FEBRERO-2016.pdf

AzaharaFS

Inferencia Estadística

3º Grado en Matemáticas

Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

FEBRERO 2016

INFERENCIA ESTADÍSTICA

1.- Teoría

2.- Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable X con función de densidad: $f_\theta(x) = \frac{\sqrt{\theta}}{2} x^{-3/2} \quad x > \theta$

Determinar cuáles son los valores de n para los que existe el UMVUE para θ, y encontrarlo en tales casos. ¿Es para dichos valores el UMVUE un estimador eficiente de θ?.

$\Theta = \mathbb{R}^+ \quad \mathcal{X}_\theta = (\theta, +\infty) \Rightarrow \mathcal{X} = \bigcup_{\theta \in \Theta} \mathcal{X}_\theta = \mathbb{R}^+ \Rightarrow \mathcal{X}^n = (\mathbb{R}^+)^n$

Ya que $\mathcal{X}_\theta = (\theta, +\infty)$ depende de θ, la familia no es exponencial uniparamétrica, luego para buscar el UMVUE buscaremos un estadístico suficiente (y completo) utilizando el Tma de Factorización de Neyman-Fisher

$$f_\theta^n(x_1, \dots, x_n) = \frac{(\sqrt{\theta})^n}{2} \prod_{i=1}^n x_i^{-3/2} \cdot I_{(\theta, +\infty)}(X_{(1)})$$

Tomando $h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{-3/2} \quad g_\theta(T(x_1, \dots, x_n)) = \frac{(\sqrt{\theta})^n}{2} \cdot I_{(\theta, +\infty)}(X_{(1)})$

Así, $T = X_{(1)}$, es suficiente.

Para ver que es completo comprobamos que para cualquier función medible g tal que $E_\theta(g(T)) = 0 \ \forall \theta \in \Theta \Rightarrow P_\theta(g(T) = 0) = 1 \ \forall \theta \in \Theta$

Por tanto vamos a calcular primero la función de densidad del estadístico.

$$F_\theta(x) = \int_\theta^x \frac{\sqrt{\theta}}{2} \, {}^{-3/2} dt = \frac{\sqrt{\theta}}{2} \int_\theta^x t^{-3/2} dt = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{1/2}$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F_\theta(x))^n = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{n/2} \longrightarrow f_{X_{(1)}}(x) = \frac{n}{2x} \left(\frac{\theta}{x}\right)^{n/2}$$

$$E_\theta(g(T)) = \int_\theta^{\infty} g(t)\, \frac{n}{2t}\left(\frac{\theta}{t}\right)^{n/2} dt = \frac{n}{2\cdot\theta^{n/2}} \int_\theta^{+\infty} g(t)\, \frac{1}{t^{n/2+1}}\, dt = 0 \iff$$

$\iff \int_\theta^{+\infty} g(t)\, \frac{1}{t^{n/2+1}}\, dt = 0$ Por el TFC sabemos que $\frac{g(t)}{t^{n/2+1}}$ tiene primitiva G cumpliendo que $G(+\infty) - G(\theta) = 0$. Derivando respecto de θ, tenemos que $\frac{g(\theta)}{\theta^{n/2+1}} = 0 \iff g(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in \Theta$

Ya que $\theta^{n/2} \neq 0$ por ser $\theta > 0$.

Hemos demostrado que $\{t > \theta\} \subseteq \{t / g(t) = 0\}$ y tomando probabilidades $1 \geq P(g(T) = 0) \geq P(T > \theta) \geq 1 \Rightarrow \underline{P(g(T) = 0) = 1}$

Por tanto $T = X_{(1)}$ es completo.

