

Examen-Ordinario-2021.pdf



AmigoCanario



Inferencia Estadística



3º Grado en Matemáticas



**Facultad de Ciencias
Universidad de Granada**



my CLARINS

TUS TRATAMIENTOS CON EXTRACTOS DE FRUTAS
Y PLANTAS PARA UNA PIEL SANA Y BONITA

Descúbrelo ahora en CLARINS.COM con un 30%* de descuento. Código: WUOLAH1

*Descuento aplicable sobre la gama My Clarins hasta el 28 de febrero de 2022. No acumulable con otras promociones de descuento y precio fijo.

¿MUCHAS HORAS DE ESTUDIO? ¿NOCHES SIN DORMIR?
CON **my CLARINS** NO SE NOTARÁ EN TU ROSTRO.
CONSIGUE UNA **PIEL DE 10, SANA Y BONITA.**



DESCÚBRELO AHORA
EN CLARINS.COM
CON UN 30%*
DE DESCUENTO

código: WUOLAH1

*Descuento aplicable sobre la gama My Clarins hasta el 28 de febrero de 2022. No acumulable con otras promociones de descuento y precio fidelidad.



Examen Final 2021

Pregunta 1

[1.25 pts] Sean (X_1, \dots, X_8) , (Y_1, \dots, Y_{10}) muestras aleatorias simples independientes de dos poblaciones, $\mathcal{N}(4, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}(3, \sigma^2)$, respectivamente.

a) Si \bar{X} e \bar{Y} denotan las medias muestrales, calcular el percentil 95 de la siguiente variable:

$$Z = \frac{\bar{Y} - \bar{X} + 1}{\sqrt{\sum_{i=1}^8 (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^{10} (Y_j - \bar{Y})^2}}.$$

b) Calcular, detallando todos los pasos, el estimador máximo verosímil de σ^2 basado en $(X_1, \dots, X_8, Y_1, \dots, Y_{10})$.

Pregunta 2

[2.5 pts] Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{2x}{(\theta - 3)^2}, \quad 0 < x < \theta - 3.$$

a) Calcular el UMVUE para θ , detallando y justificando todos los pasos.

b) Calcular la función de verosimilitud y encontrar el estimador máximo verosímil de θ . ¿Es insesgado? (justificar la respuesta).

Pregunta 3

[2.25 pts]

a) Sea X una variable continua con distribución en una familia regular en el sentido de Fréchet-Cramér-Rao, con funciones de densidad $\{f_\theta; \theta \in \Theta\}$. Probar, detallada y justificadamente, que si $\int_x \frac{\partial^2 f_\theta(x)}{\partial \theta^2} dx = 0$, la función de información verifica

$$I_X(\theta) = -E_\theta \left[\frac{\partial^2 \ln f_\theta(X)}{\partial \theta^2} \right].$$

b) Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\ln x - \theta)^2}{4} \right\}, \quad x > 0.$$

Sabiendo que $E_\theta[\ln X] = \theta$, $\text{Var}_\theta[\ln X] = 2$ y que la familia de distribuciones es regular, se pide:

b1) Calcular la función de información asociada a la muestra y encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y los correspondientes estimadores.

b2) Calcular $E_\theta[U \ln X_i]$, siendo $U \equiv U(X_1, \dots, X_n)$ un estimador insesgado de $1/\theta$ y regular.

b3) Calcular la cota para la varianza de estimadores regulares, insesgados en $3\theta^2 + 2$, y justificar si se alcanza o no dicha cota.

Pregunta 4

[2.75 pts] Sea (X_1, \dots, X_n) una muestra aleatoria simple de una variable X con función de densidad:

$$f_{\theta}(x) = \frac{2x}{9\theta^2}, \quad 0 < x < 3\theta.$$

- a) Deducir el test de razón de verosimilitudes de tamaño α para contrastar $H_0 : \theta = \theta_0$ frente a $H_1 : \theta < \theta_0$, detallando el espacio paramétrico, el espacio muestral, y representando gráficamente el estadístico de contraste. ¿Qué tamaños se alcanzan? Justificar la respuesta.
- b) Aplicando la definición de intervalo de confianza, deducir el nivel de confianza del intervalo obtenido a partir del test del apartado a).

Pregunta 5

[1.25 pts] Para contrastar si la opinión sobre la cobertura de red móvil es la misma en los pueblos de una comarca, se ha efectuado una encuesta en cada uno de ellos. La siguiente tabla muestra las respuestas a la pregunta: ¿Hay buena cobertura de red móvil en su pueblo?

	Si	No	No sabe	No contesta
Pueblo 1	7	16	1	1
Pueblo 2	13	6	3	3
Pueblo 3	11	7	6	1

- a) Describir las variables usadas en este problema y concretar formalmente la hipótesis a contrastar en términos de la distribución de dichas variables.
- b) Especificar qué parámetros deben estimarse para calcular el estadístico de contraste, cuáles son los estimadores usados y justificar por qué se usan estos estimadores.
- c) A la vista de los datos, ¿qué conclusión se obtiene sobre el problema planteado al nivel de significación 0.05? (trabajar con cuatro cifras decimales).