Tarea 3:

DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

Sea $(X_1,\dots,X_n)$ m.a.s de una v.a X con función de densidad

$$f_\theta(x)=\frac{x^2}{9\theta^3}, \quad 0<x<3\theta$$

a) ~~TRV~~

$$\left.\begin{array}{l} H_0: \theta_0 \Rightarrow \Theta_0=\{\theta_0\} \quad \text{hipótesis simple} \\ H_1: \theta<\theta_0 \Rightarrow \Theta_1=(0,\theta_0) \quad \text{hipótesis compuesta}\end{array}\right\} \Rightarrow \Theta=\Theta_0\cup\Theta_1=(0,\theta_0] \text{ es el espacio paramétrico}$$

Sea $\mathcal{X}_\theta=(0,3\theta) \Rightarrow \bigcup_{\theta\in\Theta}\mathcal{X}_\theta=\mathcal{X}=(0,3\theta_0) \Rightarrow \mathcal{X}^n=(0,3\theta_0)^n$ es el espacio muestral

Ahora queremos aplicar el test de razón de verosimilitud, que será:

$$\varphi(x_1,\dots,x_n)=\begin{cases}1 & \text{si } \lambda(x_1,\dots,x_n)<C \\ 0 & \text{si } \lambda(x_1,\dots,x_n)\geq C\end{cases}, \text{donde } \lambda(x_1,\dots x_n)=\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L_{x_1,\dots x_n}(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)}$$

y $L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)=f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)$ es la función de verosimilitud asociada a la muestra

$$f_\theta^n(x_1,\dots,x_n)=f_\theta(x_1)\cdots f_\theta(x_n)=\frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2}{9^n\theta^{3n}} \quad \theta\in\Theta \quad \text{si } \max x_i\in(0,3\theta)$$

$$\Rightarrow L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2}{9^n\theta^{3n}} & \text{si } \max x_i<3\theta\leq 3\theta_0 \\ 0 & \text{si } \max x_i\geq 3\theta\end{cases}$$

Claramente $L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)$ es decreciente, pues es un cociente cuyo denominador crece, por tanto el supremo será el extremo inferior del intervalo

$$\sup_{\theta\in\Theta} L_{x_1,\dots,x_n}(\theta) = \frac{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2}{9^n\left(\frac{\text{máx } x_i}{3}\right)^{3n}}, \text{ donde } x_1,\dots,x_n \in (0,3\theta_0)^n$$

$$\lambda(x_1,\dots,x_n) = \frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)} = \frac{L_{x_1,\dots,x_n}(\theta_0)}{\sup_{\theta\in\Theta} L_{x_1,\dots,x_n}(\theta)} = \frac{\frac{\cancel{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2}}{\cancel{9^n}\,\theta_0^{3n}}}{\frac{\cancel{\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^2}}{\cancel{9^n}\left(\frac{\max x_i}{3}\right)^{3n}}} = \left(\frac{\max x_i}{\theta_0\cdot 3}\right)^{3n}$$

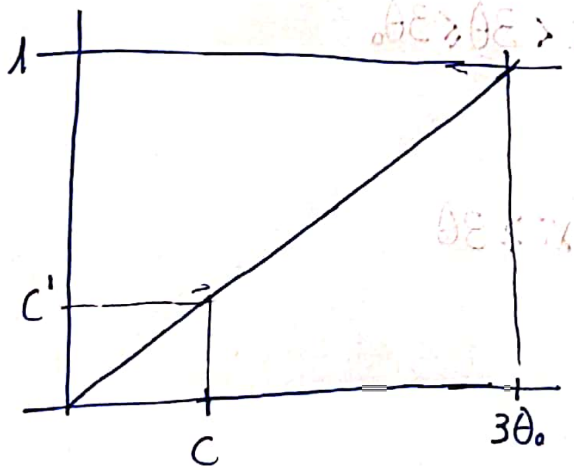
donde ~~máx $x_i \in (0,3\theta$~~ $x_1,\dots,x_n \in (0,3\theta_0)^n$

Veamos ahora que

$$\lambda(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{\max x_i}{\theta_0\cdot 3}\right)^{3n} < C \Rightarrow \max x_i < C^{1/3n}\cdot 3\cdot\theta_0,$$ luego usando esto se tiene que

$$\varphi(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda(x_1,\dots,x_n) < C \\ 0 & \text{si } \lambda(x_1,\dots,x_n) \geq C \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } \max x_i < C^{1/3n}\cdot 3\cdot\theta_0 = C' \\ 0 & \text{si } \max x_i \geq C^{1/3n}\cdot 3\cdot\theta_0 = C' \end{cases}$$

