Tema 3 Superficies topológicas

3.1.- Variedades topológicas: Ejemplos

Definición

Un espacio topológico X se dirá *una variedad topológica de dimensión* $n \in N$ si:

- X es conexo, Hausdorff y II-Axioma de numerabilidad.
- Para todo $x \in X$ existe un abierto $U \subset X$ conteniendo a x homeomorfo a un abierto $O \subset R^n$ o a un abierto de $R^n_+ = \{(x_1, \dots, x_n): x_n \geq 0\}$.

Si X es una variedad topológica n-dimensional, a los pares (U, Φ) formados por un abierto $U \subset X$ y un homeomorfismo $\Phi: U \to O$ sobre un abierto euclidiano $O \subset R^n$ ó R^n_+ se les llamará *cartas o parametrizaciones* en X.

Teorema (Invarianza de la dimensión)

Sean $U \subset R^n$ y $V \subset R^m$ dos abiertos euclidianos no vacíos. Si U es homeomorfo a V entonces $n = m$. El mismo enunciado es válido para abiertos $U \subset R^n_+$ y $V \subset R^m_+$.

Teorema (Invarianza del dominio)

Sean X una variedad topológica n-dimensional y $U \subset X$ un subespacio topológico de X. Si U es homeomorfo a un abierto euclidiano $O \subset R^n$ entonces U es abierto de X.

Como consecuencia, si (U, Φ) es una carta en X y $p \in U$ un punto tal que

$$\Phi: U \to \Phi(U) = O \subset R^n_+ \quad \Phi(p) \in Bd(R^n_+) = \{x_n = 0\}$$

Entonces para toda carta (V, Ψ) en X con $p \in V$ se tiene que

$$\Psi(V) \subset R^n_+ \quad \Psi(p) \in Bd(R^n_+)$$

Corolario

Sea X una variedad topológica n-dimensional y $p \in X$. Admitamos que existe una carta (U, Φ) en X de forma que

$$\Phi: U \to \Phi(U) = O \subset R^n_+ \quad \Phi(p) \in Bd(R^n_+)$$

Entonces para cualquier carta (V, Ψ) en X se tiene que $\Psi(V) = O \subset R^n_+$ y $\Psi(p) \in Bd(R^n_+)$. En este caso p se dirá *un punto borde* de X.

Definición

Si X es una variedad topológicamente n-dimensional, denotaremos por $Bd(X) \subset X$ al *subconjunto cerrado formado por los puntos borde* de X. Y a $Int(X) = X \setminus Bd(X)$ el *conjunto de los puntos interiores* de X.

Proposición

Sea $f: X \to Y$ un homeomorfismo local sobreyectivo. Entonces X es una variedad topológicamente n-dimensional $\Leftrightarrow Y$ es una variedad topológicamente n-dimensional.

En particular, la tesis es válida si $f: X \to Y$ es un recubridor.

Teorema

Salvo homeomorfismo, las únicas variedades topológicas 1-dimensionales son $S^1, R, R_+ = [0, +\infty[$ y $[0,1]$.

3.2 Superficies topológicas

Definición

Una *superficie topológica* es variedad topológica 2-dimensional.

Observaciones

Dada una superficie topológica S:

- $Bd(S)$ es cerrado en S y $Int(S)$ es abierto en S.
- Cada componente conexa de $Bd(S)$ es una variedad topológica 1-dimensional sin borde, luego homeomorfa a $S^1 o\ R$.
- Si S es compacta entonces $Bd(S)$ es compacto y consiste en una colección finita de curvas de Jordan en S disjuntas dos a dos.
- Los homeomorfismos respetan al borde de las superficies. En particular, si dos superficies son homeomorfas sus bordes son homeomorfos por restricción del homeomorfismo global.

Proposición

La realización canónica S_ω de un esquema binario $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ es una superficie topológica compacta con $Bd(S_\omega) = \sigma_\omega(\Upsilon)$ donde $\sigma_\omega: \overline{D} \to S_\omega$ es la identificación asociada a la representación canónica de ω y $\Upsilon \subset S^1$ es el cierre topológico de

$$\{p \in S^1: \# \sigma_\omega^{-1}(\sigma_\omega(p)) = 1\}$$

En particular, $Bd(S_\omega) \neq \emptyset \Leftrightarrow \omega$ es un esquema binario mixto.

Corolario

Las superficies compactas en la siguiente lista son dos a dos no homeomorfas:

$$\{S_n: n \in N \cup \{0\}\} \cup \{S_n^*: n \in N\} \cup \{S_{n,k}: (n,k) \in (N \cup \{0\})xN\} \cup \{S_{n,k}^*: (n,k) \in NxN\}$$

3.3 Triangulaciones de superficies

Definición

Un triángulo topológico es un par formado por un disco topológico compacto T y tres puntos distintos $\{v_1, v_2, v_3\}$ destacados en la curva de Jordan $Bd(T)$. Si $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$ es un triángulo topológico:

- Los puntos $v_j, j = 1,2,3$ se llamarán vértices de T.
- Si $\{i, j, h\} = \{1,2,3\}$ y $h = \{1,2,3\}$, el arco de Jordan l_h en $Bd(T)$ uniendo los vértices v_i, v_j y no incidente con v_h será referido como el lado de T determinado por v_i y v_j.

Se denota:

- $F(T) = \{X\}$ al conjunto formado por la única cara de T.
- $E(T) = \{l_1, l_2, l_3\}$ al conjunto formado por los lados de T.
- $V(T) = \{v_1, v_2, v_3\}$ al conjunto formado por los vértices de T.

Definición (Orientación en un triángulo topológico)

Dado un triángulo topológico $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$, una orientación cíclica de sus vértices. Hay dos orientaciones posibles, a saber:

$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_1 \ \ se\ representa\ (v_1, v_2, v_3) \equiv (v_2, v_3, v_1) \equiv (v_3, v_1, v_2)$$

$$v_2 \to v_1 \to v_3 \to v_2 \ \ se\ representa\ (v_2, v_1, v_3) \equiv (v_1, v_3, v_2) \equiv (v_3, v_2, v_1)$$

Un triángulo orientado es el par formado por un triángulo topológico $(T, \{v_1, v_2, v_3\})$ junto con una orientación (v_i, v_j, v_h) del mismo, y se denotará $\left(T, (v_i, v_j, v_h)\right)$.

Definición

Por definición

$$[\alpha_X] = \left\{[\alpha_X]_{X \setminus \{q\}} : q \in Int(X)\right\} \quad y \quad -\ [\alpha_X] = \left\{-[\alpha_X]_{X \setminus \{q\}} : q \in Int(X)\right\}$$

Se dirán los generadores universales de la familia de grupos fundamentales

$$\Pi_1(X^*) = \{\Pi_1(X \setminus \{q\}) : q \in Int(X)\}$$

Definición

Dado un triángulo topológico T, una orientación en T es un generador universal $[\alpha]$ de $\Pi_1(T^*)$.

Definición

Un triángulo geométrico en R^2 es la envolvente convexa de tres puntos afínmente independientes. Si v_1, v_2, v_3 son los vértices de un triángulo geométrico T en R^2, la orientación (v_1, v_2, v_3) se dirá *positiva o contraria al sentido recorrido a las agujas del reloj* si

$$det(v_2 - v_1, v_3 - v_1) > 0$$

En otro caso, se dirá *negativa o a favor de las agujas de reloj*.

Definición

Dada una superficie topológica compacta S, *una triangulación* T de S es una familia de triángulos topológicos satisfaciendo:

(I) T es un subespacio topológico de S para todo $T \in \mathrm{T}$.

(II) Si $T_1, T_2 \in \mathrm{T}$ son triángulos distintos, entonces $T_1 \cap T_2$es el vacío, un vértice común o un lado común.

(III) $\bigcup_{T \in \mathrm{T}} T = S$.

Dos triángulos distintos de una triangulación de S que compartan sólo un vértice se dirán *incidentes* en ese vértice. De igual forma, si comparten un lado se *dirán contiguos o incidentes* en ese lado.

Un par (S, T) formado por una superficie compacta S y una triangulación suya T se le referirá como una *superficie (compacta) triangulada*.

