ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 13/01/2017

1. **(2.5 puntos)** Dual de un espacio de Hilbert (Enunciado y demostración del Teorema de representación de Riesz-Fréchet)

2. (a) **(1.5 puntos)** ¿Es $\mathbf{R}^3$ con la norma $\|x\| = |x_1|+|x_2|+|x_3|$, $\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, un espacio prehilbertiano? Razónese adecuadamente la respuesta.

   (b) **(1.5 puntos)**¿Sea $X = \{f \in C^2([0,1], \mathbf{R}), f(0) = f(1) = 0\}$ ¿Es X con la norma $\|f\| = \left(\int_0^1 |f''(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$, $\forall f \in X$, un espacio prehilbertiano? Si la respuesta es afirmativa, escríbase el producto escalar del que deriva tal norma. Razónese adecuadamente la respuesta.

   (c) **(1.5 puntos)** Sea B una base hilbertiana de un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita H. Demuéstrese que ningún subconjunto propio D de B (es decir $D \subset B, D \neq B$) es base hilbertiana de H.

3. **(3 puntos)** Considérese el espacio vectorial l_2 con el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n},\ \forall\, x = \{x_n\} \in l_2,\ \forall\, y = \{y_n\} \in l_2$$

Pruébese que, con la norma derivada del anterior producto escalar, la sucesión:

$$\begin{aligned}
&X^1 = (1, 0, 0, ...)\\
&X^2 = (1, 1/\sqrt{2}, 0, 0, ...)\\
&\ldots\\
&X^k = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \ldots, 1/\sqrt{k}, 0, 0, ...)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

es de Cauchy pero no convergente.

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS
Tercer curso, 18/11/2015

1. Teorema de Riesz (compacidad de la bola cerrada unidad y su relación con la dimensión del espacio)

2. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Para $x \in X$ y $r > 0$, pruébese razonadamente que
$$B(x; r) = \mathrm{int}(\overline{B}(x; r))$$

3. Decídase, razonadamente, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:
   (a) Cualquier subconjunto cerrado y acotado de un espacio normado es compacto.
   (b) En un espacio normado, el dual algebraico y el dual topológico siempre coinciden.
   (c) Existen espacios normados de dimensión infinita con base (algebraica) numerable.
   (d) Existen espacios normados completos de dimensión infinita con base algebraica no numerable

4. Enúnciese el Teorema de Hahn-Banach y, usando 15 líneas como máximo, escríbase un resumen de las principales ideas de la demostración.

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 20/01/2016

1. (a) (0.5 puntos) Enunciado del Teorema de la proyección ortogonal para el caso de un subespacio cerrado M de un espacio de Hilbert H.

   (b) (2 puntos) Enunciado y demostración del Teorema de representación de Riesz-Frèchet (dual topológico de un espacio de Hilbert).

2. (a) (1 punto) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado prehilbertiano (su norma deriva de un producto escalar). Enúnciese y pruébese la identidad del paralelogramo.

   (b) Decídase razonadamente cuáles de los espacios normados que se indican a continuación son espacios prehilbertianos:

      i. (1 punto) $X = C([a,b], \mathbf{R})$ con la norma $\|f\|_0 = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|, \forall\ f \in X$.

      ii. (1 punto) $X = \{f \in C^1([a,b], \mathbf{R}) : f(a) = 0\}$, con la norma

$$\|f\| = \int_a^b |f'(t)|^2\ dt,\ \forall\ f \in X.$$

3. Sea $(H, <\cdot,\cdot>)$ un espacio de Hilbert, separable y de dimensión infinita.

   (a) (1 punto) Defínase con precisión el concepto de base hilbertiana ortonormal, enunciando el teorema de caracterización de bases hilbertianas.

   (b) (2 puntos) Usando el apartado anterior, pruébese razonadamente que un subconjunto ortonormal $B = \{f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ de H, es base hilbertiana si y solamente si se cumple la condición siguiente:

$$\forall\ f, g \in H,\ < f, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n >< g, f_n >$$

   (se puede usar el hecho de que el producto escalar es continuo).

   (c) (1.5 puntos) A raíz de lo anterior, ¿qué conclusión obtienes sobre la relación que existe entre cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita H y el espacio de Hilbert l_2?

   Sugerencia. Se puede usar el resultado siguiente: Si $\{\lambda_n\}$ es un sucesión de números reales, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente si y solamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ es convergente.