Si representamos a $\lambda(x_1,\dots,x_n)$ en función del máx x_i obtenemos



Escaneado con CamScanner

DANIEL MONJAS MIGUÉLEZ
70274432-W

Ahora para ver el tamaño calculamos:

$$\alpha = \sup_{\theta=\theta_0} E_\theta[\varphi(X_1,\dots,X_n)] = E_{\theta_0}[\varphi(X_1,\dots,X_n)] =$$

$$= P_{\theta_0}[\max X_i < c'] = P_{\theta_0}[X_1 < c'] \dots P_{\theta_0}[X_n < c'] =$$

$$= \left(P_{\theta_0}[X < c']\right)^n = \left(\int_0^{c'} \frac{x^2}{9\theta_0^3}\,dx\right)^n = \left(\frac{1}{9\theta_0^3}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{c'}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{(c')^3}{27\cdot\theta_0^3}\right)^n = \frac{(c')^{3n}}{27^n\cdot\theta_0^{3n}} = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (c')^{3n} = \alpha\, 27^n\cdot\theta_0^{3n} \Rightarrow c' = \alpha^{1/3n}\, 27^{1/3}\, \theta_0 = 3\theta_0\alpha^{\frac{1}{3n}}$$

Recordando que $0 < C \leq 1$ se tiene que

$$0 < \underbrace{C^{1/3n}\cdot 3\cdot\theta_0}_{c'} \leq 3\theta_0$$

, luego ~~se~~ con 6 anterior, veamos qué valores puede tomar α

$$c' \leq 3\theta_0 \Rightarrow \cancel{3\theta_0}\,\alpha^{\frac{1}{3n}} \leq \cancel{3\theta_0} \Rightarrow \alpha \leq 1$$

son los valores que puede tomar α, es decir, el tamaño del test.

b) El intervalo de confianza obtenido en a) son los $\{\theta\in\Theta : (x_1,\dots,x_n)\in A(\theta)\}$, donde $A(\theta)$ es la región de aceptación. Esto es equivalente a

$(x_1,\dots,x_n)$ tal que ~~$\max X_i \geq C^{1/3n}\cdot 3\theta_0 \Rightarrow \theta_0 \leq \frac{\max X_i}{...}$~~

$$\max X_i \geq 3\theta_0\alpha^{\frac{1}{3n}} \Rightarrow \theta_0 \leq \frac{\max X_i}{3\alpha^{\frac{1}{3n}}}, \text{ es decir } \theta_0 \in \left(0, \frac{\max X_i}{3\sqrt[3n]{\alpha}}\right]$$

, donde $\left(0, \frac{\max X_i}{3\sqrt[3n]{\alpha}}\right]$ es el intervalo de confianza, y α el tamaño del test.

Nivel de confianza

$$P_{\theta_0}\left[0 < \theta_0 \leq \frac{\max X_i}{3\sqrt[3n]{\alpha}}\right] = P\left[\frac{\max X_i}{3\sqrt[3n]{\alpha}} \geq \theta_0\right] - \cancel{P[\theta_0 < 0]} =$$

$$= 1 - P\left[\frac{\max X_i}{3\sqrt[3n]{\alpha}} \leq \theta_0\right] = 1 - P\left[\max X_i \leq \theta_0 3\sqrt[3n]{\alpha}\right] =$$

$$= 1 - \left(\int_0^{\theta_0 3\sqrt[3n]{\alpha}} \frac{x^2}{9\theta_0^{3n}}\,dx\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{9\theta_0^{3n}} \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{\theta_0 3\sqrt[3n]{\alpha}}\right)^n =$$

$$= 1 - \left(\frac{\cancel{\theta_0^3} \cdot \cancel{27} \cdot \sqrt[n]{\alpha}}{\cancel{27}\,\cancel{\theta_0^{3n}}}\right)^n = 1 - \cancel{\frac{\alpha\,\theta_0^{3n}}{\theta_0^{3n}}}\,\alpha$$

$\Rightarrow$ el nivel de confianza el $\underline{\underline{1-\alpha}}$.