ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 1

(1) Consideramos la ecuación $\dot{x} = X(t,x)$ donde $X \in C(D, \mathbb{R}^d)$ y $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ es un abierto conexo. Se supone que $x : I \to \mathbb{R}^d$ es una solución.

a) Demuestra que $x \in C^1(I, \mathbb{R}^d)$

b) Se supone $X \in C^k(D, \mathbb{R}^d)$, $k \geq 1$. Demuestra que $x \in C^{k+1}(I, \mathbb{R}^d)$.

c) Se supone ahora que X es continuo pero no C^1. ¿Puede ocurrir que $x(t)$ sea de clase C^2?

(2) Se considera el problema de funciones implícitas

$$F(x,y) = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

donde $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto dado. Se supone además que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

a) Utiliza el teorema de la función implícita para justificar la existencia de una solución $y \in C^1(I)$ definida en algún intervalo I que contiene a x_0 en su interior.

b) Deduce la misma conclusión a partir del teorema de Cauchy-Peano [Sugerencia: derivación implícita]

c) Da un ejemplo que demuestre la imposibilidad de obtener un resultado global que afirmara que la solución está definida en todo $\mathbb{R}$.

(3) Enuncia y demuestra un resultado de existencia para el problema de Cauchy de orden superior $(d \geq 2)$

$$x^{(d)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(d-1)}), \quad x(t_0) = x_0, \; x'(t_0) = x_{0,1}, \ldots, \; x^{(d-1)}(t_0) = x_{0,d-1}.$$

[Sugerencia: $x_1 = x$, $x_2 = x'$, …, $x_d = x^{(d-1)}$ reduce a primer orden]

(4) Dada $f \in C(\mathbb{R}^2)$ consideramos la ecuación integral

$$x(t) = 3e^{2t} + \int_0^t e^{2(t-s)} f(s, x(s))\, ds$$

y buscamos soluciones continuas. Encuentra un problema de valores iniciales que sea equivalente.

(5) Discute en cada caso la validez de la afirmación:

(i) $\dot{x} = \dfrac{x^3}{1+x^6} + t$, $x(0) = 0$ admite solución definida en $]-1,1[$

(ii) $\ddot{x} + t x^2 = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ admite solución definida en $\mathbb{R}$

(iii) $\ddot{x} + x = 0$, $x(0) = 0$, $\dot{x}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ admite solución definida en $\mathbb{R}$

(iv) $\dot{x} = t^2 + x^2$, $x(0) = 0$, admite una solución definida en algún intervalo $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$ y además esta solución es estrictamente creciente

(6) Encuentra una solución de la ecuación integral

$$x(t) = 1 + \int_0^t (t-s)\, x(s)\, ds$$

con $x \in C(\mathbb{R})$.

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 2

(7) Dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^d$ y una función continua $f:[a,b]\to\mathbb{R}^d$, demuestra que se cumple la desigualdad

$$\left\|\int_a^b f(t)\,dt\right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,dt.$$

[Sugerencia: prepara la demostración con una desigualdad análoga para sumas de Riemann]

(8) Se supone $r>0$, $f:[0,\infty[\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ continua y $\varphi:[-r,0]\to\mathbb{R}^d$ continua. Se considera el problema de Cauchy para la ecuación con retardo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t-r)),\ t\geq 0,\quad x|_{[-r,0]} = \varphi.$$

(Ahora la condición inicial es una función y no un punto de $\mathbb{R}^d$).
Define solución $x\in C([-r,\infty[,\mathbb{R}^d)\cap C^1([0,\infty[,\mathbb{R}^d)$ y demuestra que existe una única solución.

(9) Sea $I=[a,b]$ un intervalo compacto y $f_n: I\to\mathbb{R}^d$ una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente en I. Demuestra que la sucesión $\{f_n\}$ es uniformemente acotada y equicontinua.
¿Es cierto este resultado si $I=]a,b[$?

