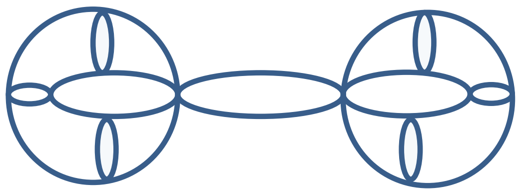
Ejercicios de Exámenes Topología II

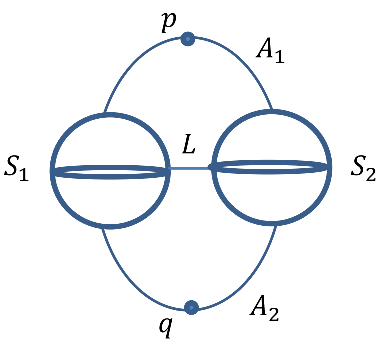
Ejercicio 1

Calcular el grupo fundamental del siguiente subespacio topológico de R^3.



Ejercicio 2

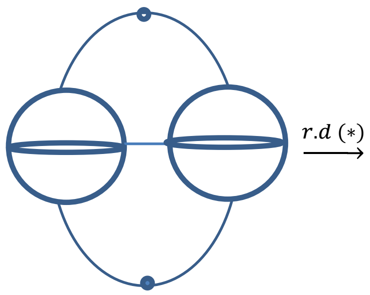
Calcula el grupo fundamental del siguiente subespacio $X \subset R^3$.



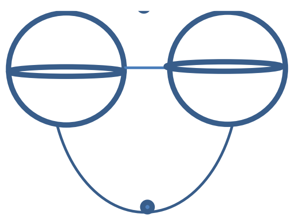
Se tiene que $X = S_1 \cup S_2 \cup L \cup A_1 \cup A_2$. Se define

$$U = X/\{p\} \quad V = X/\{q\} \quad \Longrightarrow U \cap V = X/\{p,q\} \neq \emptyset \quad U \cup V = X$$

Además, U, V y $U \cap V$ son abiertos arcoconexos, además U:



$(*)$ $A_1 - \{p\} \cong [-1,1] - \{0\} = [-1,0[\cup]0,1] \simeq \{N_1\} \cup \{N_2\}$ ya que cada intervalo es contráctil, donde N_i son los punto Norte de S_i.

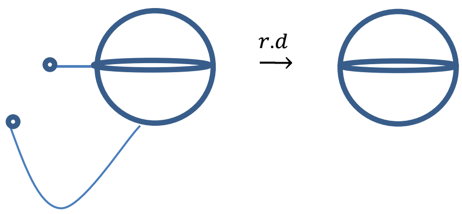


$U´$

Se define

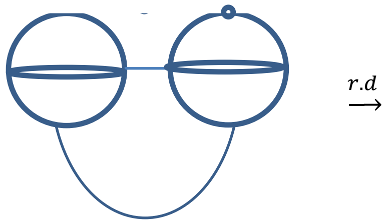
$$U´´ = U´/S_1 \quad V´´ = U´/\{N_2\} \quad \Longrightarrow U´´ \cap V´´ = U´/(\{N_2\} \cup S_1) \neq \emptyset \quad U´´ \cup V´´ = U´$$

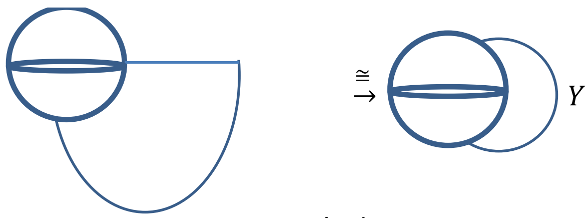
Además, $U´´$, $V´´$ y $U´´ \cap V´´$ son abiertos arcoconexos, además $U´´$ simplemente conexo



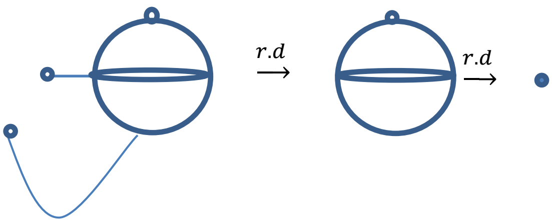
$$\Pi_1(U´´, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

