

Aurora Hermoso Carazo y M^a Dolores Ruiz Medina

Recuperación

Este examen pertenece al Banco de Exámenes de la Asociación de Estudiantes de Matemáticas de la Universidad de Granada. Si bien su autoría corresponde a los profesores ya citados, en la asociación nos encargamos de almacenarlos y ceder su uso a los estudiantes para que sea más satisfactoria su labor a la hora de preparar un examen.

1. **(1 punto)** Sean $(X_1, \dots, X_n), (Y_1, \dots, Y_n)$ muestras independientes de poblaciones con medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1^2, σ_2^2 . Sean $\bar{X}, \bar{Y}, S_1^2, S_2^2$ las medias y cuasivarianzas muestrales respectivamente. Partiendo de la independencia de los vectores $(\bar{X}, \bar{Y}), (S_1^2, S_2^2)$, deducir la distribución de la siguiente variable, especificando y justificando todos los pasos:

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \sqrt{\frac{(n-1)S_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{(m-1)S_2^2}{\sigma_2^2}}} \sqrt{n+m-2}$$

2. **(4.25 puntos)**

- a) Enunciar y demostrar el teorema de invarianza de Zehna, detallando previamente las siguientes definiciones:
- Función de verosimilitud y estimador máximo verosímil de un parámetro.
 - Función de verosimilitud y estimador máximo verosímil de una función paramétrica.
- b) A partir de las condiciones de regularidad de Frechet-Cramer-Rao, deducir de forma justificada la propiedad de aditividad de la función de información.
- c) Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable X con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{e^x}{e^\theta - 1}, \quad 0 < x < \theta.$$

- Encontrar un estadístico suficiente y completo, probando que lo es.
- Encontrar, si existe, un UMVUE para e^θ .
- Encontrar el estimador máximo verosímil de e^θ , justificando su obtención. ¿Es insesgado este estimador? Justificalo.

3. **(2 puntos)**

- a) Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable $X \rightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma_0^2)$ con varianza conocida. Deducir el test de la razón de verosimilitud de tamaño α para contrastar:
$$\begin{cases} H_0 : \mu \geq \mu_0 \\ H_1 : \mu < \mu_0 \end{cases}$$
- b) A partir del test anterior, obtener un intervalo de confianza para μ . Deducir de forma razonada el nivel de confianza del intervalo de confianza.

4. **(1.25 puntos)** Análisis de varianza de una vía. Explicar en qué consiste el problema. Plantearlo en términos de un modelo lineal, especificando todos los componentes del intervalo; comprobar que es de Gauss-Markov y determinar su rango. Especificar el contraste de interés como caso particular de la hipótesis lineal general.

5. **(1.5 puntos)**

- a) Problema de bondad de ajuste. Explicar en qué consiste y describir los test para su resolución explicando la interpretación del estadístico de contraste en cada caso, ventajas e inconvenientes.
- b) A partir de una muestra de 200 empleados, se ha construido la siguiente tabla de frecuencias conjunta de Calidad de Vida (CV) y Rendimiento de Trabajo (RT). Se desea contrastar a nivel 0,05 si los RT son independiente de la CV de los empleados.

CV/RT	Poca	Media	Mucha
Bajo	62	10	2
Medio	14	38	12
Alto	2	9	51