Si (S, T) es una superficie compacta triangulada, llamaremos:

- $F(T) = \bigcup_{T \in \mathrm{T}} F(T)$ al conjunto de todas las caras de T.
- $E(T) = \bigcup_{T \in \mathrm{T}} E(T)$ al conjunto de todos los lados de T.
- $V(T) = \bigcup_{T \in \mathrm{T}} V(T)$ al conjunto de todos los vértices de T.

Definición

Dadas dos triangulaciones T y T' de una superficie compacta S, se dirá que T' es una subdivisión de T, y se escribirá $\mathrm{T}' \prec \mathrm{T}$, si para todo $T' \in \mathrm{T}$ existe $T \in \mathrm{T}$ tal que $T \subset T'$.

Característica de Euler de una triangulación

Sea T una triangulación de una superficie topológica S. Al número entero

$$\chi_{\mathrm{T}}(S) = \# F(\mathrm{T}) - \# E(\mathrm{T}) + \# V(\mathrm{T})$$

se llamará *la característica de Euler* de la triangulación T de S.

Definición

Sea T una triangulación de una superficie topológica S, se dice *orientable* si es posible elegir una orientación en cada uno de sus triángulos de forma que cada par de ellos contiguos (con un lado común) estén compatiblemente orientados, esto es, induzcan en su lado común orientaciones opuestas. Si T es orientable, *una orientación global* en T será una elección de orientaciones en todos y cada uno de sus triángulos de T de forma que cada dos contiguos satisfagan la anterior condición de compatibilidad. Si T es orientable, admite dos orientaciones globales.

Lema

Todo disco topológico compacto es triangulable. Si X es un disco topológico compacto y $\mathrm{T} = \{T_1, \dots, T_k\}$ cualquiera triangulación de X, entonces existe una colección de triángulos geométricos $\{\Delta_1, \dots, \Delta_k\}$ en R^2 y un homeomorfismo $F: X \to \Delta = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j$ tal que $F(T_j) = \Delta_j$ para todo $j = 1, \dots, k$. Entonces, T es orientable y $\chi_{\mathrm{T}}(X) = 1$.

Corolario (Característica de Euler del disco abierto)

Sea X un disco topológico compacto y T una triangulación suya. Denotemos por:

$$E_0(\mathrm{T}) = \{l \in E(\mathrm{T}) : l \notin Bd(X)\} \quad y \quad V_0(\mathrm{T}) = \{v \in V(\mathrm{T}) : v \notin Bd(X)\}$$

Entonces

$$\chi_{\mathrm{T}}(Int(X)) = \# F(\mathrm{T}) - \# E_0(\mathrm{T}) + \# V_0(\mathrm{T}) = \chi_{\mathrm{T}}(X) = 1$$

Proposición

Si (S_j, T_j) $j = 1{,}2$ son dos superficies compactas trianguladas combinatoriamente equivalen:

- T_1 es orientable $\Leftrightarrow$ T_2 es orientable
- $\chi_{\mathrm{T}_1}(S_1) = \chi_{\mathrm{T}_2}(S_2)$

3.4.- Teorema de Radó: Representación poligonal

Teorema de Radó

Toda superficie topológica compacta admite una triangulación.

Teorema (Representación poligonal)

Sea S una superficie topológica compacta, y sea T una triangulación cualquiera suya. Entonces existe un esquema binario ω_T, una triangulación T' de su relación S_{ω_T} adaptada ω_T y un homeomorfismo $F: S \to S_{\omega_T}$ tal que $F(T) = T'$. En particular (S, T) y $(S_{\omega_T}, \mathrm{T}')$ son combinatoriamente equivalentes.

3.5.- Clasificación de las superficies compactas

Definición

Llamaremos K al conjunto de los pares (ω, T), donde ω es un esquema binario y T una triangulación de S_ω adaptada a ω.

Dos parejas (ω_1, T_1) y $(\omega_2, T_2) \in K$, se dirán *equivalentes* si existe un homeomorfismo combinatorio $H: (\omega_1, T_1) \to (\omega_2, T_2)$. En ese caso escribiremos $(\omega_1, T_1) \sim (\omega_2, T_2)$ ó $(\omega_1, T_1) \overset{H}{\sim} (\omega_2, T_2)$ si queremos enfatizar el homeomorfismo combinatorio.

Definición

Sean $\omega = b_1^{\epsilon(1)} \dots b_k^{\epsilon(k)}$ un esquema, y sea $\left\{b_i^{\epsilon(i)}, b_j^{\epsilon(j)}\right\}$ un par de sílabas en ω con $i \neq j$ y $b_i = b_j$. El par $\left\{b_i^{\epsilon(i)}, b_j^{\epsilon(j)}\right\}$ se dirá *de primera especie* si $\epsilon(i)\epsilon(j) = -1$ y *de segunda especie* si $\epsilon(i)\epsilon(j) = 1$. Como consecuencia, un esquema binario es orientable si y solo si todos sus pares son de primera especie, y no orientable si tiene al menos un par de segunda especie.

Lema (Reglas de transformación)

Sean $v_j, j = 1, \dots, 4$, esquemas tales que $v_1 v_2 v_3 v_4$ es un esquema binario y sean $a, b \notin \bigcup_{j=1}^{4} sop(v_j)$.

a.- Para los esquemas binarios ω_1, ω_2 de la siguiente lista:

* $\omega_1 = v_1 v_2$ y $\omega_2 = v_2 v_1$

* $\omega_1 = v_1$ y $\omega_2 = v_1^{-1}$

* $\omega_1 = v_1 v_2 a v_3 v_4 a^{-1}$ y $\omega_2 = v_2 v_1 b v_4 v_3 b^{-1}$

* $\omega_1 = v_1 v_2 a v_3 v_4 a$ y $\omega_2 = v_3^{-1} v_1 b v_4 v_2^{-1} b$

El siguiente enunciado es cierto: Si T_1 es adaptada a ω_1 y $Z \subset S_{\omega_1} \setminus \Gamma_{\omega_1}$ es un compacto (eventualmente vacío), existe T_2 adaptada a ω_2 y un homeomorfismo combinatorio $F: \left(S_{\omega_1}, T_1\right) \to \left(S_{\omega_2}, T_2\right)$ tal que $F\left(V_{\omega_1}\right) = V_{\omega_2}$ y $F(Z) \subset S_{\omega_2} \setminus \Gamma_{\omega_2}$.

b.- Si $\omega_1 = a \wedge a^{-1} v_1 \in K$, $Z \subset S_{\omega_1} \setminus \Gamma_{\omega_1}\left(m_{\omega_1}(Q) = 1\right)$ es un compacto (eventualmente vacío) y $\omega_2 = v_1 \neq 1$. Entonces existe T_2 adaptada a ω_2 y un homeomorfismo combinatorio $F: \left(S_{\omega_1}, T_1\right) \to \left(S_{\omega_2}, T_2\right)$ tal que $F\left(V_{\omega_1} \setminus \{Q\}\right) = V_{\omega_2}$ y $F(Z) \subset S_{\omega_2} \setminus \Gamma_{\omega_2}$.

Además, en todos los casos ω_1 yω_2 tienen el mismo carácter de orientabilidad, y sólo en b el homeomorfismo altera el número de vértices del esquema en el grafo borde reduciendo en una unidad.

3.6 Clasificación de las superficies compactas sin borde

Lema

Dado $(\omega, T) \in K$ con ω binario puro, existe un esquema $(\omega_0, T_0) \in K$ tal que:

- $\# V_{\omega_0} = 1$ ó $\omega_0 = \mathcal{w}_0$, donde $\mathcal{w}_0$ es el esquema de aa^{-1}.
- $(\omega, T) \sim (\omega_0, T_0)$ $mediante\ F$

Además, si $Z \subset S_\omega \setminus \Gamma_\omega$ es un compacto, el homeomorfismo combinatorio F se puede lograr que $F(Z) \subset S_{\mathcal{w}_0} \setminus \Gamma_{\mathcal{w}_0}$.

Teorema (representaciones binarias puras no orientables)

Sea $(\omega, T) \in K$ con ω binario puro y no orientable. Entonces existe $n \in N$ y T_0 triangulación de S_n^* adaptada a $\mathcal{w}_n^*$ tal que $(\omega, T) \sim (\mathcal{w}_n^*, T_0)$ $mediante\ F$. Además, si $Z \subset S_\omega \setminus \Gamma_\omega$ es un compacto, el homeomorfismo combinatorio F se puede lograr que $F(Z) \subset S_{\mathcal{w}_n^*} \setminus \Gamma_{\mathcal{w}_n^*}$.