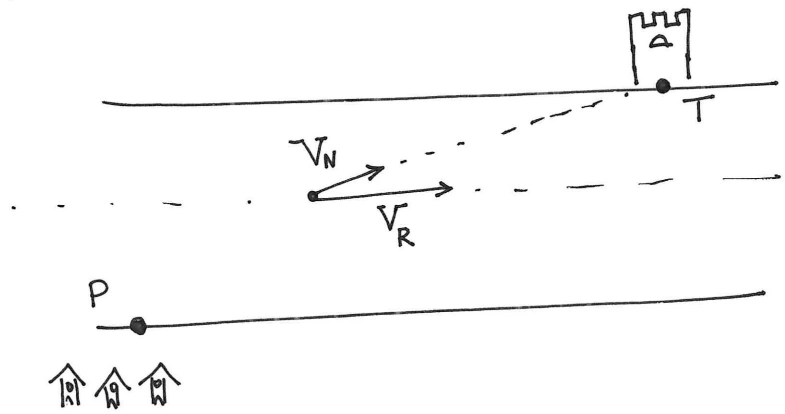
(10) Demuestra que la sucesión $\{f_n\}$, $f_n:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $f_n(t)=\operatorname{sen} nt$, no es equicontinua.

(11) Demuestra que la sucesión de polinomios

$$p_n(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!}$$

no converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Demuestra que sí converge uniformemente en cada intervalo compacto $[a,b]$.

(12) Un nadador decide cruzar el río partiendo del pueblo P. Para ello toma como referencia la torre del castillo T que está al otro lado y al nadar apunta siempre hacia dicha torre.



La velocidad del río es constante y paralela a la orilla. Encuentra un problema de Cauchy que describa el movimiento del nadador en el río. Determina el dominio de definición de dicho problema atendiendo al modelo que representa.

(13) (Poligonal de Euler) Se considera el problema de Cauchy

(PC) $\dot{x} = X(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ con $X : I\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ continuo y acotado.

Se fija un intervalo $[a,b]\subset I$ con $a<t_0<b$ y se considera una partición

$$P = \{ a = t_{-N} < t_{-(N-1)} < \dots < t_{-1} < t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = b \}.$$

Se define la ley de recurrencia

$$x_{n+1} = x_n + (t_{n+1}-t_n)X(t_n, x_n) \text{ si } n\geq 0, \quad x_n = x_{n+1} - (t_{n+1}-t_n)X(t_{n+1},x_{n+1}) \text{ si } n < $$

La función lineal a trozos que pasa por los puntos (t_n,x_n) se llama poligonal de Euler asociada a la partición P y se denota por $x_P(t)$.

(a) Encuentra un argumento intuitivo que sugiera que $x_P(t)$ debe ser una solución aproximada de (PC)

(b) Se supone $\|X(t,x)\|\leq M$. Demuestra $\|x_P(t) - x_P(s)\| \leq M|t-s|$, $t,s\in[a,b]$.

(c) Se supone $\|X(t,x)-X(s,y)\| \leq L[\,|t-s|+|x-y|\,]$. Demuestra que

$$\|x_P(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} X(s, x_P(s))ds\| \to 0 \quad \text{uniformemente en } [a,b]$$

cuando la norma de la partición $\|P\| = \max(t_{n+1}-t_n) \to 0$.

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 3

(14) Se considera el problema de Cauchy $\dot{x} = X(t,x)$, $x(t_0)=x_0$ donde $X : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y cumple que para cada $t\in\mathbb{R}$, la función $x \mapsto X(t,x)$ es monótona no decreciente. Demuestra que hay unicidad hacia el pasado; es decir, si $x_i : I_i \to \mathbb{R}$, $i=1,2$ son dos soluciones, entonces $x_1(t) = x_2(t)$ si $t \in I_1 \cap I_2 \cap]-\infty, t_0]$. (Sugerencia: usa la función $(x_1(t)-x_2(t))^2$).

(15) Consideramos la ecuación $\dot{x} = x^{1/3}$.

a) Si $x : I \to \mathbb{R}$ es una solución que cumple $x(\tau)=0$ para algún $\tau\in I$, entonces $x(t)=0$ si $t\in I$, $t\leq\tau$.

b) Demuestra que hay unicidad para el problema de valores iniciales con condición inicial $x(t_0)=x_0\neq 0$.

c) Generaliza lo anterior a la ecuación $\dot{x} = g(x)$ donde

$$g\in C(\mathbb{R})\cap C^1(\mathbb{R}\setminus\{0\}),\ g(0)=0,\ g'(x)>0 \text{ si } x\neq 0.$$

(16) Se considera un sistema del tipo $\dot{x} = X(t,x)$ donde $X : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ está en $C^{0,1}$ y es 2π-periódica en t,

$$X(t+2\pi, x) = X(t,x) \quad \forall (t,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d.$$

$C^{0,1}$: X continua + $\exists \frac{\partial X}{\partial x}$, $(t,x)\mapsto \frac{\partial X}{\partial x}(t,x)$ continua

a) Una solución $x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^d$ es 2π-periódica si y solo si $x(0)=x(2\pi)$.

