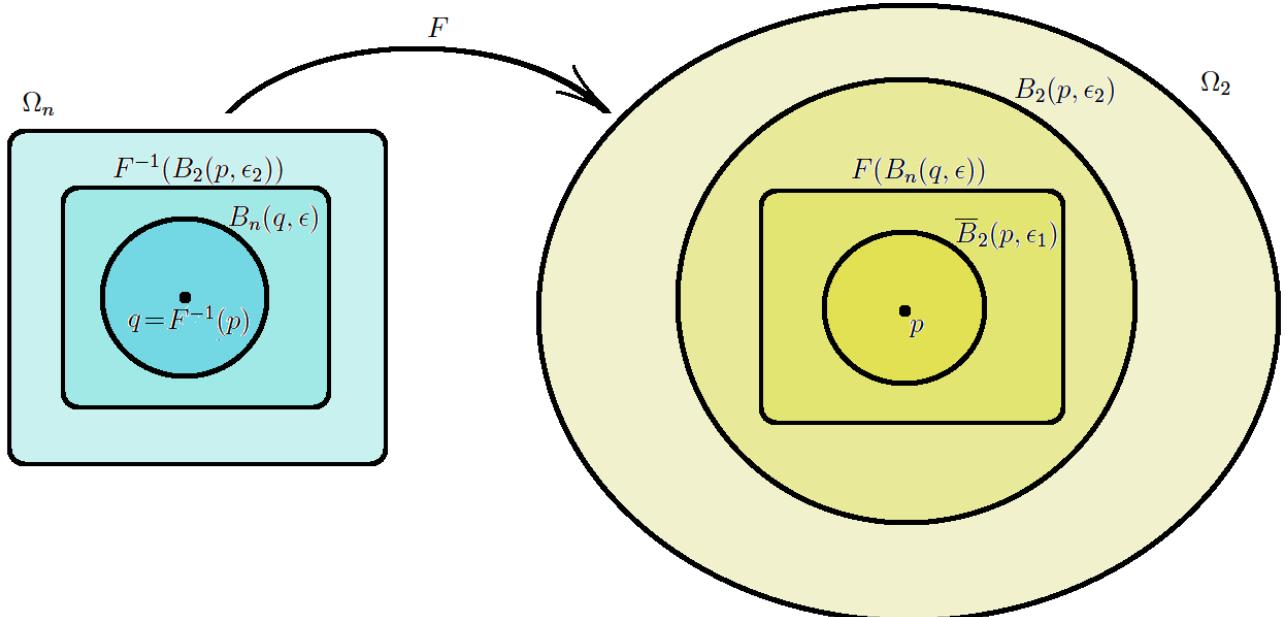
Teorema 8.3 (Invarianza de la Dimensión) Si $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ y $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, $n \neq 2$, son dos abiertos conexos, entonces Ω_2 no es homeomorfo a Ω_n . En particular, \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^n ($n \neq 2$) no son homeomorfos.

DEMOSTRACIÓN : Como ya hemos comentado antes, el resultado es conocido para abiertos de \mathbb{R} y \mathbb{R}^n , $n > 1$. En particular Ω_2 no es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R} . A título informativo comentaremos que el resultado es cierto para dimensiones arbitrarias, esto es, dos abiertos conexos de espacios euclidianos de distinta dimensión no son homeomorfos. Sin embargo su prueba se escapa de las posibilidades de este curso.

Tomemos $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^2$ y $\Omega_n \subset \mathbb{R}^n$, $n > 2$, y demostremos que no son homeomorfos.

Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que existen abiertos como en el enunciado tales que $\Omega_2 \cong \Omega_n$, $n > 2$.

Sea $F: \Omega_n \rightarrow \Omega_2$ un homeomorfismo, y fijemos un punto $p \in \Omega_2$ y tomemos una bola euclíadiana 2-dimensional $B_2(p, \epsilon_2) \subset \Omega_2$. Como F es continua, $F^{-1}(B_2(p, \epsilon_2))$ es un abierto en Ω_n conteniendo al punto $q := F^{-1}(p)$, por lo que existe una bola euclíadiana n -dimensional $B_n(q, \epsilon)$ tal que $B_n(q, \epsilon) \subset F^{-1}(B_2(p, \epsilon_2))$. Al ser F un homeomorfismo, $F(B_n(q, \epsilon))$ es un abierto de $B_2(p, \epsilon_2)$ con $F(B_n(q, \epsilon)) \subset B_2(p, \epsilon_2)$. Por tanto existe una bola cerrada euclíadiana 2-dimensional $\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \subset F(B_n(q, \epsilon))$, $\epsilon_2 > 0$.



Consideremos la siguiente secuencia de inclusiones

$$\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\} \xrightarrow{i_1} F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\} \xrightarrow{i_2} B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\},$$

y llamemos

$$i = i_2 \circ i_1: \overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\} \rightarrow B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}.$$

Fijado $p_0 \in \overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$, a nivel de grupos fundamentales tenemos que

$$i_* = (i_2)_* \circ (i_1)_*: \Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, p_0) \rightarrow \Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, p_0),$$

donde

$$(i_1)_*: \Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, p_0) \rightarrow \Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0) \quad \text{e}$$

$$(i_2)_*: \Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0) \rightarrow \Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, p_0).$$

Es claro que $\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}$ es homeomorfo a $\overline{B}_2(0, 1) \setminus \{0\}$. Por tanto la Proposicion 7.7, el Ejercicio 7.5 y el Teorema 7.9 garantizan que $\Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\})$ es isomorfo al grupo fundamental de \mathbb{S}^1 , esto es, a \mathbb{Z} . Análogamente $\Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\})$ es homeomorfo a \mathbb{Z} , ya que $B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\} \cong B_2(0, \epsilon_2) \setminus \{p\} \cong \mathbb{S}^1 \times [0, \epsilon_2]$.

Un razonamiento similar nos diría que $\Pi_1(B_n(q, \epsilon) \setminus \{q\}, q_0)$, $q_0 := F^{-1}(x_0)$, es isomorfo al grupo fundamental de \mathbb{S}^{n-1} , luego es el grupo trivial $\{[\epsilon_{q_0}]\}$ ya que $n-1 \geq 2$. La misma consecuencia se extrae para $\Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0)$ ya que $F_*: \Pi_1(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{q\}, q_0 \rightarrow \Pi_1(F(B_n(q, \epsilon)) \setminus \{p\}, p_0)$ es un isomorfismo.

Pero el Ejercicio 7.8 nos dice que

$$i_*: \Pi_1(\overline{B}_2(p, \epsilon_1) \setminus \{p\}, p_0) \equiv \mathbb{Z} \rightarrow \Pi_1(B_2(p, \epsilon_2) \setminus \{p\}, p_0) \equiv \mathbb{Z}$$

es un isomorfismo, lo que es absurdo ya que al ser $i_* = (i_2)_* \circ (i_1)_*$ esa aplicación factoriza por el homomorfismo trivial. Esto completa la prueba. ■

8.1.2. El Teorema de Borsuk-Ulam: Consecuencias

Continuaremos con el Teorema de Borsuk-Ulam, que es válido en cualquiera dimensión aunque sólo abordaremos su prueba para dimensión dos.

Recordemos que $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\rho(t) = e^{2\pi i t}$, y $\alpha_1 = \rho|_{[0,1]}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$. Necesitamos el siguiente lema técnico.

Lema 8.4 *Sea $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua e impar (esto es, satisfaciendo $f(-p) = -f(p)$, $p \in \mathbb{S}^1$) con $f(1) = 1$, y sea β el lazo en \mathbb{S}^1 basado en 1 dado por $\beta = f \circ \alpha_1$.*

Entonces $\deg(\beta)$ es impar.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que

$$\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \beta(t) = f(e^{2\pi i t}),$$

y definamos $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1$ el arco en \mathbb{S}^1 dado por

$$\gamma(t) = \beta(t/2) = f(e^{\pi i t}), \quad t \in [0, 1].$$

Como f es impar se tiene que $f(1) = -f(-1) = 1$, de donde

$$\gamma(0) = 1 \quad \text{y} \quad \gamma(1) = -\gamma(0) = -1.$$

Sea $\tilde{\gamma}$ el único levantamiento de γ a \mathbb{R} vía ρ con condición inicial $\tilde{\gamma}(0) = 0$. Como $\rho \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ y $\rho(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = -1$, es claro que

$$\tilde{\gamma}(1) = k + 1/2, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comprobemos ahora que el levantamiento $\tilde{\beta}$ a \mathbb{S}^1 vía ρ de β con condición inicial $\tilde{\beta}(0) = 0$ coincide con la aplicación

$$c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad c(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \tilde{\gamma}(1) + \tilde{\gamma}(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}.$$

En efecto $c: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, $c(0) = 0$ y

$$(\rho \circ c)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ e^{2\pi i \tilde{\gamma}(1)} \gamma(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ -\gamma(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases} = \beta(t)$$

donde para la última igualdad hemos usado que $\gamma(2t) = \beta(t)$, $t \in [0, 1/2]$, y

$$-\gamma(2t-1) = -f(e^{\pi i (2t-1)}) = -f(-e^{2\pi i t}) = f(e^{2\pi i t}) = \beta(t), \quad t \in [1/2, 1],$$

como consecuencia de que f es impar.

Por tanto $\deg(\beta) = c(1) = 2\tilde{\gamma}(1) = 2k + 1$ es impar. ■

Lema 8.5 *No existe ninguna aplicación $F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua e impar (esto es, satisface $F(-p) = -F(p)$, para todo $p \in \mathbb{S}^2$).*

DEMOSTRACIÓN: Asumamos que existe $F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua e impar. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $F(1, 0, 0) = 1$, sin más que sustituir F por la aplicación $\frac{1}{F(1, 0, 0)}F$ (se usa notación compleja), tambien continua e impar.

Consideremos $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $f(p) := F(p, 0)$. Claramente f satisface las hipótesis del Lema 8.4, por lo que $\deg(\beta)$ es impar para $\beta = f \circ \alpha_1$.

Por otro lado, como $\Pi_1(\mathbb{S}^2, 1) = \{[\epsilon_1]\}$ inferimos que $F_*(\Pi_1(\mathbb{S}^2, 1)) = \{[\epsilon_1]\} \subset \Pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. En particular $[\beta] = [f \circ \alpha_1] = [F \circ (\alpha_1, 0)] = F_*([\alpha_1, 0]) = [\epsilon_1]$, lo que contradice que $\deg(\beta)$ es impar. ■

Teorema 8.6 (Borsuk-Ulam) *Si $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua, entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN: Razonemos por reducción al absurdo y supongamos que $f(x) \neq f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^2$. Consideremos la aplicación

$$F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad F(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|},$$

bien definida y obviamente continua. Como $F(x) = -F(-x)$, esta aplicación es impar contradiciendo el Lema 8.5. ■

Veamos algunas consecuencias sencillas del Teorema de Borsuk-Ulam.

Corolario 8.7 *Si identificamos \mathbb{S}^2 con la superficie de la Tierra y $f, g: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son dos magnitudes físicas que se distribuyen de forma continua sobre dicha superficie (por ejemplo, la presión y la temperatura), existen puntos antípodas $p_0, -p_0 \in \mathbb{S}^2$ tales que $(f, g)(p_0) = (f, g)(-p_0)$.*

Corolario 8.8 (Teorema de Lusternik-Schnirelmann) *Si \mathbb{S}^2 es la unión de tres subconjuntos cerrados A_1, A_2 y A_3 , entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas.*

DEMOSTRACIÓN: Definamos $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x) = (d_1(x), d_2(x))$, donde $d_i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la función distancia euclíadiana $d_i(x) = \text{dist}(x, A_i)$, $i = 1, 2$. Como f es continua, por el Teorema de Borsuk-Ulam debe existir $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, esto es, $\delta_1 := d_1(x_0) = d_1(-x_0)$ y $\delta_2 := d_2(x_0) = d_2(-x_0)$. Si $\delta_i = 0$ para algún $i \in \{1, 2\}$ entonces $x_0, -x_0 \in A_i$ ya que A_i es cerrado y habríamos acabado. En caso de que $\delta_1, \delta_2 > 0$ deducimos que $\{x_0, -x_0\} \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$, y por tanto que $x_0, -x_0 \in A_3$. ■

La misma idea se puede utilizar para probar que si \mathbb{S}^2 es unión de dos cerrados entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas.

Es evidente que un compacto K del plano \mathbb{R}^2 con área $\text{Area}(K) > 0$ se puede dividir en dos mitades de igual área. En efecto, si para cada $t \in \mathbb{R}$ llamamos

$$L_t^+ = \{(x, y): x \geq t\}, \quad L_t^- = \{(x, y): x \leq t\},$$

y definimos

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \text{Area}(K \cap L_t^-) - \text{Area}(K \cap L_t^+),$$

es claro que por el Teorema de la Convergencia Dominada h es una función continua satisfaciendo

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(t) = -\text{Area}(K), \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = \text{Area}(K).$$

Por el Teorema de Bolzano ha de existir $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(t_0) = 0$, de donde se sigue que $\text{Area}(K \cap L_{t_0}^-) = \text{Area}(K \cap L_{t_0}^+)$ y el resultado.

El mismo enunciado no es trivial cuando se trata de dos compactos, veamos a continuación su demostración.

Corolario 8.9 (Teorema de las dos tortitas) *Dados dos compactos $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^2$, existe una recta afín de \mathbb{R}^2 que los subdivide a ambos en trozos de igual área.*

DEMOSTRACIÓN: Sin pérdida de generalidad supondremos que $\text{Area}(A_i) > 0$ para algún $i \in \{1, 2\}$, en otro caso el resultado es trivial.

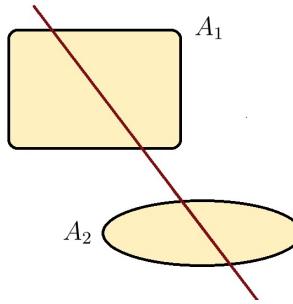
Identifiquemos \mathbb{R}^2 con su copia topológica en \mathbb{R}^3 correspondiente al plano

$$P := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\},$$

y consideremos $A_1, A_2 \subset P$. Para cada $x \in \mathbb{S}^2 = \{p \in \mathbb{R}^3 : \|p\| = 1\}$, denotemos por $P_x := \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle = 0\}$ y escribamos $\mathbb{R}^3 \setminus P_x = P_x^+ \cup P_x^-$, donde

$$P_x^+ := \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle > 0\}, \quad P_x^- := \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle < 0\}.$$

Observemos que $L_x := P_x \cap P$ es una recta en $P \subset \mathbb{R}^3$ salvo cuando $x = (0, 0, \pm 1)$, en cuyo caso $L_x = \emptyset$. Definamos la función $a_i : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $a_i(x) = \text{Area}(A_i \cap P_x^+)$, $i = 1, 2$. Por



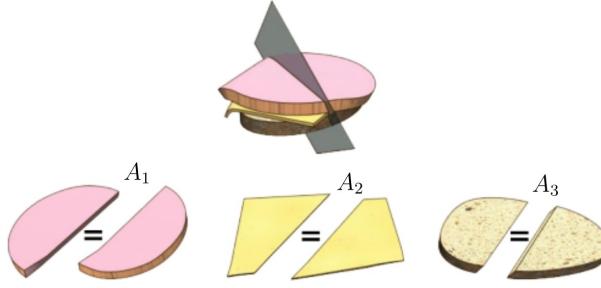
el Teorema de la convergencia dominada es fácil demostrar que a_i es continua, $i = 1, 2$. Por el Teorema de Borsuk-Ulam aplicado a $f = (a_1, a_2) : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $a_i(x_0) = a_i(-x_0)$, $i = 1, 2$. En otras palabras,

$$\text{Area}(A_1 \cap P_{x_0}^+) = \text{Area}(A_1 \cap P_{-x_0}^+) \quad \text{y} \quad \text{Area}(A_2 \cap P_{x_0}^+) = \text{Area}(A_2 \cap P_{-x_0}^+),$$

lo que concluye el teorema. (Nótese que $x_0 \neq (0, 0, \pm 1)$ pues en ese caso $\{a_i(x_0), a_i(-x_0)\} = \{0, \text{Area}(A_i)\}$, $i = 1, 2$, y no es la solución de nuestro problema). ■

En análogo tridimensional es cierto y es conocido como el teorema del sándwich o bocadillo de jamón.

Corolario 8.10 (Teorema del bocadillo de jamón) *Dados tres compactos A_1, A_2 y $A_3 \subset \mathbb{R}^3$, es posible encontrar un plano afín de \mathbb{R}^3 que los subdivida a los tres en trozos de igual volumen.*



DEMOSTRACIÓN: Dado $x \in \mathbb{S}^2$ y $t \in \mathbb{R}$ definimos $P_x(t) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle = t\}$. Observemos que $\mathbb{R}^3 \setminus P_x(t) = P_x^+(t) \cup P_x^-(t)$ donde $P_x^+(t) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle > t\}$ y $P_x^-(t) = \{y \in \mathbb{R}^3 : \langle y, x \rangle < t\}$. Es claro que

$$P_{-x}(-t) = P_x(t) \text{ y } P_{-x}^+(-t) = P_x^-(t) \text{ para todo } x \in \mathbb{S}^2 \text{ y } t \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Sea $\phi_x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función $\phi_x(t) := \text{Vol}(A_3 \cap P_x^+(t))$, donde Vol representa volumen en \mathbb{R}^3 . Como Φ_x es continua, monótona creciente, $\Phi_x(-\infty) = \text{Vol}(A_3)$ y $\Phi_x(+\infty) = 0$, el Teorema de valores intermedios garantiza que $I_x := \{t \in \mathbb{R} : \phi_x(t) = \text{Vol}(A_3)/2\}$ es un intervalo compacto no vacío. Llamemos t_x al punto medio de I_x , $x \in \mathbb{S}^2$. Como $I_x = -I_{-x}$, es inmediato que $t_{-x} = -t_x$ para cada $x \in \mathbb{S}^2$. Definamos

$$f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (\text{Vol}(A_1 \cap P_x^+(t_x)), \text{Vol}(A_2 \cap P_x^+(t_x))).$$

Por el Teorema de Borsuk-Ulam existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$, esto es,

$$\text{Vol}(A_i \cap P_{x_0}^+(t_{x_0})) = \text{Vol}(A_i \cap P_{-x_0}^+(t_{-x_0})), \quad i = 1, 2.$$

Como $P_{-x_0}^+(t_{-x_0}) = P_{-x_0}^+(-t_{x_0}) = P_{x_0}^-(t_{x_0})$ inferimos que

$$\text{Vol}(A_i \cap P_{x_0}^+(t_{x_0})) = \text{Vol}(A_i \cap P_{x_0}^-(t_{x_0})), \quad i = 1, 2,$$

lo que concluye la prueba. ■

9. El Teorema de Seifert-Van Kampen

En esta sección probaremos la herramienta más potente conocida para el cálculo explícito del grupo fundamental de un espacio topológico.: el Teorema de Seifert-Van Kampen. Este teorema tiene un trasfondo algebráico muy importante y requerirá del lenguaje desarrollado en la sección de grupos del Tema 0. Es muy conveniente tener presente la Definición 3.14.

Teorema 9.1 (Seifert-Van Kampen) *Sea X un espacio topológico y sean $U, V \subset X$ subconjuntos tales que:*

- $U \cap V \neq \emptyset$ y $U \cup V = X$.
- U, V y $U \cap V$ son abiertos arcoconexos.

Llamemos $i: U \cap V \rightarrow U$ y $j: U \cap V \rightarrow V$ a las aplicaciones inclusión, fijemos $x_0 \in U \cap V$ y consideremos $i_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0)$ y $j_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(V, x_0)$ los correspondientes homomorfismos inducidos.

Entonces $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$ donde el producto amalgamado es el relativo a los homomorfismos i_* y j_* , esto es,

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \frac{\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)}{N(R)},$$

donde $R = \{i_*([\gamma])j_*([\gamma])^{-1} : [\gamma] \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\} = \{i_*([\gamma])j_*([\bar{\gamma}]) : [\gamma] \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\}$.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\hat{i}: U \rightarrow X$, $\hat{j}: V \rightarrow X$ y $k: U \cap V \rightarrow X$ a las aplicaciones inclusión, y consideremos $\hat{i}_*: \Pi_1(U, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$, $\hat{j}_*: \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ y $k_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ los correspondientes homomorfismos inducidos. Llámamos

$$\pi: \Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$$

a la proyección al cociente amalgamado según i_* y j_* , y denotemos por

$$\pi_1: \Pi_1(U, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0),$$

$$\pi_2: \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \quad y$$

$$\pi_0: \Pi_1(U \cap V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$$

a los homomorfismos $\pi_1 := \pi|_{\Pi_1(U, x_0)}$, $\pi_2 := \pi|_{\Pi_1(V, x_0)}$ y $\pi_0 := \pi \circ i_* = \pi \circ j_*$.

$$\begin{array}{ccccc} & \Pi_1(U, x_0) & & \Pi_1(U \cap V, x_0) & \\ & \downarrow \hat{i}_* & \swarrow \pi_1 & \downarrow \pi_0 & \\ \Pi_1(U \cap V, x_0) & \xrightarrow{k_*} & \Pi_1(X, x_0) & \xleftarrow{\Theta} & \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \\ & \uparrow \hat{j}_* & \nearrow \pi_2 & \uparrow \pi_0 & \\ & \Pi_1(V, x_0) & \xleftarrow{j_*} & \Pi_1(U \cap V, x_0) & \end{array}$$

Por la propiedad universal de la Proposición 3.16, existe un homomorfismo de grupos

$$\Theta: \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$$

a través del cual factorizan las aplicaciones \hat{i}_* , \hat{j}_* y k_* . Ésto quiere decir que $\Theta \circ \pi_1 = \hat{i}_*$, $\Theta \circ \pi_2 = \hat{j}_*$ y $\Theta \circ \pi_0 = k_*$. Analicemos con detalle y de forma explícita la definición de Θ . Para ello estableceremos el convenio notacional

$$\{W_1, W_2\} = \{U, V\}.$$

Una palabra genérica en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0) \equiv \Pi_1(W_1, x_0) \bullet \Pi_1(W_2, x_0)$ viene dada por la expresión $w = [\alpha_1]_{W_{i_1}} \dots [\alpha_m]_{W_{i_m}}$, $i_j \in \{1, 2\}$ para todo j , donde el sibíndice indica el espacio de la clase de homotopía. Con esta notación,

$$\Theta(\pi(w)) = [\alpha_1]_X \star \dots \star [\alpha_m]_X.$$

Como arriba, el subíndice X indica ahora clase de homotopía en $\Pi_1(X, x_0)$.

En particular,

$$\pi(\{i_*([\alpha]_{U \cap V}) \cdot j_*([\alpha]_{U \cap V})^{-1} : [\alpha]_{U \cap V} \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\}) \subset \text{Ker}(\Theta).$$

La prueba del teorema consistirá en demostrar que Θ es un isomorfismo. Para ver que es sobre, tomemos un lazo $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ con base el punto $x_0 \in U \cap V$. Por el Lema de Lebesgue, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha([i/n, (i+1)/n])$ está contenido en U ó en V para todo $i = 0, \dots, n-1$. Llamemos $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow X$, $t \mapsto \alpha((1-t)i/n + t(i+1)/n)$.

Si $\alpha_i([0, 1]) \subset U$ y $\alpha_{i+1}([0, 1]) \in V$ (ó viceversa), el punto $\alpha_i(1) = \alpha_{i+1}(0)$ está contenido en $U \cap V$ y elegiremos un arco ρ_i en $U \cap V$ con punto inicial x_0 y final $\alpha_i(1)$. Cuando $(\alpha_i([0, 1]) \cup \alpha_{i+1}([0, 1])) \subset U$ (ó V) se procede igual, sólo que ahora el arco ρ_i descansa en U (ó V). Finalmente

$$\alpha \simeq (\alpha_0 \star \bar{\rho}_0) \star \dots \star (\rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1}) \star \dots \star (\rho_{n-2} \star \alpha_{n-1}),$$

por lo que $[\alpha]_X$ es el producto $[\alpha_0 \star \bar{\rho}_0]_X \star \dots \star [\rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1}]_X \star \dots \star [\rho_{n-2} \star \alpha_{n-1}]_X$ en $\Pi_1(X, x_0)$. Por construcción y con el convenio anterior,

$$\alpha_0 \star \bar{\rho}_0 \subset W_{l_0}, \dots, \rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1} \subset W_{l_i}, \dots, \rho_{n-2} \star \alpha_{n-1} \subset W_{l_{n-2}},$$

para ciertos $l_i \in \{1, 2\}$, $i = 0, \dots, n-2$. Por tanto la palabra

$$w := [\alpha_0 \star \bar{\rho}_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\rho_{i-1} \star \alpha_i \star \bar{\rho}_{i+1}]_{W_{l_i}} \star \dots \star [\rho_{n-2} \star \alpha_{n-1}]_{W_{l_{n-2}}}$$

de $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ satisface $\Theta(\pi(w)) = [\alpha]_X$ y de aquí la sobreyectividad de Θ .

Resta por tanto probar que Θ es inyectivo.

Supongamos que tenemos una palabra $w = a_1 \dots a_m$ en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ tal que, salvo componer con $\pi: \Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0) \rightarrow \Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$, se aplica por Θ en $[\epsilon_{x_0}]$. Llamemos $\alpha_i: [0, 1] \rightarrow W_{l_i} \in \{U, V\}$ al lazo tal que $a_i = [\alpha_i]_{W_{l_i}}$ para todo i . De nuestras hipótesis existe una homotopía $H: [0, 1]^2 \rightarrow X$ con extremos fijos tal que $H(\cdot, 0) = \alpha_1 \star \dots \star \alpha_m$ y $H(\cdot, 1) = \epsilon_{x_0}$. De nuevo el Lema de Lebesgue nos garantiza la existencia de $n \in \mathbb{N}$ tal que todo cuadrado de lado $1/n$ es aplicado por H en U ó V . Sin pérdida de generalidad asumiremos que

- $\alpha_1 \star \dots \star \alpha_m$ está parametrizada de forma que la traza de α_i se recorre sobre el intervalo $[(i-1)/m, i/m]$.
- n es múltiplo de m , y por tanto, cada subintervalo $[(i-1)/m, i/m]$ contiene una cantidad entera de intervalos de longitud $1/n$.

Lo que hemos de demostrar es que la palabra w , pensada como un elemento de $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$, puede ser alterada por relaciones de amalgamado en $\{i_*(a) \cdot j_*(a)^{-1} : a \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\}$ (pasando elementos de $\Pi_1(U \cap V, x_0)$ en una sílaba a la siguiente) de forma que al final nos quede la palabra trivial. El procedimiento consistirá, a grosso modo y salvo algún trabajo previo que hay que explicar, en probar que podemos pasar de la palabra en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ asociada a la curva $H(t, i/n)$ a la asociada a $H(t, (i+1)/n)$. Como la palabra asociada a $H(t, 1)$ es la trivial habremos concluido la prueba.

Comencemos con los detalles. Como primera etapa, observemos que salvo modificar nuestra homotopía sin alterar la palabra ω de una forma no permitida, podemos asumir que para todo $(s, i) \in [0, 1] \times \{0, 1, \dots, n\}$ la curva horizontal $H(\cdot, s)$ es constante para valores de t en un entorno de i/n . Todo ello sin alterar la propiedad de que los cuadrados con lado de longitud $1/n$ tienen imagen por H dentro de U o V . En efecto, para ello

basta con reparametrizar convenientemente, y con dependencia continua en s , las curvas $H(\cdot, s)$. Omitimos los detalles. Un razonamiento análogo nos permite también suponer, adicionalmente y sin pérdida de generalidad, que para todo $(t, i) \in [0, 1] \times \{0, 1, \dots, n\}$ la curva vertical $H(t, \cdot)$ es constante para valores de s en un entorno de i/n .

Como consecuencia, H coincide con una aplicación constante $c_{i,j} \in U \cup V$ en un pequeño disco euclíadiano $D_{i,j}$ centrado en $(i/n, j/n)$ para todo $(i, j) \in \{0, 1, \dots, n\}^2$. En este punto usaremos curvas en U , V ó $U \cap V$, con preferencia en el último conjunto y dependiendo de si $c_{i,j} \in U$, V ó $U \cap V$ (tal y como explicamos arriba cuando probamos la sobreyectividad de Θ), para alterar H en los $D_{i,j}$ por una función radial (esto es, constante sobre las circunferencias centradas en $(i/n, j/n)$) de forma que $H(i/n, j/n) = x_0$. Para ser más precisos, si $D_{i,j}$ tiene radio $\epsilon_{i,j}$ y $\rho_{i,j}: [0, \epsilon_{i,j}] \rightarrow U, V$ ó $U \cap V$, es una curva con punto inicial x_0 y final $c_{i,j}$, definiremos

$$H((i/n, j/n) + r\theta) = \rho_{i,j}(r), \quad r \in [0, \epsilon_{i,j}], \quad \theta \in \mathbb{S}^1.$$

En este punto ya queda claro que cada curva $H(t, i/n)$ es producto de lazos con base x_0 y contenidos en U o V (aquellos que se corresponden con las imágenes de los subintervalos $[j/n, (j+1)/n]$, $j = 0, 1, \dots, n-1$), por lo que de forma canónica se le puede asociar una palabra en el producto libre $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$. Expliquemos ahora como pasar de la palabra asociada a $H(t, i/n)$ en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ a la que representa $H(t, (i+1)/n)$.

Fijemos $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ y llamemos β_j al lazo con base x_0 en U ó V dado por

$$t \mapsto H((1-t)j/n + t(j+1)/n, i/n), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

De esta forma $H(\cdot, i/n) \simeq \beta_0 \star \dots \star \beta_{n-1}$. Atendiendo a nuestros convenios, si W_{l_j} denota al abierto contenido a β_j , $j = 0, \dots, n-1$, entonces $[\beta_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\beta_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}}$ sería la palabra asociada a $H(\cdot, i/n)$ en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$.

Para $i+1$ y de forma análoga llamemos β'_j al lazo con base x_0 en U ó V dado por

$$t \mapsto H((1-t)j/n + t(j+1)/n, (i+1)/n), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Igual que antes, $[\gamma_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\gamma_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}}$ sería la palabra asociada a $H(\cdot, (i+1)/n)$ en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$. Finalmente llamemos ρ_j al lazo en $W_{l_{j-1}} \cap W_{l_j}$ basado en x_0 dado por

$$s \mapsto H(j/n, (1-s)i/n + s(i+1)/n), \quad j = 0, \dots, n,$$

donde hemos hecho el convenio $W_{l_{-1}} = W_{l_n} = X$ (nótese que $\rho_0 = \rho_n = \epsilon_{x_0}$ ya que H es homotopía con extremos fijos).

Como cada cuadrado $[j/n, (j+1)/n] \times [i/n, (i+1)/n]$ es simplemente conexo, deducimos que (en homotopía y como palabras en $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$) que

$$\begin{aligned} \star_{j=0}^{n-1} [\beta_j]_{W_{l_j}} &\equiv [\beta_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\beta_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} = \\ &\star_{j=0}^{n-1} ([\rho_j]_{W_{l_j}} \star [\gamma_j]_{W_{l_j}} \star [\rho_{j+1}]_{W_{l_j}}^{-1}). \end{aligned}$$

Tras el amalgamado de ρ_j en $\Pi_1(W_{l_{j-1}} \cap W_{l_j}, x_0)$ cuando $W_{l_{j-1}} \neq W_{l_j}$, inferimos que

$$\begin{aligned} [\beta_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\beta_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} &= ([\rho_0]_{W_{l_0}} \star [\gamma_0]_{W_{l_0}}) \star \dots \star [\gamma_j]_{W_{l_j}} \star \dots \star ([\gamma_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} \star [\rho_n]_{W_{l_{n-1}}}^{-1}) = \\ &= [\gamma_0]_{W_{l_0}} \star \dots \star [\gamma_j]_{W_{l_j}} \star \dots \star [\gamma_{n-1}]_{W_{l_{n-1}}} \end{aligned}$$

en $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$.

Por tanto las palabras asociadas a $H(t, i/n)$ y $H(t, (i+1)/n)$ en $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$ se proyectan en el mismo elemento de $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$. Por un procedimiento inductivo, concluimos que la proyección a $\Pi_1(U, x_0) \bullet_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$ de la palabra asociada en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ a $H(\cdot, 0)$, esto es, de $w = a_1 \dots a_m$, coincide con la correspondiente proyección de la palabra asociada en $\Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$ a $H(t, 1) = \epsilon_{x_0}$, esto es, con la proyección de la palabra trivial. Esto concluye la prueba. ■

Corolario 9.2 *Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si $U \cap V$ es simplemente conexo entonces $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) \bullet \Pi_1(V, x_0)$.*

Corolario 9.3 *Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si V es simplemente conexo entonces $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) / N(i_*(\Pi_1(U \cap V, x_0)))$.*

Ejercicio 9.4 *Si X es un n -ciclo (ver Definición 2.21) entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al grupo libre $F(a_1, \dots, a_n)$.*

Como caso particular,

Ejercicio 9.5 *Sea X un espacio topológico tal que $X = \cup_{j=1}^n a_j$, donde*

- *Cada a_j es homeomorfo a \mathbb{S}^1 con la topología inducida por X .*
- *Existe $x_0 \in X$ tal que $a_j \cap a_i = \{x_0\}$ para todo $i \neq j$.*

Entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al grupo libre $F(a_1, \dots, a_n)$.

9.1. Aplicaciones y ejemplos

Veamos algunas aplicaciones sencillas del Teorema de Seifert-Van Kampen.

9.1.1. Espacios libro

Consideramos el semiplano $\Pi_1 := \{(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$ y sus girados respecto del eje x_3

$$\Pi_j := \{(e^{2\pi(j-1)i/k} z, x_3) : (z, x_3) \in \Pi_1 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^3\}, \quad j = 1, \dots, k.$$

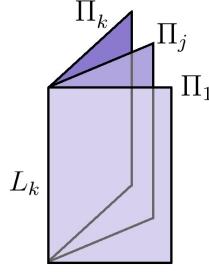
Por definición $L_k := \cup_{j=1}^k \Pi_j$, $k \in \mathbb{N}$, es el *espacio libro de k hojas*. Nótese que desde el punto de vista topológico (o salvo homeomorfismos), el hecho de que la distribución de semiplanos sea equiangular es irrelevante. También es evidente que el espacio L_2 es homeomorfo a \mathbb{R}^2 .

Proposición 9.6 *Si $k, s \in \mathbb{N}$ y $k \neq s$ entonces L_k y L_s no son homeomorfos.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $k \neq 2$ y $L_k \cong L_s$, $s \neq k$. Tomemos $F: L_k \rightarrow L_s$ un homeomorfismo. Sea $X := L_k \setminus \{0\}$ e $Y := F(X) = L_s \setminus \{F(0)\}$, donde $0 \equiv (0, 0, 0)$.

La aplicación $H: X \times [0, 1] \rightarrow X$, $H(p, s) := (1-s)p + sp/\|p\|$, deforma X en la unión de curvas $\mathbb{S}^2 \cap L_k$, con retracción asociada $r: X \rightarrow \mathbb{S}^2 \cap L_k$, $r(p) := p/\|p\|$. Por el Ejercicio 9.4, el grupo fundamental de X es libre con $k - 1$ generadores (si $k = 1$ es el grupo trivial). Pero por razonamientos similares el grupo fundamental de Y es

- libre con un generador si $F(0) \notin \{x_1 = x_2 = 0\}$, ó



- libre con $s - 1$ generadores si $F(0) \in \{x_1 = x_2 = 0\}$.

Como $k - 1 \neq 1, s - 1$, esto genera la contradicción buscada. ■

Corolario 9.7 Si $O \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto contenido al origen, entonces $O \cap L_k$ no puede ser homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 para todo $k \neq 2$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que existen abiertos $0 \equiv (0, 0, 0) \in O \subset \mathbb{R}^3$ y $U \subset \mathbb{R}^2$, y un homeomorfismo $F: O \cap L_k \rightarrow U$.

Discutamos primero el caso $k > 2$.

Sea $B_2 \subset O$ una bola euclíadiana abierta centrada en el origen, $D \subset F(B_2 \cap L_k) \subset U$ un disco abierto centrado en $F(0)$, y B_1 una bola euclíadiana abierta centrada en el origen con $B_1 \cap L_k \subset F^{-1}(D)$.

Las inclusiones $i_1: (B_1 \cap L_k) \setminus \{0\} \rightarrow F^{-1}(D) \setminus \{0\}$ e $i_2: F^{-1}(D) \setminus \{0\} \rightarrow (B_2 \cap L_k) \setminus \{0\}$ inducen homomorfismos de grupos $(i_1)_*: \Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\}) \rightarrow \Pi_1(F^{-1}(D) \setminus \{0\})$ e $(i_2)_*: \Pi_1(F^{-1}(D) \setminus \{0\}) \rightarrow \Pi_1((B_2 \cap L_k) \setminus \{0\})$.

De la demostración de la Proposición 9.6 se sigue que $\Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\})$ y $\Pi_1((B_2 \cap L_k) \setminus \{0\})$ son grupos libres con $k - 1 \neq 1$ generadores. Por otro lado, $\Pi_1(F^{-1}(D) \setminus \{0\}) \cong \Pi_1(D \setminus \{F(0)\}) \cong \mathbb{Z}$ es un grupo libre con un generador.

Como $i_* = (i_2)_* \circ (i_1)_*$, donde $i: (B_1 \cap L_k) \setminus \{0\} \rightarrow (B_2 \cap L_k) \setminus \{0\}$ es la inclusión, deduciríamos que $i_*(\Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\}))$ tendría que ser un grupo cíclico. Pero i es una equivalencia homotópica (compruébese como ejercicio), por lo que $i_*(\Pi_1((B_1 \cap L_k) \setminus \{0\})) = \Pi_1((B_2 \cap L_k) \setminus \{0\})$ es un grupo libre con $k - 1 \neq 1$ generadores, generando una contradicción.

El caso $k = 1$ es análogo. Ahora se toman $B_2 \subset U$ una bola euclíadiana abierta centrada en $F(0)$, $D \subset F^{-1}(B_2) \subset O \cap L_1$ un semidisco abierto centrado en 0, y $B_1 \subset F(D)$ una bola euclíadiana abierta centrada en $F(0)$. Se razona formalmente como arriba, revirtiendo el sentido de las inclusiones, y generando una contradicción similar. Omitimos los detalles. ■

9.1.2. El grupo fundamental de un esquema

Para lo que sigue, es conveniente tener presentes las construcciones y notación introducidas en la Sección 2.

Consideremos una relación de equivalencia R_0 en $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ y extendámosla a la relación R

$$pRq \iff p = q \quad \vee \quad (\{p, q\} \subset \mathbb{S}^1 \quad \wedge \quad pR_0q)$$

en el disco unidad cerrado $\overline{D} = \{z \in \mathbb{C}: \|z\| \leq 1\}$. Denotemos por $\sigma: \overline{D} \rightarrow S := \overline{D}/R$ a la correspondiente proyección. Como siempre $D := \overline{D} \setminus \mathbb{S}^1$ es el disco unidad abierto.

Como siempre escribamos

$$\alpha_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad \alpha_1(t) = e^{2\pi i t}.$$

Tenemos la siguiente:

Proposición 9.8 Si $z_0 := \sigma(1) \in \sigma(\mathbb{S}^1)$ y $[\hat{\alpha}_1] \in \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)$ es la clase determinada por el lazo $\hat{\alpha}_1 := \sigma \circ \alpha_1$, entonces

$$\Pi_1(S) \cong \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)/N([\hat{\alpha}_1]).$$

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $t_0 \in]0, 1[\subset D \subset \overline{D}$. Basta con demostrar que

$$\Pi_1(S, \sigma(t_0)) \cong \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)/N([\hat{\alpha}_1]).$$

Llamemos $U = S \setminus \{\sigma(0)\}$ y $V = \sigma(D) \subset S$. Es claro que U , V y $U \cap V = \sigma(D) \setminus \{\sigma(0)\}$ son abiertos arcoconexos y no vacíos de S , siendo $S = U \cup V$. Por tanto están en las condiciones del Teorema de Seifert-Van Kampen.

Calculemos $\Pi_1(U, \sigma(t_0))$: Para ello será crucial observar que $\sigma(\mathbb{S}^1)$ es retracto fuerte de deformación de U . Con tal fin consideremos la retracción

$$r: \overline{D} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad r(p) = \frac{p}{\|p\|}$$

y la deformación

$$H: (\overline{D} \setminus \{0\}) \times [0, 1] \rightarrow \overline{D} \setminus \{0\}, \quad H(p, s) = (1 - s)p + sr(p)$$

que realizan \mathbb{S}^1 como retracto fuerte de deformación de $\overline{D} \setminus \{0\}$.

Tanto la retracción r como la deformación H pueden ser inducidas al cociente dando lugar a una retracción $\hat{r}: U \rightarrow \sigma(\mathbb{S}^1)$ y a una deformación $\hat{H}: U \times [0, 1] \rightarrow U$ haciendo los siguientes diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} \overline{D} \setminus \{0\} & \xrightarrow{r} & \mathbb{S}^1 \\ \sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}} \downarrow & & \downarrow \sigma|_{\mathbb{S}^1} \\ U & \xrightarrow{\hat{r}} & \sigma(\mathbb{S}^1) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (\overline{D} \setminus \{0\}) \times [0, 1] & \xrightarrow{H} & \overline{D} \setminus \{0\} \\ (\sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}}) \times \text{Id}_{[0, 1]} \downarrow & & \downarrow \sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}} \\ U \times [0, 1] & \xrightarrow{\hat{H}} & U \end{array}$$

esto es, satisfaciendo

$$(\sigma|_{\mathbb{S}^1}) \circ r = \hat{r} \circ (\sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}}) \quad \text{y} \quad (\sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}}) \circ H = \hat{H} \circ ((\sigma|_{\overline{D} \setminus \{0\}}) \times \text{Id}_{[0, 1]}).$$

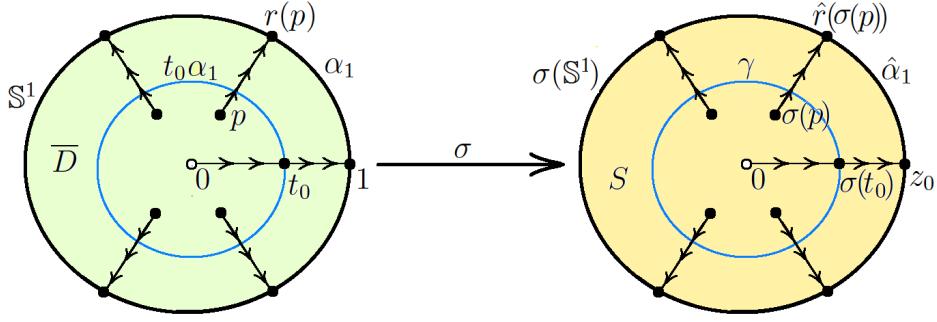
Lo anterior prueba que $\sigma(\mathbb{S}^1)$ es retracto fuerte de deformación de U . El Teorema 7.9 sobre retractos de deformación nos da que

$$\hat{r}_*: \Pi_1(U, \sigma(t_0)) \rightarrow \Pi_1(\sigma(\mathbb{S}^1), z_0)$$

es un isomorfismo de grupos, donde hemos tenido en cuenta que $\hat{r}(\sigma(t_0)) = \sigma(r(t_0)) = \sigma((1, 0)) = z_0$.

Calculemos $\Pi_1(V, \sigma(t_0))$: Este cálculo es trivial ya que $V = \sigma(D) \cong D$ es simplemente conexo.

Calculemos $\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0))$: El grupo $\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0))$ es el grupo fundamental de un disco punteado, por lo que es el grupo libre $F([\gamma])$ con generador $\gamma = \sigma \circ (t_0 \alpha_1)$, esto es, $\gamma: [0, 1] \rightarrow U \cap V$, $\gamma(t) = \sigma(t_0 e^{2\pi i t})$.



Apliquemos el Teorema de Seifert-Van Kampen: El Corolario 9.3 del Teorema de Seifert y Van Kampen garantiza que

$$\Pi_1(S, \sigma(t_0)) \cong \frac{\Pi_1(U, \sigma(t_0))}{N(i_*(\Pi_1(U \cap V, \sigma(t_0))))} = \frac{\Pi_1(U, \sigma(t_0))}{N(i_*(F([\gamma])))},$$

donde $i_*: \Pi_1(U \cap V, \sigma(x_0)) = F([\gamma]) \rightarrow \Pi_1(U, \sigma(x_0))$ es el morfismo inducido por la aplicación inclusión $i: U \cap V \rightarrow U$.

Usando que $\hat{r}_*: \Pi_1(U, \sigma(t_0)) \rightarrow \Pi_1(\sigma(S^1), z_0)$ es un isomorfismo y

$$\hat{r}_*(N(i_*(F([\gamma]))) = N((\hat{r}_* \circ i_*)(F([\gamma])))$$

deducimos que

$$\Pi_1(S, \sigma(t_0)) \cong \frac{\Pi_1(U, \sigma(t_0))}{N(i_*(F([\gamma])))} \xrightarrow{\hat{r}_*} \frac{\Pi_1(\sigma(S^1), \sigma(1, 0))}{N((\hat{r} \circ i)_*(F([\gamma])))}.$$

Por otra parte, de las definiciones de γ , \hat{r} y r se sigue que

$$(\hat{r} \circ \gamma)(t) = \hat{r}(\sigma(t_0 e^{2\pi i t})) = \sigma(r(t_0 e^{2\pi i t})) = \sigma(e^{2\pi i t}) = \alpha_1(t) \quad \forall t \in [0, 1],$$

y por tanto que

$$\hat{r} \circ \gamma = \alpha_1 \quad y \quad (\hat{r} \circ i)_*([\gamma]) = [\hat{r} \circ \gamma] = [\hat{\alpha}_1] \in \Pi_1(\sigma(S^1), z_0).$$

Esto implica que $N((\hat{r} \circ i)_*(F([\gamma]))) = N((\hat{r} \circ i)_*([\gamma])) = N([\hat{\alpha}_1])$, de donde finalmente

$$\Pi_1(S, \sigma(t_0)) \cong \frac{\Pi_1(\sigma(S^1), \sigma(1, 0))}{N((\hat{r} \circ i)_*(F([\gamma])))} = \frac{\Pi_1(\sigma(S^1), z_0)}{N([\hat{\alpha}_1])},$$

lo que concluye la prueba. ■

El siguiente corolario, consecuencia inmediata de la Proposición 9.8, nos calcula el grupo fundamental del espacio asociado a un esquema. Es conveniente consultar las Definiciones 2.23 y 2.25 para la notación implícita.

Corolario 9.9 *Sea ω un esquema, sea S_ω su realización canónica, $\sigma_\omega: \overline{D} \rightarrow S_\omega$ la identificación asociada a S_ω y $\Gamma_\omega = \sigma(S^1)$ su grafo conexo borde.*

Si $z_0 := \sigma_\omega((1, 0)) \in \Gamma_\omega$ y $\hat{\alpha}_1: [0, 1] \rightarrow \Gamma_\omega$, $\hat{\alpha}_1(t) := \sigma_\omega(e^{2\pi i t})$, entonces

$$\Pi_1(S_\omega) \cong \Pi_1(\Gamma_\omega, z_0)/N([\hat{\alpha}_1]).$$

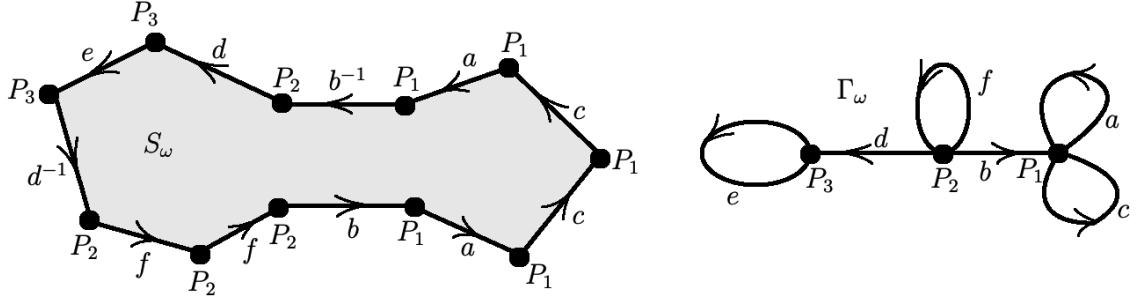


Figura 1: El espacio realización S_ω y grafo borde Γ_ω del esquema $\omega = baccab^{-1}ded^{-1}ff$.

Nótese que, como Γ_ω es un grafo conexo, el grupo $\Pi_1(\Gamma_\omega, z_0)$ es libre con una cantidad finita de generadores (ver Observación 2.22).

Veamos un ejemplo sencillo que ilustre el anterior cálculo. Consideremos el esquema $baccab^{-1}ded^{-1}ff$, cuyo espacio realización S y grafo conexo borde Γ se han ilustrado en la figura contigua. Basando los cálculos de los grupos fundamentales en el punto P_2 (vértice de Γ), es claro que

$$\Pi_1(\Gamma, P_2) = F(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$$

para $\beta_1 = bcb^{-1}$, $\beta_2 = bab^{-1}$, $\beta_3 = f$, $\beta_4 = ded^{-1}$. En este caso $\hat{\alpha}_1$ como lazo basado en P_2 se escribe como

$$\hat{\alpha}_1 = baccab^{-1}ded^{-1}ff = (bab^{-1})(bcb^{-1})(bab^{-1})(ded^{-1})ff = \beta_2\beta_1^2\beta_2\beta_4\beta_3^2,$$

de donde finalmente

$$\Pi_1(S, P_2) = \Pi_1(\Gamma, P_2)/N(\hat{\alpha}_1) = F(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)/N(\beta_2\beta_1^2\beta_2\beta_4\beta_3^2) = F(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

Definición 9.10 (Esquemas binarios puros normales) Presentamos una lista básica de esquemas binarios puros, que llamaremos normales, y sus correspondientes realizaciones (téngase en cuenta el Corolario 9.9).

- El espacio S_0 asociado al esquema binario puro $w_0 := aa^{-1}$ es homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 y tiene grupo fundamental trivial $\{0\}$.
- El espacio S_n asociado al esquema binario puro $w_n := \prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, tiene grupo fundamental isomorfo a

$$F(a_1, c_1, \dots, a_n, c_n)/N(\{\prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1}\}).$$

- El espacio S_n^* asociado al esquema binario puro $w_n^* := \prod_{j=1}^n a_j a_j$, $n \in \mathbb{N}$, tiene grupo fundamental isomorfo a

$$F(a_1, \dots, a_n)/N(\{\prod_{j=1}^n a_j^2\}).$$

Corolario 9.11 (Realizaciones de esquemas binarios puros normales) La familia de realizaciones de los esquemas binarios puros normales

$$\{S_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_n^* : n \in \mathbb{N}\}$$

no contiene dos espacios homeomorfos entre sí.

