**Topología II**

**Tema 1 El grupo fundamental**

**Definición**

Sea $X$ un espacio topológico. *Un lazo* en $X$ con base un punto del espacio, $x \in X$ es un arco $\alpha: [0,1] \to X$ continua con $\alpha(0) = \alpha(1) = x$. Se denota $\Omega_x(X)$ el conjunto de todos los lazos en $X$ con base $x$.

Sean $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$, se define *el producto de lazos* como

$$\alpha * \beta: [0,1] \to X \quad (\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) \; si \; 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) \; si \; \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

**Definición**

Sena $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$ se dice que son *homotópicos*, $\alpha \simeq \beta$, si existe una aplicación:

$$H: [0,1]x[0,1] \to X \;\; continua \; y:$$

$(i)$ $H(t,0) = \alpha(t)$ $\forall t \in [0,1]$, es decir, $H(*,0) = \alpha$.

$(ii)$ $H(t,1) = \beta(t)$ $\forall t \in [0,1]$, es decir, $H(*,1) = \beta$.

$(iii)$ $H(0,s) = H(1,s) = x$ $\forall s \in [0,1]$, es decir, $H(0,*) = H(1,*) = \varepsilon_x$.

Se dice que $H$ es *una homotopía* de $\alpha$ a $\beta$, y se escribe: $H: \alpha \simeq \beta$

**Propiedades**

1.- Si $\alpha \in \Omega_x(X)$, entonces $\alpha \simeq \alpha$, con $H: [0,1]x[0,1] \to X$ por $H(t,s) = \alpha(t)$.

2.- Si $h: [0,1] \to [0,1]$ es un homomorfismo con $h(0) = 0$ $h(1) = 1$ entonces $\alpha \simeq \alpha \circ h$ donde $\alpha \circ h$ es una reparametrización de $\alpha$ preservando la orientación.

3.- Sean $\alpha, \beta \in \Omega_x(X)$. Si $\alpha \simeq \beta$ entonces $\beta \simeq \alpha$.

4.- Sean $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega_x(X)$. Si $\alpha \simeq \beta$ y $\beta \simeq \gamma$ entonces $\alpha \simeq \gamma$.

**Proposición**

Sean $X$ un espacio topológico y puntos $p, q, r \in X$. Sean $\alpha, \alpha' \in \Omega_{p,q}(X)$ y $\beta, \beta' \in \Omega_{q,r}(X)$ arcos tales que $\alpha \simeq \alpha'$ y $\beta \simeq \beta'$. Entonces $\alpha * \beta \simeq \alpha' * \beta'$.

**Proposición**

Sean $X$ un espacio topológico y puntos $p, q, r, s \in X$. Sean $\alpha \in \Omega_{p,q}(X)$,$\beta \in \Omega_{q,r}(X)$ y $\gamma \in \Omega_{r,s}(X)$. Las siguientes propiedades son ciertas:

$(i)$ $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$ $\;(ii)$ $\alpha * \varepsilon_p = \varepsilon_p * \alpha = \alpha$ $(iii)$ $\alpha * \bar{\alpha} = \varepsilon_p$

**Ejercicio 1**

**Sean $f, g: [0,1] \to R$ arcos con el mismo punto inicial $x \in X$ y el mismo punto final $y \in Y$. Demostrar que $f \simeq g$ si y solo si $f * \overline{g}$ es un lazo homotópico al lazo constante $\varepsilon_x$.**

**Solución**

**Ejercicio 2**

**Demostrar que si $f, g: [0,1] \to X$ son arcos con $f(1) = g(0)$ entonces $\overline{f * g} = \overline{g} * \overline{f}$.**

**Solución**

**Teorema**

Sea $X$ un espacio topológico y $p \in X$ un punto arbitrario. La ley de composición interna

$$*: \Pi_1(X,p) x \Pi_1(X,p) \longrightarrow \Pi_1(X,p) \quad [\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta]$$

está bien definida y dota al conjunto $\Pi_1(X,p)$ de estructura de grupo algebraico.

El grupo $(\Pi_1(X,p),*)$ es conocida como **Grupo Fundamental o de Poincaré** del espacio en el punto $p$.

**Corolario**

El grupo fundamental $\Pi_1(X,p)$ está unívocamente determinado salvo isomorfismos por la arcocomponente $C_p$ del punto $p$. En particular, si $X$ es arcoconexo entonces la clase de isomorfía de $\Pi_1(X,p)$ no depende del punto $p \in X$. En este caso la notación es $\Pi_1(X)$.

**Proposición**

Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos y $\varphi: X \to Y$ una aplicación continua. Consideremos $\alpha, \beta \in \Omega_{p,q}(X)$ y los correspondientes $\varphi \circ \alpha, \varphi \circ \beta \in \Omega_{\varphi(p),\varphi(q)}(Y)$. Se tiene que

$$\alpha \simeq \beta \Longrightarrow \varphi \circ \alpha \simeq \varphi \circ \beta$$

En particular:

- La aplicación $\varphi_*: \Pi_1(X,p) \to \Pi_1\big(Y,\varphi(p)\big)$ $\varphi_*([\alpha]) = [\varphi \circ \alpha]$ está bien definida y es un homomorfismo de grupos.
- Si $\psi: Y \to Z$ es otra aplicación continua y consideramos los homomorfismos de grupos $\psi_*: \Pi_1\big(X,\varphi(p)\big) \to \Pi_1\Big(Y,\psi\big(\varphi(p)\big)\Big)$ y $(\psi \circ \varphi)_*: \Pi_1(X,p) \to \Pi_1\Big(Z,\psi\big(\varphi(p)\big)\Big)$ entonces se tiene que $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

**Ejercicio 3**

**Sea $f: X \to Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos. Tomamos dos puntos $x_1$ y $x_2$ en $X$. Denotamos por $(f_*)_1: \Pi_1(X, x_1) \to \Pi_1(Y, f(x_1))$ y por $(f_*)_2: \Pi_1(X, x_2) \to \Pi_1(Y, f(x_2))$ a los homomorfismos inducidos por $f$ en los puntos $x_1$ y $x_2$. Sea $\gamma: [0,1] \to X$ un arco con $\gamma(0) = x_1$ y $\gamma(1) = x_2$. Demostrar que: $(f_*)_2 \circ F_\gamma = F_{f\circ\gamma} \circ (f_*)_1$, donde $F_\gamma: \Pi_1(X, x_1) \to \Pi_1(X, x_2)$ es el isomorfismo inducido de $\gamma$ y $F_{f\circ\gamma}: \Pi_1(Y, f(x_1)) \to \Pi_1(Y, f(x_2))$ es el isomorfismo inducido de $f \circ \gamma: [0,1] \to Y$.**

**Solución**

**Ejercicio 4**

**Sean $X$ espacio topológico y $x \in X$ un punto:**

**a.- Sea $\gamma: [0,1] \to X$ un lazo con base $x$. Demostrar que el isomorfismo $F_\gamma: \Pi_1(X,x) \to \Pi_1(X,x)$ es la identidad si y solo si la clase de homotopía $[\gamma]$ pertenece al centro de $\Pi_1(X,x)$.**

**b.- Sean $\gamma, \mu: [0,1] \to X$ arcos con punto inicial $x \in X$ y punto final $y \in X$, Encontrar una condición necesaria y suficiente para que los homomorfismos $F_\gamma, F_\mu: \Pi_1(X,x) \to \Pi_1(X,y)$ sean iguales.**

**Solución**

a.- Sea $\gamma \in \Omega_x(X)$ y consideramos el isomorfismo: $F_\gamma: \Pi_1(X,x) \to \Pi_1(X,x)$

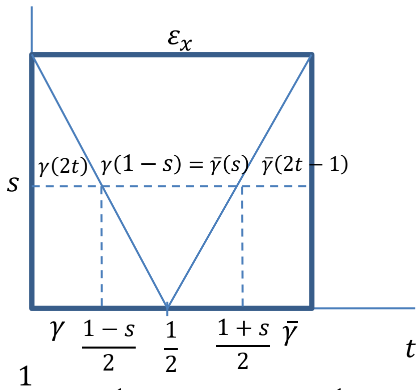
$$F_\gamma([\alpha]) = [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma]$$

$$F_\gamma = Id_{\Pi_1(X,x)} \Leftrightarrow F_\gamma([\alpha]) = Id_{\Pi_1(X,x)}([\alpha]) \ \forall \alpha \in \Omega_x(X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\bar{\gamma} * \alpha * \gamma] = [\alpha] \ \forall \alpha \in \Omega_x(X) \Leftrightarrow [\bar{\gamma}] * [\alpha] * [\gamma] = [\alpha] \ \forall \alpha \in \Omega_x(X)$$

Observemos que $[\gamma] * [\bar{\gamma}] = [\varepsilon_x] \Longrightarrow [\bar{\gamma}]^{-1} = [\gamma]$ ya que $H: [0,1]^2 \to X$ definida por

Tenemos que ver que $\gamma * \bar{\gamma} \simeq \varepsilon_x$




$$\frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t} \Longrightarrow \frac{1}{2} - t = \frac{s}{2} \Longrightarrow t = \frac{1}{2} - \frac{s}{2} = \frac{1-s}{2}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{\frac{1}{2}}{t - \frac{1}{2}} \Longrightarrow t - \frac{1}{2} = \frac{s}{2} \Longrightarrow t = \frac{s}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+s}{2}$$

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in \left[0, \frac{1-s}{2}\right] \\ \bar{\gamma}(s) = \gamma(1-s) & t \in \left[\frac{1-s}{2}, \frac{1+s}{2}\right] \\ \bar{\gamma}(2t-1) & t \in \left[\frac{1+s}{2}, 1\right] \end{cases} \ es\ una\ homotopia\ de\ \gamma * \bar{\gamma}\ en\ \varepsilon_x$$

Veamos que es homotopía: $H$ es continua, por serlo en cada trozo y en los bordes.