b) La función $x(t)=t^2+\operatorname{sen} t$ no puede ser solución de una ecuación de las consideradas en este ejercicio $(d=1)$.

c) Una función $x\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^d)$ es solución 2π-periódica si y solo si cumple la ecuación integral

$$x(t)=x(2\pi)+\int_0^t X(s,x(s))\,ds\ ,\quad t\in\mathbb{R}.$$

(17) Resuelve las ecuaciones integrales siguientes

i) $x(t)=x(2\pi)+\int_0^t x(s)\operatorname{sen} s\,ds$

ii) $x(t)=x(0)+\int_0^t \operatorname{sen} x(s)\,ds$

iii) $x(t)=x(2\pi)+\int_0^t \operatorname{sen} x(s)\,ds$

iv) $x(t)=\int_1^t x(s)(1-x(s))\,ds$

v) $x(t)=x(2)+\int_1^t x(s)^2\,ds$

(18) Resuelve los problemas de valores iniciales siguientes

(i) $\dot{x}=2x^+,\quad x(t_0)=x_0$

(ii) $\dot{x}=\left(\dfrac{x}{t}\right)^+,\quad x(1)=0$

donde $\xi^+=\max(\xi,0)$.

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 4

(19) Encuentra la solución maximal del problema

$$\ddot{x} = -|\dot{x}|\dot{x}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0$$

¿Es única?

(20) En este ejercicio se propone una prueba de la existencia de soluciones maximales sin hipótesis de unicidad. Se considera

$$(PC) \qquad \dot{x} = X(t,x), \quad x(t_0) = x_0$$

con $X : D \to \mathbb{R}^d$ continuo.

i) En el conjunto Σ de todas las soluciones de (PC) se define la relación binaria para $x_i : I_i \to \mathbb{R}^d$, $i=1,2$,

$$x_1 \leq x_2 \text{ si } I_1 \subseteq I_2, \quad x_1(t) = x_2(t) \quad \forall t \in I_1$$

Demuestra que se trata de una relación de orden ¿Es un orden total?

ii) Demuestra que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) tiene una cota superior

iii) Demuestra que (PC) tiene al menos una solución maximal.

(21) Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$ y $f : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ una función continua que cumple $f(0) \in \Omega$, $f(1) \notin \overline{\Omega}$. Demuestra que existe un primer instante en el que f sale de Ω y toca la frontera; es decir, $t_* \in]0,1]$ tal que

$$f(t) \in \Omega \text{ si } t \in [0, t_*[, \quad f(t_*) \in \partial\Omega.$$

(22) Dada ~~una~~ función $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\begin{cases} \operatorname{sen} x, & x\geq 0 \\ x^2, & x<0 \end{cases}$

determina las condiciones iniciales para las que el problema

$$\dot{x}=g(x),\quad x(t_0)=x_0$$

tiene una solución definida en todo $\mathbb{R}$.

(23) En este ejercicio desarrollaremos el método de sub y super-soluciones para ecuaciones escalares. Dada una función continua $X:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, consideramos el problema

$$(P_C)\quad \dot{x}=X(t,x),\quad x(t_0)=x_0$$

y suponemos que $x(t)$ es una solución maximal definida en $]\alpha,\omega[$.

Una función $\alpha\in C^1([t_0,T[)$ se dirá sub-solución estricta si cumple

$$\dot{\alpha}(t)<X(t,\alpha(t)),\quad \alpha(t_0)\leq x_0 .$$

De manera análoga se define $\beta(t)$ super-solución estricta.

Demuestra:

(i) Si $\omega\geq T$ y $\alpha(t)$ es una sub-solución estricta, $x(t)\geq\alpha(t)$ $\forall t\in[t_0,T[$

(ii) Se supone que existen sub y super-soluciones estrictas definidas en $[t_0,T[$. Entonces $\omega\geq T$

(iii) Se supone que existe una sub-solución estricta que cumple $\limsup_{t\uparrow T}\alpha(t)=+\infty$. Entonces $\omega\leq T$.

(iv) Enunciados paralelos para el extremo inferior α.

