Problemas del Tema 1

1.- Considera dos aplicaciones diferenciables $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t))$, donde I es un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Denota $u'(t) = (u_1'(t), u_2'(t), u_3'(t))$, $v'(t) = (v_1'(t), v_2'(t), v_3'(t))$, $\langle \; , \; \rangle$ el producto escalar usual y $\times$ el producto vectorial respecto a la orientación usual. Prueba

(a) $$\frac{d}{dt}\langle u(t), v(t)\rangle = \langle u'(t), v(t)\rangle + \langle u(t), v'(t)\rangle,$$

(b) Como aplicación, si para $w \in \mathbb{R}^3$ fijo, se tiene $u'(t) \perp w$, para todo $t \in I$, y $u(t_0) \perp w$, donde $t_0 \in I$, entonces $u(t) \perp w$, para todo $t \in I$.

(c) $$\frac{d}{dt}(u(t) \times v(t)) = u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t),$$

(d) Como aplicación, si $u'(t) = a\,u(t) + b\,v(t)$ y $u'(t) = c\,u(t) - a\,v(t)$, para $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces $u(t) \times v(t)$ no depende de t; es decir, es un vector constante de $\mathbb{R}^3$.

2.- Obtén una parametrización de cada una de las siguientes cónicas de $\mathbb{R}^2$:

(a) La circunferencia de centro el punto $(3, 2)$ y radio 9.

(b) La elipse de ecuación $4x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ (respecto del sistema referencia ortonormal usual).

(c) La rama de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 5$ que contiene al punto $(3, 2)$.

(d) La parábola de ecuación $2x^2 - y + 4 = 0$.

3.- Considera un punto $c \in \mathbb{R}^2$ y un número real $r(> 0)$.

(a) Prueba que la circunferencia de centro c y radio r admite una parametrización de la forma $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, con $\alpha(t) = c + r\cos\left(\frac{t}{r}\right) v_1 + r\,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{r}\right) v_2$, donde (v_1, v_2) es una base ortonormal positivamente orientada.

(b) Calcula las ecuaciones de Frenet de α y la curvatura de α en cada t.

(c) Calcula las rectas tangente y normal a α en $t = 0$.

4.- (Espiral logarítmica) Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (\mathrm{e}^t \cos t, \mathrm{e}^t \,\mathrm{sen}\, t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Calcula la función longitud de arco desde $t_0 = 0$.

(c) Reparametrízala por la longitud del arco.

(d) Calcula, según la orientación usual de $\mathbb{R}^2$, el ángulo orientado $\sphericalangle(\alpha(t), \alpha'(t))$.

(e) Calcula su función curvatura. Estudia su comportamiento cuando $t \to -\infty$ y cuando $t \to \infty$. Interprétalos geométricamente.

5.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular. Si ocurre que $k(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, se define su evoluta como la curva $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\beta(t) = \alpha(t) + \dfrac{1}{k(t)}\, e_2(t)$, para todo $t \in I$ (se llama a $\dfrac{1}{|k(t)|}$ el radio de curvatura de α en t).

(a) Prueba que $\beta'(t) = -\dfrac{k'(t)}{k(t)^2}\, e_2(t)$ y da una condición necesaria y suficiente para que la evoluta de α sea regular.

(b) Cuando $k'(t_0) \neq 0$, prueba que la recta tangente a β en t_0 es la recta normal a α en t_0.

(c) Considera la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, (catenaria). Prueba que es regular, que su curvatura es $k(t) = \dfrac{1}{\cosh^2 t}$ y calcula su evoluta.

6.- Sean $\alpha, \gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dos curvas parametrizadas por la longitud de arco cuyas funciones curvatura cumplen $k_\alpha(t) = -k_\gamma(t)$, para todo $t \in I$. Prueba que existe un único movimiento rígido inverso F de $\mathbb{R}^2$ de manera que $\gamma = F \circ \alpha$ ¿Quien es F si $\alpha(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, $\gamma(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$?

7.- Considera una curva regular $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$ o $\epsilon = \infty$. Define $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ por $\beta(t) = \alpha(-t)$, para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

(a) Comprueba explícitamente que β también es regular.

(b) ¿Qué relación hay entre las funciones curvaturas de ambas curvas?

(c) Particulariza lo anterior al caso de la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (a\cos t, b \operatorname{sen} t)$, con $a, b > 0$ (elípse).

8.- Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, t^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Prueba que $k(t) = \dfrac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$ y que, en particular, $k(t) = k(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Observa que $\operatorname{Im}(\alpha)$ es simétrica respecto de la recta normal a α en el punto que se obtiene para $t = 0$.

(d) Motivado por lo anterior, si $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$ o $\epsilon = \infty$, es una curva regular cuya curvatura cumple $k(t) = k(-t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ ¿Podemos afirmar que $\operatorname{Im}(\alpha)$ es simétrica respecto de la recta normal a α en $t = 0$?

9.- Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(t) = (t, t^3)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Prueba que $k(t) = \dfrac{6t}{(1+9t^4)^{3/2}}$ y que, en particular, $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Observa que $\mathrm{Im}(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$ (es decir, que el giro de centro $\alpha(0)$ y ángulo π deja a $\mathrm{Im}(\alpha)$ invariante).

(d) Motivado por lo anterior, si $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$ o $\epsilon = \infty$, es una curva regular cuya curvatura cumple $k(t) = -k(-t)$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, ¿podemos afirmar que $\mathrm{Im}(\alpha)$ es simétrica respecto del punto $\alpha(0)$?

