WUOLAH

MelSchlichting
www.wuolah.com/student/MelSchlichting

21527

relacion1.pdf

(Corregido bis) Relación 1 resuelta

3º Inferencia Estadística

Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Descarga la APP de Wuolah.
Ya disponible para el móvil y la tablet.

Available on the App Store
GET IT ON Google Play

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Relación de ejercicios 1: Introducción a la Inferencia Estadística. Estadísticos muestrales. [1]

Ejercicio 1.

Sea $(X_1, \ldots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X. Dar el espacio muestral y calcular la función masa de probabilidad de $(X_1, \ldots, X_n)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $X \rightsquigarrow \{B(k_0, p); p \in (0,1)\}$ Binomial.
b) $X \rightsquigarrow \{P(\lambda); \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ Poisson.
c) $X \rightsquigarrow \{BN(k, p); p \in (0,1)\}$ Binomial Negativa.
d) $X \rightsquigarrow \{G(p); p \in (0,1)\}$ Geométrica.
e) $X \rightsquigarrow \{P_N; N \in \mathbb{N}\}, P_N(X = x) = \frac{1}{N}, x = 1, \ldots, N$.

SOLUCIÓN

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple de la variable X.

a) $X \rightsquigarrow B(k_0, p) \Rightarrow P_p[X = x] = \binom{k_0}{x} p^x (1-p)^{k_0 - x}, x = 0, \ldots, k_0 \leftarrow$ F. masa de probabilidad.

Por tanto, $\chi = \{0, \ldots, k_0\} \Rightarrow \chi^n = \{0, \ldots, k_0\}^n$.

$$P_p[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P_p[X_1 = x_1] \cdot \cdots \cdot P_p[X_n = x_n] = P_p[X = x_1] \cdots P_p[X = x_n]$$
$$= \binom{k_0}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{k_0 - x_1} \cdots \binom{k_0}{x_n} p^{x_n} (1-p)^{k_0 - n} = \prod_{i=1}^{n} \binom{k_0}{x_i} p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{nk_0 - \sum_{i=1}^n x_i}$$

para valores $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, \ldots, k_0\}^n$

donde hemos usado que $X_1, \ldots, X_n$ son independientes (luego la función masa de probabilidad conjunta es el producto de las funciones masa de probabilidad marginales) e idénticamente distribuidas a X.

b) $X \rightsquigarrow P(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow P_\lambda[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \leftarrow$ F.m.p.

Por tanto, $\chi = \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \chi^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

$$P_\lambda[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = P_\lambda[X_1 = x_1] \cdot \cdots \cdot P_\lambda[X_n = x_n] = P_\lambda[X = x_1] \cdots P_\lambda[X = x_n]$$
$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdots e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} = (e^{-\lambda} \cdots e^{-\lambda}) \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} \cdots \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} = e^{-n\lambda} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n x_i!}, (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$$

c) $X \rightsquigarrow BN(k_0, p), p \in (0,1) \Rightarrow P_p[X = x] = \binom{x + k_0 - 1}{x} (1-p)^x p^{k_0}, x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \leftarrow$ F.m.p.

Así, $\chi = \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \chi^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$.

[1] Si encuentras algún error en el documento, escribe un correo electrónico a *melferizq@gmail.com*.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

$$
\begin{aligned}
P_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] &= P_p[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot P_p[X_n = x_n] = P_p[X = x_1] \cdots P_p[X = x_n] \\
&= \binom{x_1 + k_0 - 1}{x_1} (1-p)^{x_1} p^{k_0} \cdots \binom{x_n + k_0 - 1}{x_n} (1-p)^{x_n} p^{k_0} \\
&= p^{nk_0} (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{x_i + k_0 - 1}{x_i}, (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n.
\end{aligned}
$$

d) $X \rightsquigarrow G(p) \Rightarrow P_p[X = x] = (1-p)^x p, x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \leftarrow$ F.m.p.
Por tanto, $\chi = \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \chi^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})$.

$$
\begin{aligned}
&P_p[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = P_p[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot P_p[X_n = x_n] = P_p[X = x_1] \cdots P_p[X = x_n] \\
&= (1-p)^{x_1} p \cdots (1-p)^{x_n} p = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i}, (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\}).
\end{aligned}
$$

e) $X \rightsquigarrow \{P_N : N \in \mathbb{N}\}, P_N(X = x) = \dfrac{1}{N}, x = 1, \dots, N \leftarrow$ F.m.p.
El conjunto de valores de X para N fijo es $\chi_N = \{1, \dots, N\}$. Así, el conjunto de valores de X es $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \chi_N = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{1, \dots, N\} = \mathbb{N} \Rightarrow \chi^n = \mathbb{N}^n$.

