Algebra III (Doble grado Informática-Matemáticas)

VILLANUEVA NUÑEZ: Ejercicios 2ª Evaluación (Temas 3,4).

Ejercicio 1. *Sea $f = x^4 - 8x^2 + 9 \in \mathbb{Q}[x]$ (que es irreducible).*

(1) *Probar que $\mathbb{Q}(f) = \mathbb{Q}(\sqrt{4+\sqrt{7}})$ (Indicación: Calcular las raíces de f y analizar los resultados de multiplicarlas entre sí).*

(2) *Describir los elementos del grupo de Galois $G(f/\mathbb{Q})$, calcular sus órdenes, y probar que este grupo es isomorfo al grupo de Klein $K = \langle u, v \mid u^2 = 1 = v^2,\ uv = vu\rangle$.*

(3) *Probar las igualdades*

$$\begin{cases} \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 - 4 = \sqrt{7}, \\ \sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}, \\ \sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}, \end{cases}$$

y usarlas para describir los siguientes subgrupos del grupo $G(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q})$:

$$G(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}(\sqrt{7})), \quad G(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}(\sqrt{14})), \quad G(\mathbb{Q}(f)/\mathbb{Q}(\sqrt{2})).$$

(4) *Describir el retículo de subgrupos de $G(f/\mathbb{Q})$ y, usando la conexión de Galois, el correspondiente retículo de subcuerpos de $\mathbb{Q}(f)$.*

Ejercicio 2. *Sea $z = z_{12}$.*

(1) *Describir los complejos z^k, $1 \le k \le 12$, en la forma $a + bi$ y representarlos geométricamente como puntos en el plano Euclídeo. Determinar Φ_{12} y una base de la extensión $\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}$.*

(2) *Describir el grupo $G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q})$ y el orden de sus elementos ¿Es isomorfo a algún grupo conocido? Describir su retículo de subgrupos.*

(3) *Describir el retículo de subcuerpos de $\mathbb{Q}(z)$.*

(1) $z^k = e^{\frac{2\pi i k}{12}} = e^{\frac{k\pi i}{6}} = \cos(\frac{k}{6}\pi) + i\sin(\frac{k}{6}\pi) \quad \forall\, 1 \le k \le 12$

$z = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ $\qquad$ $z^7 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$

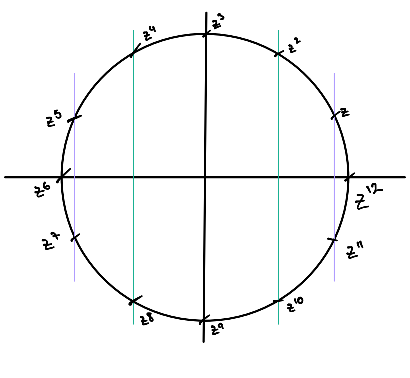
$z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $z^8 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z^3 = i$ $\qquad$ $z^9 = -i$

$z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $z^{10} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z^5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$ $\qquad$ $z^{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

$z^6 = -1$ $\qquad$ $z^{12} = 1$



$\Phi_{12} = \frac{x^{12}-1}{\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4\Phi_6} = \frac{x^{12}-1}{x^8+x^6-x^2-1} = x^4 - x^2 + 1$

$\left.\begin{array}{l} \Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_6 = x^6 - 1 \\ \Phi_4 = x^2+1 \end{array}\right\}$ $\varphi(12) = 4$

$Irr(z, \mathbb{Q}) = \phi_{12} \Rightarrow [\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}] = 4 \Rightarrow B_{\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}} = \{1, z, z^2, z^3\}$

(2) $G \equiv G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}) \approx \mathbb{Z}_{12}^{\times} = \{1, 5, 7, 11\} \Rightarrow G(\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}) = \{\sigma_i : \mathbb{Q}(z) \longrightarrow \mathbb{Q}(z)$

$\mathbb{Q}$- inmersiones tal que $\sigma_i(z) = z^i, \quad i = 1, 5, 7, 11\}$

$\mathrm{ord}(\sigma_1) = 1$

$\sigma_5^2(z) = \sigma_5(z^5) = z^{25} = z \Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma_5) = 2$

$\sigma_7^2(z) = \sigma_7(z^7) = z^{49} = z \Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma_7) = 2$

