ESPACIOS NORMADOS. EJEMPLOS

Sep. 2021

Sea $\mathbb{X}$ un e. v. sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Una norma en $\mathbb{X}$ (Banach, 1.922) es una aplicación

$\|\cdot\| : \mathbb{X} \to [0,+\infty)$, $x \longrightarrow \|x\|$, que satisface:

(N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{X}$; $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall x \in \mathbb{X}$

(N3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in \mathbb{X}$ (desig. triangular)

Un espacio vectorial se dice normado si está equipado con una norma $\|\cdot\|$. Se indica $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$.

En cualquier espacio normado se puede definir una distancia (o métrica), inducida por la norma:

$$d : \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to [0,+\infty), \quad (x,y) \to d(x,y) = \|x-y\|.$$

(Las propiedades abstractas de una métrica fueron introducidas por Fréchet en su tesis doctoral de 1.906. Véase el final de este archivo

A continuación describimos algunos ejemplos significativos.

Ejemplo 1. $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$

$\forall p \in [1,+\infty)$, podemos definir

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}, \quad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Es claro que la única propiedad de la norma que no es evidente es la (N3), desigualdad triangular, que en este caso particular es llamada desigualdad de MINKOWSKI.

Probaremos la misma escalonadamente mediante (P1), (P2), (P3):

P1. $\forall a, b \in [0, +\infty)$, $\forall p > 1, q > 1$, t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

(Desig. de Young) $a^{1/p} b^{1/q} \leq \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{q}$ (P1.1) (Trivial si $a=0$ ó $b=0$)

Lema previo: $\forall \alpha \in (0,1)$, $\forall x \in [1, +\infty)$, se tiene

$$\alpha(x-1) + 1 \geq x^{\alpha} \qquad (*)$$

Demostr. Si $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \to \alpha(x-1) + 1 - x^{\alpha}$, entonces

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha - 1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1}) = \alpha\left(1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \geq 0,$$

ya que $x^{1-\alpha} \geq 1$, $\forall x \geq 1$, $\forall \alpha \in (0,1)$ ($x^{1-\alpha}$ es $\uparrow$ en $[1,+\infty)$)

Así $f \uparrow$ en $[1, +\infty)$. Por tanto $f(x) \geq f(1) = 0$, $\forall x \in [1, \infty)$

y (*) está probado. Si ahora tomamos en (*) (suponemos $a>0, b>0$)

$\alpha = \dfrac{1}{p}$, $x = \dfrac{a}{b}$ si $a \geq b$ ($\alpha = \dfrac{1}{p}$, $x = \dfrac{b}{a}$ si $a \leq b$)

tenemos

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a}{b} - 1\right) + 1 \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} \Rightarrow \frac{a-b}{pb} + 1 \geq a^{1/p} \cdot b^{-1/p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{p} + b \geq a^{1/p} b^{1-1/p} \Rightarrow \frac{a}{p} + b\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq a^{1/p} b^{1-\frac{1}{p}}$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$, lo que prueba (P1.1)

P.2. Desigualdad de Hölder $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (ó $\mathbb{C}^n$), tenemos

$$\sum^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum^{n} \ldots^q\right)^{1/q}$$

$$\sum_{k=1} |x_k y_k| \le \left(\sum_{k=1} |x_k|\right) \left(\sum_{k=1} |y_k|\right) \quad \text{(D.H)}$$

donde, como anteriormente, $p>1, q>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

(Desigualdad de Cauchy-Schwarz para $p=2, q=2$)

Demostración. Si $x=0$ ó $y=0$, la (D.H.) es evidente. Así pues, supongamos $x \neq 0, y \neq 0$ (Aquí $0 \in \mathbb{R}^n$).

Definamos $a_k = \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}$, $b_k = \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}$, $1 \le k \le n$.

Entonces, por (P1.1), tenemos $a_k^{1/p} b_k^{1/q} \le \frac{a_k}{p} + \frac{b_k}{q}$

$$\frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \le \frac{|x_k|^p}{p\|x\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q\|y\|_q^q}$$

Así, $|x_k||y_k| \le \frac{|x_k|^p}{p} \|x\|_p^{1-p} \|y\|_q + \frac{|y_k|^q}{q} \|y\|_q^{1-q} \|x\|_p$

Sumando ahora, desde 1 a n, tenemos:

$$\sum_{k=1}^n |x_k||y_k| \le \frac{1}{p} \|x\|_p^p \|x\|_p^{1-p} \|y\|_q + \frac{1}{q} \|y\|_q^q \|y\|_q^{1-q} \|x\|_p$$

$$= \frac{1}{p} \|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q} \|x\|_p \|y\|_q =$$

$$= \|x\|_p \|y\|_q \quad \text{c.q.d. ((D.H))}$$

P.3 Con la ayuda de (DH), deducimos la desigualdad triangular o desigualdad de Minkowski para $\|\cdot\|_p$.

En efecto, sean $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Entonces:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k+y_k|^p = \sum^n (|x_k+y_k|^{p-1})(|x_k|+|y_k|) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1} \leq (\text{D.H.})$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Leftrightarrow p = q(p-1)$, tenemos

$$\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p \left(\|x+y\|_p^p\right)^{1/q} + \|y\|_p \left(\|x+y\|_p^p\right)^{1/q}$$

$$= \left(\|x\|_p + \|y\|_p\right) \|x+y\|_p^{p/q} \qquad (**)$$

Si $\|x+y\|_p = 0$, la desigualdad triangular es trivial.