$$
\begin{aligned}
&P_N[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = P_N[X_1 = x_1] \cdot \dots \cdot P_N[X_n = x_n] = P_N[X = x_1] \cdots P_N[X = x_n] \\
&= \frac{1}{N} I_{[1,N]}(x_1) \cdots \frac{1}{N} I_{[1,N]}(x_n) = \frac{1}{N^n} I_{[1,N]}(x_1) \cdots I_{[1,N]}(x_n), (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n
\end{aligned}
$$

Por tanto, la función masa de probabilidad de la muestra aleatoria simple será 0 cuando alguno de los valores x_i considerados no esté dentro del intervalo $[1, N]$ pues la función indicadora evaluada en ese punto será 0, y por tanto estaremos haciendo un producto en el que uno de los factores es 0. Así, no podemos decir que la f.m.p. sea $\frac{1}{N^n}$.
Otra forma de expresar la función masa de probabilidad muestral es la siguiente:

$$
P[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \begin{cases} \dfrac{1}{N^n} & \text{máx}\, x_i \leq N \\ & \\ 0 & \text{máx}\, x_i > N \end{cases}, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n
$$

Ejercicio 2.

Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X. Dar el espacio muestral y calcular la función de densidad de $(X_1, \dots, X_n)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) $X \rightsquigarrow \{U(a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ Uniforme.
b) $X \rightsquigarrow \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2); \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+\}$ Normal.
c) $X \rightsquigarrow \{\Gamma(p, a); p, a \in \mathbb{R}^+\}$ Gamma.
d) $X \rightsquigarrow \{\beta(p, q); p, q \in \mathbb{R}^+\}$ Beta.
e) $X \rightsquigarrow \{P_\theta; \theta \in \mathbb{R}^+\}, f_\theta(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\theta}}, 0 < x < \theta$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.
WUOLAH
Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

SOLUCIÓN

a) $X \rightsquigarrow U(a,b), a,b \in \mathbb{R}, a<b \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}, x \in (a,b) \leftarrow$ Función de densidad.

Por tanto, $\chi_{a,b} = (a,b) \Rightarrow \chi = \bigcup_{(a,b)\in\Theta} \chi_{a,b} = \mathbb{R} \Rightarrow \chi^n = \mathbb{R}^n$.

$$f^n_{a,b}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^n} & (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \text{mín}\, x_i > a, \ \text{máx}\, x_i < m \\ 0 & (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \ / \ \text{mín}\, x_i \leq a, \ \text{máx}\, x_i \geq m \end{cases}$$

b) $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2), \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R} \leftarrow$ F. densidad.

Así, $\chi_{\mu,\sigma^2} = \mathbb{R} = \chi \Rightarrow \chi^n = \mathbb{R}^n$.

$$f_{\mu,\sigma^2}(x_1,\dots,x_n) = f_X(x_1)\cdots f_X(x_n) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{n})^n} \exp\left(\frac{-1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2}\right), (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$$

c) $X \rightsquigarrow \Gamma(p,a), p,a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{a^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-ax}, \ x \in \mathbb{R}^+ \leftarrow$ Función de densidad.

Así, $\chi_{p,a} = \mathbb{R}^+ = \chi \Rightarrow \chi^n = (\mathbb{R}^+)^n$.

$$f_{p,a}(x_1,\dots,x_n) = f_X(x_1)\cdots f_X(x_n) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} x_1^{p-1} e^{-ax_1} \cdots \frac{a^p}{\Gamma(p)} x_n^{p-1} e^{-ax_n}$$

$$= \frac{a^{p+n}}{(\Gamma(p))^n} \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{p-1} \exp\left(-a\sum_{i=1}^n x_i\right), (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$$

d) $X \rightsquigarrow \beta(p,q), p,q \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f_X(x) = \dfrac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \ x \in (0,1) \leftarrow$ Función de densidad.

