Tema 2: Distribuciones en el muestreo de poblaciones normales

1. Se toma una muestra aleatoria simple de tamaño 5 de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{N}(2.5,\, 36)$. Calcular:
   a) Probabilidad de que la cuasivarianza muestral esté comprendida entre 1.863 y 2.674.
   b) Probabilidad de que la media muestral esté comprendida entre 1.3 y 3.5, supuesto que la cuasivarianza muestral está entre 30 y 40.

2. La longitud craneal en una determinada población humana es una variable aleatoria que sigue una distribución normal con media 185.6 mm. y desviación típica 12.78 mm. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra aleatoria simple de tamaño 20 de esa población tenga media mayor que 190 mm.?

3. ¿De que tamaño mínimo habría que seleccionar una muestra de una variable con distribución normal $\mathcal{N}(\mu, 4)$ para poder afirmar, con probabilidad mayor que 0.9, que la media muestral diferirá de la poblacional menos de 0.1?

4. Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable con distribución normal. Calcular la probabilidad de que la cuasivarianza muestral sea menor que un 50 % de la varianza poblacional para $n = 16$ y para $n = 1000$.

5. Sean S_1^2 y S_2^2 las cuasivarianzas muestrales de dos muestras independientes de tamaños $n_1 = 5$ y $n_2 = 4$ de dos poblaciones normales con la misma varianza. Calcular la probabilidad de que S_1^2/S_2^2 sea menor que 5.34 o mayor que 9.12.

6. Se consideran dos poblaciones de bombillas cuyas longitudes de vida siguen una ley normal con la misma media y desviaciones típicas 425 y 375 horas, respectivamente. Con objeto de realizar un estudio comparativo de ambas poblaciones, se considera una muestra aleatoria simple de 10 bombillas en la primera población y una de tamaño 6 en la segunda. ¿Cuál es la probabilidad de la diferencia entre las medias muestrales del primer y segundo grupo sea menor que la observada en dos realizaciones muestrales que dieron 1325 horas y 1215 horas, respectivamente?

7. Sean $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas según una $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, y sean $\overline{X}$ y S^2 la media y cuasivarianza muestral de $(X_1, \ldots, X_n)$. Calcular la distribución de
$$\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

8. Sean $(X_1, \ldots, X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_m)$ muestras aleatorias simples independientes de poblaciones $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma^2)$, respectivamente. Sean $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, y $\overline{X},\ \overline{Y},\ S_1^2,\ S_2^2$ las medias y cuasivarianzas de las dos muestras. Calcular la distribución de
$$\frac{\alpha(\overline{X} - \mu_1) + \beta(\overline{Y} - \mu_2)}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}}\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{n} + \dfrac{\beta^2}{m}}}.$$