$(i)\ H(t,0)=\begin{cases}\gamma(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \bar{\gamma}(2t-1) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}=(\gamma*\bar{\gamma})(t)\quad \forall t\in[0,1]$

$(ii)\ H(t,1)=\gamma(0)=\bar{\gamma}(1)=x=\varepsilon_x\ \ \forall t\in[0,1].$

$(iii)\ H(0,s)=\gamma(0)=x\ \ H(1,s)=\bar{\gamma}(1)=x\ \ \forall s\in[0,1].$

Hemos probado que $\gamma*\bar{\gamma}\simeq\varepsilon_x\Longrightarrow[\gamma]*[\bar{\gamma}]=[\varepsilon_x]\Longrightarrow[\bar{\gamma}]^{-1}=[\gamma]$

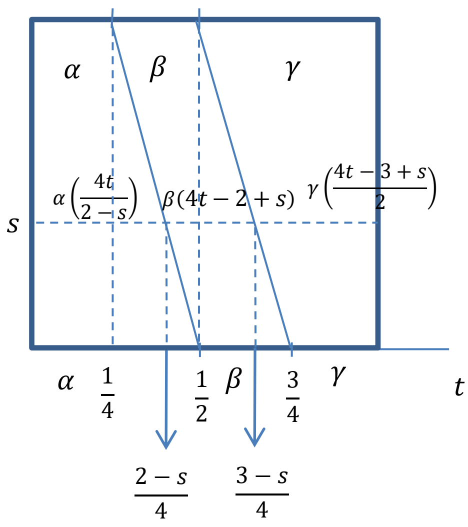
$$F_\gamma=Id_{\Pi_1(X,x)}\Leftrightarrow[\bar{\gamma}]*[\alpha]*[\gamma]=[\alpha]\ \forall\alpha\in\Omega_x(X)\Leftrightarrow[\alpha]*[\gamma]=[\bar{\gamma}]^{-1}*[\alpha]\ \forall\alpha\in\Omega_x(X)$$

$$\Leftrightarrow[\alpha]*[\gamma]=[\gamma]*[\alpha]\ \forall\alpha\in\Omega_x(X)\Leftrightarrow[\gamma]\in Z(\Pi_1(X,x))$$

**NOTA**: Probar que $\alpha*(\beta*\gamma)\simeq(\alpha*\beta)*\gamma$

$$((\alpha*\beta)*\gamma)(t)=\begin{cases}(\alpha*\beta)(2t) & 0\le t\le\dfrac{1}{2}\\ \gamma(2t-1) & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}=\begin{cases}\alpha(4t) & 0\le t\le\dfrac{1}{4}\\ \beta(4t)-1 & \dfrac{1}{4}\le t\le\dfrac{1}{2}\\ \gamma(2t-1) & \dfrac{1}{2}\le t\le 1\end{cases}$$

$$\alpha(1)=\beta(0)\quad\beta(1)=\gamma(0)$$




$$\frac{1}{s}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}-t}\Longrightarrow\frac{1}{2}-t=\frac{s}{4}\Longrightarrow t=\frac{1}{2}-\frac{s}{4}=\frac{2-s}{4}$$

$$\frac{1}{s}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}-t}\Longrightarrow\frac{3}{4}-t=\frac{s}{4}\Longrightarrow t=\frac{3}{4}-\frac{s}{4}=\frac{3-s}{4}$$

$\alpha(4t)$ se sustituye $t=\frac{2-s}{4}$ en $4t=4\frac{2-s}{4}=2-s\Longrightarrow\alpha\left(\frac{4t}{2-s}\right)$

$\beta(4t-1)$ se sustituye $t=\frac{2-s}{4}$ en $4t-1=1-s\Longrightarrow\beta(4t-1-1+s)=\beta(4t-2+s)$

En $t = \frac{3-s}{4} \Longrightarrow \beta(4t-2+s) = \beta\left(4\frac{3-s}{4} - 2 + s\right) = \beta(1)$

$\gamma(2t-1)$ se sustituye $t = \frac{3-s}{4}$ en $2t - 1 = 2\frac{3-s}{4} - 1 = \frac{1-s}{2} \Longrightarrow \gamma\left(2t - 1 - \frac{1-s}{2}\right) = \gamma\left(\frac{4t-3+s}{2}\right)$

Se sustituye en $t = 1 \Longrightarrow \frac{4t-3+s}{2} = \frac{1+s}{2} \Longrightarrow \gamma\left(\frac{4t-3+s}{2}\frac{2}{1+s}\right) = \gamma\left(\frac{4t-3+s}{1+s}\right)$

$$H(t,s) = \begin{cases} \alpha\left(\dfrac{4t}{2-s}\right) & t \in \left[0, \dfrac{2-s}{4}\right] \\ \beta(4t-2+s) & t \in \left[\dfrac{2-s}{4}, \dfrac{3-s}{4}\right] \\ \gamma\left(\dfrac{4t-3+s}{1+s}\right) & t \in \left[\dfrac{3-s}{4}, 1\right] \end{cases} \textit{ es una homotopia de } \gamma * \bar{\gamma} \textit{ en } \varepsilon_x$$

En $t = \frac{2-s}{4}$: $\alpha(1) = \beta(0)$ y en $t = \frac{3-s}{4}$: $\beta(1) = \gamma(0)$

En $t = 1$: $\gamma(1)$

Veamos que es homotopía: $H$ es continua, por serlo en cada trozo y en los bordes.

$$(i)\ H(t,0) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \beta\big(2(2t-1)\big) & t \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \\ \gamma(2(2t-1)-1) & t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases} = \big(\alpha * (\beta * \gamma)\big)(t) \quad \forall t \in [0,1]$$

$$(ii)\ H(t,1) = \begin{cases} \alpha(4t) & t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \beta(4t-1) & t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ \gamma(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases} = \big((\alpha * \beta) * \gamma\big)(t) \ \ \forall t \in [0,1].$$

$$\big(\alpha * (\beta * \gamma)\big)(0) = \alpha(0) = \big((\alpha * \beta) * \gamma\big)(0)$$

$$\big(\alpha * (\beta * \gamma)\big)(1) = \gamma(1) = \big((\alpha * \beta) * \gamma\big)(1)$$

Es decir, $\alpha * (\beta * \gamma) \simeq (\alpha * \beta) * \gamma$ .

NOTA: Probar que $\alpha * \varepsilon_x \simeq \alpha$.

b.- Como $F_\gamma, F_\mu$ son isomorfismos: $F_\gamma = F_\mu \Leftrightarrow {F_\gamma}^{-1} \circ F_\mu = Id_{\Pi_1(X,x)}$.

Se sabe que $[\bar{\gamma}] = [\gamma]^{-1} \Longrightarrow {F_\gamma}^{-1}([\alpha]) = [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}] = F_{\bar{\gamma}}([\alpha])\ \forall\alpha \in \Omega_x(X)\ , por\ lo\ tanto:$

$$\left({F_\gamma}^{-1} \circ F_\mu\right)([\alpha]) = \left(F_{\bar{\gamma}} \circ F_\mu\right)([\alpha]) = F_{\bar{\gamma}}(\bar{\mu} * \alpha * \mu) = [\gamma * \bar{\mu} * \alpha * \mu * \bar{\gamma}] =$$

$$= \left[\overline{(\mu * \bar{\gamma})} * \alpha * (\mu * \bar{\gamma})\right] = F_{\mu * \bar{\gamma}}([\alpha])\ \forall\alpha \in \Omega_x(X) \Longrightarrow {F_\gamma}^{-1} \circ F_\mu = F_{\mu * \bar{\gamma}} = Id_{\Pi_1(X,x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\mu * \bar{\gamma}] \in Z\left(\Pi_1(X,x)\right)$$

**Ejercicio 5**

**Sea $f: R \to R^+$ una función continua y sea**

$$S_f = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 = f(z)^2\}$$

**a.- Estudiar el conjunto $S_f \cap \{z = z_0\}$ con $z_0 \in R$. Esbozar un dibujo de $S_f$.**

**b.- Demostrar que si $g: R \to R^+$ es otra función continua entonces $S_g$ es homeomorfo a $S_f$.**

**c.- Calcular el grupo fundamental de $S_f$.**

**Corolario (Invarianza topológica del Grupo Fundamental)**

Si $\varphi: X \to Y$ es un homeomorfismo de espacios topológicos entonces $\varphi_*: \Pi_1(X, p) \to \Pi_1\big(Y, f(p)\big)$ es un isomorfismo de grupos.

**Proposición**

El grupo fundamental de un subconjunto estrellado de $R^n$ es trivial. En particular, todo subconjunto convexo de $R^n$ tiene grupo fundamental trivial.

Además se tiene que

$$\Pi_1\big(XxY, (p, q)\big) \cong \Pi_1(X, p)x\Pi_1(Y, q)$$

**Ejercicio 6 (Grupo fundamental de un producto)**

**Sean $X$ e$Y$ dos espacios con puntos base $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$. Sea**

$$\boldsymbol{\Phi}: \boldsymbol{\Pi_1}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Pi_1}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y_0}) \to \boldsymbol{\Pi_1}\big(\boldsymbol{XxY}, (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\big) \quad \boldsymbol{\Phi}([\boldsymbol{\alpha}], [\boldsymbol{\beta}]) = [(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})]$$

**Donde $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}): [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}] \to \boldsymbol{XxY}$ es el arco $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})(\boldsymbol{t}) = \big(\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t}), \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{t})\big)$. Demostrar que $\boldsymbol{\Phi}$ está bien definida y es un isomorfismo. Concluir que:**

$$\boldsymbol{\Pi_1}\big(\boldsymbol{XxY}, (\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})\big) \cong \boldsymbol{\Pi_1}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x_0})\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Pi_1}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{y_0})$$

**Solución**

**NOTA IMPORTANTE**

El grupo Fundamental de $S^n$ es $Z$. El grupo fundamental de X estrellado es $\Pi_1(X, x) = \{[\varepsilon_x]\}$.

El grupo Fundamental del toro $T = S^1 x S^1$ es $ZxZ = Z^2$. El grupo Fundamental del cilindro $S^n xR$ es $Zx\{1\} \cong Z$. El grupo fundamental de X estrellado es $\Pi_1(S^1, 1) = (\{[\alpha_n]: n \in N, *\})$.

**Definición**

*Un grupo topológico* es un par $(G, .)$ donde:

- $G$ es un espacio topológico.
- $.: GxG \to G$ es una ley de composición interna en $G$ que le dota de estructura algebraica.
- La aplicación $GxG \to G\ (a, b) \to a. b^{-1}$ es continua, o equivalentemente:
  $.: GxG \to G\ (a, b) \to a. b \quad y \quad (\quad)^{-1}: G \to G \quad a \to a^{-1} \quad son\ continuas$

**Ejercicio 7**

**Probar que son grupos topológicos:**

$(a)$ $R^n$ **con la suma y la topología usuales.**

$(b)$ $R_* = R - \{0\}$ **y** $C_* = C - \{0\}$ **con los productos y las topologías usuales.**

$(c)$ $S^1 \subset C$ **con el producto de números complejos y la topología usual.**

$(d)$ **El grupo lineal** $GL(n)$, **el grupo ortogonal** $O(n)$ **y el grupo especial ortogonal** $SO(n)$ **con el producto de matrices y la topología inducida por** $M_n(R) \cong R^{n^2}$.

