ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 12/11/2014

1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real.

   (a) Si A y B son dos subconjuntos de E. ¿Qué significa que A y B se puedan separar en E?

   (b) Probar que si A y B son dos subconjuntos no vacíos y disjuntos de E, tales que, además, A es compacto y B es cerrado, entonces existe algún $\varepsilon > 0$, tal que $((A + B(0;\varepsilon)) \bigcap (B + B(0;\varepsilon)) = \emptyset$.

   (c) Si A y B son dos subconjuntos de E, convexos, no vacíos y disjuntos, tales que, además A es compacto y B cerrado, pruébese que A y B se pueden separar de manera estricta (se puede usar el primer teorema de separación probado en clase).

2. Si $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son espacios normados y $L : E \to F$ es una aplicación lineal, decídase razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) Si la dimensión de E es finita, entonces L es continua.

   (b) Si la dimensión de F es finita, entonces L es continua.

3. Decídase, razonadamente, cuáles de las siguientes aplicaciones lineales son continuas:

   (a) $L : X = C([a,b], \mathrm{R}) \to \mathrm{R},\ f \to \int_a^b f(x)\ dx - f(a)$, cuando en X se considera la norma uniforme.

   (b) $L : X = C([a,b], \mathrm{R}) \to \mathrm{R},\ f \to \int_a^b f(x)\ dx - f(a)$, cuando en X se considera la norma de $L^1(a,b)$.

   (c) $L : P_n(x_1, x_2) \to P_{n-1}(x_1, x_2),\ L(P) = \dfrac{\partial\ P}{\partial\ x_1},\ \forall\ P \in P_n(x_1, x_2)$.

   $P_m(x_1, x_2)$ indica el espacio vectorial normado de polinomios de grado menor o igual a m, en las variables $(x_1, x_2) \in\ [0,1]^2$, con la norma uniforme.