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 9/02/2016. Examen para matrícula de honor

1. (a) Sea X un espacio normado, $X^\sharp$ el dual algebraico y $L \in X^\sharp$. Demuéstrese que $L \in X^*$ (dual topológico) si y solamente si el núcleo de L es cerrado.

   (b) Si X es un espacio normado, $L \in X^\sharp$ (L no idénticamente cero) y $\alpha \in \mathbf{R}$, se define el hiperplano $H(L, \alpha)$ como

   $$H(L, \alpha) = \{x \in X : L(x) = \alpha\}$$

   Demuéstrese que cualquier hiperplano en X es o cerrado o denso.

2. Sea $\{\lambda_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ una sucesión de números reales tal que $\lambda_n \in (0, 1],\ \forall\ n \in \mathbf{N}$. Trivialmente,

$$< x, y >:= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n,\ \forall\ x = \{x_n\} \in l_2, \forall\ y = \{y_n\} \in l_2 \tag{1}$$

   define un producto escalar en l_2. Demuéstrese que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ es convergente, entonces l_2, con la norma derivada del producto escalar (1), no es completo.

3. Sea $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_0)$ y $a(\cdot) \in C[0, 1]$ una función dada. El operador

$$T : X \to X,\ (Tf)(t) = a(t)f(t),\ \forall\ f \in X,\ \forall\ t \in [0, 1]$$

   es trivialmente lineal y continuo. Demuéstrese que T es compacto si y solamente si la función $a(\cdot)$ es idénticamente cero.

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 10/07/2017

1. (a) **0.5 puntos)** Enúnciese el teorema de caracterización de aplicaciones lineales y continuas definidas entre espacios normados.

   (b) **(2 puntos)** Usando dicho teorema, pruébese que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces el dual topológico está contenido, estrictamente, en el dual algebraico.

2. Decídase, razonadamente, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

   (a) **(1 punto)** Cualquier subconjunto cerrado y acotado de un espacio normado es compacto.

   (b) **(1 punto)** Existen espacios normados tales que cualquier subconjunto cerrado y acotado es compacto.

   (c) **(1 punto)** Existen espacios normados de dimensión infinita con base (algebraica) numerable.

   (d) **(1 punto)** Existen espacios normados completos de dimensión infinita con base algebraica numerable

3. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $B = \{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ un subconjunto ortonormal (no necesariamente base hilbertiana).

   (a) **(3 puntos)** Si λ_n es una sucesión dada de números reales, pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f_n$ es convergente en H si y solamente si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2$ es convergente.

   (b) **(0.5 puntos)** Si B es no sólo ortonormal, sino base hilbertiana de H, ¿qué puede afirmarse sobre las series $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2$ para el caso en el que $\lambda_n = \langle f, f_n \rangle$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ con $f \in H$ dado?

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, Examen final, 09/02/2016

1. (2 puntos) Teorema de caracterización de bases hilbertianas en espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

2. Si $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son espacios normados y $L : E \to F$ es una aplicación lineal, decídase razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) (1 punto) Si la dimensión de E es finita, entonces L es continua.

   (b) (1 punto) Si la dimensión de F es finita, entonces L es continua.

3. (a) (1 punto) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_∞ pero no en l_1 ni en l_2.

   (b) (1 punto) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_2 pero no en l_1.

   (c) (1 punto) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en c_0 pero no en l_2

4. Considérese el espacio $H = (c_{00}, <, >)$, con el producto escalar

$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \ \forall \ \{x_n\}, \{y_n\} \in H.$$

   (a) (1 punto) Demuéstrese que el operador lineal $L : H \to \mathbf{R}$, definido como $L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ es continuo.

   (b) (1 punto) Demuéstrese que no existe $z \in H$ tal que

$$L(\{x_n\}) =< z, \{x_n\} >, \ \forall \ \{x_n\} \in H.$$

   (c) (0.5 puntos) Enúnciese el Teorema de Riesz-Fréchet sobre el dual de espacios de Hilbert H.

   (d) (0.5 puntos) ¿Qué conclusión obtienes a raíz de los tres apartados anteriores?

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 23/01/2017

1. (a) **(1 punto)** Enúnciese el Lema (Teorema) de Baire (versión sucesión de cerrados).

   (b) **(1 punto)** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Pruébese que cualquier subespacio M de X de dimensión finita es cerrado.

   (c) **(1 punto)** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Pruébese que cualquier subespacio propio M de X tiene interior vacío.

   (d) **(1 punto)** Usando los apartados anteriores, pruébese rigurosamente que si X es un espacio normado completo, de dimensión infinita, entonces cualquier base (algebraica) de X es no numerable.

