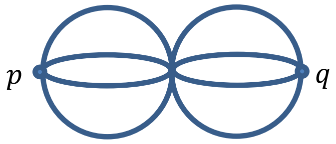
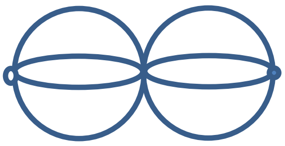
Ejemplos del Teorema de Seifert-Van Kampen y de la Proposición

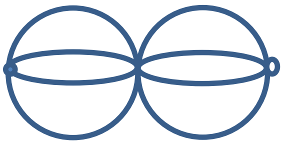
Ejemplo 1

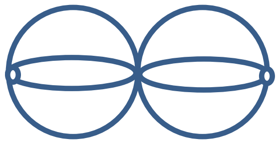
Sea X



Sea $U = X - \{p\}$ Sea $V = X - \{q\}$ Sea $U \cap V = X - \{p, q\}$





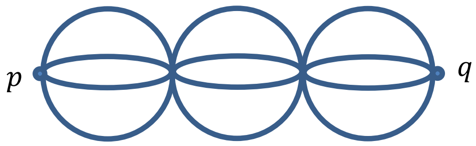


Todos son abiertos y arcoconexos, y $U \cap V \neq \emptyset$. Al hacer retracto de deformación tanto en U, V se queda una esfera S^2, que es simplemente conexo. Además $U \cup V = X$. Por la proposición, se tiene que X es simplemente conexo:

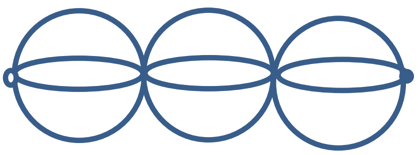
$$\Pi_1(X) = \{1\}$$

Ejemplo 2

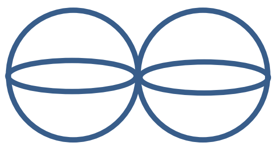
Sea X



Sea $U = X - \{p\}$, es abierto simplemente conexo porque



$$\overset{r.d}{\Longrightarrow}$$

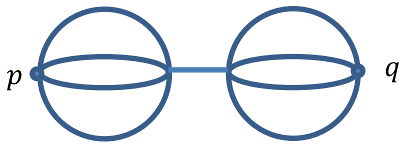


Sea $V = X - \{q\}$ los mismo es abierto simplemente conexo. Sea $U \cap V = X - \{p, q\} \neq \emptyset$ es abierto y arcoconexo. Además $U \cup V = X$. Por la proposición, se tiene que X es simplemente conexo:

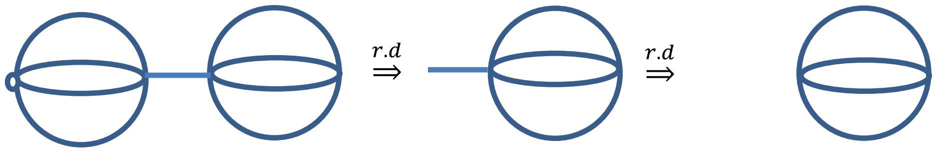
$$\Pi_1(X) = \{1\}$$

Ejemplo 3

Sea X



Sea $U = X - \{p\}$, es abierto simplemente conexo porque

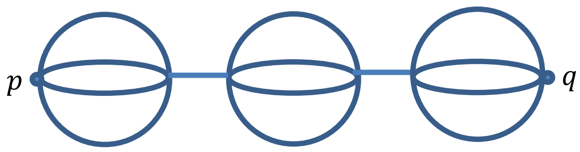


De la misma forma, $V = X - \{q\}$, es simplemente conexo. Sea $U \cap V = X - \{p, q\} \neq \emptyset$ es abierto y arcoconexo. Además $U \cup V = X$. Por la proposición, se tiene que X es simplemente conexo:

$$\Pi_1(X) = \{1\}$$

Ejemplo 4

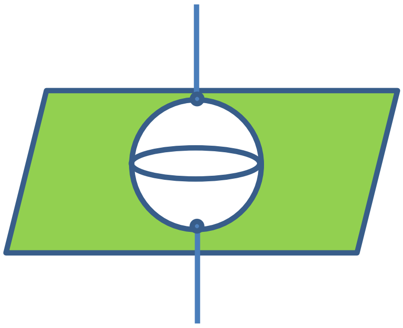
Sea X



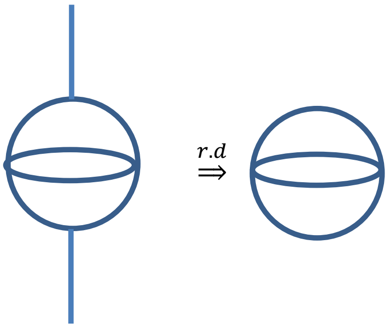
Por lo anterior, también X es simplemente conexo.