Teorema (representaciones binarias puras orientables)

Sea $(\omega, T) \in K$ con ω binario puro y orientable. Entonces existe $n \in N \cup \{0\}$ y T_0 triangulación de S_n adaptada a $\mathcal{w}_n$ tal que $(\omega, T) \sim (\mathcal{w}_n, T_0)$ $mediante\ F$. Además, si $Z \subset S_\omega \setminus \Gamma_\omega$ es un compacto, el homeomorfismo combinatorio F se puede lograr que $F(Z) \subset S_{\mathcal{w}_n} \setminus \Gamma_{\mathcal{w}_n}$.

Corolario (Clasificación de las superficies compactas sin borde)

Si S es una superficie topológica compacta sin borde, entonces S es homeomorfa a una superficie de la lista

$$\mathfrak{G} = \{S_n : n \in N \cup \{0\}\} \cup \{S_n^* : n \in N\} = \left\{S_{\mathcal{w}} : \mathcal{w} \in \{\mathcal{w}_n : n \in N \cup \{0\}\}\right\} \cup \{\mathcal{w}_n^* : n \in N\}$$

En la que ningún par de superficies es homeomorfo entre sí. Al número n en ambos casos s ele llama *género de la superficie*.

En particular, si T_1 y T_2 son dos triangulaciones de S entonces:

- $\chi_{T_1}(S) = \chi_{T_2}(S)$
- T_1 y T_2 tienen el mismo carácter de orientabilidad.

Definición

Sea S una superficie topológica compacta sin borde. Se define *la característica de Euler* de S como el número entero: $\chi(S) = \chi_T(S)$ T cualesquiera triangulación de S.

De igual forma, S se dirá *orientable (no orientable*) si T es orientable (no orientable) donde T es cualesquiera triangulación de S.

Corolario

Sean S_1 y S_2 dos superficies topológicas compactas sin borde.

a.- $S_1 \cong S_2 \Leftrightarrow \chi(S_1) = \chi(S_2)$ y tienen ambas el mismo carácter de orientabilidad.

b.- $S_1 \cong S_2 \Leftrightarrow \Pi_1(S_1) = \Pi_1(S_2)$.

3.7 Clasificación de las superficies compactas sin borde

Proposición

Sean (S_j, T_j) una superficie compacta triangulada con $Bd(S_j) \neq \emptyset\ j = 1,2$ con $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Fijamos una componente conexa $\gamma_j \subset Bd(S_j)\ j = 1,2$ y un homeomorfismo $h: \gamma_1 \to \gamma_2$. Consideremos en el espacio topológico suma $X = S_1 \cup S_2$ la relación de equivalencia:

$$p \sim_h q \Leftrightarrow p = q \ \text{ ó } \{p, q\} = \{r, h(r)\}\ para\ algún\ r \in \gamma_1$$

Entonces $S = {}^{X}/_{\sim_h}$es una superficie topológica compacta y γ_1 es homeomorfa vía σ a $\gamma = \sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) \subset Int(S), j = 1,2,$ donde $\sigma: X \to S$ es la proyección. Además, existen $T_j{'} \prec T_j, j = 1,2,$ tales que ${}^{\sigma}/_{T}: T \to \sigma(T)$ es un homeomorfismo para todo $T \in T_j{'}, j = 1,2$. Y $\mathrm{T} = \{\sigma(T): T \in T_1{'} \cup T_2{'}\}$ es una triangulación de S. En particular:

a.- $\chi_T(S) = \chi_{T_1}(S_1) + \chi_{T_1}(S_2)$

b.- T es orientable $\Leftrightarrow T_j$ es orientable $j = 1,2$.

Corolario (Clasificación de las superficies compactas con borde)

Si S es una superficie topológica compacta con borde, entonces S es homeomorfa a una superficie de la lista

$$\mathfrak{G} = \{S_{n,k}: n \in N \cup \{0\}, k \in N\} \cup \{S_{n.k}^*: n \in N\} =$$

$$= \left\{S_w: w \in \left\{w_{n,k}: n \in N \cup \{0\}\right\}, k \in N\right\} \cup \{w_{n,k}^*: n \in N\}$$

En la que ningún par de superficies es homeomorfo entre sí. Al número n en ambos casos se le llama *género de la superficie*.

En particular, para toda triangulación de S entonces:

- $\chi_T(S) = 2 - 2n - k$ si $S \cong S_{n,k}$ y $\chi_T(S) = 2 - n - k$ si $S \cong S_{n,k}^*$
- T es orientable si $S \cong S_{n,k}$ y no orientable si $S \cong S_{n,k}^*$

Definición

Sea S una superficie topológica compacta con borde. Se define *la característica de Euler* de S como el número entero: $\chi(S) = \chi_T(S)$ $\ T$ cualesquiera triangulación de S.

De igual forma, S se dirá *orientable (no orientable*) si T es orientable (no orientable) donde T es cualesquiera triangulación de S.

Corolario

Sean S_1 y S_2 dos superficies topológicas compactas con borde.

a.- $S_1 \cong S_2 \Leftrightarrow \chi(S_1) = \chi(S_2)$ y tienen ambas el mismo carácter de orientabilidad, y S_1 y S_2 tienen la misma cantidad de componentes conexas en el borde.

b.- $S_1 \cong S_2 \Leftrightarrow \Pi_1(S_1) = \Pi_1(S_2)$ y S_1 y S_2 tienen la misma cantidad de componentes conexas en el borde.

3.8.- Suma conexa de superficies

Definición

Sean S_1 y S_2 dos superficies topológicas compactas y disjuntas, y sean los discos topológicos compactos $K_j \subset Int(S_j)$ satisfaciendo:

$$S_j{}' = S_j \setminus Int(K_j) \; es\ una\ superficie\ y\ Bd(S_j{}') = Bd(S_j) \cup Bd(K_j) \;\; j = 1{,}2$$

La superficie $(S_1{}' \cup S_2{}')/_{\sim_h}$ es conocida como la suma conexa de S_1 y S_2, denotada por $S_1 \# S_2$.

- $\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$
- $S_1 \# S_2$ es orientable $\Leftrightarrow S_1$ y S_2 son orientables

Nota: S_n es suma conexa de n toros y S_n^* es suma conexa de n proyectivos.

3.9.- Superficies topológicas y recubridores

Lema

Sea (Y, π) un recubridor de X, y sea $A \subset X$ un subespacio topológico simplemente conexo. Entonces $\pi_{\setminus \tilde{A}}: \tilde{A} \to A$ es un homeomorfismo para toda arcocomponente $\tilde{A}$ de $\pi^{-1}(A)$.

Teorema

Sea (Y, π) un recubridor de X, donde X e Y son superficies topológicas. Entonces:

a.- $\pi(Bd(Y)) = Bd(X)$, Además, si γ es una arcocomponente de $Bd(X)$ y $\tilde{\gamma}$ es una arcocomponente de $\pi^{-1}(\gamma)$ en $Bd(Y)$, entonces $\pi_{\setminus \tilde{\gamma}}: \tilde{\gamma} \to \gamma$ es recubridora.

b.- Si Y es compacta entonces X es compacta y $\chi(Y) = n\chi(X)$, donde n es el número de hojas de (Y, π).

c.- X es orientable $\Longrightarrow Y$ es orientable (el recíproco no es cierto).

Teorema (Recubridor de dos hojas orientable)

Sea X una superficie topológica compacta no orientable. Entonces existe un único (salvo isomorfismos) recubridor (X_0, π_0) de X satisfaciendo:

- X_0 es una superficie orientable.
- (X_0, π_0) tiene dos hojas.

Además, si $Bd(X)$ tiene k componentes entonces $Bd(X_0)$ tiene $2k$ componentes.

Corolario

El espacio recubridor de dos hojas orientable de $S_{n,k}^*$ es $S_{n-1,2k}, n \in N$, $k \in N \cup \{0\}$.

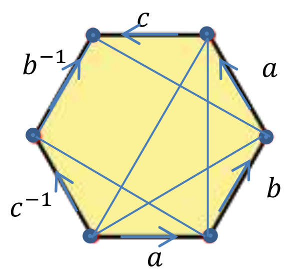
Ejercicios del tema 3 Superficies

Ejercicio 1

En cada uno de los siguientes casos clasificar la superficie realización de los siguientes esquemas binarios puros:

a.- $\boldsymbol{E = abacb^{-1}c^{-1}}$

Es una presentación de la superficie, con una sola cara y 3 aristas (lados), no está orientada.

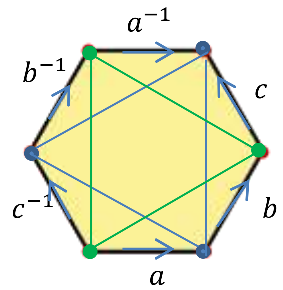


$$\chi(S) = C - A + V = 1 - 3 + 1 = -1 \qquad -1 = \chi(S) = 2 - n \Longrightarrow n = 3 = gen(S)$$

$$S \cong RP_3^2 \cong RP^2 \# RP^2 \# RP^2$$

b.- $\boldsymbol{E = abca^{-1}b^{-1}c^{-1}}$

Es una presentación de la superficie, con una sola cara y 3 aristas (lados), está orientada.

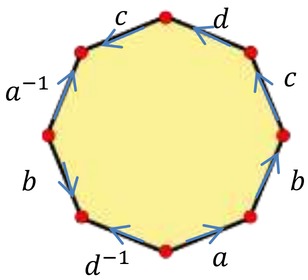


$$\chi(S) = C - A + V = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad 0 = \chi(S) = 2 - 2n \Longrightarrow n = 1 = gen(S)$$

$$S \cong \Pi$$

c.- $\boldsymbol{E = abcdca^{-1}bd^{-1}}$

Es una presentación de la superficie, con una sola cara y 4 aristas (lados), no está orientada.



$$\chi(S) = C - A + V = 1 - 4 + 2 = -1 \qquad -1 = \chi(S) = 2 - n \Longrightarrow n = 3 = gen(S)$$

$$S \cong RP_3^2 \cong RP^2 \# RP^2 \# RP^2$$

$$(1)\ w_0 a w_1 a w_2 \sim a a w_0 w_1^{-1} w_2$$

$$(2)\ w_0 ccaba^{-1}b^{-1} w_1 \sim w_0 aabbcc w_1$$

$$(3)\ w_1 a w_2 b w_3 a^{-1} w_4 b^{-1} w_5 \sim aba^{-1}b^{-1} w_1 w_2 w_3 w_4 w_5$$

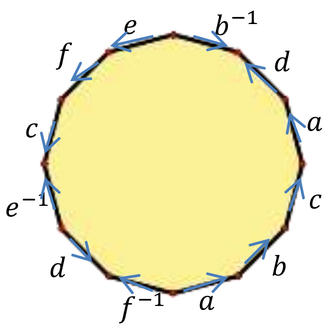
$$abcdca^{-1}bd^{-1} \overset{(1)}{\longrightarrow} bbaac^{-1}d^{-1}c^{-1}d^{-1} \overset{(1)}{\longrightarrow} c^{-1}c^{-1}bbaadd^{-1} \xrightarrow{Eliminar} c^{-1}c^{-1}bbaa$$

$$\xrightarrow{rotar} bbaac^{-1}c^{-1} \xrightarrow{renombrar} aabbcc \cong RP_3^2$$

d.- $\boldsymbol{E = \langle a, b, c, d, e; aba^{-1}cdb^{-1}c^{-1}ed^{-1}e^{-1}\rangle}$

e.- $\boldsymbol{E = \langle a, b, c, d, e, f; abcadb^{-1}efce^{-1}df^{-1}\rangle}$

Es una presentación de la superficie, con una sola cara y 6 aristas (lados), no está orientada.

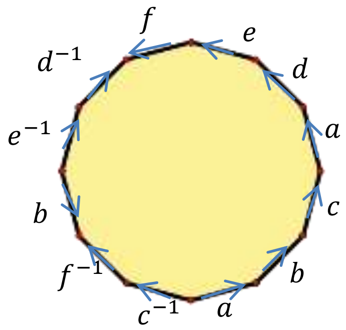


Ejercicio 2

Clasifica la superficie compacta y conexa S con una representación poligonal obtenida identificando los lados de un dodecágono mediante el esquema:

$$E = \langle a, b, c, d, e, f; abcadefd^{-1}e^{-1}bf^{-1}c^{-1} \rangle$$

Es una presentación de la superficie, con una sola cara y 6 aristas (lados), no está orientada.



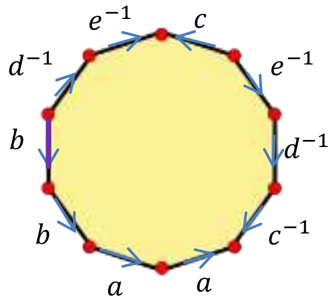
¿Es S homeomorfa a una suma conexa de botellas de Klein?

¿Y a una suma conexa de toros y de un único plano proyectivo?

Ejercicio 3

Sea S la superficie compacta y conexa obtenida al identificar los lados de un decágono mediante el esquema $E = \langle a, b, c, d, e; aac^{-1}d^{-1}e^{-1}ce^{-1}d^{-1}bb \rangle$

a.- ¿A qué superficie compacta modelo es homeomorfa S?



b.- ¿Es S homeomorfa a la suma conexa de la botella de Klein con un n-Toro?

Ejercicio 4

a.- ¿Es el conjunto $S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 0\}$ una superficie topológica?

b.- Sea S una superficie compacta representada por un polígono de 18 lados. Probar que $\chi(S) \geq -8$.

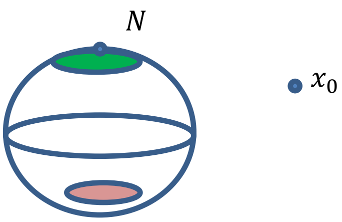
c.- Si $\chi(S) \geq -8$. ¿Se puede ser representado por un polígono con 18 lados?

d.- Sea Q una unión finita de polígonos planos disjuntos con el mismo número de lados. Describe todas las posibles configuraciones de Q a partir de las que se puede obtener una presentación poligonal con un único vértice del 2-toro $\Pi_2 \cong \Pi \# \Pi$.

e.- ¿Existe S superficie compacta y conexa con $\chi(S) \leq -7$ y $\Pi_1(S) \cong Z_2 x Z^7$?

Ejercicio 5

Sea $X = S^2 \cup \{x_0\}$ donde $x_0 \in R^3 - S^2$. En X se considera la topología tal que los entornos de los puntos de S^2 son usuales, y los de x_0 son de la forma $(V - \{N\}) \cup \{x_0\}$, donde $N = (0, 0, 1)$ y V en un entorno de N de S^2. Demostrar que cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de R^2 pero X no es T_2.



Ejercicio 6

Consideremos el espacio producto $X = R^2 x R$, donde en R^2 se considera la topología usual y en R la topología discreta. Demostrar que cada punto de X tiene un entorno homeomorfo a un abierto de R^2 pero X no es IIAN.

Ejercicio 7

Sea S la superficie compacta y conexa que admite una representación poligonal obtenida identificando los lados de un decágono mediante el esquema:

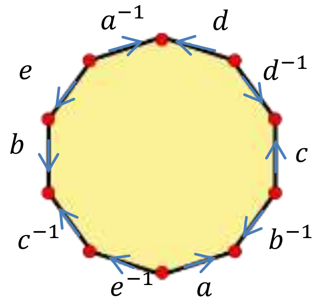
$$E = \langle a, b, c, d, e; ab^{-1}c\,\_\,da^{-1}ebc^{-1}\_\rangle$$

Completa el esquema para que S sea homeomorfa a:

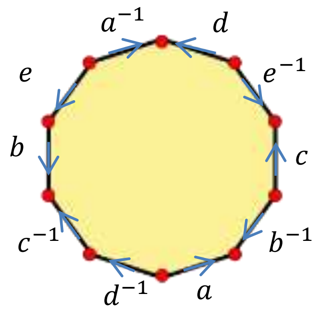
a.- $\Pi_2 \cong \Pi \# \Pi$.

