

# ALGEBRA III (DOBLE GRADO INFORMÁTICA-MATEMÁTICAS)

## RELACIÓN 1 (EXTENSIONES FINITAS Y ALGEBRAICAS).

**Ejercicio 1.** Razonar cuales de los siguientes números complejos son algebraicos o trascendentes sobre  $\mathbb{Q}$  (es asumida la trascendencia de  $\pi$  y de  $e$ ):

$$\sqrt[5]{4}, (1+\sqrt[5]{4})(1-\sqrt[5]{16})^{-1}, \pi^2, e^2-i, i\sqrt{i}+\sqrt{2}, \sqrt{1-\sqrt[3]{2}}, \sqrt{e}, \sqrt{\pi}-i, \sqrt{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{2})^{-1}.$$

**Ejercicio 2.** Sea  $z \in \mathbb{C}$  un número complejo y  $n \geq 1$  un natural. Argumentar que  $z$  es algebraico sobre  $\mathbb{Q}$  si y solo si  $\sqrt[n]{z}$  es algebraico sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 3.**  $E/K$  es una extensión de cuerpos,  $\alpha \in E$  y  $\beta = 1 + \alpha^2 + \alpha^5$ . Argumentar que  $\alpha$  es algebraico sobre  $K$  si y solo si  $\beta$  es algebraico sobre  $K$ .

**Ejercicio 4.** Calcular  $\text{Irr}(\alpha, \mathbb{Q})$  en los siguientes casos:

$$\alpha = 3 + \sqrt{2}, \quad \alpha = \sqrt{3} - \sqrt[4]{3}, \quad \alpha = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$$

**Ejercicio 5.** Calcular  $[E : \mathbb{Q}]$  en los siguientes casos:

$$(1) E = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, i), \quad (2) E = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \sqrt{-2}), \quad (3) E = \mathbb{Q}(\sqrt{18}, \sqrt[4]{2}),$$

En cada uno de los casos dar una base de  $E/\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 6.** Calcular  $[F : \mathbb{Q}]$  en los siguientes casos:

$$(1) F = \mathbb{Q}(\sqrt{8}, 3 + \sqrt{50}), \quad (2) F = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{-5}, \sqrt{7}).$$

En cada uno de los casos dar una base de  $F/\mathbb{Q}$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $\alpha$  una raíz del polinomio  $x^3+3x+1$  en el cuerpo  $\mathbb{C}$  de los complejos.

- (i) Determinar el grado  $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$  y describir una base de la extensión  $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ .
- (ii) Expresar en términos de esa base los números  $(1 + \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)$  y  $(1 + \alpha)(1 + \alpha + \alpha^2)^{-1}$ .

**Ejercicio 8.** Describir una base de la extensión  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$  y expresar como combinación lineal de estos los números

$$(1) (\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{2})^{-1}, \quad (2) (1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{2} - 1)^{-1}.$$

**Ejercicio 9.** Argumentar que cualquier elemento de  $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5})$  puede expresarse de forma única como

$$a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5} + d\sqrt{15}$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Expresar de tal forma el inverso de  $1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ .