OPERADORES LÍNEALES

Octubre 2021

En Análisis Funcional, los operadores lineales juegan un papel muy importante. El alumnado está familiarizado con el caso finito dimensional. De hecho, si $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es lineal, es decir,

$$L(\alpha x+\beta y)=\alpha L(x)+\beta L(y) \qquad (1)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

entonces L se representa como

$$L(x)=Ax, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \qquad (2)$$

donde A es una matriz real $n \times m$, y recíprocamente, cualquier operador de la forma (2), es un operador lineal. Trivialmente, en este caso, cualquier operador lineal es continuo.

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son espacios normados, $L: E \rightarrow F$ se dice lineal si satisface

$$L(\alpha f+\beta g)=\alpha L(f)+\beta L(g),$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E$$

IMPORTANTE: Las imágenes de cualquier base de E determinan unívocamente al operador L

Ejemplos de operadores lineales son:

1) $L : (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (C^0[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

$$f \longrightarrow f'$$

2) $L : (C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt$$

3) $L : (C^1[0,1], \|\cdot\|_1) \longrightarrow (C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$

$$f \longrightarrow \int_0^1 f(t)\,dt + f'(t)$$

Puede ocurrir que, como en algún ejemplo anterior, L no sea continuo (¿Puedes decir cuáles?)

Por tanto, el tema de los operadores lineales, cuando entran en juego espacios normados de dimensión infinita, parece atractivo y no trivial. Comencemos con algunas propiedades especiales de los operadores lineales.

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados y $L : E \to F$ lineal. Entonces:

(P1) L es continuo $\Longleftrightarrow$ L es continuo en $e = 0$

Demostración: $\Rightarrow$) Evidente

$\Leftarrow)$ Si $e_0 \in E$ y $(e_n) \xrightarrow{n\to\infty} e_0$

entonces $(e_n - e_0) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \overset{\text{por hipótesis}}{\Rightarrow} L(e_n - e_0) \to L(0) = 0$

$\Rightarrow L(e_n) - L(e_0) \to 0$.

(P2) L es continua $\Leftrightarrow$ L es continua en algún $e_0 \in E$

Demostración: $\Rightarrow)$ Evidente

$\Leftarrow)$ Sea $e \in E$ y $(e_n) \to e$.

Entonces $e_0 + (e_n - e) \to e_0 \overset{\text{hip.}}{\Rightarrow} L(e_0 + e_n - e)$ conv. a $L(e_0)$. Ahora bien $L(e_0 + e_n - e) = L(e_0) + L(e_n) - L(e) \to L(e_0) \Rightarrow L(e_n) \to L(e)$

(P3) L es continua $\Leftrightarrow \exists K \geq 0$ t.q.

$$\|L(e)\|_F \leq K \|e\|_E, \forall e \in E \quad (3)$$

Demostración: $\Leftarrow)$ Si $e \in E$ y $(e_n) \to e$, entonces $\|L(e_n) - L(e)\| = \|L(e_n - e)\| \leq K\|e_n - e\| \to 0$

Por tanto, $L(e_n) \to L(e)$

$\Rightarrow)$ Si (3) no es cierto, entonces

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists e_n \in E \setminus \{0\}$ t.q. $\|L(e_n)\| > n\|e_n\|$

$\Rightarrow \underbrace{\left\|L\left(\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right)\right\| > 1}_{(*)}$. Pero $\left(\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right) \to 0$

pues $\left\|\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right\| = \frac{1}{n}$. Por tanto, por hipótesis,

$L\left(\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right) \to L(0) = 0$, lo que contradice (*)

(P4) L es continua $\Longleftrightarrow$ $\sup\limits_{e \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(e)\|}{\|e\|} < +\infty$

$$\Updownarrow$$

$$\sup_{\|e\|=1} \|L(e)\| < +\infty$$

$$\Updownarrow$$

$\forall A \subset E$, A acotado en $E \Rightarrow L(A)$ es acotado en F

La demostración de las equivalencias anteriores es trivial, teniendo en cuenta (P1), (P2) ó (P3).

Como ves, hay muchas caracterizaciones sobre la continuidad de los operadores lineales. Pero recalquemos ALGO OBVIO: Es para operadores lineales.

Por ejemplo $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2$ es continua. Sin embargo, no satisface, por ejemplo la propiedad (P3).

Evidentemente, algunas otras funciones continuas no lineales $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pueden satisfacer (P3). Por ejemplo

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \operatorname{sen} x$$

que es no lineal, satisface $|f(x)| \leq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ¿Por qué?

2 ejercicios para "ir abriendo boca"

1. Sea $L: (E, \|\cdot\|_E) \longrightarrow (F, \|\cdot\|_F)$ lineal, y $\dim E$ finita. Entonces L es continua.

2. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ t.q. $\dim E$ es infinita. Demuestra que existe $L: E \to E$ lineal t.q. L no es continua, y $M: E \to \mathbb{R}$ lineal, no continua.

El ejercicio que sigue no es sencillo (le pondremos un asterisco, o quizás dos), pero muy bonito y significativo. Marca, de nuevo, una diferencia profunda entre la dimensión finita e infinita.

Antes de enunciarlo, recordemos que un hiperplano en $\mathbb{R}^n$ viene dado por conjuntos del tipo:

$$B=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : a_1x_1+\dots+a_nx_n=c\}$$

donde $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $c\in\mathbb{R}$, son dados.
Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, los hiperplanos son rectas; en $\mathbb{R}^3$ los hiperplanos son planos, etc.

Es ¿fácil? (atrévete) demostrar que cualquier hiperplano en $\mathbb{R}^n$ es cerrado.
Ahora bien...

(*) ¿(**)?

3 Sea $(X,\|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión infinita. Un hiperplano se define como un conjunto de la forma

$$H=\{x\in X : f(x)=\alpha\}$$

donde $f: X\to\mathbb{R}$ es lineal, no idénticamente cero y $\alpha\in\mathbb{R}$, son dados.

Demuestra que cualquier hiperplano H es o cerrado, o denso en X. Demuestra también que existen hiperplanos densos.
(El Teorema de Hahn-Banach, que se

explicaré más adelante, nos proporcionará, también, hiperplanos cerrados)

Sugerencia: demuestra que si $f:X \to \mathbb{R}$ es lineal y no continua, entonces

$$f(B_X(x_0;r)) = \mathbb{R}, \; \forall x_0 \in X, \; \forall r>0.$$

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son espacios normados, $\mathcal{L}(E,F)$ va a denotar el conjunto de aplicaciones lineales continuas de E en F. En el espacio $\mathcal{L}(E,F)$ se puede definir una norma:

$$\|f\| := \sup_{\|x\| \le 1} \|f(x)\| \qquad (4)$$
$$= \inf\{k \geq 0 : \|f(x)\| \le k\|x\|, \forall x \in E\}$$

Es fácil comprobar que (4) es una norma en $\mathcal{L}(E,F)$ (que verifica la igualdad dada en (4)).

Si $\dim E = n$, $\dim F = m$, $\mathcal{L}(E,F)$ no es sino el conjunto de matrices reales $M_{n\times m}$ y la norma (4) depende de las normas que se elijan en E y F (para los conceptos topológicos no importa demasiado...

aporta claridad, pues dim ([illegible] (n×m) es finita).

TEOREMA. Si F es un espacio de Banach, entonces $\mathcal{L}(E,F)$ es un espacio de Banach, con la norma dada en (4).

Demostración. Sea $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(E,F)$. Entonces

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+ \ \exists\, p_0(\varepsilon): p,q \geq p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon \, . \quad (5)$$

lo que implica

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+ \ \exists\, p_0(\varepsilon),\ p,q\geq p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|,\ \forall x\in E \quad (6)$$

¡Por favor, prueba detalladamente que (5) ⇒ (6)!

Ahora, la clave está en usar "sabiamente" (6). En efecto:

a) Si $x\in E$ es fijo, (6) implica que $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en F. Como F es un espacio de Banach, entonces $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento de F. Podemos así definir un operador

$$f: E\longrightarrow F,\quad x\longrightarrow \lim_{p\to+\infty} f_p(x),\ \forall x\in E.$$

La intuición (¿qué haríamos sin ella?) nos

dice que $f \in \mathcal{L}(E,F)$ y que $(f_p) \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} f$.
Lo confirmamos, nuevamente usando (6)

b) $f(\alpha x + \beta y) = \lim_{p \to +\infty} f_p(\alpha x + \beta y) = \lim_{p \to +\infty} (\alpha f_p(x) + \beta f_p(y)) =$
$= \alpha f(x) + \beta f(y), \ \forall x, y \in E, \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

c) Lo anterior significa que f es lineal. Veamos que es continua (nuevamente, volvemos a (6)): fijamos $x \in E$, $\varepsilon > 0$, $p \geq p_0(\varepsilon)$, $q \to +\infty$ y tenemos

$$\|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon \|x\| \ , \ \forall x \in E \qquad (7)$$

Así

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f_p(x)\| + \|f_p(x)\| \leq (\varepsilon + \|f_p\|)\|x\|, \forall x \in E$$

Por tanto, f es continua (¿Habías olvidado esto? ¡Demasiado pronto!)

d) Finalmente, veamos que $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}(E,F)} f$.

De (7), obtenemos $\|(f_p - f)(x)\| \leq \varepsilon, \ \forall x \in E : \|x\| \leq 1$
Luego:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p_0(\varepsilon) : p \geq p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$, c.q.d.

En particular, obtenemos el siguiente resultado notable:

Si $(E, \|\cdot\|_E)$ es cualquier espacio normado, el espacio normado

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, con la norma $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$
$\forall f \in \mathcal{L}(E, F)$

es un espacio de Banach, al que denotaremos por E' (E^* en algunos textos) y al que llamaremos DUAL TOPOLÓGICO de E.

¡Algunos ejercicios para practicar con los conceptos anteriores!