10.- Una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad de que todas sus rectas tangentes pasan por un punto fijo. Prueba que su traza es un segmento de recta.

11.- Una curva regular $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene la propiedad de que todas las rectas normales pasan por un punto fijo. Prueba que su traza es un arco de circunferencia.

12.- Prueba que la traza de una curva (parametrizada por la longitud de arco) es un segmento de recta o un arco de circunferencia si y sólo si todas las rectas tangentes equidistan de un punto fijo del plano.

13.- (Ventana de Viviani) Considera la intersección de la semiesfera dada por $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ y el cilindro circular recto dado por $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (nota que el radio de la esfera es 2 y el radio de la circunferencia que genera al cilindro 1, su mitad, y que el cilindro pasa por $(0,0,0)$, el centro de la esfera). Prueba que la traza la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (2\cos^2 t, 2(\cos t)(\operatorname{sen} t), 2 \operatorname{sen} t)$ es dicha intersección ¿Es α regular? ¿es α cerrada?

14.- Encuentra una parametrización de cada una de las siguientes dos intersecciones de cuádricas:

(a) El cilindro circular recto dado por $x^2 + y^2 = 4$ y el cilindro parabólico dado por $z = x^2$.

(b) El cilindro parabólico dado por $x = y^2 + 1$ y el cilindro parabólico dado por $x = z^2$

15.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular de manera que $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ sea linealmente independiente para todo $t \in I$. Prueba que sus funciones curvatura y torsión (según nuestro convenio de signo) pueden ser calculadas como sigue:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}, \qquad \tau(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

16.- Considera $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, un punto p y un vector v del espacio euclídeo de manera que $|p| = |v| = r$, $\langle p, v \rangle = 0$ y sea $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = \left(\cos \dfrac{t}{r}\right) p + \left(\operatorname{sen} \dfrac{t}{r}\right) v$

(a) Comprueba que está parametrizada por la longitud de arco y que $\gamma''(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

(b) Prueba que su torsión es cero y encuentra el plano de contiene su traza.

(c) Prueba que su curvatura es $\dfrac{1}{r}$.

(d) Encuentra un movimiento rígido F de $\mathbb{R}^3$ de manera que $F \circ \gamma = \beta$, donde $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ está dada por $\beta(t) = \big(r \cos\left(\frac{t}{r}\right), r \,\mathrm{sen}\left(\frac{t}{r}\right), 0 \big)$.

17.- (Hélice circular) Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (a \cos t, a \,\mathrm{sen}\, t, bt)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Interpreta geométricamente el significado de las constantes a y b.

(c) Calcula la función longitud de arco desde $t_0 = 0$.

(d) Construye el triedro de Frenet.

(e) Calcula sus funciones curvatura y torsión, k y τ. Estudia los comportamientos de k cuando se tiene b fijo pero $a \to \infty$ y de τ cuando a es fijo pero $b \to \infty$. Interprétalos geométricamente.

18.- Sea la curva $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$.

(a) Comprueba que es regular.

(b) Calcula la función longitud de α desde $t_0 = 0$ hasta $t = 1$.

(c) Construye el triedro de Frenet.

(d) Calcula los planos osculador, normal y rectificante a α en $t = 0$

(e) Calcula sus funciones curvatura y torsión.

19.- Para cada función diferenciable $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se considera la curva $\alpha_f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\alpha_f(t) = (\cos t, \mathrm{sen}\, t, f(t))$.

(a) Comprueba que α_f es regular.

(b) Prueba que para cada $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 < t_2$ se cumple $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |\alpha'(t)|\, dt \geq t_2 - t_1$.

(c) Construye el triedro de Frenet.

(d) Calcula sus funciones curvatura y torsión.

(e) Determina las funciones f para las cuales α_f es una curva plana.

20.- Prueba que los enunciados de los problemas números 10 y 11 de la primera parte pueden extenderse para el caso de curvas en el espacio euclídeo ¿Y el del problema 12? es decir, ¿es un segmento de recta o un arco de circunferencia la traza de una curva si y sólo si todas las rectas tangentes equidistan de un punto fijo del espacio?

21.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco y tal que $\alpha''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Supongamos además que $\tau(t) \neq 0$, $k'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$. Prueba que $\mathrm{Im}(\alpha)$ está contenida en una esfera si y sólo si $R^2 + (R')^2T^2$ es constante, siendo $R(t) = \dfrac{1}{k(t)}$, R' la función derivada de R y $T(t) = \dfrac{1}{\tau(t)}$.

22.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva regular de manera que $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ sea linealmente independiente para todo $t \in I$. Considera la nueva curva $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dada por $\beta(t) = r\,\alpha(t)$, con $r > 0$ real fijo. Relaciona los triedros de Frenet, curvatura y torsión de ambas curvas. Pon algún ejemplo como aplicación de lo obtenido.

23.- Sea $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por la longitud de arco y tal que $\alpha''(t) \neq 0$, para todo $t \in I$, y con $k > 0$, $\tau > 0$. Se considera la curva $\beta(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} e_3(s)\,ds$, donde $e_3(t)$ es el vector binormal a α en t.

(a) Comprueba que β está parametrizada por la longitud de arco.

(b) Construye el triedro de Frenet de β.

(e) Calcula las funciones curvatura y torsión, k_β y τ_β.