Ejemplo 5

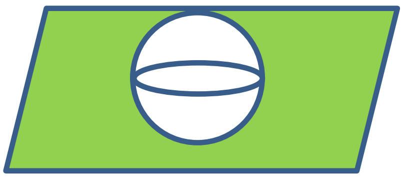
Sea $X = S^2 \cup \{(0,0,z) : |z| \geq 1\} \cup \{(x,y,0) : \|(x,y)\| \geq 1\} \subset R^3$



Sea $U = S^2 \cup \{(0,0,z) : |z| \geq 1\}$ es abierto y simplemente conexo.



Sea $V = S^2 \cup \{(x,y,0) : \|(x,y)\| \geq 1\}$ es abierto y simplemente conexo.



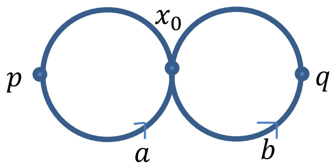
$\overset{r.d}{\Longrightarrow} S^2$

Ahora se tiene que $U \cup V = X$ y que $U \cap V = S^2 \neq \emptyset$ y arcoconexo. Por la proposición, se tiene que X es simplemente conexo:

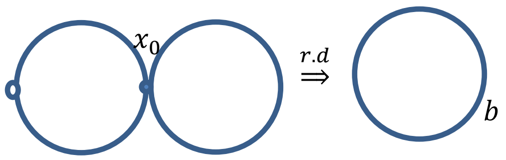
$$\Pi_1(X) = \{1\}$$

Ejemplo 6

Sea $X \subset R^2$



Sea $U = X - \{p\} \Longrightarrow \Pi_1(U, x_0) \cong F([b]) \cong Z$



De la misma forma sea $V = X - \{q\} \Longrightarrow \Pi_1(V, x_0) \cong F([a]) \cong Z$

Sea $U \cap V = X - \{p, q\}$, es contráctil, es simplemente conexo, $\Pi_1(U \cap V, x_0) \cong \{1\}$.

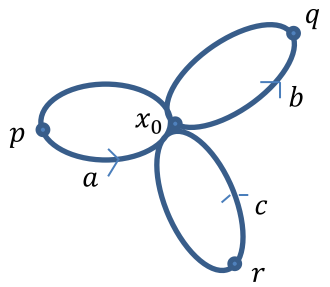
Se tiene que $U, V, U \cap V$ son abiertos y arcoconexos, además $U \cup V = X$ y $U \cap V \neq \emptyset$. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) = \Pi_1(U, x_0) * \Pi_1(V, x_0) =$$

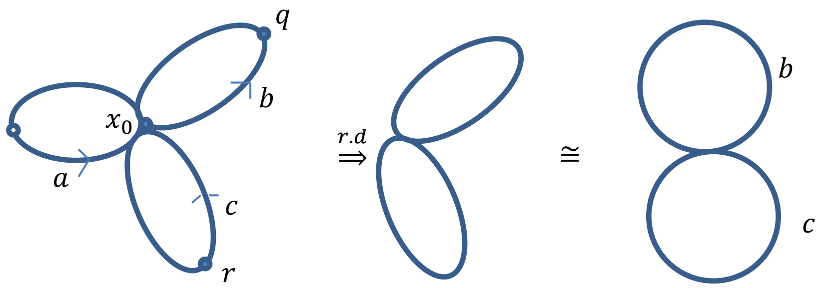
$$= F([b]) * F([a]) = F([a], [b]) = Z * Z$$

Ejemplo 7

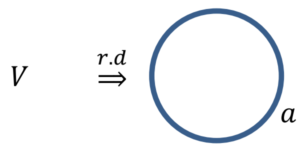
Sea $X \subset R^2$



Sea $U = X - \{p\} \Longrightarrow \Pi_1(U, x_0) \cong F([b],[c]) \cong Z * Z$



Sea $V = X - \{q, r\} \Longrightarrow \Pi_1(V, x_0) \cong F([a]) \cong Z$



Sea $U \cap V = X - \{p, q, r\}$, es contráctil, es simplemente conexo, $\Pi_1(U \cap V, x_0) \cong \{1\}$.