**Ejercicio 8**

**Sea** $\boldsymbol{\varphi}: \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}} \rightarrow \boldsymbol{R}$ **aplicación continua. Sea** $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Graf}(\boldsymbol{\varphi}) = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})); \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}}\} \subseteq \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}$**.**
**Calcular el grupo fundamental** $\boldsymbol{\Pi}_{\boldsymbol{1}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{x})\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$**.**

**Solución**

**Propiedad del levantamiento de arco**

Sea $\alpha: [0,1] \to S^1$ un arco con $\alpha(0) = 1$. Entonces existe un único arco $\tilde{\alpha}: [0,1] \to R$ tal que $\rho \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ y $\tilde{\alpha}(0) = 0$, donde $\rho: R \to S^1, \rho(t) = e^{2\pi i t} = \big(cos(2\pi t), sen(2\pi t)\big)$.

**Propiedad del levantamiento de homotopías**

Sea $\alpha, \beta: [0,1] \to S^1$ un arco con $\alpha(0) = \beta(0) = 1$ y $\alpha(1) = \beta(1)$. Supongamos que existe una homotopía $H$ de $\alpha$ en $\beta$. Entonces:

- Los arcos $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ tienen los mismos extremos.
- La aplicación $\widetilde{H}$ es una homotopía (con extremos fijos) de $\tilde{\alpha}$ en $\tilde{\beta}$, donde $\widetilde{H}: [0,1]^2 \to R$ continua tal que $\rho \circ \widetilde{H} = H$ y $\widetilde{H}(0,0) = 0$.

**Definición**

Si $\alpha \equiv (\alpha_1, \alpha_2): [0,1] \to S^1 \subset R^2$ es un arco de clase $C^1$ con $\alpha(0) = (1,0)$, entonces su *levantamiento vía* $\rho$ *a* $R$ dado por:

$$\tilde{\alpha}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \big(\alpha_1(s)\alpha_2{}'(s) - \alpha_1{}'(s)\alpha_2(s)\big) ds$$

De forma explícita, y para cada $n \in Z$, el lazo $\alpha_n: [0,1] \to S^1 \subset C$, $\alpha_n(t) = e^{2n\pi i t}$ se levanta con condición inicial $\tilde{\alpha}_n(0) = 0$ al arco $\tilde{\alpha}_n: [0,1] \to R$, $\tilde{\alpha}_n(t) = nt$.

**Definición**

Dado un lazo $\alpha: [0,1] \to S^1$ con base el punto $1 \in S^1$, definimos *el grado de* $\alpha$ como:

$$\deg(\alpha) = \tilde{\alpha}(1) \in Z$$

donde $\tilde{\alpha}$: $[0,1] \to R$ representa el levantamiento de $\alpha$ con condición inicial $\tilde{\alpha}(0) = 0$.

**Proposición**

Dados $\alpha, \beta: [0,1] \to S^1$ dos lazos con base $1 \in S^1$, se tiene que

$$\alpha \simeq \beta \Leftrightarrow \deg(\alpha) = \deg(\beta)$$

**Ejercicio 9**

**Sea $f \in \Omega_1(S^1)$ un lazo de clase $C^1$. Demostrar que:**

$$\deg(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \langle f'(u), J(f(u))\rangle du$$

**donde $J: R^2 \rightarrow R^2$ es el giro de ángulo $\pi/_2$ dado por $J(x, y) = (-y, x)$.**

**Solución**

**Teorema**

La aplicación

$$deg: (\Pi_1(S^1, 1),*) \to (Z, +), \qquad \deg([\alpha]) = \deg(\alpha)$$

está bien definida y es un isomorfismo de grupos.

**Proposición**

Si $\overline{D}$ denota el disco unidad cerrado $\overline{D} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, no existe ninguna aplicación continua $f: \overline{D} \to S^1$ tal que $f_{/S^1} = Id_{S^1}$.

**Teorema (Punto fijo de Brower)**

Sea $f: \overline{D} \to \overline{D}$ una aplicación continua. Entonces existe $p_0 \in \overline{D}$ tal que $f(p_0) = p_0$.

**Ejercicio 10**

**Sean $\boldsymbol{f, g: R^2 \to R^2}$ aplicaciones continuas y acotadas. Demostrar que existe un punto $\boldsymbol{q \in R^2}$ tal que $\boldsymbol{f(q) = q - 3g(q)}$.**

**Solución**

Como se quiere probar que $\exists q \in R^2$ tal que

$$f(q) = q - 3g(q) \Longrightarrow f(q) + 3g(q) = q \Longrightarrow (f + 3g)(q) = q$$

Sea $h: R^2 \to R^2$ dada por $h = f + 3g$, que es continua y acotada por serlos las funciones $f$ y $g$.

Se restringe al $\overline{D} = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $h: \overline{D} \to \overline{D}$, que es continua en $\overline{D}$.

Como $f$ está acotada: $\exists M_1 > 0 : \|f(x, y)\|_2 \leq M_1 \;\; \forall (x, y) \in R^2$

Como $g$ está acotada: $\exists M_2 > 0 : \|g(x, y)\|_2 \leq M_2 \;\; \forall (x, y) \in R^2$

Sea $(x, y) \in R^2$:

$$\|h(x, y)\|_2 = \|f(x, y) + 3g(x, y)\|_2 \leq \|f(x, y)\|_2 + 3\|g(x, y)\|_2 \leq M_1 + 3M_2 \; \forall (x, y) R^2$$

Por lo tanto, $h$ está acotada y $h(R^2) \subseteq \overline{B}(0, M_1 + 3M_2)$, por el teorema del punto fijo de Brower, $\exists q \in R^2 : h(q) = q$, es decir, $f(q) = q - 3g(q)$.

**Ejercicio 11**

**Demostrar que el sistema de ecuaciones**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - arctg(x^2 - y^3) = 5} \\ \boldsymbol{cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \frac{1}{y} = -3} \end{cases}$$

**tiene al menos una solución $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R^2}$.**

**Solución**

$$\begin{cases} x - arctg(x^2 - y^3) = 5 \Longrightarrow x = 5 + arctg(x^2 - y^3) \\ cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2} + \frac{1}{y} = -3 \Longrightarrow y = \dfrac{-1}{3 + cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2}} \end{cases}$$

Sea $f: R^2 \longrightarrow R^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(5 + arctg(x^2 - y^3), \frac{-1}{3 + cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2}}\right)$$

Se tiene que $f$continua en $R^2$ porque $3 + cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2} > 0 \; \forall (x,y) \in R^2$ , y entonces sus componentes son continuas.

Veamos que $f$ está acotada. Sea $(x,y) \in R^2$:

$$|5 + arctg(x^2 - y^3)| \leq 5 + |arctg(x^2 - y^3)| \leq 5 + \frac{\pi}{2} \;\; \forall (x,y) \in R^2$$

$$\left|\frac{-1}{3 + cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2}}\right| = \frac{1}{3 + cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2}} \leq$$

$$< \frac{1}{3 - 1 - 1 + 0 + 0} = 1 \;\; \forall (x,y) \in R^2$$

$$\|f(x,y)\|_2 = \sqrt{\left(5 + arctg(x^2 - y^3)\right)^2 + \left(\frac{-1}{3 + cosx + sen(xy^3) + e^x + e^{y^2}}\right)^2} \leq$$

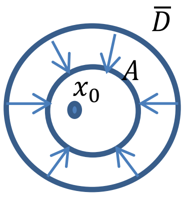
$$< \sqrt{\left(5 + \frac{\pi}{2}\right)^2 + 1} \;\;\; \forall (x,y) \in R^2$$

Como $f$ es continua y acotada, entonces por el Teorema del punto fijo de Brower, se tiene que: $\exists (x,y) \in R^2 : f(x,y) = (x,y)$, el sistema tiene al menos una solución.

**Ejercicio 12**

**Sea $A$ un retracto de un disco cerrado en $R^2$. Demostrar que toda aplicación continua $f: A \to A$ tiene al menos un punto fijo. Deducir que toda aplicación continua $f: X \to X$ con $X = \overline{B}((-1,0),1) \cup \overline{B}((1,0),1)$ tiene al menos un punto fijo.**

**Solución**




Como $A$ es un retracto de un disco cerrado en $R^2$, existe $r: \overline{D}(x_0, \varepsilon) \to A$, $r$ es continua y $r(a) = a \ \ \forall a \in A$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{D} \arrow[r, "h"] \arrow[ddrr, "h^{-1} \circ i_a \circ f \circ r \circ h"'] & \overline{D}(x_0, \varepsilon) \arrow[r, "r"] & A \arrow[r, "f"] & A \arrow[d, "i_a"] \\
& & & \overline{D}(x_0, \varepsilon) \arrow[d, "h^{-1}"] \\
& & & \overline{D}
\end{tikzcd}$$

Sea $h: \overline{D} \to \overline{D}(x_0, \varepsilon)$ dada por $h(z) = \varepsilon z + x_0$, se continua y está bien definida, sea $z \in \overline{D}$

$$\|h(z) - x_0\| = \|\varepsilon z + x_0 - x_0\| = \|\varepsilon z\| = \varepsilon\|z\| \leq \varepsilon \Longrightarrow h(z) \in \overline{D}(x_0, \varepsilon)$$

Y de la misma forma, $h^{-1}: \overline{D}(x_0, \varepsilon) \to \overline{D}$ dada por

$$h^{-1}(t) = \frac{t - x_0}{\varepsilon}$$

La aplicación $h^{-1}$ es continua y está bien definida.

$$(h \circ h^{-1})(t) = h\big(h^{-1}(t)\big) = h\left(\frac{t - x_0}{\varepsilon}\right) = \frac{t - x_0}{\varepsilon}\varepsilon + x_0 = t \Longrightarrow h \circ h^{-1} = Id_{\overline{D}(x_0, \varepsilon)}$$

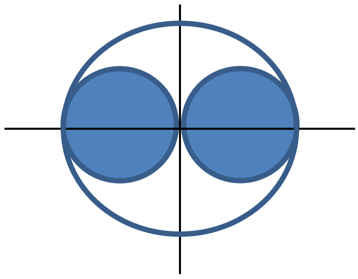
De la misma forma, $h^{-1} \circ h = Id_{\overline{D}}$. Es una biyección, es decir, $h$ es un homeomorfismo de $\overline{D}$ en $\overline{D}(x_0, \varepsilon)$. Por lo tanto, $h^{-1} \circ i_a \circ f \circ r \circ h$, es continua, luego por el teorema del punto fijo de Brower, existe $q \in A$, $(h^{-1} \circ i_a \circ f \circ r \circ h)(q) = q$

$$\Longrightarrow h[(h^{-1} \circ i_a \circ f \circ r \circ h)(q)] = h(q) \Longrightarrow (i_a \circ f \circ r \circ h)(q) = h(q)$$

$$\Longrightarrow i_a[(f \circ r \circ h)(q)] = h(q) \Longrightarrow (f \circ r \circ h)(q) = h(q) \Longrightarrow f\left(r\big(h(q)\big)\right) = h(q)$$

Como $f: A \to A$, $r\big(h(q)\big) \in A \Longrightarrow h(q) \in A \Longrightarrow f\big(h(q)\big) = h(q)$, $f$ tiene al menos un punto fijo.