Además V''





Además $U'' \cap V''$ es simplemente conexo ya que es contráctil



$$\Pi_1(U'' \cap V'', x_0) \cong \{1\}$$

Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

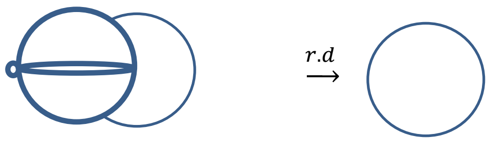
$$\Pi_1(U', x_0) \cong \Pi_1(U'', x_0) *_{\Pi_1(U'' \cap V'', x_0)} \Pi_1(V'', x_0) \cong \Pi_1(Y, x_0)$$

Se define:

$$Y_1 = Y/\{p\} \quad Y_2 = Y/\{q\} \quad \Longrightarrow Y_1 \cap Y_2 = Y/\{p, q\} \neq \emptyset \quad Y_1 \cup Y_2 = Y$$

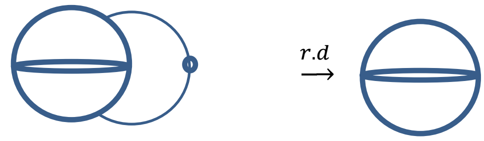
Además, Y_1, Y_2 y $Y_1 \cap Y_2$ son abiertos arcoconexos

Y_1



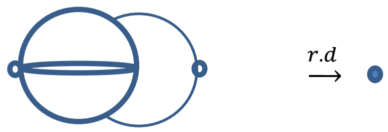
$$\Pi_1(Y_1, x_0) \cong \Pi_1(S^1, x_0) \cong Z$$

Y_2



$$Y_2 \; es \; simplemente \; conexo, \Pi_1(Y_2, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

$Y_1 \cap Y_2$



$Y_1 \cap Y_2$ es simplemente conexo por ser contráctil, $\Pi_1(Y_1 \cap Y_2, x_0) \cong \{1\}$.

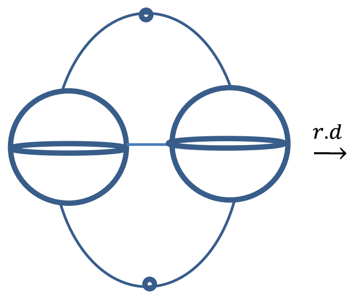
Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

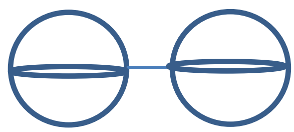
$$\Pi_1(Y, x_0) \cong \Pi_1(Y_1, x_0) *_{\Pi_1(Y_1 \cap Y_2, x_0)} \Pi_1(Y_2, x_0) \cong \Pi_1(Y_1, x_0) * \Pi_1(Y_2, x_0) \cong Z$$

$$\Pi_1(U', x_0) \cong Z \Longrightarrow U \simeq U' \Longrightarrow \Pi_1(U, x_0) \cong Z$$

De manera análoga, $\Pi_1(V, x_0) \cong Z$.

Además $U \cap V$:





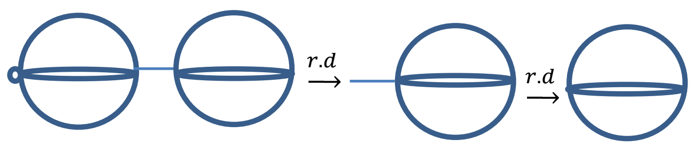
W

Se define

$$W_1 = W/\{p\} \quad W_2 = W/\{q\} \quad W_1 \cap W_2 = W/p, q \quad W_1 \cup W_2 = W$$

Además, W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$ son abiertos arcoconexos

W_1



$$\Pi_1(W_1, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

De la misma forma $\Pi_1(W_2, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$.

Y $W_1 \cap W_2$ es contráctil, luego es simplemente conexo y $\Pi_1(W_1 \cap W_2, x_0) \cong \{1\}$.

Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

$$\Pi_1(W, x_0) \cong \Pi_1(W_1, x_0) *_{\Pi_1(W_1 \cap W_2, x_0)} \Pi_1(W_2, x_0) \cong \Pi_1(W_1, x_0) * \Pi_1(W_2, x_0) \cong \{1\}$$

$$\Pi_1(W, x_0) \cong \{1\} \Longrightarrow U \cap V \simeq W \; es \; simplemente \; conexo \Longrightarrow \Pi_1(U \cap V, x_0) \cong \{1\}$$

Luego por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) * \Pi_1(V, x_0) \cong$$

$$\cong Z * Z \cong F_2$$

¿Es una superficie?

Veamos que X no es una superficie. Se considera el segmento abierto $L - (S_1 \cup S_2)$. Este conjunto es abierto en X, al ser S_1, S_2 cerrados en X. Así, si X fuese superficie, $L - (S_1 \cup S_2)$ también lo sería.

Tomamos $x \in L - (S_1 \cup S_2)$, debe existir V entorno abierto de x en $L - (S_1 \cup S_2)$ que es homeomorfo a U un disco abierto en R^2.

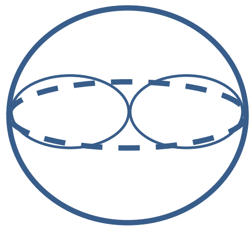
Como $L - (S_1 \cup S_2) \cong]a, b[$, se tendría un subconjunto $I \subseteq]a, b[$ con $I \cong U$, en particular I es conexo. Por la caracterización de los subconjuntos conexos de R se tendría que I es un intervalo abierto.

Como $I \cong U$ entonces $I - \{t_0\} \cong U - \{centro\}$, lo que es absurdo por conexión. Luego X no es una superficie.

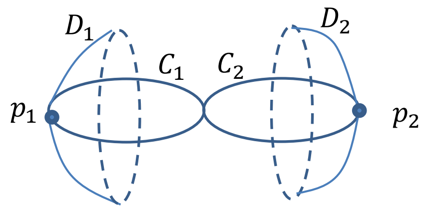
Ejercicio 3

Calcular el grupo fundamental de los siguientes subespacios topológicos de $\boldsymbol{R^3}$.

$$(a)\ X_1 = S^2 \cup \left\{(0,y,z) \in R^3 : y^2 + \left(z - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\} \cup \left\{(0,y,z) \in R^3 : y^2 + \left(z + \tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}$$



Se considera U:



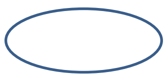
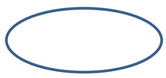
Donde $U = \left(S^2 \cap \left\{(x,y,z) \in R^3 : |y| > \tfrac{1}{2}\right\}\right) \cup C_1 \cup C_2$, es abierto y arcoconexo. Y además, como D_i es un disco abierto con $i = 1,2$, es contráctil, $D_i \simeq \{p_i\}$ $i = 1,2$

$U \overset{r.d}{\Longrightarrow}$ 

Se define

$$W_1 = W/\{p_1\} \quad W_2 = W/\{p_2\} \quad W_1 \cap W_2 = W/\{p_1, p_2\} \quad W_1 \cup W_2 = W$$

Además, W_1, W_2 y $W_1 \cap W_2$ son abiertos arcoconexos

$W_1 \overset{r.d}{\Longrightarrow}$  $W_2 \overset{r.d}{\Longrightarrow}$ 

$$W_1 \cap W_2 \overset{r.d}{\Longrightarrow} \bullet$$

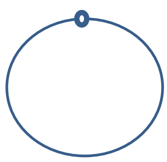
$W_1 \cap W_2$ es simplemente conexo. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

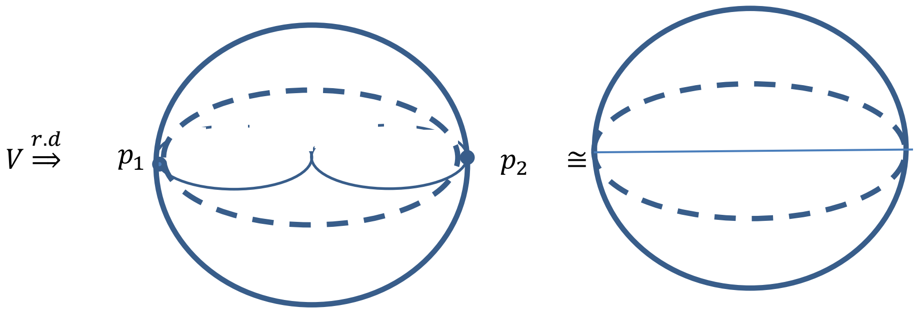
$$\Pi_1(W, x_0) \cong \Pi_1(W_1, x_0) *_{\Pi_1(W_1 \cap W_2, x_0)} \Pi_1(W_2, x_0) \cong \Pi_1(W_1, x_0) * \Pi_1(W_2, x_0) \cong Z * Z$$