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que

$$\mathcal{A}(\Pi_1(S_n)) \cong \mathbb{Z}^{2n}, \quad \mathcal{A}(\Pi_1(S_{n+1}^*)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^n, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(para $n = 0$ entiendase $\mathbb{Z}^0 \equiv \{0\}$).

Por tanto la correspondiente lista de abelianizados no contiene dos de ellos homeomorfos entre sí, de donde se sigue el resultado. ■

9.1.3. El grupo fundamental de los espacios proyectivos

Recordemos que un modelo topológico básico para el espacio proyectivo \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}$, es el cociente de la esfera \mathbb{S}^n por la relación de equivalencia inducida por la aplicación antípoda:

$$pRq \iff p = \pm q.$$

Para $n = 1$ es inmediato que $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{S}^1$, y por tanto

$$\Pi_1(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Para $n = 2$, \mathbb{P}^2 es homeomorfo al espacio definido por la palabra simple aa , por lo que teniendo en cuenta la Definición 9.10

$$\Pi_1(\mathbb{P}^2) \cong F(a)/N(\{a^2\}) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Probaremos el siguiente

Teorema 9.12 $\Pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$.

DEMOSTRACIÓN: Bastará con demostrar que

$$\Pi_1(\mathbb{P}^{n+1}) \cong \Pi_1(\mathbb{P}^n), \quad n \geq 2.$$

El teorema se seguirá por un proceso inductivo elemental, usando el hecho de que $\Pi_1(\mathbb{P}^2) \cong \mathbb{Z}_2$.

Escribamos $\pi: \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{P}^{n+1} \equiv \mathbb{S}^{n+1}/R$ la proyección natural, donde R es la relación de equivalencia inducida por la antípoda. Denotemos por $e_{n+2} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+2}$. Es fácil comprobar que

$$U := \pi(\{p \in \mathbb{S}^{n+1}: \langle p, e_{n+2} \rangle > 0\}) \quad \text{y} \quad V := \pi(\{p \in \mathbb{S}^{n+1}: |\langle p, e_{n+2} \rangle| < 1\})$$

son abiertos arcoconexos de \mathbb{P}^{n+1} tales que $\mathbb{P}^{n+1} = U \cup V$. Igualmente

$$U \cap V = \pi(\{p \in \mathbb{S}^{n+1}: 0 < \langle p, e_{n+2} \rangle < 1\})$$

es un abierto arcoconexo. Nuestra intención es aplicar el Teorema de Seifert-Van Kampen a la pareja U, V en \mathbb{P}^{n+1} .

Probemos que U es simplemente conexo. En efecto, basta tener en cuenta que $\mathbb{S}_+^{n+1} := \{p \in \mathbb{S}^{n+1}: \langle p, e_{n+2} \rangle > 0\}$ es homeomorfo a la bola unidad cerrada $\overline{B}_n(0, 1) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vía la proyección ortogonal sobre $\{x_{n+2} = 0\} \equiv \mathbb{R}^{n+1}$, y que $\pi|_{\mathbb{S}_+^{n+1}}: \mathbb{S}_+^{n+1} \rightarrow U$ es un homeomorfismo.

Calculemos ahora el grupo fundamental de V .

Para ello, observemos que es posible identificar topológicamente $\mathbb{S}^n \equiv \mathbb{S}^n \times \{0\} = (\mathbb{S}^{n+1} \cap \{x_{n+2} = 0\})$, y escribamos $W = \{p \in \mathbb{S}^{n+1}: |\langle p, e_{n+2} \rangle| < 1\}$. La aplicación

$$r: W \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad r(p) := \frac{p - \langle p, e_{n+2} \rangle e_{n+2}}{\|p - \langle p, e_{n+2} \rangle e_{n+2}\|}$$

es la retracción asociada a la deformación

$$H: W \times [0, 1] \rightarrow W, \quad H(p, s) := \frac{(1-s)p + sr(p)}{\|(1-s)p + sr(p)\|}$$

que materializa \mathbb{S}^n como retracto fuerte de deformación de W .

Si $A: \mathbb{S}^{n+1} \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$ es la aplicación antípoda, es inmediato comprobar que

$$r \circ A = A \circ r \quad \text{y} \quad H \circ (A \times \text{Id}_{[0,1]}) = A \circ H.$$

Por tanto existe una única retracción y deformación

$$\hat{r}: V \rightarrow \pi(\mathbb{S}^n), \quad \hat{H}: V \times [0, 1] \rightarrow V$$

satisfaciendo que

$$\hat{r} \circ (\pi|_W) = (\pi|_{\mathbb{S}^n}) \circ r \quad \text{y} \quad \hat{H} \circ ((\pi|_W) \times \text{Id}_{[0,1]}) = (\pi|_W) \circ H,$$

lo que prueba que $\pi(\mathbb{S}^n)$ es un retracto fuerte de deformación de V . En otras palabras, \mathbb{P}^n es un retracto fuerte de deformación de V ya que $\pi(\mathbb{S}^n)$ es naturalmente homeomorfo a $\mathbb{P}^n \equiv \mathbb{S}^n/R_0$, donde R_0 es la relación inducida por la antípoda en \mathbb{S}^n .

Por último, comprobemos que $U \cap V$ es simplemente conexo. En efecto, si llamamos $Y := \{p \in \mathbb{S}^{n+1}: 0 < \langle p, e_{n+2} \rangle < 1\}$, la aplicación $\pi|_Y: Y \rightarrow U \cap V$ es un homeomorfismo. Igualmente

$$\Phi: Y \rightarrow \mathbb{S}^n \times]0, 1[, \quad \phi(p) = (r(p), \langle p, e_{n+2} \rangle),$$

es un homeomorfismo. Inferimos que $U \cap V$ es homeomorfo al espacio simplemente conexo $\mathbb{S}^n \times [0, 1]$ (téngase en cuenta que $n \geq 2$), y por tanto igualmente simplemente conexo.

El Corolario 9.2 garantiza que

$$\Pi_1(\mathbb{P}^{n+1}) \cong \Pi_1(U) \bullet \Pi_1(V) \cong \{0\} \bullet \Pi_1(\mathbb{P}^n) \cong \Pi_1(\mathbb{P}^n),$$

lo que concluye la prueba. ■

Ejercicios del Tema 1

1. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Tomamos dos puntos x_1 y x_2 en X . Denotamos por $(f_*)_1 : \Pi_1(X_1, x_1) \rightarrow \Pi_1(X_2, f(x_1))$ y por $(f_*)_2 : \Pi_1(X_1, x_2) \rightarrow \Pi_1(X_2, f(x_2))$ a los homomorfismos inducidos por f en los puntos x_1 y x_2 . Dado $\gamma \in \Omega_{x_1, x_2}(X)$, demostrar que $(f_*)_2 \circ \mathcal{U}_\gamma = \mathcal{U}_{f \circ \gamma} \circ (f_*)_1$.
2. Probar que son grupos topológicos:
 - a) \mathbb{R}^n con la suma y la topología usuales.
 - b) $\mathbb{R}_* = \mathbb{R} - \{0\}$ y $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} - \{0\}$ con los productos y las topologías usuales.
 - c) $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$ con el producto de números complejos y la topología usual.
 - d) El grupo lineal general $GL(n)$, el grupo ortogonal $O(n)$ y el grupo especial ortogonal $SO(n)$ con el producto de matrices y la topología inducida por $M_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$.
3. (Conjuntos estrellados). Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ y $x_0 \in X$. Se dice que X es *estrellado respecto de x_0* si $[x_0, x] \subseteq X$, para cada $x \in X$. Se pide lo siguiente:
 - a) Sean $\alpha, \beta \in \Omega_{x_0}(X)$. Demostrar que $\alpha \simeq \beta$, construyendo una homotopía de forma explícita. Concluir que X es simplemente conexo.
 - b) Sean $f, g : Y \rightarrow X$ dos aplicaciones continuas, donde Y es cualquier espacio topológico. Demostrar que $f \simeq g$.
4. Sea X un espacio topológico y $f, g : X \rightarrow \mathbb{S}^n$ aplicaciones continuas con $g(x) \neq -f(x)$, para cada $x \in X$. Demostrar que $f \simeq g$. Deducir que:
 - a) Si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y no tiene puntos fijos, entonces $f \simeq -\text{Id}_{\mathbb{S}^n}$.
 - b) Si $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ es continua y $f(x) \neq -x$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$ entonces $f \simeq \text{Id}_{\mathbb{S}^n}$.
5. Demostrar que $\text{Id}_{\mathbb{S}^{2n-1}} \simeq -\text{Id}_{\mathbb{S}^{2n-1}}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Usando el ejercicio anterior probar que si $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua y nulhomótopa, entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{S}^1$ tales que $f(x_1) = x_1$ y $f(x_2) = -x_2$.
6. Para cada espacio X probar que la sección ecuatorial $A = X \times \{0\}$ es un retracto de deformación de $X \times [-1, 1]$. Deducir el tipo de homotopía de la banda $\mathbb{R}^n \times [-1, 1]$, el cilindro $\mathbb{S}^n \times [-1, 1]$ y el cubo $[-1, 1]^{n+1}$. Discutir qué ocurre si sustituimos $[-1, 1]$ por \mathbb{R} .
7. Encontrar un retracto de deformación de $X = \mathbb{S}^n - \{N, S\}$ y otro de $X = \mathbb{R}^{n+1} - \overline{B}(0, 1)$, donde $\overline{B}(0, 1)$ es la bola unidad cerrada.
8. Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ con $x_1 \neq x_2$. Definimos $A = C_1 \cup C_2$, donde C_i es la circunferencia de centro x_i y radio $\|x_1 - x_2\|/2$. Demostrar gráficamente que A es un retracto de deformación de $\mathbb{R}^2 - \{x_1, x_2\}$. Calcular explícitamente la retracción cuando $x_1 = (-1, 0)$ y $x_2 = (1, 0)$.

9. Sea $\alpha \in \Omega(\mathbb{S}^1, 1)$ un lazo de clase C^1 . Demostrar que:

$$\deg(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \langle \alpha'(u), J(\alpha(u)) \rangle du,$$

donde $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es el giro de ángulo $\pi/2$ dado por $J(x, y) = (-y, x)$.

10. ¿Es cierto el teorema de Borsuk-Ulam si cambiamos \mathbb{S}^2 por el toro $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$?

11. Probar que el teorema de Borsuk-Ulam es equivalente a los siguientes enunciados:

- a) Si $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es continua e impar, entonces existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $f(x_0) = 0$.
- b) Si $g_1, g_2 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas e impares, existe $x_0 \in \mathbb{S}^2$ tal que $g_1(x_0) = g_2(x_0) = 0$.

12. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$ una función continua. Definimos el conjunto:

$$S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = f(z)^2\}.$$

- a) Estudiar el conjunto $S_f \cap \{z = z_0\}$ con $z_0 \in \mathbb{R}$. Esbozar un dibujo de S_f .
- b) Demostrar que cualesquiera dos conjuntos S_f son homeomorfos entre sí.
- c) Calcular el grupo fundamental de S_f .

13. Encontrar un retracto de deformación de $\mathbb{R}^3 - L$, donde L es el eje z . Calcular el grupo fundamental $\Pi_1(\mathbb{R}^3 - R)$, siendo R cualquier recta afín.

14. Sea S un subespacio afín de dimensión $k \leq n - 2$ en \mathbb{R}^n . Calcular el grupo fundamental de $\Pi_1(\mathbb{R}^n - S)$ encontrando para ello un retracto de deformación.

15. Demostrar que el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x - \operatorname{arctg}(x^2 - y^3) &= 5, \\ \cos(x) + \operatorname{sen}(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \frac{1}{y} &= -3. \end{aligned}$$

tiene al menos una solución en \mathbb{R}^2 .

16. Sea A un retracto de un disco cerrado en \mathbb{R}^2 . Demostrar que toda aplicación continua $f : A \rightarrow A$ tiene al menos un punto fijo. Deducir que toda aplicación continua $f : X \rightarrow X$ con $X = \overline{B}((-1, 0), 1) \cup \overline{B}((1, 0), 1)$ tiene al menos un punto fijo.

17. Sea $f : \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ un homeomorfismo en el disco unidad de \mathbb{R}^2 . Demostrar que f conserva el interior y la frontera de \overline{D} .

18. Calcular $\Pi_1(X)$ en estos casos:

- a) $X = \mathbb{S}^2 \cup [N, S]$, donde N y S son el polo Norte y el polo Sur de \mathbb{S}^2 y $[N, S]$ el segmento que los une.
- b) $X = \mathbb{S}^2 \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 \leq 1\}$,
- c) $X = \mathbb{S}^2 \cup C_1 \cup C_2$, donde C_1 y C_2 son circunferencias tangentes a \mathbb{S}^2 en los puntos N y S , respectivamente.

- d) X es la unión de una esfera y de un toro tangentes en un único punto.
- e) X es la unión de dos toros tangentes en un único punto.
19. Calcular $\Pi_1(X)$, donde X es el espacio que se obtiene al identificar los lados de un polígono regular plano siguiendo los esquemas E siguientes:
- $E = aaa$. ¿Es X contráctil?
 - $E = aa^{-1}ba^{-1}a^{-1}b^{-1}$,
 - $E = ab^{-1}bccc$,
 - $E = abaaab^{-1}a^{-1}$. Es $\Pi_1(X)$ el producto libre de dos grupos cíclicos?
 - $E = abcb^{-1}a^{-1}cc$.
20. Sea X el espacio resultante al identificar los 8 lados de un polígono regular plano siguiendo el esquema $acadbcb^{-1}d$. Calcular el abelianizado del grupo fundamental de X .
21. Sea X el espacio obtenido a partir de una corona circular plana cuando se identifican puntos antípodas en las dos circunferencias del borde. Calcular $\Pi_1(X)$.
22. Sea X el cociente de una corona circular donde el círculo exterior se divide en seis lados identificados por el esquema $abca^{-1}a^{-1}c^{-1}$ y el círculo exterior se divide en tres lados identificados según el esquema ddd . Calcular su grupo fundamental.
23. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
- Sea X simplemente conexo, $A \subseteq X$ y $f : A \rightarrow Y$ una aplicación continua. Supongamos que existe $F : X \rightarrow Y$ continua con $F|_A = f$. Probar que el homomorfismo inducido $f_* : \Pi_1(A, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, f(x_0))$ es trivial, con independencia de $x_0 \in A$.
 - Discutir si la bola unidad cerrada es un retracto de deformación de \mathbb{R}^{n+1} .
 - Sea X simplemente conexo y $A \subseteq X$ un retracto de X . ¿Es A simplemente conexo?
 - Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un convexo compacto con interior no vacío. Dado un punto x_0 del interior de X , demostrar que la frontera $\text{Fr}(X)$ es un retracto de deformación de $X - \{x_0\}$.
 - Discutir si \mathbb{S}^1 admite algún retracto de deformación $A \neq \mathbb{S}^1$.
 - Sea $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación dada por $f(z) = z^n$. Calcular el homomorfismo inducido f_* en $x_0 = 1$.
 - Sea X un espacio topológico y $A \subseteq X$. ¿Es $(i_A)_*$ un monomorfismo? ¿Y si A es un retracto de X ?
 - Supongamos que $f : X \rightarrow Y$ es continua y sobreyectiva con $f(x_0) = y_0$. ¿Es cierto que $f_* : \pi(X, x_0) \rightarrow \Pi_1(Y, y_0)$ es un epimorfismo?
 - ¿Es todo retracto de un espacio X un retracto de deformación de X ?
 - ¿Es cierto el teorema del punto fijo de Brouwer para $X = \mathbb{R}^n$? ¿Y para una corona?
 - Discutir si existe algún homeomorfismo de \mathbb{R}^2 que intercambie las dos componentes conexas de $\mathbb{R}^2 - \mathbb{S}^1$.

TEMA 2: Espacios Recubridores

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

En este tema vamos a tratar el concepto de espacio recubridor, una de las herramientas más útiles en Topología y Geometría. Esta teoría está íntimamente ligada con la del grupo fundamental como iremos descubriendo más adelante. A nivel intuitivo, la idea básica para construir un espacio recubridor consiste en *desenrollar* una familia de lazos homotópicamente no triviales en un espacio base, para de esta forma generar otro de menor complejidad topológica a nivel de grupo fundamental.

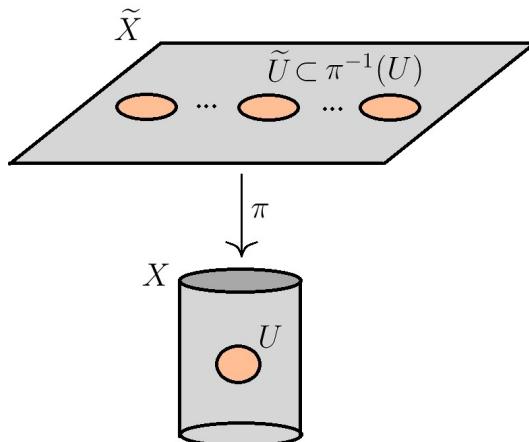
A lo largo de este tema, todos los espacios topológicos considerados serán *conexos y localmente arcocaconexos* (luego *arcocaconexos*).

10. Definición y ejemplos. Nociones básicas

Definición 10.1 Sea X un espacio topológico. Un (espacio) recubridor de X es un par (\tilde{X}, π) , donde:

- \tilde{X} es un espacio topológico.
- $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ es una aplicación continua y sobreyectiva.
- Todo punto $p \in X$ admite un entorno abierto y arcocaconexo U en X tal que $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo para toda arcocomponente \tilde{U} de $\pi^{-1}(U)$.

Al abierto U se le llamará entorno fundamental o distinguido para el recubridor (\tilde{X}, π) (alrededor de $p \in U$, luego alrededor de cualquiera otro punto de U).



Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X según Definición 10.1. Es conveniente tener en cuenta los siguientes comentarios y notaciones:

- A la aplicación π la llamaremos *aplicación recubridora*, al espacio X *base del recubridor* (\tilde{X}, π) , y al espacio \tilde{X} *espacio recubridor* (de X vía π).
- Dado $p \in X$, al conjunto $\pi^{-1}(p) \subset \tilde{X}$ le llamaremos *fibra* del punto p para el recubridor (\tilde{X}, π) . Un recubridor se dirá *finito* (y la aplicación recubridora finita) cuando la fibra $\pi^{-1}(p)$ sea finita para todo $p \in X$. Más adelante comprobaremos que el cardinal de $\pi^{-1}(p)$ no depende del punto $p \in X$; ver el Corolario 11.5 y la Definición 11.6.
- La familia de abiertos

$$\mathcal{U} := \{U \subset X : U \text{ es entorno distinguido para } (\tilde{X}, \pi)\}$$

es una base de la topología de X . En efecto, sean $p \in X$ y $O \subset X$ un abierto con $p \in O$. Basta observar que para todo entorno distinguido U alrededor de p para el recubridor (\tilde{X}, π) , la arcocomponente V del abierto $U \cap O$ que contiene a p satisface $p \in V \subset U \cap O \subset O$ y pertenece claramente a \mathcal{U} .

- Si $U \in \mathcal{U}$ es un entorno distinguido para (\tilde{X}, π) , cada arcocomponente \tilde{U} de $\pi^{-1}(U)$ es un subconjunto abierto de \tilde{X} ; téngase en cuenta $\pi^{-1}(U)$ es un abierto de \tilde{X} y que este espacio es localmente arcoconexo. Como $\pi|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo, se deduce que toda aplicación recubridora es un homeomorfismo local.
- Como π es un homeomorfismo local entonces π una aplicación abierta.
- El conjunto de arcocomponentes de $\pi^{-1}(U)$ está en correspondencia uno a uno con la fibra de p . En efecto, si para cada $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ denotamos por $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ a la única arcocomponente de $\pi^{-1}(U)$ conteniendo a \tilde{p} , entonces

$$\{\tilde{U}_{\tilde{p}} : \tilde{p} \in \pi^{-1}(p)\}$$

son todas las arcocomponentes de $\pi^{-1}(U)$; usar que cada arcocomponente \tilde{U} de $\pi^{-1}(U)$ contiene exactamente un punto de $\pi^{-1}(p)$ ya que $\pi|_{\tilde{U}_{\tilde{p}}} : \tilde{U}_{\tilde{p}} \rightarrow U$ es biyectiva. Por tanto podemos escribir

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)} \tilde{U}_{\tilde{p}}.$$

- Dado $p \in X$, la fibra $\pi^{-1}(p)$ es un subconjunto discreto de \tilde{X} . Basta tomar un entorno distinguido U alrededor de p para (\tilde{X}, π) y observar que para todo $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$, el abierto $\tilde{U}_{\tilde{p}}$ satisface $\pi^{-1}(p) \cap \tilde{U}_{\tilde{p}} = \{\tilde{p}\}$.
- Si $A \subseteq X$ es conexo y localmente arcoconexo y \tilde{A} es una arcocomponente de $\pi^{-1}(A)$ entonces $(\tilde{A}, \pi|_{\tilde{A}})$ es un recubridor de A .

Es conveniente tener presente que no todo homeomorfismo local sobrejetivo es una aplicación recubridora. Sirva como contraejemplo la aplicación

$$\rho|_{]0,2[} :]0, 2[\rightarrow \mathbb{S}^1,$$

donde $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ es la exponencial $\rho(t) = e^{2\pi i t}$. En este caso el punto $1 \equiv (1, 0) \in \mathbb{S}^1$ no admite ningún entorno distinguido. En relación a este comentario es recomendable comparar con la Proposición 10.3.

Destaquemos algunos ejemplos sencillos de recubridores.

Ejercicio 10.2 Las siguientes aplicaciones son recubridoras:

- La aplicación exponencial $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\rho(t) = e^{2\pi i t}$ (ver (2)). Recordemos que para todo $z \in \mathbb{S}^1$, $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-z\}$ es un entorno distinguido de z para (\mathbb{R}, ρ) .
- La aplicación $\pi_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\pi_n(z) := z^n$ (notación compleja). Al igual que antes, si $z \in \mathbb{S}^1$ entonces $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{-z\}$ es un entorno distinguido de z para (\mathbb{S}^1, π_n) .
- $\pi_1 \times \pi_2: Y_1 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2$, donde $\pi_j: Y_j \rightarrow X_j$ es recubridora, $j = 1, 2$. En este caso se pueden elegir entornos alrededor de $(p_1, p_2) \in X_1 \times X_2$ de la forma $U_1 \times U_2$ con U_j es entorno distinguido alrededor de $p_j \in X_j$ para (Y_j, π_j) , $j = 1, 2$.
- $\rho \times \rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.
- $\rho \times \text{Id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
- $\pi_n \times \pi_m: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $m, n \in \mathbb{N}$.
- $\pi_n \times \text{Id}_{\mathbb{R}}: \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
- La proyección canónica $\pi: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dado $p \in \mathbb{S}^n$, un entorno distinguido para $\pi(p) \in \mathbb{P}^n$ es $U := \pi(U_p)$ con $U_p = \{q \in \mathbb{S}^n : \langle q, p \rangle > 0\}$; basta observar que $\pi^{-1}(U) = U_p \cup (-U_p)$ y $\pi|_{\pm U_p}: \pm U_p \rightarrow U$ es un homeomorfismo.
- Un homeomorfismo $f: X \rightarrow Y$.

Es natural preguntarse bajo qué condiciones una aplicación es recubridora, la proposición siguiente será un ejemplo de ello. Recordemos que una aplicación $f: X \rightarrow Y$ entre espacios topológicos se dice *propia* si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo compacto $K \subset Y$.

Proposición 10.3 Si $f: Y \rightarrow X$ es un homeomorfismo local sobreíectivo y propio entre espacios Hausdorff localmente compactos, entonces f es una aplicación recubridora finita.

DEMOSTRACIÓN : Veamos primero que para cada $x \in X$ el conjunto $f^{-1}(x)$ es finito. En efecto, como f es un homeomorfismo local para cada $y \in f^{-1}(x)$ existe un entorno V de y en Y tal que $f(V)$ es un entorno de x en X y $f|_V: V \rightarrow f(V)$ es un homeomorfismo. De aquí que V contiene sólo una preimagen por f de x , y por tanto el conjunto $f^{-1}(x)$ es discreto. Pero además $f^{-1}(x)$ es compacto, ya que es la imagen inversa por una aplicación propia de un compacto. de aquí que $f^{-1}(x)$ es finito como habíamos afirmado.

Tomemos $x \in X$ arbitrario y escribamos:

$$f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\}.$$

Como Y es Hausdorff podemos encontrar *entornos abiertos* V_j de y_j , $j = 1, \dots, n$, disjuntos dos a dos. Salvo refinarlos, y usando que f es un homeomorfismo local, podemos suponer además que $f(V_j)$ es un entorno abierto de x y $f|_{V_j}: V_j \rightarrow f(V_j)$ es un homeomorfismo, $j = 1, \dots, n$. Como $\bigcap_{j=1}^n f(V_j)$ es un entorno abierto de x y X es un espacio localmente compacto y Hausdorff, es posible encontrar un abierto W en X tal que

$$x \in W, \quad \overline{W} \text{ (cierre en } X\text{) es compacto y } \overline{W} \subseteq \bigcap_{j=1}^n f(V_j).$$

Notemos que el conjunto $f^{-1}(\overline{W})$ es compacto en X por ser f propia, y por tanto $f^{-1}(\overline{W}) \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j$ es también compacto en X al ser un cerrado del compacto $f^{-1}(\overline{W})$. Como $f^{-1}(x) = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \bigcup_{j=1}^n V_j$, inferimos que

$$f^{-1}(x) \cap (f^{-1}(\overline{W}) \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j) = \emptyset$$

y por tanto el compacto $f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j) \subset Y$ no contiene a x . De aquí que el conjunto

$$U := W \setminus f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j)$$

sea abierto en Y y $x \in U$.

Veamos que la arcocomponente de U que contiene a x es entorno distinguido para (X, f) alrededor de x . Para ello basta con probar que $f^{-1}(U)$ consiste de n abiertos disjuntos dos a dos homeomorfos vía f a U . En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}\left(W \setminus f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j)\right) = f^{-1}(W) \setminus f^{-1}\left(f(f^{-1}(\overline{W}) \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j)\right) \subseteq \\ &\subseteq f^{-1}(W) \setminus (f^{-1}(\overline{W}) \setminus \bigcup_{j=1}^n V_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^n V_j, \end{aligned}$$

de donde

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{i=1}^n (f^{-1}(U) \cap V_i)$$

siendo la unión disjunta por serlo los abiertos V_i , $i = 1, \dots, n$. Como $f|_{V_i}: V_i \rightarrow f(V_i)$ es un homeomorfismo y $U \subseteq W \subseteq \bigcap_{j=1}^n f(V_j) \subseteq f(V_i)$, se sigue que

$$f|_{f^{-1}(U) \cap V_i}: f^{-1}(U) \cap V_i \rightarrow U$$

es un homeomorfismo para todo $i = 1, \dots, n$, lo que concluye la prueba. ■

Corolario 10.4 *Supongamos que X e Y son espacios Hausdorff e Y compacto. Todo homeomorfismo local $f: Y \rightarrow X$ es una aplicación recubridora.*

DEMOSTRACIÓN: La aplicación f es abierta por ser un homeomorfismo local. Como f es también cerrada por ir de un compacto en un Hausdorff, inferimos de la conexión de X que f es sobreyectiva. En particular X es compacto al ser la imagen continua de un compacto. Como todo compacto Hausdorff es localmente compacto, el resultado se sigue de la Proposición 10.3. ■

Otra cuestión de interés es saber si la composición de aplicaciones recubridoras es una aplicación recubridora. Existen contraejemplos que demuestran la falsedad en general de esa afirmación. Pero hay una situación muy particular en la que es cierta.

Proposición 10.5 *Sean $\pi_1: Y \rightarrow Z$ y $\pi_2: Z \rightarrow X$ aplicaciones recubridoras. Si π_2 es finita entonces $\pi_2 \circ \pi_1: Y \rightarrow X$ es recubridora.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $x \in X$ un punto arbitrario, y consideremos un entorno distinguido U en X para (Z, π_2) alrededor de x . Llamemos $\pi_2^{-1}(x) = \{z_1, \dots, z_n\}$ (téngase en cuenta que π_2 es finito) y escribamos

$$\pi_2^{-1}(U) = \bigcup_{j=1}^n V_j,$$

donde $\{V_j : j = 1, \dots, n\}$ son disjuntos dos a dos, $z_j \in V_j$ y $\pi_2|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo, $j = 1, \dots, n$.

Consideremos un entorno distinguido W_j en Z alrededor de z_j para el recubridor π_1 , $j = 1, \dots, n$.

La estrategia consistirá en probar que la arcocomponente U_0 de $\bigcap_{j=1}^n \pi_2(W_j \cap V_j)$ contenido a x es entorno distinguido para $(Y, \pi_2 \circ \pi_1)$ alrededor del punto x .

En efecto, obsérvemos primero que U_0 es entorno distinguido para (Z, π_2) . Para ello tengamos en cuenta que U_0 es abierto ya que π_2 es abierta, y que

$$U_0 \subseteq \bigcap_{j=1}^n \pi_2(W_j \cap V_j) \subseteq U,$$

con U entorno distinguido para (Z, π_2) . Por tanto, si

$$U_j := \pi_2^{-1}(U_0) \cap V_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

se tiene que $\{U_j : j = 1, \dots, n\}$ son disjuntos dos a dos, $\pi_2^{-1}(U_0) = \bigcup_{j=1}^n U_j$, y las aplicaciones $\pi_2|_{U_j} : U_j \rightarrow U_0$, $j = 1, \dots, n$, son homeomorfismos.

Como por definición

$$U_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^n \pi_2(W_i \cap V_i) \subseteq \pi_2(W_j \cap V_j) \subseteq U$$

y $\pi_2|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ es un homeomorfismo, también

$$U_j = V_j \cap \pi_2^{-1}(U_0) = (\pi_2|_{V_j})^{-1}(U_0) \subset W_j \cap V_j \subset W_j,$$

de donde al ser W_j entorno distinguido para (Y, π_1) deducimos que U_j es entorno distinguido para (Y, π_1) , $j = 1, \dots, n$. De aquí que

$$\pi_1^{-1}(U_j) = \bigcup_{p \in \pi_1^{-1}(z_j)} U_{j,p},$$

donde $\{U_{j,p} : p \in \pi_1^{-1}(z_j)\}$ son disjuntos dos a dos y $\pi_1|_{U_{j,p}} : U_{j,p} \rightarrow U_j$ es un homeomorfismo para todo $p \in \pi_1^{-1}(z_j)$, $j = 1, \dots, n$.

Como conclusión,

$$\begin{aligned} (\pi_2 \circ \pi_1)^{-1}(U_0) &= \pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(U_0)) = \pi_1^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^n U_j\right) = \\ &= \bigcup_{j=1}^n \pi_1^{-1}(U_j) = \bigcup_{j=1}^n \left(\bigcup_{p \in \pi_1^{-1}(z_j)} U_{j,p} \right), \end{aligned}$$

con $\{U_{j,p} : p \in \pi_1^{-1}(z_j)$, $j = 1, \dots, n\}$ disjuntos dos a dos y

$$(\pi_2 \circ \pi_1)|_{U_{j,p}} = (\pi_2|_{U_j}) \circ (\pi_1|_{U_{j,p}}) : U_{j,p} \rightarrow U_0$$

homeomorfismo para todo $p \in \pi_1^{-1}(z_j)$ y $j = 1, \dots, n$. Esto prueba que U_0 es un entorno distinguido para $\pi_2 \circ \pi_1$ alrededor de x y concluye la proposición. ■

Uno de los instrumentos más útiles para la construcción de recubrimientos son las acciones de grupos de homeomorfismos sobre espacios topológicos, que determinan de forma natural cocientes topológicos llamados espacios de órbitas. Precisemos el lenguaje.

Dado un espacio topológico X , denotaremos por

$$\text{Hom}(X) := \{f: X \rightarrow X \text{ homeomorfismo}\}$$

al grupo (con la composición) de los homeomorfismos de X

Definición 10.6 *Sea X un espacio topológico, y sea $G \subset \text{Hom}(X)$ un subgrupo. Consideremos la acción canónica de G sobre X :*

$$\mu: G \times X \rightarrow X, \quad \mu(g, x) := g(x).$$

Es habitual escribir por simplicidad $g \cdot x$ en vez de $\mu(g, x)$ para todo $g \in G$ y $x \in X$. La relación binaria en X

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y$$

es de equivalencia. El espacio topológico cociente X/\sim se denota por X/G . La clase de equivalencia $\{g(x): g \in G\} \in X/G$ de un punto $x \in X$ es llamada órbita del punto x para la acción μ de G sobre X . Por este motivo X/G es referido como el espacio de órbitas asociado a la acción μ inducida por G sobre X .

Definición 10.7 *Sea X un espacio topológico, y sea $G \subset \text{Hom}(X)$ un subgrupo.*

El subgrupo G se dice que actúa de forma propia y discontinua sobre X (y la acción $\mu: G \times X \rightarrow X$ inducida se dice propia y discontinua) si para todo $x \in X$ existe un entorno abierto arcoconexo U de x en X tal que $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{\text{Id}_X\}$, donde $g \cdot U$ denota el conjunto $g(U)$. Al entorno U se le llamará entorno distinguido (alrededor de x) para la acción.

La conexión con la teoría de recubridores la da el siguiente teorema.

Teorema 10.8 *Sea X un espacio topológico, y sea $G \subset \text{Hom}(X)$ un subgrupo actuando de forma propia y discontinua sobre X .*

Entonces la proyección al espacio de órbitas $\pi: X \rightarrow X/G$ es recubridora.

DEMOSTRACIÓN: Para cada $x \in X$ denotemos por

$$G \cdot x = \{g \cdot x: g \in G\} \in X/G$$

a la órbita del punto x . La continuidad y sobreyectividad de la proyección

$$\pi: X \rightarrow X/G, \quad \pi(x) := G \cdot x,$$

es bien conocida. También es obvio que π es abierta ya que si $O \subset X$ es un subconjunto abierto entonces

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = \bigcup_{y \in O} \pi^{-1}(G \cdot y) = \bigcup_{y \in O} \{g \cdot y: g \in G\} = \bigcup_{g \in G} g \cdot O$$

es unión de abiertos, y de la definición de la topología cociente en X/G se sigue que $\pi(O)$ es abierto.

Sea $G \cdot x \in X/G$ una órbita arbitraria y determinemos un entorno distinguido para (X, π) alrededor de $G \cdot x$. Para ello consideremos el único entorno abierto U de $x \in X$ tal que $(g \cdot U) \cap U = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{\text{Id}_X\}$, y comprobemos que $\pi(U)$ es entorno distinguido de $G \cdot x$ para π . Como $\pi(U)$ es un abierto en X/G conteniendo a $G \cdot x$ y

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U,$$

siendo esta unión disjunta (téngase en cuenta que U es un entorno distinguido para la acción de G sobre X), es suficiente con garantizar que la aplicación:

$$\pi|_{g \cdot U}: g \cdot U \rightarrow \pi(U)$$

es un homeomorfismo para todo $g \in G$.

En efecto, esta aplicación es continua y abierta ya que es la restricción de la aplicación continua y abierta π al abierto $g \cdot U$ de X . También es trivialmente sobreyectiva ya que cada órbita en $\pi(U)$ es de la forma $G \cdot y$, $y \in U$, y por tanto tiene un representante $g \cdot y \in g \cdot U$. Bastará con demostrar que $\pi|_{g \cdot U}$ es inyectiva. En efecto, si $y, z \in U$ son tales que $\pi(g \cdot z) = \pi(g \cdot y)$, esto es,

$$G \cdot (g \cdot z) = G \cdot (g \cdot y),$$

entonces ha de existir $h \in G$ tal que

$$h \cdot (g \cdot z) = g \cdot y, \quad \text{o equivalentemente, } (g^{-1} \circ h \circ g) \cdot z = y.$$

Esto implicaría que $U \ni y \in (g^{-1} \circ h \circ g) \cdot U$, o equivalentemente,

$$y \in ((g^{-1} \circ h \circ g) \cdot U) \cap U,$$

de donde al ser U un entorno distinguido para la acción μ se seguiría que $g^{-1} \circ h \circ g = \text{Id}_X$ y $h \circ g = g$. De la identidad $(h \circ g)(z) = g(z)$ se deduce que $g(z) = g(y)$, y por ser g un homeomorfismo que $z = y$. De aquí la inyectividad de $\pi|_{g \cdot U}: g \cdot U \rightarrow \pi(U)$, lo que prueba el teorema. ■

Obsérvese que los entornos distinguidos para la aplicación recubridora $\pi: X \rightarrow X/G$ coinciden con los distinguidos para la acción propia y discontinua inducida por G .

Ejercicio 10.9 Ejemplos de acciones propias y discontinuas:

- La acción natural sobre \mathbb{S}^n , $n \geq 1$, del grupo $G = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n}, A\}$ generado por la aplicación antípoda $A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$, $A(p) = -p$, es propia y discontinua. El espacio de órbitas \mathbb{S}^n/G es, por definición, el espacio proyectivo \mathbb{P}^n .
- Si denotamos por $\tau: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\tau(r) = r + 1$, el grupo de traslaciones $G := \{\tau^n: n \in \mathbb{Z}\}$ actúa de forma propia y discontinua sobre \mathbb{R} . Para ello basta observar que si $U \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto de longitud < 1 , $\tau^m(U) = m + U$ es disjunto de U para todo $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

En este caso el espacio de órbitas $\mathbb{R}/G \cong \mathbb{S}^1$. En efecto, si $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/G$ es la proyección al espacio de órbitas y $I = [0, 1]$, es claro que

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}/G, \quad f := \pi|_I$$

es una identificación (continua, cerrada y sobreyectiva) con

$$t \sim_f s \iff t = s \quad \text{o} \quad \{t, s\} = \{0, 1\}.$$

Por tanto $I / \sim_f \cong \mathbb{R}/G$, y como $I / \sim_f \cong \mathbb{S}^1$ se sigue lo enunciado.

- Si denotamos por $\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta(x, y) = (x + 1, y)$, el grupo de traslaciones $G := \{\theta^n: n \in \mathbb{Z}\}$ actúa de forma propia y discontinua sobre \mathbb{R}^2 . Para ello basta observar que si $U \subset \mathbb{R}^2$ es una bola abierta de diámetro < 1 , $\theta^m(U) = (m, 0) + U$ es disjunto de U para todo $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

En este caso el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. En efecto, si $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ es la proyección al espacio de órbitas y $B = [0, 1] \times \mathbb{R}$, es claro que

$$f: B \rightarrow \mathbb{R}^2/G, \quad f := \pi|_B$$

es una identificación (continua, cerrada y sobreyectiva) con

$$(x, y) \sim_f (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ ó } \{x, x'\} = \{0, 1\} \text{ e } y = y'.$$

Por tanto $B/\sim_f \cong \mathbb{R}^2/G$, y como $B/\sim_f \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ se sigue lo enunciado.

- Si denotamos por $\theta_0: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta_0(x, y) = (x + 1, -y)$, el grupo de traslaciones $G := \{\theta_0^n: n \in \mathbb{Z}\}$ actúa de forma propia y discontinua sobre \mathbb{R}^2 . Para ello basta observar que si $U \subset \mathbb{R}^2$ es una bola abierta de diámetro < 1 , $\theta_0^m(U) \cap U = \emptyset$ para todo $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

En este caso el espacio de órbitas \mathbb{R}^2/G es la cinta de Möbius infinita. En efecto, si $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ es la proyección al espacio de órbitas y $B = [-1/2, 1/2] \times \mathbb{R}$, es claro que

$$f: B \rightarrow \mathbb{R}^2/G, \quad f := \pi|_B$$

es una identificación (continua, cerrada y sobreyectiva) con

$$(x, y) \sim_f (x', y') \iff (x, y) = (x', y') \text{ ó } |x - x'| = 1 \text{ e } y = -y'.$$

Por tanto $B/\sim_f \cong \mathbb{R}^2/G$, y como B/\sim_f es la cinta de Möbius infinita se sigue lo enunciado.

- Si denotamos por $\tau_{m,n}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\tau_{m,n}(x, y) = (x + m, y + n)$, el grupo de traslaciones $G := \{\tau_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$ actúa de forma propia y discontinua sobre \mathbb{R}^2 . Para ello basta observar que si $U \subset \mathbb{R}^2$ es una bola abierta de diámetro < 1 , $\tau_{m,n}(U) = (m, n) + U$ es disjunto de U para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

En este caso el espacio de órbitas $\mathbb{R}^2/G \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ (el toro).

En efecto, si $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ es la proyección al espacio de órbitas y $C = [0, 1]^2$, es claro que

$$f: C \rightarrow \mathbb{R}^2/G, \quad f := \pi|_C$$

es una identificación (continua, cerrada y sobreyectiva) con

$$(x, y) \sim_f (x', y') \iff |x - x'|, |y - y'| \in \{0, 1\}$$

Por tanto $C/\sim_f \cong \mathbb{R}^2/G$, y como $C/\sim_f \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se sigue lo enunciado.

- Si denotamos por $\theta_{m,n}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\theta_{m,n}(x, y) = (x + n, (-1)^n y + m)$ el grupo de traslaciones $G := \{\theta_{m,n}: m, n \in \mathbb{Z}\}$ actúa de forma propia y discontinua sobre \mathbb{R}^2 . Para ello basta observar que si $U \subset \mathbb{R}^2$ es una bola abierta de diámetro < 1 , $\theta_{m,n}(U) = U$ es disjunto de U para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

En este caso el espacio de órbitas \mathbb{R}^2/G es la botella de Klein.

En efecto, si $\pi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ es la proyección al espacio de órbitas y $C = [-1/2, 1/2]^2$, es claro que

$$f: C \rightarrow \mathbb{R}^2/G, \quad f := \pi|_C$$

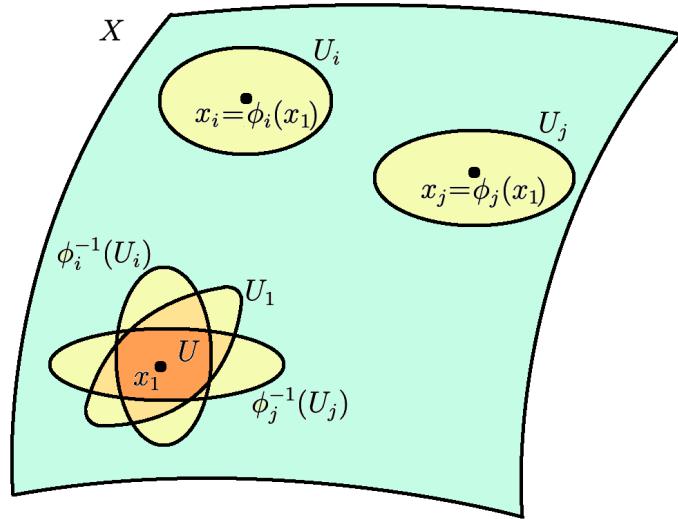
es una identificación (continua, cerrada y sobreyectiva) con

$$(x, y) \sim_f (x', y') \iff \begin{cases} (x, y) = (x', y') \\ x = x', |y - y'| = 1 \\ y = -y', |x - x'| = 1 \end{cases}$$

Por tanto $C/\sim_f \cong \mathbb{R}^2/G$, y como C/\sim_f es la botella de Klein se sigue lo enunciado.

Proposición 10.10 *Si X es un espacio topológico Hausdorff y G es un grupo finito de homomorfismos de X sin puntos fijos (esto es, tal que $\phi(x) \neq x$ para todo $x \in X$ y $\phi \in G \setminus \{\text{Id}_X\}$), entonces G actúa de forma propia y discontinua sobre X .*

DEMOSTRACIÓN: Escribamos $G = \{\phi_1 = \text{Id}_X, \phi_2, \dots, \phi_k\}$, elijamos $x_1 \in X$ y denotemos $x_j = \phi_j(x_1)$ para cada $j = 1, \dots, k$. De nuestras hipótesis $x_i \neq x_j$, $i \neq j$. Como X es Hausdorff podemos tomar U_j entorno abierto de x_j , $j = 1, \dots, k$, de forma que $U_j \cap U_i = \emptyset$, $i \neq j$. Finalmente definamos $U = \bigcap_{j=1}^k \phi_j^{-1}(U_j)$. Como $x_1 \in \phi_j^{-1}(U_j)$ para todo $j = 1, \dots, k$, inferimos que U es un abierto que contiene a x_1 . Además es claro que $\phi_j(U) \subseteq U_j$ para todo $j = 1, \dots, k$, y en particular $U \subset U_1 = \phi_1(U_1)$. Por tanto $U \cap \phi_j(U) \subset U_1 \cap U_j = \emptyset$ para todo $j > 1$, esto es, U es un entorno distinguido para la acción de G sobre X . ■



11. Levantamiento de aplicaciones al recubridor

La teoría de recubridores se apoya de forma esencial sobre la noción de grupo fundamental. El ingrediente técnico para comprender ese hecho son las propiedades de levantamiento de aplicaciones, en especial las de arcos y homotopías, que vamos a estudiar a continuación. Comenzaremos con la siguiente proposición, que expresa una idea recurrente en la teoría de recubridores: fijada una condición inicial, los levantamientos de aplicaciones a un recubridor de existir son únicos.

Proposición 11.1 Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , sea Y un espacio topológico conexo y sean $f_1, f_2: Y \rightarrow \tilde{X}$ dos aplicaciones continuas satisfaciendo $\pi \circ f_1 = \pi \circ f_2$.

Si $A := \{y \in Y: f_1(y) = f_2(y)\} \neq \emptyset$ entonces $f_1 = f_2$.

DEMOSTRACIÓN: Por la conexión de Y bastará con ver que A es abierto y cerrado en Y . Comprobemos que A es abierto. Sea $y_0 \in A$ y consideremos un entorno distinguido

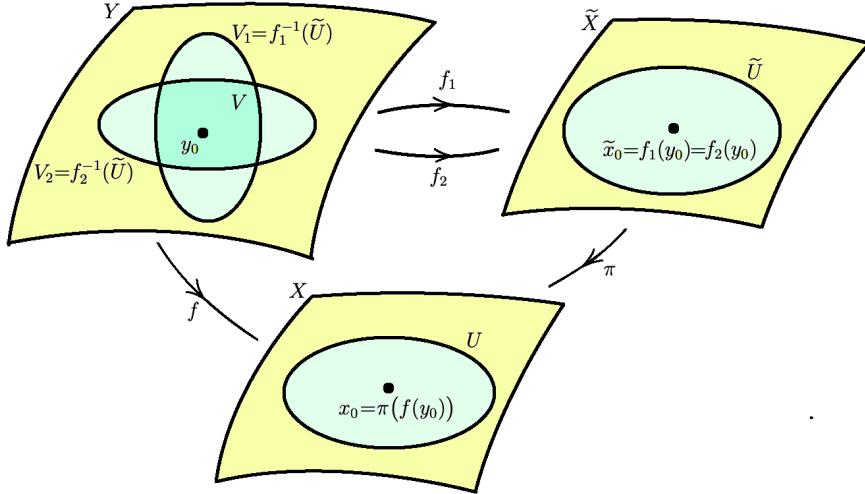


Figura 2: A es abierto.

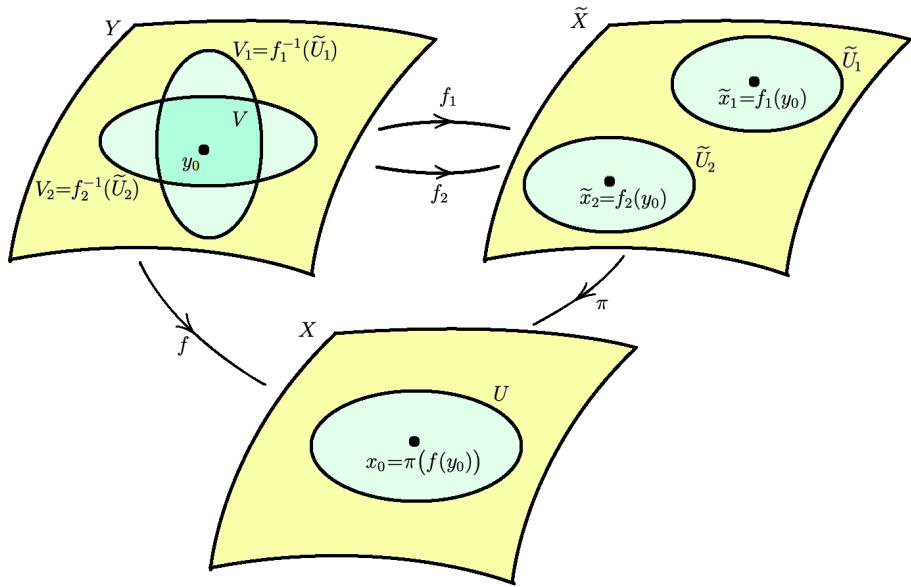


Figura 3: A es cerrado.

U en X alrededor de $x_0 := \pi(f_1(y_0)) = \pi(f_2(y_0))$. Llámese \tilde{U} la arcocomponente de $\pi^{-1}(U)$ contenida en $\tilde{x}_0 := f_1(y_0) = f_2(y_0) \in \pi^{-1}(x_0)$. Como f_j es continua, $V_j := f_j^{-1}(\tilde{U})$ es un abierto en Y contenido en y_0 , $j = 1, 2$. Llámese $V := V_1 \cap V_2$, también abierto en Y contenido en y_0 . Claramente $f_j(V) \subset \tilde{U}$, $j = 1, 2$, y

$$(\pi|_{\tilde{U}}) \circ (f_1|_V) = (\pi \circ f_1)|_V = (\pi \circ f_2)|_V = (\pi|_{\tilde{U}}) \circ (f_2|_V).$$

Como $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo, $f_1|_V = f_2|_V$ y $V \subset A$. Esto prueba que y_0 es interior a A , y por tanto que A es abierto en Y .

