ESPACIOS DE HILBERT (un primer encuentro)

El uso de operadores en MECÁNICA CUÁNTICA motivó uno de los conceptos y resultados que veremos a continuación, destacando la axiomatización de los llamados "espacios de Hilbert", llevada a cabo por J.V. Neumann en 1.929 ("Mathematische Annalen, Vol. 102, 49–131, 370–427, 1.929–1.930"). (Los "espacios de Hilbert" son "una generalización natural en dimensión infinita, de los espacios euclídeos $\mathbb{R}^n$")

Comencemos con la definición de PRODUCTO ESCALAR en un espacio vectorial real H.

Un producto escalar en H es una aplicación

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longrightarrow \langle f,g \rangle$$

que satisface:

i) $\langle f,f \rangle \geq 0, \ \forall f \in H$; $\langle f,f \rangle = 0 \iff f = 0$

ii) $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle, \ \forall f,g \in H$

iii) $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f,h \rangle + \beta \langle g,h \rangle, \ \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}$
$\forall f,g \in H$

Observemos que debido a las propiedades anteriores, la aplicación $\langle \cdot , \cdot \rangle$ es bilineal (La definición ante-

[illegible] es debida a J.V. Neumann, F. Riesz y M. Stone).
El ejemplo más elemental es, quizás, el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ equipado con el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \qquad (1)$$

Observemos que la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$, es

$$\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (*)$$

En los espacios de funciones $L^2(a,b)$ (Hilbert), podemos definir el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x)\, dx, \quad \forall f, g \in L^2(a,b) \qquad (2)$$

En los espacios de sucesiones l_2 podemos definir el producto escalar como (Hilbert)

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n, \quad \forall (a_n), (b_n) \in l_2 \qquad (3)$$

Ejercicio 1. Demuestra que (1), (2) y (3) son productos escalares en los espacios citados.

Mirando (*) con atención, vemos que en $\mathbb{R}^n$ se puede definir la norma euclídea a partir del producto escalar. ¡Esto no es casualidad! De hecho, nuestro objetivo a continuación es demostrar que un producto escalar en H siempre da lugar a una norma en H, de tal forma que cualquier espacio vectorial donde tengamos definido un producto escalar (llamado, en adelante, espacio PREHILBERTIANO), puede transformarse en un espacio normado.

Previamente, necesitamos probar una desigualdad, llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz, que tiene interés en sí misma. Hemos tratado anteriormente esta desigualdad en casos particulares:

En $\mathbb{R}^n$ $\quad \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}$

En l_2 $\quad \left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} y_i^2\right)^{1/2}$

En $L^2(a,b)$ $\quad \left|\int_a^b f(x) g(x)\,dx\right| \leq \left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(x)\,dx\right)^{1/2}$

La primera de las tres, fue probada por Cauchy, en 1821. La tercera, para funciones, es conocida como "desigualdad de Bunyakovskii (1859)", probada también por Schwarz en 1884 (sin referencia al trabajo de Bunyakovskii) ¡misterios históvicos sin resolver!

TEOREMA (Desigualdad de C-S).
Sea $H(\mathbb{R})$, dotado con un producto escalar $<\cdot,\cdot>$.
Entonces:

(C-S) $|<f,g>| \leq <f,f>^{1/2}<g,g>^{1/2}, \forall f,g \in H$

Demostración (en absoluto intuitiva).
Si f ó g son cero, (C-S) es trivial. Supongamos $f\neq 0$, $g\neq 0$ y consideremos la función

$$p: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \lambda \longrightarrow <f+\lambda g, f+\lambda g>, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Como $p(\lambda) = <g,g>\lambda^2 + 2<f,g>\lambda + <f,f>$, p es un polinomio de segundo grado con "coeficiente líder" positivo ($<g,g>$). Por tanto

$\exists \min_{\lambda\in\mathbb{R}} g(\lambda)$ (interesante ejercicio para repasar algunos conceptos de funciones de 1 variable)

Si $g(\lambda_0) = \min_{\lambda\in\mathbb{R}} g(\lambda)$, entonces $g'(\lambda_0) = 0$

y $g(\lambda_0) = <f+\lambda_0 g, f+\lambda_0 g> \geq 0$.