$$\Pi_1(W, x_0) \cong Z * Z \cong F[a] * F[b] = F[a, b]$$

$$\Pi_1(U, x_0) \cong \Pi_1(W, x_0) \cong Z * Z \cong F[a] * F[b] = F[a, b]$$

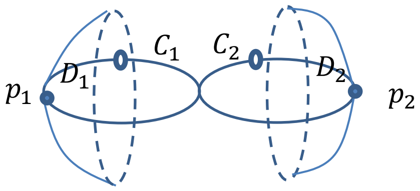
Se considera $V = S^2 \cup (C_1 - \{N_1\}) \cup (C_2 - \{N_2\})$, se tiene que V abierto y arcoconexo. Para cada $C_i - \{N_i\}$ $i = 1,2$ admite u retracto de deformación a

 $\overset{r.d}{\Longrightarrow}$ 

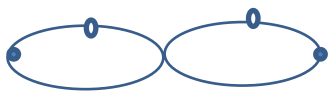


Se tiene que $\Pi_1(V, x_0) \cong Z$.

Y ahora $U \cap V$:



Como los discos son contráctil:



Al aplicar retracto de deformación sale un segmento, es simplemente conexo.

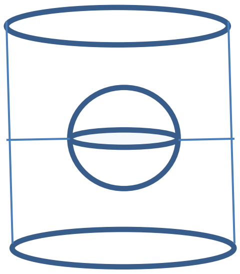
Como $U \cap V \neq \emptyset \quad U \cup V = X$. Además, U, V y $U \cap V$ son abiertos arcoconexos:

Luego por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

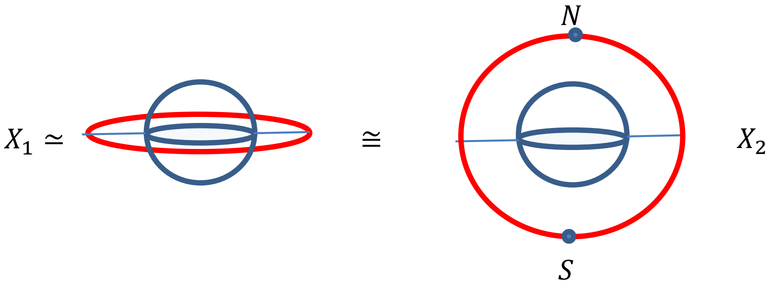
$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) * \Pi_1(V, x_0) \cong$$

$$\cong Z * Z * Z \cong F[a, b] * F[c] = F[a, b, c]$$

$(\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{X_1 = S^2 \cup \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 = 4, -2 \leq z \leq 2\} \cup \{(0,y,0) \in R^3 : 1 \leq |y| \leq 2\}}$



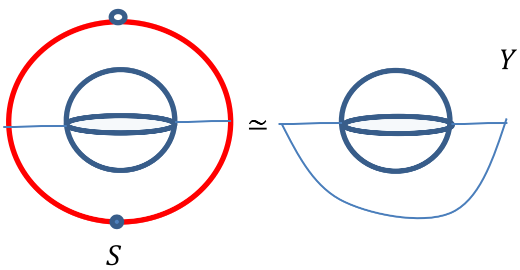
Usando el retracto de deformación del cilindro en la circunferencia ecuatorial se tiene que:



$$\Pi_1(X_1) \cong \Pi_1(X_2)$$

Se va aplicar el **teorema de Seifert-Van Kampen:**

Sea $U = X_2 - \{N\}$ abierto



$$\Pi_1(X_1) \cong \Pi_1(X_2) \cong F(a)$$

Se aplica nuevamente el teorema y se obtiene: $\Pi_1(U) \cong \Pi_1(Y) \cong F(a)$

