TEMA 5: Estimación de máxima verosimilitud y otros métodos

5.1. Estimación de máxima verosimilitud.

5.2. Otros métodos de estimación puntual: método de los momentos y de mínimos cuadrados.

5.1. ESTIMACIÓN DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

$(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$

$f_\theta \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de X bajo P_θ

$f_\theta^n \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de $(X_1, \ldots, X_n)$ bajo P_θ

Función de verosimilitud: *Para cada realización muestral, $(x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$, se define la función de verosimilitud asociada a dicha realización como:*

$$\begin{aligned} L_{x_1,\ldots,x_n} : \Theta &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \theta &\longmapsto L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta) = f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Estimador de máxima verosimilitud: *$\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ es estimador de máxima verosimilitud de θ si la estimación correspondiente a cada realización muestral, $\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)$, maximiza la función de verosimilitud asociada a dicha realización:*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n, \quad L_{x_1,\ldots,x_n}\left(\widehat{\theta}(x_1, \ldots, x_n)\right) = \max_{\theta \in \Theta} L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta).$$

- **Relación con los estadísticos suficientes**: *Si $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ admite un estadístico suficiente, $T(X_1, \ldots, X_n)$, y $\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ es un estimador máximo verosímil de θ, $\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ es función de $T(X_1, \ldots, X_n)$.*
- **Relación con los estimadores eficientes**: *Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es estimador eficiente de θ, $T(X_1, \ldots, X_n)$ es el único estimador máximo verosímil de θ.*

Estimador de máxima verosimilitud de una función paramétrica $g : \Theta \to \Lambda$:

- *Para cada realización muestral, $(x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$, se define la función de verosimilitud de $\lambda = g(\theta)$ asociada a dicha realización como:*

$$\begin{aligned} M_{x_1,\ldots,x_n} : \Lambda &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ \lambda &\longmapsto M_{x_1,\ldots,x_n}(\lambda) = \sup_{\theta \in g^{-1}(\lambda)} L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta). \end{aligned}$$

- *$\widehat{\lambda}(X_1, \ldots, X_n)$ es estimador máximo verosímil de λ si, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$, la estimación $\widehat{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)$ maximiza la función de verosimilitud asociada a dicha realización:*

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n, \quad M_{x_1,\ldots,x_n}\left(\widehat{\lambda}(x_1, \ldots, x_n)\right) = \max_{\lambda \in \Lambda} M_{x_1,\ldots,x_n}(\lambda).$$

Teorema de invarianza de Zehna: *Si $\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ es estimador máximo verosímil de θ, y g es una función medible, $g\Big(\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)\Big)$ es estimador máximo verosímil de $g(\theta)$.*

5.2. OTROS MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

MÉTODO DE LOS MOMENTOS (K. Pearson, 1894)

- $(X_1, \ldots, X_n)$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$.
- Momentos poblacionales: $m_{\theta,j} = E_\theta\left[X^j\right], \quad j \in \mathbb{N}$.
- Momentos muestrales: $A_j = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^j}{n}, \quad j \in \mathbb{N}$.

El método consiste en estimar la función $h(m_{\theta,1}, \ldots, m_{\theta,k})$ (h medible) por $h(A_1, \ldots, A_k)$.

MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS (Gauss, 1809)

Sean $X_1, \ldots, X_n$ observaciones aleatorias de cierta magnitud, $\varphi(t, \theta)$, bajo distintas condiciones experimentales, $t_1, \ldots, t_n$:

$$\begin{gathered} X_1 = \varphi(t_1, \theta) + \varepsilon_1 \\ \vdots \\ X_n = \varphi(t_n, \theta) + \varepsilon_n, \end{gathered}$$

donde $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ son variables aleatorias *no observables*, que especifican los errores cometidos en cada observación.

El estimador de mínimos cuadrados de θ basado en $X_1, \ldots, X_n$ es aquel que minimiza la suma de los cuadrados de los errores:

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \varphi(t_i, \theta)\right)^2.$$