De $g'(\lambda_0) = 0$ deducimos: $2<g,g>\lambda_0 + 2<f,g> = 0$, por lo que $\lambda_0 = -\dfrac{\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle}$. Además,

$$0 \leq q(\lambda_0) = \langle g,g\rangle \lambda_0^2 + 2\langle f,g\rangle \lambda_0 + \langle f,f\rangle =$$

$$= \langle g,g\rangle \frac{\langle f,g\rangle^2}{\langle g,g\rangle^2} + 2\langle f,g\rangle \frac{-\langle f,g\rangle}{\langle g,g\rangle} + \langle f,f\rangle =$$

$$= \frac{\langle f,g\rangle^2 - 2\langle f,g\rangle^2 + \langle f,f\rangle\langle g,g\rangle}{\langle g,g\rangle}$$

Por tanto, $\langle f,g\rangle^2 \leq \langle f,f\rangle\langle g,g\rangle$, de donde se deduce C-S.

Ejercicio 2. La igualdad se da en C-S $\Longleftrightarrow$ ¿?

Ejercicio 3. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano. Prueba que

$$\|x\| = \langle x,x\rangle^{1/2}, \quad \forall x \in H$$

define una norma en H. (4)

Ejercicio 4. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio pre-hilbertiano. Prueba la llamada "igualdad del paralelogramo"

(I.P) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right), \ \forall x,y \in H,$
donde $\|\cdot\|$ está definida en (4)

Ejercicio 5. Proporciona algún ejemplo de espacio normado tal que su norma no derive de un producto escalar (como en (4)).

(*) Ejercicio 6. Prueba que si $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio normado donde se verifica la igualdad del paralelogramo (IP), entonces $\|\cdot\|$ deriva de un producto escalar.
(¡ojo! Ejercicio con (*)).

Ejercicio 7. Sea $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio prehilbertiano. Si $H\times H$ está dotado de la topología producto, prueba que la aplicación

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H\times H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f,g) \longrightarrow \langle f,g\rangle$$

es continua.

Para poner en práctica los resultados contenidos en los ejercicios anteriores, puede ser bueno el ejercicio siguiente.

Ejercicio 8. Deduce, razonadamente, cuáles de los espacios normados que siguen son espacios prehilbertianos.

a) $\mathbb{R}^3$, $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, $\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

b) $X = C([a,b], \mathbb{R})$, $\|f\|_0 = \max_{t \in [a,b]} |f(t)|$, $\forall f \in X$

c) $X = C([a,b], \mathbb{R})$, $\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(t)|\,dt$, $\forall f \in X$

d) $X = \{ f \in C^1([a,b], \mathbb{R}) : f(a) = 0 \}$, $\|f\| = \left[\int_a^b |f'(t)|^2 \right]^{1/2}$, $\forall f \in X$

DEFINICIÓN IMPORTANTE (espacio de Hilbert)

Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio prehilbertiano, decimos que H es un ESPACIO DE HILBERT, si el espacio normado $(H, \|\cdot\|)$, con $\|\cdot\|$ definida en (4), es completo.

Por ejemplo, $\mathbb{R}^n$, l_2, $L^2(a,b)$ con los productos escalares usuales (definidos más arriba), son espacios de Hilbert.

Ejercicio 9. Sea C_{00} el espacio vectorial de "sucesiones casi nulas", con el producto escalar

$$\langle (a_n),(b_n)\rangle = \sum_{m=1}^{+\infty} a_m b_m \,, \quad \forall (a_n),(b_n)\in C_{00}$$

Demuestra que C_{00} es un espacio prehilbertiano, pero no es un espacio de Hilbert.

(*) Ejercicio 10. Demuestra que $X = P_{[a,b]}$ (polinomios reales, restringidos al intervalo $[a,b]$) con el producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx \qquad (5)$$

es un espacio prehilbertiano, no hilbertiano.

¡OJO: ejercicio con (*)!

Que (5) es un producto escalar en X, es trivial. Encontremos una sucesión de Cauchy en X, no convergente en X.