2. Si $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son espacios normados y $L : E \to F$ es una aplicación lineal, decídase razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(1 punto)** Si la dimensión de E es finita, entonces L es continua.

   (b) **(1 punto)** Si la dimensión de F es finita, entonces L es continua.

3. Considérese el espacio $H = (c_{00}, <,>)$, donde

$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \ \forall \ \{x_n\}, \{y_n\} \in H.$$

   Demuéstrese que el operador lineal $L : H \to \mathbf{R}$, definido como $L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$

   (a) **(1 punto)** Está bien definido (es decir, $L(\{x_n\}) \in \mathbf{R}, \forall \{x_n\} \in c_{00}$).

   (b) **(1 punto)** Es continuo.

   (c) **(1 punto)**No existe $z \in H$ tal que

$$L(\{x_n\}) =< z, \{x_n\} >, \ \forall \ \{x_n\} \in H \qquad (*)$$

   En relación con el Teorema de Riesz-Frèchet, ¿qué conclusión se obtiene?

   (d) **(1 punto)** Si se sustituye $H = (c_{00}, <,>)$, por el espacio de Hilbert l_2, con el producto escalar usual, demuéstrese que $L : l_2 \to \mathbf{R}$ está bien definido y es lineal y continuo. ¿Se cumple ahora (*)? Si es así, ¿puedes decir quién es el elemento $z \in l_2$ que cumple (*)?

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 16/09/2016

1. (a) **(2 puntos)** Enunciado y demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio prehilbertiano.

   (b) **(0.5 puntos)** Escríbase y demuéstrese una condición necesaria y suficiente para tener la igualdad en la desigualdad anterior.

   (c) **(0.5) puntos** Usando los apartados anteriores, pruébese que si en un espacio vectorial real X, tenemos definido un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces $\langle x, x \rangle^{1/2}, \ \forall\, x \in X$, define una norma en X.

2. Sean $X = \{u : [0,1] \to \mathbf{R} : u \text{ es continua}, u(1) = 0\}$ con la norma uniforme $\| \cdot \|_0$ y el funcional $L : X \to \mathbf{R}$ definido como $L(u) = \int_0^1 u(t)\ dt, \ \forall\, u \in X$.

   (a) **(1 punto)** Demuéstrese que L es lineal y continuo.

   (b) **(1 punto)** Calcúlese la norma de L en X^*

   (c) **(1 punto)** ¿Se alcanza dicha norma?

3. (a) **(1 punto)** Enúnciese el Teorema de representación de Riesz-Fréchet sobre el dual de un espacio de Hilbert.

   (b) **(1.5 puntos)** Sea P_n el espacio vectorial real de los polinomios de una variable, de grado menor o igual que n, con el producto escalar

   $$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\ dt, \ \forall\, p, q \in P_n$$

   Pruébese que si $L : P_n \to \mathbf{R}$ es una aplicación lineal, entonces L es continua.

   (c) **(1.5) puntos** Como consecuencia de los dos apartados anteriores, pruébese que si $a < b$ son números reales dados, entonces existe un único $p \in P_n$ tal que

   $$\int_a^b q(t)\ dt = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\ dt, \ \forall\, q \in P_n$$

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 19/01/2015

1. Dual de un espacio de Hilbert (Teorema de representación de Riesz-Fréchet).

2. (a) Enúnciese el Lema de Baire y las equivalencias que se recuerden.

   (b) Sea E un espacio de Banach infinito dimensional. Demuéstrese que ningún subconjunto de E numerable puede ser base (algebraica) de E.

   (c) Sea el espacio normado c_{00} con la norma usual. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, c_n es la sucesión de números reales dada por $c_n^p = \delta_{np}$, $\forall p \in \mathbb{N}$, ¿Es el conjunto $\{c_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ base algebraica de c_{00}?

   (d) Teniendo en cuenta los apartados anteriores, ¿qué conclusión obtienes?

3. (a) Enuncia el Teorema de la gráfica cerrada.

   (b) Sean $E = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u'(0) = 0\}$ y $F = C[0,1]$, ambos con la norma uniforme. Demuéstrese que el operador $L : E \to F$ dado por $L(u) = u''$, $\forall\ u \in E$, es cerrado pero no continuo. ¿Qué hipótesis del Teorema de la gráfica cerrada no se cumple en este caso?