Ejercicio. Sea $E = c_0 = \{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \}$ con la norma $\|(a_n)\|_{c_0} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ y $f: c_0 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$f((a_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}$. Prueba

a) $f \in E'$. Calcula $\|f\|_{E'}$. ¿Se alcanza la norma?

b) Si $F = l_\infty$, $\|(a_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$, $f: F \longrightarrow \mathbb{R}$, dado por la expresión anterior, ¿$f \in F'$? ¿$\|f\|_{F'}$? ¿Se alcanza la norma?

Ejercicio. Sea $E = \{ u \in C([0,1], \mathbb{R}) : u(0) = 0 \}$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$ y $L: E \to \mathbb{R}$, $u \longmapsto \int_0^1 u(t)\,dt$, $\forall u \in E$

a) Demuestra que L es continua y

calcula su norma. ¿Se alcanza la norma?

Ejercicio. Sea $L: \ell_\infty \to \ell_1$, $(x_n) \to \left(\frac{x_n}{n^2}\right)$, $\forall (x_n) \in \ell_\infty$

a) Demuestra que L es lineal y continua.

b) Calcula $\|L\|$ y demuestra que se alcanza.

Ejercicio. Sea $L: c_0 \to \ell_1$, $(x_n) \to \left(\frac{x_n}{n^3}\right)$, $\forall (x_n) \in c_0$

Demuestra que L es continua y que no se alcanza su norma

El siguiente resultado es uno de los más importantes del curso y es muy significativo pues caracteriza un concepto algebraico (dimensión de un espacio vectorial) usando un concepto topológico (la compacidad de la bola cerrada unidad)

TEOREMA (F. Riesz, 1.918)

Sea $(E, \|\cdot\|)$ normado. Entonces

$$\dim E \text{ es finita} \iff \overline{B}_E(0;1) \text{ es compacto.}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) "Parte fácil del Teorema", pues $\overline{B}_E(0;1)$ es cerrado y acotado. Ahora bien, como la dim E es finita (en realidad, E es $\mathbb{R}^n$ ó $\mathbb{C}^n$, ¿habías olvidado esto?), tenemos que $\overline{B}_E(0;1)$ es compacto.

$\Leftarrow$) Antes de comenzar esta parte de la demostración, un comentario: decimos, a menudo, que la definición de compacidad en espacios topológicos es "poco usada en la práctica". Curiosamente, aquí va a demostrar todo su potencial. En efecto, sea $B = \overline{B}_E(0;1)$ que, por hipótesis, es compacto.

Si $\varepsilon \in (0,1)$ es fijo, el conjunto

$$\{B_E(b;\varepsilon), \ b \in B\}$$

es un recubrimiento por abiertos de B. Por ser B compacto, existe algún subrecubrimiento finito:

$\exists F = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset B$ t.q.

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_E(b_i;\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} (b_i + \varepsilon B_E(0;1)) \quad (8)$$

Sea M el subespacio de E generado por $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Entonces, de (8) deducimos

$$B \subset M + \varepsilon B$$

Luego

$$B \subset M + \varepsilon B \subset M + \varepsilon(M + \varepsilon B) = M + \varepsilon M + \varepsilon^2 B = M + \varepsilon^2 B$$

¿Por qué $M + \varepsilon M = M, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$?

Como decía Fourier, es fácil darte cuenta de que

$$B \subset M + \varepsilon^n B \quad , \forall n \in \mathbb{N} \qquad (9)$$

(9) implica que $B \subset M$. En efecto, de (9) obtenemos:

$\forall b \in B$, $\exists m_n \in M$, $b' \in B$: $b = m_n + \varepsilon^n b'$, luego $\|b - m_n\| \leq \varepsilon^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Como $\varepsilon^n \longrightarrow 0$, $m_n \longrightarrow b$.

Así $b \in \overline{M} = M$ (M tiene dimensión finita, y por tanto, es cerrado).

En conclusión

$$B \subset M \qquad (10)$$

¡Mira (10) despacio! B es la bola cerrada unidad del espacio "total" E y M un subespacio de E. Esto debe implicar:

$$E = M \qquad (11)$$

En efecto, $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\frac{x}{\|x\|} \in B \subset M \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in M \Rightarrow x \in M$ (¿Por qué?) Finalmente,

Como M tiene dimensión finita, E es de dimen. finita.

El resultado anterior es uno de los "más bonitos del curso" y permite probar otros resultados poco intuitivos, si los comparamos con la dimensión finita. Por ejemplo.

Ejercicio. Si $(E, \|\cdot\|)$ es de dimensión finita, entonces

$$\text{interior}\left(\overline{B}_E(0;1)\right) = B_E(0;1)$$

Piensa que, en este caso, $\overline{B}_E(0;1)$ es compacto.

Prueba que si $C \subset E$ es compacto y $\dim E$ es infinita, entonces $\mathring{C} = \emptyset$, $\mathring{C} := \text{interior}(C)$.

Pensarás: ¡qué raros deben ser los compactos en dimensión infinita y llevas razón!

¡otra caracterización de los espacios normados de dimensión finita!

Si $(X, \|\cdot\|)$, prueba que

$\dim X$ es finita $\Leftrightarrow$ Todas las normas en X son equival.

F. Riesz (1880 - 1956)