El UMVUE será una función h, de nuestro estadístico suficiente y completo y será insesgada. Imponemos la insesgadez:

$$E_\theta(h(T)) = \int_\theta^{+\infty} h(T)\, \frac{n}{2t}\left(\frac{\theta}{t}\right)^{n/2} dt = \frac{n\theta^{n/2}}{2} \cdot \int_\theta^{+\infty} h(t)\, \frac{1}{t^{n/2+1}}\, dt = \theta \iff$$

$\iff \int_\theta^{+\infty} h(t)\, \frac{1}{t^{n/2+1}}\, dt = \frac{2\,\theta^{1-n/2}}{n}$ De nuevo por el TFC existe H primitiva de $h(t)/t^{n/2}$ verificando $H(+\infty) - H(\theta) = \frac{2\theta^{1-n/2}}{n}$, y derivando respecto de θ: $-\frac{h(\theta)}{\theta^{n/2+1}} = \frac{2-n}{n}\theta^{-n/2} \Rightarrow h(\theta) = \frac{n-2}{n}\theta$

Por tanto $h(T) = \frac{n-2}{n} T$ es nuestro candidato a UMVUE.

- $h(T) = \frac{n-2}{n} T \in \mathbb{R}^+ \iff n > 2$ ya que $T \in \mathbb{R}^+$, por tanto es estimador.

WELL DONE NATURE
¡BUEN TRABAJO!
TE MERECES UNA PAUSA.
RE-CHARGE
masque nuit relaxant
relaxing sleep mask
my CLARINS
RE-BOOST
masque défatigant
éclair
instant
reviving mask
my CLARINS
¿QUÉ TAL UNA MASCARILLA PARA CUIDAR TU PIEL MIENTRAS DESCANSAS?
my CLARINS
VEGAN FRIENDLY
TUS TRATAMIENTOS CON EXTRACTOS DE FRUTAS Y PLANTAS PARA UNA PIEL SANA Y BONITA
¡REGÁLATELO O PIDE QUE TE LO REGALEN ESTAS NAVIDADES!
Descúbrelo ahora en CLARINS.COM con un 30%* de descuento. Código: WUOLAH1
*Descuento aplicable sobre la gama My Clarins hasta el 28 de febrero de 2022. No acumulable con otras promociones de descuento y precio fidelidad.

Veamos que por último se tiene momento de segundo orden finito.

$$E_\theta(h(T)^2) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{n-2}{n} t\right)^2 \frac{n}{2t}\left(\frac{\theta}{t}\right)^{n/2} dt = \underbrace{\frac{(n-2)^2\theta^{n/2}}{2n}}_{>0} \int_0^{+\infty} t^{1-n/2}\, dt$$

pero $\left.\frac{t^{-n/2+2}}{-n/2+2}\right]_0^{+\infty} < +\infty \Leftrightarrow -n/2+2 \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{n \geq 4}$

Por tanto $h(T) = \frac{n-2}{n}T$ será UMVUE si $n \geq 4$.

3. a) Teoría ¿Es eficiente? No, como $\chi_\theta = (1,\theta)$ depende de θ, la familia de distribuciones no es regular y por tanto no puede ser eficiente.

b) Dada una m.a.s. de una variable con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\theta/x} \quad 0<x<1/\theta$$

determinar un intervalo de confianza, de mínima longitud esperada para θ a nivel de confianza $1-\alpha$, a partir de su estimación de máxima verosimilitud.

Calculemos el EMV de $1/\theta$. $\Theta = \mathbb{R}^+$

$\forall 1/\theta \in \Theta$, $f_{1/\theta}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\theta}{x}}$ $x \in (0, 1/\theta) = \chi_{1/\theta} \Rightarrow \chi = \mathbb{R}^+ \Rightarrow \chi^n = (\mathbb{R}^+)^n$

$\forall 1/\theta \in \Theta$, la función de densidad de la muestra es:

$$f^n_{1/\theta}(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2^n}\theta^{n/2}\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} \quad \text{si } \max x_i < 1/\theta \quad (x_1,\dots,x_n)\in\chi^n$$