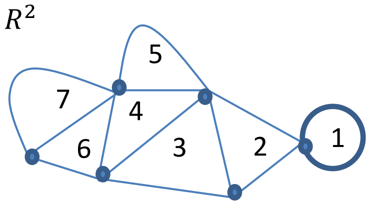
Se tiene que $U, V, U \cap V$ son abiertos y arcoconexos, además $U \cup V = X$ y $U \cap V \neq \emptyset$. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) = \Pi_1(U, x_0) * \Pi_1(V, x_0) =$$

$$= F([b],[c]) * F([a]) = F([a],[b],[c])$$

Ejemplo 8

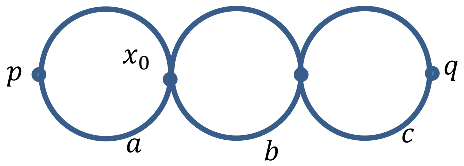
Sea $X \subset R^2$



$$\Pi_1(X, x_0) = F([a_1],[a_2],[a_3],[a_4],[a_5],[a_6],[a_7])$$

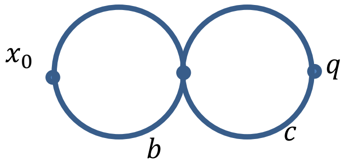
Ejemplo 9

Sea $X \subset R^2$



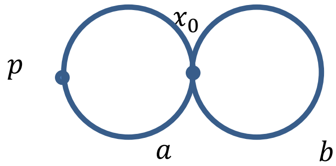
Sea $U = X - \{p\} \Longrightarrow \Pi_1(U, x_0) \cong F([b],[c]) \cong Z * Z$

$U \overset{r.d}{\Longrightarrow}$



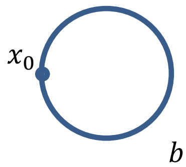
Sea $V = X - \{q\} \Longrightarrow \Pi_1(V, x_0) \cong F([a],[b]) \cong Z$

$V \overset{r.d}{\Longrightarrow}$



Sea $U \cap V = X - \{p, q\}$, $\Pi_1(U \cap V, x_0) \cong F([b])$:

$U \cap V \overset{r.d}{\Longrightarrow}$



Se tiene que $U, V, U \cap V$ son abiertos y arcoconexos, además $U \cup V = X$ y $U \cap V \neq \emptyset$. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

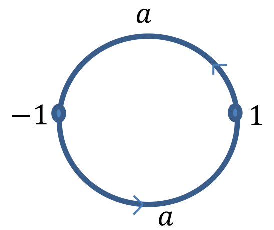
$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) =$$

$$= \frac{F([b],[c]) * F([a],[b])}{N\left\{(i_U)_X(x)\left((i_v)_X(x)\right)^{-1} : x \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\right\}} =$$

$$= \frac{F([b],[c],[a],[b])}{N\left\{(i_U)_X([b])\left((i_v)_X([b])\right)^{-1}\right\}} = \frac{F([b],[c],[a],[b])}{N\{[b]([b])^{-1}\}} = F([a],[b],[c])$$

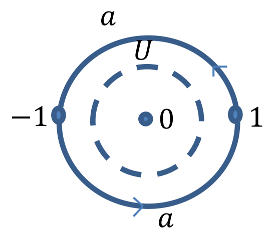
Ejemplo 10

Sea $RP^2 \cong \overline{D}/\sim$ donde $p \sim q \Leftrightarrow \begin{cases} p = q \\ \text{ó} \\ |p| = |q| = 1 \;\; y\, p = -q \end{cases}$ Calcular el grupo fundamental.



Sea $\pi: \overline{D} \rightarrow RP^2$ la proyección. Y vamos a considerar como U un disco abierto centrado en el origen, $U = D(0,r)\;\; r < 1$. Y como $V = \overline{D} - \{0\}$, de manera que U y V son abiertos y arcoconexos, además, $U \cup V = RP^2$, y $U \cap V = D(0,r) - \{0\} \neq \emptyset$, abierto y arcoconexo.