Sea $f: X \to X$ con $X = \bar{B}\big((-1,0),1\big) \cup \bar{B}\big((1,0),1\big)$. Usando lo anterior si $X$ es un retracto de un disco cerrado, entonces $f$ tiene al menos un punto fijo.



Sea $\overline{D}(x_0 = (0,0), \varepsilon = 2)$, veamos que $X$ es un retracto de $\overline{D}\big((0,0),2\big)$:

$$r: \overline{D}\big((0,0),2\big) \to X$$

**Ejercicio 13**

**¿Es cierto el teorema del punto fijo de Brouwer para $X = R^n$?¿Y para la corona?**

**Solución**

**Teorema Fundamental del Álgebra**

Sea $P: C \to C$ una función polinómica de la forma

$$P(z) = a_0 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n \quad n \geq 1$$

Entonces existe $z_0 \in C$ tal que $P(z_0) = 0$.

**Definición**

Sea $X$ un espacio topológico y $A \subset X$ un subespacio topológico. *Una retracción o retracto de* $X$ *en* $A$ es una aplicación continua $r: X \to A$ satisfaciendo $r_{/A} = Id_A$, o equivalentemente, $r \circ i = Id_A$ donde $i: A \to X$ es la aplicación inclusión, $i(x) = x$. En este caso se dice que $A$ es *un retractor* de $X$.

**Ejercicio 14**

**Las siguientes aplicaciones entre espacios euclidianos son retracciones:**

$(\boldsymbol{a})$ $\boldsymbol{n}: \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}} - \{\boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}) = {}^{\boldsymbol{q}}/_{\|\boldsymbol{q}\|}$.

Se tiene que $n$ es continua en $R^{n+1} - \{0\}$. Sea $q \in S^n \Longrightarrow \|q\| = 1$

$$(n \circ i)(q) = n(i(q)) = n(q) = \frac{q}{\|q\|} = q \Longrightarrow n \circ i = Id_{S^n}$$

Por tanto, $n$ es una retracción de $R^{n+1} - \{0\}$ en $S^n$.

$(\boldsymbol{b})$ $\boldsymbol{n}_{/\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})-\{\boldsymbol{0}\}}: \overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}) - \{\boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{n}}$ $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{q}) = {}^{\boldsymbol{q}}/_{\|\boldsymbol{q}\|}$ $\boldsymbol{donde}$ $\overline{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1}) = \{\boldsymbol{p} \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{1}}: \|\boldsymbol{p}\| \leq \boldsymbol{1}\}$

$(\boldsymbol{c})$ $\boldsymbol{p}: \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}\{\boldsymbol{0}\} \equiv \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{1}}$ $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{0})$**.**

$(\boldsymbol{d})$ $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{3}} - \{\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\} \to \boldsymbol{S}^{\boldsymbol{1}}\boldsymbol{x}\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \left({}^{\boldsymbol{1}}/_{\|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\|}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),\boldsymbol{z}\right)$.

**Proposición**

Si $r: X \to A$ es una retracción, $i: A \to X$ la aplicación inclusión y $a \in A$, entonces:

- $r_*: \Pi_1(X, a) \to \Pi_1(A, a)$ es un epimorfismo
- $i_*: \Pi_1(A, a) \to \Pi_1(X, a)$ es un monomorfismo

**Retractos de deformación**

**Definición**

Dado un espacio topológico $X$ y un subespacio suyo $A \subset X$, se dice que A *es un retracto de deformación* de X si existen una retracción $r: X \to A$ y una aplicación continua $H: Xx[0,1] \to X$ satisfaciendo:

$$H(x, 0) = x \quad \forall x \in X \qquad H(x, 1) = r(x)\ \forall x \in X$$

Si adicionalmente: $H(a, s) = a\ \ \forall(a, s) \in Ax[0,1]$, entonces se dice que $A$ *es un retracto fuerte de deformación de* $X$. A las aplicaciones $H$ y $r$ se les llamará *una deformación y retracción asociadas* al retracto (fuerte) de deformación $A$ de $X$, respectivamente.

**Ejercicio 15**

**Las siguientes aplicaciones realizan retractos fuertes de deformación:**

**$(a)$ El centro $p_0$ de un conjunto estrellado $E$ (en un espacio euclidiano $R^n$) es un retracto fuerte de deformación de $E$:**

Entonces en este caso $X = E \quad A = \{p_0\}$.Sea $r: E \to \{p_0\},\ r(q) = p_0\ \ \forall q \in E$, donde $r$ es continua:

$$(r \circ i)(p_0) = r\big(i(p_0)\big) = r(p_0) = p_0 \Longrightarrow r \circ i = Id_{\{p_0\}} \Longrightarrow r\ es\ una\ retracción$$

Sea $H: Ex[0,1] \to E,\quad H(q, s) = (1 - s)q + sr(q) = (1 - s)q + sp_0 \quad \forall q \in E\ \forall s \in [0,1]$, claramente $H$ es continua

$$H(q, 0) = q \quad \forall q \in E \qquad H(q, 1) = r(q)\ \forall q \in E$$

$$H(p_0, s) = (1 - s)p_0 + sp_0 = p_0\ \ \forall(p_0, s) \in \{p_0\}x[0,1]$$

$(b)$ $S^n$ **es un retracto fuerte de deformación de** $R^{n+1}-\{0\}$:

$$H: R^{n+1}-\{0\}x[0,1] \to R^{n+1}-\{0\} \quad H(q,s)=(1-s)q+sn(q)$$

**donde** $n: R^{n+1}-\{0\} \to S^n \;\; n(q)={}^{q}/_{\|q\|}$

Entonces en este caso $X=R^{n+1}-\{0\} \quad A=S^n$.Se tiene que $n$ es continua en $R^{n+1}-\{0\}$. Sea $q \in S^n \Longrightarrow \|q\|=1$

$$(n \circ i)(q)=n(i(q))=n(q)=\frac{q}{\|q\|}=q \Longrightarrow n \circ i = Id_{S^n}$$

Por tanto, $n$ es una retracción de $R^{n+1}-\{0\}$ en $S^n$.

Sea $H: R^{n+1}-\{0\}x[0,1] \to R^{n+1}-\{0\}$, que es continua

$$H(q,s)=(1-s)q+sn(q)=(1-s)q+s\frac{q}{\|q\|} \quad \forall q \in R^{n+1}-\{0\}\,\forall s \in [0,1]$$

$$H(q,0)=q \quad \forall q \in R^{n+1}-\{0\} \qquad H(q,1)=n(q)\,\forall q \in R^{n+1}-\{0\}$$

$$q \in S^n \Longrightarrow H(q,s)=(1-s)q+s\frac{q}{\|q\|}=(1-s)q+sq=q \quad \forall (q,s) \in S^n x[0,1]$$

$(c)$ $S^n$ **es un retracto fuerte de deformación de** $\overline{B}(0,1)-\{0\}$:

$$H: \overline{B}(0,1)-\{0\}x[0,1] \to \overline{B}(0,1)-\{0\} \quad H(q,s)=(1-s)q+sn_{/\overline{B}(0,1)-\{0\}}(q)$$

$(d)$ $S^1$ **es un retracto fuerte de deformación de** $S^1xR$:

$$H: S^1xRx[0,1] \to S^1xR \quad H(q,s)=(1-s)q+sp(q)$$

**donde** $p: S^1xR \to S^1x\{0\} \equiv S^1 \;\; p(x,y,z)=(x,y,0)$.

$(e)$ $S^1xR$ **es un retracto fuerte de deformación de** $R^3-\{x=y=0\}$:

$$H: R^3-\{x=y=0\}x[0,1] \to R^3-\{x=y=0\} \quad H(q,s)=(1-s)q+sf(q)$$

**donde** $f: R^3-\{x=y=0\} \to S^1xR \;\; f(x,y,z)=\left({}^{1}/_{\|(x,y)\|}(x,y),z\right)$.

**Ejercicio 16**

**Demostrar que para todo espacio topológico $X$ la sección ecuatorial $A = Xx\{0\}$ es un retracto de deformación de $Xx[-1,1]$. Deducir el tipo de homotopía de la banda $R^n x[-1,1]$, el cilindro $S^n x[-1,1]$ y el cubo $[-1,1]^{n+1}$. Discutir qué ocurre si sustituimos $[-1,1]$ por $R$.**

**Solución**

Sea $r: Xx[-1,1] \to Xx\{0\}$, $r(x,t) = (x,0) \ \forall (x,t) \in Xx[-1,1]$, donde $r$ es continua:

$$(r \circ i)(x,0) = r\big(i(x,0)\big) = r(x,0) = (x,0) \Longrightarrow r \circ i = Id_{Xx\{0\}} \Longrightarrow r \ es \ una \ retracción$$

Sea $H: (Xx[-1,1])x[0,1] \to Xx[-1,1]$, que es continua

$$H\big((x,t),s\big) = (1-s)(x,t) + s(x,0) = (x,(1-s)t) \quad \forall q \in E \ \forall s \in [0,1]$$

$$H\big((x,t),0\big) = (x,t) \quad \forall (x,t) \in Xx[-1,1]$$

$$H\big((x,t),1\big) = (x,0) = r(x,t) \ \forall (x,t) \in Xx[-1,1]$$

$$H\big((x,0),s\big) = (1-s)(x,0) + s(x,0) = (x,0) \quad \forall (x,0) \in Xx\{0\} \ \forall s \in [0,1]$$

Por lo tanto, $Xx\{0\}$ es un retracto fuerte de deformación de $Xx[-1,1]$.