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 5

(24) En este ejercicio se propone una demostración alternativa del Lema de Gronwall. Se supone que $\varphi : [\tau, T[\to \mathbb{R}$ es continua y cumple

$$\varphi(t) \leq a + b \int_\tau^t \varphi(s)ds \,, \quad t \in [\tau, T[\,,$$

con $a \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$.

i) Demuestra que para cada $n \geq 1$ se cumple

$$\varphi(t) \leq a + ab(t-\tau) + ab^2 \frac{(t-\tau)^2}{2!} + \dots + ab^n \frac{(t-\tau)^n}{n!} + R_n(t)$$

con $R_n(t) = b^{n+1} \int_\tau^t \int_\tau^{t_1} \int_\tau^{t_2} \cdots \int_\tau^{t_n} \varphi(s) ds\, dt_n \dots dt_2 dt_1$.

ii) Demuestra que $\lim_{n \to \infty} R_n(t) = 0$ para cada $t \in [\tau, T[$.

iii) Deduce el lema de Gronwall como consecuencia de lo anterior.

(25) Utiliza el Lema de Gronwall para obtener una demostración alternativa del Lema 3 sobre unicidad local de la Lección 1 (pag 3?)

(26) En el Teorema de la página 18 (Lección 2) se sustituye la hipótesis de crecimiento lineal por otra de crecimiento cuadrático

$$\|X(t,x)\| \leq m(t) \|x\|^2 + n(t) \qquad \forall (t,x) \in D$$

¿Sigue siendo cierta la conclusión?

(26) [Continuación del ejercicio 12] Se considera el sistema

$$\dot{x} = R(1,0) + N \frac{T-x}{\|T-x\|} \,, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{T\}$$

donde R y N son parámetros positivos, $T = (T_1, T_2)$ con $T_i > 0$, $i = 1,2$

Demuestra

a) Si una solución cumple $x_2(\tau) = T_2$ para algún $\tau \in]\alpha, \omega[$, entonces $x_2(t) = T_2$ para cada $t \in]\alpha, \omega[$.

b) Sea $x(t)$ la solución que cumple la condición inicial $x(0) = (0,0)$. Entonces $0 < x_2(t) < T_2$ para cada $t \in]0, \omega[$.

c) Se supone que $x(t)$ es la solución del apartado b). Si $\omega < \infty$ entonces existe $t_n \to \omega$ tal que $x(t_n) \to T$.

(27) Se considera la ecuación de Duffing $\ddot{x} + x^3 = 0$.

i) Si $x(t)$ es una solución, entonces $E(t) = \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 + \frac{1}{4}x(t)^4$ es constante en $]\alpha, \omega[$

ii) Demuestra que todas las soluciones son prolongables a $]-\infty, +\infty[$.

(28) Se considera la ecuación $\ddot{x} - x^3 = 0$.

i) Da una interpretación mecánica de las ecuaciones $\ddot{x} \pm x^3 = 0$

ii) Se considera la solución del problema

$$\ddot{x} - x^3 = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = v_0$$

con $x_0 > 0$, $v_0 > 0$, $\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{4}x_0^4 > 0$. Demuestra que $x(t)$ cumple $\dot{x}(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} x(t)^2 \quad \forall t \in [0, \omega[$.

iii) En las condiciones de ii) demuestra que $\omega < \infty$ y determina una cota superior de ω.

Ecuaciones Diferenciales II

Problemas 6

(29) Calcula, si existe, $\lim_{n\to\infty} x_n(t)$ si $x_n(t)$ es la solución de cada uno de los problemas siguientes:

(i) $\dot{x} = x + t \,\mathrm{sen}\, x, \quad x(0) = \frac{1}{n}$

(ii) $\dot{x} = x^{1/3}, \quad x(0) = \frac{1}{n}$

(iii) $\dot{x} = \frac{1}{x}, \quad x(0) = \frac{1}{n}$

(iv) $\dot{x} = \frac{1}{n} x^2, \quad x(0) = 1$

(v) $\dot{x} = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2}, \quad x(0) = 1$

(30) Se considera el problema

$$\dot{x}_1 = t x_1^2 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2^2 + x_1, \quad x_1(0) = \varepsilon_1, \; x_2(0) = \varepsilon_2.$$

Demuestra que si ε_1 y ε_2 son suficientemente pequeños entonces la solución está definida en $[-100, 100]$.

(31) Formula de manera precisa y demuestra la siguiente afirmación "un péndulo de gran longitud se comporta casi como una partícula libre"

(32) Se supone que $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es continuo y Lipschitz respecto a x,

$$\| X(t, x_1) - X(t, x_2) \| \leq L \| x_1 - x_2 \| \qquad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d.$$

Aquí $L > 0$ es una constante fija. La solución del problema

$$\dot{x} = X(t,x), \quad x(0) = x_0$$

se denota por $x(t;x_0)$. Se pide:

(i) La solución $x(t;x_0)$ está definida en $]-\infty,\infty[$

(ii)
$$\|x(t;x_0) - x(t;\tilde{x}_0)\| \leq e^{L|t|}\, \|x_0 - \tilde{x}_0\|$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, $x_0, \tilde{x}_0 \in \mathbb{R}^d$.