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 26/01/2015

1. Teorema de Banach-Steinhaus (Principio de la acotación uniforme)

2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real. Pruébese que las siguientes aplicaciones son continuas:

   (a) $\mathrm{R} \times E \to E,\ (\lambda, x) \to \lambda x$

   (b) $E \times E \to E,\ (x, y) \to x + y$

   (c) $E \to \mathrm{R},\ x \to \|x\|$

3. Sea el espacio normado c_0, formado por las sucesiones de números reales con límite cero, con la norma del supremo de los valores absolutos de los términos de la sucesión. Demuéstrese que la aplicación $L : E \to \mathrm{R}$, definida por $L\{a_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$, $\forall \{a_n\} \in c_0$, es lineal y continua. Calcúlese $\|L\|_{E'}$. ¿Se alcanza tal norma?

4. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $B = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal (no necesariamente base hilbertiana). Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión dada de números reales, pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente en H si y solamente si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ es convergente.

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 9/11/2016

1. (a) **(0.5 puntos)** Enúnciese el Teorema de Hahn-Banach.

   (b) **(1.5 puntos)** Usando dicho teorema, pruébese rigurosamente lo siguiente:
   Si $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado,* G *un subespacio vectorial de* X *y* $g : G \to \mathbf{R}$ *es lineal y continua,*

   ENTONCES: existe algún elemento en el dual topológico de X, *que extiende a* g *y que tiene la misma norma que* g.

2. Sea $X = C([0,1], \mathbf{R})$ con la norma uniforme.

   (a) **(1.5 puntos)** Pruébese que el subconjunto $A = \{f \in X : \int_0^1 f(t)\ dt = 2\}$ es cerrado en X.

   (b) **(1.5 puntos)** Pruébese que el subconjunto

   $$B = \{f \in X : f(0) - f(1/2) + f(1) > 0\}$$

   es abierto en X.

3. Sea $L : l_\infty \to l_1$ definido como

   $$L(x) = L(\{x_n\}) = \left\{ \frac{x_n}{n^2} \right\},\ \forall\ x \in l_\infty$$

   (a) **(1 punto)** Demuéstrese que L es lineal y continuo.

   (b) **(1.5 puntos)** Calcúlese la norma de L, demuéstrese que la misma se alcanza y encuéntrense todos los elementos de $\overline{B}_{l_\infty}(0;1)$ en los que se alcanza dicha norma.

4. Sea $L : c_0 \to l_1$ definido como

   $$L(x) = L(\{x_n\}) = \left\{ \frac{x_n}{n^3} \right\},\ \forall\ x \in c_0$$

   (a) **(1 punto)** Demuéstrese que L es lineal y continuo.

   (b) **(1.5 puntos)** Calcúlese la norma de L y demuéstrese que la misma no se alcanza

ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 12/11/2014

1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real.

   (a) Si A y B son dos subconjuntos de E. ¿Qué significa que A y B se puedan separar en E?

   (b) Probar que si A y B son dos subconjuntos no vacíos y disjuntos de E, tales que, además, A es compacto y B es cerrado, entonces existe algún $\varepsilon > 0$, tal que $((A + B(0;\varepsilon)) \bigcap (B + B(0;\varepsilon)) = \emptyset$.

   (c) Si A y B son dos subconjuntos de E, convexos, no vacíos y disjuntos, tales que, además A es compacto y B cerrado, pruébese que A y B se pueden separar de manera estricta (se puede usar el primer teorema de separación probado en clase).

2. Si $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son espacios normados y $L : E \to F$ es una aplicación lineal, decídase razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) Si la dimensión de E es finita, entonces L es continua.

   (b) Si la dimensión de F es finita, entonces L es continua.

3. Decídase, razonadamente, cuáles de las siguientes aplicaciones lineales son continuas:

   (a) $L : X = C([a,b], \mathrm{R}) \to \mathrm{R},\ f \to \int_a^b f(x)\ dx - f(a)$, cuando en X se considera la norma uniforme.

   (b) $L : X = C([a,b], \mathrm{R}) \to \mathrm{R},\ f \to \int_a^b f(x)\ dx - f(a)$, cuando en X se considera la norma de $L^1(a,b)$.

   (c) $L : P_n(x_1, x_2) \to P_{n-1}(x_1, x_2),\ L(P) = \dfrac{\partial\ P}{\partial\ x_1},\ \forall\ P \in P_n(x_1, x_2)$.

   $P_m(x_1, x_2)$ indica el espacio vectorial normado de polinomios de grado menor o igual a m, en las variables $(x_1, x_2) \in\ [0,1]^2$, con la norma uniforme.