

Problemas del Tema 2

1.- Considera el hiperboloide de una hoja $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$.

(a) Comprueba que es una superficie regular.

(b) Prueba que $H = \left\{ G_{L\theta} \begin{pmatrix} \cosh t \\ 0 \\ \sinh t \end{pmatrix} : L \equiv Oz, \theta, t \in \mathbb{R}, G_{L\theta} \text{ giro alrededor de } L \text{ con ángulo } \theta \right\}$,

es decir, que H se obtiene aplicando todos los giros de eje L a la rama de la hipérbola $x^2 - z^2 = 1, y = 0, x > 0$ (por eso se llama hiperboloide).

(c) Prueba que $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, \sinh u)$, $(u, v) \in \mathbb{R} \times]0, 2\pi[$, es una parametrización local. Describe $\bar{\mathbf{x}}(\mathbb{R} \times]0, 2\pi[)$

2.- Sea el hiperboloide de dos hojas $\tilde{H} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = -1\}$.

(a) Comprueba que es una superficie regular con dos componentes conexas.

(b) Prueba que la componente conexa de \tilde{H} que contiene a $(0, 0, 1)$, \tilde{H}_+ , cumple

$\tilde{H}_+ = \left\{ G_{L\theta} \begin{pmatrix} \sinh t \\ 0 \\ \cosh t \end{pmatrix} : L \equiv Oz, \theta, t \in \mathbb{R}, G_{L\theta} \text{ giro alrededor de } L \text{ con ángulo } \theta \right\}$, es decir,

que \tilde{H} se obtiene aplicando todos los giros de eje L a rama de la hipérbola $x^2 - z^2 = -1, y = 0, z > 0$ (por eso se llama hiperboloide) ¿Qué podemos decir de la componente conexa de \tilde{H} que contiene a $(0, 0, -1)$?

(c) Prueba que $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[$, es una parametrización local. Describe $\bar{\mathbf{x}}(\mathbb{R}_+ \times]0, 2\pi[)$

3.- Considera

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1\}, \quad (\text{elipsoide}),$$

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}, \quad (\text{cilindro sobre } x^2 + y^2 = 1 \text{ en el plano } z = 0).$$

$$\tilde{C} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^3\}, \quad (\text{cilindro sobre } y = x^3 \text{ en el plano } z = 0).$$

Comprueba que E , C y \tilde{C} son superficies regulares del espacio euclídeo.

4.- Considera

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}, \quad (\text{toro}),$$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - 1)^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0\}, \quad (\text{cono superior menos el vértice}).$$

Comprueba que T y V son superficies regulares del espacio euclídeo.

- 5.-** Prueba que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 = x^2 - y^2\}$ no es una superficie regular.
- 6.-** Sea S una superficie regular y $\bar{\mathbf{x}} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$ una parametrización local suya. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, prueba que $f \circ \bar{\mathbf{x}}^{-1} : \bar{\mathbf{x}}(U) \longrightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. ¿Es toda función diferenciable de $\bar{\mathbf{x}}(U)$ en \mathbb{R} de este tipo?
- 7.-** Si S es una superficie regular, demuestra que para cada $p \in S$ existe un entorno abierto V de p en \mathbb{R}^3 y una función diferenciable $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ de manera que $V \cap S = F^{-1}(a)$, siendo a un valor regular de F .
- 8.-** Considera $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - \cosh^2 z = 0\}$, (catenoide). Se pide:
- Comprueba que es una superficie regular.
 - Prueba que $C = \left\{ G_{L\theta} \begin{pmatrix} \cosh z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} : L \equiv Oz, \theta, z \in \mathbb{R}, G_{L\theta} \text{ giro alrededor de } L \text{ con ángulo } \theta \right\}$, es decir, que C se obtiene aplicando todos los giros de eje L a la catenaria $x = \cosh z, y = 0$ (por eso se llama catenoide).
 - Encuentra un difeomorfismo no trivial de C en si mismo.
 - Demuestra que C es difeomorfa al hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$
 - Halla la ecuación implícita, respecto a la base usual de \mathbb{R}^3 , de cualquier plano tangente $T_p C$, $p = (x, y, z) \in C$. Para $p_0 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \in C$ encuentra una parametrización local $\bar{\mathbf{x}} : U \rightarrow C$ de manera que $p_0 = \bar{\mathbf{x}}(u_0, v_0) \in \bar{\mathbf{x}}(U)$. Calcula las coordenadas en la base $B_{(u_0, v_0)}^{\bar{\mathbf{x}}} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$ de $w = (1, -1, 1) \in T_{p_0} C$.
- 9.-** Considera $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \sin z = y \cos z\}$ (helicoides). Se pide:
- Comprueba que es una superficie regular.
 - Prueba que $\bar{\mathbf{x}}(u, v) = (v \cos u, v \sin u, u)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, es una parametrización global de S .
 - Considera la hélice $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, u)$ y comprueba que el helicoides S consiste en todos los puntos de las rectas de \mathbb{R}^3 determinadas por los puntos $\alpha(u)$ y $(0, 0, u)$.
 - Para cada $\theta \in \mathbb{R}$, consideramos $F_\theta : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $F_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = G_{L\theta} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta \end{pmatrix}$. Comprueba que F_θ induce un difeomorfismo de S en si misma.
 - Halla la ecuación implícita, respecto a la base usual de \mathbb{R}^3 , de cualquier plano tangente $T_p S$, $p = (x, y, z) \in S$. Para $p_0 = (1, 1, \frac{\pi}{4}) \in S$, con respecto a la parametrización global $\bar{\mathbf{x}}$ anterior. Calcula las coordenadas en la base $B_{(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})}^{\bar{\mathbf{x}}}$ de $w = (2, 0, -1) \in T_{p_0} S$.
- 10.-** Considera una superficie regular S . Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma lineal. Prueba que la restricción f de φ^2 a S es diferenciable. ¿Quién es f cuando $\varphi(x) = \langle x, v \rangle$ para un $v \in \mathbb{R}^3$, $|v| = 1$, fijo?