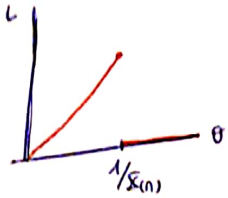
Así, su función de verosimilitud será:

$$L_{x_1,\dots,x_n}(1/\theta) = \frac{1}{2^n}\theta^{n/2}\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{x_i}} \quad \text{si } 1/\theta > \max x_i \quad 1/\theta \in \mathbb{R}^+$$

$$\ln L_{x_1,\dots,x_n}(1/\theta) = \frac{n}{2}\ln\theta - n\ln 2 + \sum_{i=1}^n \ln(x_i)\cdot\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial \ln L_{x_1,\dots,x_n}(1/\theta)}{\partial\theta} = \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta}$$

Como $L_{x_1,\dots,x_n}(1/\theta)$ es una función no negativa y estrictamente decreciente para $\max x_i < 1/\theta$, el máximo valor se alcanza en $\max x_i$. Por tanto el estimador máximo verosímil de $1/\theta$ es $\widehat{1/\theta}_{(x_1,\dots,x_n)} = \max x_i$. Aplicando ahora el Teorema de invarianza de Zehna $\hat{\theta} = \frac{1}{X_{(n)}}$.



Aplicando el método pivotal con $T(X_1,\dots,X_n;\theta) = 1/X_{(n)}$ como pivote, necesitaremos calcular primero su función de distribución.

$$P\left(\frac{1}{X_{(n)}} \le x\right) = P\left(\frac{1}{X_1} \le x, \dots, \frac{1}{X_n} \le x\right) = \left(P\left(\frac{1}{X} \le x\right)\right)^n = \left(F_{1/X}(x)\right)^n$$

$$\forall 1/\theta \in \mathbb{R}^+, \quad F_{1/\theta}(x) = \int_0^x \frac{1}{2}\sqrt{\theta/t}\, dt = (\theta x)^{1/2} \quad 0 < x < 1/\theta$$

$$\Rightarrow F_\theta^T(t) = (F_{1/\theta}(t))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ (\theta t)^{n/2} & \text{si } 0 \le t < 1/\theta \\ 1 & \text{si } t \ge 1/\theta \end{cases}$$

Por la transformada integral de probabilidad

$\Rightarrow$ Como $T \quad 1/\theta \quad \forall 1/\theta \in \mathbb{R}^+ \quad F_\theta^T(T) = (\theta T)^{n/2} \longrightarrow U(0,1)$

Como $(\theta t)^{n/2}$ es un pivote estrictamente decreciente en $1/\theta$, tenemos que:

$$\forall 1/\theta \in \mathbb{R}^+, \quad P_{1/\theta}\left(a < (\theta T)^{n/2} < b\right) = P_{1/\theta}\left(\frac{b^{2/n}}{T} < \theta < \frac{a^{2/n}}{T}\right) = P_{1/\theta}\left(\frac{T}{b^{2/n}} < \frac{1}{\theta} < \frac{T}{a^{2/n}}\right)$$

$\forall a,b \in [0,1] / b-a = 1-\alpha \Rightarrow (T b^{-2/n}, T a^{-2/n})$ I.C. a nivel $1-\alpha$

Como $b = \underbrace{a+1-\alpha \le 1}_{a \le \alpha} \Rightarrow \left(T(a+1-\alpha)^{-2/n}, T a^{-2/n}\right)$ I.C. a nivel $1-\alpha$

Minimizamos ahora la longitud media del intervalo.

Longitud media:

$E_{1/\theta}(a^{-2/n}T - T(a+1-\alpha)^{-2/n}) = E(T)\cdot(a^{-2/n} - (a+1-\alpha)^{-2/n})$

Como $T \geq 0$, minimizar la longitud media equivale a minimizar $(a^{-2/n} - (a+1-\alpha)^{-2/n})$.

$L(a) = a^{-2n} - (a+1-\alpha)^{-2/n} \quad a \in [0, \alpha]$

$\frac{dL(a)}{da} = -\frac{2}{n}a^{-2/n-1} + \frac{2}{n}(a+1-\alpha)^{-2/n-1} < 0$ ya que $a < a+1-\alpha$

Por tanto L decrece y el mínimo valor de L se alcanza en el máximo valor de a, es decir $a = \alpha$.