Veamos, ahora los grupos fundamentales:

$$\Pi_1(R^n x[-1,1]) \cong \Pi_1(R^n x\{0\}) \cong \Pi_1(R^n)x\Pi_1(\{0\}) \cong \{1\}x\{1\} \cong \{1\}$$

$$\Pi_1(S^n x[-1,1]) \cong \Pi_1(S^n x\{0\}) \cong \Pi_1(S^n) \cong \begin{cases} Z & si \ n = 1 \\ \{1\} & si \ n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_1([-1,1]^n x[-1,1]) \cong \Pi_1([-1,1]^n x\{0\}) \cong \Pi_1([-1,1]^n) \cong \{1\}$$

Si se sustituye $[-1,1]$ por $R$:

$$\Pi_1(R^n xR) \cong \Pi_1(R^{n+1}) \cong \{1\}$$

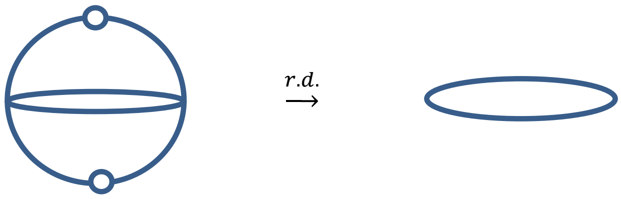
$$\Pi_1(S^n xR) \cong \Pi_1(S^n)x\Pi_1(R) \cong \Pi_1(S^n) \cong \begin{cases} Z & si \ n = 1 \\ \{1\} & si \ n \geq 2 \end{cases}$$

$$\Pi_1([-1,1]^n xR) \cong \{1\}$$

**Ejercicio 17**

**Encontrar un retracto de deformación de $X = S^n - \{N, S\}$ y otro de $X = R^{n+1} - \overline{B}(0,1)$, donde $\overline{B}(0,1)$ es la bola unidad cerrada.**

**Solución**



Sea $X = S^n - \{N, S\}$ y $A = S^{n-1}x\{0\}$, y sea $r: S^n - \{N, S\} \to S^{n-1}x\{0\}$

$$r(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_n^2}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-x_n^2}}, 0\right)$$

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in S^n - \{N, S\} \Longrightarrow x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + x_n^2 = 1 \quad -1 < x_n < 1$$

Para que esté bien definida:

$$\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_n^2}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-x_n^2}}\right)^2 = \frac{x_1^2}{1-x_n^2} + \dots + \frac{x_{n-1}^2}{1-x_n^2} = \frac{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}{1-x_n^2} = \frac{1-x_n^2}{1-x_n^2} = 1$$

Y además $r$ es continua.

Sea $H: (S^n - \{N, S\})x[0,1] \to S^n - \{N, S\}$, que es continua

$$H\big((x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), s\big) = (1-s)(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + s\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-x_n^2}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-x_n^2}}, 0\right) =$$

$$= (1-s)(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) + s.r(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$\forall (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in S^n - \{N, S\}\ \forall s \in [0,1]$$

$$H\big((x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), 0\big) = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in S^n - \{N, S\}$$

$$H\big((x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), 1\big) = r(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\ \forall (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in S^n - \{N, S\}$$

$$H\big((x_1, \dots, x_{n-1}, 0), s\big) = (1-s)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + sr(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) =$$

$$= (1-s)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + s\left(\frac{x_1}{\sqrt{1-0}}, \dots, \frac{x_{n-1}}{\sqrt{1-0}}, 0\right) =$$

$$= (1-s)(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) + s(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) =$$

$$= (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \in S^{n-1}x\{0\}\ \forall s \in [0,1]$$

Por lo tanto, $S^{n-1}x\{0\}$ es un retracto fuerte de deformación de $S^n - \{N, S\}$.

Sea $X = R^{n+1} - \bar{B}(0,1)$ y $A = S^n$, y sea $r: R^{n+1} - \bar{B}(0,1) \to S^n$

Sea $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} - \bar{B}(0,1)$: $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 > 1$

$$r(x_1, \dots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})\|}, \dots, \frac{x_{n+1}}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})\|}\right)$$

Por lo tanto, $r$ está bien definida y es continua

Sea $H: (R^{n+1} - \bar{B}(0,1))x[0,1] \to R^{n+1} - \bar{B}(0,1)$, que es continua

$$H((x_1, \dots, x_{n+1}), s) = (1-s)(x_1, \dots, x_{n+1}) + s.r(x_1, \dots, x_{n+1})$$

$$\forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} - \bar{B}(0,1)\ \forall s \in [0,1]$$

$$H((x_1, \dots, x_{n+1}), 0) = (x_1, \dots, x_{n+1}) \quad \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} - \bar{B}(0,1)$$

$$H((x_1, \dots, x_{n+1}), 1) = r(x_1, \dots, x_{n+1})\ \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in R^{n+1} - \bar{B}(0,1)$$

Sea $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \ \ s \in [0,1]$: $\|(x_1, \dots, x_{n+1})\| = 1$

$$H((x_1, \dots, x_{n+1}), s) = (1-s)(x_1, \dots, x_{n+1}) + sr(x_1, \dots, x_{n+1}) =$$

$$= (1-s)(x_1, \dots, x_{n+1}) + s\left(\frac{x_1}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})\|}, \dots, \frac{x_{n+1}}{\|(x_1, \dots, x_{n+1})\|}\right) =$$

$$= (1-s)(x_1, \dots, x_{n+1}) + s(x_1, \dots, x_{n+1}) =$$

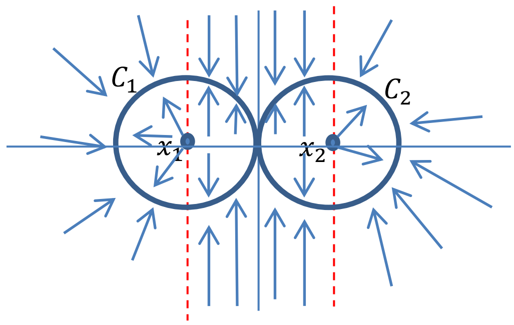
$$= (x_1, \dots, x_{n+1}) \quad \forall (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n\ \forall s \in [0,1]$$

Por lo tanto, $S^n$ es un retracto fuerte de deformación de $R^{n+1} - \bar{B}(0,1)$.

**Ejercicio 18**

**Sean $x_1, x_2 \in R^2$ con $x_1 \neq x_2$. Definimos $A = C_1 \cup C_2$, donde $C_i$ es la circunferencia de centro $x_i$ y radio $\|x_1 - x_2\|/_2$. Demostrar gráficamente que $A$ es un retracto de deformación de $R^2 - \{x_1, x_2\}$. Calcular explícitamente la retracción cuando $x_1 = (-1, 0)$ y $x_2 = (1, 0)$.**

**Solución**




Lo que se va a realizar es dividir a $R^2 - \{x_1, x_2\}$ en tres semiplanos uno con puntos dentro y fuera de $C_1$ con la coordenada $x < x_1$, otro puntos dentro y fuera de $C_2$ con la coordenada $x > x_2$, y un tercero con el resto de puntos. Los puntos del primer semiplano llevarían los puntos en forma radial a $C_1$, de la misma forma los tercer semiplano se llevarían de forma radial a $C_2$, y el resto de puntos se proyecta en $C_1 \cup C_2$, de forma perpendicular.

Sea $x_1 = (-1{,}0)$ y $x_2 = (1{,}0)$**,** se va a definir de forma explícita la retracción de $A$ sobre $X$.

$$A = \{(x, y) \in R^2 : (x+1)^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, y) \in R^2 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$$

$$X = R^2 - \{x_1(-1{,}0), x_2(1{,}0)\}$$

Sea $r: X \to A$ dada por

$$r(x, y) = \begin{cases} (-1{,}0) + \dfrac{(x+1, y)}{\|(x+1, y)\|} & si\ x \leq -1 \\ \left(x, \sqrt{1-(x+1)^2}\right) si -1 \leq x \leq 0\ \ y > 0 \\ \left(x, -\sqrt{1-(x+1)^2}\right) si -1 \leq x \leq 0\ \ y < 0 \\ \left(x, \sqrt{1-(x-1)^2}\right) si\ 0 \leq x \leq 1\ \ y > 0 \\ \left(x, -\sqrt{1-(x-1)^2}\right) si\ 0 \leq x \leq 1\ \ y > 0 \\ (1{,}0) + \dfrac{(x-1, y)}{\|(x-1, y)\|} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

Se tiene que $r$ está bien definida y es continua.

Sea $(x, y) \in A$: $(x+1)^2 + y^2 = 1$ ó $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$$(r \circ i)(x, y) = r\big(i(x, y)\big) = r(x, y) = \begin{cases} (x, y)\ si (x, y) \in C_1 \\ (x, y)\ si (x, y) \in C_2 \end{cases} = (x, y) \Longrightarrow r \circ i = Id_A$$

Por lo tanto, $r$ es una retracción $A$ sobre $X$.

Sea $H: Xx[0,1] \to X$, que es continua

$$H\big((x,y),s\big) = (1-s)(x,y) + s.r(x,y) \quad \forall (x,y) \in X \ \forall s \in [0,1]$$

$$H\big((x,y),0\big) = (x,y) \quad \forall (x,y) \in X$$

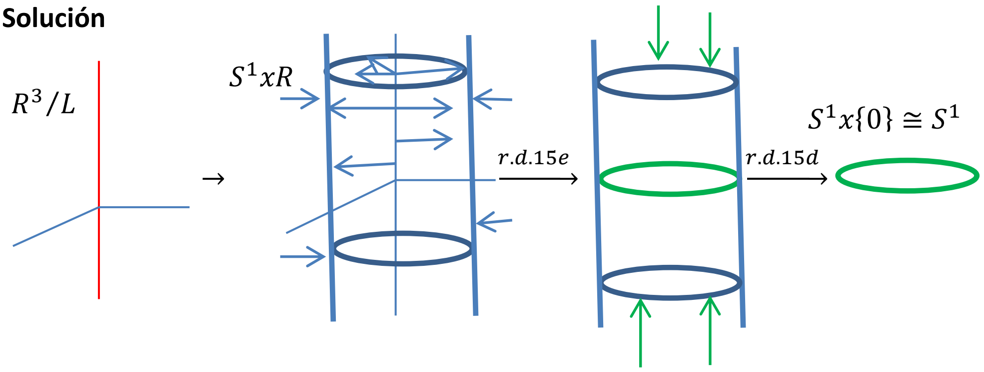
$$H\big((x,y),1\big) = r(x,y) \ \forall (x,y) \in X$$

Por lo tanto, $A$ es un retracto de deformación de $X$.