Para acabar veamos que A es cerrado, esto es, que $Y \setminus A$ es abierto. Sea $y_0 \in Y \setminus A$ y consideremos un entorno distinguido U en X alrededor de $x_0 := \pi(f_1(y_0)) = \pi(f_2(y_0))$. Como $\tilde{x}_1 := f_1(y_0) \neq \tilde{x}_2 := f_2(y_0) \in \pi^{-1}(x_0)$, las arcocomponentes \tilde{U}_1, \tilde{U}_2 de $\pi^{-1}(U)$ tales que $\tilde{x}_j \in \tilde{U}_j$, $j = 1, 2$, son distintas (luego disjuntas). Como f_j es continua, $V_j := f_j^{-1}(\tilde{U}_j)$ es un abierto en Y conteniendo a y_0 , $j = 1, 2$. Llamemos $V := V_1 \cap V_2$, también abierto en Y conteniendo a y_0 . Claramente $f_j(V) \subset \tilde{U}_j$, $j = 1, 2$, y como $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2 = \emptyset$, $f_1(y) \neq f_2(y)$ para todo $y \in V$. Por tanto $V \subset Y \setminus A$ e y_0 es interior a $Y \setminus A$. De aquí que $Y \setminus A$ sea abierto, o equivalentemente, A es cerrado. ■

El siguiente lema de existencia de levantamientos será fundamental para lo que sigue, como veremos más adelante. Es una generalización del ya probado en el Tema 1 para el recubridor (\mathbb{R}, ρ) de \mathbb{S}^1 , ver Lema 6.1.

Lema 11.2 *Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Dada $H: [0,1]^2 \rightarrow X$ continua con $H(0,0) = x_0$, existe una única aplicación $\tilde{H}: [0,1]^2 \rightarrow \tilde{X}$ continua tal que $\pi \circ \tilde{H} = H$ y $\tilde{H}(0,0) = \tilde{x}_0$.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad de \tilde{H} es evidente de la Proposición 11.1. Probemos la existencia de \tilde{H} .

Para cada $x \in X$ consideremos un entorno (abierto) distinguido $U_x \subset X$ para el recubridor (\tilde{X}, π) . Construyamos el recubrimiento por abiertos de X dado por

$$\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\},$$

Como $C = [0, 1]^2$ es un espacio métrico compacto (con la distancia euclíadiana inducida), existe el *número de Lebesgue* $\epsilon > 0$ para el recubrimiento abierto $H^{-1}(\mathcal{U}) := \{H^{-1}(U_x) : x \in X\}$ de C . Esto significa que cualquier subconjunto $A \subset C$ con diámetro euclíadiano $< \epsilon$ satisface

$$A \subset H^{-1}(U_x) \quad \text{para algún } x \in X,$$

o equivalentemente $H(A) \subset U_x$ para algún $x \in X$.

De aquí que podemos elegir una partición $0 = t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$ de $[0, 1]$ tal que

$$H([t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}]) \subset U_{i,h} \text{ para algún } U_{i,h} \in \mathcal{U}, i, h = 1, \dots, k \quad (6)$$

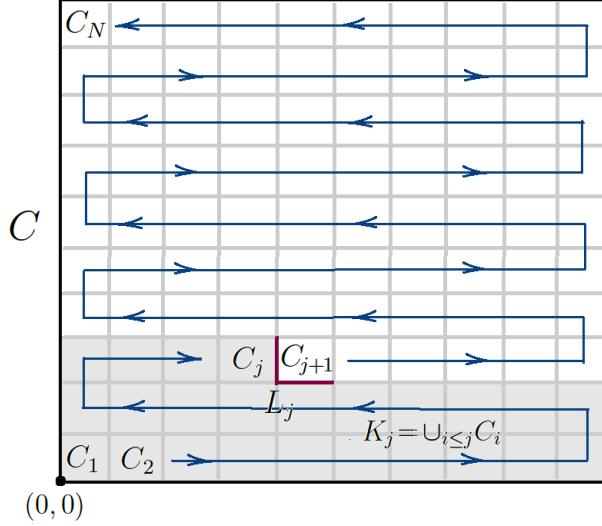
(basta con que $|t_{j+1} - t_j| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$).

Ordenemos C_1, \dots, C_N la familia de $N = k^2$ cuadrados $\{[t_i, t_{i+1}] \times [t_h, t_{h+1}] : i, h = 1, \dots, k\}$ de acuerdo al siguiente criterio:

- $C_1 = [t_1, t_2] \times [t_1, t_2]$.
- $K_j := \cup_{i \leq j} C_i$ es conexo, $j = 1, \dots, N$.
- $L_j := K_j \cap C_{j+1}$ es arcoconexo y consiste en uno o dos lados borde comunes a las regiones poliédricas K_j y C_{j+1} .

La construcción de \tilde{H} se hará por un procedimiento inductivo. Llamemos

$$H_j = H|_{K_j}: K_j \rightarrow X, \quad j = 1, \dots, N.$$



Por hipótesis $x_0 \in H_1(C_1) \subset U_1$ para algún $U_1 \in \mathcal{U}$. Sea V_1 la arcocomponente de $\pi^{-1}(U_1) \subset \tilde{X}$ conteniendo a $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Como $\pi|_{V_1}: V_1 \rightarrow U_1$ es un homeomorfismo que aplica $\tilde{x}_0 \in V_1$ en $x_0 = H_1(0,0) \in U_1$, la aplicación

$$\tilde{H}_1 := (\pi|_{V_1})^{-1} \circ H_1: K_1 \equiv C_1 \rightarrow \tilde{X}$$

es obviamente continua y satisface $\pi \circ \tilde{H}_1 = H_1$ y $\tilde{H}_1(0,0) = \tilde{x}_0$.

Supongamos construida $\tilde{H}_j: K_j \rightarrow \tilde{X}$ continua tal que $\pi \circ \tilde{H}_j = H_j$ y $\tilde{H}_j(0,0) = \tilde{x}_0$, $1 \leq j < N$.

Procedamos a cerrar el proceso inductivo construyendo una aplicación continua $\tilde{H}_{j+1}: K_{j+1} \rightarrow \tilde{X}$ satisfaciendo $\pi \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$ y $\tilde{H}_{j+1}(0,0) = \tilde{x}_0$.

En efecto, primero observemos que $H_{j+1}(C_{j+1}) = H(C_{j+1}) \subset U_{j+1}$ para algún $U_{j+1} \in \mathcal{U}$; ver la ecuación (6). Como $\tilde{H}_j(L_j)$ es arcoconexo y

$$\pi(\tilde{H}_j(L_j)) = H_j(L_j) \subset H_{j+1}(C_{j+1}) \subset U_{j+1},$$

inferimos que $\tilde{H}_j(L_j) \subseteq \pi^{-1}(U_{j+1})$ y ha de existir una arcocomponente V_{j+1} de $\pi^{-1}(U_{j+1})$ conteniendo a $\tilde{H}_j(L_j)$. En particular

$$(\pi|_{V_{j+1}}) \circ (\tilde{H}_j|_{L_j}) = H_{j+1}|_{L_j}.$$

Como U_{j+1} entorno distinguido para π , $\pi|_{V_{j+1}}: V_{j+1} \rightarrow U_{j+1}$ un homeomorfismo y la aplicación

$$\tilde{H}_{j+1} := \begin{cases} \tilde{H}_j & \text{sobre } K_j \\ (\pi|_{V_{j+1}})^{-1} \circ (H_{j+1}|_{C_{j+1}}) & \text{sobre } C_{j+1} \end{cases}$$

está bien definida y es continua. En efecto, \tilde{H}_{j+1} es continua a trozos y la condición $(\pi|_{V_{j+1}}) \circ \tilde{H}_j|_{L_j} = H_{j+1}|_{L_j}$ garantiza que en la intersección $L_j = C_{j+1} \cap K_j$ se tenga

$$\tilde{H}_j|_{L_j} = (\pi|_{V_{j+1}})^{-1} \circ (H_{j+1}|_{L_j}).$$

Como además \tilde{H}_{j+1} satisface $\pi \circ \tilde{H}_{j+1} = H_{j+1}$ y $\tilde{H}_{j+1}(0,0) = \tilde{x}_0$, cerramos la inducción.

Para acabar la prueba del Lema basta con elegir $\tilde{H} = \tilde{H}_N$. ■

Como consecuencia tenemos la siguiente propiedad de levantamiento de arco.

Corolario 11.3 (Propiedad del levantamiento de arco) *Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , tomemos $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, y consideremos un arco $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ con $\alpha(0) = x_0$. Entonces existe un único arco $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$. A $\tilde{\alpha}$ le llamaremos el levantamiento de α vía π con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_0$.*

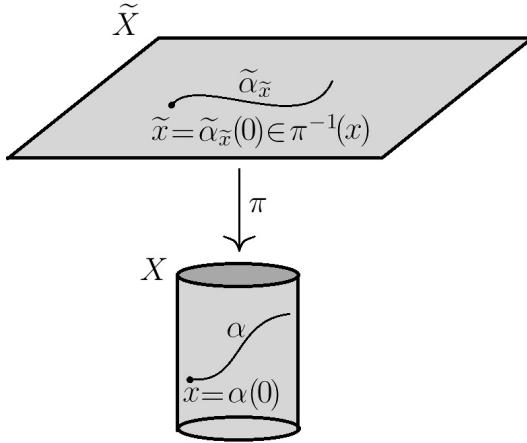
DEMOSTRACIÓN: La unicidad es obvia de la Proposición 11.1.

Procedamos a probar la existencia de $\tilde{\alpha}$. Para ello basta con definir

$$H: [0, 1]^2 \rightarrow \tilde{X}, \quad H(t, s) := \alpha(t),$$

que claramente satisface las hipótesis del Lema 11.2, y considerar la aplicación \tilde{H} dada en él. Obviamente el arco $\tilde{\alpha}: [0,1] \rightarrow \tilde{X}$, $\tilde{\alpha}(t) := \tilde{H}(t, 0)$, resuelve el corolario. ■

Definición 11.4 *Dado un recubridor (\tilde{X}, π) de X , un arco $\alpha: [0,1] \rightarrow X$ con punto inicial $x := \alpha(0)$ y un punto $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, denotaremos por $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}: [0,1] \rightarrow \tilde{X}$ al único levantamiento de α vía π con condición inicial \tilde{x} . Cuando sea preciso enfatizar la aplicación recubridora con la que se ejecuta el levantamiento escribiremos $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}^{\pi}$.*



Ahora estamos en condiciones de demostrar que el cardinal de la fibra de un punto no depende del punto elegido en la base del recubridor.

Corolario 11.5 *Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , $x, y \in X$ y $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ cualquier arco con $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Consideremos la aplicación*

$$\eta_{\alpha}: \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(y), \quad \eta_{\alpha}(\tilde{x}) := \tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1).$$

Entonces η_{α} es biyectiva, y en particular $\pi^{-1}(x)$ y $\pi^{-1}(y)$ tienen el mismo cardinal.

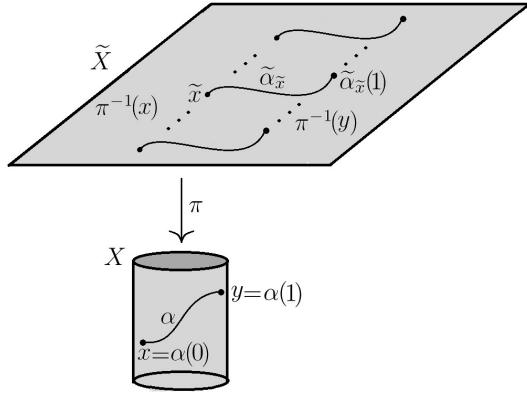
DEMOSTRACIÓN: Si β es un arco arbitrario en X y $\tilde{\beta}$ es un levantamiento arbitrario de β , la unicidad del levantamiento en el Lema 11.3 implica que

$$\overline{(\tilde{\beta})} = (\widetilde{\beta})_{\tilde{\beta}(1)}.$$

Por tanto, considerando $\eta_{\alpha}: \pi^{-1}(y) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ se tiene que

$$\eta_{\alpha}(\eta_{\alpha}(\tilde{x})) = \eta_{\alpha}(\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)) = (\widetilde{\alpha})_{\tilde{\alpha}_{\tilde{x}}(1)}(1) = \overline{(\tilde{\alpha}_{\tilde{x}})}(1) = \tilde{x}$$

y $\eta_{\alpha} \circ \eta_{\alpha} = \text{Id}_{\pi^{-1}(x)}$. Análogamente $\eta_{\alpha} \circ \eta_{\alpha} = \text{Id}_{\pi^{-1}(y)}$ y la aplicación $\eta_{\alpha}: \pi^{-1}(y) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ es la inversa de η_{α} . ■



El hecho de que el cardinal de $\pi^{-1}(x)$ no dependa del punto $x \in X$ motiva la siguiente definición.

Definición 11.6 (Número de hojas de un recubridor) *Dado un recubridor (\tilde{X}, π) de un espacio topológico X , llamaremos número de hojas del recubridor al cardinal de $\pi^{-1}(x)$, donde x es un punto arbitrario de X .*

Al igual que la propiedad del levantamiento de arcos motivó el concepto de número de hojas de un recubridor, la del levantamiento de homotopías nos ayudará a comprender la interacción entre el grupo fundamental de un recubridor y el de su espacio base.

Corolario 11.7 (Propiedad del levantamiento de homotopías) *Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , y sean $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Sean α y β arcos en X con $\alpha(0) = \beta(0) = x_0$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Supongamos que existe una homotopía H de α en β (con extremos fijos). Entonces:*

- Los arcos $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ y $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ dados en el Corolario 11.3 tienen los mismos extremos.
- La aplicación \tilde{H} dada en el Lema 11.2 es una homotopía de $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$ (con extremos fijos).

DEMOSTRACIÓN : Consideremos la aplicación \tilde{H} dada en el Lema 11.2 y los levantamientos $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ y $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ dados en el Corolario 11.3. Por la unicidad del Corolario 11.3, $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0} = \tilde{H}(\cdot, 0)$. Como $\tilde{H}(0, \cdot): [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ es un arco con punto inicial \tilde{x}_0 que se proyecta en el arco constante ϵ_{x_0} en X , por la unicidad del levantamiento de arcos concluimos que $\tilde{H}(0, \cdot)$ es el arco constante $\epsilon_{\tilde{x}_0}$ en \tilde{X} . Por tanto, la unicidad del Corolario 11.3 garantiza que $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0} = \tilde{H}(\cdot, 1)$. Finalmente, como $\tilde{H}(1, \cdot): [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ es un arco que se proyecta en $\epsilon_{\alpha(1)}$, la unicidad del levantamiento de arcos implica que $\tilde{H}(1, \cdot) = \epsilon_{\tilde{\alpha}(1)}$ en \tilde{X} . Uniendo toda esa información concluimos que \tilde{H} es una homotopía de $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}$ en $\tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}$ con extremos fijos, y en particular, $\tilde{\alpha}_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{x}_0}(1)$. ■

El último corolario expresa que arcos homotópicos en X se levantan a arcos homotópicos en \tilde{X} por la aplicación recubridora π . Este enunciado es la clave del Teorema de Monodromía, un resultado central para la teoría, que refleja el hecho de que el grupo fundamental del espacio recubridor se inyecta a través del homomorfismo inducido por la aplicación recubridora en el grupo fundamental del espacio base, siendo el subgrupo imagen único salvo conjugación.

Corolario 11.8 (Teorema de Monodromía) Si (\tilde{X}, π) un recubridor de X , $x \in X$ y $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$, entonces $\pi_*: \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \rightarrow \Pi_1(X, x)$ es un monomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ y $\tilde{\alpha}$ un lazo en \tilde{X} con base \tilde{x} . Si $\pi_*([\tilde{\alpha}]) = [\pi \circ \tilde{\alpha}] = [\epsilon_x]$, esto es, si $\pi \circ \tilde{\alpha} \simeq \epsilon_x$, entonces por el Corolario 11.7 inferios que $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\alpha}_{\tilde{x}} \simeq \epsilon_{\tilde{x}} \equiv (\tilde{\epsilon}_x)_{\tilde{x}}$. Esto implica que $[\tilde{\alpha}] = [\epsilon_{\tilde{x}}]$, y por tanto que π_* no tiene núcleo. ■

Corolario 11.9 Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X y sea $x \in X$. Sean $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$ y $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ es un arco con $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{x}_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{x}_2$. Entonces

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \star [\alpha],$$

donde α es el lazo $\pi \circ \tilde{\alpha}$ (con base x). Como consecuencia

$$\{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\}$$

es una clase de conjugación del subgrupos en $\Pi_1(X, x)$; ver Definición 3.7.

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposicion 4.11 la aplicación

$$\mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}: \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \rightarrow \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2), \quad \mathcal{U}_{\tilde{\alpha}}([\tilde{\beta}]) := [\tilde{\alpha}]^{-1} \star [\tilde{\beta}] \star [\tilde{\alpha}]$$

es un isomorfismo de grupos. Por tanto

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)) = \pi_*([\tilde{\alpha}]^{-1} \star \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1) \star [\tilde{\alpha}]) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) \star [\alpha].$$

De aquí que $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2))$ y $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1))$ sean subgrupos conjugados de $\Pi_1(X, x)$ para todo $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \in \pi^{-1}(x)$. Por último, si $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ es una clase de homotopía arbitraria, el mismo argumento anterior para $\tilde{x}_1 \equiv \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}(0), \tilde{x}_2 \equiv \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}(1) \in \pi^{-1}(x)$ y $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{\alpha}_{\tilde{x}_1}$ nos dice que

$$[\alpha]^{-1} \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_1)) [\alpha] = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_2)).$$

Por tanto $\{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\}$ es una clase de conjugación de subgrupos en $\Pi_1(X, x)$ como queríamos demostrar. ■

Como consecuencia de este corolario tiene sentido la siguiente

Definición 11.10 Denotemos por

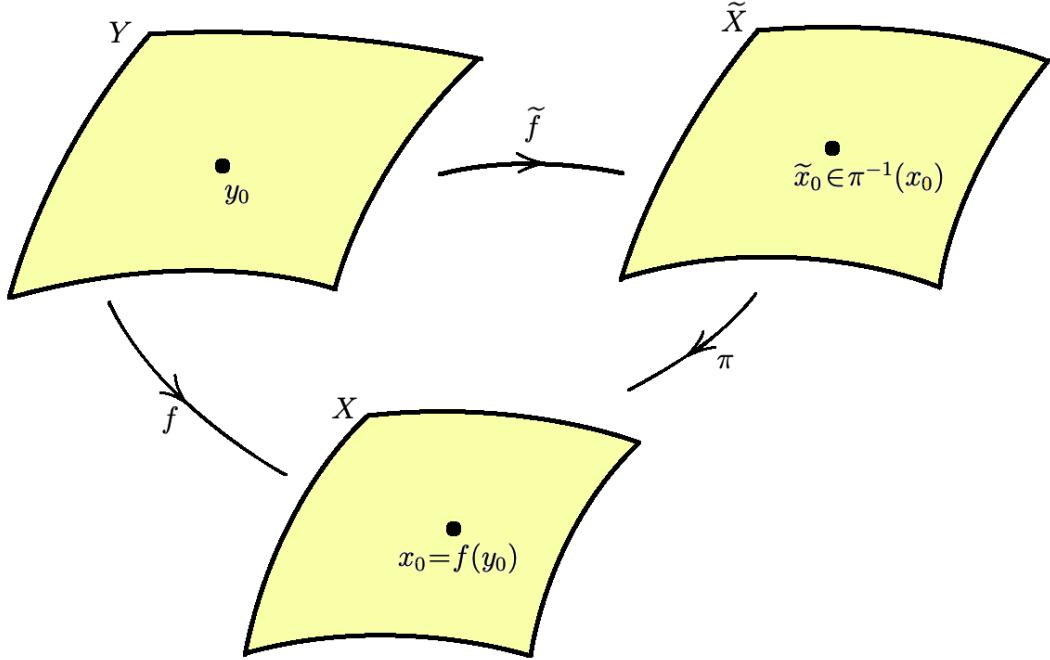
$$\text{Rec}(X) := \{(\tilde{X}, \pi) : (\tilde{X}, \pi) \text{ es recubridor de } X\}$$

al conjunto de los recubridores de X , y fijado $x \in X$ consideremos el conjunto $\mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$ de las clases de conjugación de subgrupos de $\Pi_1(X, x)$; ver Definición 3.7. Definiremos

$$\Delta_x: \text{Rec}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x)), \quad \Delta_x(\tilde{X}, \pi) := \{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})) : \tilde{x} \in \pi^{-1}(x)\}.$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema más general de existencia y unicidad de levantamientos de aplicaciones a un espacio recubridor, que contendrá como casos particulares a todos los hasta ahora vistos.

Teorema 11.11 (Levantamiento de aplicaciones) Sea $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora y sea $f: Y \rightarrow X$ una aplicación continua. Tomemos $y_0 \in Y$, llamemos $x_0 := f(y_0) \in X$ y fijemos $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. Los siguientes enunciados son equivalentes:



- (a) Existe $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ continua tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$ y $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ (la unicidad de una tal \tilde{f} está garantizada por la Proposición 11.1).
- (b) $f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$.

DEMOSTRACIÓN: La implicación (a) \Rightarrow (b) es consecuencia inmediata de la identidad $\pi \circ \tilde{f} = f$ y las propiedades de funtorialidad de los morfismos entre grupos fundamentales inducidos por aplicaciones continuas; ver Proposición 4.13. En efecto

$$f_*(\Pi_1(Y, y_0)) = \pi_* \left(\tilde{f}_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \right) \subset \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Probemos que (b) \Rightarrow (a).

Definamos la aplicación $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ por el siguiente procedimiento.

Por la arcoconexión de Y (ya que suponemos es conexo y localmente arcoconexo), para cada $y \in Y$ existe un arco $\gamma_y: [0, 1] \rightarrow Y$ con $\gamma_y(0) = y_0$ y $\gamma_y(1) = y$. Consideremos el arco $f \circ \gamma_y: [0, 1] \rightarrow X$, obviamente con $(f \circ \gamma_y)(0) = x_0$ y $(f \circ \gamma_y)(1) = f(y)$, y su levantamiento $(\tilde{f} \circ \gamma_y)_{\tilde{x}_0}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ a \tilde{X} . Por definición,

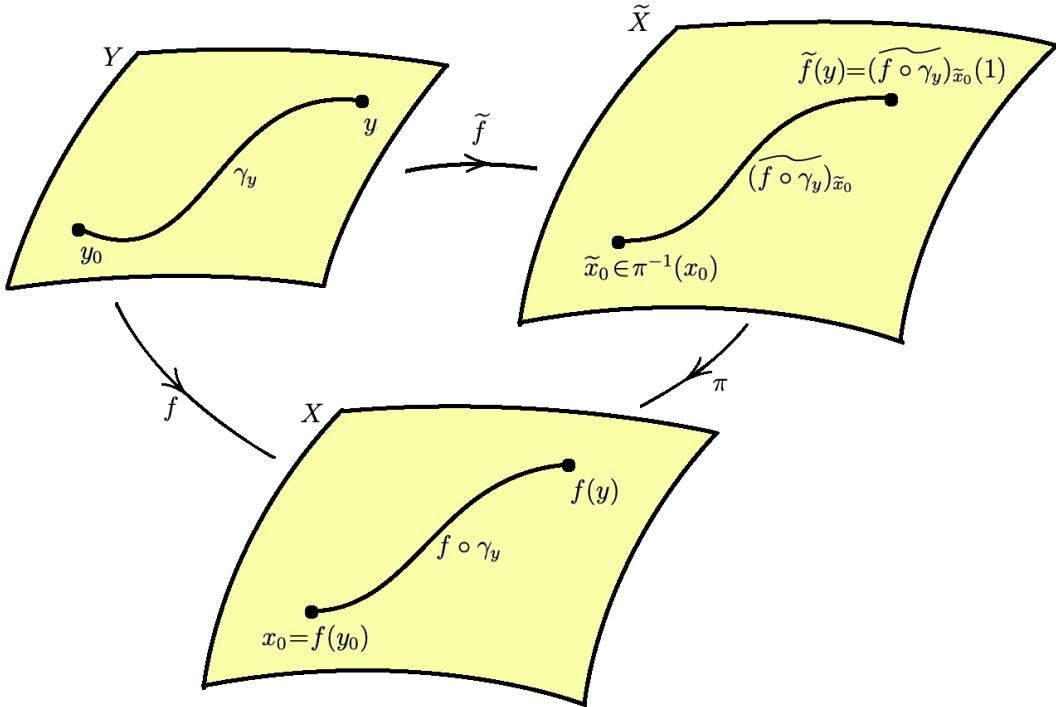
$$\tilde{f}(y) := (\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1).$$

Naturalmente esta definición plantea algunos problemas. El más inmediato es comprobar que $\tilde{f}(y)$ no depende del arco γ_y utilizado. Para ello consideremos cualquiera otro arco $\beta_y: [0, 1] \rightarrow Y$ con $\beta_y(0) = y_0$ y $\beta_y(1) = y$ y comprobemos que

$$(\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1) = (\widetilde{f \circ \beta_y})_{\tilde{x}_0}(1).$$

En efecto, $\gamma_y * \overline{\beta_y}$ es un lazo en Y con base el punto y_0 , y su clase de homotopía $[\gamma_y * \overline{\beta_y}]$ es de forma natural un elemento de $\Pi_1(Y, y_0)$. Por tanto $f \circ (\gamma_y * \overline{\beta_y}) = (f \circ \gamma_y) * (f \circ \overline{\beta_y})$ es un lazo en X con base x_0 y

$$[f \circ (\gamma_y * \overline{\beta_y})] = f_*([(y_0 * \overline{\beta_y})]) = [(f \circ \gamma_y) * (\overline{f \circ \beta_y})] \in f_*(\Pi_1(Y, y_0)) \subseteq \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$



donde para la última inclusión hemos tenido en cuenta nuestras hipótesis. Esto implica que existe un lazo $\tilde{\alpha}$ en \tilde{X} con base \tilde{x}_0 tal que $[(f \circ \gamma_y) \star (\overline{f \circ \beta_y})] = \pi_*([\tilde{\alpha}])$, esto es,

$$(f \circ \gamma_y) \star (\overline{f \circ \beta_y}) \simeq \pi \circ \tilde{\alpha}$$

donde la homotopía es con extremos fijos.

Del Corolario 11.7 deducimos que

$$\widetilde{((f \circ \gamma_y) \star (\overline{f \circ \beta_y}))}_{\tilde{x}_0} \simeq \tilde{\alpha},$$

homotopía con extremos fijos, y concluimos que $\widetilde{((f \circ \gamma_y) \star (\overline{f \circ \beta_y}))}_{\tilde{x}_0}$ ha de ser un lazo con base \tilde{x}_0 . Como

$$\widetilde{((f \circ \gamma_y) \star (\overline{f \circ \beta_y}))}_{\tilde{x}_0} = \widetilde{(f \circ \gamma_y)}_{\tilde{x}_0} \star \widetilde{(\overline{f \circ \beta_y})}_{(\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1)}$$

inferimos que $\widetilde{(\overline{f \circ \beta_y})}_{(\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1)}(1) = \tilde{x}_0$, de donde por la unicidad del levantamiento de arcos

$$\widetilde{(\overline{f \circ \beta_y})}_{(\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1)} = \widetilde{(\overline{f \circ \beta_y})}_{\tilde{x}_0}$$

al tratarse de dos arcos que se proyectan en $f \circ \beta_y$ y tienen el mismo punto final, a saber \tilde{x}_0 (ver Corolario 11.3 o Proposición 11.1). En particular también tienen el mismo punto inicial

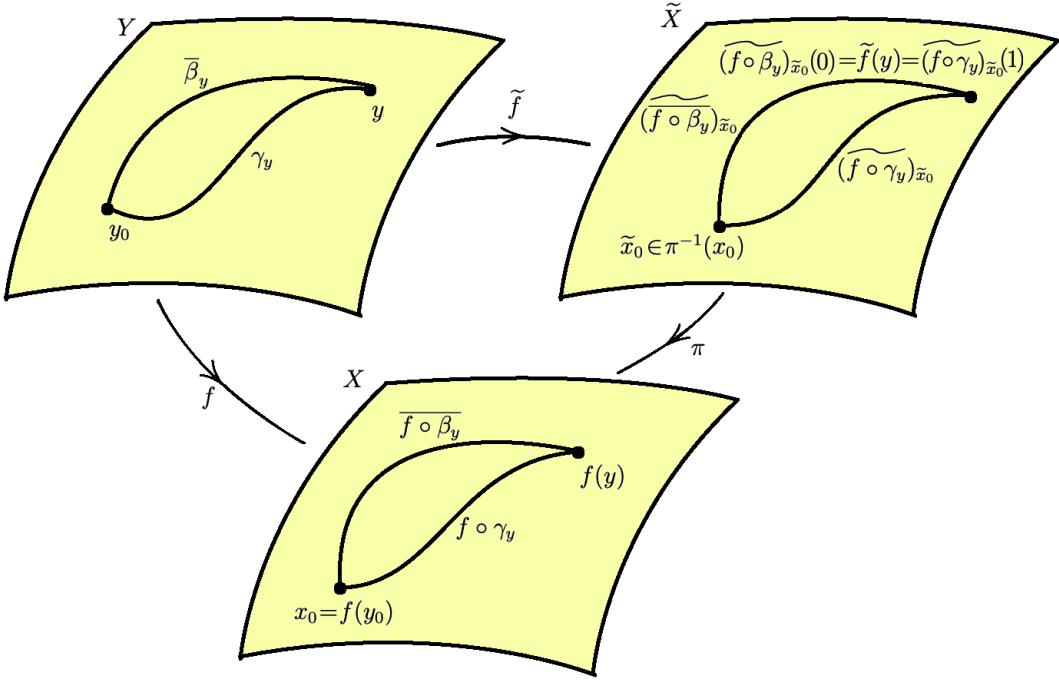
$$\widetilde{(\overline{f \circ \beta_y})}_{(\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1)}(0) = \widetilde{(\overline{f \circ \beta_y})}_{\tilde{x}_0}(0),$$

esto es,

$$\widetilde{(f \circ \gamma_y)}_{\tilde{x}_0}(1) = \widetilde{(f \circ \beta_y)}_{\tilde{x}_0}(1)$$

como queríamos demostrar.

Así pues $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ está bien definida. Es claro que $\tilde{f}(y_0) = \widetilde{(f \circ \epsilon_{y_0})}_{\tilde{x}_0}(1) = \epsilon_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$, por lo que para acabar resta probar que \tilde{f} es continua.



En efecto, tomemos $y \in Y$ y comprobemos la continuidad de \tilde{f} en y . Consideremos un entorno arbitrario \tilde{W} alrededor de $\tilde{f}(y)$ en \tilde{X} , y comprobemos que $\tilde{f}^{-1}(\tilde{W})$ es un entorno de y en Y . Como π es recubridora podemos encontrar un abierto arcoconexo $\tilde{U} \subset \tilde{W}$ tal que

- $\tilde{f}(y) \in \tilde{U}$ y
- $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U := \pi(\tilde{U})$ es un homeomorfismo; en particular $\tilde{U} \cap \pi^{-1}(f(y)) = \{\tilde{f}(y)\}$.

Al ser $f: Y \rightarrow X$ continua en y y U es un entorno de $f(y)$, $f^{-1}(U)$ es un entorno de y . En consecuencia existe un abierto arcoconexo $V \subset Y$ contenido en $f^{-1}(U)$. Para concluir bastará con probar que

$$V \subset \tilde{f}^{-1}(\tilde{W}), \text{ o equivalentemente, } \tilde{f}(V) \subset \tilde{W}.$$

Para ello consideramos $z \in V$, un arco $\gamma_z: [0, 1] \rightarrow V$ con $\gamma_z(0) = y$, $\gamma_z(1) = z$, y un arco $\gamma_y: [0, 1] \rightarrow Y$ con $\gamma_y(0) = y_0$, $\gamma_y(1) = y$. Sabemos que

$$\widetilde{((f \circ \gamma_y) * (f \circ \gamma_z))}_{\tilde{x}_0} = (\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0} * (\widetilde{f \circ \gamma_z})_{(\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1)},$$

y como $(\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{f}(y)$ por definición de \tilde{f}

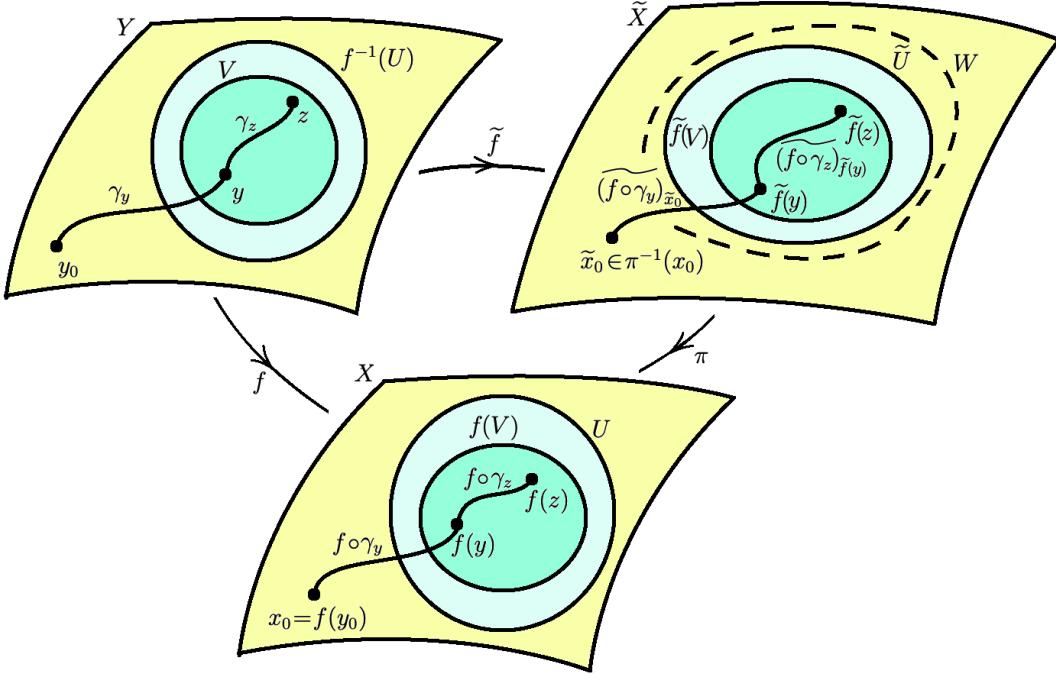
$$\tilde{f}(z) = \widetilde{((f \circ \gamma_y) * (f \circ \gamma_z))}_{\tilde{x}_0}(1) = ((\widetilde{f \circ \gamma_y})_{\tilde{x}_0} * (\widetilde{f \circ \gamma_z})_{\tilde{f}(y)})(1) = (\widetilde{f \circ \gamma_z})_{\tilde{f}(y)}(1).$$

Por otra parte, al ser γ_z un arco en V se tiene que $f \circ \gamma_z$ es un arco en $f(V) \subset U$, y de aquí que

$$(\widetilde{f \circ \gamma_z})_{\tilde{f}(y)} = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1} \circ (f \circ \gamma_z);$$

para comprobar esta identidad basta con tener en cuenta la unicidad del levantamiento de arco y notar que $(\pi|_{\tilde{U}})^{-1} \circ (f \circ \gamma_z)$ es un levantamiento de $f \circ \gamma_z$ satisfaciendo

$$(\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(\gamma_z(0))) = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(y)) = \tilde{U} \cap \pi^{-1}(f(y)) = \tilde{f}(y).$$



Esto nos permite concluir que

$$\tilde{f}(z) = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(\gamma_z(1))) = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}(f(z)) \in \tilde{U}.$$

Como esto es válido para todo $z \in V$, $\tilde{f}(V) \subset \tilde{U} \subset \tilde{W}$ como queríamos demostrar. ■

Corolario 11.12 Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , sea $A \subset X$ un subespacio topológico arcoconexo y denotemos por $i: A \rightarrow X$ a la aplicación inclusión. Supongamos que $i_*(\Pi_1(A, x)) \subset \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ para algunos $x \in A$ e $y \in \pi^{-1}(x)$.

Entonces $\pi|_{\tilde{A}}: \tilde{A} \rightarrow A$ es un homeomorfismo, donde \tilde{A} es la arcocomponente de $\pi^{-1}(A)$ que contiene a y .

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $i: A \rightarrow X$ a la aplicación inclusión. De nuestras hipótesis, por el Teorema 11.11 existe una única aplicación continua $\tilde{i}: A \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\pi \circ \tilde{i} = i$ e $\tilde{i}(x) = y$. Denotemos $\tilde{A} = \tilde{i}(A)$ e igualmente $\tilde{i}: A \rightarrow \tilde{A}$ a la restricción al codominio de i . La identidad $(\pi|_{\tilde{A}}) \circ \tilde{i} = \text{Id}_A$ garantiza que $(\pi|_{\tilde{A}})$ es sobreyectiva y \tilde{i} es inyectiva. Como \tilde{i} es claramente sobreyectiva inferimos que ambas aplicaciones son biyectivas. La Proposición 1.11-(d) implica que $\pi|_{\tilde{A}}$ es una identificación, luego un homeomorfismo. Esto también garantiza que $\tilde{i}: A \rightarrow \tilde{A}$ es un homeomorfismo (o de forma global, que $\tilde{i}: A \rightarrow \tilde{X}$ es un embebimiento topológico).

Para acabar bastará con ver que \tilde{A} (obviamente un arcoconexo conteniendo a y) es la arcocomponente de $\pi^{-1}(A)$ que contiene a y . En efecto, sea $z \in \pi^{-1}(A)$ un punto tal que existe $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \pi^{-1}(A)$ con $\tilde{\alpha}(0) = y$ y $\tilde{\alpha}(1) = z$. El arco $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ en X une los puntos $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = \pi(z) \in \pi(\pi^{-1}(A)) = A$, y $i \circ \alpha$ es el levantamiento de α vía π con condición inicial y , esto es, $i \circ \alpha = \tilde{\alpha}_y$. Por unicidad del levantamiento inferimos que $\tilde{i} \circ \alpha = \tilde{\alpha}$, y que en particular $z = \tilde{\alpha}(1) = \tilde{i}(\alpha(1)) \in \tilde{i}(A) = \tilde{A}$. ■

El Teorema 11.11 tiene una interesante aplicación a la teoría de Grupos Topológicos.

Proposición 11.13 Sea (G, \cdot) un grupo topológico con elemento neutro $e \in G$, sea $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ una aplicación recubridora y elijamos $\tilde{e} \in \pi^{-1}(e)$. Entonces \tilde{G} admite una

estructura de grupo topológico con elemento neutro \tilde{e} que convierte a π en un homomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Por ser (G, \cdot) un grupo topológico, las aplicaciones

$$\mu: G \times G \rightarrow G, \quad \mu(g, h) := g \cdot h, \quad \text{y} \quad \lambda: G \rightarrow G, \quad \lambda(g) := g^{-1},$$

son continuas. Consideremos

$$\hat{\mu}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G, \quad \hat{\mu}(\tilde{g}, \tilde{h}) = \pi(\tilde{g}) \cdot \pi(\tilde{h}), \quad \text{y} \quad \hat{\lambda}: \tilde{G} \rightarrow G, \quad \hat{\lambda}(\tilde{g}) = \pi(\tilde{g})^{-1}.$$

Es claro que $\hat{\mu} = \mu \circ (\pi \times \pi)$ y $\hat{\lambda} = \lambda \circ \pi$. Por tanto $\hat{\mu}$ y $\hat{\lambda}$ son continuas.

Teniendo en cuenta los isomorfismos naturales

$$\Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e})) \cong \Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}) \times \Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}), \quad \Pi_1(G \times G, (e, e)) \cong \Pi_1(G, e) \times \Pi_1(G, e),$$

es claro que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_*(\Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e}))) &= \mu_*((\pi \times \pi)_*(\Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e})))) = \\ &= \mu_*((\pi_* \times \pi_*)(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}) \times \Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))) = \\ &= \mu_*\left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})), \pi_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))\right) = \{[\alpha \cdot \beta] : [\alpha], [\beta] \in \pi_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))\}. \end{aligned}$$

Al ser (G, \cdot) un grupo topológico, $\alpha \cdot \beta \simeq \alpha \star \beta$ para cualesquiera lazos α y β basados en $e \in G$, y por tanto $[\alpha \cdot \beta] = [\alpha \star \beta]$ (ver la prueba del Teorema 5.4). Finalmente deducimos que

$$\hat{\mu}_*(\Pi_1(\tilde{G} \times \tilde{G}, (\tilde{e}, \tilde{e}))) = \{[\alpha \star \beta] : [\alpha], [\beta] \in \pi_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))\} = \pi_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})),$$

donde para la última igualdad se ha tenido en cuenta que $\pi_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e}))$ es un subgrupo de $\Pi_1(G, e)$.

Análogamente se probaría que

$$\hat{\lambda}_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})) = \pi_*(\Pi_1(\tilde{G}, \tilde{e})).$$

Como $\hat{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = e$ y $\hat{\lambda}(\tilde{e}) = e$, el Teorema 11.11 proporciona aplicaciones continuas

- $\tilde{\mu}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ tal que $\pi \circ \tilde{\mu} = \hat{\mu}$ y $\tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$, y
- $\tilde{\lambda}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ tal que $\pi \circ \tilde{\lambda} = \hat{\lambda}$ y $\tilde{\lambda}(\tilde{e}) = \tilde{e}$.

Denotemos por $p_1: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ y $p_2: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ a la primera y segunda proyecciones, respectivamente.

De la unicidad en el Teorema 11.11 es fácil comprobar que:

- Si $c_{\tilde{e}}: \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ representa la aplicación constante \tilde{e} , $\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times c_{\tilde{e}}) = p_1$ y $\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}} \times \text{Id}_{\tilde{G}}) = p_2$, esto es, $\tilde{\mu}(\tilde{g}, \tilde{e}) = \tilde{\mu}(\tilde{e}, \tilde{g}) = \tilde{g}$ para todo $\tilde{g} \in \tilde{G}$. En efecto, estas aplicaciones aplican $\tilde{e} \mapsto \tilde{e}$ y satisfacen $\pi \circ (\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times c_{\tilde{e}})) = \pi \circ p_1$, $\pi \circ (\tilde{\mu} \circ (c_{\tilde{e}} \times \text{Id}_{\tilde{G}})) = \pi \circ p_2$.

- Si $\hat{c}_{\tilde{e}}: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow \tilde{G}$ representa la aplicación constante \tilde{e} , $\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\lambda}) = \tilde{\mu} \circ (\tilde{\lambda} \times \text{Id}_{\tilde{G}}) = \hat{c}_{\tilde{e}}$, esto es, $\tilde{\mu}(\tilde{g}, \tilde{\lambda}(\tilde{g})) = \tilde{\mu}(\tilde{\lambda}(\tilde{g}), \tilde{g}) = \tilde{e}$ para todo $\tilde{g} \in \tilde{G}$. En efecto, estas aplicaciones aplican $\tilde{e} \mapsto \tilde{e}$ y satisfacen $\pi \circ (\tilde{\mu} \circ (\text{Id}_{\tilde{G}} \times \tilde{\lambda})) = \pi(\tilde{\mu} \circ (\tilde{\lambda} \times \text{Id}_{\tilde{G}})) = \hat{c}_e = \pi \circ \hat{c}_{\tilde{e}}$, donde $c_e: \tilde{G} \times \tilde{G} \rightarrow G$ denota la aplicación constante e .
- $\tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{\mu}(\tilde{g}_2, \tilde{g}_3)) = \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2), \tilde{g}_3)$ para cualesquiera $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3 \in \tilde{G}$. En efecto, la aplicación $f_1: \tilde{G}^3 \rightarrow \tilde{G}$, $f_1(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) := \tilde{\mu}(\tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2), \tilde{g}_3)$, es continua y satisface $(\pi \circ f_1)(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) = (\pi(\tilde{g}_1) \cdot \pi(\tilde{g}_2)) \cdot \pi(\tilde{g}_3)$, y análogamente la aplicación $f_2: \tilde{G}^3 \rightarrow \tilde{G}$, $f_2(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) := \tilde{\mu}(\tilde{g}_1, \tilde{\mu}(\tilde{g}_2, \tilde{g}_3))$, es continua y satisface $(\pi \circ f_2)(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \tilde{g}_3) = \pi(\tilde{g}_1) \cdot (\pi(\tilde{g}_2) \cdot \pi(\tilde{g}_3))$. Como $f_1(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e}) = f_2(\tilde{e}, \tilde{e}, \tilde{e}) = \tilde{e}$ se concluye que $f_1 = f_2$.

Por lo anterior se deduce que $\tilde{\mu}$ es una ley de composición interna en \tilde{G} que lo dota de estructura de grupo algebráico, siendo \tilde{e} su elemento neutro y $\tilde{\lambda}$ la aplicación que lleva cada elemento a su inverso en el grupo. Además la identidad $\pi \circ \tilde{\mu} = \hat{\mu}$ convierte a $\pi: \tilde{G} \rightarrow G$ en un homomorfismo de grupos. Esto concluye la prueba. ■

Para concluir esta sección probaremos el siguiente resultado general, que tendrá aplicaciones interesantes más adelante.

Proposición 11.14 *Sean $\pi_1: \tilde{X} \rightarrow Y$, $\pi_2: Y \rightarrow X$ aplicaciones continuas, sobreyectivas y abiertas tales que $\pi = \pi_2 \circ \pi_1: \tilde{X} \rightarrow X$ es recubridora. Entonces*

$$\pi_1: \tilde{X} \rightarrow Y \text{ es recubridora} \iff \pi_2: Y \rightarrow X \text{ es recubridora.}$$

DEMOSTRACIÓN : Consideremos un entorno distinguido U para el recubridor (\tilde{X}, π) . Como π_2 es sobreyectiva se tiene que $\pi_2^{-1}(U)$ es un abierto no vacío; fijemos $\emptyset \neq V$ una arcocomponente de $\pi_2^{-1}(U)$ arbitraria, y notemos que V es necesariamente abierto por la local-arcocomplejidad de Y . Análogamente, la sobreyectividad de π_1 implica que $\pi_1^{-1}(V)$ es un abierto no vacío, y fijemos una arcocomponente $\emptyset \neq W$ de $\pi_1^{-1}(V)$ arbitraria (como antes W es abierto).

Las inclusiones

$$W \subset \pi_1^{-1}(V) \subset \pi_1^{-1}(\pi_2^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)$$

implican que W está contenido en una arcocomponente \tilde{U} de $\pi^{-1}(U)$.

Como U es un entorno distinguido para el recubridor (\tilde{X}, π) y \tilde{U} es una arcocomponente de $\pi^{-1}(U)$, tenemos que $\pi_2(\pi_1(\tilde{U})) = \pi(\tilde{U}) = U$, y por tanto, que $\pi_1(\tilde{U}) \subseteq \pi_2^{-1}(U)$. De otra parte, la continuidad de π_1 y la arcocomplejidad de \tilde{U} implican que $\pi_1(\tilde{U})$ es arcocomplejo, y en consecuencia $\pi_1(\tilde{U})$ ha de estar contenido en una arcocomponente de $\pi_2^{-1}(U)$. Pero la inclusión $W \subseteq \pi_1^{-1}(V) \cap \tilde{U}$ garantiza que $\pi_1(W) \subseteq V \cap \pi_1(\tilde{U})$, por lo que $V \cap \pi_1(\tilde{U}) \neq \emptyset$ y la arcocomponente de $\pi_2^{-1}(U)$ conteniendo a $\pi_1(\tilde{U})$ ha de ser necesariamente V , esto es, $\pi_1(\tilde{U}) \subseteq V$. De aquí que $W \subseteq \tilde{U} \subset \pi_1^{-1}(V)$, y como W es una arcocomponente de $\pi_1^{-1}(V)$ y $\tilde{U} \subset \pi_1^{-1}(V)$ es arcocomplejo,

$$W = \tilde{U}.$$

En consecuencia tenemos un diagrama de aplicaciones continuas

$$\tilde{U} \xrightarrow{\pi_1|_{\tilde{U}}} V \xrightarrow{\pi_2|_V} U,$$

tal que $\pi|_{\tilde{U}} = (\pi_2|_V) \circ (\pi_1|_{\tilde{U}}): \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo, y por tanto

$$\pi_1|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow V \text{ es inyectiva y } \pi_2|_V: V \rightarrow U \text{ es sobreyectiva.}$$

Para probar \implies) supongamos que $\pi_1: \tilde{X} \rightarrow Y$ es un recubridor.

En este caso no es difícil ver que $\pi_1|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow V$ es sobreyectiva, y por tanto, al tratarse de aplicaciones continuas y abiertas, que

$$\pi_1|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow V \quad y \quad \pi_2|_V: V \rightarrow U$$

son homeomorfismos. En efecto, fijemos $y_0 \in \pi_1(\tilde{U}) \subset V$ y demostremos que todo punto $y \in V$ está en $\pi_1(\tilde{U})$. Como V es arcoconexo podemos encontrar un arco $\gamma \subset V$ con punto inicial y_0 y final y . Tomemos $\tilde{x}_0 \in \tilde{U} \cap \pi_1^{-1}(y_0)$ y denotemos por $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}^{\pi_1}$ al levantado de γ a \tilde{X} según π_1 . Es claro que $\pi \circ \tilde{\gamma} = \pi_2 \circ (\pi_1 \circ \tilde{\gamma}) = \pi_2 \circ \gamma$ y por tanto $\tilde{\gamma} = (\widetilde{\pi_2 \circ \gamma})_{\tilde{x}_0}^{\pi}$ es también el al levantado de $\pi_2 \circ \gamma$ según π . El hecho de que $\pi_2 \circ \gamma$ tenga traza en $\pi_1(V) \subseteq U$, un entorno distinguido para π , y que $\tilde{x}_0 \in \tilde{U}$, una arcocomponente de $\pi_1^{-1}(U)$, implican que

$$\tilde{\gamma} = (\widetilde{\pi_2 \circ \gamma})_{\tilde{x}_0}^{\pi} = (\pi|_{\tilde{U}})^{-1} \circ (\pi_2 \circ \gamma),$$

y por tanto $\tilde{\gamma}$ tiene traza en \tilde{U} . De aquí que

$$\pi_1 \circ \tilde{\gamma} = \pi_1 \circ \tilde{\gamma}_{\tilde{x}_0}^{\pi_1} = \gamma$$

sea un arco en $\pi_1(\tilde{U})$, y en particular $\gamma(1) = y \in \pi_1(\tilde{U})$ como queríamos demostrar.

Concluimos de todo lo anterior que para todo entorno distinguido $U \subseteq X$ para π y para toda V arcocomponente de $\pi_2^{-1}(U)$, la aplicación $\pi_2|_V: V \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Esto demuestra que (Y, π_2) es un recubridor de X .

