

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

**Ejercicio 1** (1 punto). Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. (0,5 puntos) Consideramos  $\Omega := (0, 1) \times (0, 1) \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $X := \mathcal{C}_c^2(\Omega)$  y la aplicación  $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$a(u, v) := \int_0^1 \int_0^1 \partial_x u(x, y) \partial_x v(x, y) \, dx \, dy$$

- a) La aplicación  $a$  es un producto escalar en  $X$ .  
b) El espacio  $X$  con la aplicación  $a$  es un espacio de Hilbert.
2. (0,25 puntos) Consideramos  $\Phi(t, x)$  con  $t > 0, x \in \mathbb{R}$ , solución fundamental de la ecuación del calor, y  $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  con  $\int_{-\infty}^\infty g(x) \, dx = 0$ . Entonces

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \Phi(t, x - y) g(y) \, dy \, dx = 0 \quad \text{para todo } t > 0.$$

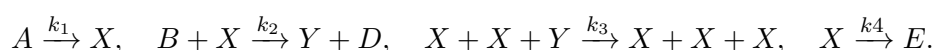
3. (0,25 puntos) Consideramos  $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ , no negativa y con  $g(0) > 0$ . La solución  $u$  de la ecuación del calor vista en clase, con condición inicial  $u(0, x) = g(x)$  para  $x \in \mathbb{R}$ , cumple que  $u(t, x) > 0$  para todo  $t > 0, x \in \mathbb{R}$ .

**Ejercicio 2** (1 punto). Consideramos un dominio abierto y acotado  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  con  $|\Omega| = 1$  (medida de Lebesgue igual a 1), y el funcional

$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega |\nabla u(z)|^2 \, dz + \lambda \int_\Omega \int_\Omega (u(z) + 1)(u(w) + 2) J(z - w) \, dz \, dw,$$

donde  $J \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^2)$  es una función continua, no negativa, de soporte compacto, y tal que  $J(z) = J(-z)$  para todo  $z \in \mathbb{R}^2$ , y  $\lambda \in \mathbb{R}$  es un parámetro. Encuentra un valor  $\lambda_0 > 0$  (en función de  $J$ ) tal que podamos asegurar que para  $|\lambda| < \lambda_0$  el funcional  $\mathcal{F}$  alcanza un único mínimo en el espacio  $H_0^1(\Omega)$ .

**Ejercicio 3** (1 punto). El siguiente modelo compuesto por 4 leyes de acción de masas es teórico y fue propuesto por investigadores (Prigogine Y Lefever '68) de Bruselas que le dieron el nombre de **Brusselator** (*Brussels oscillator*) ya que posee soluciones oscilantes en torno a un único estado estacionario.



- (a) Considera que las concentraciones de  $A, B, D$  y  $E$  (que puedes denotar respectivamente como  $a, b, d$  y  $e$ ) son constantes y no nulas y, llamando  $x(t)$  e  $y(t)$  a las concentraciones respectivas de  $X$  e  $Y$ , en el instante de tiempo  $t$ , determina las ecuaciones que verifican (únicamente  $x(t)$  e  $y(t)$ ).

- (b) Determina las unidades de  $k_4$  y de  $\Omega = \sqrt{k_4/k_3}$  y realiza la siguiente adimensionalización de la ecuación:  $\tau := k_4 t$  para el tiempo y  $u(\tau) := \frac{x(t)}{\Omega}$  y  $v(\tau) := \frac{y(t)}{\Omega}$  para las incógnitas, comprobando que el sistema resultante es:

$$\frac{du}{d\tau} = \gamma + u^2 v - (\beta + 1)u, \quad \frac{dv}{d\tau} = \beta u - u^2 v$$

Describe los parámetros  $\gamma$  y  $\beta$  en función de  $k_1, k_2, k_3, k_4, a$  y  $b$  y verifica que ambos son adimensionales.

- (c) Calcula el estado estacionario (es decir, la solución constante en tiempo) en función de  $\gamma$  y  $\beta$ .
- (d) ¿Es cierto que todas las soluciones convergen al estado estacionario cuando  $t \rightarrow +\infty$ ? Justifica la respuesta. (*Ayuda: puedes estudiar el Jacobiano del sistema*)