	Modelos Matemáticos II Grado en Matemáticas	Prueba de clase 27 de mayo de 2020
Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada		

Apellidos:

Firma:

Nombre:

D.N.I. o pasaporte:

Ejercicio 1 (1 punto)**.** Razona si las siguientes afirmaciones son ciertas o no:

1. (0,5 puntos) Consideramos $\Omega := (0,1)\times(0,1) \subseteq \mathbb{R}^d$, $X := \mathcal{C}^2_{\mathrm{c}}(\Omega)$ y la aplicación $a : X \times X \to \mathbb{R}$ dada por
$$a(u,v) := \int_0^1 \int_0^1 \partial_x u(x,y)\partial_x v(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
   a) La aplicación a es un producto escalar en X.
   b) El espacio X con la aplicación a es un espacio de Hilbert.
2. (0,25 puntos) Consideramos $\Phi(t,x)$ con $t>0, x\in\mathbb{R}$, solución fundamental de la ecuación del calor, y $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$ con $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Entonces
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t,x-y)g(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{para todo } t>0.$$
3. (0,25 puntos) Consideramos $g \in \mathcal{C}^\infty_{\mathrm{c}}(\mathbb{R})$, no negativa y con $g(0)>0$. La solución u de la ecuación del calor vista en clase, con condición inicial $u(0,x)=g(x)$ para $x\in\mathbb{R}$, cumple que $u(t,x)>0$ para todo $t>0$, $x\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 2 (1 punto)**.** Consideramos un dominio abierto y acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ con $|\Omega|=1$ (medida de Lebesgue igual a 1), y el funcional
$$\mathcal{F}(u) := \int_\Omega |\nabla u(z)|^2\,\mathrm{d}z + \lambda \int_\Omega\int_\Omega (u(z)+1)(u(w)+2)J(z-w)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}w,$$
donde $J \in \mathcal{C}_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^2)$ es una función continua, no negativa, de soporte compacto, y tal que $J(z)=J(-z)$ para todo $z\in\mathbb{R}^2$, y $\lambda\in\mathbb{R}$ es un parámetro. Encuentra un valor $\lambda_0>0$ (en función de J) tal que podamos asegurar que para $|\lambda|<\lambda_0$ el funcional $\mathcal{F}$ alcanza un único mínimo en el espacio $H^1_0(\Omega)$.

Ejercicio 3 (1 punto)**.** El siguiente modelo compuesto por 4 leyes de acción de masas es teórico y fue propuesto por investigadores (Prigogine Y Lefever '68) de Bruselas que le dieron el nombre de **Brusselator** (*Brussels oscillator*) ya que posee soluciones oscilantes en torno a un único estado estacionario.
$$A \xrightarrow{k_1} X, \quad B+X \xrightarrow{k_2} Y+D, \quad X+X+Y \xrightarrow{k_3} X+X+X, \quad X \xrightarrow{k4} E.$$

(a) Considera que las concentraciones de A,B,D y E (que puedes denotar respectivamente como a,b,d y e) son constantes y no nulas y, llamando $x(t)$ e $y(t)$ a las concentraciones respectivas de X e Y, en el instante de tiempo t, determina las ecuaciones que verifican (únicamente $x(t)$ e $y(t)$).

(b) Determina las unidades de k_4 y de $\Omega = \sqrt{k_4/k_3}$ y realiza la siguiente adimensionalización de la ecuación: $\tau := k_4 t$ para el tiempo y $u(\tau) := \frac{x(t)}{\Omega}$ y $v(\tau) := \frac{y(t)}{\Omega}$ para las incógnitas, comprobando que el sistema resultante es:

$$\frac{du}{d\tau} = \gamma + u^2 v - (\beta + 1)u, \quad \frac{dv}{d\tau} = \beta u - u^2 v$$

Describe los parámetros γ y β en función de $k1, k2, k3, k4, a$ y b y verifica que ambos son adimensionales.

(c) Calcula el estado estacionario (es decir, la solución constante en tiempo) en función de γ y β.

(d) ¿Es cierto que todas las soluciones convergen al estado estacionario cuando $t \to +\infty$? Justifica la respuesta. (*Ayuda: puedes estudiar el Jacobiano del sistema*)