En este caso, S es orientable, las posibilidades: $x = e^{-1}$ $y = d^{-1}$ ó $x = d^{-1}$ $y = e^{-1}$

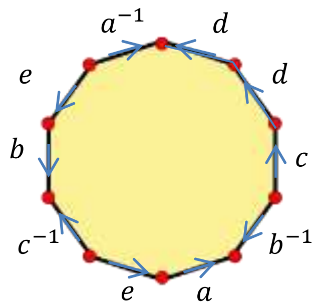
$x = d^{-1}$ $y = e^{-1}$



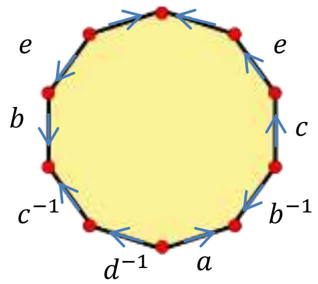
$x = e^{-1}$ $y = d^{-1}$



b.- $\boldsymbol{RP_4^2 \cong RP^2 \# RP^2 \# RP^2 \# RP^2}$**.**



c.- La superficie modelo con primer grupo de homología $\boldsymbol{Z_2 x Z^4}$**.**



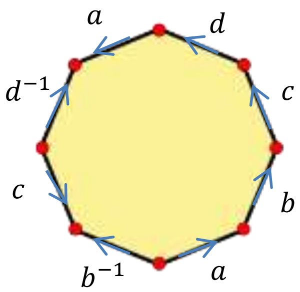
Ejercicio 8

Discutir de forma razonada si cada par de las siguientes superficies compactas y conexas son o no homeomorfas entre sí:

a.- $S_1 \cong Q/_{\sim}$ donde Q es un octógono y $\sim$ identifica por parejas los lados según el esquema

$$E = \langle a, b, c, d; abcdad^{-1}cb^{-1} \rangle$$

Se sabe que dos superficies compactas y conexas son homeomorfas si y solo si ambas son homeomorfas a la misma superficie modelo.



Es una presentación de la superficie, con una sola cara y 4 aristas (lados), no está orientada

$$\chi(S_1) = V - A + F = 2 - 4 + 1 = -1 \quad \chi(S_1) = 2 - n \Longrightarrow -1 = 2 - n \Longrightarrow n = 3$$

donde $n = gen(S_1)$, luego $S \cong RP_3^2$.

$$abcdad^{-1}cb^{-1} \overset{(1)}{\Rightarrow} aad^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}cb^{-1} \overset{(1)}{\Rightarrow} b^{-1}b^{-1}aad^{-1}c^{-1}c^{-1}d$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow} b^{-1}b^{-1}aad^{-1}c^{-1}c^{-1}d \overset{(1)}{\Rightarrow} c^{-1}c^{-1}b^{-1}b^{-1}aad^{-1}d \xRightarrow{eliminar} c^{-1}c^{-1}b^{-1}b^{-1}aa$$

$$\xRightarrow{rotar} aac^{-1}c^{-1}b^{-1}b^{-1} \xRightarrow{renombrar} aabbcc \cong RP_3^2$$

b.- S_2 cumple $\chi(S_2) \geq 0$ y $\Pi_1(S_2)$ no es abeliano.

Primero se describen todas las superficies compactas y conexas que cumplen $\chi(S_2) \geq 0$

$$(i)\ \chi(S_2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} S_2\ orientable: 2 - 2n = 0 \Longrightarrow n = 1 \Longrightarrow S_2 \cong T \\ S_2\ no\ orientable: 2 - n = 0 \Longrightarrow n = 2 \Longrightarrow S_2 \cong K \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Pi_1(S_2) \cong \Pi_1(T) \cong Z^2\ \ si\ S_2\ orientable \\ \Pi_1(S_2) \cong \Pi_1(K) \cong \langle a, b; aabb \rangle\ \ si\ S_2\ no\ orientable \end{cases}$$

$$(ii\ )\ \chi(S_2) = 1 \Longrightarrow \begin{cases} S_2\ orientable: 2 - 2n = 1 \Longrightarrow n = \frac{1}{2}\text{¡¡} \\ S_2\ no\ orientable: 2 - n = 1 \Longrightarrow n = 1 \Longrightarrow S_2 \cong RP^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \Pi_1(S_2) \cong \Pi_1(RP^2) \cong Z_2\ \ si\ S_2\ no\ orientable$$

$$(ii\ i)\ \chi(S_2) = 2 \Longrightarrow S_2 \cong S^2 \Longrightarrow \Pi_1(S_2) \cong \Pi_1(S^2) \cong \{1\}$$

Como $\Pi_1(S_2)$ no es abeliano se sigue que $S_2 \cong K \cong RP_2^2$

c.- S_3 cumple que $\Pi_1(S_3) \cong \langle a, b, c; acbcba^{-1} \rangle$.

Se sabe que S_3 está determinada por $H_1(S_3) = Ab\big(\Pi_1(S_3)\big)$. Por tanto, vamos a calcular $H_1(S_3)$.

$$H_1(S_3) = Ab\left({}^{G}/_{N}\right) \;\; con\; G = \langle a, b, c \rangle \quad N = Nor(R) \quad R = acbcba^{-1}$$

$$H_1(S_3) \cong \frac{Ab(G)}{p(N)} \quad con\; p: G \to Ab(G) \;\; proyección$$

Se sabe que $Ab(G) = Ab(\langle a, b, c \rangle) \cong_f Z^3$, donde $f: Ab(\langle a, b, c \rangle) \to Z^3$ es el isomorfismo dado por:

$$f\left(\overline{a^n b^m c^k}\right) = nu_1 + mu_2 + ku_3 = (n, m, k)$$

Nótese que $p(N) = p\big(Nor(R)\big) = \langle p(R) \rangle = \langle \overline{acbcba^{-1}} \rangle = \langle \overline{aa^{-1}bbcc} \rangle = \langle b^2 c^2 \rangle$

En particular, se tiene que

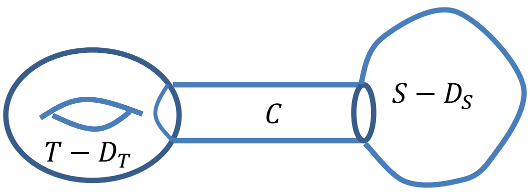
$$f\big(p(N)\big) = \langle (0,2,2) \rangle$$

Luego

$$H_1(S_3) \cong \frac{Z^3}{\langle (0,2,2) \rangle} \cong \frac{ZxZ^2}{\{0\}x\langle (2,2) \rangle} \cong \frac{Z}{\{0\}} x \cong \frac{Z^2}{\langle (2,2) \rangle} \cong Zx(Z_2xZ) \cong Z_2xZ^2 \cong H_1(RP_3^2)$$

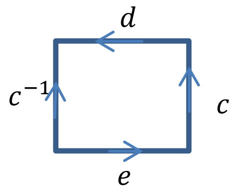
$$S_3 \cong RP_3^2$$

d.- S_4 se obtiene de este modo: se consideran un toro T y una esfera S disjuntos. Suprimimos un disco abierto D_T de T y un disco abierto D_S de S. A continuación, pegamos una asa $C = S^1 x[-1, 1]$ por las dos circunferencias resultantes.

