TEMA 3: Suficiencia y completitud

3.1. Estadísticos suficientes.

3.2. Estadísticos completos.

3.3. Suficiencia y completitud en familias exponenciales.

3.1. ESTADÍSTICOS SUFICIENTES

$(X_1, \ldots, X_n) \in \chi^n$ muestra aleatoria simple de $X \to \{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$.

$f_\theta \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de X bajo P_θ.

$f_\theta^n \to$ función de densidad o función masa de probabilidad de $(X_1, \ldots, X_n)$ bajo P_θ.

Un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para la familia de distribuciones de X (o suficiente para el parámetro θ) si la distribución de $(X_1, \ldots, X_n)$ condicionada a cualquier valor de $T(X_1, \ldots, X_n)$ es independiente de θ.

Teorema de factorización de Neyman-Fisher: *Un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente si y sólo si, para cualquier valor de θ:*

$$f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = h(x_1, \ldots, x_n) g_\theta\left(T(x_1, \ldots, x_n)\right), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n$$

donde el primer factor es independiente de θ, y el segundo sólo depende de $(x_1, \ldots, x_n)$ a través de $T(x_1, \ldots, x_n)$.

Propiedades de los estadísticos suficientes:

- Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, lo es para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta'\}$ con $\Theta' \subseteq \Theta$.
- Si $T(X_1, \ldots, X_n)$ es suficiente para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$ y $U(X_1, \ldots, X_n)$ es otro estadístico tal que $T = f(U)$, $U(X_1, \ldots, X_n)$ es también suficiente para $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$.
- Cualquier transformación biunívoca de un estadístico suficiente es también suficiente.

3.2. ESTADÍSTICOS COMPLETOS

Un estadístico $T(X_1, \ldots, X_n)$ es completo para la familia de distribuciones de X si, para cualquier función medible unidimensional, g, se tiene:

$$E_\theta\left[g(T)\right] = 0,\ \forall \theta \in \Theta \ \Rightarrow\ P_\theta(g(T) = 0) = 1,\ \forall \theta \in \Theta.$$

3.3. SUFICIENCIA Y COMPLETITUD EN FAMILIAS EXPONENCIALES

Familia exponencial k-paramétrica: $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, *con funciones de densidad o funciones masa de probabilidad* $\{f_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, *es exponencial k-paramétrica si:*

- Θ *es un intervalo de* $\mathbb{R}^k$.
- $\forall \theta \in \Theta \quad \{x \ / \ f_\theta(x) > 0\} = \chi \to$ independiente de θ.
- $\forall \theta \in \Theta, \quad f_\theta(x) = \exp\left\{\sum_{h=1}^{k} Q_h(\theta) T_h(x) + S(x) + D(\theta)\right\}, \quad \forall x \in \chi,$

  siendo $T_1, \ldots, T_k, S$ *funciones medibles de* x, *y* $Q_1, \ldots, Q_k, D$ *funciones de* θ.

Teorema de suficiencia y completitud en familias exponenciales: *Si la familia de distribuciones de* X, $\{P_\theta;\ \theta \in \Theta\}$, *es exponencial k-paramétrica, la familia de distribuciones de cualquier muestra aleatoria simple también lo es:*

$$\forall \theta \in \Theta,\ f_\theta^n(x_1, \ldots, x_n) = \exp\left\{\sum_{h=1}^{k} Q_h(\theta)\left(\sum_{i=1}^{n} T_h(x_i)\right) + \sum_{i=1}^{n} S(x_i) + nD(\theta)\right\}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \in \chi^n.$$

Además:

- *El estadístico* $\left(\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i)\right)$ *es suficiente para* θ.
- *Si* $k \leq n$ *y el conjunto imagen de la función* $Q(\theta) = (Q_1(\theta), \ldots, Q_k(\theta))$ *contiene a un abierto de* $\mathbb{R}^k$, *el estadístico* $\left(\sum_{i=1}^{n} T_1(X_i), \ldots, \sum_{i=1}^{n} T_k(X_i)\right)$ *es también completo.*