(33) En este ejercicio se presenta un teorema de dependencia continua de las raíces de un polinomio que depende de parámetros.

(i) Dados $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ se considera el polinomio
$$z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0.$$
Demuestra que todas las raíces cumplen
$$|z| \leq \max\{1, |\alpha_0| + |\alpha_1| + \dots + |\alpha_{n-1}|\}.$$

(ii) Dadas funciones continuas $a_0, a_1 \dots, a_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se considera el polinomio (dependiente de un parámetro)
$$a_n(\lambda) z^n + a_{n-1}(\lambda) z^{n-1} + \dots + a_1(\lambda) z + a_0(\lambda) = 0.$$
Se supone $n \geq 2$ y las raíces se denotan por $z_1(\lambda), \dots$ $\dots z_n(\lambda)$, cada una contada según su multiplicidad, el conjunto de raíces
$$\mathcal{R}(\lambda) = \{z_1(\lambda), \dots, z_n(\lambda)\}.$$
Se supone $a_n(\lambda_*) \neq 0$ y $\lambda_K \to \lambda_*$, $z_k \in \mathcal{R}(\lambda_k)$.
Demuestra que $\operatorname{dist}(z_k, \mathcal{R}(\lambda_*)) \to 0$.

(iii) La conclusión anterior puede no ser válida si $a_n(\lambda_*) = 0$

Ecuaciones Diferenciales II

Problemas 7

(34) En cada caso justifica la existencia y diferenciabilidad de $x(t,\lambda)$ en un entorno de $\mathbb{R}\times\{0\}$ y calcula $\frac{\partial x}{\partial \lambda}(t,0)$.

(i) $\ddot{x} + x^3 = 0, \quad x(0) = \lambda, \dot{x}(0) = 0$

(ii) $\ddot{x} + x^3 = 0, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \lambda$

(iii) $\ddot{x} + \lambda x^3 = 0, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0$

(iv) $\ddot{x} + x^3 = \lambda, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

(35) Se considera la ecuación de un péndulo con fricción

$$\ddot{\theta} + c\,\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

y se supone que el coeficiente $c>0$ cumple la condición de fricción débil

$$c^2 < \frac{4g}{\ell}.$$

Sea $\theta(t,\varepsilon)$ la solución que cumple las condiciones iniciales

$$\theta(0) = 0, \quad \dot{\theta}(0) = \varepsilon.$$

Demuestra

(i) $\theta(t,\varepsilon)$ es única y está bien definida en $]-\infty, +\infty[$

(ii) $(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longmapsto \theta(t,\varepsilon) \in \mathbb{R}$ es diferenciable

(iii) $\theta(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\omega} e^{-\frac{c}{2}t}\,\mathrm{sen}\,\omega t + R(t,\varepsilon)$

con $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4g}{\ell} - c^2}$ y $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{R(t,\varepsilon)}{\varepsilon} = 0$

para cada $t \in \mathbb{R}$.

36 Sea $x(t;a,b)$ la solución del problema

$$\dot{x} + \operatorname{sen}(ax) = t, \quad x(0) = b.$$

Demuestra

(i) $x(t;a,b)$ es única y está definida en $]-\infty,+\infty[$

(ii) $(t;a,b) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto x(t;a,b) \in \mathbb{R}$ es diferenciable

(iii) Calcula $\frac{\partial x}{\partial a}(t;0,1)$ y $\frac{\partial x}{\partial b}(t;0,1)$.

37 Se considera la función $F(y) = \int_0^1 e^{-x^2} \cos 2xy \, dx$.

Encuentra una ecuación diferencial lineal de la que $F(y)$ es solución.

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 8

(38) Se supone que la matriz $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ tiene un valor propio complejo $\lambda = a + ib$ $(b \neq 0)$ con vector propio asociado $v \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$.

Demuestra:

(i) Los vectores $u = \mathrm{Re}\, v$, $w = \mathrm{Im}\, v$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^d$ [Sugerencia: $\mathrm{Re}\, z = \frac{z+\bar{z}}{2}$]

(ii) Las funciones $x_1(t) = \mathrm{Re}(e^{\lambda t} v)$, $x_2(t) = \mathrm{Im}(e^{\lambda t} v)$ son soluciones linealmente independientes del sistema $\dot{x} = Ax$.