Para ello, dos ideas claves:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$, uniformemente en $[a,b]$
2. Si (f_n) es una sucesión de funciones continuas, t.q. $(f_n) \longrightarrow f$ uniformemente en $[a,b]$, entonces

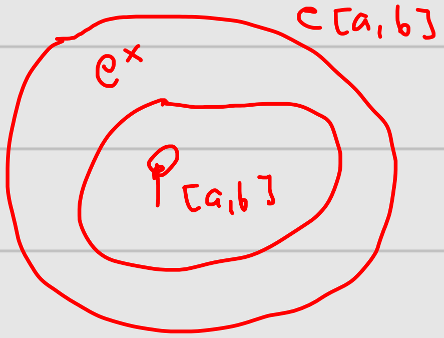
$$\|f_n - f\| = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

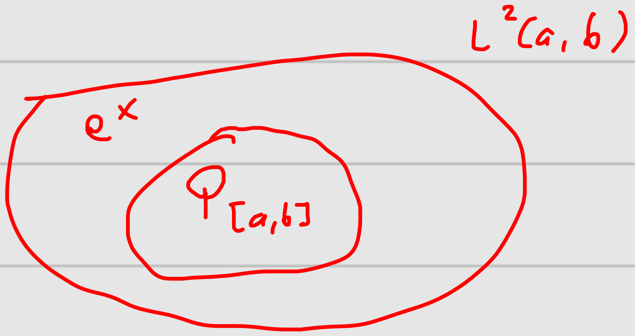
donde, observemos, que $\|f_n - f\|$ es la derivada del producto escalar (5).

¡Sigamos con el ejercicio! La sucesión de polinomios

$$P_m(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}$$

es una sucesión de Cauchy con la norma uniforme $\|\cdot\|_0$ (idea 1). Luego es una sucesión de Cauchy con la norma $\|\cdot\|_2$, derivada del producto escalar (5). Como $(P_m) \xrightarrow{m\to+\infty} e^x$ con $\|\cdot\|_0 \Rightarrow (P_m) \xrightarrow{\|\cdot\|_2} e^x$. Luego (P_m) no puede converger en $\mathcal{P}_{[a,b]}$, ya que el límite es único y e^x no es un polinomio.





Como véis, se juega con dos normas para conseguir nuestro objetivo ($\|\cdot\|_0$ y $\|\cdot\|_2$) y con las ideas 1, 2.

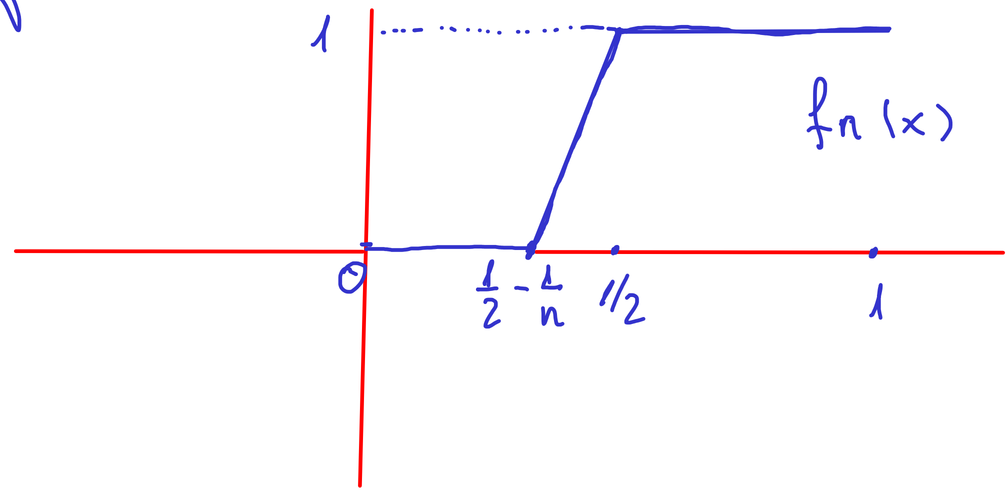
Ejercicio 11. Demuestra que $X = (C[a,b], \mathbb{R})$ con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \qquad (6)$$

es un espacio prehilbertiano, no hilbertiano.

Sugerencia: $L^2(a,b)$ es completo con la norma derivada de (6) (Teorema de Riesz–Fischer)

Demuestra que la sucesión



es de Cauchy en $\bar{X}$ con la norma derivada de (6), no convergente en $\bar{X}$.