Por tanto nuestro IC basado en $T = \max X_i$ de menor longitud media uniforme será $(T, T\alpha^{-2/n})$

Y como lo queríamos para θ, será $\left(\frac{1}{T\alpha^{-2/n}}, \frac{1}{T}\right)$.

~~4º Teoría~~

Ej. 4. Observar el test de razón de verosimilitudes de tamaño α para contrastar $H_0: \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1: \theta > \theta_0$ basado en una observación de una variable con distribución exponencial: $f_\theta(x) = \theta \exp(-\theta x) \quad x > 0$.

¿Qué tamaño se alcanza con dicho test?

Sabemos que el TRV es de la forma

$$\varphi(X_1, \ldots, X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda(X_1, \ldots, X_n) < c \\ 0 & \text{si } \lambda(X_1, \ldots, X_n) \geq c \end{cases} \quad c \in (0,1]$$

donde $\lambda(X_1, \ldots, X_n) = \dfrac{\sup_{\theta \in \Theta_0} L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)}{\sup_{\theta \in \Theta} L_{x_1,\ldots,x_n}(\theta)} \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{X}^n$

En nuestro caso: $\left.\begin{array}{l}\Theta_0 = [\theta, +\infty) \\ \Theta_1 = (-\infty, \theta)\end{array}\right\} \Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1 = \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{X} = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{X}^n = (\mathbb{R}^+)^n$

Función de verosimilitud asociada a $x\in\mathbb{R}^+$: $L_x(\theta)=\theta e^{-\theta x}$ $\quad \theta\in\mathbb{R}$

$$\ln L_x(\theta)=\ln(\theta)-\theta x \rightarrow \frac{\partial \ln L_x(\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}-x=0 \Rightarrow \hat{\theta}=\frac{1}{x}$$

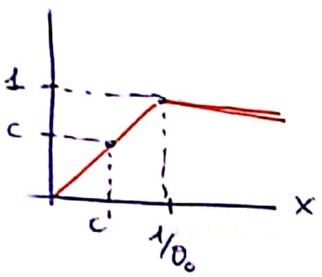
(como tiene un único extremo, es máximo)

$$\lambda(x)=\frac{\sup_{\theta\in\Theta_0} L_x(\theta)}{\sup_{\theta\in\Theta} L_x(\theta)}=\begin{cases}\dfrac{L_x(1/x)}{L_x(1/x)}=1 & \text{si } 0<1/x\leq\theta_0\\[2ex] \dfrac{L_x(\theta_0)}{L_x(1/x)}=x\theta_0\cdot e^{1-\theta_0 x} & \text{si } 1/x>\theta_0\end{cases}$$

Estudiemos cómo se comporta $\lambda(x)$:

$$1/x>\theta_0 \rightarrow \ln\lambda(x)=\ln(x\theta_0)+1-\theta_0 x \rightarrow \frac{\partial \ln\lambda(x)}{\partial x}=\frac{\theta_0}{x\theta_0}-\theta_0=\frac{1}{x}-\theta_0>0$$

$\Rightarrow \lambda(x)$ crece en $1/x>\theta_0$ y para $0<1/x\leq\theta_0$ permanece cte.:



$$\lambda(x)=\begin{cases}1 & \text{si } 0<1/\theta_0\leq x\\ x\theta_0\cdot e^{1-\theta_0 x} & \text{si } 1/\theta_0>x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<c'\\ 0 & \text{si } x\geq c'\end{cases} \quad (0<c'\leq 1/\theta_0)$$

Para calcular c' usamos el tamaño:

- Tamaño: $\sup_{\theta\leq\theta_0} E_\theta(\varphi(\bar{X}))=\alpha$

$$\alpha=\sup_{\theta\leq\theta_0} E_\theta(\varphi(\bar{X}))=\sup_{\theta\leq\theta_0} 1\cdot P_\theta(X<c')=\sup_{\theta\leq\theta_0}\int_0^{c'}\theta e^{-\theta x}\,dx=$$

$$=\sup_{\theta\leq\theta_0}\left[-e^{-\theta x}\right]_0^{c'}=\sup_{\theta\leq\theta_0}\left(-e^{-\theta c'}+1\right)=1-e^{-\theta_0 c'}=\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(\alpha-1)=-\theta_0 c' \Rightarrow c'=-\frac{\ln(\alpha-1)}{\theta_0}$$

pero $c'=\underbrace{\frac{-\ln(\alpha-1)}{\theta_0}}_{\geq 0\,(*)}\in[0,1/\theta_0] \Leftrightarrow -\frac{\ln(\alpha-1)}{\theta_0}\leq 1/\theta_0 \Leftrightarrow -\ln(\alpha-1)\leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha\geq 1+e^{-1}$