**Ejercicio 19**

**Encontrar un retracto de deformación de $R^3/L$, donde $L = \{(x, y, z) \in R^3 : x = y = 0\}$ que es el eje $z$. Obtener $\Pi_1(R^3/R)$, siendo $R$ cualquier recta afín en $R^3$.**

**Solución**




$(e)$ $S^1xR$ es un retracto fuerte de deformación de $R^3 - \{x = y = 0\}$:

$$r: R^3 - \{x = y = 0\} \to S^1xR \quad r(x, y, z) = \left({}^{1}/_{\|(x,y)\|}\,(x, y), z\right)$$

$$H: R^3 - \{x = y = 0\}x[0,1] \to R^3 - \{x = y = 0\} \quad H(q, s) = (1 - s)q + sr(q)$$

$(d)$ $S^1$ es un retracto fuerte de deformación de $S^1xR$:

$$r: S^1xR \to S^1x\{0\} \cong S^1 \quad r(x, y, z) = (x, y, 0)$$

$$H: S^1xRx[0,1] \to S^1xR \quad H(q, s) = (1 - s)q + sr(q)$$

Por lo tanto, $S^1$ es un retracto fuerte de deformación de $R^3 - \{x = y = 0\}$.

Se sabe $R^3/R \cong R^3 - \{x = y = 0\}$ y se ha visto $R^3 - \{x = y = 0\} \simeq S^1$

$$\Pi_1(R^3/R) \cong \Pi_1(R^3 - \{x = y = 0\}) \cong \Pi_1(S^1) \cong Z$$

**Ejercicio 20**

**Sea $S$ un subespacio afín de dimensión $k \leq n-2$ en $R^n$. Calcular $\Pi_1(R^n/S)$ encontrando para ello un retracto de deformación.**

**Solución**

**Ejercicio 21**

**Discutir si la bola unidad cerrada es un retracto de deformación de $R^{n+1}$.**

**Solución**

**Ejercicio 22**

**Sea $X \subset R^n$ un convexo compacto con interior no vacío. Dado un punto $x_0$ del interior de $X$, demostrar que la frontera $Fr(X)$ es un retracto de deformación de $X - \{x_0\}$.**

**Solución**

**Ejercicio 23**

**Discutir si $S^1$ admite algún retracto de deformación $A \neq S^1$.**

**Solución**

**Ejercicio 24**

**¿Es todo retracto de un espacio $X$ un retracto de deformación de $X$?**

**Solución**

**Proposición**

Si A es un retracto de deformación de X, $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ son las arcocomponentes de $A$ y $\hat{C}_\alpha$ es la arcocomponente de $X$ conteniendo a $C_\alpha$ para cada $\alpha \in \Lambda$, entonces:

$(i)$ $r(\hat{C}_\alpha) = C_\alpha$ $\forall \alpha \in \Lambda$ y por tanto, $\hat{C}_\alpha \neq \hat{C}_\beta$, $\alpha \neq \beta$.

$(ii)$ $\{C_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ son las arcocomponentes de $X$.

$(iii)$ Si $H: Xx[0,1] \to X$ y $r: X \to A$ son una deformación y retracción asociadas al retracto de deformación $A$ de $X$, entonces $H_{/\hat{C}_\alpha x[0,1]}: \hat{C}_\alpha x[0,1] \to \hat{C}_\alpha$ y $r_{/\hat{C}_\alpha}: \hat{C}_\alpha \to C_\alpha$ son una deformación y retracción asociadas al retracto de deformación $C_\alpha$ de $\widehat{C}_\alpha$.

**Proposición**

Sea $F: X \to A$ un homeomorfismo. Si $A$ es un retracto (fuerte) de deformación de $Y$ entonces $F^{-1}(A)$ es un retracto (fuerte) de deformación de $X$.

**Teorema**

Sea $X$ un espacio topológico y sea $A \subset X$ un retracto fuerte de deformación con $r: X \to A$ una retracción asociada. Entonces dado $a \in A$ se tiene que:

$$r_*: \Pi_1(X, a) \to \Pi_1(A, a) \quad i_*: \Pi_1(A, a) \to \Pi_1(X, a)$$

son isomorfismo, uno inverso del otro.

**Definición**

Un espacio topológico $X$ se dice *contráctil* si admite como retracto de deformación a un punto $\{p_0\} \subset X$. En caso de que $\{p_0\}$ sea retracto fuerte de deformación de $X$ diremos que el espacio es *fuertemente contráctil*.

**Definición**

Un espacio topológico $X$ se dice *simplemente conexo* si es arcoconexo y $\Pi_1(X, p) = \{[\varepsilon_p]\}$ para algún $p \in X$ (luego para todo $p \in X$).

**Corolario**

Todo espacio fuertemente contráctil es simplemente conexo.

**Consecuencias**

$(i)$ Todo subconjunto estrellado de $R^n$ es simplemente conexo. Esto se aplica a subconjuntos $A \subset R^n$ convexos.

$(ii)$ Si $p \in S^n$ entonces $\Pi_1(R^{n+1} - \{0\}, p)$ es isomorfo a $\Pi_1(S^n, p)$.

$(iii)$ Si $p \in S^1$ entonces $\Pi_1\left(S^1xR,(p,0)\right)$ es isomorfo a $\Pi_1(S^1,p) \cong Z$.

$(iv)$ Si $p \in S^1xR$ entonces $\Pi_1(R^3 - \{x = y = 0\}, p)$ es isomorfo a $\Pi_1(S^1xR,p) \cong Z$.

$(V)$ El grupo fundamental de la cinta de Möbius es isomorfo a $Z$.

**Teorema**

Sea $X$ un espacio topológico conexo y localmente arcoconexo. Supongamos que la topología de admite una base $\beta$ satisfaciendo:

$(i)$ $\beta$ es numerable (luego $X$ es $II - Axioma\ de\ Numerabilidad$)

$(ii)$ $B$ es simplemente conexo $\forall B \in \beta$

Entonces $\Pi_1(X,x)$ es numerable $\forall x \in X$.

**Ejercicio 25**

**Sea $X$ simplemente conexo y $A \subset X$ un retracto de $X$. ¿Es $A$ simplemente conexo?**

**Solución**

**Homotopía de aplicaciones**

**Definición**

Dados dos espacios topológicos $X$ e $Y$, dos aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2: X \to Y$, se dicen *homotópicas*, y se escribe $\varphi_1 \simeq \varphi_2$, si existe un aplicación continua $H: Xx[0,1] \to Y$ verificando:

$$H(x,0) = \varphi_1(x)\ \forall x \in X \qquad H(x,1) = \varphi_2(x)\ \forall x \in X$$

Si $A \subset X$, las aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2: X \to Y$ se dirán *homotópicas relativas a* $A$, $\varphi_1 \simeq_A \varphi_2$ si existe $H: Xx[0,1] \to Y$ verificando:

$$H(x,0) = \varphi_1(x)\ \forall x \in X \qquad H(x,1) = \varphi_2(x)\ \forall x \in X$$

$$H(a,s) = \varphi_1(a) = \varphi_2(a)\ \forall (a,s) \in Ax[0,1]$$

Si $A \subset X$ es un retracto de deformación vía $H$ con la retracción asociada $r$, entonces $Id_X \simeq r$. Si $A$ es un retracto fuete de deformación de $X$ se tiene que $Id_X \simeq_A r$.

**Ejercicio 26**

**Sean $f, g: X \rightarrow Y$ aplicaciones continuas con $f(x_0) = g(x_0) = y_0$. Supongamos que $f \simeq g$ por una homotopía $H: Xx[0,1] \rightarrow Y$ tal que $H(x_0, s) = y_0\ \forall s \in [0,1]$. Demostrar que los homomorfismos inducidos $f$ y $g$ en $x_0$ son iguales.**

**Solución**

**Teorema**

Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos y dos aplicaciones continuas $\varphi_1, \varphi_2: X \to Y$. Supongamos que $\varphi_1 \simeq \varphi_2$ vía $H: Xx[0,1] \to Y$ , fijemos $x_0 \in X$ y sea $\gamma: [0,1] \to Y$ el arco uniendo $\varphi_1(x_0)$ y $\varphi_2(x_0)$ definido por $\gamma(s) = H(x_0, s)$.

Dados los homomorfismos de grupos

$$(\varphi_1)_*: \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1\big(Y, \varphi_1(x_0)\big) \quad (\varphi_2)_*: \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1\big(Y, \varphi_2(x_0)\big)$$

Y el isomorfismo $U_\gamma: \Pi_1\big(Y, \varphi_1(x_0)\big) \to \Pi_1\big(Y, \varphi_2(x_0)\big)$, se tiene que $U_\gamma \circ (\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*$

En particular los homomorfismos $(\varphi_1)_*$ y $(\varphi_2)_*$ son iguales salvo isomorfismos.

**Corolario**

Sean $\varphi_1, \varphi_2: X \to Y$ aplicaciones continuas y $x_0 \in X$. Supongamos que $\varphi_1 \simeq_{\{x_0\}} \varphi_2$ y sea $y_0 = \varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0)$. Entonces $(\varphi_1)_* = (\varphi_2)_*: \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1(Y, y_0)$.

**Definición**

Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos. Una aplicación continua $f: X \to Y$ se dirá *una equivalencia homotópica* si existe $g: X \to Y$ tal que: $g \circ f = Id_X \quad f \circ g = Id_Y$. Es ese caso se dirán que $f$ y $g$ son *inversas homotópicas*.

Dos espacios $X$ e $Y$ se dicen del *mismo tipo de homotopía* si existe una equivalencia homotópica entre ellos.

**Nota**

Todo homeomorfismo es una equivalencia homotópica pero el recíproco no es cierto. La equivalencia homotópica es suficiente para garantizar isomorfismo entre grupos fundamentales.

**Teorema**

Sean $X$ e $Y$ espacios topológicos y $f: X \to Y$ una equivalencia homotópica con inversa homotópica $g: X \to Y$. Fijemos $x_0 \in X$. Entonces $f_*: \Pi_1(X, x_0) \to \Pi_1\big(Y, f(x_0)\big)$ es un isomorfismo de grupos.