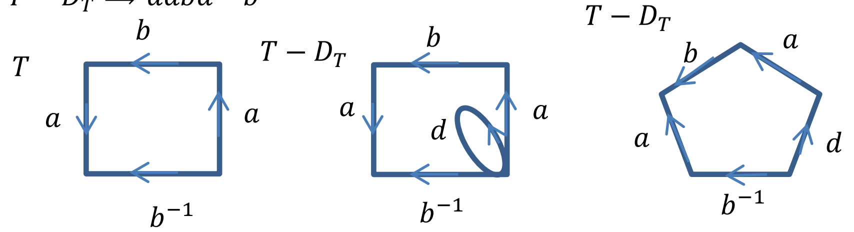


Se ve que S_4 se obtiene pegando 3 piezas: $T - D_T, C$ y $S - D_S$. Se busca presentaciones poligonales de cada pieza:

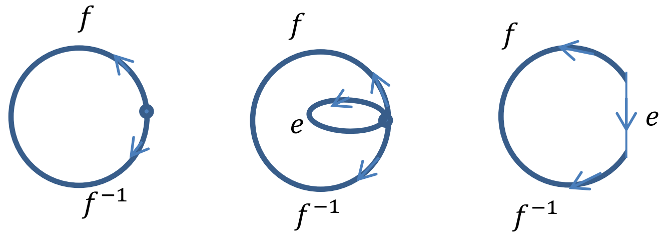
$C = S^1 x[-1,1] \Longrightarrow cdc^{-1}e$



$T - D_T \Longrightarrow daba^{-1}b^{-1}$



$S - D_S \Longrightarrow e^{-1}ff^{-1}$



Por lo tanto, S_4 tiene como presentación poligonal con esquema:

$$E = daba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}e, e^{-1}ff^{-1}$$

Se usa transformaciones para obtener la presentación canónica:

$$daba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}e, e^{-1}ff^{-1} \xrightarrow{pegar} daba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}ff^{-1} \xrightarrow{eliminar} daba^{-1}b^{-1}, cdc^{-1}$$

$$\xrightarrow{permutar} aba^{-1}b^{-1}d^{-1}, dc^{-1}c \xrightarrow{pegar} aba^{-1}b^{-1}c^{-1}c \xrightarrow{eliminar} aba^{-1}b^{-1} \Longrightarrow S_4 \cong T$$

La respuesta al ejercicio, solo $S_1 \cong S_3$. Las restantes parejas de superficies no son homeomorfas entre sí.

Encontrar también la presentación poligonal canónica de S_1 efectuando para ello las transformaciones que sean necesarias.

En S_1: Se utiliza la equivalencia $(1)\ w_0aw_1aw_2 \sim aaw_0w_1^{-1}w_2$

$$abcdad^{-1}cb^{-1} \overset{(1)}{\Rightarrow} aad^{-1}c^{-1}b^{-1}d^{-1}cb^{-1} \overset{(1)}{\Rightarrow} d^{-1}d^{-1}aabccb^{-1} \overset{(1)}{\Rightarrow} ccd^{-1}d^{-1}aabb^{-1}$$

$$\xrightarrow{Doblar} ccd^{-1}d^{-1}aa \xrightarrow{rotar} aaccd^{-1}d^{-1} \xrightarrow{renombrar} aaccdd \Longrightarrow S_1 \cong RP_3^2$$

Ejercicio 9

Se divide un balón de fútbol en piezas homeomorfas a pentágonos o hexágonos (no todas las piezas han de ser homeomorfas al mismo tipo de polígono) de modo que:

a.- cada arista es compartida por exactamente dos piezas.

b.- a cada vértice llegan exactamente tres aristas.

Demostrar que el número de piezas pentagonales es 12.

Por hipótesis $S^2 = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$

Donde cada P_i es homeomorfo a un pentágono ó un hexágono $Q_i \subset R^2$. Se puede suponer que $Q_i \cap Q_j = \emptyset \ si \ i \neq j$. Se define

$$Q = \bigcup_{i=1}^{n} Q_i$$

Es una región poligonal en R^2, y $h: Q \to S^2$ tal que $h_{/Q_i} = h_i: Q_i \to P_i$ homeomorfismo, $\forall i = 1, \dots, n$. Se comprueba que h es una identificación, por lo que $S^2 \cong {}^{Q}/_{\sim_h}$, donde

$$x \sim_h y \Leftrightarrow h(x) = h(y)$$

La relación $\sim_h$ identifica por parejas las aristas de Q, por lo que ${}^{Q}/_{\sim_h}$ es una presentación poligonal de S^2. Como $\chi(S_2) = 2$, se llega a:

$$2 = \chi(S_2) = \chi\left({}^{Q}/_{\sim_h}\right) = V_{Q/_{\sim_h}} - A_{Q/_{\sim_h}} + F_{Q/_{\sim_h}} = V - A + F$$

Sea $p = n^{\underline{o}}$ de péntagonos y $h = n^{\underline{o}}$ de hexágonos. Como $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$ sólo hay pentágonos o hexágonos, entonces $F = p + h$.

Como cada pentágono aporta 5 lados y cada hexágono aporta 6 lados, y cada arista es compartida exactamente por 2 piezas, entonces:

$$A = \frac{5p + 6h}{2}$$

Como a cada vértice llegan exactamente 3 aristas y cada arista es compartida por dos vértices, se tiene, $3V = 2A$, es decir

$$V = \frac{2A}{3} = \frac{5p + 6h}{3}$$

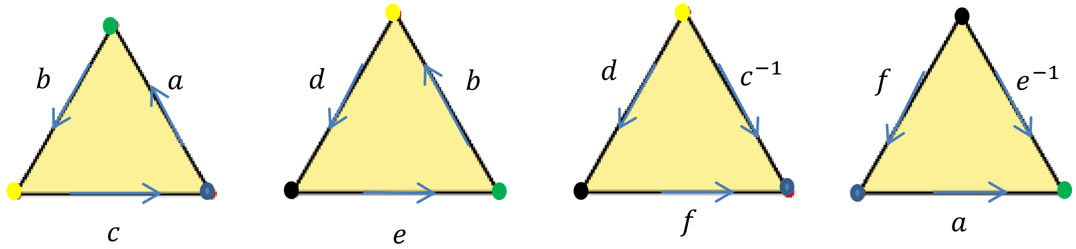
Sustituyendo en la fórmula de Euler:

$$2 = V - A + F = \frac{5p + 6h}{3} - \frac{5p + 6h}{2} + p + h = \frac{p}{6} = 2 \Rightarrow p = 12$$

Ejercicio 10

En cada uno de los siguientes casos clasificar la superficie realización de los siguientes esquemas binarios puros:

a.- $\boldsymbol{E = abc, bde, c^{-1}df, e^{-1}fa}$

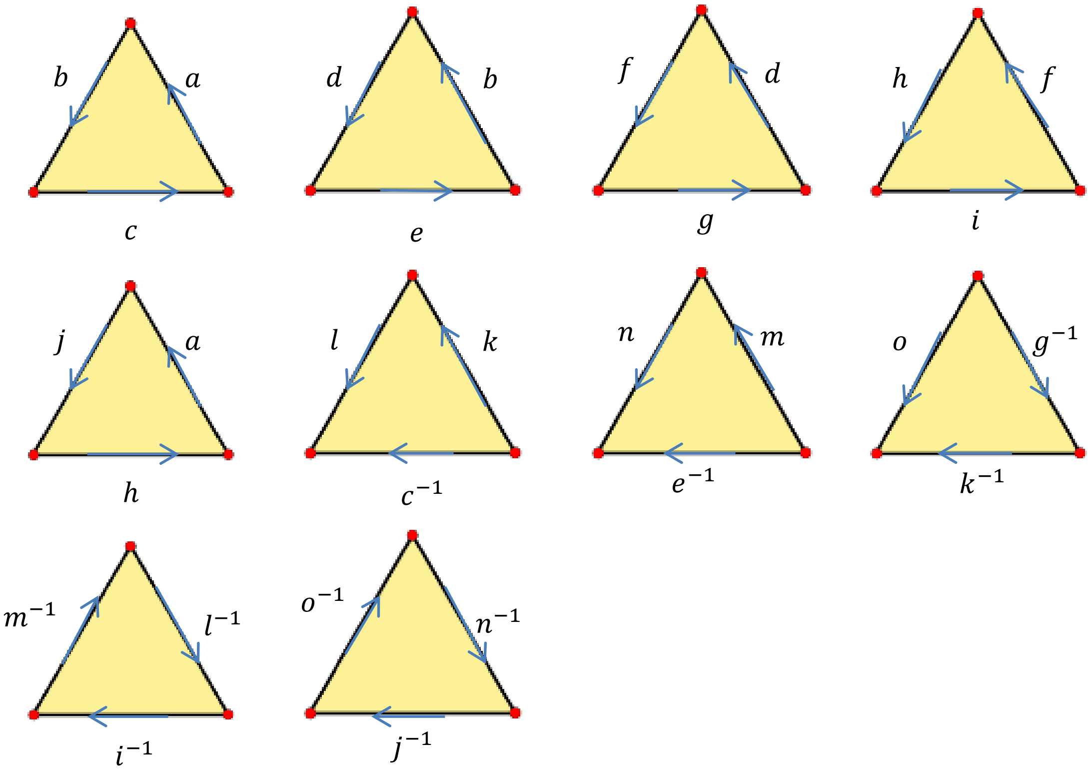


Es una presentación de la superficie, con cuatro caras y 6 aristas (lados),

$$\chi(S) = C - A + V = 4 - 6 + 4 = 2$$

Luego $S \cong S^2$.

b.- $\boldsymbol{E = abc, bde, dfg, fhi, haj, c^{-1}kl, e^{-1}mn, g^{-1}ok^{-1}, i^{-1}l^{-1}m^{-1}, j^{-1}n^{-1}o^{-1}}$



Es una presentación de la superficie, con cuatro caras y 6 aristas (lados),

$$\chi(S) = C - A + V = 10 - 15 + 6 = 1 \Longrightarrow n = 1$$

Luego $S \cong RP^2$.