(*) Como $\alpha\in(0,1)\Rightarrow(1-\alpha)\in(0,1)\Rightarrow \ln(\alpha-1)<0$ y $\theta_0>0$.

Por tanto para tamaño $\alpha \geq e^{-1}+1$, el TRV será:

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < \dfrac{-\ln(\alpha-1)}{\theta_0} \\ 0 & \text{si } x \geq \dfrac{-\ln(\alpha-1)}{\theta_0} \end{cases}$$

5. Teoría

6. El peso atómico de 12 muestras de plomo (procedentes de desintegraciones radiactivas) se ha detectado por dos procedimientos diferentes, obteniéndose como resultados:

Procedimiento I:	206,34	207,42	207,25	206,81	206,53	206,56
	207,38	206,90	207,32	206,72	207,24	207,67
Procedimiento II:	206,37	207,38	207,33	206,69	206,48	206,52
	207,31	206,94	207,21	206,58	207,18	207,55

Contrastar mediante el test de signos y el test de los rangos signados si existe una diferencia significativa entre los dos procedimientos, en relación con la distribución del peso atómico. ¿Bajo qué condiciones es adecuado utilizar cada uno de los test?

Se trata de un contraste de igualdad de las distribuciones correspondiente a dos muestras apareadas. Suponiendo que la forma funcional de la distribución del peso atómico es la misma usando los procedimientos I y II, el problema se puede resolver mediante un test de localización de la mediana de las diferencias.

$X = P_1 - P_2$: Diferencia del peso atómico detectado con el procedimiento 1 y 2.

$$\begin{cases} H_0: M_X = 0 \\ H_1: M_X \neq 0 \end{cases}$$

Como estamos ante una variable aleatoria continua, podemos aplicar los test de localización.

- **Test de los signos:**

Observaciones de X: -0,03 0,04 -0,08 0,12 0,05 0,04 +0,07 -0,04 0,11 0,14 0,06 0,12

$n=12$

$T(X_1,\dots,X_{12})$ = Nº de observaciones muestrales mayores que 0

$\downarrow H_0$

$B(12, 1/2)$

$P(T=9)+P(T=10)+P(T=11)+P(T=12)$

$T_{exp}=9 \rightarrow p\text{-nivel} = P_{H_0}(T \geq 9) = 0{,}07299$

Se acepta H_0 a niveles de significación inferiores a 0,07299 y se rechaza a niveles superiores.

- **Test de los rangos signados:**

Para aplicar este test debemos suponer que $D = X - 0 = X$ es simétrica.

$T^+(X_1,\dots,X_n)$ = Suma de los rangos correspondientes a diferencias positivas.

d_i = -0,03; 0,04; -0,08; 0,12; 0,05; 0,04; 0,07; -0,04; 0,11; 0,14; 0,06; 0,12

$\lvert d_i \rvert$	0,03	0,04	0,04	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,11	0,12	0,12	0,14
Signo	−	+	+	−	+	+	+	−	+	+	+	+
Rango	1	3	3	3	5	6	7	8	9	10	11	12

$T^+_{exp} = 3+3+5+6+7+9+10+11+12 = 66$

$p\text{-nivel} = P(T^+ \geq 66) = 0{,}017$

Se acepta H_0 a niveles de significación inferiores a 0,017 y se rechaza a niveles superiores.

Para niveles de significación entre 0,017 y 0,07299 el test de los rangos signados conduce al rechazo de H_0 y el test de los signos a la aceptación.