Sea $V = X_2 - \{S\}$ abierto, de la misma forma $\Pi_1(V) \cong F(b)$, $U \cup V = X_2$ $U \cap V \neq \emptyset$

Sea $U \cap V = X_2 - \{N, S\}$ es simplemente conexo. Por lo tanto

$$\Pi_1(X_2) \cong \Pi_1(U) *_{\Pi_1(U \cap V)} \Pi_1(V) \cong \Pi_1(U) * \Pi_1(V) \cong F[a] * F[b] = F[a,b]$$

Ejercicio 4

Razonar de forma razonada las siguientes cuestiones:

a.- Demuestra que no existe ningún levantamiento $\tilde{\boldsymbol{f}}: \boldsymbol{S^1} \to \boldsymbol{R}$ de la aplicación identidad $\boldsymbol{f = Id_{S^1}: S^1 \to S^1}$.

Sea $\rho: R \to S^1$ la aplicación $\rho(t) = e^{i2\pi t}$ $\forall t \in R$. De existir $\tilde{f}$ se tendría que $\tilde{f}$ es continua y $\rho \circ \tilde{f} = f = Id_{S^1}$.

Se llama $x_0 = 1, t_0 = \tilde{f}(x_0)$ e $y_0 = \rho(t_0)$. Se considera los homeomorfismos de grupos:

$$\tilde{f}_*: \Pi_1(S^1, x_0) \to \Pi_1(R, t_0) \quad \rho_*: \Pi_1(R, t_0) \to \Pi_1(S^1, y_0)$$

Como R es simplemente conexo, entonces $\tilde{f}_*$ y ρ_* son triviales. Por otro lado, como $\rho \circ \tilde{f}$:

$$\rho_* \circ \tilde{f}_* = (Id_{S^1})_* = Id_{\Pi_1(S^1,1)}$$

Pero esto es imposible al ser $\tilde{f}_*$ y ρ_* son triviales y cumplirse que $\Pi_1(S^1, 1) \cong Z$.

b.- Sea Q una unión finita de polígonos planos disjuntos con el mismo número de lados. Describe todas las posibles configuraciones de Q a partir de las que se puede obtener una presentación poligonal con un único vértice del 2-toro $T_2 = T \# T$.

Ejercicio 5

Sea $\boldsymbol{M = {S^1x[-1,1]}\big/_{R}}$**, donde** $\boldsymbol{R}$ **es la relación de equivalencia:**

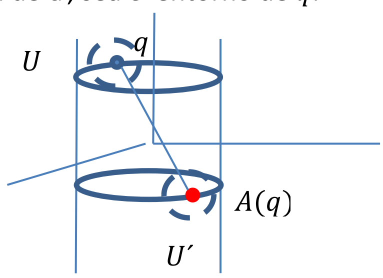
$$\boldsymbol{xRy \Leftrightarrow x = \pm y}$$

a.- Probar que $\boldsymbol{p: S^1x[-1,1] \to M,\ p(x,y,z) = [(x,y,z)]}$ **es una aplicación recubridora de dos hojas.**

Sea $A: S^1x[-1,1] \to S^1x[-1,1]$, dada por $A(q) = -q$, es la aplicación antípoda, veamos que:

$$ {S^1x[-1,1]}\big/_{R} \cong {S^1x[-1,1]}\big/_{\langle A\rangle} \quad donde\ \langle A\rangle = \{Id_{S^1x[-1,1]}, A\}$$

Sea $G = \langle A\rangle$, se tiene $G \leq Aut(S^1x[-1,1])$ y veamos que actúa de forma propia y discontinua sobre $S^1x[-1,1]$, para ello, para cada $q \in S^1x[-1,1]$ se puede encontrar un entorno distinguido para la acción de G, sea U entorno de q:



Luego $U´$ es entorno de $A(q) = -q$, y se verifica que $U \cap U´ = \emptyset$. Es decir, G que actúa de forma propia y discontinua sobre $S^1x[-1,1]$, por lo que:

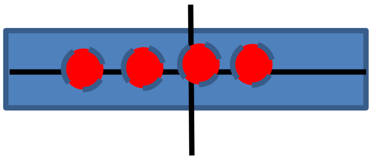
$p: S^1x[-1,1] \to {S^1x[-1,1]}\big/_{\langle A\rangle}$, $p(x,y,z) = [(x,y,z)]$ es una aplicación recubridora, y como las órbitas están todas formadas por dos elementos $[q] = \{q, -q\}$ se trata de un recubridor de dos hojas.