Por tanto, $\chi_{p,q} = (0,1) = \chi \Rightarrow \chi^n = (0,1)^n$.

$$f_{p,q}(x_1,\dots,x_n) = f_X(x_1)\cdots f_X(x_n) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x_1^{p-1}(1-x_1)^{q-1} \cdots \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} x_n^{p-1}(1-x_n)^{q-1}$$

$$= \left(\frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{p-1} \left(\prod_{i=1}^n (1-x_i)\right)^{q-1}, (x_1,\dots,x_n) \in (0,1)^n$$

e) $X \rightsquigarrow P_\theta, \theta \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f_\theta(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x\theta}}, \ 0 < x < \theta \leftarrow$ Función de densidad.

Por tanto, $\chi_\theta = (0,\theta) \Rightarrow \chi = \bigcup_{\theta\in\mathbb{R}^+} (0,\theta) = \mathbb{R}^+ \Rightarrow \chi^n = (\mathbb{R}^+)^n$.

$$f_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n\sqrt{\theta^n}} \displaystyle\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} & \text{máx}\, x_i < \theta \\ 0 & \text{máx}\, x_i \geq \theta \end{cases}, (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Ejercicio 3.

Se miden los tiempos de sedimentación de una muestra de partículas flotando en un líquido. Los tiempos observados son: 11.5, 1.8, 7.3, 12.1, 1.8, 21.3, 7.3, 15.2, 7.3, 12.1, 15.2, 7.3, 12.1, 1.8, 10.5, 15.2, 21.3, 10.5, 15.2, 11.5.

a) Construir la función de distribución muestral asociada a dichas observaciones.
b) Hallar los valores de los tres primeros momentos muestrales respecto al origen y respecto a la media.
c) Determinar los valores de los cuartiles muestrales.

SOLUCIÓN

Sea la variable X = tiempo de sedimentación.

a) Tengamos en cuenta que en este caso no conocemos el espacio muestral de X pues no sabemos qué valores posibles toma X ya que solo estamos trabajando con una observación particular suya.

Consideramos la observación $(x_1, \cdots, x_7) = (1'8, 7'3, 10'5, 11'5, 12'1, 15'2, 21'3)$.

$$F^*_{X_1,\ldots,X_{20}}(x) = \begin{cases} 0 & x < 1{,}8 \\ 3/20 & 1{,}8 \leq x < 7{,}3 \\ 7/20 & 7{,}3 \leq x < 10{,}5 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x \geq 21{,}3 \end{cases}$$

b) $A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \equiv$ momento no centrado, $B_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^k \equiv$ momento centrado.

$$A_1 = \bar{X} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i = \cdots = \frac{218{,}3}{20} = 10{,}915$$

$$A_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i^2 = \cdots = \frac{2976{,}65}{20} = 148{,}9325$$

$$A_3 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} X_i^3 = \cdots = \frac{45619{,}673}{20} = 2280{,}98635$$

$$B_1 = 0 \text{ por ser } \sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X}) = 0$$

$$B_2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X})^2 = \cdots = \frac{2978{,}65}{20} - 10{,}915^2 = 29{,}79528$$

$$B_3 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(X_i - \bar{X})^3 = \cdots = 4{,}954559$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

c) Para los cuartiles consideramos C_p, con $p = 1/4, p = 1/2, p = 3/4$.

$$p = \frac{1}{4} \Rightarrow np = \frac{20}{4} = 5 \in \mathbb{N} \Rightarrow C_{1/4} = \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{7{,}3 + 7{,}3}{2} = 7{,}3$$

$$p = \frac{1}{2} \Rightarrow np = \frac{20}{2} = 10 \in \mathbb{N} \Rightarrow C_{1/2} = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{11{,}5 + 11{,}5}{2} = 11{,}5$$

$$p = \frac{3}{4} \Rightarrow np = \frac{20 \cdot 3}{4} = 15 \in \mathbb{N} \Rightarrow C_{3/4} = \frac{x_{15} + x_{16}}{2} = \frac{15{,}2 + 15{,}2}{2} = 15{,}2$$

Ejercicio 4.

Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 40 de una distribución exponencial de media 3. ¿Cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y teórica en $x = 1$ difieran menos de 0.01? Aproximadamente, ¿cuál debe ser el tamaño muestral para que dicha probabilidad sea como mínimo 0.98?

SOLUCIÓN

$X \rightsquigarrow \exp(\lambda), \mathrm{E}[X] = 3, (X_1, \ldots, X_{40})$ m.a.s. $\Rightarrow n = 40$.

a) Sabemos que $\mathrm{E}[X] = \dfrac{1}{\lambda} = 3 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} \Rightarrow X \rightsquigarrow \exp(1/3)$.