Para probar \iff) supongamos que $\pi_2: Y \rightarrow X$ es un recubridor. En este caso, al inicio de la argumentación elegimos U para que sea entorno distinguido de (\tilde{X}, π) y (Y, π_2) . Por tanto $\pi_2|_V: V \rightarrow U$ y $\pi|_{\tilde{U}} = (\pi_2|_V) \circ (\pi_1|_{\tilde{U}}): \tilde{U} \rightarrow U$ son homeomorfismos, de donde

$$\pi_1|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow V$$

es también un homeomorfismo. Esto prueba la condición de recubridor para (\tilde{X}, π_1) con V como entorno distinguido. ■

12. La acción del grupo fundamental sobre la fibra

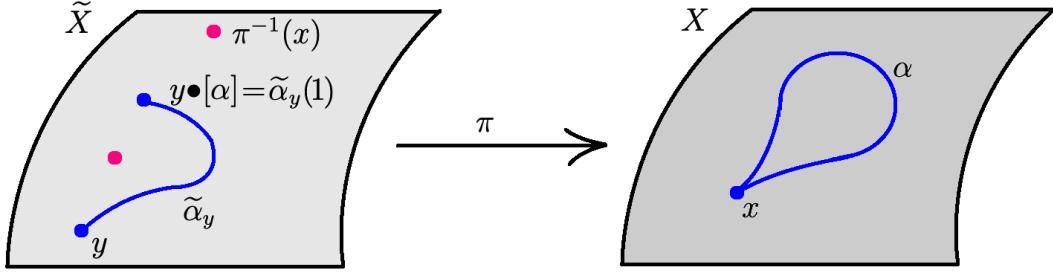
Vamos a comprobar que la fibra de un punto en un recubridor puede interpretarse como un cociente de grupos, y en ese sentido, naturalmente identificable con un espacio homogéneo. Expliquemos los detalles.

Teorema 12.1 *Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X , fijemos $x \in X$ y definamos la aplicación*

$$\bullet: \pi^{-1}(x) \times \Pi_1(X, x) \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad y \bullet [\alpha] := \tilde{\alpha}_y(1).$$

Entonces

- (a) $y \bullet [\epsilon_x] = y$ para todo $y \in \Pi_1(X, x)$.
- (b) $y \bullet ([\alpha] \star [\beta]) = (y \bullet [\alpha]) \bullet [\beta]$ para cualesquiera $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x)$.
- (c) Para cualesquiera $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ existe $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ tal que $y_1 \bullet [\alpha] = y_2$.



(d) $H_y := \{[\alpha] \in \Pi_1(X, x) : y \bullet [\alpha] = y\}$ coincide con $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$.

Sobre el enunciado comentaremos que los items (a)-(b) expresan que la aplicación $\bullet : \pi^{-1}(x) \times \Pi_1(X, x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$ es una *acción por la derecha* del grupo $\Pi_1(X, x)$ sobre la fibra $\pi^{-1}(x)$ de x . El item (c) expresa que esa acción es *transitiva*. Finalmente, el subgrupo $H_y := \{[\alpha] \in \Pi_1(X, x) : y \bullet [\alpha] = y\}$ de $\Pi_1(X, x)$ en el item (d) es conocido como el *subgrupo de isotropía* asociado a la acción \bullet en el punto $y \in \pi^{-1}(x)$.

DEMOSTRACIÓN: Lo primero que hemos de observar es que la acción está bien definida, esto es, que si $\beta \in [\alpha]$ entonces $\tilde{\beta}_y(1) = \tilde{\alpha}_y(1)$. Esto es consecuencia inmediata, por ejemplo, del Corolario 11.7.

La propiedad (a) es consecuencia trivial del hecho $(\tilde{\epsilon}_x)_y = \epsilon_y$ (unicidad del levantamiento de arcos). Para probar (b) primero observemos que $(\alpha * \beta)_y = \tilde{\alpha}_y * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)}$. En efecto, $\tilde{\alpha}_y * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)}$ es un arco en \tilde{X} con punto inicial y que se proyecta vía π en $\alpha * \beta$. Por unicidad del levantamiento, $\tilde{\alpha}_y * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)} = (\widetilde{\alpha * \beta})_y$. Por tanto

$$y \bullet ([\alpha] * [\beta]) = (\widetilde{\alpha * \beta})_y(1) = (\tilde{\alpha}_y * \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)})(1) = \tilde{\beta}_{\tilde{\alpha}_y(1)}(1) = \tilde{\alpha}_y(1) \bullet [\beta] = (y \bullet [\alpha]) \bullet [\beta].$$

Para ver (c) tomemos $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(X)$ y consideremos un arco cualquiera $\tilde{\alpha} : [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ con $\tilde{\alpha}(0) = y_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = y_2$. Si definimos $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$, es claro que α es un lazo en X con base el punto x y que $y_1 \bullet [\alpha] = \tilde{\alpha}(1) = y_2$.

Finalmente, para probar (d) fijemos un punto arbitrario $y \in \pi^{-1}(x)$ y $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$. Es claro que $[\alpha] \in H_y$ si y sólo si $\tilde{\alpha}_y(1) = y$, esto es si y sólo si $\tilde{\alpha}_y$ es un lazo en \tilde{X} con base el punto y (y por tanto $[\tilde{\alpha}_y] \in \Pi_1(\tilde{X}, y)$). En consecuencia, $[\alpha] \in H_y$ si y sólo si $[\alpha] = \pi_*([\tilde{\alpha}_y]) \in \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ y $H_y = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ como habíamos enunciado. ■

Como consecuencia trivial del Teorema 12.1 tenemos el siguiente

Corolario 12.2 Sea (\tilde{X}, π) un espacio recubridor de X , y fijemos $x \in X$.

Entonces para cada $y \in \pi^{-1}(x)$ la aplicación

$$\left(\Pi_1(X, x) / \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}} \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) * [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}_y(1),$$

es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\Psi : \left(\Pi_1(X, x) / \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}} \rightarrow \pi^{-1}(x)$ a la aplicación

$$\Psi \left(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) * [\alpha] \right) = \tilde{\alpha}_y(1).$$

Para cada $y' \in \pi^{-1}(y)$, la transitividad de la acción \bullet implica que existe $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ tal que $y \bullet [\alpha] = \tilde{\alpha}_y(1) = y'$, y por tanto

$$\psi\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \star [\alpha]\right) = y',$$

lo que prueba la sobreyectividad de Ψ .

Si $[\alpha], [\beta] \in \Pi_1(X, x)$ son tales que

$$\tilde{\alpha}_y(1) = \Psi\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \star [\alpha]\right) = \Psi\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \star [\beta]\right) = \tilde{\beta}_y(1),$$

entonces $\tilde{\alpha}_y \star \overline{\tilde{\beta}_y}$ es un lazo en \tilde{X} con base y , y por tanto

$$[\alpha] \star [\beta]^{-1} = [\alpha \star \overline{\beta}] = \pi_*([\tilde{\alpha}_y \star \overline{\tilde{\beta}_y}]) \in \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right).$$

De aquí que

$$\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \star [\alpha] = \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \star [\beta]$$

y la inyectividad de Ψ . ■

Es interesante conocer la interacción del concepto de recubridor con distintos invariantes topológicos como compacidad, axiomas de separación, axiomas de numerabilidad... Para nuestros intereses será suficiente con los siguientes resultados elementales.

Corolario 12.3 *Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X . Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (a) *Si \tilde{X} es compacto entonces (\tilde{X}, π) tiene un número finito de hojas.*
- (b) *Si \tilde{X} es simplemente conexo entonces $\Pi_1(X, x)$ es biyectivo con la fibra $\pi^{-1}(x)$ para cualquiera $x \in X$. Si además \tilde{X} es compacto entonces $\Pi_1(X, x)$ es finito.*
- (c) *Si X es compacto y (\tilde{X}, π) tiene un número finito de hojas entonces \tilde{X} es compacto.*

DEMOSTRACIÓN : Para probar (a) consideremos un recubrimiento abierto \mathcal{U} de X formado por entornos distinguidos para π , y denotemos por $\pi^{-1}(\mathcal{U})$ al recubrimiento por abiertos de \tilde{X} definido por todas las arcocomponentes de $\pi^{-1}(U)$ para todos los $U \in \mathcal{U}$. La compacidad de \tilde{X} garantiza la existencia de una cantidad finita de abiertos $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_n \in \pi^{-1}(\mathcal{U})$ tales que $\tilde{X} = \bigcup_{j=1}^n \tilde{U}_j$. Como $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ es sobreyectiva y $\pi|_{\tilde{U}_j}: \tilde{U}_j \rightarrow \pi(\tilde{U}_j)$ es biyectiva para todo j , la identidad $\tilde{X} = \bigcup_{j=1}^n \tilde{U}_j$ implica que cada punto $x \in X$ tiene a lo más n preimágenes por π . Esto prueba (a).

Para demostrar (b), observemos que la simple-conexión de \tilde{X} y el Corolario 12.2 garantizan que $\Pi_1(X, x) \rightarrow \pi^{-1}(x)$, $[\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}_y(1)$, es biyectiva. La segunda parte del ítem (b) se sigue trivialmente de (a).

Por último probemos (c). Llamemos k al número de hojas de (\tilde{X}, π) , y denotemos por \mathcal{U} a la familia de los entornos distinguidos en X para π (obviamente una base de la topología de X). Sea \mathcal{V} un recubrimiento por abiertos arbitrario de \tilde{X} . Por ser π recubridora con k hojas, para cada $x \in X$ existen $V_1^x, \dots, V_k^x \in \mathcal{V}$ tales que

- $\pi^{-1}(x) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j^x$ y
- $V_j^x \cap \pi^{-1}(x) \neq \emptyset$ para todo $j = 1, \dots, k$.

Al ser π abierta el conjunto $\bigcap_{i=1}^k \pi(V_i^x)$ es un abierto en X conteniendo a x , por lo que podemos elegir $U_x \in \mathcal{U}$ suficientemente pequeño para que

$$\tilde{U}_j^x := \pi^{-1}(U_x) \cap V_j^x \text{ sea una arcocomponente de } \pi^{-1}(U_x) \text{ para todo } j = 1, \dots, k.$$

Como $\pi^{-1}(x) \subset \bigcup_{j=1}^k V_j^x$ y $\pi|_{\tilde{U}_j^x}: \tilde{U}_j^x \rightarrow U_x$ es un homeomorfismo para todo $j = 1, \dots, k$, inferimos que

$$\pi^{-1}(U_x) \subseteq \bigcup_{j=1}^k V_j^x \quad \text{y} \quad U_x \subset \bigcap_{i=1}^k \pi(V_i^x).$$

Usando que $\{U_x: x \in X\}$ es un recubrimiento abierto del compacto X , han de existir $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{j=1}^m U_{x_j}$. Por tanto

$$\tilde{X} = \pi^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^m U_{x_j}\right) = \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^k \tilde{U}_j^{x_i}\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^m \left(\bigcup_{j=1}^k V_j^{x_i}\right),$$

lo que prueba que $\{V_j^{x_i}: i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k\}$ es un subrecubrimiento finito de \tilde{X} dentro de \mathcal{V} , y por tanto la compacidad de \tilde{X} . ■

Proposición 12.4 *Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X . Entonces:*

- (I) X Hausdorff $\implies \tilde{X}$ Hausdorff.
- (II) \tilde{X} II-Axioma de Numerabilidad $\implies X$ II-Axioma de Numerabilidad.
- (III) Si (\tilde{X}, π) tiene una cantidad numerable de hojas,

$$X \text{ II-Axioma de Numerabilidad} \implies \tilde{X} \text{ II-Axioma de Numerabilidad.}$$

DEMOSTRACIÓN: Probemos (i). Tomemos $y_1, y_2 \in \tilde{X}$, $y_1 \neq y_2$, y llamemos $x_j = \pi(y_j)$, $j = 1, 2$. Si $x := x_1 = x_2$, tomemos un entorno distinguido U para π que contenga a x , y observemos que las arcocomponentes \tilde{U}_{y_1} y \tilde{U}_{y_2} de $\pi^{-1}(U)$ que contienen a y_1 e y_2 , respectivamente, son abiertos disjuntos que separan y_1 e y_2 . En caso de que $x_1 \neq x_2$, como X es Hausdorff podemos tomar entornos abiertos $x_1 \in U_1$ y $x_2 \in U_2$ de x_1 y x_2 disjuntos y que sean distinguidos para π . En este caso las arcocomponentes \tilde{U}_{y_1} de $\pi^{-1}(U_1)$ y \tilde{U}_{y_2} de $\pi^{-1}(U_2)$, que contienen a y_1 e y_2 respectivamente, son abiertos disjuntos que separan y_1 e y_2 .

Probemos (ii). Supongamos que \tilde{X} es II-Axioma de Numerabilidad y fijemos una base numerable $\tilde{\mathcal{B}}$ de la topología de \tilde{X} . Como π es abierta, $\pi(\tilde{\mathcal{B}})$ es abierto de X para todo $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$. Definamos

$$\mathcal{B} := \{\pi(\tilde{B}): \tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}\}.$$

Claramente \mathcal{B} es una familia numerable de abiertos de X . Para acabar basta probar que \mathcal{B} es una base de la topología de X . En efecto, sea $x \in X$ y O un abierto arbitrario en X contenido a x . Recordemos que la familia

$$\mathcal{U} = \{U: U \text{ es entorno distinguido para } \pi\}$$

es una base de la topología en X , por lo que podemos tomar $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U \subset O$. Elijamos $y \in \pi^{-1}(x)$ y consideremos la arcocomponente \tilde{U} en $\pi^{-1}(U)$ que contiene a y . Como $\tilde{\mathcal{B}}$ es base de la topología en \tilde{X} , existe $\tilde{B} \in \tilde{\mathcal{B}}$ tal que $y \in \tilde{B} \subset \tilde{U}$, y por tanto $x \in \pi(\tilde{B}) \subset U \subset O$. Esto prueba que \mathcal{B} es base de la topología en X .

Finalmente probemos (iii). Supongamos ahora que X es II-Axioma de Numerabilidad y tomemos una base numerable \mathcal{B} de la topología de X . Como \mathcal{U} es una base de la topología en X , trivialmente

$$\mathcal{B}_0 = \{B \in \mathcal{B}: B \text{ es entorno distinguido para } \pi\} \subseteq \mathcal{B}$$

es una base numerable de la topología de X . Para cada $B \in \mathcal{B}_0$ elijamos un punto auxiliar $x_B \in B$ y escribamos $\pi^{-1}(B)$ como unión disjunta y *numerable* de sus arco-componentes de la siguiente forma $\pi^{-1}(B) = \cup_{y \in \pi^{-1}(x_B)} \tilde{B}_y$; téngase en cuenta que por hipótesis el conjunto $\pi^{-1}(x_B)$ es numerable. Definamos la familia de abiertos en \tilde{X}

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 := \bigcup_{B \in \mathcal{B}_0} \{\tilde{B}_y : y \in \pi^{-1}(x_B)\},$$

y observemos que $\tilde{\mathcal{B}}_0$ es numerable.

Para acabar demostremos que $\tilde{\mathcal{B}}_0$ es una base de la topología de \tilde{X} . En efecto, tomemos $\tilde{x} \in \tilde{X}$ y un abierto arbitrario \tilde{O} en \tilde{X} conteniendo a \tilde{x} . Llamemos $x = \pi(\tilde{x})$ y consideremos un entorno distinguido U para π tal que $x \in U$. Denotemos por \tilde{W} la arcocomponente de $\pi^{-1}(U) \cap \tilde{O}$ conteniendo a \tilde{x} , obviamente un subconjunto abierto de \tilde{X} . Como π es un homeomorfismo local, $\pi(\tilde{W})$ es un abierto arcoconexo en U conteniendo a x , y como además $U \in \mathcal{U}$ es claro que $\pi(\tilde{W}) \in \mathcal{U}$. Por tanto $\pi|_{\tilde{W}}: \tilde{W} \rightarrow \pi(\tilde{W})$ es un homeomorfismo. Elijamos $B \in \mathcal{B}_0$ con $x \in B \subset \pi(\tilde{W})$. Si $\tilde{B} \in \{\tilde{B}_y : y \in \pi^{-1}(x_B)\} \subset \tilde{\mathcal{B}}_0$ es la arcocomponente de $\pi^{-1}(B)$ que contiene a \tilde{x} , inferimos que $\tilde{B} = (\pi|_{\tilde{W}})^{-1}(B) \subset \tilde{W} \subset \tilde{O}$. Esto prueba que $\tilde{\mathcal{B}}_0$ es base de la topología de \tilde{X} y concluye la prueba. ■

Como consecuencia:

Corolario 12.5 *Si X un espacio topológico II-Axioma de Numerabilidad con grupo fundamental numerable y (\tilde{X}, π) es un recubridor de X entonces \tilde{X} es II-Axioma de Numerabilidad.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (\tilde{X}, π) un recubridor de X . Fijados $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, la aplicación

$$\Pi_1(X, x) \rightarrow \left(\Pi_1(X, x) / \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}}, \quad [\alpha] \mapsto \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha],$$

es sobreyectiva. La numerabilidad de $\Pi_1(X, x)$ implica por tanto la numerabilidad de $\left(\Pi_1(X, x) / \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}}$. Pero por el Corolario 12.2

$$\left(\Pi_1(X, x) / \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \right)_{\text{dcha}} \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha] \mapsto \tilde{\alpha}_y(1),$$

es biyectiva, de donde (\tilde{X}, π) tiene una cantidad numerable de hojas. El resultado se sigue de Proposición 12.4-(iii). ■

13. Transformaciones de recubridores

Como ocurre en cualquiera categoría matemática, es interesante establecer cuales son las transformaciones naturales para el concepto de recubridor. Esto nos llevará de forma natural al concepto de homomorfismo de recubridores, y por tanto, al de isomorfismo. Con este lenguaje podremos abordar de forma correcta el problema de clasificación de recubridores.

A modo de guión, los dos puntos centrales de esta sección serán:

- El estudio de los automorfismos de un recubridor, y como consecuencia, el de los recubridores regulares.
- Abordar el problema de clasificación de recubridores de un espacio topológico.

Recordemos que $\text{Rec}(X)$ denota el conjunto de todos los recubridores de un espacio X .

Comenzaremos con la siguiente definición fundamental.

Definición 13.1 Sean $(\tilde{X}_j, \pi_j) \in \text{Rec}(X)$, $j = 1, 2$.

- Un homomorfismo de recubridores Φ de (\tilde{X}_1, π_1) en (\tilde{X}_2, π_2) es una aplicación continua $\Phi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ satisfaciendo $\pi_2 \circ \Phi = \pi_1$.
- Un homomorfismo de recubridores Φ de (\tilde{X}_1, π_1) en (\tilde{X}_2, π_2) se dirá un isomorfismo de recubridores si Φ es un homeomorfismo.
- Si (\tilde{X}, π) es un recubridor de X , a los isomorfismos de (\tilde{X}, π) en (\tilde{X}, π) les llamaremos automorfismos de (\tilde{X}, π) .

Dados $(\tilde{X}_j, \pi_j) \in \text{Rec}(X)$, $j = 1, 2$, la expresión $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ indicará que Φ es un homomorfismo de recubridores entre ambos.

Observación 13.2 Sean $(\tilde{X}_j, \pi_j) \in \text{Rec}(X)$, $j = 1, 2, 3$.

- Si $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$, $\Psi: (\tilde{X}_2, \pi_2) \rightarrow (\tilde{X}_3, \pi_3)$ son homomorfismos de recubridores entonces $\Psi \circ \Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_3, \pi_3)$ es un homomorfismo de recubridores.
- Si $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ es un isomorfismo entre dos recubridores entonces $\Phi^{-1}: (\tilde{X}_2, \pi_2) \rightarrow (\tilde{X}_1, \pi_1)$ es un isomorfismo de recubridores.
- Si $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$ entonces $\text{Id}_{\tilde{X}}$ es un automorfismo de (\tilde{X}, π) .

Definición 13.3 Dado $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$, denotaremos por $\mathcal{A}(\tilde{X}, \pi)$ al grupo (respecto de la composición) de los automorfismos de (\tilde{X}, π) .

Es natural preguntarse por las propiedades básicas de los homomorfismos de recubridores y abordar el problema de existencia. Los siguientes corolarios, consecuencia inmediata del Teorema 11.11, dan una cumplida respuesta a estas cuestiones.

Corolario 13.4 Sean $(\tilde{X}_1, \pi_1), (\tilde{X}_2, \pi_2) \in \text{Rec}(X)$.

Si $\Phi, \Psi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ son homomorfismos de recubridores distintos, entonces $\Phi(y) \neq \Psi(y)$ para todo $y \in \tilde{X}_1$.

Como consecuencia, si (\tilde{X}, π) es un recubridor de X y $\Phi \in \mathcal{A}(\tilde{X}, \pi)$ es distinto de $\text{Id}_{\tilde{X}}$, entonces $\Phi(y) \neq y$ para todo $y \in \tilde{X}$.

Corolario 13.5 Sean $(\tilde{X}_1, \pi_1), (\tilde{X}_2, \pi_2) \in \text{Rec}(X)$, y sean $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$, $j = 1, 2$. Son ciertos los siguientes enunciados

- (I) Existe un homomorfismo $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ si y sólo si $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) \subseteq (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$.
- (II) Existe un isomorfismo $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ si y sólo si $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$.

DEMOSTRACIÓN: Para probar (I) basta recordar que el Teorema 11.11 nos dice que existe un levantamiento $\Phi: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ de $\pi_1: \tilde{X}_1 \rightarrow X$ vía π_2 con condición inicial $\Phi(y_1) = y_2$ si y sólo sí $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) \subseteq (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$.

Para probar (II), usemos (I) en los dos sentidos para garantizar que existen homomorfismos de recubridores $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ y $\Psi: (\tilde{X}_2, \pi_2) \rightarrow (\tilde{X}_1, \pi_1)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ y $\Psi(y_2) = y_1$ si y sólo si $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$. Por lo demás $\Psi = \Phi^{-1}$ toda vez que $\Psi \circ \Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_1, \pi_1)$ es un automorfismo de recubridores con fijando y_1 , y por tanto $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_{\tilde{X}_1}$ por el Corolario 13.4. ■

Una consecuencia de la Proposición 11.14 es que cualquier homomorfismo de recubridores es una aplicación recubridora.

Proposición 13.6 *Si $(\tilde{X}_j, \pi_j) \in \text{Rec}(X)$, $j = 1, 2$, y $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ un homomorfismo, entonces (\tilde{X}_1, Φ) es un recubridor de \tilde{X}_2 .*

DEMOSTRACIÓN: El resultado es trivial de la Proposición 11.14 si previamente justificamos que Φ es sobreyectiva y abierta (claramente π_2 lo es).

En efecto, sea $y_1 \in \tilde{X}_1$ un punto arbitrario, y llamemos $y_2 = \Phi(y_1)$ y $x = \pi(y_1) = \pi(y_2)$. Tomemos $U \subseteq X$ entorno distinguido para ambos recubridores (\tilde{X}_j, π_j) , $j = 1, 2$, y llamemos \tilde{U}_j a la arcocomponente de $\pi_j^{-1}(U)$ conteniendo a y_j , $j = 1, 2$. Como $\Phi(\tilde{U}_1)$ es arcoc conexo y $y_2 \in \pi_2(\Phi(\tilde{U}_1)) \subseteq \pi_1(\tilde{U}_1) = U$, deducimos que $\Phi(\tilde{U}_1) \subseteq U_2$. La identidad

$$\pi_1|_{\tilde{U}_1} = (\pi_2|_{\tilde{U}_2}) \circ (\Phi|_{\tilde{U}_1})$$

garantiza que

$$\Phi|_{\tilde{U}_1} = (\pi_2|_{\tilde{U}_2})^{-1} \circ \pi_1|_{\tilde{U}_1}$$

es un homeomorfismo. Esto implica que Φ es una aplicación abierta.

Para la sobreyectividad de Φ fijemos $y_1 \in \tilde{X}_1$, y tomemos $y_2 \in \tilde{X}_2$ arbitrario. Sea $\tilde{\alpha}$ un arco en \tilde{X}_2 con $\tilde{\alpha}(0) = \Phi(y_1)$ y $\tilde{\alpha}(1) = y_2$ y llamemos $\alpha = \pi_2 \circ \tilde{\alpha}$. El arco $\Phi \circ \tilde{\alpha}_{y_1}^{\pi_1}$ se proyecta en α vía π_2 y tiene por punto inicial $\tilde{\alpha}(0) = \Phi(y_1)$, de donde por la unicidad del levantamiento $\tilde{\alpha} = \Phi \circ \tilde{\alpha}_{y_1}^{\pi_1}$. En particular

$$y_2 = \tilde{\alpha}(1) = \Phi(\tilde{\alpha}_{y_1}^{\pi_1}(1)) \in \Phi(\tilde{X}_1).$$

Esto prueba la sobreyectividad de Φ . ■

Como consecuencia se tiene el siguiente

Corolario 13.7 *Sean $(\tilde{X}_1, \pi_1), (\tilde{X}_2, \pi_2) \in \text{Rec}(X)$, y sean $x \in X$ e $y_j \in \pi_j^{-1}(x)$, $j = 1, 2$. Si $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) \subseteq (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$ entonces \tilde{X}_1 recubre a \tilde{X}_2 .*

DEMOSTRACIÓN: Por Corolario 13.5 existe un homomorfismo $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ con $\Phi(y_1) = y_2$, y la Proposición 13.6 garantiza que (\tilde{X}_1, Φ) es un recubridor de \tilde{X}_2 . Esto concluye el corolario. ■

13.1. El grupo de automorfismos y la generación de nuevos recubridores.

En esta sección vamos a estudiar la acción natural del grupo de automorfismos de un recubridor sobre el espacio recubridor. Haremos especial énfasis en la familia de los recubridores regulares, esto es, aquellos para los que tal acción es transitiva.

Los detalles están contenidos en la siguiente

Proposición 13.8 *Si $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$ entonces la acción*

$$\mu: \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}, \quad (\Phi, y) \mapsto \Phi \cdot y := \Phi(y),$$

es propia y discontinua.

DEMOSTRACIÓN: Sea $y_0 \in \tilde{X}$ un punto arbitrario y llamemos $x = \pi(y_0) \in X$. Sea $U \subset X$ un entorno distinguido de x para π , y como siempre escribamos $\pi^{-1}(U)$ como unión de sus arcocomponentes:

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{y \in \pi^{-1}(x)} \tilde{U}_y,$$

donde $\tilde{U}_{y_1} \cap \tilde{U}_{y_2} = \emptyset$, $y_1 \neq y_2$, y $\pi|_{\tilde{U}_y}: \tilde{U}_y \rightarrow U$ es un homeomorfismo, $y \in \pi^{-1}(x)$.

Comprobemos que la condición de propia y discontinua para μ se satisface alrededor de y_0 con entorno distinguido \tilde{U}_{y_0} .

En efecto, observemos que si $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ entonces $\Phi(\tilde{U}_{y_0})$ es abierto y arcoconexo en $\pi^{-1}(U)$, y por tanto $\Phi(\tilde{U}_{y_0}) \subseteq \tilde{U}_{\Phi(y_0)}$. De aquí que $\pi|_{\tilde{U}_{y_0}} = (\pi|_{\tilde{U}_{\Phi(y_0)}}) \circ (\Phi|_{\tilde{U}_{y_0}})$ y $\Phi|_{\tilde{U}_{y_0}}: \tilde{U}_{y_0} \rightarrow \tilde{U}_{\Phi(y_0)}$ sea un homeomorfismo.

Para que la acción μ sea propia y discontinua, bastaría con ver que si $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ satisface $\Phi(\tilde{U}_{y_0}) \cap \tilde{U}_{y_0} \neq \emptyset$ entonces $\Phi = \text{Id}_{\tilde{X}}$. En efecto, en este caso las arcocomponentes $\Phi(\tilde{U}_{y_0}) = \tilde{U}_{\Phi(y_0)}$ y \tilde{U}_{y_0} de $\pi^{-1}(U)$ compartirían algún punto y serían iguales, de donde al ser Φ automorfismo de (\tilde{X}, π)

$$\Phi|_{\tilde{U}_{y_0}} = (\pi|_{\tilde{U}_{y_0}})^{-1} \circ (\pi|_{\tilde{U}_{y_0}}) = \text{Id}_{\tilde{U}_{y_0}}.$$

De aquí que Φ tiene puntos fijos (todos los de \tilde{U}_{y_0}) y $\Phi = \text{Id}_{\tilde{X}}$ (ver Corolario 13.4), lo que acaba la proposición. ■

Un corolario trivial de esta proposición nos lo proporcionan el Teorema 10.8 y la Proposición 11.14. Nos dará una herramienta fundamental para la construcción de recubridores a partir de subgrupos del grupo de los automorfismos. Para ello, habrá que tener en cuenta que un subgrupo arbitrario $G \leq \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ actúa de forma propia y discontinua sobre \tilde{X} por restricción de la acción μ en la Proposición 13.8.

Corolario 13.9 (Construcción de recubridores) *Consideremos $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$, $G \leq \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ un subgrupo y (\tilde{X}, π_0) el recubridor asociado al espacio de órbitas \tilde{X}/G :*

$$\pi_0: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G, \quad y \mapsto G \cdot y.$$

Entonces la única aplicación $\hat{\pi}: \tilde{X}/G \rightarrow X$ tal que $\hat{\pi} \circ \pi_0 = \pi$, esto es, la definida por

$$\hat{\pi}(G \cdot y) := \pi(y) \quad \text{para todo } G \cdot y \in \tilde{X}/G,$$

es recubridora.

DEMOSTRACIÓN: Obsérvese que $\hat{\pi}$ está bien definida porque $\pi \circ \Phi = \pi$ para todo $\Phi \in G$. El corolario es trivial de Proposición 11.14 una vez justifiquemos que $\hat{\pi}: \tilde{X}/G \rightarrow X$ es continua, abierta y sobreyectiva. La continuidad se sigue de que $\pi_0 \circ \hat{\pi} = \pi$ es continua que que en \tilde{X}/G tenemos la topología final para π_0 . La sobreyectividad de $\hat{\pi}$ es inmediata de la sobreyectividad de π . Finalmente, para comprobar que $\hat{\pi}$ es abierta recordemos que los entornos distinguidos \hat{U} para el recubridor (\tilde{X}, π_0) son una base de la topología de \tilde{X}/G , y probemos que $\hat{\pi}(\hat{U})$ es abierto en X para todo entorno distinguido \hat{U} de (\tilde{X}, π_0) . En efecto, fijado un entorno distinguido \hat{U} de (\tilde{X}, π_0) alrededor de un punto $G \cdot \tilde{x} \in \hat{U}$, sabemos que

$$\pi_0^{-1}(\hat{U}) = \bigcup_{g \in G} g \cdot \tilde{U}$$

donde \tilde{U} es un entorno distinguido alrededor de \tilde{x} para la acción $G \times \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$; en particular, $\pi_0|_{g \cdot \tilde{U}}: g \cdot \tilde{U} \rightarrow \hat{U}$ es un homeomorfismo para todo $g \in G$. Por tanto $U := \pi(\tilde{U})$ es un entorno distinguido para el recubridor (\tilde{X}, π) y \tilde{U} es la arcocomponente de $\pi^{-1}(U)$ que contiene a \tilde{x} . De aquí que

$$\hat{\pi}(\hat{U}) = \hat{\pi}(\pi_0(\tilde{U})) = \pi(\tilde{U}) = U$$

es abierto en X , y en consecuencia $\hat{\pi}$ es abierta. ■

La siguiente proposición explica como se comporta el grupo de automorfismos respecto al producto de recubridores.

Proposición 13.10 Sean $(\tilde{X}_1, \pi_1) \in \text{Rec}(X_1)$, $(\tilde{X}_2, \pi_2) \in \text{Rec}(X_2)$, y consideremos $(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2) \in \text{Rec}(X_1 \times X_2)$. Entonces la aplicación

$$\Lambda: \text{Aut}(\tilde{X}_1, \pi_1) \times \text{Aut}(\tilde{X}_2, \pi_2) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2), \quad \Lambda((\Phi_1, \Phi_2)) := \Phi_1 \times \Phi_2,$$

es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Si $\Phi_j \in \text{Aut}(\tilde{X}_j, \pi_j)$, $j = 1, 2$, es claro que

$$(\pi_1 \times \pi_2) \circ (\Phi_1 \times \Phi_2) = (\pi_1 \times \pi_2),$$

por lo que $\Phi_1 \times \Phi_2 \in \text{Aut}(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2)$ y Λ está bien definida. Trivialmente Λ es un monomorfismo de grupos, por lo que bastará con probar que es sobreyectiva.

Sea $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2)$, fijemos $(y_1, z_1) \in \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2$ y escribamos $\Phi((y_1, z_1)) = (y_2, z_2)$. Consideraremos las aplicaciones continuas

$$j_{z_1}: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \quad j_{y_2}(y) = (y, z_1), \quad \sigma_1: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1, \quad \sigma_1(y, z) = y,$$

y definamos

$$\Phi_1: \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_1, \quad \Phi_1 := \sigma_1 \circ \Phi \circ j_{z_1}.$$

Como $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2)$, los puntos (y, z_1) , $\Phi(y, z_1)$ se proyectan por $\pi_1 \times \pi_2$ en el mismo punto de $X_1 \times X_2$, y por tanto

$$\pi_1 \circ \Phi_1(y) = \pi_1(\sigma_1(\Phi(y, z_1))) = \pi_1(y).$$

Esto prueba que $\Phi_1: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_1, \pi_1)$ es un homomorfismo de recubridores.

Análogamente, si

$$i_{y_1}: \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \quad i_{y_1}(z) = (y_1, z), \quad \sigma_2: \tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2 \rightarrow \tilde{X}_2, \quad \sigma_2(y, z) = z,$$

la aplicación

$$\Phi_2: (\tilde{X}_2, \pi_2) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2), \quad \Phi_2 := \sigma_2 \circ \Phi \circ i_{y_1},$$

es un homomorfismo de recubridores.

Se concluye que

$$\Phi_1 \times \Phi_2: (\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2) \rightarrow (\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2)$$

es un homomorfismo de recubridores igualmente. Veamos que $\Phi_1 \times \Phi_2$ es un automorfismo y que coincide con Φ . En efecto, las identidades $\Phi_1(y_1) = y_2$ y $\Phi_2(z_1) = z_2$ implican que

$$(\Phi_1 \times \Phi_2)((y_1, z_1)) = (y_2, z_2) = \Phi((y_1, z_1))$$

y el Corolario 13.4 nos dice que $\Phi_1 \times \Phi_2 = \Phi$. Como Φ es biyectiva entonces Φ_j es inyectiva, y por tanto $\Phi_j \in \text{Aut}(\tilde{X}_j, \pi_j)$, $j = 1, 2$. De aquí que

$$\Lambda((\Phi_1, \Phi_2)) = \Phi_1 \times \Phi_2 = \Phi$$

como queríamos demostrar. ■

13.2. Recubridores regulares

El ánimo de esta sección es conectar el grupo de automorfismos de un recubridor (\tilde{X}, π) con elementos algebraicos expresables en términos del grupo fundamental del espacio base X , una idea recurrente en teoría de recubridores.

En este sentido probaremos que dado un recubridor (\tilde{X}, π) de X y puntos arbitrarios $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, existe una relación íntima entre el grupo $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ y el normalizador $N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)))$ del subgrupo $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ en $\Pi_1(X, x)$; ver la Definición 3.10. Este hecho motivará el concepto de recubridor regular, y será la clave para el correcto tratamiento del problema de existencia de recubridores de X como veremos más adelante.

Todo automorfismo Φ de un recubridor (\tilde{X}, π) de X respeta las fibras de los puntos, esto es, $\Phi(\pi^{-1}(x)) = \pi^{-1}(x)$ para todo $x \in X$. La siguiente proposición nos da la condición necesaria y suficiente para la existencia de un automorfismo conectando dos puntos de la fibra de un punto.

Proposición 13.11 *Sea $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$ y sean $x \in X$ e $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ puntos arbitrarios. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

- *Existe $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ (necesariamente único por el Corolario 13.4).*
- *Para cualquier arco $\tilde{\alpha}$ en \tilde{X} con $\tilde{\alpha}(0) = y_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = y_2$, el lazo $\alpha = \pi \circ \tilde{\alpha}$ satisface*

$$[\alpha] \in N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1))).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el Corolario 11.9 sabemos que

$$\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2)) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) \star [\alpha].$$

Por otro lado, el Corolario 13.5 nos dice que existe $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ con $\Phi(y_1) = y_2$ si y sólo si $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_2))$. Uniendo esos dos hechos deducimos que

$$\exists \Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \text{ con } \Phi(y_1) = y_2 \iff [\alpha]^{-1} \star \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)) \star [\alpha] = \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)),$$

lo que equivale a decir que $[\alpha]$ pertenezca al normalizador $N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)\right)\right)$ de $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)\right)$ en $\Pi_1(X, x)$. ■

Definición 13.12 Consideremos $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$ y fijemos $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$.

Dado un lazo $[\alpha] \in N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right) \leq \Pi_1(X, x)$, denotaremos por $\Phi([\alpha])$ al único automorfismo de (\tilde{X}, π) con $\Phi([\alpha])(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$ dado por la Proposición 13.11.

Asimismo, llamaremos Υ a la aplicación

$$\Upsilon: N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi), \quad \Upsilon([\alpha]) := \Phi([\alpha]).$$

El siguiente teorema explica con detalle la naturaleza de Υ , y como consecuencia nos permite interpretar el grupo $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ en función de los grupos fundamentales del recubridor y la base.

Teorema 13.13 Sean $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$, $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$. La aplicación

$$\Upsilon: N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi), \quad [\alpha] \mapsto \Phi([\alpha]),$$

es un epimorfismo de grupos con $\text{Ker}(\Upsilon) = \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)$. En particular, por el primer Teorema de isomorfía de grupos el homomorfismo inducido

$$\hat{\Upsilon}: N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right)/\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi), \quad \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \star [\alpha] \mapsto \Phi([\alpha]),$$

es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Probemos primero que Υ es un homomorfismo de grupos. Hemos de ver que para cualesquiera $[\alpha], [\beta] \in N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right)$,

$$\Phi([\alpha] \star [\beta]) = \Phi([\alpha]) \circ \Phi([\beta]).$$

Para ello consideremos el arco $\tilde{\alpha}_y \star (\Phi([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y)$ en \tilde{X} , bien definido ya que $\tilde{\alpha}_y(1) = \Phi([\alpha])(y) = \Phi([\alpha])(\tilde{\beta}_y(0))$. Como

$$\pi \circ (\tilde{\alpha}_y \star (\Phi([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y)) = (\pi \circ \tilde{\alpha}_y) \star (\pi \circ (\Phi([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y)) = (\pi \circ \tilde{\alpha}_y) \star (\pi \circ \tilde{\beta}_y) = \alpha \star \beta$$

y $(\tilde{\alpha}_y \star (\Phi([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y))(0) = \tilde{\alpha}_y(0) = y$, inferimos que $\tilde{\alpha}_y \star (\Phi([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y) = (\widetilde{\alpha \star \beta})_y$. De aquí que

$$\begin{aligned} \Phi([\alpha] \star [\beta])(y) &= \Phi([\alpha \star \beta])(y) = (\widetilde{\alpha \star \beta})_y(1) = (\tilde{\alpha}_y \star (\Phi([\alpha]) \circ \tilde{\beta}_y))(1) = \\ &= \Phi([\alpha])(\tilde{\beta}_y(1)) = \Phi([\alpha])(\Phi([\beta])(y)) = (\Phi([\alpha]) \circ \Phi([\beta]))(y), \end{aligned}$$

y por tanto $\Phi([\alpha] \star [\beta]) = \Phi([\alpha]) \circ \Phi([\beta])$ por el Corolario 13.4.

Veamos quer Υ es sobre. En efecto, sea $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, y)$ un automorfismo arbitrario. Consideremos $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ un arco con $\tilde{\alpha}(0) = y$ y $\tilde{\alpha}(1) = \Phi(y)$. Por los Corolarios 13.5 y 11.9,

$$\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) = \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, \Phi(y))\right) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right) \star [\alpha],$$

donde α es el lazo $\pi \circ \tilde{\alpha}$ (con base $x \in X$). Esto prueba que $[\alpha] \in N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right)$, y como claramente por definición $\Upsilon([\alpha]) = \Phi([\alpha]) = \Phi$, que Υ es sobreyectiva.

Por último determinemos el núcleo de Υ . Se tiene que $[\alpha] \in \text{Ker}(\Upsilon)$ si y sólo si $\Phi([\alpha]) = \text{Id}_{\tilde{X}}$, lo que por el Corolario 13.4 equivale a que $\Phi([\alpha])(y) = \tilde{\alpha}_y(1) = y$, esto es, a que $\tilde{\alpha}_y$ sea un lazo y $[\tilde{\alpha}_y] \in \Pi_1(\tilde{X}, y)$. Por tanto $[\alpha] \in \text{Ker}(\Upsilon)$ si y sólo si $[\alpha] = \pi_*([\tilde{\alpha}_y]) \in \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)$, lo que concluye la prueba. ■

Observación 13.14 Con la misma notación del Teorema 13.13, si $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ y $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ es tal que $\tilde{\alpha}_{y_1}(1) = y_2$, es fácil ver que

$$N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_2)\right)\right) = [\alpha]^{-1} \star N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)\right)\right) \star [\alpha].$$

Ambos subgrupos $N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)\right)\right)$ y $N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_2)\right)\right)$, conjugados en $\Pi_1(X, x)$, son isomorfos a $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$.

Para probar la observación, usar que $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_2)\right) = [\alpha]^{-1} \star \pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)\right) \star [\alpha]$.

Un caso particular especialmente interesante es cuando, con la notación anterior, el normalizador $N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right)$ coincide con $\Pi_1(X, x)$. En otras palabras, cuando $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$. Esto nos llevará de forma natural al concepto de recubridor regular.

Definición 13.15 Un recubridor (\tilde{X}, π) de un espacio X se dirá regular si existe $x \in X$ tal que la acción

$$\mu_x: \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \times \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(x), \quad (\Phi, y) \mapsto \Phi \cdot y := \Phi(y).$$

es transitiva, esto es, para todo $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ existe $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ tal que $\Phi(y_1) = y_2$.

Observación 13.16 μ_x es transitiva para algún $x \in X$ si y sólo si μ_x es transitiva para todo $x \in X$. Por tanto (\tilde{X}, π) es regular si y solo si μ_x es transitiva para todo $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: Si $x_1, x_2 \in X$ y $\alpha: [0, 1] \rightarrow X$ es un arco con $\alpha(0) = x_1$ y $\alpha(1) = x_2$, el Corolario 11.5 proporcionaba la biyección $\eta_\alpha: \pi^{-1}(x_1) \rightarrow \pi^{-1}(x_2)$, $\eta_\alpha(y) := \tilde{\alpha}_y(1)$. Como las fibras son invariantes por automorfismos y $\Phi \circ \tilde{\alpha}_y = \tilde{\alpha}_{\Phi(y)}$ para todo $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ e $y \in \pi^{-1}(x_1)$, deducimos que $\eta_\alpha \circ \Phi = \Phi \circ \eta_\alpha$ para todo automorfismo Φ de (\tilde{X}, π) . Por tanto la transitividad de μ_{x_1} es equivalente a la transitividad de μ_{x_2} . ■

Proposición 13.17 Sea $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$. Son equivalentes:

- (a) (\tilde{X}, π) es regular.
- (b) Para todo $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$.
- (c) Existen $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$ tales que $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$.

DEMOSTRACIÓN: (a) \implies (b). Supongamos que (\tilde{X}, π) es regular y tomemos $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$. Sea $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ y llamemos $z := \tilde{\alpha}_y(1)$. Por la transitividad de la acción μ_x sabemos que existe $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ tal que $\Phi(y) = z$, y por tanto $[\alpha] \in N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right)$ de la Proposición 13.11. Esto prueba que $N_0\left(\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)\right) = \Pi_1(X, x)$ y por tanto (b).

(b) \implies (c) es trivial.

(c) \implies (a). Supongamos existen $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$ tales que $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, y)\right)$ sea un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$, y por tanto $\pi_*\left(\Pi_1(\tilde{X}, z)\right)$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$ para todo $z \in \pi^{-1}(x)$ ya que se trata de subgrupos conjugados (ver el Corolario 11.9 o la Observación 13.14).

Tomemos dos puntos $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(x)$ y un arco $\tilde{\alpha}: [0, 1] \rightarrow \tilde{X}$ con $\tilde{\alpha}(0) = y_1$ y $\tilde{\alpha}(1) = y_2$. Si denotamos $\alpha := \pi \circ \tilde{\alpha}$ y tenemos en cuenta que $[\alpha] \in \Pi_1(X, x) = N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y_1)))$, la Proposición 13.11 de nuevo nos dice que existe $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ tal que $\Phi(y_1) = y_2$. Esto prueba que μ_x es transitiva y por tanto (a). ■

Si $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$ es un recubridor regular y $x \in X$ es un punto arbitrario, el subgrupo $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ de $\Pi_1(X, x)$ no depende del punto $y \in \pi^{-1}(X)$. En efecto, nótese que de la Proposición 13.17 el subgrupo $\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))$ de $\Pi_1(X, x)$ es normal para cualquier $y \in \pi^{-1}(X)$, y que cuando cambiamos de punto en la fibra de x este subgrupo cambia por conjugación (luego permanece invariante).

Corolario 13.18 *Si $(\tilde{X}_1, \pi_1) \in \text{Rec}(X_1)$, $(\tilde{X}_2, \pi_2) \in \text{Rec}(X_2)$ son recubridores regulares entonces $(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2) \in \text{Rec}(X_1 \times X_2)$ es un recubridor regular.*

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 13.10

$$\Lambda: \text{Aut}(\tilde{X}_1, \pi_1) \times \text{Aut}(\tilde{X}_2, \pi_2) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2), \quad \Lambda((\Phi_1, \Phi_2)) := \Phi_1 \times \Phi_2,$$

es un isomorfismo de grupos. Fijado $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, como (\tilde{X}_j, π_j) es regular sabemos que $\text{Aut}(\tilde{X}_j, \pi_j)$ actúa de forma transitiva sobre $\pi_j^{-1}(x_j)$, $j = 1, 2$, de donde trivialmente

$$\text{Aut}(\tilde{X}_1 \times \tilde{X}_2, \pi_1 \times \pi_2) = \left\{ \Phi_1 \times \Phi_2: \Phi_j \in \text{Aut}(\tilde{X}_j, \pi_j), j = 1, 2 \right\}$$

actúa transitivamente también en la fibra $(\pi_1 \times \pi_2)^{-1}((x_1, x_2))$ y se sigue el resultado. ■

El ejemplo más simple de recubridor regular nos lo dan los espacios de órbitas.

Ejercicio 13.19 *Si \tilde{X} es un espacio topológico y $G \leq \text{Hom}(\tilde{X})$ un subgrupo de homeomorfismos actuando de forma propia y discontinua sobre \tilde{X} , entonces la proyección $\pi_0: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ es un recubridor regular con $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi_0) = G$.*

Como consecuencia, todos los recubridores de los espacios

$$\mathbb{P}^n, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}, \text{cinta de Möbius infinita}, \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \text{ y la botella de Klein}$$

presentados como espacios de órbitas en el Ejercicio 10.9 son regulares, y sus grupos de automorfismos coinciden con el grupo que genera la acción en cada caso.

SOLUCIÓN: Basta con observar que la fibra de un punto genérico $G \cdot \tilde{x} \in \tilde{X}/G$ es el conjunto $\pi_0^{-1}(G \cdot \tilde{x}) = \{g(\tilde{x}): g \in G\}$, por lo que claramente la acción

$$G \times \pi_0^{-1}(G \cdot \tilde{x}) \rightarrow \pi_0^{-1}(G \cdot \tilde{x})$$

es transitiva. Para comprobar que $G = \text{Aut}(\tilde{X}, \pi_0)$ primero observemos que trivialmente $G \leq \text{Aut}(\tilde{X}, \pi_0)$ ya que $\pi_0 \circ g = \phi_0$ para todo $g \in G$. Además, si $\Phi \in \text{Aut}(\tilde{X}, \pi_0)$ entonces $\Phi(\tilde{x}) \in \pi_0^{-1}(G \cdot \tilde{x})$ y por tanto $\Phi(\tilde{x}) = g(\tilde{x})$ para algún $g \in G$, lo que implica que $\Phi = g \in G$ (ver Corolario 13.4). ■

De hecho, hay una conexión íntima entre recubridores regulares y espacios de órbitas como explica el siguiente corolario.

Corolario 13.20 Si $(\tilde{X}, \pi) \in \text{Rec}(X)$ es un recubridor regular, $x \in X$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, entonces:

- (I) $\hat{\Upsilon}: \Pi_1(X, x)/\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \rightarrow \text{Aut}(\tilde{X}, \pi), \quad \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)) \star [\alpha] \mapsto \Phi([\alpha]),$ es un isomorfismo de grupos.
- (II) Si $\pi_0: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ es la proyección al espacio de órbitas $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$, la única aplicación $\hat{\pi}: \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \rightarrow X$ tal que $\hat{\pi} \circ \pi_0 = \pi$ es un homeomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Por la Proposición 13.17 y la regularidad de (\tilde{X}, π) , el normalizador $N_0(\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y)))$ coincide con $\Pi_1(X, x)$ y el ítem (i) se sigue del Teorema 13.13.

Para el ítem (ii), hemos de probar que la aplicación

$$\hat{\pi}: \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \rightarrow X, \quad \text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \cdot y \mapsto \pi(y),$$

es un homeomorfismo. En efecto, sabemos que $\hat{\pi}$ es recubridora por el Corolario 13.9. Además, la transitividad de la acción μ_x para todo $x \in X$ implica que $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi) \cdot y = \pi^{-1}(\pi(y))$ para todo $y \in \tilde{X}$, y por tanto que $\hat{\pi}$ es biyectiva. De aquí el resultado. ■

Es interesante comparar el Corolario 13.9 y el Corolario 13.20.

El mensaje del anterior corolario es que, salvo el cambio de lenguaje que proporciona el homeomorfismo $\hat{\pi}$, el recubridor regular (\tilde{X}, π) se identifica con el recubridor (\tilde{X}, π_0) asociado a la proyección al espacio de órbitas $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$, siendo su grupo de automorfismos el que define la acción.

A modo de resumen de todo lo expuesto enunciaremos el siguiente:

Corolario 13.21 Si G es un grupo de homeomorfismos que actúa de forma propia y discontinua sobre un espacio \tilde{X} y $\pi_0: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G$ es la proyección al espacio de órbitas, entonces (\tilde{X}, π_0) es un recubridor regular de \tilde{X}/G y $\text{Aut}(\tilde{X}, \pi_0) = G$.

Recíprocamente, si (\tilde{X}, π) es un recubridor regular de X entonces el espacio de órbitas $\tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ es homeomorfo a X , y salvo ese homeomorfismo la proyección recubridora π no es sino la proyección $\pi_0: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/\text{Aut}(\tilde{X}, \pi)$ al espacio de órbitas.