Se toma $x_0 \in U - \{0\}$, para calcular $\Pi_1(RP^2)$. Y por lo tanto, $\pi(x_0) \in \pi(U \cap V)$ aplicando el teorema de **Seifert-Van Kampen:** $\pi(U \cap V) = \pi(U) \cap \pi(V)$



$$U \cap V = \overline{D} \;\; U, V, U \cap V \;\; abiertos\; y\; arcoconexos \;\;\; U \cap V \neq \emptyset$$

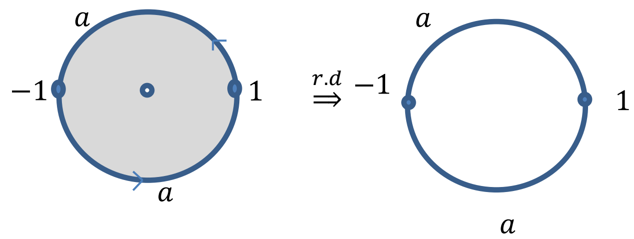
$$\pi(U) \cup \pi(V) = RP^2 \;\;\; \pi(U) \cap \pi(V) \neq \emptyset$$

$$\pi(U), \pi(V), \pi(U) \cap \pi(V)$$

$$abiertos\; y\; arcoconexos \;\;\; porque\; \pi\; continua, abierta\; y\; sobreyectiva$$

Como $\pi_{/U}: U \rightarrow \pi(U)$ homeomorfismo, U simplemente conexo, entonces $\pi(U)$ es simplemente conexo.

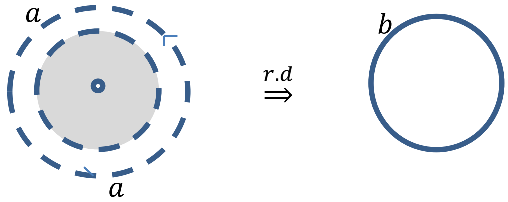
Veamos $\pi(V)$



De donde es homeomorfo a:

$$\Pi_1\big(\pi(V)\big) \cong F([a])$$

Veamos $\pi(U \cap V)$: $\pi_{/U\cap V}: U \cap V \to \pi(U \cap V)$ homeomorfismo.



$$\Pi_1\big(\pi(U \cap V)\big) \cong F([b])$$

Por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

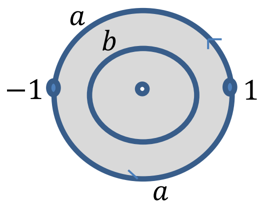
$$\Pi_1(RP^2, x_0) \cong \Pi_1(\pi(U), x_0) *_{\Pi_1(\pi(U\cap V), x_0)} \Pi_1(\pi(V), x_0) =$$

$$= \frac{\{1\} * F([a])}{N\left\{\left(i_{\pi(U)}\right)_{RP^2}(x)\left(\left(i_{\pi(V)}\right)_{RP^2}(x)\right)^{-1} : x \in \Pi_1(\pi(U \cap V), x_0)\right\}} =$$

$$= \frac{F([a])}{N\left\{\left(i_{\pi(U)}\right)_{RP^2}([b])\left(\left(i_{\pi(V)}\right)_{RP^2}([b])\right)^{-1}\right\}} = \frac{F([a])}{N\left\{\left(\left(i_{\pi(V)}\right)_{RP^2}([b])\right)^{-1}\right\}} = \frac{F([a])}{F([a]^2)} \cong \frac{Z}{2Z} \cong$$