Finalmente, si $\|x+y\|_p \neq 0$ (o lo que es lo mismo, $x \neq -y$), de $(**)$, tenemos:

$$\|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Pero $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{q} = p \Leftrightarrow 1 = p - \frac{p}{q}$, lo que prueba la desigualdad triangular.

Uf, al fin hemos probado la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < +\infty$. Por cierto, la palabra Uf, según la R.A.E. es una "voz onomatopeya" que significa cansancio, fastidio o sofocación. ¡Seguro que más de uno ha tenido estas sensaciones! Pero no hay más remedio. Las desigualdades son muy bonitas, pero, en general, difíciles de probar. Leí algun vez en algún sitio: "Las leyes de la Naturaleza se expresan con inecuaciones. Las ecuaciones son un accidente". Me gustó.

Estábamos con ejemplos de espacios normados y este ha sido el primero. Creo que los que siguen son "más asequibles".

Ejemplo 2. $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$, donde $\forall x \in \mathbb{R}^n, x=(x_1,\dots,x_n)$,

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|,\dots |x_n|\}.$$

Es trivial probar las propiedades de una norma.

Ejemplo 3. $X = C([a,b],\mathbb{R})$ con $\|\cdot\|_\infty$, donde $\forall x \in C([a,b],\mathbb{R})$, $\|x\|_\infty = \max\limits_{t\in[a,b]} |x(t)|$

Cuestión: ¿Por qué existe el máximo anterior?

En X podemos definir otras normas. De hecho, para cada p, $1\leq p<+\infty$

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$$

es una norma en X.

Ejemplo 4. $X = C^m([a,b],\mathbb{R})$, $m\in\mathbb{N}$ fijo

Aquí podemos definir "muchas normas":

$$\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| \ ; \quad \|x\|_{1,\infty} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|,$$

$$\ldots \quad \|x\|_{m,\infty} = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \ldots + \max_{t\in[a,b]} |x^{(m)}(t)|,$$

También si $1 \leq p < +\infty$,

$$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, \text{ etc.}$$

El hecho de elegir una norma u otra depende de la situación que estemos tratando, como veremos a lo largo del curso.

Ejemplo 5. "Espacios de sucesiones"

Recordemos que si $1 \leq p < +\infty$,

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}$$

Una norma "natural" para ℓ_p es

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

También,

$$\ell_\infty = \{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada} \}$$

y una norma "natural" es

$$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

Las demostraciones para ver que tanto $\|\cdot\|_p$,

$1 \le p < +\infty$, como $\|\cdot\|_\infty$, son una norma en los respectivos espacios de sucesiones, son similares al caso $\mathbb{R}^n$ (Ejemplos 1 y 2 anteriores), teniendo la precaución de mostrar primero la "versión de sumas finitas" y luego hacer un paso al límite (no hay problema, pues las series consideradas son convergentes). ¡Inténtalo!

Ejemplo 6. "Espacios de Lebesgue de funciones integrables"

Si $1 \le p < +\infty$

$$L^p(a,b) = \{x : [a,b] \to \mathbb{R} : x \text{ es medible}, \int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty\}$$

$$L^\infty(a,b) = \{x : [a,b] \to \mathbb{R} : x \text{ medible}, \exists M > 0 : |x(t)| \le M, \text{a.e. } [a,b]\}$$

con $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p dt\right)^{1/p}$, $1 \le p < +\infty$, $\forall x \in L^p(a,b)$

$$\|x\|_\infty = \inf\{M : |x(t)| \le M, \text{ a.e. en } [a,b]\}, \forall x \in L^\infty(a,b)$$

(este último también llamado supremo esencial de x y notado como $\operatorname{supess}|x(t)|$ ó $\operatorname{ess\,sup}|x(t)|$

La demostración de que las definiciones anteriores constituyen auténticas normas, no es trivial, si $1 \le p < +\infty$ y se puede consultar para ello la bibliografía recomendada. Básicamente, para el caso $1 < p < +\infty$

de parte de la desigualdad de Young para obtener la "correspondiente" desigualdad de Hölder, y de aquí, la desigualdad de Minkowski (triangular)

Para terminar, una foto de S. Banach (1.892-1.945)

Banach fué el fundador del Análisis Funcional

y otra de H. Minkowski (1.864-1.909)

"El espacio y el tiempo, por sí mismos, se han desvanecido y solo existe una especie de mezcla de los dos"

COMPLEMENTOS

1. Espacios métricos. Sea X un conjunto. Una métrica en X es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ que satisface:

a) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$, $\forall x, y \in X$

b) $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in X$

c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in X$
(Desigualdad triangular)

2. Sea $\bar{X}$ un espacio vectorial sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$). Demostrar que en $\bar{X}$ se puede definir una norma.

3. Sea $\bar{X}$ un espacio normado y (x_n) una sucesión en $\bar{X}$ convergente. Pruebe que las sucesiones

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + \dots + n x_n}{n^2}$$

son convergentes y encuentre su límite.

(4) Des. Young, Hölder y Minkowski para funciones.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, con medida positiva (p. ejemplo, cualquier abierto no vacío y acotado). Recordemos que si $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ medible}, \int_\Omega |f(x)|^p dx < +\infty \}$$

Hölder: $p, q > 1 \,/\, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\int_\Omega |f(x) g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Minkowski: es la desigualdad triangular para $\|\cdot\|_p$ en $L^p(\Omega)$.