(39) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Demuestra que $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\| e^{At} \|}{e^{\lambda t}} = +\infty$.

(40) Se considera el sistema $\dot{x} = Ax$ con $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$. Demuestra

(i) $x = 0$ estable $\Longleftrightarrow$ todas las soluciones son acotadas en $[0, \infty[$

(ii) Se suponen las dos condiciones siguientes:

(a) $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0 \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$

(b) Si $\lambda \in \sigma(A)$ con $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, entonces la multiplicidad geométrica de λ coincide con la algebraica.

Prueba que $x = 0$ es estable

(iii) Se supone que A tiene un valor propio $\lambda \in \sigma(A)$ que cumple $\mathrm{Re}\,\lambda = 0$ y la multiplicidad algebraica y geométrica no coinciden. Entonces $x = 0$ es inestable.

(41) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

i) Discute las propiedades de estabilidad de $x = 0$ como solución de $\dot{x} = Ax$

ii) Describe todas las rectas y planos que contienen al origen y son invariantes por el flujo $[\, x_0 \in \Pi \Rightarrow e^{At} x_0 \in \Pi \ \forall t \in \mathbb{R}]$

(42) Se considera el sistema $\dot{x} = Ax + R(x)$ donde $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ y $R : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es una función de clase C^1 que cumple

$$R(0) = 0, \qquad \| R'(x) \| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Demuestra :

i) ~~Si~~ Existe $\varepsilon_* > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon_*$ entonces $x = 0$ es asintóticamente estable

ii) En las condiciones de i), si $\varepsilon < \varepsilon_*$ entonces todas las soluciones cumplen $\lim_{t \to +\infty} \| x(t) \| = 0$.

iii) Se considera la ecuación

$$\ddot{x} + c\dot{x} + kx + \varepsilon \sin x = 0$$

donde c, k y ε son parámetros positivos.

Demuestra que, fijados c y k, el origen $x = 0$ es un atractor global cuando ε es suficientemente pequeño.

iv) Demuestra que el resultado de ~~ε~~ iii) es falso para ε arbitrario.

ECUACIONES DIFERENCIALES II

Problemas 9

43 En cada caso decide si la solución $x(t)$ es estable o inestable.

i) $\dot{x} = 2t - 2x + 1$, $x(t) = t$

ii) $\dot{x} = \operatorname{sen} x$, $x(t) = \pi$

iii) $\ddot{x} + x^7 = 0$, $x(t) = 0$

iv) $\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1)$, $\dot{x}_2 = x_1 + x_2^3$, $x(t) = (0,0)$

v) $\dot{x} = -x + y$, $\dot{y} = -y + x^3$, $x(t) = (0,0)$

vi) $\dot{x}_1 = -6x_1 + x_2 + 5$, $\dot{x}_2 = x_1 - 4x_2 + 3$, $x(t) = (1,1)$

vii) $x''' + x' + x = 0$, $x(t) = 0$.

44 Se considera el sistema de presa y depredador (Volterra)

$$\dot{u} = u(a - bv), \quad \dot{v} = v(-c + du)$$

donde a, b, c, d son parámetros positivos.

i) Existe un único equilibrio (u_*, v_*) con $u_* > 0$, $v_* > 0$

ii) El método de la primera aproximación no da información sobre las propiedades de estabilidad de (u_*, v_*)

iii) Encuentra una función $V(u,v) = F(u) + G(v)$ que cumpla $\langle \nabla V, X \rangle = 0$ en todo el primer cuadrante

iv) Demuestra que (u_*, v_*) es estable pero no es asintóticamente estable.

(45) Se considera un sistema $\dot{x} = X(x)$ donde el campo $X: \Omega \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ es C^1. Se supone que $x_* \in \Omega$ es un equilibrio $(X(x_*) = 0)$ y existe una función $V: \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 que cumple

- V alcanza un mínimo estricto en x_*
- $\langle \nabla V(x), X(x) \rangle < 0$ si $x \in \Omega \setminus \{x_*\}$.

Prueba que si x_0 está cercano a x_* se cumple

i) Existe el siguiente límite y es finito

$$\lim_{t \to +\infty} V(x(t, x_0))$$

ii) $\lim_{t \to +\infty} V(x(t, x_0)) = V(x_*)$

iii) $\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = x_*$

Concluye con

iv) $x = x_*$ es asintóticamente estable.