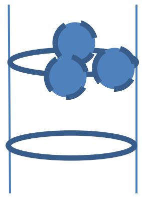
Además como $q_1Rq_2 \Leftrightarrow q_2 = \pm q_1 \Leftrightarrow \exists f \in \langle A\rangle: f(q_1) = q_2 = \pm q_1 \begin{cases} Id(q_1) = q_1 \\ A(q_1) = -q_1 \end{cases}$ es decir

$$ {S^1x[-1,1]}\big/_{R} \cong {S^1x[-1,1]}\big/_{\langle A\rangle}$$

Luego $p: S^1x[-1,1] \to M$ es una aplicación recubridora de dos hojas.

b.- Probar que $\boldsymbol{Rx[-1,1]}$ es simplemente conexo.



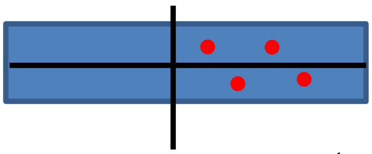


Sea $(x,y,z) \in M$, y sea $r < \sqrt{2}/_{2}$, entonces se considera $U = \left[B\left((x,y,z),r\right)\right]$, entonces $p^{-1}(U) \subset Rx[-1,1]$, de tal manera que $p_{\setminus U'}: U' \to U$ es un homeomorfismo para cada componente conexa U' de $p^{-1}(U)$.

Es decir, $Rx[-1,1]$ es simplemente conexo.

c.- Probar que $\boldsymbol{Aut(Rx[-1,1],\sigma)}$ es un grupo cíclico generado por

$\phi: Rx[-1,1] \to Rx[-1,1]$ $\phi(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}, -y\right)$



$$\phi^n(x,y) = \left(x + \frac{n}{2}, (-1)^n y\right) \quad \forall n \in Z$$

Se tiene que ϕ es un homeomorfismo por ser una simetría compuesta con una traslación. Por lo tanto, $\phi \in Homeo(Rx[-1,1]) \Longrightarrow \phi \in Aut(Rx[-1,1],\sigma)$

$$\langle \phi \rangle \leq Aut(Rx[-1,1],\sigma)$$

Sea $\varphi \in Aut(Rx[-1,1],\sigma)$ y $[(1,0,0)] \in M$, $(0,1) \subset \sigma^{-1}([(1,0,0)])$ luego

$$\varphi(0,1) \in \sigma^{-1}([(1,0,0)]) = \left\{\left(\frac{n}{2}, (-1)^n\right) : m \in Z\right\} = \{\phi^n(0,1) : n \in Z\}$$

Por lo que existe $k \in Z$ para el cual $\varphi(0,1) = \phi^k(0,1)$, luego $\varphi \in \langle \phi \rangle$.

Entonces $Aut(Rx[-1,1],\sigma) \leq \langle \phi \rangle$, y $Aut(Rx[-1,1],\sigma)$ es un grupo cíclico generado por ϕ.

Ejercicio 6

Discutir de forma razonada si cada par de los siguientes espacios topológicos son o no del mismo tipo de homotopía:

a.- $X_1 = {[-1,1]x[-1,1]}/_{\sim} - \{\overline{(0,0)}\}$, donde la relación de equivalencia $\sim$ identifica los lados de $[-1,1]x[-1,1]$ según el esquema $E = aba^{-1}c$.

b.- $X_2 = D \cup T$, donde $D = \{(x,y,z) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ y T es el toro obtenido al rotar alrededor del eje z la circunferencia en $\{x = 0\}$ de centro $(0,2,0)$ y radio 1,

c.- $X_3 = \{(x,y,z) \in R^3 : z = arctg(x+y) - cosh(x^2 + e^y) + 2015\}$

Ejercicio 7

Sea X un espacio topológico con $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos no vacíos contráctiles de X y $U \cap V \neq \emptyset$. ¿Es contráctil?