Tengamos en cuenta que $F_X(1) = \displaystyle\int_0^1 \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-1/3} = 0{,}2834$.

$$P(|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0{,}01) = P(-0{,}01 < F_n^*(1) - 0{,}2834 < 0{,}01) = P(0{,}2734 < F_n^*(1) < 0{,}2934)$$
$$= P(10{,}936 < 40F_n^*(1) < 11{,}736) = P(40F_n^*(1) = 11) = \binom{40}{11} 0{,}2834^{11} 0{,}7166^{29} = 0{,}139$$

donde hemos usado que $40F_n^*(1) \rightsquigarrow B(40, F_X(1))$ y que esta distribución es discreta.

b) Estamos buscando un n tal que $P(|F_n^*(1) - F_X(1)| < 0{,}01) \geq 0{,}98$.

- $nF_n^*(1) \rightsquigarrow B(n, F_X(1)) \approx \mathcal{N}(nF_X(1), nF_X(1)(1 - F_X(1)))$.
- $\dfrac{nF_n^*(1) - nF_X(1)}{\sqrt{nF_X(1)(1 - F_X(1))}} = \dfrac{(F_n^*(1) - 0{,}28347)\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}20311}} \approx Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

$$P(|F_n^*(1) - 0{,}28347| < 0{,}01) \approx P\left(|Z| < \frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}20311}}\right) = P(|Z| < 0{,}02219\sqrt{n})$$
$$= 2P(Z < 0{,}02219\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}98$$

donde hemos utilizado que

$$P(|Z| < z) = P(-z < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < -z) = P(Z < z) - P(Z > z)$$
$$= P(Z < z) - (1 - P(Z < z)) = 2P(Z < z) - 1$$

Por tanto:

$$P(Z < 0{,}02219\sqrt{n}) \geq 0{,}99 \Rightarrow 0{,}02219\sqrt{n} \geq 2{,}33 \Rightarrow n \geq 11027$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Ejercicio 5.

Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 50 de una distribución de Poisson de media 2. ¿Cuál es la probabilidad de que los valores de la función de distribución muestral y la teórica, en $x = 2$, difieran menos de 0.02? Aproximadamente, ¿qué tamaño muestral hay que tomar para que dicha probabilidad sea como mínimo 0.99?

SOLUCIÓN

$X \rightsquigarrow P(\lambda), (X_1, \dots, X_n)$ m.a.s. $\Rightarrow n = 50, \mathrm{E}[X] = 2 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow X \rightsquigarrow P(2)$.

Por tanto, $F_X(2) = \sum_{k=0}^{2} e^{-2}\frac{2^k}{k!} = 5 \cdot e^{-2} = 0{,}6767$.

a)

$$\begin{aligned} &P(|F_n^*(2) - F_X(2)| < 0{,}02) = P(-0{,}02 < F_n^*(2) - F_X(2) < 0{,}02) = P(0{,}6567 < F_n^*(2) < 0{,}6967) \\ &= P(32{,}835 < F_n^*(2)\cdot 50 < 34{,}835) = P(F_n^*(2)\cdot 50 = 33) + P(F_n^*(2)\cdot 50 = 34) \\ &= \binom{50}{33} 0{,}6767^{33} 0{,}3233^{17} + \binom{50}{34} 0{,}6767^{34} 0{,}3233^{16} = \cdots = 0{,}2347 \end{aligned}$$

b) Buscamos un n tal que $P(|F_n^*(2) - F_X(2)| < 0{,}02) = P(|(F_n^*(2) - 0{,}67667)| < 0{,}02) \geq 0{,}99$.

- $nF_n^*(2) \rightsquigarrow B(n, F_X(2)) \approx \mathcal{N}(nF_X(2), nF_X(2)(1 - F_X(2)))$.
- $\dfrac{nF_n^*(2) - nF_X(2)}{\sqrt{nF_X(2)(1 - F_X(2))}} = \dfrac{(F_n^*(2) - 0{,}67667)\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}21879}} \approx Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

$$\begin{aligned} P(|F_n^*(2) - 0{,}67667| < 0{,}02) &\approx P\left(|Z| < \frac{0{,}02\sqrt{n}}{\sqrt{0{,}21879}}\right) = P(|Z| < 0{,}04276\sqrt{n}) \\ &= 2P(Z < 0{,}04276\sqrt{n}) - 1 \geq 0{,}99 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que

$$\begin{aligned} P(|Z| < z) &= P(-z < Z < z) = P(Z < z) - P(Z < -z) = P(Z < z) - P(Z > z) \\ &= P(Z < z) - (1 - P(Z < z)) = 2P(Z < z) - 1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$P(Z < 0{,}04276\sqrt{n}) \geq 0{,}995 \Rightarrow 0{,}04276\sqrt{n} \geq 2{,}575 \Rightarrow n \geq 3627$$

Por tanto, el tamaño muestral mínimo debe ser $n = 3627$.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Ejercicio 6.