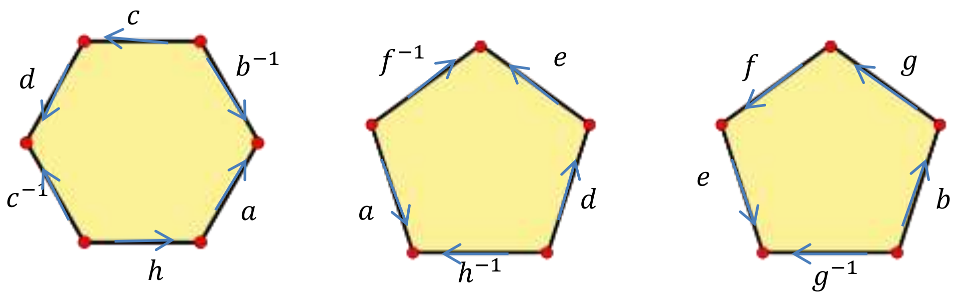
Ejercicio 11

Sea la superficie topológica compacta representada por

$$\boldsymbol{E = \langle a, b, c, d, e, f, g, h \colon ab^{-1}cdc^{-1}h, def^{-1}ah^{-1}, bgfeg^{-1} \rangle}$$

a.- Determinar si S es no orientable y calcular su característica de Euler.

La superficie no es orientable porque se tiene la pareja aa.



Es una presentación de la superficie, con tres caras y 8 aristas (lados), no está orientada

$$\chi(S) = C - A + V = 3 - 8 + 1 = -4 \quad \chi(S) = 2 - n = -4 \Longrightarrow n = 6$$

donde $n = gen(S)$, luego $S \cong RP_6^2$.

b.- Determinar a cuál de las superficies modelo es S homeomorfa.

Por lo tanto, $S \cong RP_6^2$.

c.- ¿Es S homeomorfa a una suma conexa de toros y exactamente un plano proyectivo?

$$S \cong \Pi_n \# RP^2 \quad \Pi_n\ orientable \quad RP^2 no\ orientable$$

$$\chi(RP^2) = 2 - 1 = 1$$

$$\chi(S) = \chi(\Pi_n \# RP^2) = \chi(\Pi_n) + \chi(RP^2) - 2 = 2 - 2n + 1 - 2 = -4 \Longrightarrow n = \frac{5}{2} ¡¡$$

Por lo tanto, S no es homeomorfa a una suma conexa de toros y exactamente un plano proyectivo.

¿Y a una suma conexa de toros y exactamente una botella de Klein?

La botella de Klein es: $K \cong RP^2 \# RP^2 \cong RP_2^2$.

$$S \cong \Pi_n \# RP_2^2 \quad \Pi_n\ orientable \quad RP_2^2 no\ orientable$$

$$\chi(RP_2^2) = 2 - 2 = 0$$

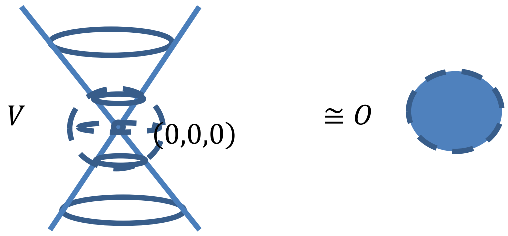
$$\chi(S) = \chi(\Pi_n \# RP_2^2) = \chi(\Pi_n) + \chi(RP_2^2) - 2 = 2 - 2n + 0 - 2 = -4 \Longrightarrow n = 2$$

Por lo tanto, S es homeomorfa a una suma conexa de toros y exactamente un plano proyectivo, concretamente es $S \cong \Pi_2 \# RP_2^2 = \Pi \# \Pi \# RP^2 \# RP^2$.

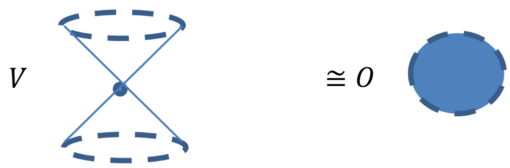
Ejercicio 12

Demostrar que los siguientes espacios topológicos no son superficies:

a.- $\boldsymbol{S = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 - x^2 = 0\}}$

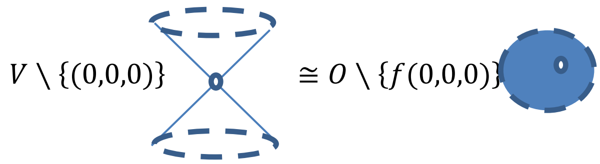


Se trata de un cono, en el (0,0,0) no tiene ningún entorno homeomorfo a un abierto de R^2. Supongamos $V \subset S$ un entorno de (0,0,0) homeomorfo por f a $O \subseteq R^2$.



Entonces

$$f_{V \setminus \{(0,0,0)\}} : V \setminus \{(0,0,0)\} \to O \setminus \{f(0,0,0)\}$$

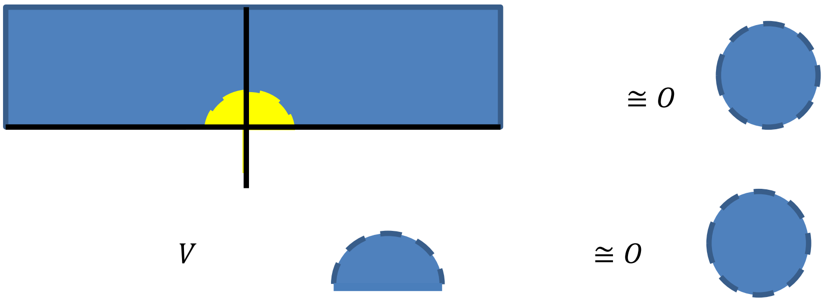


Sería un homeomorfismo, pero no es posible ya que $O \setminus \{f(0,0,0)\}$ es conexo y en cambio, $V \setminus \{(0,0,0)\}$ tendría dos componentes conexas. Luego S no es una superficie topológica.

b.- $\boldsymbol{R^n}$ **con** $\boldsymbol{n \neq 2}$

Supongamos $V \subset S$ un entorno abierto euclidiano de un punto $x \in R^n$ con $n \neq 2$. Si R^n con $n \neq 2$ fuese superficie tipológica, V sería homeomorfo a un abierto de R^2, pero por el teorema de invarianza del dominio sabemos que entonces V sería un abierto de R^2, absurdo.

c.- $\boldsymbol{S = \{(x, y) \in R^2 \colon y \geq 0\}}$



Supongamos que $V \cong D(x_0, \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, entonces $V \setminus \{(0,0)\} \cong D(x_0, \varepsilon) \setminus \{f(0,0)\}$ pero esto no puede ser cierto porque $\Pi_1(V \setminus \{(0,0)\}, y) \cong \{1\}$ y $\Pi_1(D(x_0, \varepsilon) \setminus \{f(0,0)\}) \cong Z$. Por lo tanto, S no es superficie.

¿Es la unión o intersección de dos superficies en R^3 una superficie?

No ni unión, ni intersección.

Ejercicio 13

Sea $\rho: \tilde{S} \to S$ recubridora. Probar que $\tilde{S}$ es superficie si y solo si lo es S.

$\Longrightarrow$) Si $\tilde{S}$ es superficie, sea $x \in S$ y sea U un entorno abierto distinguido de x, entonces $\rho_{\setminus \tilde{U}}: \tilde{U} \to U$ es un homeomorfismo, donde $\tilde{U}$ es una arcocomponente conexa de $\rho^{-1}(x)$, como $\tilde{S}$ es superficie, $\tilde{U}$ es homeomorfo a un abierto O de R^2, luego $U \cong \tilde{U} \cong O \Longrightarrow U \cong O$ de R^2, Luego S es localmente euclídeo, y además, verifica que IIAN y T_2, por serlo $\tilde{S}$.