Ejercicio 8

Sea $f: R \to]0,+\infty[$ una función continua y consideramos el subespacio topológico de R^3 dado por $X = \{(f(z)x, f(z)y, z) : x^2 + y^2 = 1, z \in Z\}$.

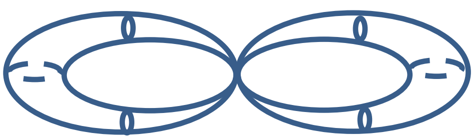
a.- Demuestra que $A = \{(f(0)x, f(0)y, 0) : x^2 + y^2 = 1\}$ es un retracto de deformación de X.

b.- Calcula el grupo fundamental de X.

Ejercicio 9

Calcula el grupo fundamental de los espacios topológicos siguientes, siempre de la topología euclidiana heredada del ambiente:

a.- Doble toro estrangulado.



b.- $(S^1 x R) \cup \left(\cup_{j=1}^{4} S_j\right)$ donde $S_j = \left\{p \in R^3 : \|p - (0,0,j)\| < {}^{1}/_{3}\right\}$ $j = 1,2,3,4$.

Ejercicio 10

Probar que el conjunto $A = \{(x,y,0) \in R^3 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ es un retracto fuerte de deformación de $X = \{(x,y,0) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1,\ x^2 + y^2 \neq 0\}$. Como consecuencia calcular el grupo fundamental de X.

Ejercicio 11

En el intervalo $]0,+\infty[$ dotado de la topología euclidiana definamos, para cada $m \in Z$, la transformación $\phi_m:]0,+\infty[\to]0,+\infty[, \phi_m(t) = 2^m t$.

a.- Demostrar que $G = \{\phi_m: m \in Z\}$ es un grupo de homeomorfismos de $]0,+\infty[$ que actúa de forma propia y discontinua sobre $]0,+\infty[$.

b.- Probar que el espacio de órbitas $]0,+\infty[/_G$ es homeomorfo a S^1.

c.- Sea $H = \{\psi_m: m \in Z\}$ el grupo de transformaciones de $R^{n+1} - \{0\}, n \in N$, dado por

$$\psi_m: R^{n+1} - \{0\} \to R^{n+1} - \{0\} \quad \psi_m(p) = 2^m p$$

Demostrar que H actúa de forma propia y discontinua sobre $R^{n+1} - \{0\}$, y que el espacio de órbitas $R^{n+1} - \{0\}/_H$ es homeomorfo a $S^1 x S^n$.

d.- Determinar todos los recubridores de $S^2 x S^n \ \ n \geq 2$.

Ejercicio 12

Sea $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{R} \to]\boldsymbol{0}, +\infty[$ una función continua, y consideremos el subespacio topológico de $\boldsymbol{R}^3$ dado por

$$\boldsymbol{X} = \{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})\colon \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{R}\}$$

a.- Demuestra que $\boldsymbol{A} = \{(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0})\boldsymbol{y}, \boldsymbol{0})\colon \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{1}\}$ es un retracto de deformación de $\boldsymbol{X}$.

Sea la aplicación $r\colon X \to A$ definida para cada $(u, v, z) \in X$

$$(u, v, z) \in X \Longrightarrow \exists x, y \in R\colon x^2 + y^2 = 1 \quad u = f(z)x \quad v = f(z)y$$

$$r(u, v, z) = \left(\frac{f(0)}{f(z)}u, \frac{f(0)}{f(z)}v, 0\right)$$

$$\Longrightarrow r(f(z)x, f(z)y, z) = \left(\frac{f(0)}{f(z)}f(z)x, \frac{f(0)}{f(z)}f(z)y, 0\right) = (f(0)x, f(0)y, 0) \in A$$

Se tiene que r está bien definida ya que $f(z) > 0\ \forall z \in R$, es continua por el álgebra elemental de aplicaciones continuas, y además $r_{/A} = Id_A$:

$$r(f(0)x, f(0)y, 0) = \left(\frac{f(0)}{f(0)}f(0)x, \frac{f(0)}{f(0)}f(0)y, 0\right) = (f(0)x, f(0)y, 0)$$

Por tanto, es una retracción de X sobre A.