13.2.1. No todo recubridor es regular

Ciertamente los recubridores regulares son de más fácil comprensión y permiten un tratamiento más agradable. Sin embargo no todo recubridor es regular. En este apartado vamos a explicar como la variable compleja nos proporciona una familia muy amplia de recubridores genéricamente no regulares, lo que nos ayudará a comprender que la regularidad no deja de ser una excepcionalidad.

En lo que sigue $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ denotará la esfera de Riemann (compactificación de Alexandrov del plano complejo \mathbb{C}), topológicamente equivalente a la esfera \mathbb{S}^2 vía la proyección estereográfica. Sea $P: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ una función polinómica de grado $k \geq 1$, llamemos A al conjunto de puntos $z \in \hat{\mathbb{C}}$ donde P presenta una ramificación (esto es, donde P no es localmente invertible). Obviamente $A = \emptyset$ si $k = 1$, y si $k \geq 2$ entonces A coincide con $\{z \in \mathbb{C}: P'(z) = 0\} \cup \{\infty\}$.

Denotemos por $X := \hat{\mathbb{C}} \setminus P(A) \subset \mathbb{C}$, y análogamente $Y := \hat{\mathbb{C}} \setminus P^{-1}(P(A)) \subset \mathbb{C}$ al complemento en $\hat{\mathbb{C}}$ de la P -saturación de A . Definamos

$$\pi: Y \rightarrow X, \quad \pi(z) := P(z).$$

El hecho de que π sea un homeomorfismo local (de hecho biholomorfismo local) y el Teorema Fundamental del Álgebra implican trivialmente que (Y, π) es un recubridor de k hojas de X .

Proposición 13.22 Si $\Phi \in \text{Aut}(Y, \pi)$ entonces Φ es (la restricción a Y de) una transformación de Möbius.

DEMOSTRACIÓN: Tomemos $\Phi \in \text{Aut}(Y, \pi)$. Como $\phi \circ \Phi = \phi$ y ϕ es un biholomorfismo local (esto es, una aplicación holomorfa $Y \rightarrow X$ con derivada no nula en todo punto), inferimos que $\phi: Y \rightarrow Y$ es un biholomorfismo global. En particular el Teorema de Weierstrass-Casorati nos dice que Φ no presenta singularidades esenciales en los puntos de $P^{-1}(P(A))$, y por tanto por el Teorema de las singularidades evitables de Riemann extiende holomorphicamente a los puntos de $P^{-1}(P(A))$. Nótese que este análisis se extiende al comportamiento local de Φ alrededor de ∞ , donde igualmente Φ no presenta una singularidad esencial. Por tanto Φ es la restricción a Y de una función racional $\hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ (cociente de polinomios), y como genéricamente es 1-1 ya que es un automorfismo de Y , inferimos que Φ ha de ser (la restricción de) una transformación de Möbius (de hecho de la forma $z \mapsto \lambda z + \mu$, $\lambda \neq 0$, ya que ha de fijar ∞ al ser $P \circ \Phi = P$). Esto prueba el resultado. ■

Corolario 13.23 Existen polinomios P para los que el recubridor (Y, π) no es regular.

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que una transformación de Möbius está determinada únicamente por la imagen de tres puntos, y en particular, tiene a lo más 3 puntos fijos. Elijamos P para que:

- A conste de al menos 3 puntos.
- Las ramificaciones de P en los puntos de A sean distintas dos a dos.

Es fácil encontrar polinomios satisfaciendo estas condiciones, por ejemplo $P(z) = 3z^4 - 4z^3$ o cualquier otro múltiplo de una primitiva del polinomio $z^2(z - 1)$.

Veamos que bajo estas dos condiciones $\text{Aut}(Y, \pi) = \{\text{Id}_Y\}$, y por tanto, que (Y, π) no es regular (su grupo de automorfismos no actúa de forma transitiva en la fibra de los puntos!!) En efecto, consideremos un automorfismo Φ de (Y, ϕ) arbitrario. La condición $\pi \circ \Phi = \pi$ implica que $P \circ \Phi = P$, y por tanto que Φ aplica puntos de ramificación de P en puntos de ramificación de P con la misma multiplicidad. Bajo nuestras hipótesis Φ ha de fijar todos los puntos de A . Como Φ es una transformación de Möbius (ver la Proposición 13.22) y el cardinal $\#A \geq 3$, deducimos que $\Phi = \text{Id}_Y$. ■

14. Existencia y clasificación de recubridores

Como consecuencia de los resultados anteriores podemos abordar el problema de existencia y clasificación de los recubridores de un espacio topológico. Para su correcto tratamiento se requiere fijar alguna notación.

En el conjunto $\text{Rec}(X)$ de todos los recubridores de X consideremos la relación de equivalencia *ser isomorfo*, que escribiremos por \cong , y escribamos el correspondiente conjunto cociente por

$$\mathcal{R}(X) := \text{Rec}(X)/\cong.$$

Aquí es conveniente tener en mente la notación de la Definición 11.10. En particular, recordar que dado un punto $x \in X$ se introdujo la aplicación

$$\Delta_x: \text{Rec}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x)), \quad \Delta_x(\tilde{X}, \pi) := \{\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, z)): z \in \pi^{-1}(x)\}.$$

En definitiva, $\Delta_x(\tilde{X}, \pi)$ es la clase de conjugación $[\pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, y))]$ para todo $y \in \pi^{-1}(x)$; ver Corolario 11.9.

El siguiente teorema prueba que Δ_x puede ser inducida al cociente $\mathcal{R}(X)$ convirtiéndose en una aplicación inyectiva, y por tanto que la familia $\mathcal{R}(X)$ está estrechamente ligada con $\mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$.

Teorema 14.1 Sean $(\tilde{X}_1, \pi_1), (\tilde{X}_2, \pi_2) \in \mathcal{R}(X)$. Son equivalentes:

- (I) $(\tilde{X}_1, \pi_1) \cong (\tilde{X}_2, \pi_2)$.
- (II) $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ para todo $x \in X$.
- (III) $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ para algún $x \in X$.

En particular, para todo $x \in X$ la aplicación

$$\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x)), \quad \hat{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) := \Delta_x(\tilde{X}, \pi),$$

inducida por Δ_x en el cociente $\mathcal{R}(X)$ es inyectiva.

DEMOSTRACIÓN: (i) \implies (ii). Supongamos que (\tilde{X}_1, π_1) y (\tilde{X}_2, π_2) son isomorfos y sea $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ un isomorfismo de recubridores. Sea $x \in X$ arbitrario, tomemos $y_1 \in \pi_1^{-1}(x)$ y consideremos $y_2 := \Phi(y_1) \in \pi_2^{-1}(x)$. Por el Corolario 13.5-(ii) inferimos que $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$, de donde $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$.

(ii) \implies (iii). Trivial.

(iii) \implies (i). Supongamos que $\Delta_x(\tilde{X}_1, \pi_1) = \Delta_x(\tilde{X}_2, \pi_2)$ para algún $x \in X$. Esto quiere decir que, dados cualesquiera $z_1 \in \pi_1^{-1}(x)$ e $y_2 \in \pi_2^{-1}(x)$, los subgrupos $(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, z_1))$ y $(\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2))$ son conjugados en $\Pi_1(X, x)$. Por tanto existe $[\alpha] \in \Pi_1(X, x)$ tal que

$$(\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2)) = [\alpha]^{-1} \star (\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, z_1)) \star [\alpha].$$

Si llamamos $y_1 := \tilde{\alpha}_{z_1}^{\pi_1}(1)$, el Corolario 11.9 garantiza que

$$(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = [\alpha]^{-1} \star (\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, z_1)) \star [\alpha],$$

y por tanto

$$(\pi_1)_*(\Pi_1(\tilde{X}_1, y_1)) = (\pi_2)_*(\Pi_1(\tilde{X}_2, y_2)).$$

El Corolario 13.5-(ii) nos permite concluir que existe $\Phi: (\tilde{X}_1, \pi_1) \rightarrow (\tilde{X}_2, \pi_2)$ isomorfismo con $\Phi(y_1) = y_2$, como queríamos demostrar. ■

Ejercicio 14.2 Determinar todos los recubridores de \mathbb{S}^1 .

SOLUCIÓN: Sabemos que $\Pi_1(\mathbb{S}^1, (1, 0)) = F([\alpha_1]) \cong \mathbb{Z}$, donde

$$\alpha_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^1, \quad \alpha_1(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

También sabemos que las siguientes aplicaciones son recubridoras de \mathbb{S}^1 :

- $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\rho(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, y con notación compleja
- $\pi_k: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\pi_k(z) = z^k$.

Por simplicidad llamemos $x = (1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Como $\Pi_1(\mathbb{S}^1, x)$ es abeliano es claro que $\mathcal{S}_c(\Pi_1(\mathbb{S}^1, x)) = \text{Sub}(\Pi_1(\mathbb{S}^1, x))$, por lo que del Teorema 14.1 la aplicación

$$\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(\mathbb{S}^1) \rightarrow \text{Sub}(\Pi_1(\mathbb{S}^1, x)), \quad \hat{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) := \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, z)), \quad (z \in \pi^{-1}(x) \text{ arbitrario}),$$

es inyectiva. Un cálculo directo nos da que

$$\hat{\Delta}_x([(R, \rho)]) = \{\rho_*([\epsilon_0])\} = \{[\epsilon_x]\}, \quad \hat{\Delta}_x([(S^1, \pi_k)]) = (\pi_k)_*(F([\alpha_1])) = F([\alpha_1]^k), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Como por álgebra elemental se tiene que

$$\text{Sub}(\Pi_1(\mathbb{S}^1, x)) = \{F([\alpha_1]^k) : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\{[\epsilon_x]\}\} \equiv \{k\mathbb{Z} : k \in \mathbb{N}\} \cup \{\{0\}\},$$

deducimos que $\hat{\Delta}_x$ es sobreductiva, luego biyectiva. En conclusión

$$\{(R, \rho)\} \cup \{(S^1, \pi_k) : k \in \mathbb{N}\}$$

son todos los recubridores de \mathbb{S}^1 salvo isomorfismos. ■

Ejercicio 14.3 Determinar todos los recubridores de \mathbb{P}^n , $n \geq 2$.

SOLUCIÓN: Recordemos que \mathbb{P}^n es el espacio de órbitas \mathbb{S}^n/G , donde $G = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n}, A\}$ es el grupo generado por la aplicación antípoda

$$A: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad A(x) = -x.$$

Sea $\pi_0: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n/G$ la correspondiente proyección, y consideremos los puntos $q = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$ y $p = \pi_0(q) \in \mathbb{P}^n$. Si tomamos el arco en \mathbb{S}^n con punto inicial q

$$\beta: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad \beta(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0, \dots, 0),$$

el lazo $\alpha = \pi_0 \circ \beta$ con base p en \mathbb{P}^n genera $\Pi_1(\mathbb{P}^n, p)$ y

$$\Phi_1(\mathbb{P}^n, p) = F([\alpha])/F([\alpha]^2) \cong \mathbb{Z}_2.$$

Las siguientes aplicaciones son recubridoras de \mathbb{P}^n :

$$\pi_0: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n, \quad \text{Id}_{\mathbb{P}^n}: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^n.$$

Como $\Pi_1(\mathbb{P}^n, p)$ es abeliano es claro que $\mathcal{S}_c(\Pi_1(\mathbb{P}^n, p)) = \text{Sub}(\Pi_1(\mathbb{P}^n, p))$, por lo que del Teorema 14.1 la aplicación

$$\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(\mathbb{P}^n) \rightarrow \text{Sub}(\Pi_1(\mathbb{P}^n, p)), \quad \hat{\Delta}_x([\tilde{X}, \pi]) := \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, z)), \quad (z \in \pi^{-1}(x) \text{ arbitrario}),$$

es inyectiva. Un cálculo directo nos da que

$$\hat{\Delta}_x([\mathbb{S}^n, \pi_0]) = \{(\pi_0)_*([\epsilon_q])\} = \{[\epsilon_p]\}, \quad \hat{\Delta}_x([\mathbb{P}^n, \text{Id}_{\mathbb{P}^n}]) = (\text{Id}_{\mathbb{P}^n})_*(\Pi_1(\mathbb{P}^n, p)) = \Pi_1(\mathbb{P}^n, p)$$

Como por álgebra elemental se tiene que

$$\text{Sub}(\Pi_1(\mathbb{P}^n, p)) = \text{Sub}(F([\alpha])/F([\alpha]^2)) = \{F([\alpha])/F([\alpha]^2)\} \cup \{\{[\epsilon_p]\}\} \equiv \{\mathbb{Z}_2\} \cup \{\{0\}\},$$

deducimos que $\hat{\Delta}_x$ es sobreductiva, luego biyectiva. En conclusión

$$\{(\mathbb{S}^n, \pi_0)\} \cup \{(\mathbb{P}^n, \text{Id}_{\mathbb{P}^n})\}$$

son todos los recubridores de \mathbb{P}^n salvo isomorfismos. ■

Intuitivamente, el conjunto $\mathcal{R}(X)$ es más rico cuanto mayor sea la imagen de la aplicación $\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$, $x \in X$, siendo la situación óptima cuando $\hat{\Delta}_x$ es biyectiva. Nuestro principal objetivo será demostrar que tal biyectividad de $\hat{\Delta}_x$ dependerá en exclusiva de que $\text{Rec}(X)$ contenga un recubridor simplemente conexo, esto es, de que la imagen $\hat{\Delta}_x(\mathcal{R}(X))$ contenga la clase del neutro $\{[\epsilon_x]\}$. La definición central de esta sección es la siguiente:

Definición 14.4 Un recubridor (Y, π) de X se dirá universal si $\Pi_1(Y) \cong \{0\}$, o equivalentemente, si $\hat{\Delta}_x([(Y, \pi)]) = \{[\epsilon_x]\}$ para algún (luego para todo) $x \in X$; téngase en cuenta el Teorema de Mondromía (Corolario 11.8).

Como consecuencia del Teorema 14.1, el recubridor universal de X , de existir, está únicamente determinado salvo isomorfismos. El siguiente corolario recopila algunas de las propiedades básicas del recubridor universal, entre ellas el porqué de este calificativo (ver item (a)).

Corolario 14.5 Si X admite recubridor universal (Y, π_0) , entonces:

- (a) Y recubre a \tilde{X} para cualquier recubridor (\tilde{X}, π) de X .
- (b) (Y, π_0) es un recubridor regular.
- (c) Si $x \in X$ e $y \in \pi_0^{-1}(x)$, la aplicación $\hat{\Upsilon}: \Pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(Y, \pi_0)$, $[\alpha] \mapsto \Phi([\alpha])$, dada en el Corolario 13.20 es un isomorfismo de grupos.

DEMOSTRACIÓN: Probemos (a). Si (Y, π_0) es recubridor universal de X , (\tilde{X}, π) un recubridor de X , $x \in X$, $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$ e $y \in \pi_0^{-1}(x)$, la condición

$$(\pi_0)_*(\Pi_1(Y, y)) = (\pi_0)_*(\{[\epsilon_y]\}) = \{[\epsilon_x]\} \subseteq \pi_*(\Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x})),$$

requerida en Corolario 13.7 es inmediata, por lo que el resultado se sigue trivialmente.

Item (b) se sigue trivialmente de la Proposición 13.17, ya que $(\pi_0)_*(\Pi_1(Y, y)) = \{[\epsilon_x]\}$ es un subgrupo normal de $\Pi_1(X, x)$ para cualesquiera $x \in X$ e $y \in \pi_0^{-1}(x)$.

El item (c) se sigue igualmente del Corolario 13.20. ■

Podemos ahora demostrar uno de los resultados centrales de este tema.

Teorema 14.6 Un espacio topológico X admite recubridor universal sí y sólo sí la aplicación $\hat{\Delta}_x: \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$ es biyectiva para algún (luego para cualquier) $x \in X$.

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 14.1, la aplicación $\hat{\Delta}_x$ es inyectiva para todo $x \in X$.

Si $\hat{\Delta}_x$ es biyectiva para algún $x \in X$ entonces existe $[(Y, \pi)] \in \mathcal{R}(X)$ tal que $\hat{\Delta}_x([(Y, \pi)]) = \{[\epsilon_x]\} \in \hat{\Delta}_x(\mathcal{R}(X))$, esto es, $\pi_*(\Pi_1(Y, y)) = \{[\epsilon_x]\}$ para todo $y \in \pi^{-1}(x)$. Por tanto $\Pi_1(Y, y) = \{[\epsilon_y]\}$, $y \in \pi^{-1}(x)$, y (Y, π) es un recubridor universal de X .

Supongamos ahora que X admite recubridor universal (Y, π) y veamos que $\hat{\Delta}_x$ es sobreyectiva (y por tanto biyectiva). Fijemos $y \in \pi^{-1}(x)$. Por el Corolario 14.5 la aplicación

$$\hat{\Upsilon}: \Pi_1(X, x) \rightarrow \text{Aut}(Y, \pi), \quad [\alpha] \mapsto \Phi([\alpha]),$$

es un isomorfismo de grupos, donde recordemos $\Phi([\alpha])$ es el único automorfismo de (Y, π) con $\Phi([\alpha])(y) = \tilde{\alpha}_y(1)$.

Tomemos un subgrupo arbitrario $H \leq \Pi_1(X, x)$ y su clase de conjugación $[H] \in \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, x))$. Consideremos el grupo de automorfismos $G_H := \hat{\Upsilon}(H) \leq \text{Aut}(Y, \pi)$, la proyección al espacio de órbitas $\pi_0: Y \rightarrow \hat{X} := Y/G_H$ y el recubrimiento $\hat{\pi}: \hat{X} \rightarrow X$ satisfaciendo $\hat{\pi} \circ \pi_0 = \pi$; ver Corolario 13.9.

Nuestro objetivo es probar que $\hat{\Delta}_x(\hat{X}, \hat{\pi}) = [H]$, para lo cual será suficiente con demostrar que

$$\hat{\pi}_*(\Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y))) = H.$$

Usando que $\hat{\Upsilon}$ es un isomorfismo y que $G_H = \hat{\Upsilon}(H)$,

$$\begin{aligned} [\alpha] \in H &\iff \Phi([\alpha]) \in G_H \iff \Phi([\alpha])(y) = \tilde{\alpha}_y^\pi(1) = \Phi(y) \text{ para algún } \Phi \in G_H \iff \\ &\iff \pi_0 \circ \tilde{\alpha}_y^\pi \text{ es lazo con base } \pi_0(y) \text{ en } \hat{X} \text{ y } [\pi_0 \circ \tilde{\alpha}_y^\pi] \in \Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y)). \end{aligned}$$

Pero por el Teorema de Monodromía (Corolario 11.8)

$$[\pi_0 \circ \tilde{\alpha}_y^\pi] \in \Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y)) \iff \hat{\pi}_*([\pi_0 \circ \tilde{\alpha}_y^\pi]) = [\pi \circ \tilde{\alpha}_y^\pi] = [\alpha] \in \hat{\pi}_*(\Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y))).$$

En conclusión

$$[\alpha] \in H \iff [\alpha] \in \hat{\pi}_*(\Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y))),$$

esto es $H = \hat{\pi}_*(\Pi_1(\hat{X}, \pi_0(y)))$, lo que concluye la demostración. ■

El siguiente resultado resulta en ocasiones bastante útil.

Proposición 14.7 *Si X_j , $j = 1, 2$, son espacios topológicos,*

$$X_1 \times X_2 \text{ admite recubridor universal} \iff X_j \text{ admite recubridor universal, } j = 1, 2.$$

DEMOSTRACIÓN: Si X_j admite recubridor universal (Y_j, ϕ_j) , $j = 1, 2$, entonces $(Y_1 \times Y_2, \pi_1 \times \pi_2)$ es recubridor universal de $X_1 \times X_2$. Basta recordar que si $(y_1, y_2) \in Y_1 \times Y_2$ entonces

$$\Pi_1(Y_1 \times Y_2, (y_1, y_2)) \cong \Pi_1(Y_1, y_1) \times \Pi_2(Y_2, y_2)$$

es el grupo trivial y $Y_1 \times Y_2$ es simplemente conexo.

Supongamos ahora que $(Y, \pi) \in \text{Rec}(X_1 \times X_2)$ es recubridor universal, esto es, Y es simplemente conexo. Fijemos $y \in Y$ y escribamos $\pi(y) = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$. Llamemos

$$\hat{X}_1 = X_1 \times \{x_2\}, \quad \hat{X}_2 = \{x_1\} \times X_2$$

copias topológicas de X_1, X_2 respectivamente en $X_1 \times X_2$, y consideremos la arcocomponente $Y_j \subset Y$ de $\pi^{-1}(\hat{X}_j)$ que contiene a y , $j = 1, 2$.

Basta con ver que Y_1 es simplemente conexo y

$$\pi_1 := \pi|_{Y_1}: Y_1 \rightarrow \hat{X}_1 \equiv X_1$$

es recubridora (igual se haría con (Y_2, π_2)).

En efecto, sea α un lazo en Y_1 con base y . Como $Y_1 \subset Y$ e Y es simplemente conexo, entonces α es nulhomotópico en Y , esto es, $\alpha \simeq_Y \epsilon_y$. De aquí que $\pi \circ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ sea un lazo nulhomotópico en $X_1 \times X_2$ con base (x_1, x_2) , o equivalentemente por la Proposición 5.2,

$$\alpha_j \simeq_{X_j} \epsilon_{x_j}, \quad j = 1, 2.$$

Esto implica que $(\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{H_1} \epsilon_{(x_1, x_2)}$. Notemos que como la homotopía H_1 también tiene lugar en Y , tiene sentido considerar el levantamiento $\tilde{H}_1: [0, 1]^2 \rightarrow Y$ de H_1 a Y

vía π con condición inicial y . Además, como la segunda función coordenada de H_1 es constante x_2 es claro que $\tilde{H}_1([0, 1]^2) \subset \hat{X}_1$. La arcoconexión de $\tilde{H}_1([0, 1]^2)$ y el hecho que $y \in \tilde{H}_1([0, 1]^2)$ implican que $\tilde{H}_1([0, 1]^2) \subset Y_1$ y \tilde{H}_1 es una homotopía en Y_1 entre α y ϵ_y . Esto prueba que α es nulhomotópico en Y_1 , y por tanto que Y_1 es simplemente conexo.

Por último veamos que $\pi_1 := \pi|_{Y_1} : \hat{X}_1 \equiv X_1$ es recubridora; en ese caso (Y_1, π_1) será recubridor universal de X_1 . Démonos cuenta de que si β es un arco arbitrario en \hat{X}_1 , la traza del levantamiento $\tilde{\beta}_y^\pi$ está evidentemente contenida Y_1 . Este argumento implica trivialmente que π_1 es sobreyectiva. La existencia de entornos distinguidos para (Y_1, π_1) es consecuencia del siguiente razonamiento. Sea $(x, x_2) \in \hat{X}_1$ un punto arbitrario, y consideremos un entorno distinguido para (Y_1, π_1) alrededor de (x, x_2) de la forma $U_1 \times U_2 \subset X_1 \times X_2$. Sea \hat{U}_1 una arcocomponente arbitraria de $\pi_1^{-1}(U_1 \times \{x_2\}) \subset \pi_1^{-1}(\hat{X}_1)$ con $\hat{U}_1 \cap Y_1 \neq \emptyset$. Claramente $\hat{U}_1 \subset Y_1$, y como

- π es inyectiva sobre $\pi_1^{-1}(U_1 \times U_2)$ y
- el levantado vía π de arcos en $U_1 \times \{x_2\}$ con condición inicial en \hat{U}_1 está contenido en \hat{U}_1 ,

la aplicación $\pi_1|_{\hat{U}_1} : \hat{U}_1 \rightarrow U_1 \times \{x_2\}$ es biyectiva. Además $\pi_1|_{\hat{U}_1}$ es abierta ya que es la restricción del homeomorfismo $\pi|_{\pi_1^{-1}(U_1 \times U_2)}$ al abierto \hat{U}_1 de Y_1 . Por tanto $U_1 \times \{x_2\}$ es entorno distinguido para (Y_1, π_1) alrededor de (x, x_2) . ■

Como aplicación de todo lo estudiado, veamos algunos ejemplos sencillos de clasificación de recubridores.

Ejercicio 14.8 Clasificar los recubridores de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, $m, n \geq 2$.

SOLUCIÓN: La resolución tiene varias etapas.

Primer paso: Determinar el recubridor universal de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, $m, n \geq 2$.

Se puede tener en cuenta la Proposición 14.7 y que (\mathbb{S}^n, π_n) es el recubridor universal de \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}$, o usar el siguiente argumento directo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\pi_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \langle A_n \rangle$$

la proyección al espacio de órbitas $\mathbb{P}^n = \mathbb{S}^n / \langle A_n \rangle$ asociado al grupo de homeomorfismos $\langle A_n \rangle = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n}, A_n\}$ generado por la aplicación antípoda $A_n : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$. Llameemos $q_n = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ y $p_n = [q_n] \in \mathbb{P}^n$. Como $\Pi_1(\mathbb{S}^n, q_n) = \{[\epsilon_{q_n}]\}$ inferimos que \mathbb{S}^n es simplemente conexo y (\mathbb{S}^n, π_n) es el recubridor universal (único salvo isomorfismos) de \mathbb{P}^n . Por tanto

$$\Pi_1(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, (p_n, p_m)) = \{[\epsilon_{p_n}]\} \times \{[\epsilon_{p_m}]\} = \{[\epsilon_{(p_n, p_m)}]\},$$

es espacio $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ es simplemente conexo, y $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi_n \times \pi_m)$ es el recubridor universal de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ (único salvo isomorfismos):

$$\pi = \pi_n \times \pi_m : \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m.$$

Segundo paso: Determinar el grupo de automorfismos del recubridor universal.

Vamos a explicitar el grupo de automorfismos

$$G = \text{Aut}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi).$$

Para ello se puede usar la Proposición 13.10 y que conocemos los automorfismos del recubridor universal (\mathbb{S}^n, π_n) de \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}$. De forma directa consideremos los homeomorfismos $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ dados por

$$\hat{A}_n = A_n \times \text{Id}_{\mathbb{S}^n}, \quad \hat{A}_m = \text{Id}_{\mathbb{S}^n} \times A_m, \quad \hat{A}_{nm} := A_n \times A_m.$$

Trivialmente $\pi \circ \hat{A}_n = \pi \circ \hat{A}_m = \hat{A}_{nm} \circ \pi = \pi$, por lo que $\hat{A}_n, \hat{A}_m, \hat{A}_{nm} \in G$. Observemos que

$$\hat{A}_{nm} = \hat{A}_n \circ \hat{A}_m = \hat{A}_m \circ \hat{A}_n, \quad \hat{A}_{nm} \circ \hat{A}_{nm} = \hat{A}_n \circ \hat{A}_n = \hat{A}_m \circ \hat{A}_m = \text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m},$$

por lo que $\{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_n, \hat{A}_m, \hat{A}_{nm}\}$ es un grupo con la composición y

$$\left(\{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_n, \hat{A}_m, \hat{A}_{nm}\}, \circ \right) \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +).$$

Vamos a ver que de hecho

$$G = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_n, \hat{A}_m, \hat{A}_{nm}\},$$

para lo cual bastará con ver que G tiene exactamente cuatro elementos.

En efecto, recordemos que (\mathbb{S}^n, π_n) , (\mathbb{S}^m, π_m) son recubridores de dos hojas, y por tanto $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi)$ es un recubridor de cuatro hojas. Como $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi)$ es el recubridor universal de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, por el Corolario 14.5-(c) el grupo G es isomorfo a $\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m))$. Como $\Pi_1(\mathbb{P}^n, p_n) \cong \mathbb{Z}_2$, $n \geq 2$, y

$$\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m)) \cong \Pi_1(\mathbb{P}^n, p_n) \times \Pi_1(\mathbb{P}^m, p_m) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

el grupo $\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m))$, e igualmente G , tiene cuatro elementos como habíamos afirmado.

Otra forma de probar que $G = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_n, \hat{A}_m, \hat{A}_{nm}\}$ es usar el isomorfismo general

$$\Lambda: \text{Aut}(\mathbb{S}^n, \pi_n) \times \text{Aut}(\mathbb{S}^m, \pi_m) \cong \text{Aut}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi = \pi_n \times \pi_m), \quad \Lambda(\Phi, \Psi) = \Phi \times \Psi.$$

Como $\text{Aut}(\mathbb{S}^n, \pi_n) = \langle A_n \rangle = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n}, A_n\}$ para todo $n \geq 2$,

$$\langle A_n \rangle \times \langle A_m \rangle \xrightarrow{\Lambda} \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_n, \hat{A}_m, \hat{A}_{nm}\} = G.$$

Tercer paso: Determinar explícitamente el isomorfismo

$$\hat{\Upsilon}: \Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m)) \rightarrow G = \text{Aut}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi)$$

basado en el punto $(q_n, q_m) \in \pi^{-1}(p_n, p_m)$ dado en el Corolario 14.5-(c).

Nota: Como conocemos explícitamente el grupo de automorfismos G del recubridor universal podríamos pasar directamente al paso cuarto, este tercero no es necesario. Lo incluimos como práctica del cálculo de $\hat{\Upsilon}$.

Si $n \geq 2$, el par (\mathbb{S}^n, π_n) es el recubridor universal de \mathbb{P}^n y $\Pi_1(\mathbb{P}^n, p_n) \cong \mathbb{Z}_2$. Tengamos presente que el arco con punto inicial q_n

$$\widetilde{\alpha_n}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad \widetilde{\alpha_n}(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0, \dots, 0),$$

se proyecta en un lazo $\alpha_n = \pi \circ \widetilde{\alpha_n}$ con base p_n cuya clase de homotopía $[\alpha_n]$ genera $\Pi_1(\mathbb{P}^n, p_n)$.

Sea

$$\hat{\Upsilon}_n: \Pi_1(\mathbb{P}^n, p_n) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{S}^n, \pi_n) = \langle A_n \rangle$$

el isomorfismo basado en $q_n \in \pi_n^{-1}(p_n)$ dado por el Corolario 14.5-(c). Como

$$(\widetilde{\alpha_n})_{q_n}^{\pi_n} = \widetilde{\alpha_n} \quad \text{y} \quad (\widetilde{\alpha_n})_{q_n}^{\pi_n}(1) = \widetilde{\alpha_n}(1) = A_n(q_n),$$

de la definición de $\hat{\Upsilon}_n$ deducimos que

$$\hat{\Upsilon}_n([\alpha_n]) = A_n.$$

Determinamos la expresión del isomorfismo $\hat{\Upsilon}$ sobre los elementos del grupo

$$\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m)) = \{[\epsilon_{(p_n, p_m)}], [(\alpha_n, \epsilon_{p_m})], [(\epsilon_{p_n}, \alpha_m)], [(\alpha_n, \alpha_m)]\}.$$

Al ser

$$(\widetilde{\alpha_n, \epsilon_{p_m}})_{(q_n, q_m)}^\pi = ((\widetilde{\alpha_n})_{q_n}^{\pi_n}, \epsilon_{q_m})$$

inferimos que

$$(\widetilde{\alpha_n, \epsilon_{p_m}})_{(q_n, q_m)}^\pi(1) = ((\widetilde{\alpha_n})_{q_n}^{\pi_n}(1), q_m) = \hat{A}_n(q_n, q_m),$$

de donde por la definición de $\hat{\Upsilon}$

$$\hat{\Upsilon}((\alpha_n, \epsilon_{p_m})) = \hat{A}_n.$$

Un razonamiento totalmente análogo nos dice que

$$\hat{\Upsilon}((\epsilon_{p_n}, \alpha_m)) = \hat{A}_m, \quad \hat{\Upsilon}((\alpha_n, \alpha_m)) = \hat{A}_{nm}, \quad \hat{\Upsilon}([\epsilon_{(p_n, p_m)}]) = \text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n},$$

lo que determina $\hat{\Upsilon}$.

Cuarto paso: Determinar todos los recubridores de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, $n, m \geq 2$.

Por el Teorema 14.6, la aplicación

$$\hat{\Delta}_{(p_n, p_m)}: \mathcal{R}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m)))$$

es biyectiva. Como $\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es abeliano,

$$\mathcal{S}_c(\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m))) = \text{Sub}(\Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m))) = \{H_j: j = 0, 1, 2, 3, 4\},$$

donde

$$\begin{aligned} H_0 &= \{[\epsilon_{(p_n, p_m)}]\}, & H_1 &= \{[\epsilon_{(p_n, p_m)}], [(\alpha_n, \epsilon_{p_m})]\}, & H_2 &= \{[\epsilon_{(p_n, p_m)}], [(\epsilon_{p_m}, \alpha_m)]\}, \\ H_3 &= \{[\epsilon_{(p_n, p_m)}], [(\alpha_n, \alpha_m)]\}, & H_4 &= \Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m)). \end{aligned}$$

La prueba del Teorema 14.6 nos dice que a cada subgrupo $H_j \leq \Pi_1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, (p_n, p_m))$ le podemos vincular vía $\hat{\Upsilon}$ un subgrupo $G_j = \hat{\Upsilon}(H_j) \leq G = \text{Aut}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi)$, y a través de él un recubridor

$$\hat{\pi}_j: (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_j \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$$

donde $(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_j$ es el espacio de órbitas asociado a G_j . Así se generan todos los recubridores de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

De una forma más directa, la tabla de subgrupos de G a utilizar para esta construcción es la siguiente:

$$G_0 = \hat{\Upsilon}(H_0) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}\}, \quad G_1 = \hat{\Upsilon}(H_1) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_n\}, \quad G_2 = \hat{\Upsilon}(H_2) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_m\},$$

$$G_3 = \hat{\Upsilon}(H_3) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_{nm}\}, \quad G_4 = \hat{\Upsilon}(H_4) = G = \text{Aut}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m, \pi).$$

En conclusión, el espacio $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ admite, salvo isomorfismos, los cinco recubridores

$$\hat{\pi}_j: (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_j \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4,$$

que listamos a continuación:

- $G_0 := \hat{\Upsilon}(H_0) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}\}$.

Si $\rho_0: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_0$ es la proyección al espacio de órbitas, el recubridor universal $\pi: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ factoriza de la forma $\pi = \hat{\pi}_0 \circ \rho_0$ a través del recubridor

$$\hat{\pi}_0: (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_0 \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \quad \hat{\pi}_0(G_0 \cdot p) = \pi(p),$$

que es de forma natural isomorfo a $\pi: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

En este caso $\hat{\Delta}((\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_0, \hat{\pi}_0) = H_0$.

- $G_1 := \hat{\Upsilon}(H_1) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_n\}$.

Si $\rho_1: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_1$ es la proyección al espacio de órbitas, el recubridor universal $\pi: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ factoriza de la forma $\pi = \hat{\pi}_1 \circ \rho_1$ a través del recubridor

$$\hat{\pi}_1: (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_1 \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \quad \hat{\pi}_1(G_1 \cdot p) = \pi(p),$$

que es de forma natural isomorfo a $\pi_n \times \text{Id}_{\mathbb{S}^m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$.

En este caso $\hat{\Delta}((\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_1, \hat{\pi}_1) = H_1$.

- $G_2 := \hat{\Upsilon}(H_2) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_m\}$.

Si $\rho_2: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_2$ es la proyección al espacio de órbitas, el recubridor universal $\pi: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ factoriza de la forma $\pi = \hat{\pi}_2 \circ \rho_2$ a través del recubridor

$$\hat{\pi}_2: (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_{G_2} \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \quad \hat{\pi}_2(G_2 \cdot p) = \pi(p),$$

que es de forma natural isomorfo a $\text{Id}_{\mathbb{S}^n} \times \pi_m: \mathbb{S}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$.

En este caso $\hat{\Delta}((\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_2, \hat{\pi}_2) = H_2$.

- $G_3 := \hat{\Upsilon}(H_3) = \{\text{Id}_{\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m}, \hat{A}_{nm}\}$.

Si $\rho_3: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_3$ es la proyección al espacio de órbitas, el recubridor universal $\pi: \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ factoriza de la forma $\pi = \hat{\pi}_3 \circ \rho_3$ a través del recubridor

$$\hat{\pi}_3: (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_{G_3} \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \quad \hat{\pi}_3(G_3 \cdot p) = \pi(p).$$

En este caso $\hat{\Delta}((\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_3, \hat{\pi}_3) = H_3$.

- $G_4 := \hat{\Upsilon}(H_4) = G$.

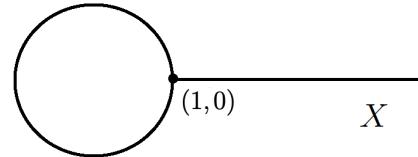
Si $\rho_4: S^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow (S^n \times \mathbb{S}^m)/G_4 \equiv \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ es la proyección al espacio de órbitas, el recubridor universal $\pi: S^n \times \mathbb{S}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ factoriza de la forma $\pi = \hat{\pi}_4 \circ \rho_4$ a través del recubridor (de hecho homeomorfismo)

$$\hat{\pi}_4: (\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m)/G_{G_4} \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m, \quad \hat{\pi}_4(G_4 \cdot p) = \pi(p),$$

que es de forma natural isomorfo a $\text{Id}_{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m}: \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$.

En este caso $\hat{\Delta}((S^n \times \mathbb{S}^m)/G_4, \hat{\pi}_4) = H_4$. ■

Ejercicio 14.9 Determina todos los recubridores de $X = \mathbb{S}^1 \cup \{(x, 0): x \geq 0\}$.



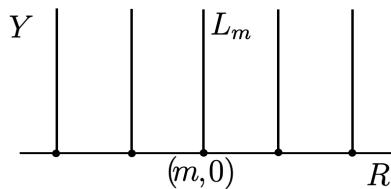
SOLUCIÓN: La resolución tiene varias etapas.

Primer paso: Determinar el recubridor universal de X

Llamemos $R = \{(t, 0): t \in \mathbb{R}\}$ y $L_m = \{(m, s): s \geq 0\}$, $m \in \mathbb{Z}$, y consideremos

$$Y = R \cup \left(\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} L_m \right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Por contracción de las semirectas L_m a su punto inicial $(m, 0)$, $m \in \mathbb{Z}$, es inmediato ver que Y admite como retracto fuerte de deformación a $\{(t, 0): t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$, y por tanto es simplemente conexo.



La aplicación

$$\pi: Y \rightarrow X, \quad \pi(p) = \begin{cases} \rho(t) & \text{si } p = (t, 0) \in R \\ (1 + s, 0) & \text{si } p = (m, s) \in L_m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

donde como siempre $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\rho(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.

La aplicación π es sobreyectiva, continua, y satisface la condición de existencia de entornos distinguidos, por lo que es recubridora. Evidentemente (Y, π) es el recubridor universal de X .

Segundo paso: Determinar el grupo de automorfismos del recubridor universal.

Consideremos para cada $m \in \mathbb{Z}$ el homeomorfismo

$$\Phi_m: Y \rightarrow Y, \quad \Phi_m(p) = p + (m, 0).$$

Claramente $pi \circ \Phi_m = \pi$, por lo que $\{\Phi_m: m \in \mathbb{Z}\} \subseteq \text{Aut}(Y, \pi)$. Veamos que de hecho

$$\{\Phi_m: m \in \mathbb{Z}\} = \text{Aut}(Y, \pi).$$

En efecto, si $\Phi \in \text{Aut}(Y, \pi)$ sabemos que

$$\Phi((0, 0)) \in \pi^{-1}((1, 0)) = \{(m, 0): m \in \mathbb{Z}\} = \{\Phi_m((0, 0)): m \in \mathbb{Z}\},$$

por lo que existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\Phi((0, 0)) = \Phi_k((0, 0))$. Por el Corolario 13.4, esto implica que $\Phi = \Phi_k$ de aquí lo afirmado.

Como $\Phi_m = \Phi_1^m$, $m \in \mathbb{Z}$, el grupo $\text{Aut}(Y, \pi)$ es cíclico infinito con generador Φ_1 , y por tanto $(\text{Aut}(Y, \pi), \circ) \cong (\mathbb{Z}, +)$.

Tercer paso: Determinar explícitamente el isomorfismo

$$\hat{\Upsilon}: \Pi_1(X, (1, 0)) \rightarrow \text{Aut}(Y, \pi)$$

basado en el punto $(0, 0) \in \pi^{-1}((1, 0))$ dado en el Corolario 14.5-(c).

Nota: Como conocemos explicitamente $\text{Aut}(Y, \pi)$ se puede pasar directamente al paso cuarto. Este tercero es superfluo y se incluye sólo como práctica del cálculo de $\hat{\Upsilon}$.

Por contracción de la semirecta $L = \{(x, 0): x \geq 0\}$ a su punto inicial $(1, 0)$, el espacio X admite como retracto fuerte de deformación a \mathbb{S}^1 y por tanto

$$\Pi_1(X, (1, 0)) = F([\alpha_1]) \cong \mathbb{Z},$$

donde $\alpha_1: [0, 1] \rightarrow X$, $\alpha_1(t) = \rho(t)$. Como siempre escribamos

$$\alpha_m: [0, 1] \rightarrow X, \quad \alpha_m(t) = \rho(mt), \quad m \in \mathbb{Z},$$

y observemos que $[\alpha_m] = [\alpha_1]^m$ en $\Pi_1(X, (1, 0))$.

Como el levantamiento de α_1 vía π con condición inicial $(0, 0)$

$$\widetilde{(\alpha_m)}_{(0,0)}^\pi: [0, 1] \rightarrow Y, \quad \widetilde{(\alpha_m)}_{(0,0)}^\pi(t) = mt$$

satisface $\widetilde{(\alpha_m)}_{(0,0)}^\pi(1) = m = \Phi_m((0, 0))$, la definición de $\hat{\Upsilon}$ nos dice que

$$\hat{\Upsilon}([\alpha_m]) = \Phi_m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Cuarto paso: Determinar todos los recubridores de X .

Por el Teorema 14.6, la aplicación

$$\hat{\Delta}_{(1,0)}: \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{S}_c(\Pi_1(X, (1, 0)))$$

es biyectiva. Como $\Pi_1(X, (1, 0)) \cong \mathbb{Z}$ es abeliano,

$$\mathcal{S}_c(\Pi_1(X, (1, 0))) = \text{Sub}(\Pi_1(X, (1, 0))) = \{H_k: k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\},$$

donde

$$H_k = \{[\alpha_k]^m : m \in \mathbb{Z}\}.$$

La prueba del Teorema 14.6 nos dice que a cada subgrupo $H_k \leq \Pi_1(X, (1, 0))$ le podemos vincular vía $\hat{\Upsilon}$ un subgrupo $G_k = \hat{\Upsilon}(H_k) \leq \text{Aut}(Y, \pi)$, y a través de él un recubridor $\hat{\pi}_k : Y/G_k \rightarrow X$ donde Y/G_k es el espacio de órbitas asociado a $G_k := \hat{\Upsilon}(H_k) \leq \text{Aut}(Y, \pi)$. Así se generan todos los recubridores de X .

Dicho de una forma más directa, la tabla de subgrupos de $\text{Aut}(Y, \pi)$ es la siguiente:

$$G_k = \{\Phi_k^m : m \in \mathbb{Z}\}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

En conclusión, el espacio X admite, salvo isomorfismos, los recubridores

$$\hat{\pi}_k : Y/G_k \rightarrow X, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

que listamos a continuación:

- $G_0 := \hat{\Upsilon}(H_0) = \{\text{Id}_Y\}$.

Si $\rho_0 : Y \rightarrow Y/G_0$ es la proyección al espacio de órbitas, el recubridor universal $\pi : Y \rightarrow X$ factoriza de la forma $\pi = \hat{\pi}_0 \circ \rho_0$ a través del recubridor

$$\hat{\pi}_0 : Y/G_0 \rightarrow X, \quad \hat{\pi}_0(G_0 \cdot p) = \pi(p),$$

que es de forma natural isomorfo a $\pi : Y \rightarrow X$.

En este caso $\hat{\Delta}(Y/G_0, \hat{\pi}_0) = H_0$.

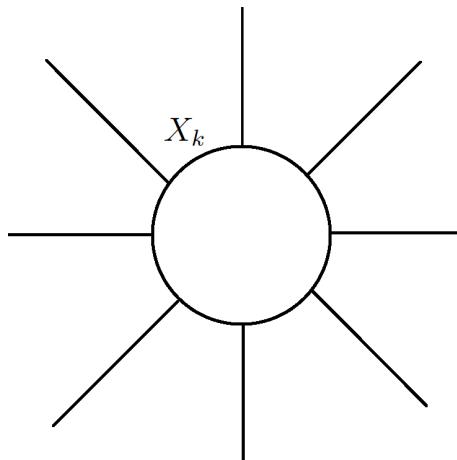
- $G_k := \hat{\Upsilon}(H_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Si $\rho_k : Y \rightarrow Y/G_k$ es la proyección al espacio de órbitas, el recubridor universal $\pi : Y \rightarrow X$ factoriza de la forma $\pi = \hat{\pi}_k \circ \rho_k$ a través del recubridor

$$\hat{\pi}_k : Y/G_k \rightarrow X, \quad \hat{\pi}_k(G_k \cdot p) = \pi(p).$$

Llamando $R_j = \{se^{2\pi i j/k} : s \geq 1\}$, $j = 0, 1, \dots, k-1$, y

$$X_k = \mathbb{S}^1 \cup \left(\bigcup_{j=0}^{k-1} R_j \right),$$



y definiendo con notación compleja el recubridor

$$\pi_k: X_k \rightarrow X, \quad \pi_k(z) = \begin{cases} z^k & \text{si } z \in \mathbb{S}^1 \\ (1 + |z|, 0) & \text{si } z \in \bigcup_{j=0}^{k-1} R_j \end{cases},$$

no es difícil ver que $(Y/G_k, \hat{\pi}_k)$ es isomorfo a (X_k, π_k) .

En efecto, la aplicación

$$\rho_k: Y \rightarrow X_k, \quad \rho_k(p) = \begin{cases} \rho(t/k) & \text{si } p = (t, 0) \in R \\ (1+s)\rho(m/k) & \text{si } p = (m, s) \in L_m, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

es una identificación (continua, abierta y sobreyectiva) e induce un homeomorfismo

$$\hat{\rho}_k: Y / \sim_{\rho_k} \rightarrow X_k.$$

Es evidente que \sim_{ρ_k} es la relación de equivalencia que genera el espacio de órbitas Y/G_k , y por consiguiente

$$Y/G_k = Y / \sim_{\rho_k}.$$

Como además $\pi_k \circ \hat{\rho}_k = \hat{\pi}_k$, la aplicación $\hat{\rho}_k: (Y/G_k, \hat{\pi}_k) \rightarrow (X_k, \pi_k)$ es el isomorfismo de recubridores deseado.

En este caso $\hat{\Delta}(Y/G_k, \hat{\pi}_k) = H_k$. ■

14.1. Existencia de recubridor universal

Una cuestión trascendental es conocer qué condiciones topológicas garantizan la existencia de recubridor universal. Este será el contenido del teorema que abordaremos a continuación. Necesitamos introducir alguna notación.

Definición 14.10 Un abierto arcoconexo U de un espacio topológico X se dice que satisface la propiedad de semilocal simple conexión si el homomorfismo

$$i_*: \Pi_1(U, x) \rightarrow \Pi_1(X, x)$$

inducido por la inclusión $i: U \rightarrow X$ es trivial (esto es, constante $[\epsilon_x] \in \Pi_1(X, x)$).

Un espacio topológico X se dirá semilocalmente simplemente conexo si todo punto admite un entorno abierto arcoconexo y semilocalmente simplemente conexo.

Claramente un subconjunto abierto y arcoconexo dentro de un abierto semilocalmente simplemente conexo es semilocalmente simplemente conexo. Por tanto,

Observación 14.11 Si X es semilocalmente simplemente conexo entonces la familia de abiertos semilocalmente simplemente conexos en X son una base de la topología de X .

Obsérvese también que si todo punto de un espacio admite un entorno abierto simplemente conexo, entonces el espacio es semilocalmente simplemente conexo. Esto ocurre, por ejemplo, para las variedades topológicas que introduciremos en el Tema 3.

Ejercicio 14.12 Hay espacios arcoconexos y localmente arcoconexos que no son semilocalmente simplemente conexos. El ejemplo más sencillo es el siguiente subespacio topológico del plano euclíadiano:

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n, \quad \text{donde} \quad C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\},$$

para el que falla la semilocal-simple-conexión en el punto $(0, 0)$.

SOLUCIÓN: Sea $U \subset X$ un abierto arcoconexo arbitrario conteniendo a $(0, 0)$, y sea $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $C_k \subset U$.

Para cada C_n , $n \in \mathbb{N}$ consideremos el homeomorfismo

$$f_n: C_n \rightarrow C_k, \quad f_n((x, y)) = \frac{n}{k} \left(x - \frac{1}{n}, y \right) + \left(\frac{1}{k}, 0 \right).$$

Observemos que $f_k = \text{Id}_{C_k}$ y consideremos la retracción

$$r: X \rightarrow C_k, \quad r|_{C_n} = f_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Consideremos el diagrama de aplicaciones

$$C_k \xrightarrow{i} U \xrightarrow{j} X \xrightarrow{r} C_k,$$

con $r \circ j \circ i = \text{Id}_{C_k}$, donde i, j son las correspondientes inclusiones. Usando la functorialidad del grupo fundamental, el correspondiente diagrama de homomorfismos de grupos

$$\Pi_1(C_k, (0, 0)) \xrightarrow{i_*} \Pi_1(U, (0, 0)) \xrightarrow{j_*} \Pi_1(X, (0, 0)) \xrightarrow{r_*} \Pi_1(C_k, (0, 0))$$

nos da que $r_* \circ j_* \circ i_* = \text{Id}_{\Pi_1(C_k, (0, 0))}$. Si la condición de semilocal simple conexión se satisfaciese para un tal U , el homomorfismo j_* sería el trivial (constante $[\epsilon_{(0,0)}]$), y por tanto $r_* \circ j_* \circ i_*$ sería trivial igualmente, lo que sería absurdo. ■

Teorema 14.13 Un espacio topológico X admite recubridor universal si y sólo si es semilocalmente simplemente conexo.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que X admite recubridor universal (Y, π) . Dado $x \in X$, consideremos un entorno distinguido U de x en X y la inclusión $i: U \rightarrow X$ para π . Tomemos una arcocomponente \tilde{U} de $\pi^{-1}(U)$, y recordemos que $\pi|_{\tilde{U}}: \tilde{U} \rightarrow U$ es un homeomorfismo. Llamemos $j: \tilde{U} \rightarrow Y$ a la aplicación inclusión y

$$f := j \circ (\pi|_{\tilde{U}})^{-1}: U \rightarrow Y.$$

Claramente f es continua y $\pi \circ f = i$, por lo que $i_* = \pi_* \circ f_*: \Pi_1(U, x) \rightarrow \Pi_1(X, x)$. Como $\Pi_1(Y) \cong \{0\}$, f_* es el homomorfismo trivial y lo mismo ocurre con i_* . Esto prueba que X es semilocalmente simplemente conexo.