**Corolario**

Sea $A \subset X$ es un retracto de deformación de $X$ con la retracción asociada $r: X \to A$ e $i; A \to X$ la aplicación inclusión. Entonces para cada $a \in A$ las aplicaciones

$$r_*: \Pi_1(X, a) \to \Pi_1(A, a) \quad i_*: \Pi_1(A, a) \to \Pi_1(X, a)$$

son isomorfismos de grupos. En particular, todo espacio topológico contráctil es simplemente conexo.

**Proposición**

Sea $X$ un espacio topológico, y sean $U, V \subset X$ subconjuntos satisfaciendo:

$(i)$ $U$ y $V$ son abiertos simplemente conexos (con la topología inducida)

$(ii)$ $U \cap V$ es arcoconexo y no vacío

$(iii)$ $U \cup V = X$

Entonces $X$ es simplemente conexo.

**Corolario**

La esfera $S^n$ es simplemente conexa para todo $n \geq 2$.

**Teorema de Invarianza de la Dimensión**

Si $\Omega_2 \subset R^2$ y $\Omega_n \subset R^n$ $n \neq 2$ son abiertos conexos, entonces $\Omega_2$ no es homeomorfo a $\Omega_n$.

**Lema**

Sea $f: S^1 \to S^1$ continua e impar con $f(1) = 1$, y sea $\beta$ el lazo en $S^1$ dado por $\beta = f \circ \alpha_1$ donde $\alpha_1 = \rho_{/[0,1]}$, $\rho: R \to S^1$ $\rho(t) = e^{2\pi it}$. Entonces $deg(\beta)$ es impar.

**Lema**

No existe ninguna aplicación $F: S^2 \to S^1$ continua e impar.

**Teorema (Borsuk-Ulam)**

Si $f: S^2 \to R^2$ es continua, entonces existe $x_0 \in S^2$ tal que $f(x_0) = f(-x_0)$.

**Ejercicio 27**

**¿Es cierto el teorema de Borsuk-Ulam si cambiamos $S^2$ por el toro $T = S^1 x S^1$?**

**Solución**

**Ejercicio 28**

**Probar que el teorema de Borsuk-Ulam es equivalente a cualquiera de los siguientes enunciados:**

**a.- Si $f: S^2 \to R^2$ es continua e impar, entonces existe $x_0 \in S^2$ tal que $f(x_0) = 0$.**

**b.- Si $g_1, g_2: S^2 \to R$ son continuas e impares, existe $x_0 \in S^2$ tal que $g_1(x_0) = g_2(x_0) = 0$.**

**Corolario**

Si identificamos $S^2$ con la superficie de la Tierra y $f, g: S^2 \to R$ son dos magnitudes físicas que se distribuyen de forma continua sobre dicha superficie (por ejemplo, la presión y la temperatura), existen puntos antípodas $p_0, -p_0 \in S^2$ tales que $(f,g)(p_0) = (f,g)(-p_0)$.

**Corolario**

Si $S^2$ es la unión de tres subconjuntos cerrados $A_1, A_2$ y $A_3$, entonces alguno de ellos contiene dos puntos antípodas.

**Coralario (Teorema de las tortitas)**

Dados dos compactos $A_1, A_2 \subset R^2$, existe una recta combinatoria de $R^2$ que los subdivide a ambos en trozos de igual área.

**Corolario (Teorema del bocadillo de jamón)**

Dados dos compactos $A_1, A_2, A_3 \subset R^3$, es posible encontrar un plano combinatorio de $R^3$que los subdivida a los tres en trozos de igual volumen.

**Teorema de Seifert-Van Kampen**

Sea $X$ un espacio topológico y sean $U, V \subset X$ subconjuntos satisfaciendo:

$(i)$ $U$,$V$ y $U \cap V$ son abiertos arcoconexos $(ii)$ $U \cap V \neq \emptyset$ y $U \cup V = X$.

Sea $i: U \cap V \to U$ y $j: U \cap V \to V$ a las aplicaciones inclusión, se fija $x_0 \in U \cap V$ y se considera

$i_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \to \Pi_1(U, x_0)$ y $j_*: \Pi_1(U \cap V, x_0) \to \Pi_1(V, x_0)$ los correspondientes homomorfismos inducidos. Entonces

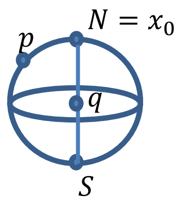
$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0)$$

donde el producto amalgamado es el relativo a los homomorfismos $i_*$ y $j_*$.

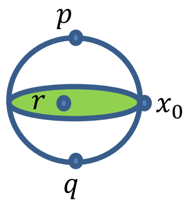
**Ejercicio 29**

**Calcular $\Pi_1(X)$ en estos casos:**

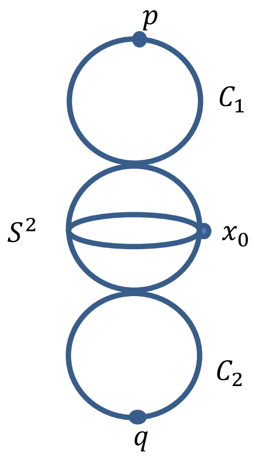
a.- $X = S^2 \cup [N, S]$ **donde** $N, S$ **son el polo Sur y el polo Norte de** $S^2$**.**



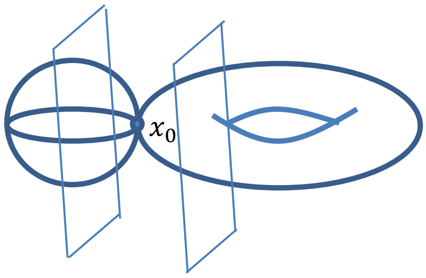
**b.-** $\boldsymbol{X = S^2 \cup \left\{(x, y, 0) \in R^3 : x^2 + y^2 \leq 1\right\}}$**.**



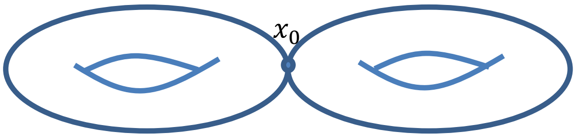
**c.-** $X = S^2 \cup C_1 \cup C_2$ **donde** $C_1$ **y** $C_2$ **son circunferencias tangentes a** $S^2$ **en los puntos** $N\ y\ S$**.**



**d.- $X$ es la unión de una esfera y de un toro tangentes en un único punto.**



**e.- $X$ es la unión de dos toros tangentes en un único punto.**



**Corolario**

Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si $U \cap V$ es simplemente conexo entonces $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) * \Pi_1(V, x_0)$.

**Corolario**

Bajo las mismas hipótesis del Teorema de Seifert-Van Kampen, si $V$ es simplemente conexo entonces $\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0)/N\left(i_*\big(\Pi_1(U \cap V, x_0)\big)\right)$.

**Corolario**

Si $X$ es un $n - ciclo$ entonces $\Pi_1(X, x_0)$ es isomorfo al grupo libre $F(a_1, \dots, a_n)$.

**Definición**

Sea el semiplano $\Pi_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \subset R^3 : x_1 = 0, x_2 \geq 0\}$ y sus girados respecto del eje $x_3$:

$$\Pi_j = \left\{\left(e^{2\pi(j-1)i}/_k z, x_3\right) : (z, x_3) \in \Pi_1 \subset CxR \equiv R^3\right\} \quad j = 1, \dots, k$$

Por definición, *el espacio libro de $k$ hojas* es:

$$L_k = \bigcup_{j=1}^{k} \Pi_j \quad k \in N$$

**Proposición**

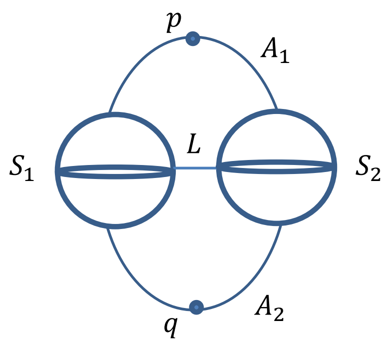
Los espacios $L_k$ y $L_s$ no son homeomorfos, $k, s \in N, k \neq s$.

**Corolario**

Si $O \subset R^3$ es un abierto conteniendo al origen, entonces $O \cap L_k$ no puede ser homeomorfo a un abierto de $R^2$ para todo $k \neq 2$.

**Ejercicio 30**

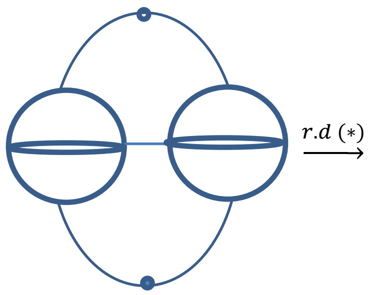
**Calcula el grupo fundamental del siguiente subespacio $X \subset R^3$.**



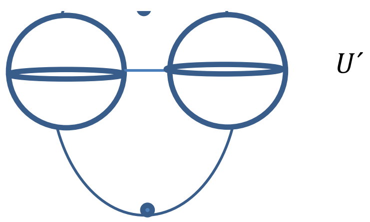

Se tiene que $X = S_1 \cup S_2 \cup L \cup A_1 \cup A_2$. Se define

$$U = X/\{p\} \quad V = X/\{q\} \quad \Rightarrow U \cap V = X/\{p,q\} \neq \emptyset \quad U \cup V = X$$

Además, $U, V$ y $U \cap V$ son abiertos arcoconexos, además $U$:



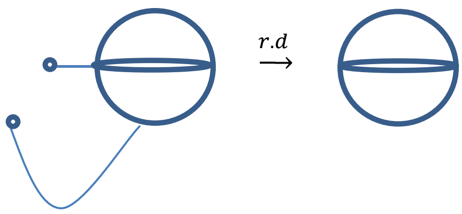

$(*)\quad A_1 - \{p\} \cong [-1,1] - \{0\} = [-1,0[\, \cup\, ]0,1] \simeq \{N_1\} \cup \{N_2\}$ ya que cada intervalo es contráctil, donde $N_i$ son los punto Norte de $S_i$.