Por otra parte, la aplicación $H\colon Xx[0,1] \to X$

$$H(u, v, z) = \left(\frac{f\big((1-s)z\big)}{f(z)}u, \frac{f\big((1-s)z\big)}{f(z)}v, (1-s)z\right)$$

$$(u, v, z) \in X \Longrightarrow \exists x, y \in R\colon x^2 + y^2 = 1 \quad u = f(z)x \quad v = f(z)y$$

$$H\big((f(z)x, f(z)y, z), s\big) = \left(\frac{f\big((1-s)z\big)}{f(z)}f(z)x, \frac{f\big((1-s)z\big)}{f(z)}f(z)y, (1-s)z\right)$$

$$H\big((f(z)x, f(z)y, z), s\big) = \big(f\big((1-s)z\big)x, f\big((1-s)z\big)y, (1-s)z\big) \in X$$

Se tiene que está bien definida porque $f(z) > 0\ \forall z \in R$, $Im(H) \subset X$, es continua por el álgebra elemental de aplicaciones continuas, y además:

$$H\big((f(z)x, f(z)y, z), 0\big) = \big(f\big((1-0)z\big)x, f\big((1-0)z\big)y, (1-0)z\big) = (f(z)x, f(z)y, z)$$

$$H(.,0) = Id_X$$

$$H\big((f(z)x, f(z)y, z), 0\big) = \big(f\big((1-1)z\big)x, f\big((1-1)z\big)y, (1-1)z\big) = (f(0)x, f(0)y, 0) =$$

$$= r(f(z)x, f(z)y, z) \Longrightarrow H(.,1) = r$$

Por lo tanto, que A es un retracto de deformación de X.

b.- Calcula el grupo fundamental de X.

Como A es un retracto de deformación de X con retracción asociada r, dado $a \in A$ la aplicación $r_*: \Pi_1(X,a) \to \Pi_1(A,a)$ es un isomorfismo de grupos con inverso

$$i_*: \Pi_1(A,a) \to \Pi_1(X,a)$$

la aplicación inclusión.

Como la aplicación $F: A \longrightarrow S^1$

$$F(u,v,w) = \left(\frac{u}{f(0)}, \frac{v}{f(0)}\right)$$

$$(u,v,w) \in A \Longrightarrow \exists x,y \in R: x^2+y^2=1 \quad u=f(0)x \quad v=f(0)y \quad w=0$$

$$F\big((f(0)x, f(0)y, 0)\big) = \left(\frac{f(0)x}{f(0)}, \frac{f(0)y}{f(0)}\right) = (x,y) \in S^1$$

Se tiene que F está bien definida porque $f(0) > 0$, $Im(F) \subset S^1$, es continua por el álgebra elemental de aplicaciones continuas, y además es un homeomorfismo, entonces por F_*:

$$\Pi_1(A,a) \cong \Pi_1(S^1,a) \cong Z \Longrightarrow \Pi_1(X,a) \cong Z$$

$$X = R^3 / \left((\{(0,0)\} x R) \cup \left\{ (x, y, 0) : \sqrt{x^2 + y^2} = 2 \right\} \right)$$

$$A = \left\{ (x, y, z) \in R^3 : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 2 \right)^2 + z^2 = 1 \right\}$$

Sea la aplicación $r: X \to A$ definida para cada $(u, v, z) \in X$

$$(u, v, z) \in X \Longrightarrow \exists x, y \in R: x^2 + y^2 = 1 \quad u = f(z)x \quad v = f(z)y$$

$$r(x, y, z) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2} - 2}, 0 \right)$$

$$\Longrightarrow r(f(z)x, f(z)y, z) = \left(\frac{f(0)}{f(z)} f(z)x, \frac{f(0)}{f(z)} f(z)y, 0 \right) = (f(0)x, f(0)y, 0) \in A$$

Se tiene que r está bien definida ya que $f(z) > 0 \ \forall z \in R$, es continua por el álgebra elemental de aplicaciones continuas, y además $r_{/A} = Id_A$:

$$r(f(0)x, f(0)y, 0) = \left(\frac{f(0)}{f(0)} f(0)x, \frac{f(0)}{f(0)} f(0)y, 0 \right) = (f(0)x, f(0)y, 0)$$