Supongamos ahora que X es semilocalmente simplemente conexo y construyamos su recubridor universal.

Fijemos $x_0 \in X$, y para cada $x \in X$ consideremos la familia $\Omega_{x_0, x}(X)$ de los arcos $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x$ (ver Tema 1). Denotaremos también por \simeq la relación de equivalencia en $\Omega_{x_0, x}(X)$ ser homotópico en X (siempre con extremos fijos). Construyamos el espacio cociente $\Omega_{x_0, x}/\simeq$ para cada $x \in X$, y definamos

$$Y := \bigcup_{x \in X} \Omega_{x_0, x}/\simeq.$$

Definamos también la aplicación proyección

$$\pi: Y \rightarrow X, \quad \pi([\gamma]) := \gamma(1),$$

obviamente sobreyectiva ya que X es arcoconexo.

Nuestro objetivo es construir una topología en Y que haga de π una aplicación recubridora. Lo haremos presentando una base \mathcal{B} de la misma.

Como X es semilocalmente simplemente conexo, sabemos que la familia \mathcal{U} de los abiertos semilocalmente simplemente conexos en X es una base de la topología de X . Para cada $U \in \mathcal{U}$ y $[\gamma] \in Y$ con $\gamma(1) \in U$, pongamos

$$([\gamma], U) = \{[\gamma * \sigma]: \sigma: [0, 1] \rightarrow U \text{ arco con } \sigma(0) = \gamma(1)\}$$

y definamos

$$\mathcal{B} := \{([\gamma], U): [\gamma] \in Y, U \in \mathcal{U}, \gamma(1) \in U\}.$$

Veamos que \mathcal{B} es base de una (única) topología en Y . En efecto, la condición

$$Y = \cup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}} ([\gamma], U)$$

es trivial toda vez que

$$[\gamma] = [\gamma * \epsilon_{\gamma(1)}] \in ([\gamma], U)$$

para cualquier abierto semilocalmente simplemente conexo U conteniendo a $\gamma(1)$. Por otra parte, si $[\gamma] \in ([\gamma_1], U_1) \cap ([\gamma_2], U_2)$ entonces $\gamma(1) \in U_1 \cap U_2$. Denotando por U la arccomponente (obviamente abierta) de $U_1 \cap U_2$ que contiene a $\gamma(1)$, U es semilocalmente simplemente conexo en X . Por tanto bastará con probar la inclusión

$$([\gamma], U) \subset ([\gamma_1], U_1) \cap ([\gamma_2], U_2).$$

Para ello póngase $[\gamma] = [\gamma_j * \sigma_j] \in ([\gamma_j], U_j)$, y nótese que para cualquier $[\gamma * \sigma] \in ([\gamma], U)$ se tiene $[\gamma * \sigma] = [\gamma_j * (\sigma_j * \sigma)] \in ([\gamma_j], U_j)$, $j = 1, 2$.

Por tanto existe una única topología en Y admitiendo a \mathcal{B} como base (en lo que sigue, Y se entenderá dotado de la misma).

A continuación veamos que $\pi: Y \rightarrow X$ es recubridora.

Ya sabemos que π es sobreyectiva, probemos ahora su continuidad. Como \mathcal{U} y \mathcal{B} son bases de las topologías en X e Y , respectivamente, para ello bastará con garantizar la siguiente identidad:

$$\pi^{-1}(U) = \bigcup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}_U} ([\gamma], U), \tag{7}$$

donde $\mathcal{B}_U := \{([\gamma], U): \gamma(1) \in U\} \subset \mathcal{B}$. La inclusión $\bigcup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}_U} ([\gamma], U) \subseteq \pi^{-1}(U)$ es trivial por definición de π ; en efecto, si $[\gamma * \sigma] \in ([\gamma], U)$ entonces $\pi([\gamma * \sigma]) = \sigma(1) \in U$. Supongamos ahora que $[\gamma_0] \in \pi^{-1}(U)$, esto es, que $\gamma_0(1) \in U$. Entonces $([\gamma_0], U) \in \mathcal{B}_U$, y como $[\gamma_0] \in ([\gamma_0], U) \subset \bigcup_{([\gamma], U) \in \mathcal{B}_U} ([\gamma], U)$ la otra inclusión se sigue. Esto prueba que π es continua.

Nuestro siguiente objetivo será probar que π satisface la condición de recubrimiento. Para ello será importante comprobar la identidad

$$\pi(([[\gamma]], U)) = U \text{ para cualquier } ([\gamma], U) \in \mathcal{B}$$

(que en particular implica que π es abierta). Para hacerlo, tomemos $z \in U$ y un arco σ en U conectando $\gamma(1)$ y z . Claramente $[\gamma * \sigma] \in ([\gamma], U)$ y en consecuencia $\pi([\gamma * \sigma]) =$

$\sigma(1) = z \in \pi(([γ], U))$. Esto prueba que $U \subset \pi(([γ], U))$, y como la otra inclusión es trivial la igualdad buscada.

Teniendo en cuenta (7), π es recubridora si y sólo si

$$\pi|_{([γ], U)}: ([γ], U) \rightarrow U \text{ es un homeomorfismo para todo } ([γ], U) \in \mathcal{B}_U.$$

Al ser esta aplicación continua, abierta y sobre, bastará con garantizar la inyectividad. Supongamos que $[γ ∗ σ_j] \in ([γ], U)$, $j = 1, 2$, y $σ_1(1) = π([γ ∗ σ_1]) = π([γ ∗ σ_2]) = σ_2(1)$. Como $σ_1(0) = σ_2(0) = γ(1)$ y $σ_1([0, 1]), σ_2([0, 1]) ⊂ U$, la semilocal simpleconexión de U garantiza que $σ := σ_1 ∗ σ_2 ≈ ε_{γ(1)}$ en X , y por tanto que

$$γ ∗ σ_2 ≈ γ ∗ σ ∗ σ_2 ≈ γ ∗ σ_1.$$

Esto implica que $[γ ∗ σ_1] = [γ ∗ σ_2]$ como queríamos ver, y que π es recubridora.

Para finalizar el teorema resta demostrar que Y es simplemente conexo. Nuestra estrategia será probar que

$$π_*(Π_1(Y, [ε_{x_0}])) = {[ε_{x_0}]},$$

y concluir usando el Teorema de Monodromía (Corolario 11.8).

Con este objetivo consideremos un arco $γ: [0, 1] → X$ con $γ(0) = x_0$, y definamos $γ_t: [0, 1] → X$, $γ_t(s) = γ(ts)$, para cada $t ∈ [0, 1]$. Comprobemos que el arco

$$c: [0, 1] → Y, \quad c(t) := [γ_t],$$

es el levantamiento $γ_{[ε_{x_0}]}$ vía $π$.

Como $c(0) = [γ_0] = [ε_{x_0}]$ y $π ∘ c = γ$, basta con probar la continuidad de c . Para ello tomemos $t_0 ∈ [0, 1]$ y comprobemos que c es continua en t_0 . Teniendo en cuenta la definición de la topología en Y , es fácil comprobar que

$$β_{c(t_0)} := \{(c(t_0), U): U \text{ semilocalmente simplemente conexo, } γ_{t_0}(1) = γ(t_0) ∈ U\}$$

es una base de entornos de $c(t_0)$ en Y . Por tanto la continuidad de c en t_0 pasa por garantizar que $c^{-1}((c(t_0), U))$ es un entorno de t_0 en $[0, 1]$ para todo $(c(t_0), U) ∈ β_{c(t_0)}$. En efecto, como $γ$ es continua en t_0 existe $δ > 0$ tal que $γ([t_0 - δ, t_0 + δ] ∩ [0, 1]) ⊂ U$. Para cada $t ∈]t_0 - δ, t_0 + δ[∩ [0, 1]$, denotemos por $σ_t: [0, 1] → X$, $σ_t(s) := γ((1 - s)t_0 + st)$, y observemos que $γ_t ≈ γ_{t_0} ∗ σ_t$. Por tanto,

$$c(t) = [γ_t] = [γ_{t_0} ∗ σ_t] ∈ ([γ_{t_0}], U) = (c(t_0), U) \text{ para todo } t ∈]t_0 - δ, t_0 + δ[∩ [0, 1]$$

y c es continua en t_0 . Así pues $c: [0, 1] → Y$ es continua y $c = γ_{[ε_{x_0}]}$.

Para acabar, tomemos un lazo arbitrario c en Y con base el punto $[ε_{x_0}]$ y denotemos por $γ := π ∘ c$. Como c es el levantamiento de $γ$ con condición inicial $[ε_{x_0}]$, por lo que acabamos de demostrar

$$c(1) = [γ_1] = [γ].$$

Pero $c(1) = [ε_{x_0}]$ ya que c es un lazo en Y con base $[ε_{x_0}]$. Esto prueba que $π_*(c) = [π ∘ c] = [γ] = [ε_{x_0}]$ para cualquiera $[c] ∈ Π_1(Y, [ε_{x_0}])$, y por el Teorema de Monodromía, que Y es simplemente conexo como queríamos demostrar. ■

Se puede demostrar la Proposición 14.7 fácilmente usando el Teorema 14.13, hágase como ejercicio.

Ejercicio 14.14 Determina el recubridor universal de $\overline{D} \setminus \{0\}$ y de la corona $\{p \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq \|p\| \leq 2\}$.

SOLUCIÓN: Sea $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\pi(z) = e^z$ la exponencial compleja. Recordemos que si $I \in \mathbb{R}$ es un intervalo abierto con $\text{diam}(I) \leq 2\pi$, y $B_I = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \in I\}$ entonces $\pi(B_I)$ es el sector angular $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg(z) \in I\}$ y

$$\pi|_{B_I}: B_I \rightarrow \pi(B_I)$$

es un homeomorfismo. En particular, π es un recubridor.

Si $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \leq 0\}$ es claro que $\pi^{-1}(\pi(H)) = H$ y

$$\pi|_H: H \rightarrow \pi(H) = \overline{D} \setminus \{0\}$$

es también recubridora. Como H es simplemente conexo $(H, \pi|_H)$ es recubridor universal de $\overline{D} \setminus \{0\}$.

En cuanto a la corona $C = \{p \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq \|p\| \leq 2\}$ el argumento es análogo, cambiando H por la banda

$$S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) \in]-\log(2), \log(2)[\},$$

también simplemente conexa. En este caso $(S, \pi|_S)$ es recubridor universal de C . ■

Ejercicios del Tema 2

1. Consideremos la aplicación recubridora $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\rho(t) = e^{2\pi t i}$. Demostrar que $\rho|_{(0,2)} : (0, 2) \rightarrow \mathbb{S}^1$ es continua, abierta y sobreyectiva pero no es recubridora. ¿Existe alguna otra aplicación recubridora $\psi : (0, 2) \rightarrow \mathbb{S}^1$?

2. Sean $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ y $\psi : X \rightarrow Y$ aplicaciones recubridoras. Demostrar que si todas las fibras de ψ son finitas, entonces $\psi \circ \rho : \tilde{X} \rightarrow Y$ es una aplicación recubridora.
3. Construir explícitamente una aplicación recubridora $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$, donde:

$$\tilde{X} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x^2 + y^2\} \quad \text{y} \quad X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

¿Existe una aplicación recubridora $\psi : X \rightarrow \tilde{X}$?

4. Sea X un espacio topológico conexo y $G \leq \text{Homeo}(X)$. Demostrar que si la proyección al cociente $p : X \rightarrow X/G$ es recubridora, entonces G es propiamente discontinuo.
5. Un *ovaloide* es una superficie compacta y conexa $S \subset \mathbb{R}^3$ con curvatura de Gauss positiva en cada punto. Demostrar que si S es un ovaloide y $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una aplicación de Gauss de S , entonces N es un difeomorfismo. En particular $S \cong \mathbb{S}^2$ (esto nos indica que cierto comportamiento de la curvatura de Gauss implica una restricción topológica).
6. Construir una aplicación recubridora de dos hojas $\rho : T \rightarrow K$, donde T es el toro y K es la botella de Klein. Deducir que \mathbb{R}^2 es el recubridor universal de K .
7. Construir una aplicación recubridora de dos hojas $\rho : C \rightarrow M$, donde C es el cilindro infinito y M es la cinta de Moebius infinita. Deducir que \mathbb{R}^2 es el recubridor universal de M .
8. Sea $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora, $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$. Demostrar que:
- a) Si $\Pi_1(X, x_0)$ es finito, entonces el número de hojas es finito.
 - b) Si \tilde{X} es compacto y simplemente conexo entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es finito.
9. Sea $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora donde \tilde{X} es arcoconexo. Dados puntos $x_0 \in X$ y $\tilde{x}_0 \in \rho^{-1}(x_0)$, probar que $\rho_* : \Pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \Pi_1(X, x_0)$ es un isomorfismo si y sólo si ρ es un homeomorfismo.
10. (Acciones de grupos sobre conjuntos). Sea Y un conjunto no vacío y G un grupo. Se dice que G *actúa sobre* Y por la derecha si existe una aplicación $\cdot : Y \times G \rightarrow Y$ tal que:
- a) $y \cdot e = y$, para cada $y \in Y$,
 - b) $y \cdot (g \cdot h) = (y \cdot g) \cdot h$, para cada $y \in Y$ y cada $g, h \in G$.

Definimos en Y la siguiente relación: $y_1 \sim y_2$ si y sólo si existe $g \in G$ tal que $y_2 = y_1 \cdot g$. Demostrar que \sim es una relación de equivalencia en Y y describir las clases de equivalencia. Denotamos por Y/G al conjunto cociente.

Diremos que la acción es *transitiva* si para cada $y_1, y_2 \in Y$ existe $g \in G$ tal que $y_2 = y_1 \cdot g$. Esto equivale a que Y/G contiene una única clase de equivalencia.

Dado $y \in Y$, se define $G_y = \{g \in G / y \cdot g = y\}$. Demostrar que $G_y \leq G$ (el llamado *subgrupo de isotropía en y*).

Fijado $y_0 \in Y$, definimos $\Psi : G \rightarrow Y$ por $\Psi(g) = y_0 \cdot g$. Demostrar que, si la acción es transitiva, entonces Ψ induce una biyección $\bar{\Psi} : G/G_{y_0} \rightarrow Y$.

11. Sea $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora y $f : Y \rightarrow X$ continua, siendo Y conexo y localmente arco-conexo. ¿Existen siempre levantamientos de f si X es simplemente conexo? ¿Y si \tilde{X} es simplemente conexo? ¿Y si Y es simplemente conexo?
12. Sea $\rho_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora dada por $\rho_n(z) = z^n$ con $n \in \mathbb{Z}$ y $n \neq 0$. Demostrar que hay levantamientos de ρ_m mediante ρ_n si y sólo si $m = nk$ para algún $k \in \mathbb{Z}$. En tal caso, se cumple que $\tilde{\rho}_m = \rho_k$, donde $\tilde{\rho}_m$ es el único levantamiento de ρ_m con $\tilde{\rho}_m(1) = 1$.
13. Sea X un espacio conexo y localmente arcoconexo con grupo fundamental finito. Sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f(x)^2 + g(x)^2 = 1$, para cada $x \in X$. Demostrar que existe una función continua $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\cos(h(x)) = f(x)$ y $\sin(h(x)) = g(x)$, para cada $x \in X$. ¿Hasta qué punto es h única?
14. (El grupo fundamental de la botella de Klein K). Para cada $n, m \in \mathbb{Z}$ se define $f_{n,m} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como:

$$f_{n,m}(x, y) = (x, (-1)^n y) + (n, m).$$

Denotemos $G = \{f_{n,m} / n, m \in \mathbb{Z}\}$. Se pide lo siguiente:

- a) Demostrar que cada aplicación $f_{n,m}$ es una traslación o una simetría deslizante.
 - b) Probar que $G \leq \text{Homeo}(\mathbb{R}^2)$ y que G es propiamente discontinuo.
 - c) Deducir la existencia de una aplicación recubridora $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow K$, donde K es la botella de Klein. Concluir que $\Pi_1(K) \cong G$.
 15. (Un espacio con grupo fundamental \mathbb{Z}_n). Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Para cada $k = 0, \dots, n-1$ definimos el número $\theta_k = (2\pi k)/n$ y la aplicación $f_k : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3$ dada por:
- $$f_k(z, w) = (e^{\theta_k i} z, e^{\theta_k i} w).$$
- Denotemos $G_n = \{f_k : k = 0, \dots, n-1\}$. Se pide lo siguiente:
- a) Demostrar que G_n es un grupo isomorfo a \mathbb{Z}_n .
- b) Probar que $G_n \leq \text{Homeo}(\mathbb{S}^3)$ y que G es propiamente discontinuo.
- c) Construir $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3/G_n$ recubridora y concluir que $\Pi_1(\mathbb{S}^3/G_n) \cong \mathbb{Z}_n$.
16. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
- a) ¿Es toda equivalencia homotópica una aplicación recubridora? ¿Y recíprocamente?
 - b) ¿Es recubridora la aplicación $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ dada por $\rho(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$?
- 120

- c) Sea $\rho : \tilde{X} \rightarrow X$ una aplicación recubridora y $\alpha \in \Omega(X, x_0)$. ¿Es necesariamente alguno de los levantamientos de α un lazo en \tilde{X} ?
- d) ¿Existe una aplicación continua $f : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $e^{2\pi f(z)i} = z$, para cada $z \in \mathbb{S}^1$?
- e) ¿Existen aplicaciones recubridoras $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$ o $\rho : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1$?
- f) ¿Existen aplicaciones recubridoras $\rho : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{S}^1$ o $\rho : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{P}$?
- g) Si $T = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ es el toro, ¿existe $G \leq \text{Homeo}(T)$ propiamente discontinuo tal que $T/G \cong \mathbb{P}$?
- h) Demostrar que si $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es una aplicación continua e inyectiva, entonces es un homeomorfismo.
- i) Sea X un espacio arco-conexo con grupo fundamental finito. Demostrar que toda aplicación recubridora $\rho : X \rightarrow X$ es un homeomorfismo.

17. Explicita el recubridor universal de

- a) $\overline{D} \setminus \{0\}$ y de $\{p \in \mathbb{R}^2 : 1/2 \leq \|p\| \leq 2\}$.
- b) $\mathbb{S}^2 \cup (\{(0, 0)\} \times [-1, 1])$. Pista: observar que este espacio es homeomorfo a $\mathbb{S}^2 \cup c$, donde c es un arco de Jordan en el exterior de la bola unidad de \mathbb{R}^3 conectando los dos polos de la esfera.
18. Determina todos los recubridores de \mathbb{S}^1 y $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.
19. Determina todos los recubridores de la cinta de Möbius infinita.
20. Determina todos los recubridores de \mathbb{P}^n , $n \geq 2$.
21. Determina todos los recubridores de $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, $n, m \geq 2$.
22. Determina todos los recubridores de $\mathbb{S}^1 \cup \{(x, 0) : x \geq 0\}$.
23. Determina el grupo de automorfismos para los siguientes recubridores:

- a) $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\rho(t) = e^{2\pi it}$.
- b) $\rho \times \text{Id}_R : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times R$.
- c) $\pi_n : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, $\pi_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$.
- d) $\pi_n \times \pi_m : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $n, m \in \mathbb{N}$.
- e) $\rho \times \pi_n : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, $n \in \mathbb{N}$.
- f) $\rho \times \rho : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

TEMA 3: Superficies topológicas

Francisco J. López
Departamento de Geometría y Topología
Universidad de Granada
fjlopez@ugr.es

El último tema del curso se dedicará a estudiar en profundidad una familia importante de espacios topológicos: las superficies topológicas. Nuestro objetivo principal será presentar el teorema de clasificación para superficies topológicas compactas. Este resultado descansa sobre algunos de los pilares fundamentales de la topología en dimensión 2, como el Teorema de Invarianza del Dominio ó el Teorema de Radó de existencia de triangulaciones sobre superficie topológicas. Además, requerirá de conceptos trascendentales para la topología algebraica como el de orientabilidad ó el de característica de Euler.

15. Variedades topológicas: Ejemplos

El concepto central de este tema es el de variedad topológica. Aunque nosotros nos centraremos en dimensión dos, formularemos la definición con toda generalidad.

Definición 15.1 *Un espacio topológico X se dirá una variedad topológica de dimensión $n \in \mathbb{N}$ si:*

- *X es conexo, Hausdorff y II-Axioma de numerabilidad.*
- *Para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ contenido a x homeomorfo a un abierto $O \subset \mathbb{R}^n$.*

Si X es una variedad topológica n -dimensional, a los pares (U, Φ) formados por un abierto U de X y un homeomorfismo $\Phi: U \rightarrow O$ sobre un abierto euclíadiano $O \subset \mathbb{R}^n$ se le llamará cartas o parametrizaciones en X .

Hay que hacer algunos comentarios y matizaciones a la anterior definición. Supongamos que X es una variedad topológica n -dimensional.

- Algunos autores no exigen *conexión* en la definición de variedad topológica. No obstante, salvo reducirnos a componentes conexas la formulación es equivalente.
- Existen espacios topológicos que satisfacen todas las propiedades explicitadas en la Definición 15.1, excepto el II-Axioma de Numerabilidad. No serán considerados variedades topológicas.
- La restricción de una carta a un abierto de su dominio es también una carta. Por tanto, los dominios de las cartas son una base de la topología de X .
- Todo punto $x \in X$ admite una carta (U, Φ) de forma que $\Phi(U)$ es una bola B euclíadiana de \mathbb{R}^n , que salvo componer con traslaciones y homotecias se puede suponer es la bola unidad $B^n(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$. Además los dominios de este tipo de cartas son una base de la topología de X .

- X es localmente arcoconexa, localmente compacta y localmente simplemente conexa (luego semilocalmente simplemente conexa), ya que así es la topología euclíadiana. En particular, X admite recubridor universal; Teorema 14.13.
- El grupo fundamental de una variedad topológica es numerable; Teorema 7.15.

Existen dos resultados avanzados de Topología Algebraica que nos ayudan a comprender las profundas implicaciones topológicas de la Definición 15.1. Nos referimos al Teorema de Invarianza de la Dimensión y al Teorema de Invarianza del Dominio. Los enunciamos a título informativo, ya que su prueba general está fuera del alcance de este curso.

Teorema 15.2 (Invarianza de la dimensión) *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ y $V \subset \mathbb{R}^m$ dos abiertos euclidianos no vacíos. Si U es homeomorfo a V entonces $n = m$. El mismo enunciado es válido para abiertos $U \subset \mathbb{R}_+^n$ y $V \subset \mathbb{R}_+^m$.*

El mensaje de este teorema es que los codominios euclidianos de las cartas en una variedad topológica han de ser todos ellos abiertos del mismo espacio euclíadiano. Por tanto, en la Definición 15.1 no hay necesidad de exigir que todas las cartas vayan al mismo \mathbb{R}^n , ya que este hecho está garantizado. Redordemos que el Teorema 8.3 del Tema 2 demuestra este resultado en el caso particular $n = 1$ o 2.

Teorema 15.3 (Invarianza del dominio) *Sean X una variedad topológica n -dimensional y $U \subset X$ un subespacio topológico de X . Si U es homeomorfo a un abierto euclíadiano $O \subset \mathbb{R}^n$ entonces U es un abierto de X .*

Este teorema expresa que todo subconjunto de una variedad topológica n -dimensional homeomorfo a un abierto euclíadiano de \mathbb{R}^n ha de ser abierto en la variedad. En particular, la nada trivial propiedad de que los subespacios euclidianos de \mathbb{R}^n homeomorfos a abiertos de \mathbb{R}^n han de ser abiertos de \mathbb{R}^n .

La siguiente proposición es muy útil.

Proposición 15.4 *Sean X, Y espacios topológicos conexos, T_2 y II-Axioma de Numerabilidad, y sea $f: X \rightarrow Y$ un homeomorfismo local sobreyectivo. Entonces*

X es variedad topológica n -dimensional $\iff Y$ es variedad topológica n -dimensional.

En particular, la tesis es válida si $f: X \rightarrow Y$ es un recubridor.

DEMOSTRACIÓN: Sean $y \in Y$ y $x \in f^{-1}(y)$. Siempre podemos encontrar entornos abiertos U de x y V de y de forma que $f|_U: U \rightarrow V$ es un homeomorfismo. Teniendo en cuenta que los dominios de las cartas en una variedad son una base de la topología, no implica pérdida de generalidad suponer que U ó V es homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^n , dependiendo de que sea X una variedad topológica ó lo sea Y . Por tanto ambos abiertos son homeomorfos a un abierto de \mathbb{R}^n , lo que concluye la prueba. ■

Ejercicio 15.5 *Los siguientes espacios son variedades topológicas:*

- *Un abierto de una variedad topológica n -dimensional es una variedad topológica n -dimensional: basta restringir cartas a la intersección con el abierto.*
- \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, es una variedad topológica n -dimensional recubierta por una sola carta: la aplicación $\text{Id}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- \mathbb{S}^n , $n \in \mathbb{N}$, es una variedad topológica n -dimensional recubierta por dos cartas: las proyecciones estereográficas desde el polo Norte y el polo Sur.
- \mathbb{P}^n , $n \in \mathbb{N}$, es una variedad topológica n -dimensional. Téngase en cuenta que \mathbb{S}^n recubre a \mathbb{P}^n .
- El producto $X \times Y$ de variedades topológicas X e Y de dimensiones n y m , respectivamente, es una variedad topológica de dimensión $n + m$.
- Todas las superficies regulares en \mathbb{R}^3 son variedades topológicas 2-dimensionales.

El estudio de las variedades topológicas es uno de los ejes centrales de la Topología y la Geometría. Los resultados más ambiciosos en este contexto son los de clasificación, en general de bastante sofisticación. Sólo en dimensiones uno y dos las respuestas obtenidas están a nuestro alcance. En este curso nos centraremos el el caso 2-dimensional bajo la hipótesis de compacidad.

La clasificación de las variedades topológicas 1-dimensionales no requiere de gran aparato matemático. Por falta de tiempo omitiremos los detalles de la misma y simplemente enunciaremos el siguiente:

Teorema 15.6 *Salvo homeomorfismos, las únicas variedades topológicas 1-dimensionales son \mathbb{S}^1 y \mathbb{R} .*

15.1. Superficies topológicas: Ejemplos

Los objetos que van a centrar nuestro estudio se presentan en la siguiente definición.

Definición 15.7 *Una superficie topológica es una variedad topológica 2-dimensional.*

Ejemplos de superficies topológicas son \mathbb{R}^2 , \mathbb{S}^2 , el Toro, el cilindro infinito, la botella de Klein, la cinta de Móbius infinita, todas las superficies regulares en \mathbb{R}^3 ,...

La compacidad es una propiedad topológica que hace mucho más manejable la familia de las superficies. Nuestra intención inmediata es presentar una familia de ejemplos de superficies topológicas *compactas* lo más vasta posible. La siguiente proposición es una herramienta bastante útil para este objetivo. Vamos a trabajar con esquemas binarios sobre un conjunto de índices \mathcal{U} infinito numerable. Es conveniente tener presentes las construcciones de la Sección 2.3.

Proposición 15.8 *Si $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ es un esquema binario puro, su realización canónica S_ω es una superficie topológica compacta.*

DEMOSTRACIÓN : Llamemos $\sigma_\omega: \overline{D} \rightarrow S_\omega$ a la identificación asociada a una representación de ω en el disco unidad \overline{D} de \mathbb{R}^2 , en particular $\text{Bd}(\overline{D}) = \mathbb{S}^1$ (por ejemplo la canónica, ver Definición 2.25). Como siempre $\Gamma_\omega = \sigma_\omega(\mathbb{S}^1) \subset S_\omega$ denotará al grafo borde asociado a ω y $V_\omega \subset \Gamma_\omega$ sus vértices.

De la Proposición 2.26 se sigue que S_ω es Hausdorff y II-Axioma de Numerabilidad. Resta comprobar que S_ω es localmente euclíadiano.

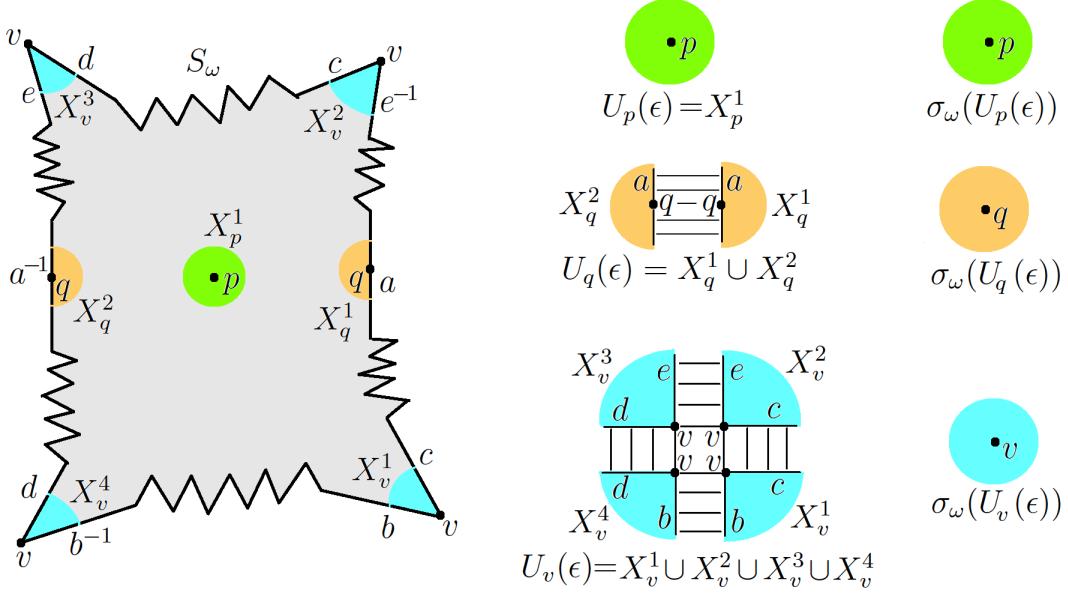
Para cada $p \in S_\omega$ llamemos

$$U_p(\epsilon) = \{x \in \overline{D}: \text{dist}(x, \sigma_\omega^{-1}(p)) < \epsilon\}.$$

Observemos que $U_p(\epsilon) \subset \overline{D}$ es un abierto σ_ω -saturado.

Como ω sea binario puro, para ϵ suficientemente pequeño tenemos que:

- (a) Si $p \in \sigma_\omega(D) \equiv D$, donde D denota $\text{Int}(\overline{D})$, entonces $U_p(\epsilon)$ es un disco abierto y $\sigma_\omega|_{U_p(\epsilon)}: U_p(\epsilon) \rightarrow \sigma_\omega(U_p(\epsilon))$ es un homeomorfismo.
- (b) Si $p \in \Gamma_\omega \setminus V(\Gamma_\omega)$ entonces $\overline{U_p(\epsilon)} = X_p^1 \cup X_p^2$, donde $X_p^1, X_p^2 \subset \overline{D}$ son discos topológicos compactos disjuntos con:
- $\sigma_\omega|_{X_p^j}: X_p^j \rightarrow \sigma_\omega(X_p^j)$ es un homeomorfismo, $j = 1, 2$.
 - $\gamma_j = \text{Bd}(X_p^j) \cap \mathbb{S}^1$ es un arco de Jordan, $j = 1, 2$.
 - $\sigma_\omega(\gamma_1) = \sigma_\omega(\gamma_2) \subset \Gamma_\omega$ es un arco de Jordan que contiene a p como punto interior.



Por tanto, la identificación $\sigma_\omega|_{\overline{U_p(\epsilon)}}: \overline{U_p(\epsilon)} \rightarrow \sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$ realiza el pegado de los discos X_p^1, X_p^2 por los arcos de Jordan borde γ_1 y γ_2 . De la Proposición 2.14 se infiere que $\sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$ es un disco topológico compacto y $p \in \sigma_\omega(U_p(\epsilon))$ es un disco topológico abierto.

- (c) Si $p \in V(\Gamma_\omega)$, entonces $\overline{U_p(\epsilon)} = \cup_{j=1}^k X_p^j$ donde $k = \#\sigma_\omega^{-1}(p) \geq 1$ y X_p^1, \dots, X_p^k son discos topológicos compactos disjuntos dos a dos en \overline{D} satisfaciendo:

- Si $k > 1$:
 - $\sigma_\omega|_{X_p^j}: X_p^j \rightarrow \sigma_\omega(X_p^j)$ es un homeomorfismo para todo $j = 1, \dots, k$.
 - $\text{Bd}(X_p^j) \cap \mathbb{S}^1 = \gamma_j^- \cup \gamma_j^+$, donde γ_j^\pm son arcos de Jordan con $\gamma_j^- \cap \gamma_j^+$ el único punto en $X_p^j \cap \sigma_\omega^{-1}(p)$, $j = 1, \dots, k$.
 - Salvo reordenaciones, $\sigma_\omega(\gamma_j^+) = \sigma_\omega(\gamma_{j+1}^-) \subset \Gamma_\omega$, $j = 1, \dots, k$, donde hemos convenido que $\gamma_{k+1}^+ = \gamma_1^-$.

Por tanto, la identificación $\sigma_\omega|_{\overline{U_p(\epsilon)}}: \overline{U_p(\epsilon)} \rightarrow \sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$ realiza el pegado cíclico de los k discos X_p^1, \dots, X_p^k identificando los pares $\gamma_j^+ \equiv \gamma_{j+1}^-$, $j = 1, \dots, k$. De la Proposición 2.14 se infiere que $\sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$ es un disco topológico compacto y $p \in \sigma_\omega(U_p(\epsilon))$ es un disco topológico abierto.

- Si $k = 1$ y $\overline{U_p(\epsilon)} = X_p^1$, entonces $\text{Bd}(X_p^1) \cap \mathbb{S}^1 = \gamma^- \cup \gamma^+$, donde γ^-, γ^+ son arcos de Jordan con $p = \gamma^- \cap \gamma^+$ y $\sigma_\omega(\gamma^-) = \sigma_\omega(\gamma^+) \subset \Gamma_\omega$.

Por tanto, la identificación $\sigma_\omega|_{\overline{U_p(\epsilon)}}: \overline{U_p(\epsilon)} \rightarrow \sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$ realiza el pegado de los arcos de Jordan borde γ^- y γ^+ en el disco compacto $\overline{U_p(\epsilon)}$. Del Ejercicio 2.17 se infiere que $\sigma_\omega(\overline{U_p(\epsilon)})$ es un disco topológico compacto y $p \in \sigma_\omega(U_p(\epsilon))$ es un disco topológico abierto.

Esto prueba que S_ω es localmente euclíadiano, y por tanto, una superficie topológica, lo que concluye la proposición. ■

Una vez conocida una familia amplia de ejemplos, es natural preguntarse por resultados de clasificación de superficies topológicas compactas. La respuesta a este problema no será sencilla y requerirá de cierta preparación y lenguaje.

16. Poliedros topológicos bidimensionales y triangulaciones

En esta sección vamos a presentar los poliedros topológicos (bidimensionales), unos espacios topológicos de naturaleza combinatoria más generales que las superficies y que serán claves en el contexto del Teorema de Radó. La pieza fundamental sobre la que basaremos nuestro trabajo será el concepto de triángulo topológico.

Definición 16.1 (Triángulo topológico) *Un triángulo topológico es un par formado por un disco topológico compacto T y tres puntos distintos $\{v_1, v_2, v_3\}$ destacados en la curva de Jordan $\text{Bd}(T)$.*

Si $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$ es un triángulo topológico:

- *Los puntos v_j , $j = 1, 2, 3$ se llamarán vértices de T .*
- *Si $\{i, j, h\} = \{1, 2, 3\}$ y $h \in \{1, 2, 3\}$, el arco de Jordan l_h en $\text{Bd}(T)$ uniendo los vértices v_i , v_j y no incidente con v_h será referido como el lado de T determinado por v_i y v_j . Obviamente T tiene tres lados $\{l_1, l_2, l_3\}$.*

Si no hay ambigüedad en la determinación de los vértices, T indicará indistintamente tanto al triángulo $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$ como al disco topológico compacto subyacente.

Si T es un triángulo y $l \subset T$ ($v \in T$), la expresión $l \leq T$ ($v \leq T$) indicará que l es un lado de T (v es un vértice de T). Análogamente, si l es un lado de T y $v \in l$, la expresión $v \leq l$ indicará que v es un vértice de T en l .

Denotaremos por

- $F(T) := \{T\}$ al conjunto formado por la única cara de T ,
- $E(T) = \{l_1, l_2, l_3\}$ al conjunto formado por los lados de T , y
- $V(T) = \{v_1, v_2, v_3\}$ al conjunto formado por los vértices de T .

Definición 16.2 (Orientación en un triángulo topológico) *Dado un triángulo topológico $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$, una orientación de T es una ordenación cíclica de sus vértices. Hay dos orientaciones posibles, a saber:*

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_1, \quad \text{que se representará por } (v_1, v_2, v_3) \equiv (v_2, v_3, v_1) \equiv (v_3, v_1, v_2)$$

y

$v_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2$, que se representará por $(v_2, v_1, v_3) \equiv (v_1, v_3, v_2) \equiv (v_3, v_2, v_1)$.

Un triángulo orientado es el par formado por un triángulo $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$ junto con una orientación (v_i, v_j, v_h) del mismo, y se denotará $(T, (v_i, v_j, v_h))$.

También podemos orientar los lados de T fijando una ordenación de sus vértices o extremos, este concepto ya se introdujo en la Definición 2.3.

La orientación (v_i, v_j, v_h) de T induce de forma natural orientaciones en los lados de T de acuerdo con el siguiente criterio:

$$(v_j, v_h) \text{ en } l_i, \quad (v_h, v_i) \text{ en } l_j, \quad (v_i, v_j) \text{ en } l_h.$$

Estas orientaciones explicitadas de los lados de T se dirán compatibles con la orientación global (v_i, v_j, v_h) de T y viceversa.

Dos triángulos orientados intersecándose en un lado común l se dirán compatiblemente orientados si inducen orientaciones opuestas sobre l .

Es evidente que una orientación de un subarco de Jordan γ dentro de un arco de Jordan γ' induce de forma canónica una orientación en γ' compatible. Basta observar que γ' es homeomorfo a $[0, 1]$ y entender esta idea sobre el intervalo $[0, 1]$, donde la orientación (ordenación de extremos) se interpreta como un sentido de recorrido del intervalo vía una parametrización. Por tanto, para orientar un lado l de un triángulo topológico T basta con orientar cualquier subarco de Jordan γ de l . La única orientación en T compatible con esta orientación inducida en l se dirá la inducida por el subarco orientado γ en T , y recíprocamente una orientación en T induce otra en cualquier subarco de Jordan de sus lados por ese criterio.

Definición 16.3 (Triángulo euclídeo) Un triángulo euclídeo (o geométrico) en \mathbb{R}^2 es la envolvente convexa de tres puntos afínmente independientes. Si v_1, v_2, v_3 son los vértices de un triángulo euclídeo T en \mathbb{R}^2 , la orientación (v_1, v_2, v_3) se dirá positiva o contraria al sentido de recorrido de las agujas del reloj si

$$\det(v_2 - v_1, v_3 - v_1) > 0.$$

En otro caso se dirá negativa o a favor de las agujas del reloj.

Si $T_1, T_2 \subset \mathbb{R}^2$ son dos triángulos euclídeos orientados positivamente e incidentes en un lado l , el álgebra lineal nos dice que T_1 y T_2 inducen orientaciones opuestas en l , y por tanto, que T_1 y T_2 están compatiblemente orientados.

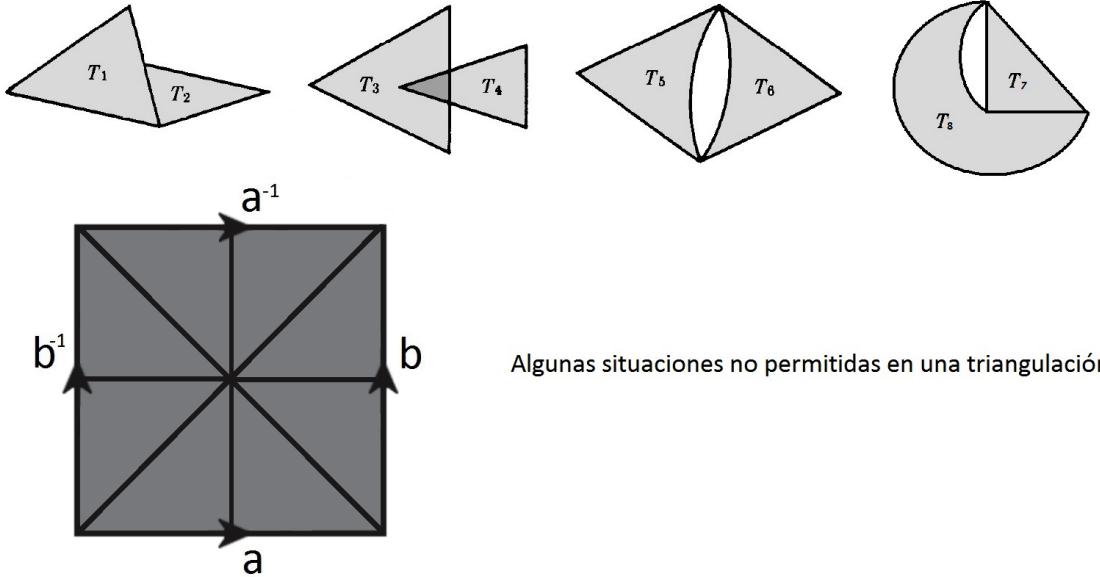
Definición 16.4 (Poliedro topológico bidimensional) Un espacio topológico compacto X se dice ser un poliedro topológico bidimensional, o simplemente un poliedro, si existe una familia finita \mathcal{T} de triángulos topológicos satisfaciendo:

- (I) T es un subespacio topológico de X para todo $T \in \mathcal{T}$.
- (II) Si $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ son triángulos distintos, entonces $T_1 \cap T_2$ es el vacío, un vértice común o un lado común.
- (III) $\cup_{T \in \mathcal{T}} T = X$.

De la familia de triángulos \mathcal{T} diremos que es una triangulación de X . Un par (X, \mathcal{T}) formado por un poliedro X y una triangulación suya \mathcal{T} se le referirá como un poliedro triangulado.

Dos triángulos distintos de una triangulación de X que comparten sólo un vértice se dirán incidentes en ese vértice. De igual forma, si comparten un lado se dirán contiguos o incidentes en ese lado.

Si además X es una superficie topológica, se dice que \mathcal{T} es una triangulación de la superficie X y que el par (X, \mathcal{T}) es una superficie topológica compacta triangulada.



Si (X, \mathcal{T}) es un poliedro triangulado, llamaremos:

- $F(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} F(T)$ al conjunto de todos las caras de \mathcal{T} ,
- $E(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} E(T)$ al conjunto de todos los lados de \mathcal{T} , y
- $V(\mathcal{T}) := \cup_{T \in \mathcal{T}} V(T)$ al conjunto de todos los vértices de \mathcal{T} .

Las triangulaciones se comportan bien respecto a los homeomorfismos, en el sentido de que si $H: X_1 \rightarrow X_2$ es un homeomorfismo entre poliedros y \mathcal{T} es una triangulación de X_1 , entonces

$$H(\mathcal{T}) := \{H(T) : T \in \mathcal{T}\}$$

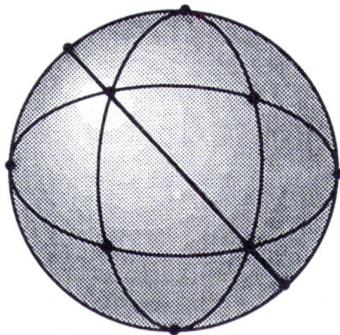
es una triangulación de X_2 . Ha de entenderse que los vértices de $H(T)$ son las imágenes por H de los vértices de T para todo $T \in \mathcal{T}$, esto es, que H aplica unívocamente los lados y vértices de \mathcal{T} en los lados y vértices de $H(\mathcal{T})$.

La siguiente definición jugará un papel muy importante en lo que resta de tema.

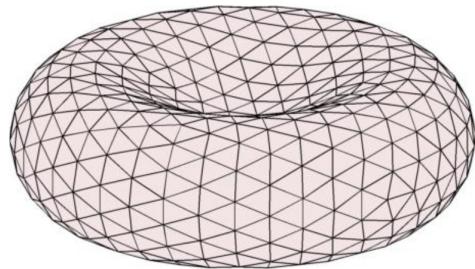
Definición 16.5 (Característica de Euler de una triangulación) Sea \mathcal{T} una triangulación de un poliedro X . Al número entero

$$\chi_{\mathcal{T}}(X) := \#F(\mathcal{T}) - \#E(\mathcal{T}) + \#V(\mathcal{T})$$

se le llamará la característica de Euler de la triangulación \mathcal{T} de X .



Triangulación de la Esfera



Triangulación del Toro

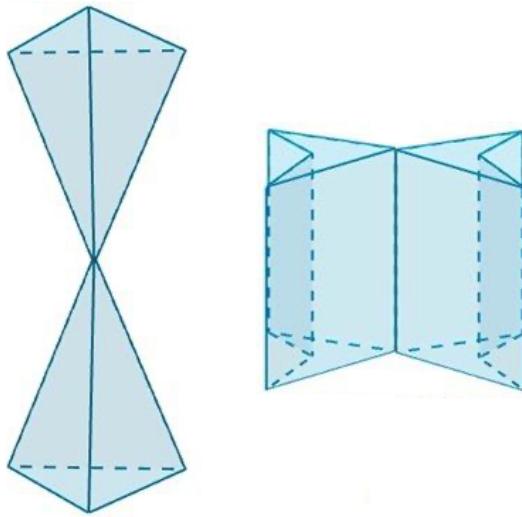


Figura 4: Poliedros que no son superficies

Reparemos en que cada punto $v \in V(\mathcal{T})$ puede ser vértice de varios triángulos de \mathcal{T} , y análogamente cada arco de Jordan $l \in E(\mathcal{T})$ puede ser lado de más de un triángulo de \mathcal{T} . El cálculo correcto de $\chi_{\mathcal{T}}(S)$ no ha de tener en cuenta esas multiplicidades, y tanto cada vértice $v \in V(\mathcal{T})$ como cada lado $l \in E(\mathcal{T})$ han de contarse una sola vez.

Definición 16.6 (Orientabilidad de una triangulación) Una triangulación \mathcal{T} de un políedro políedro X se dice orientable si es posible elegir una orientación en cada uno de sus triángulos de forma que cada par de ellos contiguos (con un lado común) estén compatiblemente orientados, esto es, induzcan en su lado común orientaciones opuestas. Si \mathcal{T} es orientable, una orientación global en \mathcal{T} será una elección de orientaciones en todos y cada uno de sus triángulos de \mathcal{T} de forma que cada dos contiguos satisfagan la anterior condición de compatibilidad. En ese caso también diremos que es posible elegir una orientación global compatible de los triángulos de \mathcal{T} . Obviamente si \mathcal{T} es orientable entonces admite dos orientaciones globales.

En caso de que no sea posible elegir una orientación global compatible de los triángulos de \mathcal{T} se dirá que \mathcal{T} es no orientable.

16.1. Cálculo de la característica de Euler y el carácter de orientabilidad

Sería deseable que dos triangulaciones distintas de un poliedro comparten la característica de Euler y carácter de orientabilidad. Este es el mensaje del siguiente resultado que enunciamos sin demostración.

Teorema 16.7 (Teorema de Euler) *Sea X un poliedro. Si $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ son dos triangulaciones de X entonces*

- $\chi_{\mathcal{T}_1}(X) = \chi_{\mathcal{T}_2}(X).$
- \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 tienen el mismo carácter de orientabilidad.

Por tanto, podemos definir la característica de Euler y el carácter de orientabilidad de un poliedro de forma consistente utilizando cualquiera de sus triangulaciones.

Definición 16.8 *Sea X un poliedro.*

- *Se define la característica de Euler de X como $\chi(X) := \chi_{\mathcal{T}}(X)$ para cualquier triangulación de X .*
- *Se dice que X es orientable (no orientable) si y sólo si cualquier triangulación \mathcal{T} de X es orientable (no orientable).*

Corolario 16.9 *La característica de Euler y el carácter de orientabilidad son invariantes topológicos, esto es, dos poliedros homeomorfos tienen la misma característica de Euler y el mismo carácter de orientabilidad.*

DEMOSTRACIÓN: Si X, X' son poliedros, $H: X \rightarrow X'$ un homeomorfismo, \mathcal{T} una triangulación de X y $\mathcal{T}' := H(\mathcal{T})$ la triangulación inducida por H en X' , entonces la característica de Euler y carácter de orientabilidad de \mathcal{T} y \mathcal{T}' son trivialmente iguales. Del Teorema 16.7 se sigue el resultado. ■

Un disco topológico compacto es un triángulo salvo elegir tres puntos borde como sus vértices. Por tanto:

Observación 16.10 *Todo disco topológico compacto X es un poliedro orientable con $\chi(X) = 1$.*

Corolario 16.11 (Característica de Euler del disco abierto) *Sea X un disco topológico compacto y \mathcal{T} una triangulación suya. Denotemos por*

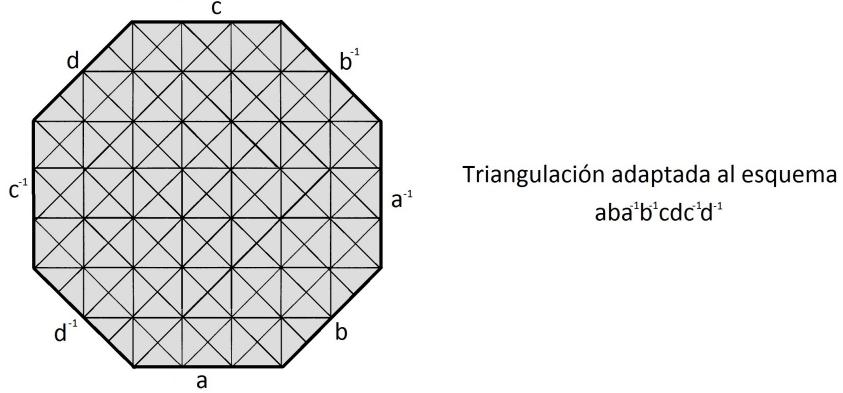
$$E_0(\mathcal{T}) := \{l \in E(\mathcal{T}): l \not\subseteq \text{Bd}(X)\} \quad y \quad V_0(\mathcal{T}) := \{v \in V(\mathcal{T}): v \notin \text{Bd}(X)\}.$$

Entonces $\chi_{\mathcal{T}}(\text{Int}(X)) := \#F(\mathcal{T}) - \#E_0(\mathcal{T}) + \#V_0(\mathcal{T}) = \chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$.