11.- Prueba que la superficie $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$, (paraboloide elíptico), es difeomorfa con la superficie $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2\}$ (paraboloide hiperbólico).

12.- Dado $v = (2, 3, 0) \in T_{(0,0,1)}\mathbb{S}^2$, calcula las coordenadas de v en la base de $T_{(0,0,1)}\mathbb{S}^2$ canónicamente obtenida a partir de la parametrización local $\bar{x} : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, donde D es el disco abierto de centro el origen y radio 1 de \mathbb{R}^2 , dada por $\bar{x}(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})$ (nótese que identificando, como es usual, el plano $z = 0$ con \mathbb{R}^2 , \bar{x} es la inversa de la restricción a $\mathbb{S}_{3+}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z > 0\}$ de la proyección de \mathbb{R}^3 sobre el plano $z = 0$).

13.- Construye un difeomorfismo entre la superficie $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0, z > 0\}$ y el abierto $C_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z > 0\}$ del cilindro.

14.- Si \mathbb{S}^2 es la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 1, comprueba que la aplicación $F : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ dada por $F(x, y, z) = (x, y, -z)$ es un difeomorfismo de \mathbb{S}^2 . Interpretalo geoméricamente. Calcula $(dF)_{(0,0,1)}$ y $(dF)_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)}$.

15.- Considera el cilindro $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$. Prueba que la aplicación $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow C$ definida por $F(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$ es diferenciable, sobreyectiva y cumple que su diferencial es biyectiva en todo punto, pero F no es inyectiva.

16.- Sean S y \tilde{S} superficies regulares, S compacta y \tilde{S} conexa. Supongamos que $F : S \rightarrow \tilde{S}$ es una aplicación diferenciable inyectiva con $(dF)_p$ biyectiva para todo $p \in S$. Prueba que F es un difeomorfismo.

17.- Sea $\mathbb{S}_1^2(0, 0, 1)$ la esfera de centro $(0, 0, 1)$ y radio 1. Considera la función altura $h_v : \mathbb{S}_1^2(0, 0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $h_v(x) = \langle x, v \rangle$, donde $v = (0, 0, 1)$. Calcula $(dh_v)_x$ en todo $x \in \mathbb{S}_1^2(0, 0, 1)$. Prueba que $(dh_v)_x = 0$ si y sólo si o bien $x = (0, 0, 2)$, o bien $x = (0, 0, 0)$. Interpretalo geoméricamente.

18.- Sea \mathbb{S}^2 la esfera de centro el origen y radio 1. Para $x_0 \notin \mathbb{S}^2$ considera la función “cuadrado de la distancia a x_0 ” $f_{x_0}(x) = |x - x_0|^2$. Calcula $(df_{x_0})_x$ en todo $x \in \mathbb{S}^2$. Prueba que $(df_{x_0})_x = 0$ si y sólo si $x - x_0$ es ortogonal a $T_x(\mathbb{S}^2)$. Interpretalo geoméricamente.

19.- Sean S y \tilde{S} superficies regulares, S conexa, y sea $F : S \rightarrow \tilde{S}$ una aplicación diferenciable. Supongamos que $dF_p = 0$ para todo $p \in S$. Prueba entonces que F es constante.