Se define

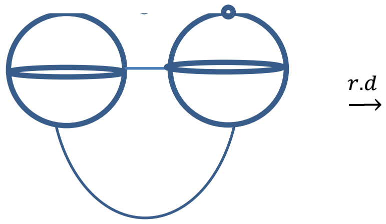
$$U´´ = U´/S_1 \quad V´´ = U´/\{N_2\} \quad \Rightarrow U´´ \cap V´´ = U´/(\{N_2\} \cup S_1) \neq \emptyset \quad U´´ \cup V´´ = U´$$

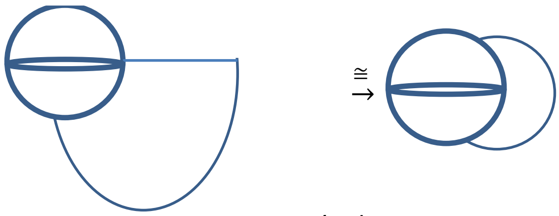
Además, $U´´, V´´$ y $U´´ \cap V´´$ son abiertos arcoconexos, además $U´´$ simplemente conexo




$$\Pi_1(U´´, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

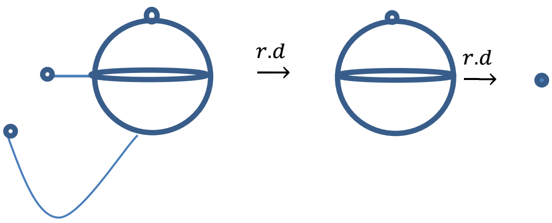
Además $V´´$




$Y$

Además $U´´ \cap V´´$ es simplemente conexo ya que es contráctil




$$\Pi_1(U´´ \cap V´´, x_0) \cong \{1\}$$

Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

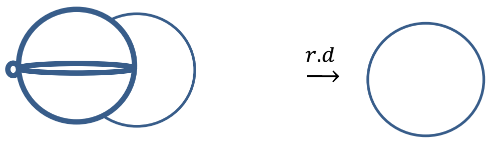
$$\Pi_1(U´, x_0) \cong \Pi_1(U´´, x_0) *_{\Pi_1(U´´\cap V´´, x_0)} \Pi_1(V´´, x_0) \cong \Pi_1(Y, x_0)$$

Se define:

$$Y_1 = Y/\{p\} \quad Y_2 = Y/\{q\} \quad \Longrightarrow Y_1 \cap Y_2 = Y/\{p, q\} \neq \emptyset \quad Y_1 \cup Y_2 = Y$$

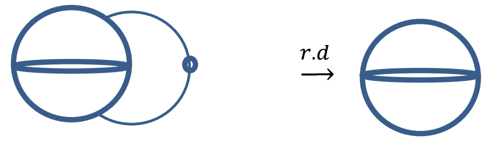
Además, $Y_1$, $Y_2$ y $Y_1 \cap Y_2$ son abiertos arcoconexos

$Y_1$



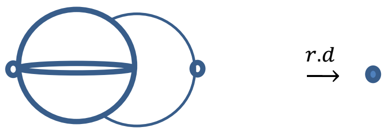

$$\Pi_1(Y_1, x_0) \cong \Pi_1(S^1, x_0) \cong Z$$

$Y_2$




$$Y_2\ es\ simplemente\ conexo, \Pi_1(Y_2, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

$Y_1 \cap Y_2$




$Y_1 \cap Y_2$ es simplemente conexo por ser contráctil, $\Pi_1(Y_1 \cap Y_2, x_0) \cong \{1\}$.

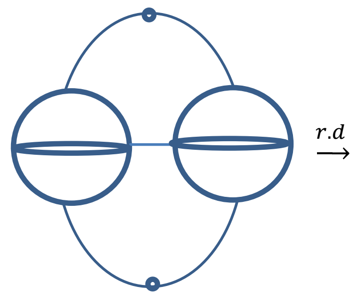
Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

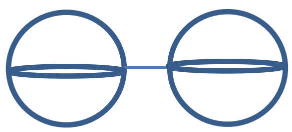
$$\Pi_1(Y, x_0) \cong \Pi_1(Y_1, x_0) *_{\Pi_1(Y_1 \cap Y_2, x_0)} \Pi_1(Y_2, x_0) \cong \Pi_1(Y_1, x_0) * \Pi_1(Y_2, x_0) \cong F(a)$$

$$\Pi_1(U', x_0) \cong Z \Longrightarrow U \simeq U' \Longrightarrow \Pi_1(U, x_0) \cong F(a)$$

De manera análoga, $\Pi_1(V, x_0) \cong F(b)$.

Además $U \cap V$:



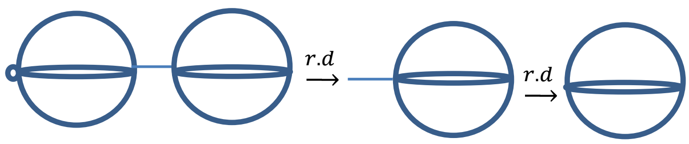
$W$

Se define

$$W_1 = W/\{p\} \quad W_2 = W/\{q\} \quad W_1 \cap W_2 = W/p, q \quad W_1 \cup W_2 = W$$

Además, $W_1$, $W_2$ y $W_1 \cap W_2$ son abiertos arcoconexos

$W_1$




$$\Pi_1(W_1, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$$

De la misma forma $\Pi_1(W_2, x_0) \cong \Pi_1(S^2, x_0) \cong \{1\}$.

Y $W_1 \cap W_2$ es contráctil, luego es simplemente conexo y $\Pi_1(W_1 \cap W_2, x_0) \cong \{1\}$.

Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

$$\Pi_1(W, x_0) \cong \Pi_1(W_1, x_0) *_{\Pi_1(W_1 \cap W_2, x_0)} \Pi_1(W_2, x_0) \cong \Pi_1(W_1, x_0) * \Pi_1(W_2, x_0) \cong \{1\}$$

$$\Pi_1(W, x_0) \cong \{1\} \Longrightarrow U \cap V \simeq W\ es\ simplemente\ conexo \Longrightarrow \Pi_1(U \cap V, x_0) \cong \{1\}$$

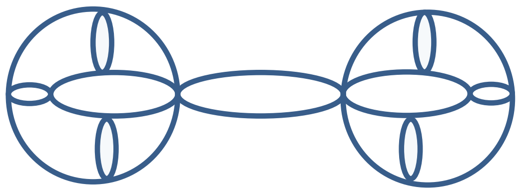
Luego por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) * \Pi_1(V, x_0) \cong$$

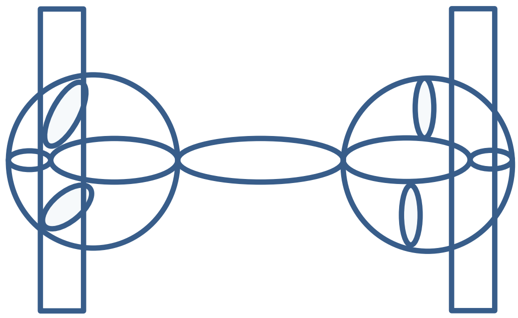
$$\cong F(a). F(b) = F(a, b)$$

**Ejercicio 31**

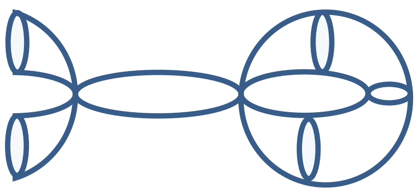
**Calcular el grupo fundamental del siguiente subespacio topológico de $R^3$.**



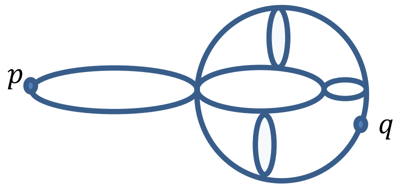
**Solución**



Se cortan por dos planos, se define $U$

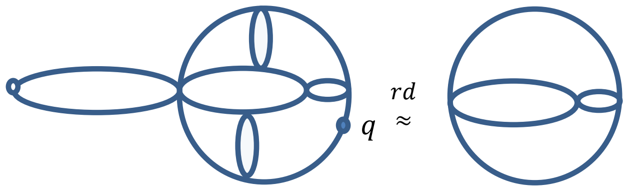


Mediante un retracto de deformación:

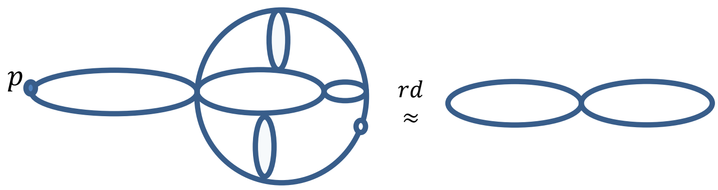



Se define $U' = U - \{p\}$  $V' = U - \{q\} \Longrightarrow U' \cap V = U/\{p,q\} \neq \emptyset$  $U' \cup V' = U$

Además, $U'$, $V'$ y $U' \cap V'$ son abiertos arcoconexos, donde $U'$




De donde $\Pi_1(U', x_0) = F(a)$.Y en $V'$:




$$\Pi_1(V', x_0) = F(b, a)$$

Y para $U' \cap V' \Longrightarrow \Pi_1(U' \cap V', x_0) = F(a)$. Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

$$\Pi_1(U, x_0) \cong \Pi_1(U', x_0) *_{\Pi_1(U' \cap V', x_0)} \Pi_1(V', x_0) \cong$$

$$\cong \frac{F([a]) * F([a],[b])}{N\left\{(i_{U'})_X(x)\big((i_{V'})_X(x)\big)^{-1} : x \in \Pi_1(U' \cap V', x_0)\right\}} =$$

$$= \frac{F([a],[b])}{N\left\{(i_{U'})_X([a])\big((i_{V'})_X([a])\big)^{-1}\right\}} = \frac{F([a],[b])}{N\{[a]([a])^{-1}\}} = F([a],[b])$$

De las misma forma $\Pi_1(V, x_0) = F([c],[b])$ y $\Pi_1(U \cap V, x_0) = F([b])$

Por el **teorema de Seifert-Van Kampen**

$$\Pi_1(X, x_0) \cong \Pi_1(U, x_0) *_{\Pi_1(U \cap V, x_0)} \Pi_1(V, x_0) \cong$$

$$\cong \frac{F([a],[b]) * F([c],[b])}{N\left\{(i_{U'})_X(x)\big((i_{V'})_X(x)\big)^{-1} : x \in \Pi_1(U' \cap V', x_0)\right\}} = \frac{F([a],[b],[c])}{N\{[b]([b])^{-1}\}} = F([a],[b],[c])$$

$$= \frac{F([a],[b])}{N\left\{(i_{U'})_X([a])\left((i_{V'})_X([a])\right)^{-1}\right\}} = \frac{F([a],[b])}{N\{[a]([a])^{-1}\}} = F([a],[b])$$