DEMOSTRACIÓN: Como $\text{Bd}(X)$ es un ciclo, contiene la misma cantidad de lados que de vértices de \mathcal{T} . El resultado se sigue trivialmente del hecho que $\chi(X) = \chi_{\mathcal{T}}(X) = 1$ (usar el Teorema 16.7). ■

Lema 16.12 *La realización S_{ω} de un esquema ω es un poliedro.*

En consecuencia, por el Teorema 16.7 la característica de Euler y el carácter de orientabilidad de S_{ω} están bien definidos.



DEMOSTRACIÓN: Basta con representar el esquema ω en una región poligonal convexa regular con tantos vértices como longitud tenga el esquema (ver un ejemplo en la figura de abajo), y subdividir la región convexa en convenientes triángulos geométricos suficientemente pequeños para que sus proyecciones a S_ω vía la identificación σ_ω generen una triangulación de S_ω . ■

Definición 16.13 Sea $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ un esquema, sea $(\mathfrak{a} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k), \mathfrak{h})$ una representación suya en cualquier disco topológico compacto X , y sea $\sigma_\omega: X \rightarrow S_\omega$ la identificación asociada. Una triangulación \mathcal{T} de S_ω se dirá adaptada a ω si todo $\gamma_j \in \mathfrak{a}$ es unión de una cantidad finita de lados de $E(\mathcal{T})$, ó equivalentemente, si

$$V(\Gamma_\omega) \subset V(\mathcal{T}) \quad y \quad \Gamma_\omega \subset \cup_{l \in E(\mathcal{T})} l,$$

donde como siempre Γ_ω es el grafo conexo asociado a ω .

Ofrecemos a continuación el cálculo de la característica de Euler y el carácter de orientabilidad del espacio realización S_ω de un esquema ω .

Proposición 16.14 Si ω es un esquema entonces:

- (a) $\chi(S_\omega) = 1 + \chi(\Gamma_\omega)$, donde Γ_ω es el grafo conexo borde de ω .
- (b) S_ω es orientable si y sólo si el esquema ω es binario y orientable.

DEMOSTRACIÓN: Sea \mathcal{T} una triangulación adaptada a ω . Por el Teorema 16.7 la característica de Euler de S_ω y u carácter de orientabilidad se pueden calcular a utilizando la triangulación \mathcal{T} .

Para probar (a), observemos que la Definición 16.8, el Corolario 16.11 y la Definición 2.21 dan sentido al siguiente cálculo:

$$\chi_\tau(S_\omega) = \chi_\tau(\text{Int}(S_\omega)) + \chi(\Gamma_\omega) = 1 + \chi(\Gamma_\omega).$$

Probemos (b). Representemos el esquema ω en una región poligonal convexa y regular Δ , y tomemos una triangulación geométrica \mathcal{T}' de Δ tal que $\sigma_\omega(\mathcal{T}') = \mathcal{T}$ sea una triangulación de S_ω adaptada a ω , donde $\sigma_\omega: \Delta \rightarrow S_\omega$ es la identificación asociada a ω . En particular, $\sigma_\omega(T') \in \mathcal{T}$ y $\sigma_\omega|_{T'}: T' \rightarrow \sigma_\omega(T')$ es un homeomorfismo para todo $T' \in \mathcal{T}'$. Elijamos la orientación positiva del plano en los triángulos euclídeos \mathcal{T}' , que es claramente globalmente compatible. Traslademos estas orientaciones a los triángulos de \mathcal{T} vía σ_ω , generando así una orientación en todos y cada uno de los

triángulos de \mathcal{T} . Obviamente \mathcal{T} será orientable si y solo si estas orientaciones determinan una orientación global compatible en \mathcal{T} , lo que es equivalente a decir que cada dos triángulos $\sigma_\omega(T_1)$ y $\sigma_\omega(T_2)$ contiguos a un lado $l \in E(\mathcal{T})$, $l \subset \Gamma_\omega$, están compatiblemente orientados. Llamemos $l_j := (\sigma_\omega|_{T_j})^{-1}(l) \in E(T_j)$, $l_j \subset \text{Bd}(\Delta)$, $j = 1, 2$. Es claro que las orientaciones compatibles de los triángulos de \mathcal{T}' inducen en los lados que descansan en $\text{Bd}(\Delta)$ orientaciones compatibles. Por tanto, $\sigma_\omega(T_1)$ y $\sigma_\omega(T_2)$ inducirán orientaciones opuestas en su lado común l (y estarán compatiblemente orientados como triángulos orientados) si y solo si el homeomorfismo $(\sigma_\omega|_{l_2})^{-1} \circ (\sigma_\omega|_{l_1})$ revierte las orientaciones de los arcos de Jordan l_1 y l_2 en $\text{Bd}(\Delta)$. Como $l_j \subset \gamma_{i_j}$ para algún $\gamma_{i_j} \in \alpha$, $j = 1, 2$, $\sigma_\omega(T_1)$ y $\sigma_\omega(T_2)$ estarán compatiblemente orientados si y sólo si el homeomorfismo $(\sigma_\omega|_{\gamma_{i_2}})^{-1} \circ (\sigma_\omega|_{\gamma_{i_1}}) \in \mathfrak{h}$ revierte las orientaciones de los arcos de Jordan γ_{i_1} y γ_{i_2} en $\text{Bd}(\Delta)$. Esta discusión también prueba que si \mathcal{T} es orientable entonces no puede contener tres triángulos contiguos a un mismo lado $l \in E(\mathcal{T})$, $l \subset \Gamma_\omega$. En definitiva, concluimos que \mathcal{T} es orientable si y sólo si el esquema ω es binario y orientable, probando (b). ■

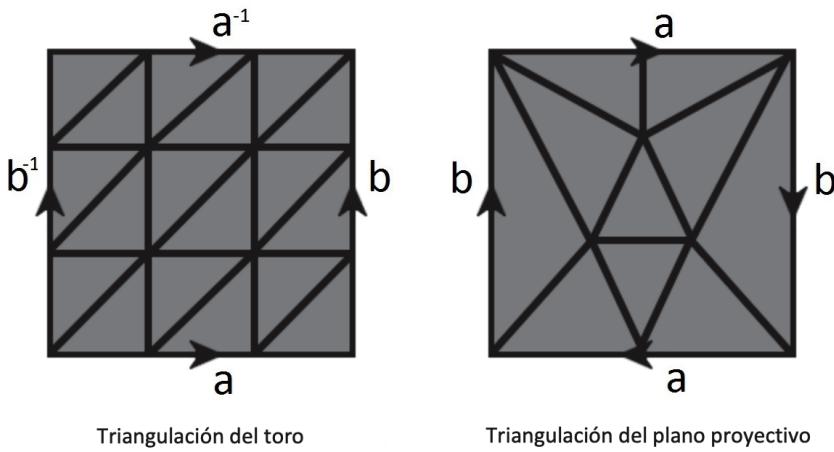
17. El Teorema de Radó

El ingrediente fundamental para la clasificación de las superficies topológicas compactas será el siguiente teorema clásico, que enunciaremos sin demostración.

Teorema 17.1 (Teorema de Radó) *Toda superficie topológica compacta es un poliedro, esto es, admite una triangulación.*

Como consecuencia de los Teoremas 17.1 y 16.7,

Observación 17.2 *Toda superficie compacta tiene bien definidos su característica de Euler y carácter de orientabilidad, que pueden ser calculados usando cualquiera de sus triangulaciones.*

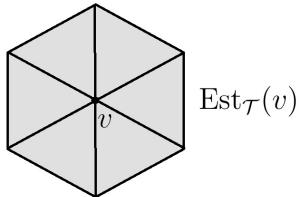


Ciertamente no todo poliedro es una superficie topológica. De hecho, la disposición de los triángulos en una triangulación de una superficie es especial, y conecta con la idea intuitiva de teselación de una región plana como explica la siguiente proposición.

Proposición 17.3 *Si S es una superficie topológica compacta y \mathcal{T} una triangulación suya, entonces:*

- (a) $T \setminus \text{Bd}(T)$ es un abierto de S para todo $T \in \mathcal{T}$.

- (b) Para todo $l \in E(\mathcal{T})$, existen exactamente dos triángulos de \mathcal{T} incidentes con l .
- (c) Si $v \in V(\mathcal{T})$, la estrella de v , definida como el conjunto $\text{Est}(v) := \cup_{v \leq T \in \mathcal{T}} T$, es un disco topológico compacto (cuando sea necesario enfatizar la triangulación escribiremos $\text{Est}_{\mathcal{T}}(v)$). Además, si $l_v(T)$ denota al único lado de T no incidente con v para cada $T \in \mathcal{T}$ contenido en $\text{Est}(v)$, entonces $\text{Est}^*(v) := \cup_{j=1}^k (T_j \setminus l_v(T_j))$ es un abierto en S conteniendo a v .



DEMOSTRACIÓN: . El ítem (a) es consecuencia inmediata del Teorema de Invarianza del Dominio. Para el ítem (b) téngase en cuenta el círculo de ideas alrededor de la Proposición 9.6 y utilícese que S es localmente euclídea bidimensional. Para probar el ítem (c), primero usemos que S es localmente euclídea alrededor de v para garantizar que $\text{Est}(v) \setminus \{v\}$ es conexo, y luego usemos Proposición 2.14 y (b) para garantizar que $\text{Est}(v)$ es un disco topológico compacto con $\text{Int}(\text{Est}(v)) = \text{Est}^*(v)$. ■

Ejercicio 17.4 Sea $P \subset \mathbb{R}^3$ un poliedro regular, esto es, un poliedro $P \cong \mathbb{S}^2$ unión de una cantidad finita de polígonos cerrados regulares (llamados caras de P) satisfaciendo:

- (I) Todas las caras tienen el mismo número $k \geq 3$ de lados.
- (II) Si dos caras distintas se cortan entonces lo hacen en lados comunes.
- (III) A cada vértice llegan el mismo número $s \geq 3$ de aristas.

Probar que P satisface la fórmula de Euler

$$V - E + F = 2,$$

donde V, E y F indican el número de vértices, aristas y caras en P , respectivamente.

Deducir que solo hay 5 poliedros regulares o sólidos platónicos: tetraedro, octaedro, icosaedro, cubo y dodecaedro.

SOLUCIÓN: Recordemos que el tetraedro clásico es un poliedro homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 , y nos proporciona una triangulación de la misma sobre la que calcular su característica de Euler. Como tiene 4 vértices, 6 aristas y 4 caras, deducimos del Teorema 16.7 que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$. Ahora bien, cada polígono regular Ω en un plano de \mathbb{R}^3 se puede triangular fijando un vértice y trazando segmentos que lo conecten con el resto de sus vértices; llamemos \mathcal{T}_Ω a la triangulación así obtenida. Si hacemos esta operación en todas las caras Ω de P se obtiene una triangulación global \mathcal{T} de P que lógicamente satisfará $\chi_\tau(P) = 2$ por el Teorema 16.7 ya que $P \cong \mathbb{S}^2$. Si además tenemos en cuenta que

- el Corolario 16.11 nos da $\chi_{\mathcal{T}_\Omega}(\text{Int}(\Omega)) = 1$ y
- los lados y vértices de \mathcal{T} en el borde de los polígonos regulares o caras Ω de P coinciden con las aristas y vértices de P ,



podemos relacionar la característica de Euler de P con la suma alternada:

$$2 = \chi_T(P) = V - E + F.$$

Recordemos que el entero $k \geq 3$ indicaba el número de lados (y por tanto de vértices) de cualquier cara de P ; aquí hemos usado (i). Como P es una superficie topológica, cada arista es común exactamente a dos caras de P ; para convencerse úsese las ideas de la demostración de la Proposición 17.3-(b). Por tanto $E = \frac{k}{2}F$, y análogamente $V = \frac{k}{s}F$ donde $s \geq 3$ es el número de aristas incidentes en los vértices de P . Se concluye de lo anterior que

$$2 = \chi(P) = V - E + F = F\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{2} + 1\right).$$

En particular $\frac{k}{s} - \frac{k}{2} + 1 > 0$, esto es,

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}.$$

Demostremos que

$$s \geq 4 \Rightarrow k = 3, s \in \{4, 5\} \quad \text{y} \quad k \geq 4 \Rightarrow s = 3, k \in \{4, 5\}.$$

En efecto, si $s \geq 4$ entonces tendríamos que

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{k} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2},$$

y por tanto

$$\frac{1}{k} > \frac{1}{4} \iff k < 4.$$

Como $k \geq 3$ deducimos que $k = 3$, y la desigualdad

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{s} = \frac{1}{k} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2} \iff \frac{1}{s} > \frac{1}{6}$$

fuerza a que $s \leq 5$, esto es, $s = 4, 5$ (recordemos que $s \geq 3$).

Análogamente se razona cuando $k \geq 4$.

Por tanto sólo se pueden dar las siguientes posibilidades:

- $k = s = 3$: En este caso la ecuación $2 = F\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{2} + 1\right)$ da $F = 4$ (tetraedro).
 - $k = 4, s = 3$: En este caso la ecuación $2 = F\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{2} + 1\right)$ da $F = 6$ (cubo).
 - $k = 5, s = 3$: En este caso la ecuación $2 = F\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{2} + 1\right)$ da $F = 12$ (dodecaedro).
 - $k = 3, s = 4$: En este caso la ecuación $2 = F\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{2} + 1\right)$ da $F = 8$ (octaedro).
 - $k = 3, s = 5$: En este caso la ecuación $2 = F\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{2} + 1\right)$ da $F = 20$ (icosaedro).
-

Ejercicio 17.5 Se divide un balón de fútbol en piezas homeomorfas a pentágonos o hexágonos (no todas las piezas han de ser homeomorfas al mismo tipo de polígono) de modo que:

- (I) Cada arista es compartida por exactamente dos caras.
- (II) A cada vértice llegan exactamente tres aristas.



Demostrar que el número de piezas pentagonales ha de ser necesariamente 12.

SOLUCIÓN: Cada pentágono tiene 5 lados y 5 vértices, y cada hexágono 6 lados y 6 vértices. Denotemos por p el número de pentágonos y h el de hexágonos en nuestro balón (esfera topológica 2-dimensional). Razonando como en el ejercicio anterior, de nuestras hipótesis y del hecho que $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ se deduce que

$$2 = \frac{1}{3}(5p + 6h) - \frac{1}{2}(5p + 6h) + (p + h) = \frac{1}{6}p,$$

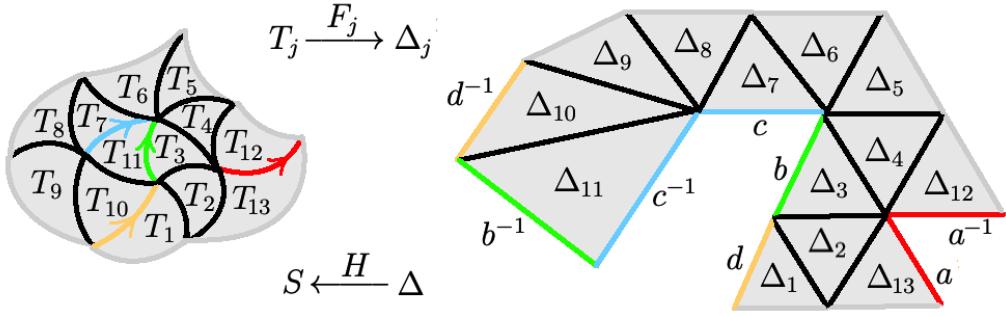
esto es $p = 12$.

■

17.1. Superficies compactas y esquemas binarios puros

La consecuencia más relevante del Teorema de Radó es que toda superficie compacta es el espacio realización de un esquema binario puro. Este resultado será clave para la clasificación de estos objetos. La demostración consistirá en probar que en toda triangulación de una superficie compacta es posible eliminar una familia finita de lados de su 1-esqueleto para que el complemento sea simplemente conexo, y por tanto desarrollable homeomórficamente sobre el plano a modo de puzzle de triángulos euclidianos. La superficie se regenerará revirtiendo el proceso de corte anterior, pegando convenientemente los lados borde de la región poligonal plana generada.

Teorema 17.6 (Representación poligonal de superficies) Toda superficie topológica compacta S es homeomorfa al espacio realización de un esquema binario puro.



DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema 17.1 podemos encontrar una triangulación \mathcal{T} de S . Por la conexión de S , podemos encontrar una ordenación $\{T_1, \dots, T_k\}$ de los triángulos de \mathcal{T} tal que

$$T_{j+1} \cap (\bigcup_{i=1}^j T_i) \text{ contenga al menos un lado } T_{j+1}, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

Elijamos un lado $l_j \subset T_{j+1} \cap (\bigcup_{i=1}^j T_i) \in E(T_{j+1})$ para cada $j = 1, \dots, k-1$.

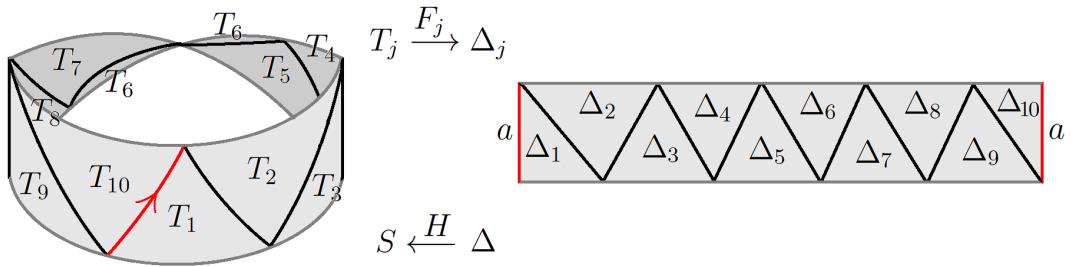
La Proposición 2.14 nos facilita la construcción de una sucesión $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ de triángulos euclídeos en \mathbb{R}^2 satisfaciendo que:

- La región poligonal $\Delta := \bigcup_{i=1}^k \Delta_i$ es una disco topológico.
- $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ es una triangulación de Δ .
- $l'_j := \Delta_{j+1} \cap (\bigcup_{i=1}^j \Delta_i)$ es un lado de Δ_{j+1} para todo $j = 1, \dots, k-1$.

Usando inductivamente Corolario 2.8, es posible construir una sucesión de homeomorfismos $\{F_j: T_j \rightarrow \Delta_j: j = 1, \dots, k\}$ tales que:

$$\text{Si } l := T_i \cap T_h \in \{l_1, \dots, l_{k-1}\} \implies F_i|_l = F_h|_l, \quad i, h \in \{1, \dots, k\}.$$

Definamos



$$H: \Delta \rightarrow S, \quad H|_{\Delta_j} := F_j^{-1} \quad \text{para todo } j \in \{1, \dots, k\},$$

y observemos que por construcción:

- H es una identificación (continua y sobreyectiva de un compacto en un Hausdorff, ver Proposicion 1.11).
- H conecta homeomórficamente triángulos de \mathcal{T}_0 y de \mathcal{T} .
- Si $E_0 := E(\mathcal{T}) \setminus \{l_1, \dots, l_{k-1}\}$ entonces

$$H(\text{Bd}(\Delta)) = \bigcup_{l \in E_0} l \quad \text{y} \quad H(\text{Int}(\Delta)) = S \setminus \left(\bigcup_{l \in E_0} l \right).$$

- $H|_{\text{Int}(\Delta)}: \text{Int}(\Delta) \rightarrow S \setminus (\bigcup_{l \in E_0} l)$ es un homeomorfismo.

Por la Proposición 1.9,

$$\hat{H}: \Delta/\sim_H \rightarrow S, \quad \hat{H}([p]) := H(p),$$

es un homeomorfismo, donde \sim_H es la relación de equivalencia

$$p \sim_H q \iff H(p) = H(q).$$

Como $H|_{\text{Int}(\Delta)}$ es inyectiva, el cociente Δ/\sim_H es un disco con borde identificado. La clave será demostrar que \sim_H es la relación de equivalencia asociada a un esquema binario.

Recorramos de forma cíclica, en sentido contrario a las agujas del reloj, la sucesión lados del borde de la región poligonal Δ :

$$\alpha = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\},$$

donde $m = \#E_0$. Esto significa que el punto final del segmento orientado γ_j coincide con el inicial de γ_{j+1} , $j = 1, \dots, m$, donde hemos convenido que $\gamma_{m+1} = \gamma_1$.

Como S es una superficie topológica, la Proposición 17.3-(b) implica que cada lado $l \in E_0$ es común a dos únicos triángulos $T_{i(l)}, T_{j(l)} \in \mathcal{T}$ distintos, y por tanto los arcos de α

$$\gamma_{i(l)} := F_{i(l)}(l), \quad \gamma_{j(l)} := F_{j(l)}(l)$$

son segmentos distintos de $\text{Bd}(\Delta)$ con

$$H(\gamma_{i(l)}) = H(\gamma_{j(l)}).$$

Como $H(\text{Bd}(\Delta)) = \bigcup_{l \in E_0} l$, y de hecho

$$\text{Bd}(\Delta) = \bigcup_{l \in E_0} (\gamma_{i(l)} \cup \gamma_{j(l)}),$$

este argumento garantiza que cada segmento $\gamma_i \in \alpha$ está emparejado unívocamente con otro segmento $\gamma_j \in \alpha \setminus \{\gamma_i\}$ de acuerdo al criterio

$$H(\gamma_i) = H(\gamma_j)$$

(y en particular m es par!).

Llamemos

$$I = \{(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2 : i = j \text{ ó } \gamma_i, \gamma_j \text{ están emparejados según } H\},$$

y definamos para $(i, j) \in I$ los homeomorfismos

$$h_{i,j} = \text{Id}_{\gamma_i} \text{ si } i = j, \quad h_{i,j}: \gamma_i \rightarrow \gamma_j, \quad h_{i,j} := (F_j \circ F_i^{-1})|_{\gamma_i}, \quad \text{si } i \neq j.$$

Evidentemente de nuestra definición

$$H(p) = H(q) \iff p = q \text{ ó } \{p, q\} = \{r, h_{i,j}(r)\} \text{ para algún } r \in \gamma_i, (i, j) \in I.$$

De aquí que la familia de homeomorfismos

$$\mathfrak{h} = \{h_{i,j} : (i, j) \in I\},$$

utilizada para identificar puntos del borde de Δ induzca justo la relación \sim_H .

Para acabar, basta con considerar cualquier esquema binario puro ω definido con los siguientes criterios:

- ω tiene longitud m (par).
- ω coloca el mismo símbolo repetido en las posiciones $(i, j) \in I$, $i \neq j$, correspondientes a segmentos de α emparejados según H .
- Los exponentes ± 1 que acompañan a los símbolos repetidos en las posiciones $(i, j) \in I$, $i \neq j$, son iguales o distintos dependiendo de que $h_{i,j}: \gamma_i \rightarrow \gamma_j$ conserve o revierta la orientación de los segmentos orientados γ_i y γ_j de $\text{Bd}(\Delta)$.

Con esta definición, el par (α, \mathfrak{h}) es una representación de ω en el disco topológico compacto Δ , y la correspondiente realización S_ω es naturalmente homeomorfa a $\Delta / \sim_H \cong S$. Esto acaba el teorema. ■

18. Cirugía topológica con esquemas binarios puros

Como consecuencia del Teorema 17.1 y el de la representación poligonal de superficies (ver Teorema 17.6), toda superficie compacta es el poliedro asociado a un esquema binario puro. En esta sección vamos a clasificar salvo equivalencias los esquemas binarios puros, y por tanto, las superficies topológicas compactas.

Definición 18.1 Dos esquemas binarios puros ω_1, ω_2 se dirán equivalentes si existe un homeomorfismo $F: S_{\omega_1} \rightarrow S_{\omega_2}$. En ese caso escribiremos $\omega_1 \sim \omega_2$ ó $\omega_1 \xrightarrow{F} \omega_2$ si queremos enfatizar el homeomorfismo.

Necesitamos introducir algún lenguaje.

Si $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ es un esquema escribiremos

$$\omega^{-1} = b_k^{-\epsilon(k)} \dots b_1^{-\epsilon(1)}.$$

Si $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ es binario, $(\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_k), \mathfrak{h})$ una representación suya en un disco topológico compacto X , y $\sigma_\omega: X \rightarrow S_\omega$ la identificación asociada, recordemos que

$$V_\omega := \{\sigma_\omega(p): p \in \bigcup_{i=1}^k V(\gamma_i)\} \subset \Gamma_\omega$$

es el conjunto de los vértices de ω (aquí $V(\gamma_j)$ refiere a los extremos del arco de Jordan orientado γ_j en $\text{Bd}(X)$ para cada j). La expresión

$$b_j^{\epsilon(j)} \wedge^{Q_j} b_{j+1}^{\epsilon(j+1)}$$

indicará que $Q_j = \sigma_\omega(p_j) \in V_\omega$, con $p_j := \gamma_j \cap \gamma_{j+1} \in \bigcup_{i=1}^k V(\gamma_i)$, $j = 1, \dots, k$ (hacemos el convenio $b_{k+1}^{\epsilon(k+1)} = b_1^{\epsilon(1)}$ y $\gamma_{k+1} = \gamma_1$). Por ejemplo, podemos escribir

$$\omega = b_1^{\epsilon(1)} \wedge^{Q_1} \dots \wedge^{Q_{k-1}} b_k^{\epsilon(k)} \wedge^{Q_k} \equiv \wedge^{Q_k} b_1^{\epsilon(1)} \wedge^{Q_1} \dots \wedge^{Q_{k-1}} b_k^{\epsilon(k)}$$

para enfatizar la lista de vértices de ω . Nótese que el cardinal $\#V_\omega$ es menor o igual que $k = \text{Long}(\omega)$. En caso de que \mathcal{T} sea una triangulación de S_ω adaptada a ω , es claro que $V_\omega \subset V(\mathcal{T}) \cap \Gamma_\omega$.

Para cada $Q \in V_\omega$ el conjunto $\sigma_\omega^{-1}(Q)$ contiene aquellos extremos de arcos en α que se proyectan por σ_ω en Q . Es claro que

$$\sum_{Q \in V_\omega} \#\sigma_\omega^{-1}(Q) = \text{Long}(\omega).$$

Por último utilizaremos la siguiente notación:

Definición 18.2 Sea $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ un esquema, y sea $\{b_i^{\epsilon(i)}, b_j^{\epsilon(j)}\}$ un par de sílabas en ω con $i \neq j$ y $b_i = b_j$. El par $\{b_i^{\epsilon(i)}, b_j^{\epsilon(j)}\}$ se dirá de primera especie si $\epsilon(i)\epsilon(j) = -1$, y de segunda especie si $\epsilon(i)\epsilon(j) = 1$.

Como consecuencia, un esquema binario es orientable (y su realización una superficie compacta orientable) si y sólo si todos sus pares son de primera especie, y no orientable (y su realización una superficie compacta no orientable) si tiene al menos un par de segunda especie.

El siguiente lema establece unas reglas básicas de transformación por equivalencias para esquemas binarios puros.

Lema 18.3 (Reglas de transformación) Consideremos esquemas ν_j , $j = 1, \dots, 4$ y símbolos $a, b \notin \cup_{j=1}^4 \text{sop}(\nu_j)$.

(a) Asumamos que los esquemas ω_1 y ω_2 de la siguiente lista son binarios puros:

- (I) $\omega_1 = \nu_1\nu_2$ y $\omega_2 := \nu_2\nu_1$,
- (II) $\omega_1 = \nu_1$ y $\omega_2 := \nu_1^{-1}$,
- (III) $\omega_1 := \nu_1\nu_2a\nu_3\nu_4a^{-1}$ y $\omega_2 := \nu_2\nu_1b\nu_4\nu_3b^{-1}$, y
- (IV) $\omega_1 := \nu_1\nu_2a\nu_3\nu_4a$ y $\omega_2 := \nu_3^{-1}\nu_1b\nu_4\nu_2^{-1}b$,

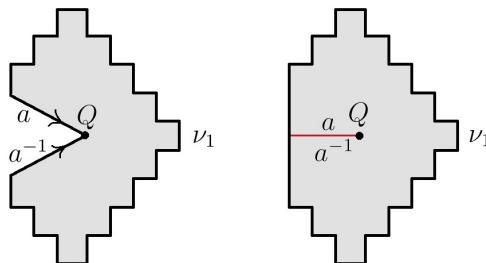
Entonces $\omega_1 \xrightarrow{F} \omega_2$ con $F(V_{\omega_1}) = V_{\omega_2}$.

(b) Si $\omega_1 := a \stackrel{Q}{\wedge} a^{-1}\nu_1$ y $\omega_2 := \nu_1 \neq 1$ son binarios puros (por tanto $\#\sigma_{\omega_1}^{-1}(Q) = 1$), entonces $\omega_1 \xrightarrow{F} \omega_2$ con $F(V_{\omega_1} \setminus \{Q\}) = V_{\omega_2}$.

Además en todos los casos ω_1 y ω_2 tienen el mismo carácter de orientabilidad, y sólo en el caso (b) el homeomorfismo F altera el número de vértices del grafo borde del esquema, reduciéndolo en una unidad.

DEMOSTRACIÓN: Para probar (b), tomemos un disco compacto X y la identificación $\sigma_\omega: X \rightarrow S_{\omega_1}$ asociada a ω_1 . Nótese que como ω_1 es binario necesariamente $\#\sigma_{\omega_1}^{-1}(Q) = 1$.

Pongamos $\omega_1 = a \stackrel{Q}{\wedge} a^{-1}\nu_1$, y (α, β) a la representación de ω_1 en X . Sean γ_a y $\gamma_{a^{-1}} \in \alpha$ los arcos de Jordan en $\text{Bd}(X)$ asociados a los caracteres a y a^{-1} de ω_1 , y $h: \gamma_a \rightarrow \gamma_{a^{-1}}$ el correspondiente homeomorfismo en β . Llamemos Y al disco topológico compacto X/\sim_h (ver el Ejercicio 2.17) y $\sigma_0: X \rightarrow Y$ a la proyección al cociente. Si llamamos $\sigma: Y \rightarrow S_{\omega_1}$



a la única identificación tal que $\sigma \circ \sigma_0 = \sigma_{\omega_1}$, la relación de equivalencia \sim_σ en el disco compacto Y coincide con la inducida por la representación natural de ω_2 en Y que expresa Y/\sim_σ como realización S_{ω_2} de ω_2 . El homeomorfismo $F: S_{\omega_1} \rightarrow S_{\omega_2}$ buscado

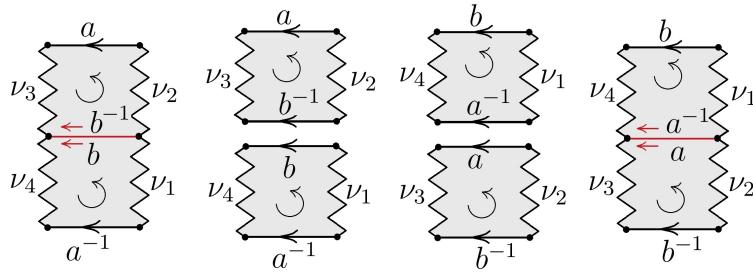
no es sino $\hat{\sigma}^{-1}$, donde $\hat{\sigma}: Y/\sim_\sigma \equiv S_{\omega_2} \rightarrow S_{\omega_1}$ es el homeomorfismo inducido por tal identificación σ . Claramente $F(V_{\omega_1} \setminus \{Q\}) = V_{\omega_2}$.

Items (a)-(i) y (a)-(ii) son triviales ya que S_{ω_1} y S_{ω_2} son el mismo espacio.

Probemos (a)-(iii). Escribamos $\omega_1 = \nu_1 \stackrel{Q_1}{\wedge} \nu_2 a \nu_3 \stackrel{Q_2}{\wedge} \nu_4 a^{-1}$ y consideremos una representación $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h})$ de ω_1 en un disco topológico compacto X . Denotemos por $\mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{a}$ la secuencia ordenada de lados orientados en $\text{Bd}(X)$ correspondientes a ν_j , $j = 1, 2, 3, 4$, y $\gamma_a, \gamma_{a^{-1}}$ los lados orientados en \mathfrak{a} asociados a a y a^{-1} , respectivamente. Con esta notación,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3 \cup \mathfrak{a}_4 \cup \{\gamma_{a^{-1}}\}$$

reproduce la secuencia ordenada cíclica de lados de \mathfrak{a} .



Tomemos un arco de Jordan $b \subset S_{\omega_1}$ uniendo Q_1 y Q_2 y contenido en el disco topológico abierto $S_{\omega_1} \setminus \Gamma_{\omega_1}$ excepto por sus extremos. El arco b es proyección vía σ_{ω_1} de un *arco de Jordan* en X que parte el disco X en dos componentes conexas X_+ y X_- . Por conveniencia llamemos $b_+ \subset \text{Bd}(X_+)$ al arco en $\text{Bd}(X_+)$ proyectándose por σ_{ω_1} en b , y análogamente para $b_- \subset \text{Bd}(X_-)$ (como subconjuntos de X , $b_+ = b_-$).

Fijemos en b_+ la orientación compatible con los arcos orientados de $\mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3$ de $\text{Bd}(X_+)$, y hagamos lo propio en b_- respecto de los arcos orientados de $\mathfrak{a}_4 \cup \{\gamma_{a^{-1}}\} \cup \mathfrak{a}_1$ en $\text{Bd}(X_-)$. Consideremos las secuencias cíclicas ordenadas de arcos orientados

$$\mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3 \cup b_+ \text{ en } \text{Bd}(X_+) \quad \text{y} \quad \mathfrak{a}_4 \cup \{\gamma_{a^{-1}}\} \cup \mathfrak{a}_1 \cup b_- \text{ de en } \text{Bd}(X_-).$$

Podemos pegar \overline{X}_+ y \overline{X}_- por los arcos de Jordan borde γ_a y $\gamma_{a^{-1}}$ con ayuda del homeomorfismo $h: \gamma_a \rightarrow \gamma_{a^{-1}} \in \mathfrak{h}$ tal que $(\sigma_{\omega_1}|_{\gamma_{a^{-1}}}) \circ h = \sigma_{\omega_1}|_{\gamma_a}$. De esta forma generamos un disco topológico compacto $\hat{X} = (\overline{X}_+ \cup \overline{X}_-) / \sim_h \equiv \overline{X} / \sim_h$, ver Proposición 2.14. Si $g: X \rightarrow \hat{X}$ denota la proyección al cociente, la única aplicación

$$\sigma: \hat{X} \rightarrow S_{\omega_1} \quad \text{con} \quad \sigma \circ g = \sigma_{\omega_1}$$

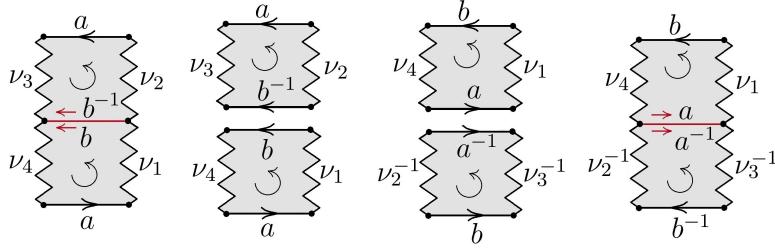
es una identificación, por lo que $\hat{X}/\sim_\sigma \cong S_{\omega_1}$. Si llamamos $\hat{\sigma}: \hat{X}/\sim_\sigma \rightarrow S_{\omega_1}$ al homeomorfismo inducido por σ , la relación \sim_σ coincide con la inducida por la representación natural de $\omega_2 := \nu_2 \nu_1 b \nu_4 \nu_3 b^{-1}$ en \hat{X} . Por tanto \hat{X}/\sim_σ coincide con la realización S_{ω_2} para el esquema ω_2 . Claramente $V_{\omega_2} = \hat{\sigma}^{-1}(V_{\omega_1})$ y eligiendo $F = \hat{\sigma}^{-1}$ se sigue (a)-(iii).

Finalmente probemos (a)-(iv). Como antes pongamos $\omega_1 = \nu_1 \stackrel{Q_1}{\wedge} \nu_2 a \nu_3 \stackrel{Q_2}{\wedge} \nu_4 a$, consideremos una representación $(\mathfrak{a}, \mathfrak{h})$ de ω_1 en un disco topológico compacto X , y escribamos

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3 \cup \mathfrak{a}_4 \cup \{\gamma'_a\}$$

con los mismos convenios anteriores; aquí γ_a y γ'_a representan los dos arcos en $\text{Bd}(X)$ correspondientes al carácter a duplicado en ω_1 .

Razonando como en el caso anterior, podemos suponer que existe un arco de Jordan $b \subset S_{\omega_1}$ con extremos Q_1 y Q_2 con interior disjunto de Γ_{ω_1} , y que sea la proyección



vía σ_{ω_1} de un *arco de Jordan* en X que parte el disco X en dos componentes conexas X_+ y X_- . Llamemos $b_+ \subset \text{Bd}(X_+)$ al arco en $\text{Bd}(X_+)$ proyectándose por σ_{ω_1} en b , y análogamente para $b_- \subset \text{Bd}(X_-)$, y orientemos estos arcos compatiblemente con los arcos orientados en $\mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3$ de $\text{Bd}(X_+)$ y $\mathfrak{a}_4 \cup \{l'_a\} \cup \mathfrak{a}_1$ de $\text{Bd}(X_-)$, respectivamente. Consideremos las secuencias cíclicas ordenadas de arcos orientados

$$\mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3 \cup b_+ \text{ en } \text{Bd}(X_+) \quad \text{y} \quad \mathfrak{a}_4 \cup \{l'_a\} \cup \mathfrak{a}_1 \cup b_- \text{ de en } \text{Bd}(X_-).$$

Llamemos $X_+^* = \{p^*: p \in X_+\}$ a una copia topológica de X_+ y s: $X_+^* \rightarrow X_+$ al homeomorfismo $p^* \mapsto p$. Consideremos el homeomorfismo $F: X_+ \rightarrow \overline{D}$ que aplica los lados orientados de $\mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3$ en arcos positivamente orientados en \mathbb{S}^1 , y llamemos $F^*: X_+^* \rightarrow \overline{D}$ a la composición e \circ $F \circ$ s, donde e: $\overline{D} \rightarrow \overline{D}$ es la simetría especular $e(x, y) = (x, -y)$. Traslademos vía $(F^*)^{-1} \circ F$ la secuencia de arcos orientados $\mathfrak{a}_2 \cup \{\gamma_a\} \cup \mathfrak{a}_3 \cup b_+$ en $\text{Bd}(X_+)$ para generar una secuencia (con ordenación *revertida*) de arcos orientados:

$$b_+^* \cup \mathfrak{a}_3^* \cup \{\gamma_a^*\} \cup \mathfrak{a}_2^* \text{ en } \text{Bd}(X_+^*).$$

Podemos pegar \overline{X}_+^* y \overline{X}_- por los arcos de Jordan borde γ_a^* y γ'_a con ayuda del homeomorfismo $h^* = h \circ (F^{-1} \circ F^*): \gamma_a^* \rightarrow \gamma'_a$, donde $h: \gamma_a \rightarrow \gamma'_a$ es el homeomorfismo en \mathfrak{h} . De esta forma generamos un disco topológico compacto $\hat{X} = (\overline{X}_+^* \cup \overline{X}_-)/\sim_{h^*}$, ver Proposición 2.14. Si $g: \overline{X}_+^* \cup \overline{X}_- \rightarrow \hat{X}$ denota la proyección al cociente, la única aplicación

$$\sigma: \hat{X} \rightarrow S_{\omega_1} \quad \text{con} \quad (\sigma \circ g)|_{\overline{X}_-} = \sigma_{\omega_1}|_{\overline{X}_-}, \quad (\sigma \circ g)|_{\overline{X}_+^*} = \sigma_{\omega_1} \circ ((F^{-1} \circ F^*)|_{\overline{X}_+^*})$$

es una identificación, por lo que $\hat{X}/\sim_\sigma \cong S_{\omega_1}$. Si llamamos $\hat{\sigma}: \hat{X}/\sim_\sigma \rightarrow S_{\omega_1}$ al homeomorfismo inducido por σ , la relación \sim_σ coincide con la inducida por la representación natural de $\omega_2 = \nu_3^{-1}\nu_1b\nu_4\nu_2^{-1}b$ en \hat{X} . Por tanto \hat{X}/\sim_σ coincide con la realización S_{ω_2} para el esquema ω_2 . Claramente $V_{\omega_2} = \hat{\sigma}^{-1}(V_{\omega_1})$ y eligiendo $F = \hat{\sigma}^{-1}$ se sigue (a)-(iv), concluyendo la demostración. ■

Del círculo de ideas de la anterior demostración se deduce el siguiente corolario.

Corolario 18.4 *Sean ν_0 y ν_1 dos esquemas binarios puros con $\text{sop}(\nu_0) \cap \text{sop}(\nu_1) = \emptyset$ y $\#V_{\nu_0} = \#V_{\nu_1} = 1$, y llamemos $\omega = \nu_0\nu_1$. Sea ν'_1 un esquema obtenido de ν_1 aplicando las reglas (i)-(ii)-(iii)-(iv) del item (a) del Lema 18.3.*

Entonces existe $\omega' \in \{\nu_0\nu'_1, \nu_0^{-1}\nu'_1\}$ tal que $\omega \stackrel{F}{\sim} \omega'$ y $F(V_\omega) = V_{\omega'}$.

DEMOSTRACIÓN: Comenzaremos con una observación general. Sean ν_0, ν esquemas binarios puros con $\text{sop}(\nu_0) \cap \text{sop}(\nu) = \emptyset$ y $\#V_{\nu_0} = \#V_{\nu_1} = 1$. Sea ν_1, ν_2 una pareja de sub-esquemas de ν tales que $\nu = \nu_1\nu_2$. Veamos que existe

$$H: S_{\nu_1\nu_0\nu_2} \rightarrow S_{\nu_0\nu} \text{ homeomorfismo con } H(V_{\nu_1\nu_0\nu_2}) = V_{\nu_0\nu} =. \quad (8)$$

Para ello tomemos $a_0, a, a' \notin \text{sop}(\nu\nu_0)$. Consideremos en el espacio $S_{\nu_0a_0}$ la curva de Jordan c_{a_0} proyección vía $\sigma_{\nu_0a_0}$ del lado a_0 . Análogamente, en $S_{\nu_1a\nu_2}$ y $S_{a'\nu}$ llamemos c_a y $c_{a'}$ a las curvas de Jordan proyección de los lados a y a' vía $\sigma_{\nu_1a\nu_2}$ y $\sigma_{a'\nu}$, respectivamente. Comprobemos que existe un homeomorfismo

$$G: S_{\nu_1a\nu_2} \rightarrow S_{a'\nu} \text{ tal que } G(c_a) = c_{a'} \text{ y } G(V_{\nu_1a\nu_2}) = V_{a'\nu}.$$

En efecto, si pegamos un disco topológico compacto X a $S_{\nu_1a\nu_2}$ a través de un homeomorfismo de pegado $c_a \rightarrow \text{Bd}(X)$, la superficie obtenida es claramente una realización S_ν de ν que contiene de forma natural a una copia de X . Análogamente, pegando un disco topológico compacto X' a $S_{a'\nu}$ vía un homeomorfismo $c_{a'} \rightarrow \text{Bd}(X')$ podemos obtener de nuevo S_ν , y en este caso $X' \subset S_\nu$. Para construir G bastará con encontrar un homeomorfismo $\hat{G}: S_\nu \rightarrow S_\nu$ con $\hat{G}(X) = X'$ y $\hat{G}|_{\Gamma_\nu} = \text{Id}_{\Gamma_\nu}$, donde Γ_ν es el grafo borde de S_ν , y definir $G = \hat{G}|_{S_{\nu_1a\nu_2}}$. Con ese fin tomemos un disco compacto $Y \subset S_\nu$ con

$$X, X' \subset Y, \quad X \setminus \{P\}, X' \setminus \{P\} \subset \text{Int}(Y), \quad Y \setminus \{P\} \subset S_\nu \setminus \Gamma_\nu,$$

donde P es el único vértice en V_ν , y usemos el Teorema de Jordan Schöenflies para primero definir $\hat{G}|_Y: Y \rightarrow Y$ con las propiedades deseadas y satisfaciendo que $\hat{G}|_{\text{Bd}(Y)} = \text{Id}_{\text{Bd}(Y)}$, y luego extenderlo por la identidad a $S_\nu \setminus Y$.

Ahora podemos construir H . En efecto, $S_{\nu_1\nu_0\nu_2}$ se obtiene pegando $S_{\nu_0a_0}$ y $S_{\nu_1a\nu_2}$ a través de un homomorfismo $c_{a_0} \rightarrow c_a$, y de forma similar $S_{\nu_0\nu}$ se obtiene pegando $S_{\nu_0a_0}$ y $S_{a'\nu}$ a través de un homomorfismo $c_{a_0} \rightarrow c_{a'}$. Viendo $S_{\nu_1\nu_0\nu_2} = S_{\nu_1a\nu_2} \cup S_{\nu_0a_0}$ tras identificar $c_a \equiv c_{a_0}$, si se define

$$H: S_{\nu_1\nu_0\nu_2} \rightarrow S_{\nu_0\nu}, \quad H|_{S_{\nu_1a\nu_2}} = G, \quad H|_{S_{\nu_0a_0}} = \text{Id}_{S_{\nu_0a_0}},$$

se obtiene (8).

Tengamos ahora presentes las operaciones de cirugía topológica en la realización S_{ν_1} de ν_1 , descritas en la prueba de las reglas (i)-(ii)-(iii)-(iv) del ítem (a) en el Lema 18.3, que nos trasforman el esquema ν_1 en ν'_1 . Teniendo en cuenta que $\text{sop}(\nu_0) \cap \text{sop}(\nu_1) = \emptyset$ es fácil observar que todas esas operaciones se pueden realizar formalmente en la realización $S_{\nu_0\nu_1}$ del esquema $\nu_0\nu_1$ arrastrando sin alterar el bloque ν_0 a lo largo del proceso, esto es, manteniendo las expresiones ν_0 ó ν_0^{-1} como sub-esquemas de los distintos esquemas que van apareciendo en ese proceso. De esta forma a partir de $\nu_0\nu_1$ llegaríamos a un esquema de la forma $\mu\nu_0\lambda$ ó $\mu\nu_0^{-1}\lambda$, donde μ y λ son sub-esquemas de ν'_1 tales que $\nu'_1 = \mu\lambda$. Del Lema 18.3 y (8) inferimos que $S_{\nu_0\nu_1} \cong S_{\mu\nu_0\lambda} \cong S_{\nu_0\nu'_1}$ ó $S_{\nu_0\nu_1} \cong S_{\mu\nu_0^{-1}\lambda} \cong S_{\nu_0^{-1}\nu'_1}$, homeomorfismos preservando el único vértice $\{P\}$ del grafo borde de los esquemas involucrados, de donde se sigue el corolario. ■

18.1. Clasificación de los esquemas binarios puros

Sabemos por el Teorema 17.6 que toda superficie compacta es el espacio realización de un esquema binario puro. La idea guía de esta sección será probar que todo esquema binario puro es equivalente a un esquema binario puro normal (ver Definición 9.10), y por tanto, que toda superficie topológica compacta es homeomorfa al espacio realización de un esquema binario puro normal.

Para la buena comprensión de los siguientes contenidos es necesario recordar la notación fijada en la Definición 9.10 para los esquemas binarios puros normales, y las propiedades básicas de sus espacios realización.

- $\mathfrak{w}_0 := aa^{-1}$: el espacio $S_{\mathfrak{w}_0}$ es simplemente conexo y homeomorfo a la esfera \mathbb{S}^2 .

- $\mathfrak{w}_n := \prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1}$: el espacio $S_{\mathfrak{w}_n}$ es conocido como el n -toro y tiene por grupo fundamental a

$$F(a_1, c_1, \dots, a_n, c_n) / N(\left\{ \prod_{j=1}^n a_j c_j a_j^{-1} c_j^{-1} \right\}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

- $\mathfrak{w}_n^* := \prod_{j=1}^n a_j a_j$: el espacio $S_{\mathfrak{w}_n^*}$ es conocido como el n -proyectivo y tiene por grupo fundamental a

$$F(a_1, \dots, a_n) / N(\left\{ \prod_{j=1}^n a_j^2 \right\}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

El Corolario 9.11 nos garantizaba que la familia de espacios topológicos

$$\mathfrak{S} = \{S_{\mathfrak{w}_n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_{\mathfrak{w}_n^*} : n \in \mathbb{N}\}$$

no contiene dos homeomorfos entre sí.

Lema 18.5 *Para todo ω binario puro existe ω_0 binario puro tal que:*

- $\omega \sim \omega_0$.
- $\#V_{\omega_0} = 1$ ó $\omega_0 = \mathfrak{w}_0$, donde $\mathfrak{w}_0 = aa^{-1}$.

DEMOSTRACIÓN : Recordemos que al aplicar la regla Lema 18.3-(b) a un esquema binario puro genérico ν no alteramos su carácter de orientabilidad y eliminamos de su expresión pares contiguos de primera especie $a \stackrel{Q}{\wedge} a^{-1}$, y por tanto a Q como vértice ya que $\#\sigma_\nu^{-1}(Q) = 1$.

Salvo aplicar la regla Lema 18.3-(b) tantas veces cuantas sea posible podemos suponer que estamos en uno de los siguientes casos:

- ω no tiene pares adyacentes de primera especie y $\text{Long}(\omega) \geq 4$ (recordemos que $\text{Long}(\omega)$ es un número par).
- $\omega = \mathfrak{w}_0 = aa^{-1}$; en este caso acabaríamos eligiendo $F = \text{Id}_{S_\omega}$.
- $\omega = \mathfrak{w}_1 = aa$; en este caso acabaríamos eligiendo $F = \text{Id}_{S_\omega}$, ya que V_ω solo tiene un vértice.

Resta por discutir el primer caso. En lo que sigue supondremos que ω no contiene pares adyacentes de primera especie, $\text{Long}(\omega) \geq 4$ y $\#V_\omega \geq 2$. Elijamos un vértice $P \in V_\omega$.

Veamos que existe un esquema binario puro μ_1 tal que $\omega \sim \mu_1$ y $\#V_{\mu_1} \leq \#V_\omega - 1$.