$$\cong Z_2$$

Veamos $\pi(V)$

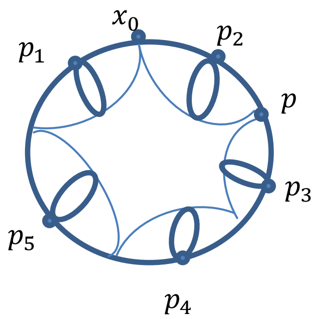


$\Longrightarrow b \simeq a * a$ por normalización

$$\left(i_{\pi(V)}\right)_{RP^2}([b]) = [a]^2 \in \Pi_1\big(\pi(V)\big)$$

Ejemplo 11

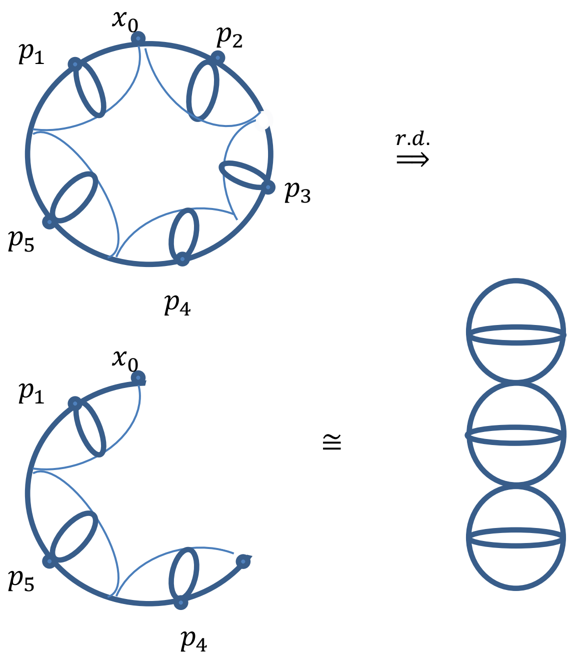
Sea $X \subset R^3$



Consideramos $U = X - \{p\}, V = X - \{p_i : i = 1, \dots, 5\}$, $U \cap V = X - \{p, p_i : i = 1, \dots, 5\}$.

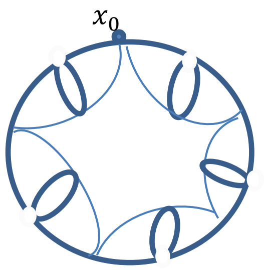
Se tiene que $U, V, U \cap V$ son abiertos y arcoconexos, además $U \cup V = X$ y $U \cap V \neq \emptyset$.

Veamos U:

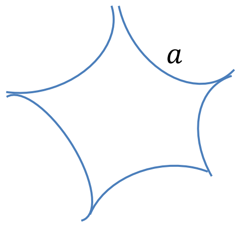


Que es simplemente conexo, es decir, U es simplemente conexo.

Veamos V:

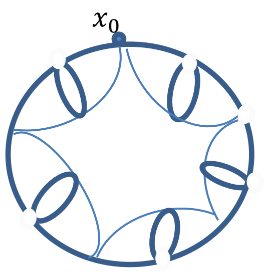


$\overset{r.d.}{\Longrightarrow}$

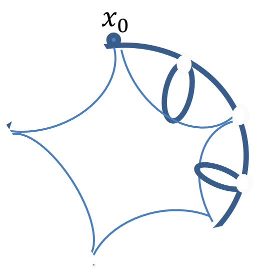


Por lo tanto, $\Pi_1(V) \cong F([a])$.

Veamos $U \cap V$:



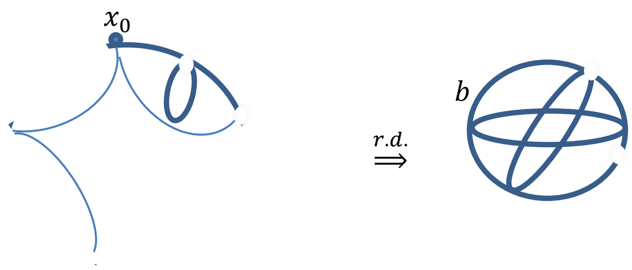
$\overset{r.d.}{\Longrightarrow}$



$\overset{r.d.}{\Longrightarrow}$

Sea $W_1,\ W_2,\ W_1 \cap W_2$ abiertos y arcoconexos, $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ y $W_1 \cup W_2 = U \cap V$

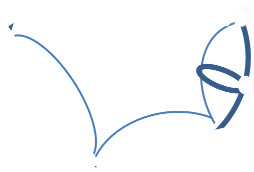
Veamos W_1:



Y es $\cong R^2 - \{0\}$, entonces

$\Pi_1(W_1) \cong F([b_1])$.

Veamos W_2:



Por el anterior : $\Pi_1(W_1) \cong F([b_2])$.

Veamos $W_1 \cap W_2$: sería simplemente conexo. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

$$\Pi_1(U \cap V, x_0) \cong \Pi_1(W_1, x_0) *_{\Pi_1(W_1 \cap W_2)} \Pi_1(W_2, x_0) =$$

$$= \Pi_1(W_1, x_0) * \Pi_1(W_2, x_0) = F([b_1]) * F([b_2]) = F([b_1],[b_2])$$

Luego por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) =$$

$$= \frac{\{1\} * F([a])}{N\left\{(i_U)_X(x)\left((i_V)_X(x)\right)^{-1} : x \in \Pi_1(U \cap V, x_0)\right\}} =$$