Sea $X \rightsquigarrow B(1,p)$ y (X_1, X_2, X_3) una muestra aleatoria simple de X. Calcular la función masa de probabilidad de los estadísticos $\bar{X}, S^2, \text{mín}\, X_i, \text{máx}\, X_i$.

SOLUCIÓN

$X \rightsquigarrow B(1,p)$ Bernoulli, (X_1, X_2, X_3) m.a.s. de X.

Por ser (X_1, X_2, X_3) muestra aleatoria simple de X sabemos que $X_i,\ i = 1,2,3$ siguen una distribución $B(1,p)$. Por la reproductividad de la Bernoulli, se tiene que $\sum X_i \rightsquigarrow B(3,p)$. Así,

$$\bar{X} \rightsquigarrow \frac{1}{3} B(3,p)$$

Por tanto, $\bar{X}$ toma todos los posibles valores que toma $\sum_{i=1}^{3} X_i$ multiplicados por $1/3$. O sea,

$$P[\bar{X} = j/3] = P\left[\sum X_i = j\right] = \binom{3}{j} p^j (1-p)^{3-j} = \begin{cases} (1-p)^3 & j = 0 \\ 3p(1-p)^2 & j = 1 \\ 3p^2(1-p) & j = 2 \\ p^3 & j = 3 \end{cases}$$

Para calcular las funciones masa de probabilidad de $\text{máx}\, X_i$ y $\text{mín}\, X_i$ necesitamos saber la función de distribución de X.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-p & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1. \end{cases}$$

- $M = \text{máx}\, X_i$.

$$F_M(x) = (F_M(x))^3 = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ (1-p)^3 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(M = 0) = (1-p)^3 \\ P(M = 1) = 1 - (1-p)^3 \end{cases}$$

- $N = \text{mín}\, X_i$.

$$F_N(x) = 1 - (1 - F_X(x))^3 = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p^3 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(N = 0) = 1 - p^3 \\ P(N = 1) = p^3 \end{cases}$$

Para el cálculo de la masa de probabilidad de $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} (X_i - \bar{X})^2$ no hay un método general, así que utilizamos la siguiente tabla.

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

(X_1, X_2, X_3)	Probabilidad	$\bar{X}$	S^2
$(0,0,0)$	$(1-p)^3$	0	0
$(0,0,1)$	$p(1-p)^2$	1/3	1/3
$(0,1,0)$	$p(1-p)^2$	1/3	1/3
$(1,0,0)$	$p(1-p)^2$	1/3	1/3
$(1,1,0)$	$p^2(1-p)$	2/3	1/3
$(1,0,1)$	$p^2(1-p)$	2/3	1/3
$(0,1,1)$	$p^2(1-p)$	2/3	1/3
$(1,1,1)$	p^3	1	0

$$S^2 = 0,\ 1/3 \Rightarrow P[S^2 = 0] = p^3 + (1-p)^3,\ P[S^2 = 1/3] = 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p)$$

Ejercicio 7.

Obtener la función masa de probabilidad o función de densidad de $\bar{X}$ en el muestreo de una variable de Bernoulli, de una Poisson y de una exponencial.

SOLUCIÓN

$$(X_1, \ldots, X_n) \text{ m.a.s. de } X \to \bar{X} = \frac{T}{n}, \quad T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) $X \rightsquigarrow P(\lambda) \Rightarrow T \rightsquigarrow P(n\lambda) \Rightarrow \bar{X} = j/n,\ j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$P(\bar{X} = j/n) = P[T = j] = e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^j}{j!}$$

b) $X \rightsquigarrow B(1,p) \Rightarrow T \rightsquigarrow B(n,p) \Rightarrow \bar{X} = j/n,\ j = 0, 1 \ldots, n$.

$$P[\bar{X} = j/n] = P[T = j] = \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j},\ j = 0, 1, \ldots, n.$$

c) $X \rightsquigarrow \exp(\lambda) \equiv \Gamma(1, \lambda) \Rightarrow T = \sum_{i=1}^{n} X_i \rightsquigarrow \Gamma(n, \lambda)$.