$\Longleftarrow$) Si S es superficie, sea $\tilde{x} \in \tilde{S}$, se considera $x = \rho(\tilde{x})$ y sea V un entorno abierto distinguido de $\tilde{x}$, entonces $\rho_{\setminus \tilde{V}}: \tilde{V} \to U$ es un homeomorfismo, donde $\tilde{V}$ es una arcocomponente conexa de $\rho^{-1}(x) = \tilde{x}$, como $\tilde{S}$ es superficie, $\tilde{V}$ es homeomorfo a un abierto O de R^2, luego $V \cong \tilde{V} \cong O \Longrightarrow V \cong O$ de R^2, Luego $\tilde{S}$ es localmente euclídeo, y además, verifica que IIAN y T_2, por serlo S.

Ejercicio 14

Sea S una superficie y $f: S \to R$ una función continua. Definimos el grafo de f como:

$$\boldsymbol{G(f) = \{(x, f(x)) : x \in S\}}$$

Con la topología inducida por la topología producto en SxR. Probar que $G(f)$ es una superficie, que además es compacta si y solo si lo es S.

Sea $x_0 \in S$, se considera $y = (x_0, f(x_0)) \in G(f)$ y V un entorno abierto de y en SxR, por tanto, $V = V_1 x V_2$ siendo V_1 abierto de x_0 en S y V_2 abierto de $f(x_0)$ en R tal que $V_2 = f(V_1)$,

Como S es una superficie, se elige V homeomorfo por φ a un abierto de R^2:

$$F: V_1 x f(V_1) \to O \quad F(x, f(x)) = \varphi(x) \; es\; un\; homeomorfismo$$

Además, S es compacta si y solo si $G(f)$ es compacta, por construcción del homeomorfismo.

Ejercicio 15

Escribamos $\Pi_n \cong \Pi \# \cdots_{n)} \# \Pi$ y $K \cong RP^2 x RP^2$. Demostrar que toda superficie compacta y conexa es homeomorfa a una y solo una de las siguientes superficies:

$$\boldsymbol{S^2, \Pi_n, RP^2, K, \Pi_n \# RP^2, \Pi_n \# K}$$

Ejercicio 16

Identificar, salvo homeomorfismos, las superficies compactas y conexas con característica de Euler igual a -2.

Ejercicio 17

Sea S la superficie compacta y conexa. Probar que $\chi(S) \geq -2$ si solo si S es homeomorfa al espacio realización de un esquema binario puro de longitud 8.

Ejercicio 18

Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:

a.- Sea S una superficie. Demostrar que $S \# S^2 \cong S$.

b.- Si S_1 y S_2 son superficies compactas y conexas, ¿se cumple necesariamente que

$$\Pi_1(S_1 \# S_2) \cong \Pi_1(S_1) * \Pi_1(S_2)?$$

¿Y que $\mathcal{A}(\Pi_1(S_1 \# S_2)) \cong \mathcal{A}(\Pi_1(S_1)) x \mathcal{A}(\Pi_1(S_2))$?

c.- Es cierto que $RP^2 \# RP^2 \# RP^2 \cong RP^2 \# \Pi \cong RP^2 \# K$?

Ejercicio 19

Determinar los espacios topológicos compactos Y para los que existe una aplicación recubridora $\pi: Y \to X$ en cada uno de los siguientes casos:

a.- $X = S^2$

b.- $X = RP^2$

c.- $X = \Pi \cong S^1 x S^1$

Ejercicio 20

Determinar los espacios topológicos X para los que existe una aplicación recubridora $\pi: Y \to X$ en cada uno de los siguientes casos:

a.- $Y \cong RP^2$

b.- $Y \cong \Pi$

c.- $Y \cong \Pi \# \Pi$

Ejercicio 21

Clasificar las siguientes superficies topológicas:

a.- S_ω **donde** ω **es el esquema** $\omega = ab^{-1}c^{-1}da^{-1}bcd^{-1}$**.**

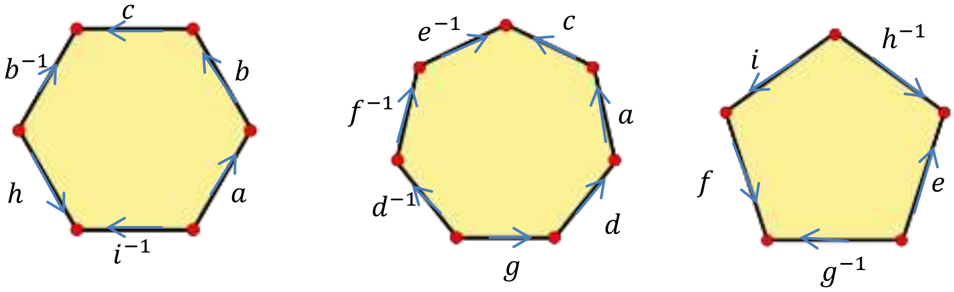
b.- $S_\omega \# K$

Ejercicio 22

Sea la presentación poligonal:

$$\boldsymbol{E = \langle a, b, c, d, e, f, g, h, i;\ i^{-1}abcb^{-1}h, gdace^{-1}f^{-1}d^{-1}, g^{-1}eh^{-1}if \rangle}$$

a.- Determinar a cuál de las superficies modelo es homeomorfa. Calcular su característica de Euler y decidir su carácter de orientabilidad.



b.- Expresar la superficie, si es posible, como suma conexa de toros y botellas de Klein.

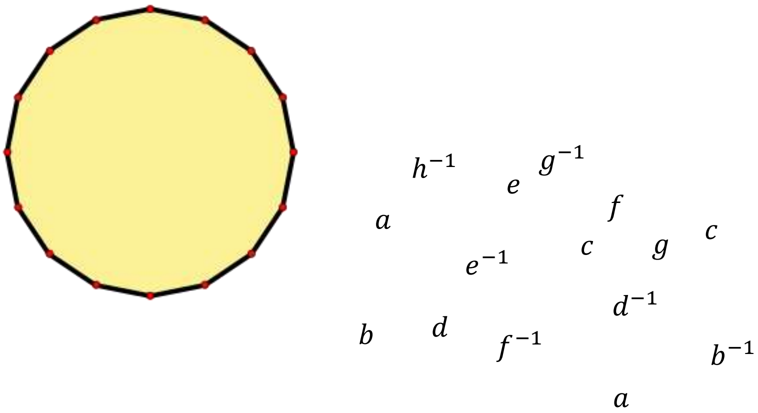
c.- Expresar la superficie, si es posible, como suma conexa de toros y exactamente un plano proyectivo.

Ejercicio 23

Sea la presentación poligonal de una superficie S:

$$\boldsymbol{E = \langle a, b, c, d, e, f, g, h;\ abc^{-1}dcd^{-1}eba^{-1}efg^{-1}hgh^{-1}f \rangle}$$

a.- Clasificar S



b.- Ver si existen superficies compactas M tales que

Ejercicio 24

Clasificar las siguientes superficies topológicas:

a.- S_ω **donde** $\omega = abcda^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}$

b.- $S_\omega \,\#\, K$

Ejercicio 25

Sea S la superficie asociada a $E = abcdefga^{-1}b^{-1}c^{-1}d^{-1}e^{-1}f^{-1}g^{-1}$.

a.- Encontrar las superficies M tales que $S \# M \cong RP^2_{16}$.

b.- Sea $S \cong \Pi_3$, ¿puede recubrir S a $\Pi \# \Pi$? ¿y a $RP^2 \# RP^2 \# RP^2 \# RP^2$?

Ejercicio 26

Sean las superficies S_1 con representación $E = fabcdee^{-1}d^{-1}c^{-1}b^{-1}a^{-1}f$ y $S_2 \cong \Pi_4$.

a.- Clasificar $S_1 \# S_2$ y encontrar las superficies M con $M \# RP^2 \cong S_1 \# S_2$.

b.- Encontrar las superficies S orientables tal que existe $\pi: S_2 \to S$ recubridora.