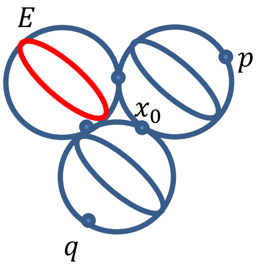
$$= \frac{F([a])}{N\left\{(i_U)_X([b_i])\left((i_V)_X([b_i])\right)^{-1} : i = 1{,}2\right\}} = \frac{F([a])}{[\varepsilon_{x_0}]} = F([a])$$

Pero $(i_U)_X([b_1]) = (i_V)_X([b_2])$ $\ (i_U)_X([b_2]) = (i_V)_X([b_1])$

$$(i_U)_X([b_i])\left((i_V)_X([b_i])\right)^{-1} = [\varepsilon_{x_0}]$$

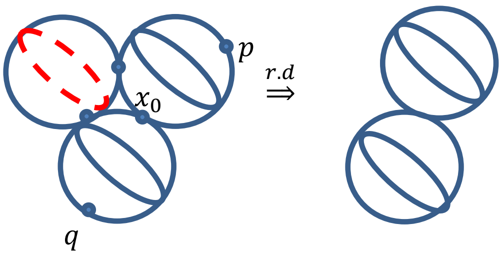
Ejemplo 12

Sea $X \subseteq R^3$:

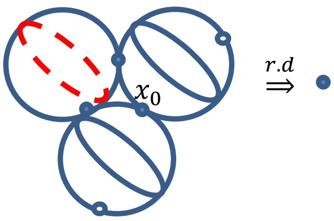


Sea $U = X \setminus \{E\}, V = X \setminus \{p, q\}$ $U \cap V = X \setminus \{E, p, q\}$, donde U, V y $U \cap V$ son abiertos y arcoconexos, además $U \cup V = X$ y $U \cap V \neq \emptyset$.

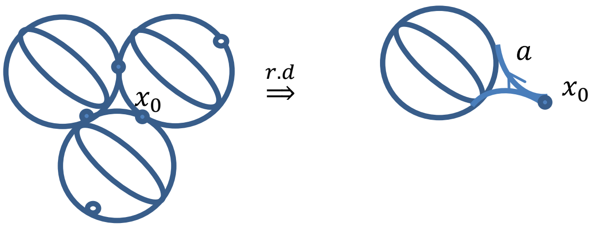
Para U



Luego U es simplemente conexo. Para $U \cap V$



Luego $U \cap V$ es contráctil, y por lo tanto, simplemente conexo. Para V

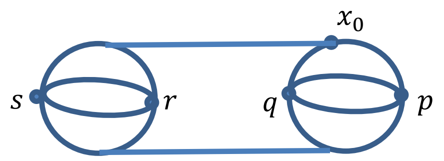


Luego $\Pi_1(V, x_0) \cong F([a])$. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) = \Pi_1(V, x_0) \cong F([a])$$

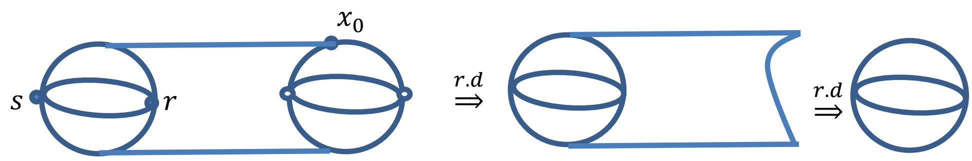
Ejemplo 13

Sea $X \subseteq R^3$:

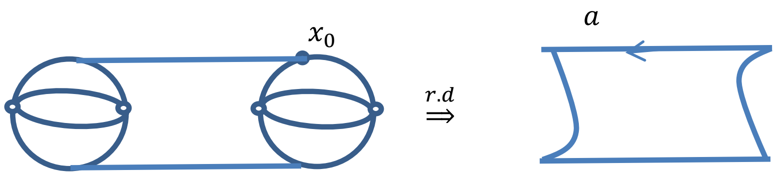


Sea $U = X \setminus \{p, q\}, V = X \setminus \{r, s\}$ $U \cap V = X \setminus \{r, s, p, q\}$, donde U, V y $U \cap V$ son abiertos y arcoconexos, además $U \cup V = X$ y $U \cap V \neq \emptyset$.

Para U



Luego U es simplemente conexo. Para V igual, es simplemente conexo. Para $U \cap V$



Luego$\Pi_1(U \cap V, x_0) \cong F([a])$. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \cong \{[\varepsilon_{x_0}]\}$$

Por lo tanto, $\Pi_1(V) \cong F([a])$.