$$f_\lambda(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t},\ t > 0.$$

- $\bar{x} = \dfrac{t}{n} \to t = n\bar{x} \to \dfrac{dt}{d\bar{x}} = n.$

$$g_\lambda(\bar{x}) = f_\lambda(n\bar{x}) \left| \frac{dt}{d\bar{x}} \right| = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} (n\bar{x})^{n-1} e^{-\lambda n \bar{x}} n = \frac{(n\lambda)^n}{\Gamma(n)} \bar{x}^{n-1} e^{-n\lambda},\ \bar{x} > 0 \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow \Gamma(n, n\lambda)$$

- Por F.G.M: $M_{\bar{X}}(t) = \dfrac{1}{1 - t/\lambda},\ t < \lambda.$

$$M_{\bar{X}}(t) = (M_X(t/n))^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{t}{n\lambda}\right)^n},\ t < n\lambda \rightsquigarrow \Gamma(n, n\lambda)$$

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

Ejercicio 8 (Importante para un tipo test).

Calcular las funciones de densidad de los estadísticos máx X_i y mín X_i en el muestreo de una variable X con función de densidad

$$f_\theta(x) = e^{\theta - x}$$

SOLUCIÓN

Sea $X \rightsquigarrow f_\theta = e^{\theta-x}, x > \theta \Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \theta \\ 1 - e^{\theta - x} & \text{si } x > \theta \end{cases} \leftarrow$ F. de distribución.

- Función de distribución del máximo:

$$F_{X(n)}(t) = (F_X(t))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \theta \\ (1 - e^{\theta - t})^n & \text{si } t > \theta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f_{X_{(n)}}(t) = n(1 - e^{\theta - t})^{n-1} e^{\theta - t},\ t > \theta$$

- Función de distribución del mínimo:

$$F_{X(1)}(x) = 1 - (1 - F_X(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \theta \\ 1 - e^{n(\theta - t)} & \text{si } t > \theta \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$f_{X_{(1)}}(t) = ne^{n(\theta - t)},\ t > \theta$$

Ejercicio 9.

El número de pacientes que visitan diariamente una determinada consulta médica es una variable aleatoria con varianza 16 personas. Se supone que el número de visitas de cada día es independiente de cualquier otro. Si se observa el número de visitas diarias durante 64 días, calcular aproximadamente la probabilidad de que la media muestral no difiera en más de una persona del valor medio verdadero de visitas diarias.

SOLUCIÓN

Sea la variable aleatoria X = número de pacientes que visitan diariamente la consulta.
Se tiene que $\sigma^2 = 16 \Rightarrow \sigma = 4, \mathrm{E}[X] = \mu, n = 64 \Rightarrow (X_1, \dots, X_{64})$ m.a.s. de X.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{64} X_i}{64} \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{1}{4}\right)$$

$$P[|\bar{X} - \mu| \leq 1] = P[-1 \leq \bar{X} - \mu \leq 1] = P\left[\frac{-1}{1/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \frac{1}{1/2}\right] \cong P[-2 \leq Z \leq 2]$$
$$= P[|Z| \leq 2] = 2P[Z \leq 2] - 1 = 2 \cdot 0{,}977 - 1 = 0{,}9545$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita

Ejercicio 10.

Una máquina de refrescos está arreglada para que la cantidad de bebida que sirve sea una variable aleatoria con media 200 ml y desviación típica 15 ml. Calcular de forma aproximada la probabilidad de que la cantidad media servida en una muestra aleatoria de tamaño 36 sea al menos 204 ml.

$\boxed{\text{SOLUCIÓN}}$

Sea la variable aleatoria X = cantidad de bebida.

Se tiene que $\mathrm{E}[X] = 200$ ml, $\sigma = 15$ ml. Nos preguntan $P[\bar{X} \geq 204]$, siendo $(X_1, \ldots, X_{36})$ una muestra aleatoria simple de X. Aplicando el Teorema Central del Límite como en el ejercicio anterior, se tiene

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mathrm{E}[X]}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{204 - 200}{15/\sqrt{36}}\right) \approx P\left(Z \geq \frac{4}{15/6}\right) = P(Z \geq 1{,}6) = 1 - P(Z < 1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548.$$

Reservados todos los derechos. No se permite la explotación económica ni la transformación de esta obra. Queda permitida la impresión en su totalidad.

WUOLAH

Descarga la app de Wuolah desde tu store favorita