En efecto, consideremos una realización S_ω de ω en un disco X y la identificación $\sigma_\omega: X \rightarrow S_\omega$ asociada. Para cada sílaba $x = b^\epsilon$, $\epsilon \in \{1, -1\}$, en la secuencia que define a ω denotemos por γ_x al arco orientado en $\text{Bd}(X)$ asociado a x en la representación de ω sobre X . Como ω tiene al menos dos vértices distintos en Γ_ω , existe una sílaba $x = b^\epsilon$ en ω (salvo la regla Lema 18.3-(a)-(ii) supondremos $\epsilon = 1$ y escribiremos $x = b$) de forma que $\sigma_\omega(\gamma_b) \subset \Gamma_\omega$ es un arco de Jordan con extremos P y un punto $Q \in V_\omega \setminus \{P\}$. Llamemos $y = a^\delta$, $\delta = \pm 1$, a la sílaba contigua a b en ω tal que el punto $\gamma_y \cap \gamma_b \in \sigma_\omega^{-1}(P)$.

El esquema ω puede adoptar las siguientes cuatro formas:

$$\zeta_1 a \stackrel{P}{\wedge} \zeta_2 \stackrel{Q}{\wedge} b \stackrel{R}{\wedge} a^{-1}, \quad \zeta_1 \stackrel{P}{\wedge} a \zeta_2 a^{-1} \stackrel{R}{\wedge} b \stackrel{Q}{\wedge}, \quad \zeta_1 a \stackrel{P}{\wedge} \zeta_2 a \stackrel{P}{\wedge} b \stackrel{Q}{\wedge}, \quad \zeta_1 \stackrel{P}{\wedge} a \zeta_2 \stackrel{Q}{\wedge} b \stackrel{R}{\wedge} a.$$

Razonaremos en el caso $\omega = \zeta_1 a \wedge \zeta_2 \wedge b \wedge a^{-1}$ (los otros son análogos).

Aplicando el Lema 18.3-(a)-(iii) para las elecciones $\zeta_1 \rightsquigarrow \zeta_1, \zeta_2 \rightsquigarrow 1, \zeta_3 \rightsquigarrow \zeta_2, \zeta_4 \rightsquigarrow b$, inferimos que $\omega \sim \omega_1$ para

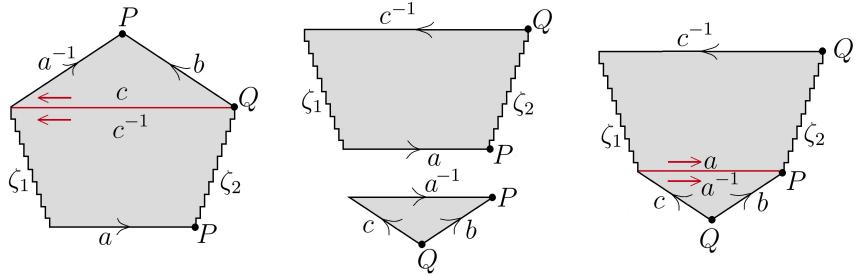
$$\omega_1 = \zeta_1 c \wedge b \wedge \zeta_2 \wedge c^{-1}.$$

Aquí hemos identificado los vértices en Γ_ω y Γ_{ω_1} vía el homeomorfismo F implícito en la equivalencia $\omega \stackrel{F}{\sim} \omega_1$, y por tanto escrito $V_{\omega_1} \equiv V_\omega$. Arrastraremos este espíritu simplificador de la notación en lo que sigue de prueba.

Claramente $\text{Long}(\omega_1) = \text{Long}(\omega)$ y

$$\#\sigma_{\omega_1}^{-1}(P) = \#\sigma_\omega^{-1}(P) - 1,$$

esto es, reducimos en una unidad entera la cantidad de puntos en $\sigma_{\omega_1}^{-1}(P)$ respecto a la de $\sigma_\omega^{-1}(P)$. A continuación sometemos a ω_1 a la regla Lema 18.3-(b) tantas veces cuantas sea posible para encontrar un esquema equivalente a ω_1 sin pares adyacentes de primera especie y con conjunto de vértices subconjunto de V_{ω_1} ; en este proceso eventualmente se podrían perder vértices y reducir la longitud del esquema respecto a la de ω_1 . Para no recargar la notación llamaremos también ω_1 a este nuevo esquema binario puro generado.



Si tras estas reducciones $P \in V_{\omega_1}$, $\text{Long}(\omega_1) \geq 4$ y $\#V_{\omega_1} \geq 2$, reiteramos sucesivamente el proceso anterior construyendo una sucesión de esquemas binarios puros

$$\omega_0 = \omega \sim \omega_1 \sim \omega_2 \sim \dots,$$

de forma que $\text{Long}(\omega_i) \leq \text{Long}(\omega_{i-1}) \geq 4$, $V_{\omega_i} \subseteq V_{\omega_{i-1}} \ni P$, $\#(V_{\omega_{i-1}}) \geq 2$, y $\#\sigma_{\omega_i}^{-1}(P) = \#\sigma_{\omega_{i-1}}^{-1}(P) - 1$ para todo $i \geq 1$. Este proceso a lo más tiene $m_1 := \#\sigma_\omega^{-1}(P) - 1$ pasos. Ha de concluir con un esquema μ_1 que, de no ser $\mu_1 = \mathfrak{w}_0$, no contiene a P como vértice en V_{μ_1} (desaparece por aplicación de la regla Lema 18.3-(b)). En resumen, llegamos a un esquema binario puro $\mu_1 \sim \omega$ que, de no ser $\mu_1 = \mathfrak{w}_0$, tiene $\#V_{\mu_1} \leq V_\omega - 1$ como habíamos anuciado.

Si $\mu_1 \neq \mathfrak{w}_0$ y tiene dos o más vértices, reiteramos con μ_1 el proceso anteriormente seguido para ω y llegamos a un esquema binario puro $\mu_2 \sim \mu_1$ que, de no ser \mathfrak{w}_0 , satisface $\#V_{\mu_2} \leq \#V_{\mu_1} - 1$, y así sucesivamente. Tras una cantidad finita de pasos alcanzaremos un esquema binario puro $\omega_0 \sim \omega$ con $\omega_0 = \mathfrak{w}_0$ ó $\#V_{\omega_0} = 1$, lo que concluye la prueba. ■

En lo que sigue trataremos con esquemas binarios puros ω con $\#V_\omega = 1$ (de otra forma ya sabemos que $\omega \sim \mathfrak{w}_0$). Nuestro objetivo será probar que son equivalentes a esquemas binarios puros normales de la forma $\mathfrak{w}_k, \mathfrak{w}_k^*, k \geq 1$.

Un par de segunda especie en un esquema binario ω se dice *adyacente* si, escrito con la sílaba a , se dispone de la forma

$$\omega = \nu_1 a a \nu_2.$$

Lema 18.6 Si ω es un esquema binario puro con $\#(V_\omega) = 1$, entonces existe ω_1 tal que:

- $\#V_{\omega_1} = 1$, $\text{Long}(\omega_1) = \text{Long}(\omega)$, y $\omega, \sim \omega_1$.
- Todos los pares de segunda especie en ω_1 son adyacentes.

DEMOSTRACIÓN: Si ω es orientable basta con tomar $\omega_1 = \omega$.

Supongamos que ω es no orientable (y por tanto tiene pares de segunda especie) y existe un par de segunda especie no adyacente en ω , que escribiremos con la sílaba a_1 . Escribamos $\omega = \omega_1 \omega_2 a_1 \omega_3 \omega_4 a_1$ donde $\omega_1, \omega_3 \neq 1$ y $\omega_2 = \omega_4 = 1$. Aplicando la regla Lema 18.3-(a)-(iv),

$$\omega \sim \omega_3^{-1} \omega_1 b_1 b_1,$$

donde ambos esquemas tienen un sólo vértice. De esta forma sustituimos el par de segunda especie asociado a a_1 en ω por el adyacente con símbolo b_1 en el nuevo esquema $\omega' := \omega_3^{-1} \omega_1 b_1 b_1$, manteniendo la longitud del esquema y el hecho de que $\#V_{\omega'}$ sea unitario. Obsérvese que de haber un par de segunda especie adyacente en ω , obviamente con símbolo distinto a a_1 , éste ha de estar necesariamente incluido en ω_1 ó en ω_3 y nuestro procedimiento lo traslada a otro par adyacente de igual naturaleza en ω' . El proceso descrito es pues acumulativo y no deshace el trabajo previo. Si ω' presentase pares de segunda especie no adyacentes, se reiteraría el procedimiento anterior hasta llegar a un esquema binario puro ω_1 sin ningún par de segunda especie no adyacente, con la misma longitud de ω' (igual a la de ω) y con $\#V_{\omega_1} = 1$. Esto prueba el Lema. ■

Una pareja de pares de primera especie, que representaremos con los símbolos a y b , en un esquema binario puro ω se dirá en *posición enlazada* si su disposición en la secuencia que define ω es la siguiente:

$$\omega = \nu_1 a \nu_2 b \nu_3 a^{-1} \nu_4 b^{-1} \nu_5,$$

o también las situaciones equivalentes

$$\omega = \nu_1 a^{-1} \nu_2 b^{-1} \nu_3 a \nu_4 b \nu_5, \quad \omega = \nu_1 a^{-1} \nu_2 b \nu_3 a \nu_4 b^{-1} \nu_5, \quad \omega = \nu_1 a \nu_2 b^{-1} \nu_3 a^{-1} \nu_4 b \nu_5.$$

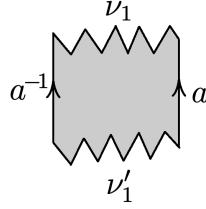
Salvo los cambios notacionales $a \leftrightarrow a^{-1}$, $b \leftrightarrow b^{-1}$ podemos restringirnos a considerar solo la primera opción: $\omega = \nu_1 a \nu_2 b \nu_3 a^{-1} \nu_4 b^{-1} \nu_5$.

Si adicionalmente $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 1$, esto es, si $\omega = \nu_1 a b a^{-1} b^{-1} \nu_5$, entonces diremos que la pareja de pares enlazados de primera especie representada por a y b es *adyacente*.

Lema 18.7 Si ω es binario puro y $\#(V_\omega) = 1$ entonces todo par de primera especie en ω está en posición enlazada con algún otro par de primera especie en ω .

DEMOSTRACIÓN: En efecto, en otro caso existiría un par de primera especie en ω , que representaremos por la letra a , que no está enlazado con ningún otro par de primera especie en ω . Tengamos presente que las parejas de primera especie adyacentes cc^{-1} no ocurren en ω ya que $\#V_\omega = 1$, y por tanto $\omega = a \nu_1 a^{-1} \nu'_1$, donde $\nu_1, \nu'_1 \neq 1$.

Por nuestras hipótesis, si $b \in \text{sop}(\nu_1)$ forma parte de un par de primera especie entonces $b^{-1} \in \text{sop}(\nu_1)$ (de otra forma b estaría enlazado con a !), y análogamente para $b \in \text{sop}(\nu'_1)$. Por tanto el conjunto de vértices de V_ω aportados por la secuencia ν_1 ha de ser disjunto del asociado a la secuencia ν'_1 , y necesariamente $V_\omega > 1$. Esto genera una contradicción con el hecho de que ω tiene un único vértice. ■



Vamos a explicar un procedimiento que generará en ω una pareja *adyacente* de pares de primera especie enlazados a partir de una pareja *no adyacente* de pares de primera especie enlazados. Este método será acumulativo y no romperá el trabajo previo. Vayamos a los detalles.

Lema 18.8 *Sea ω un esquema binario puro con $\#(V_\omega) = 1$ y todos sus pares de segunda especie adyacentes. Entonces existe un esquema binario puro ω_1 tal que:*

- $\#V_{\omega_1} = 1$, $\text{Long}(\omega_1) = \text{Long}(\omega)$ y $\omega \sim \omega_1$.
- ω_1 tiene todos los pares de segunda especie adyacentes.
- Todas las parejas de pares de primera especie enlazados en ω_1 son adyacentes.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que ω contiene $k \geq 0$ parejas adyacentes de pares de primera especie enlazados, y que ω contiene una pareja no adyacente de pares de primera especie enlazados. Veamos que existe un esquema binario μ_1 tal que:

- $\#V_{\mu_1} = 1$, $\text{Long}(\mu_1) = \text{Long}(\omega)$ y $\mu_1 \sim \omega$.
- Todos los pares de segunda especie en μ_1 son adyacentes.
- μ_1 tiene $k + 1$ parejas adyacentes de pares de primera especie enlazados.

En efecto, como ω tiene una pareja no adyacente de pares de primera especie enlazados, podemos escribir

$$\omega = \nu_1 a_1 \nu_2 a_2 \nu_3 a_1^{-1} \nu_4 a_2^{-1}$$

para ciertos símbolos a_1 y a_2 . Por la regla Lema 18.3-(a)-(iii) aplicada para las elecciones $\nu_1 \rightsquigarrow \nu_1 a_1$, $\nu_2 \rightsquigarrow \nu_2$, $a \rightsquigarrow a_2$, $\nu_3 \rightsquigarrow \nu_3$ y $\nu_4 \rightsquigarrow a_1^{-1} \nu_4$, obtenemos que $\omega \sim \omega'$ para

$$\omega' = \nu_2 \nu_1 a_1 b_1 a_1^{-1} \nu_4 \nu_3 b_1^{-1} \equiv \nu_4 \nu_3 b_1^{-1} \nu_2 \nu_1 a_1 b_1 a_1^{-1},$$

siendo $\#V_{\omega'} = 1$. Por Lema 18.3-(a)-(iii) de nuevo aplicado en ω' para $\nu_1 \rightsquigarrow \nu_4 \nu_3 b_1^{-1}$, $\nu_2 \rightsquigarrow \nu_2 \nu_1$, $a \rightsquigarrow a_1$, $\nu_3 \rightsquigarrow b_1$ y $\nu_4 \rightsquigarrow 1$, obtenemos que $\omega' \sim \omega''$ para

$$\omega'' = \nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3 b_1^{-1} d_1 b_1 d_1^{-1} \equiv b_1^{-1} d_1 b_1 d_1^{-1} \nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3,$$

siendo $\#V_{\omega''} = 1$. Notemos que por la naturaleza de la regla Lema 18.3-(a)-(iii) no se ha destruido ningún par de segunda especie adyacente preexistente en ω ni generado ningún par de segunda especie nuevo. Tampoco hemos alterado las parejas adyacentes de pares de primera especie enlazados preexistentes en ω . De igual modo el conjunto de vértices tanto de ω' como de ω'' es unitario. Por conveniencia cambiaremos el símbolo b_1 por c_1^{-1} , y por tanto b_1^{-1} por c_1 . Llaremos $\omega_1 = \nu_2 \nu_1 \nu_4 \nu_3$ y definamos el esquema binario puro

$$\mu_1 := c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} \omega_1,$$

obviamente equivalente a ω . Por su generación es claro que $\text{Long}(\mu_1) = \text{Long}(\omega)$ y $\#V_{\mu_1} = 1$, y por tanto μ_1 satisface las propiedades deseadas. Un sencillo proceso inductivo nos lleva al esquema binario puro ω_1 resolviendo el lema. ■

El siguiente resultado es consecuencia directa de los Lemas 18.5, 18.6 y 18.8.

Teorema 18.9 *Si ω es un esquema binario puro entonces es cierto una de los siguientes enunciados:*

- (I) $\omega \sim \mathbf{w}_0$, donde \mathbf{w}_0 es el esquema canónico aa^{-1} .
- (II) $\omega \sim \omega_1$, donde ω_1 es un esquema binario puro satisfaciendo:
 - $\#V_{\omega_1} = 1$ y $\text{Long}(\omega_1) \leq \text{Long}(\omega)$.
 - ω_1 tiene todos los pares de segunda especie adyacentes.
 - Todas las parejas en ω_1 de pares de primera especie enlazados son adyacentes.

Ya estamos próximos al teorema fundamental de clasificación salvo equivalencias de los esquemas binarios puros. Para ello necesitaremos el siguiente lema de simplificación.

Lema 18.10 *Los siguientes enunciados son ciertos:*

- (a) $aba^{-1}b \sim \mathbf{w}_2^*$ (recordemos que $S_{\mathbf{w}_2^*} \equiv \mathbb{K}$ es conocida como la botella de Klein).
- (b) $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^* \sim \mathbf{w}_3^*$.

DEMOSTRACIÓN: Para probar (a) basta con aplicar al esquema $aba^{-1}b$ la regla Lema 18.3-(iv) para la elección $\nu_1 \rightsquigarrow 1, \nu_3 \rightsquigarrow 1, \nu_2 \rightsquigarrow a, \nu_4 \rightsquigarrow a^{-1}$, lo que nos llevaría al esquema $b'a^{-1}a^{-1}b'$, que por Lema 18.3-(i) es equivalente a \mathbf{w}_2^* .

Para probar (b) escribamos $\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^* = aba^{-1}b^{-1}cc$. Aplicando la regla Lema 18.3-(iv) para la elección $\nu_1 \rightsquigarrow aba^{-1}, \nu_2 \rightsquigarrow b^{-1}, \nu_4 \rightsquigarrow 1, \nu_3 \rightsquigarrow 1$, nos llevaría al esquema $aba^{-1}c'bc'$, que es equivalente a $c'bc'aba^{-1}$ por Lema 18.3-(i). Aplicando ahora a $c'bc'aba^{-1}$ la regla Lema 18.3-(iii) para la elección $\nu_1 \rightsquigarrow c'b, \nu_2 \rightsquigarrow c', \nu_3 \rightsquigarrow b, \nu_4 \rightsquigarrow 1$ llegamos a $c'c'ba'b(a')^{-1}$. Usando la prueba de (a) y el Corolario 18.4 para $\nu_0 \rightsquigarrow c'c', \nu_1 \rightsquigarrow ba'b(a')^{-1}$ se obtiene lo deseado. ■

Ahora podemos demostrar el siguiente resultado fundamental.

Teorema 18.11 (Representaciones binarias puras) *Sea ω un esquema binario puro. Los siguientes enunciados son ciertos.*

- (a) *Si ω es no orientable entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\omega \sim \mathbf{w}_n^*$.*
- (b) *Si ω es orientable entonces existe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $\omega \sim \mathbf{w}_n$.*

DEMOSTRACIÓN: El teorema es consecuencia inmediata del Teorema 18.9 y de un argumento combinatorio elemental utilizando el Lema 18.10 y el Corolario 18.4. ■

19. Clasificación de las superficies compactas

Ahora podemos enunciar el resultado fundamental de este tema, consecuencia inmediata de los resultados previos.

Corolario 19.1 (Clasificación de las superficies compactas) *Sea S una superficie topológica compacta.*



Figura 5: Lista de superficies orientables: $S_{w_0}, S_{w_1}, S_{w_2}, S_{w_3}, \dots$

- (I) *Si S es orientable entonces es homeomorfa a una y solo una de las superficies en la familia:*

$$\{S_{w_n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

- (II) *Si S es no orientable entonces es homeomorfa a una y solo una de las superficies en la familia:*

$$\{S_{w_n^*} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Al número n en ambos casos se le llama género de S y se denota por $\text{gen}(S)$.

DEMOSTRACIÓN: Por el Teorema de Radó S admite una triangulación \mathcal{T} . El Teorema 17.6 garantiza que existe un esquema ω binario puro y un homeomorfismo $F: S \rightarrow S_\omega$. La Proposición 16.14 nos dice que el esquema ω y su superficie realización $S_\omega \cong S$ tienen el mismo carácter de orientabilidad. El Teorema 18.11 nos dice que $\omega \sim \mathbf{w}$ para un único esquema canónico $\mathbf{w} \in \{\mathbf{w}_n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{\mathbf{w}_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ con el mismo carácter de orientabilidad que ω . En conclusión, $S \cong S_{\mathbf{w}}$ para un esquema binario puro normal \mathbf{w} con el mismo carácter de orientabilidad que S . Por último, el Corolario 9.11 garantiza que en la familia

$$\mathfrak{S} = \{S_{w_n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_{w_n^*} : n \in \mathbb{N}\}$$

no hay dos espacios homeomorfos, de donde se sigue el corolario. ■

Corolario 19.2 *Sean S_1 y S_2 dos superficies topológicas compactas.*

- (I) $S_1 \cong S_2 \iff \chi(S_1) = \chi(S_2)$ y tienen ambas el mismo carácter de orientabilidad.

- (II) $S_1 \cong S_2 \iff \text{gen}(S_1) = \text{gen}(S_2)$ y tienen ambas el mismo carácter de orientabilidad.

- (III) $S_1 \cong S_2 \iff \Pi_1(S_1) \cong \Pi_1(S_2)$.

DEMOSTRACIÓN: Por el Corolario 19.1 toda superficie topológica compacta es homeomorfa a una y sólo una de las superficies en la lista canónica

$$\mathfrak{S} = \{S_{w_n} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{S_{w_n^*} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Por otra parte, la Proposición 16.14 y un cálculo directo nos dan que

$$\chi(S_{w_n}) = 1 + \chi(\Gamma_{w_n}) = 2 - 2n = 2 - 2\text{gen}(S_{w_n}),$$

$$\chi(S_{w_n^*}) = 1 + \chi(\Gamma_{w_n^*}) = 2 - n = 2 - \text{gen}(S_{w_n^*}),$$

y por tanto el valor de la característica de Euler (o el género) y el carácter de orientabilidad distinguen a los objetos en \mathfrak{S} . Uniendo toda la anterior información, (I) y (II) se siguen del Corolario 16.9. El Corolario 9.11 también muestra que los grupos fundamentales distinguen a los espacios en \mathfrak{S} , por lo que (III) es consecuencia del Corolario 19.1. ■

Es conveniente retener en la mente las siguientes fórmulas:

- Si S es una superficie compacta orientable entonces $\chi(S) = 2 - 2\text{gen}(S)$.
- Si S es una superficie compacta no orientable entonces $\chi(S) = 2 - \text{gen}(S)$.

19.1. Suma conexa de superficies

Consideremos dos superficies topológicas compactas y disjuntas S_1 y S_2 . Tomemos un disco topológico compacto $K_j \subset S_j$ y escribamos $S'_j = S_j \setminus \text{Int}(K_j)$, $j = 1, 2$.

Sea $h: \text{Bd}(K_1) \rightarrow \text{Bd}(K_2)$ un homeomorfismo y \sim_h la relación de equivalencia de pegado inducida en $S'_1 \cup S'_2$, a saber

$$p \sim_h q \iff p = q \text{ ó } \{p, q\} = \{r, h(r)\}, r \in \text{Bd}(K_1).$$

Definimos

$$S_1 \# S_2 := (S'_1 \cup S'_2) / \sim_h.$$

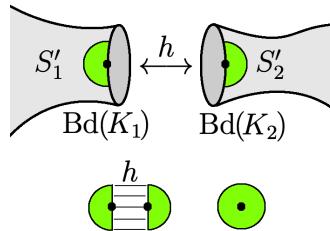
No es difícil ver (al menos si K_j es unión de triángulos de alguna triangulación de S_j , $j = 1, 2$, aunque se puede probar que esta condición siempre se da) que:

- $S_1 \# S_2$ es una superficie topológica.

En efecto, basta usar la Proposición 2.14 para comprobar que se satisface la condición de ser localmente euclídea.

- $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$.

Para ello basta con construir una triangulación \mathcal{T} de $S_1 \# S_2$ combinando triangulaciones $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ de los poliedros $S_1 \setminus \text{Int}(K_1)$ y $S_2 \setminus \text{Int}(K_2)$ compatibles vía h sobre $\text{Bd}(K_1) \equiv \text{Bd}(K_2) \subset S_1 \# S_2$, y usar que $\chi(S_j \setminus \text{Int}(K_j)) = \chi(S_j) - 1$ ya que $\chi(\text{Bd}(K_j)) = 0$ y $\chi(K_j) = 1$, $j = 1, 2$.

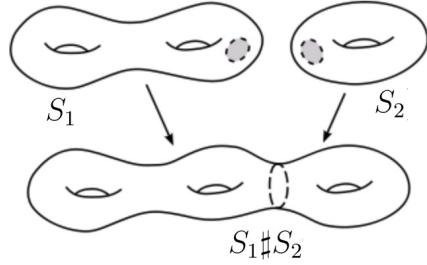


- $S_1 \# S_2$ es orientable $\iff S_j$ es orientable, $j = 1, 2$.

Como antes, construir una triangulación de $S_1 \# S_2$ combinando triangulaciones globalmente orientadas de $S_j \setminus \text{Int}(K_j)$, $j = 1, 2$, que engarcen de forma compatible vía h sobre $\text{Bd}(K_1) \equiv \text{Bd}(K_2) \subset S_1 \# S_2$. Obsérvese que $S_j \setminus \text{Int}(K_j)$ es orientable si y sólo si S_j es orientable (usar que K_j es orientable), $j = 1, 2$.

Los anteriores comentarios nos dicen que la característica de Euler y el carácter de orientabilidad de $S_1 \# S_2 = (S'_1 \cup S'_2) / \sim_h$ están determinados por los de S_1 y S_2 , y por tanto que la superficie compacta $S_1 \# S_2$ no depende del homeomorfismo h utilizado (ver el Corolario 19.2).

Definición 19.3 La superficie $S_1 \# S_2$ es conocida como la suma conexa de S_1 y S_2 .



Corolario 19.4 Los siguientes enunciados son ciertos:

- (i) Toda superficie topológica compacta y orientable no homeomorfa \mathbb{S}^2 es suma conexa de una cantidad finita de toros, cantidad que coincide con su género.
- (ii) Toda superficie compacta no orientable es suma conexa de una cantidad finita de planos proyectivos, que coincide con su género.

DEMOSTRACIÓN : Probemos (i). Por el Corolario 19.1, una superficie topológica compacta orientable y no homeomorfa \mathbb{S}^2 es necesariamente homeomorfa a $S_{\mathfrak{w}_n}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Bastará con probar que $S_{\mathfrak{w}_n}$ es suma conexa de n toros.

En efecto, si denotamos por $\mathbb{T} = S_{\mathfrak{w}_1}$ al toro (que sabemos tiene $\chi(\mathbb{T}) = 0$), la fórmula general $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$ y un cálculo inductivo elemental nos dicen que

$$\chi(\mathbb{T} \# \overset{\circ}{\cdots} \# \mathbb{T}) = 2 - 2n = \chi(S_{\mathfrak{w}_n}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathbb{T} \# \overset{\circ}{\cdots} \# \mathbb{T}$ y $S_{\mathfrak{w}_n}$ son orientables, el Corolario 19.2 garantiza que $\mathbb{T} \# \overset{\circ}{\cdots} \# \mathbb{T} \cong S_{\mathfrak{w}_n}$ y de aquí lo deseado. Recordemos que por definición el entero $n \in \mathbb{N}$ es el género (orientable) de la superficie.

De forma análoga para probar (ii) usemos que, del Corolario 19.1, toda superficie topológica compacta no orientable es homeomorfa a $S_{\mathfrak{w}_n^*}$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Bastará con probar que $S_{\mathfrak{w}_n^*}$ es suma conexa de n proyectivos. Para ello recordemos que $\chi(\mathbb{P}^2) = 1$ y observemos que

$$\chi(\mathbb{P}^2 \# \overset{\circ}{\cdots} \# \mathbb{P}^2) = 2 - n = \chi(S_{\mathfrak{w}_n^*}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathbb{P}^2 \# \overset{\circ}{\cdots} \# \mathbb{P}^2$ y $S_{\mathfrak{w}_n^*}$ son no orientables, el Corolario 19.2 nos da $S_{\mathfrak{w}_n^*} \cong \mathbb{P}^2 \# \overset{\circ}{\cdots} \# \mathbb{P}^2$. Recordemos que por definición $n \in \mathbb{N}$ es el género (no orientable) de la superficie. ■

Ejercicio 19.5 En cada uno de los siguientes casos clasificar la superficie realización de los siguientes esquemas binarios puros:

$$(I) \quad \omega = abacb^{-1}c^{-1},$$

$$(II) \quad \nu = abca^{-1}b^{-1}c^{-1},$$

Clasificar la suma conexa de las superficies representadas en (i) y (ii).

SOLUCIÓN : Como ω tiene un par de segunda especie entonces es no orientable. Un análisis elemental nos dice que Γ_ω tiene un sólo vértice y tres ciclos, por lo que $\chi(S_\omega) = 1 + \chi(\Gamma_\omega) = 1 + (1 - 3) = -1$. La única superficie no orientable de la lista canónica con ese valor de la característica de Euler es $S_{\mathfrak{w}_3^*} = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, de donde $S_\omega = S_{\mathfrak{w}_3^*}$.

En el segundo caso se razona igual. Como en este caso ν no tiene pares de segunda especie entonces es orientable. Un análisis elemental nos dice que Γ_ν tiene dos vértices y dos ciclos, por lo que $\chi(S_\omega) = 1 + \chi(\Gamma_\nu) = 1 + (1 - 2) = 0$. La única superficie orientable de la lista canónica con ese valor de la característica de Euler es el toro $S_{\mathfrak{w}_1} = \mathbb{T}$, de donde $S_\omega = \mathbb{T}$.

Por último, la superficie $S_\omega \# S_\nu$ es no orientable ya que uno de los factores (a saber S_ω) lo es, y tiene por característica de Euler

$$\chi(S_\omega \# S_\nu) = \chi(S_\omega) + \chi(S_\nu) - 2 = -1 + 0 - 2 = -3.$$

La única superficie no orientable de la lista canónica con ese valor de la característica de Euler es $S_{\mathfrak{w}_5^*} = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$, de donde $S_\omega \# S_\nu = S_{\mathfrak{w}_5^*}$. ■

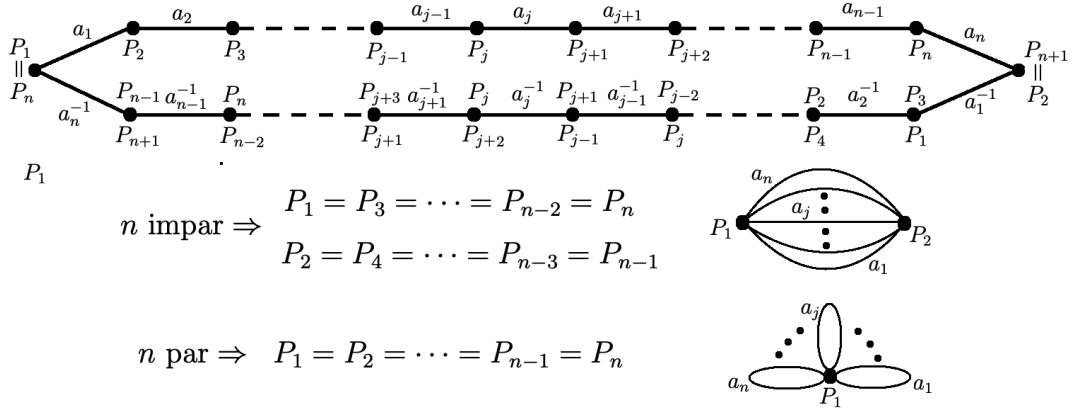
Ejercicio 19.6 Determinar qué superficie se obtiene cuando identificamos las aristas de un polígono de $2n$ lados con $n \geq 2$ mediante el esquema

$$\omega_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \cdots a_n^{-1}.$$

¿Y si cambiamos la última etiqueta por a_n ?

SOLUCIÓN: Un proceso inductivo sencillo demuestra que el grafo borde Γ_{ω_n} de la realización S_{ω_n} de ω_n tiene:

- $n - 1$ ciclos y 2 vértices si n es impar.
- n ciclos y 1 vértice si $n \geq 2$ es par.



En efecto, esa afirmación es cierta si $n = 2$ o $n = 3$ por comprobación directa. Si se supone válida para un $n \geq 2$ genérico, es fácil comprobar que al añadirle a ω_n un nuevo par de primera especie con etiqueta a_{n+1} con resultado ω_{n+1} se tiene que:

- El numero de vértices en $\Gamma_{\omega_{n+1}}$ aumenta o disminuye en una unidad respecto al de Γ_{ω_n} dependiendo de si n es par o impar, respectivamente.
- El número de ciclos de $\Gamma_{\omega_{n+1}}$ queda igual o aumenta en dos unidades respecto al de Γ_{ω_n} dependiendo de si n es par o impar, respectivamente.

Por tanto:

- $\chi(S_{\omega_n}) = 1 + \chi(\Gamma_{\omega_n}) = 1 + (1 - (n - 1)) = 3 - n$ si n es impar.
- $\chi(S_{\omega_n}) = 1 + \chi(\Gamma_{\omega_n}) = 1 + (1 - n) = 2 - n$ si n es par.

Como S_{ω_n} es orientable (ω_n no contiene pares de segunda especie), deducimos del la tabla de clasificación de superficies que:

- $S_{\omega_n} = S_{\mathfrak{w}_{(n-1)/2}}$ (suma conexa de $(n - 1)/2$ toros) si n es impar.
- $S_{\omega_n} = S_{\mathfrak{w}_{n/2}}$ (suma conexa de $n/2$ toros) si n es par.

Si llamamos

$$\nu_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n$$

en este caso el grafo borde Γ_{ν_n} de la realización S_{ν_n} de ν_n tiene un sólo vértice y n ciclos, por lo que $\chi(S_{\nu_n}) = 1 + \chi(\Gamma_{\nu_n}) = 1 + (1 - n) = 2 - n$. Como S_{ν_n} es no orientable (ν_n contiene un par de segunda especie), deducimos del la tabla de clasificación de superficies que $S_{\nu_n} = S_{\mathfrak{w}_8^*}$ es la suma conexa de n proyectivos. ■

Ejercicio 19.7 Encuentra todas las superficies compactas X, Y tales que

$$X \# Y = S_{\mathfrak{w}_8^*} = \overset{8}{\underset{\#}{\cdots}} \# \mathbb{P}^2 \quad (\text{suma conexa de } 8 \text{ proyectivos}).$$

SOLUCIÓN: Como $S_{\mathfrak{w}_8^*}$ es no orientable, al menos una de las dos superficies X, Y es no orientable. Al ser $X \# Y = Y \# X$, sin pérdida de generalidad supondremos que X es no orientable, esto es, $X = S_{\mathfrak{w}_k^*}$, $k \in \mathbb{N}$. Discutiremos dos casos:

- Y es orientable. En este caso $Y = S_{\mathfrak{w}_s}$, $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y la fórmula $-6 = \chi(S_{\mathfrak{w}_8^*}) = \chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2 = (2 - k) + (2 - 2s) - 2 = 2 - k - 2s$ nos dice que $k + 2s = 8$. Resolviendo $(k, s) \in \{(2, 3), (4, 2), (6, 1), (8, 0)\}$, que se corresponde con las soluciones:

$$(X, Y) = \{(S_{\mathfrak{w}_2^*}, S_{\mathfrak{w}_3}), (S_{\mathfrak{w}_4^*}, S_{\mathfrak{w}_2}), (S_{\mathfrak{w}_6^*}, S_{\mathfrak{w}_1}), (S_{\mathfrak{w}_8^*}, \mathbb{S}^2)\}$$

- Y es no orientable. En este caso $Y = S_{\mathfrak{w}_s^*}$, $s \in \mathbb{N}$, y usando que $X \# Y = Y \# X$ podemos suponer $k \leq s$. La fórmula

$$-6 = \chi(S_{\mathfrak{w}_8^*}) = \chi(X \# Y) = \chi(X) + \chi(Y) - 2 = (2 - k) + (2 - s) - 2 = 2 - k - s$$

nos dice que $k + s = 8$. Resolviendo $(k, s) \in \{(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4)\}$, que se corresponde con las soluciones:

$$(X, Y) = \{(\mathbb{P}^2, S_{\mathfrak{w}_7}), (S_{\mathfrak{w}_2^*}, S_{\mathfrak{w}_6^*}), (S_{\mathfrak{w}_3^*}, S_{\mathfrak{w}_5^*}), (S_{\mathfrak{w}_4^*}, S_{\mathfrak{w}_4^*})\}.$$

■

Ejercicio 19.8 Si S_1 y S_2 son superficies compactas y conexas, ¿se cumple necesariamente que $\Pi_1(S_1 \# S_2) \cong \Pi_1(S_1) \bullet \Pi_1(S_2)$? ¿Y que $\mathcal{A}(\Pi_1(S_1 \# S_2)) \cong \mathcal{A}(\Pi_1(S_1)) \times \mathcal{A}(\Pi_1(S_2))$?

SOLUCIÓN: Si $S_1 = S_2 = \mathbb{P}^2$ tenemos que $S_1 \# S_2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = S_{\mathfrak{w}_2^*}$, donde $\omega_2 = a_1 a_1 a_2 a_2$. De aquí que

$$\Pi_1(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2) = F(a_1, a_2)/N(\{a_1 a_1 a_2 a_2\}) \not\cong \Pi_1(\mathbb{P}^2) \bullet \Pi_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}_2[a_1] \bullet \mathbb{Z}_2[a_2]$$

y

$$\mathcal{A}(\Pi_1(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z} \not\cong \mathcal{A}(\Pi_1(\mathbb{P}^2)) \times \mathcal{A}(\Pi_1(\mathbb{P}^2)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Esto responde en sentido negativo ambas preguntas. ■

20. Superficies topológicas y recubridores

La Proposición 15.4 expresa que la teoría de recubridores es interna en la familia de superficies. El siguiente teorema enuncia algunos hechos básicos.

Teorema 20.1 *Si X e Y son superficies topológicas compactas y $\pi: Y \rightarrow X$ un recubridor entonces:*

(a) $\chi(Y) = n\chi(X)$, donde n es el número de hojas de (Y, π) .

(b) X orientable $\implies Y$ orientable (el recíproco no es cierto).

DEMOSTRACIÓN : Para el item (a), consideremos una triangulación \mathcal{T} de X (usar el Teorema 17.1). Sea $T \in \mathcal{T}$ un triángulo arbitrario y llamemos $i: T \rightarrow X$ a la aplicación inclusión. Fijemos $x \in T$ e $y \in \pi^{-1}(x)$, y llamemos \tilde{T} a la arcocomponente de $\pi^{-1}(T)$ con $y \in \tilde{T}$. Como la condición

$$i_*(\Pi_1(T, x)) = \{0\} \subseteq \pi_*(\Pi_1(Y, y))$$

se satisface trivialmente, el Corolario 11.12 garantiza que $\pi|_{\tilde{T}}: \tilde{T} \rightarrow T$ es un homeomorfismo.

Este argumento general prueba que la familia

$$\tilde{\mathcal{T}} := \{\tilde{T} \subset Y : \exists T \in \mathcal{T} \text{ con } \pi|_{\tilde{T}}: \tilde{T} \rightarrow T \text{ homeomorfismo}\}$$

define de forma natural una triangulación de Y , y por tanto que

$$\chi(Y) = \chi_{\tilde{\mathcal{T}}}(Y) = n\chi_{\mathcal{T}}(X) = n\chi(X),$$

donde n es el número de hojas de (Y, π) .

Por último, para probar (b) consideremos una triangulación \mathcal{T} de X globalmente orientada de forma compatible, y construyamos como antes la única triangulación $\tilde{\mathcal{T}}$ de Y tal que $\pi(\tilde{\mathcal{T}}) = \mathcal{T}$. La orientaciones de los triángulos $T \in \mathcal{T}$ se pueden levantar vía π de forma natural a orientaciones de los triángulos $\tilde{T} \in \tilde{\mathcal{T}}$, y la compatibilidad de las orientaciones de los primeros garantiza la de los segundos. ■

Recordemos que el plano proyectivo $\mathbb{P}^2 = S_{w_1}$ es recubierto por $\mathbb{S}^2 = S_{w_0}$, por lo que el recíproco de Teorema 20.1-(b) no es cierto.

Ejercicio 20.2 *Determina todos los espacios topológicos compactos que recubren a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ (la botella de Klein).*

SOLUCIÓN : Supongamos que $\pi: Y \rightarrow \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ es recubridora y llamemos k al número de hojas de (Y, π) . Sabemos de la Proposición 10.3 que Y es una superficie. Además, recordemos que al ser Y compacto el número k es finito por el por el Corolario 12.3. Del Teorema 20.1

$$\chi(Y) = k \cdot \chi(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2) = k \cdot 0 = 0.$$

Caben dos posibilidades:

- Y es orientable: en este caso la identidad $\chi(Y) = 2 - 2\text{gen}(Y) = 0$ implica que Y tiene género 1, esto es, $Y = \mathbb{T}$.
- Y es no orientable: en este caso la identidad $\chi(Y) = 2 - \text{gen}(Y) = 0$ implica que Y tiene género 2, esto es, $Y = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.

Ambas posibilidades topológicas se materializan ya que:

- $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ recubre a $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ con dos hojas, recordemos que de hecho $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ es el espacio de órbitas asociado a la acción de la aplicación antípoda sobre el toro de revolución centrado en el origen.
- $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ se recubre a sí mismo por la aplicación identidad.

■

Ejercicio 20.3 Determina todos los espacios topológicos compactos recubiertos por $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ (la botella de Klein).

SOLUCIÓN: Supongamos que $\pi: \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \rightarrow X$ es recubridora y llamemos k al número de hojas de $(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2, \pi)$. Sabemos de la Proposición 10.3 que X es una superficie. Además recordemos que al ser $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ (y por tanto X) compacto, el número k es finito por el Corolario 12.3. Del Teorema 20.1 deducimos que X es no orientable y

$$0 = \chi(\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2) = k \cdot \chi(X).$$

La identidad $\chi(X) = 2 - \text{gen}(X) = 0$ implica que X tiene género 2, esto es, $Y = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$. Este recubrimiento se materializa por ejemplo para la aplicación identidad de $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ en sí mismo. ■

Ejercicio 20.4 Determina todos los espacios topológicos compactos recubiertos por $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$.

SOLUCIÓN: Supongamos que $\pi: \mathbb{T} \# \mathbb{T} \rightarrow X$ es recubridora y llamemos k al número de hojas de (Y, π) . Sabemos de la Proposición 10.3 que X es una superficie. Además, como $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$ (y por tanto X) es compacto el número k es finito por el Corolario 12.3. Del Teorema 20.1 caben dos posibilidades:

- X es orientable: la identidad $-2 = \chi(\mathbb{T} \# \mathbb{T}) = k \cdot \chi(X) = k \cdot (2 - 2\text{gen}(X))$ implica que $k = 1$ y $\text{gen}(X) = 2$, esto es, $X = \mathbb{T} \# \mathbb{T}$.
- X es no orientable: la identidad $-2 = \chi(\mathbb{T} \# \mathbb{T}) = k \cdot \chi(X) = k \cdot (2 - \text{gen}(X))$ implica que $k = 2$ y $\text{gen}(X) = 3$, esto es, $X = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ (la opción $k = 1$ se excluye pues π no puede ser homeomorfismo).

Es posible ver que ambas posibilidades topológicas se materializan por recubridores concretos. Trivialmente $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$ se recubre a sí mismo por la aplicación identidad. En el caso $X = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ es posible generar un recubrimiento

$$\pi: \mathbb{T} \# \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$$

de la siguiente manera. Embebamos el doble toro $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$ en \mathbb{R}^3 de forma que sea invariante bajo las simetrías respecto de los tres ejes coordenados. La aplicación $A: \mathbb{T} \# \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \# \mathbb{T}$, $A(p) = -p$, es un homeomorfismo involutivo sin puntos fijos en $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$, y por tanto induce un recubrimiento de dos hojas

$$\pi: \mathbb{T} \# \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \# \mathbb{T} / \langle A \rangle$$

al correspondiente espacio de órbitas $\mathbb{T} \# \mathbb{T} / \langle A \rangle$. Obviamente $\mathbb{T} \# \mathbb{T} / \langle A \rangle \cong \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$ por ser ésta la única superficie compacta con característica de Euler igual a -1 . ■

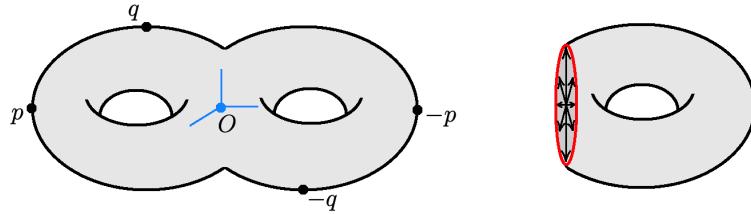


Figura 6: Acción de la aplicación Antípoda sobre el doble toro.

Ejercicios del Tema 3

1. Sea $X = \mathbb{S}^2 \cup \{x_0\}$, donde $x_0 \in \mathbb{R}^3 - \mathbb{S}^2$. En X se considera la topología tal que los entornos de los puntos de \mathbb{S}^2 son los usuales, y los de x_0 son de la forma $(V - \{N\}) \cup \{x_0\}$, donde $N = (0, 0, 1)$ y V es un entorno de N en \mathbb{S}^2 . Demostrar que cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 pero X no es T_2 .
2. Consideremos el espacio producto $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, donde en \mathbb{R}^2 se considera la topología usual y en \mathbb{R} la topología discreta. Demostrar que cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de \mathbb{R}^2 pero X no es IIAN.
3. Demostrar que los siguientes espacios topológicos no son superficies:
 - a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$.
 - b) \mathbb{R}^n con $n \neq 2$.
 - c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$.

¿Es la unión o intersección de dos superficies en \mathbb{R}^3 una superficie?

4. Sea $\rho : \widetilde{S} \rightarrow S$ recubridora. Probar que \widetilde{S} es una superficie si y sólo si lo es S .
5. Sea S una superficie y $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Definimos el grafo de f como:

$$G(f) = \{(x, (f(x)) : x \in S\}$$

con la topología inducida por la topología producto en $S \times \mathbb{R}$. Probar que $G(f)$ es una superficie, que además es compacta si y sólo si lo es S .

6. Encontrar un atlas de \mathbb{P}^2 , esto es, una familia de sistemas de coordenadas en \mathbb{P}^2 cuyos entornos coordinados recubran \mathbb{P}^2 .
7. Encontrar una triangulación de la botella de Klein K .
8. En cada uno de los siguientes casos clasificar la superficie realización de los siguientes esquemas binarios puros:

- a) $E = abacb^{-1}c^{-1}$,
- b) $E = abca^{-1}b^{-1}c^{-1}$,
- c) $E = abcdca^{-1}bd^{-1}$,
- d) $E = aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1}$,
- e) $E = abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1}$.

Clasificar la suma conexa de las superficies representadas en *a*) y *b*).

9. ¿Qué superficie está representada por la unión de 4 triángulos disjuntos cuyas aristas se etiquetan e identifican según los esquemas $E = abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa$?
10. ¿Qué superficie se obtiene cuando identificamos las aristas de un polígono de $2n$ lados con $n \geq 2$ mediante el esquema $E = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} a_3^{-1} \cdots a_n^{-1}$? ¿Y si cambiamos la última etiqueta por a_n ?
11. Escribamos $\mathbb{T}_n = \mathbb{T} \# \overset{n}{\dots} \# \mathbb{T}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$. Demostrar que toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una y sólo una de las siguientes superficies:

$$\mathbb{S}^2, \mathbb{T}_n, \mathbb{RP}^2, \mathbb{K}, \mathbb{T}_n \# \mathbb{RP}^2, \mathbb{T}_n \# \mathbb{K}.$$

12. Identificar, salvo homeomorfismos, las superficies compactas y conexas con característica de Euler igual a -2 .
13. Sea S una superficie compacta y conexa. Probar que $\chi(S) \geq -2$ si y sólo si S es homeomorfa al espacio realización de un esquema binario puro de longitud 8.
14. Discutir de forma razonada si cada par de las siguientes superficies compactas y conexas son o no homeomorfas entre sí:
 - a)* $S_1 \cong S_\omega$ donde $\omega = abcdad^{-1}cb^{-1}$.
 - b)* S_2 tiene $\chi(S_2) \geq 0$ y grupo fundamental no abeliano.
 - c)* S_3 tiene grupo fundamental isomorfo a $F(a, b, c)/N(acbcba^{-1})$.

Obtener también la presentación poligonal canónica de S_1 efectuando para ello las transformaciones que sean necesarias.

15. Sea S la superficie compacta y conexa que asociada a un esquema binario puro de la forma:

$$E = ab^{-1}c - da^{-1}ebc^{-1} - ,$$

donde cada guion – está ocupado por una única etiqueta. Completar el esquema para que S sea homeomorfa a:

- a)* $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$.
- b)* $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.
- c)* La superficie modelo con abelianizado de su grupo fundamental isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^4$.
16. Un *poliedro regular* en \mathbb{R}^3 es un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^3$ dado por la unión de una cantidad finita de polígonos cerrados regulares (llamados caras de P) tal que:
 - a)* todas las caras tienen el mismo número de lados,
 - b)* a cada vértice llegan el mismo número de aristas,
 - c)* $P \cong \mathbb{S}^2$.

Probar la *fórmula de Euler* dada por $V - A + F = 2$, donde V es el número de vértices del poliedro, A es el número de aristas y F el número de caras. A partir de aquí, deducir que hay solamente 5 poliedros regulares: tetraedros, octaedros, icosaedros, cubos y dodecaedros.

17. Se divide un balón de fútbol en piezas homeomorfas a pentágonos o hexágonos (no todas las piezas han de ser homeomorfas al mismo tipo de polígono) de modo que:

- a) cada arista es compartida por exactamente dos piezas,
- b) a cada vértice llegan exactamente tres aristas.



Demostrar que el número de piezas pentagonales es 12.

18. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

- a) Sea S una superficie. Demostrar que $S \# \mathbb{S}^2 \cong S$.
- b) Si S_1 y S_2 son superficies compactas y conexas, ¿se cumple necesariamente que $\Pi_1(S_1 \# S_2) \cong \Pi_1(S_1) * \Pi_1(S_2)$? ¿Y que $\mathcal{A}(\Pi_1(S_1 \# S_2)) \cong \mathcal{A}(\Pi_1(S_1)) \times \mathcal{A}(\Pi_1(S_2))$?
- c) ¿Es cierto que $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \cong \mathbb{P}^2 \# T \cong \mathbb{P}^2 \# K$?
- d) ¿Existe S superficie compacta y conexa con $\chi(S) \leq -7$ y $\mathcal{A}(\Pi_1(S)) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}^7$?

19. Determina los espacios topológicos *compactos* Y para los que existe una aplicación recubridora $\pi: Y \rightarrow X$ en cada uno de los siguientes casos:

- a) $X = \mathbb{S}^2$.
- b) $X = \mathbb{P}^2$.
- c) $X = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.
- d) $X = \mathbb{T}$, donde $\mathbb{T} := S^1 \times \mathbb{S}^1$.

20. Determina los espacios topológicos X para los que existe una aplicación recubridora $\pi: Y \rightarrow X$ en cada uno de los siguientes casos:

- a) $Y = \mathbb{P}^2$.
- b) $Y = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$.
- c) $Y = \mathbb{T}$, donde $\mathbb{T} := S^1 \times \mathbb{S}^1$.
- d) $Y = \mathbb{T} \# \mathbb{T}$.