$\sigma_{11}^2(z) = \sigma_{11}(z^{11}) = z^{121} = z \Rightarrow \mathrm{ord}(\sigma_{11}) = 2$

$$\begin{tikzcd}
 & G & \\
\langle \sigma_5 \rangle \arrow[ur, "2"] & \langle \sigma_7 \rangle \arrow[u, "2"] & \langle \sigma_{11} \rangle \arrow[ul, "2"'] \\
 & \{id\} \arrow[ul, "2"] \arrow[u, "2"] \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

(3)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(z) & \\
\mathbb{Q}(z)^{\langle \sigma_5 \rangle} \arrow[ur, "2"] & \mathbb{Q}(z)^{\langle \sigma_7 \rangle} \arrow[u, "2"] & \mathbb{Q}(z)^{\langle \sigma_{11} \rangle} \arrow[ul, "2"'] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "2"] \arrow[u, "2"] \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}
\equiv
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(z) & \\
\mathbb{Q}(z^3) \arrow[ur, "2"] & \mathbb{Q}(z^4) \arrow[u, "2"] & \mathbb{Q}(z+\bar{z}) \arrow[ul, "2"'] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "2"] \arrow[u, "2"] \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}
\equiv
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q}(z) & \\
\mathbb{Q}(i) \arrow[ur, "2"] & \mathbb{Q}(i\sqrt{3}) \arrow[u, "2"] & \mathbb{Q}(\cos(\frac{\pi}{6})) \arrow[ul, "2"'] \\
 & \mathbb{Q} \arrow[ul, "2"] \arrow[u, "2"] \arrow[ur, "2"'] &
\end{tikzcd}$$

(5) Observamos que $z^6 = z^{-1} = \bar{z}$, el conjugado de z. Por tanto $\sigma_6 : z \mapsto z^6$ es justamente la restricción del automorfismo de conjugación compleja $a + bi \mapsto a - bi$.

(6) Es claro entonces que el número $z + \bar{z}$ queda fijo por σ_6. Entonces $\cos\frac{2\pi}{7} = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in \mathbb{Q}(z)^{\sigma_6}$. Como la extensión $\mathbb{Q}(z)^{\sigma_6}/\mathbb{Q}$ es de grado 3, y $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{7})/\mathbb{Q}$ es también de grado tres (ver Ejercicio 7), concluimos que

$$\mathbb{Q}(z)^{\sigma_6} = \mathbb{Q}(\cos(2\pi/7)) \, .$$

(6)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Q} \arrow[dl, "2"'] \arrow[r, "3"] & \mathbb{Q}(\cos(2\pi/7)) \arrow[dl, "2"] \\
\mathbb{Q}(i\sqrt{7}) \arrow[r, "3"'] & \mathbb{Q}(z_7) &
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 7. *Sea $n > 2$ y $z = z_n$ la raíz n-ésima primitiva de la unidad.*

(1) *Observando que $(z + \bar{z}) = 2\cos\frac{2\pi}{n}$, probar que z y $\bar{z}$ son las raíces del polinomio $x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\, x + 1 \in \mathbb{R}[x]$.*

(2) *Argumentar que $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \leq \mathbb{Q}(z)$, pero $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \neq \mathbb{Q}(z)$.*

(3) *Probar que $Irr(z, \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})) = x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\, x + 1$ y que $[\mathbb{Q}(z) : \mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n})] = 2$.*

(4) *Probar que $[\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) : \mathbb{Q}] = \varphi(n)/2$ y que el polinomio $Irr(\cos\frac{2\pi}{n}, \mathbb{Q})$ es de grado $\varphi(n)/2$.*

Indicación de solución: (1) Puesto que $z^{-1} = \bar{z}$, tenemos las igualdades $z\bar{z} = 1$ y $z + \bar{z} = 2\cos(\frac{2\pi}{n})$, de donde el z y $\bar{z}$ son las raíces raíz del polinomio $x^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{n})x + 1$.

(2) $\cos(\frac{2\pi}{n}) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}(z + z^{n-1}) \in \mathbb{Q}(z)$. Los cuerpos son distintos pues $\mathbb{Q}(\cos\frac{2\pi}{n}) \leq \mathbb{R}$ y $z \notin \mathbb{R}$ al ser $n \geq 3$.

(4) Se deduce de los apartados anteriores, teniendo en cuenta la torre

$$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\cos(2\pi/n)) \leq \mathbb{Q}(z).$$