Ejercicio 8. *Dados dos puntos del plano, P_0 y P_1, explica una construcción con regla y compás del decágono regular con P_0 como circuncentro y con P_1 como uno de sus vértices* (Nota: $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$)).

ALGEBRA III (Doble grado Informática-Matemáticas)
Prueba parcial (19/12/2019)

EJERCICIOS

(1) (a) **(1.5 puntos)** Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 + 12x - 4 = 0$.
(b) **(0.5 puntos)** Argumentar que $G(x^3 - 3x^2 + 12x - 4/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

(2) **(1.5 puntos)** Sean P_0 y P_1 dos puntos del plano. Describe la construcción con regla y compás del decágono regular inscrito en la circunferencia de centro P_0 y radio la distancia entre P_0 y P_1, uno de cuyos vértices es P_1 (*Indicación: conocemos que* $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$).

(3) Argumentar las respuestas a las siguientes cuestiones.
(a) **(0.5 puntos)** ¿Es el polinomio $x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$ irreducible ? ¿En qué cuerpos finitos extensiones de $\mathbb{F}_3$ ese polinomio tiene una raíz?
(b) **(0.5 puntos)** ¿Es posible describir los elementos de $\mathbb{F}_9$ en la clave (α, x^2+1)? ¿Como sería tal descripción? ¿Qué tales elementos de $\mathbb{F}_9$ serían $(2+\alpha)^{-1}$ y $(1+\alpha)^4$?
(c) **(0.5 puntos)** Resuelve en $\mathbb{F}_9$, usando la anterior descripción de sus elementos, las ecuaciones $x^2 + 1 = 0$, $x^2 + x - 1 = 0$, $x^2 - x - 1 = 0$, y $x^3 - x - 1 = 0$.

Tiempo: 2'30 horas.

Solución: Si $f = x^3 - 3x^2 + 1$, entonces $\tilde{f} = f(x+1) = x^3 - 3x - 1$. Poniendo las raíces de la reducida la forma $x = y + z$ tal que $yz = 1$, resulta que y^3 y z^3 son las soluciones de la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$. Supongamos

$$y^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad z^3 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

Esto nos da tres posibles ys y zs:

$$\begin{cases} y_1 = e^{i\frac{\pi}{9}}, \\ y_2 = e^{i\frac{7\pi}{9}}, \\ y_3 = e^{i\frac{13\pi}{9}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = e^{i\frac{5\pi}{9}}, \\ z_2 = e^{i\frac{11\pi}{9}}, \\ z_3 = e^{i\frac{17\pi}{9}}. \end{cases}$$

Estas han de emparejarse de manera que $yz = 1$. Lo que nos da las raíces de la cúbica reducida

$$\begin{cases} \beta_1 = y_1 + z_3 = 2\cos\frac{\pi}{9}, \\ \beta_2 = y_2 + z_2 = 2\cos\frac{7\pi}{9}, \\ \beta_3 = y_3 + z_1 = 2\cos\frac{5\pi}{9}. \end{cases}$$

Y las soluciones de la ecuación original son

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 + 2\cos\frac{\pi}{9}, \\ \alpha_2 = 1 + 2\cos\frac{7\pi}{9}, \\ \alpha_3 = 1 + 2\cos\frac{5\pi}{9}. \end{cases}$$

(1) (a) **(1.5 puntos)** Resolver la ecuación $x^3 - 3x^2 + 12x - 4 = 0$.
(b) **(0.5 puntos)** Argumentar que $G(x^3 - 3x^2 + 12x - 4/\mathbb{Q}) \cong S_3$.

(1) $\tilde{f}(x) = f(x+1) = x^3 + 9x + 6$. Si $x = y+z$, $yz = -3$, y^3 y z^3 son las soluciones de

$x^2 + 6x - 27 = 0 \iff x = -9, 3$. Sup $y^3 = -9$, $z^3 = 3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_1 = \sqrt[3]{-9} = \sqrt[3]{9}\, e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{9}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{9}\sqrt{3}}{2} \\ y_2 = \sqrt[3]{-9}\, w = \sqrt[3]{9}\, e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{9}\, e^{i\pi} = -\sqrt[3]{9} \\ y_3 = \sqrt[3]{-9}\, w^2 = \sqrt[3]{9}\, e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{9}\, e^{i\frac{5\pi}{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{9}\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt[3]{3} \\ z_2 = \sqrt[3]{3}\, w = \sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2} \\ z_3 = \sqrt[3]{3}\, w^2 = \sqrt[3]{3}\, e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{3}\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$-3 = y_2 z_1 = y_1 z_2 = y_3 z_3 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = y_2 + z_1 + 1 = -\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{3} + 1 \in \mathbb{R} \\ \alpha_2 = y_1 + z_2 + 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ \alpha_3 = y_3 + z_3 + 1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$$ sols. de la ec. de partida

Proposición 10. *Sea $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio irreducible de grado un número primo p y que tiene exactamente dos raíces complejas no reales. Entonces $G(f/\mathbb{Q}) \cong S_p$.*

$x^3 - 3x^2 + 12x - 4$ no tiene raíces en $\mathbb{Q}$ y es de grado 3 $\Rightarrow$ $x^3 - 3x^2 + 12x - 4$ irreducible en $\mathbb{Q}$