Universidad de Granada Departamento de Matemática Aplicada	**Modelos Matemáticos II** Grado en Matemáticas	**Prueba de clase** **Soluciones** 31 de mayo de 2016

Ejercicio 1. Marca las que son correctas de entre las siguientes afirmaciones:

☐ La serie de Fourier de la función $f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) := x^3$ para $x \in [-\pi, \pi]$ converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

☐ Hay funciones discontinuas que tienen una derivada débil continua.

☐ Un funcional convexo $\mathcal{F}\colon \mathcal{C}^1([0,1]) \to \mathbb{R}$ siempre tiene un mínimo global.

Solución.

1. No es cierta. La función $f(x) = x^3$ cumple $-\pi^3 = f(-\pi) \neq f(\pi) = \pi^3$, luego no es periódica (no cumple $f(-\pi) = f(\pi)$). La serie de Fourier de una función no periódica nunca converge uniformemente a f.

2. Sí hay. Si dos funciones son iguales en casi todo punto entonces su derivada débil es la misma. Por ejemplo, la función constantemente 0 en $(0,1)$ es una derivada débil de la función

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (0,1),\ x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

3. No necesariamente. Por ejemplo el funcional $\mathcal{F}(y) := \exp(y(0))$ es convexo pero no tiene mínimo.

Ejercicio 2. Dados $a < b \in \mathbb{R}$ y una función $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ consideramos el funcional

$$F[y] := \int_a^b f(x)(1 + y'(x)^2)\,\mathrm{d}x$$

definido en el conjunto

$$D := \{y \in \mathcal{C}^1([a,b]) \mid y(a) = y(b) = 0\}.$$

1. Determina la ecuación de Euler-Lagrange asociada a este funcional.

2. Demuestra que si $0 < a < b$ y $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$ entonces el funcional F tiene un mínimo global. Calcúlalo.

Solución. Este funcional es de la forma $\int_a^b F(x, y, y')$, donde

$$F(x,y,z) := f(x)(1 + z^2).$$

Sabemos que en este caso la ecuación de Euler-Lagrange viene dada por

$$\partial_y F(x, y(x), y'(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\partial_z F(x, y(x), y'(x))\right).$$

Calculamos esto:

$$\partial_y F(x,y,z) = 0, \qquad \partial_z F(x,y,z) = 2f(x)z,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\partial_z F(x, y(x), y'(x))\right) = 2(f(x)y'(x))'.$$

Por tanto la ecuación de Euler-Lagrange es

$$(fy')' = 0. \tag{1}$$

En el caso en que $0 < a < b$ y $f(x) \geq 0$ el funcional $\mathcal{F}$ es convexo: para $y_1, y_2 \in \mathcal{C}^1([a,b])$ y $\theta \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
\theta\mathcal{F}[y_1] + (1-\theta)\mathcal{F}[y_2] &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)(\theta y_1'(x)^2 + (1-\theta)y_2'(x)^2)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)(\theta y_1'(x) + (1-\theta)y_2'(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \mathcal{F}[\theta y_1 + (1-\theta)y_2].
\end{aligned}$$

Para la cota anterior hemos usado que $(\theta a^2 + (1-\theta)b^2) \geq (\theta a + (1-\theta)b)^2$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ (esto es, la función $r \mapsto r^2$ es convexa), y que $f(x) \geq 0$ en $[a,b]$. (También puedes usar otras definiciones de convexidad; por ejemplo, puedes demostrar que

$$\mathcal{F}[y_2] \geq \mathcal{F}[y_1] + \delta\mathcal{F}[y_1; y_2 - y_1] \qquad \text{para todo } y_1, y_2 \in D$$

El resultado se obtiene igual.) Como $\mathcal{F}$ es convexo, si encontramos una solución de la ecuación (1) en $\mathcal{C}^1([a,b])$, sabemos que tiene que ser un mínimo. Pero la función $y \equiv 0$ en $[a,b]$ es siempre solución de (1), y cumple las condiciones de contorno. Por tanto, el mínimo se alcanza en la función $y(x) = 0$, $x \in [a,b]$. (En realidad, esto se ve directamente a partir de la expresión del funcional: claramente su menor valor se alcanza cuando $y'(x) = 0$ para todo x.)

Ejercicio 3. Sea $\Omega := B_1(0)$ la bola unidad abierta centrada en 0 en $\mathbb{R}^d$, y $F\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ una función de clase $\mathcal{C}^1$. Consideramos el funcional $\mathcal{F}\colon H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}[u] := \int_\Omega |\nabla u(x) + F(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

Usando el Teorema de Lax-Milgram, demuestra que este funcional tiene un mínimo global.

Solución. Escribimos $\mathcal{F}$ como

$$\mathcal{F}[u] = \int_\Omega |\nabla u|^2 + 2\int_\Omega F\nabla u + \int_\Omega |F|^2.$$

Encontrar un mínimo de este funcional es lo mismo que encontrar un mínimo de

$$\widetilde{\mathcal{F}}[u] := \int_\Omega |\nabla u|^2 + 2\int_\Omega F\nabla u,$$

ya que sólo se diferencian en una constante. Para aplicar el teorema de Lax-Milgram definimos

$$a(u,v) := 2\int_\Omega \nabla u\nabla v, \quad \ell(v) := -2\int_\Omega F\nabla v.$$

Se comprueba que a es bilineal en $H_0^1 \times H_0^1$, que ℓ es lineal en H_0^1, y además las dos son continuas porque

$$|a(u,v)| \leq 2\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \qquad |\ell(v)| \leq 2\|F\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

para todo $u, v \in H_0^1(\Omega)$. La función a es además coerciva, como puede verse usando la desigualdad de Poincaré. Como consecuencia, el teorema de Lax-Milgram asegura que $\widetilde{\mathcal{F}}$ tiene un único punto crítico en $H_0^1(\Omega)$, que es además un mínimo.

Ejercicio 4. Sea $L > 0$ un número dado y sea $\Omega := (0,L) \times (0,L) \subseteq \mathbb{R}^2$. Buscando una solución en variables separadas, encuentra $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que la siguiente ecuación en derivadas parciales tenga una solución no negativa y no trivial (y encuentra dicha solución):

$$\left.\begin{aligned}
\Delta u + \lambda u = 0 \qquad &\text{en } \Omega, \\
u = 0 \qquad &\text{en } \partial\Omega.
\end{aligned}\right\}$$

Solución. Buscamos una solución de la forma

$$u(x,y) = \phi(x)\psi(y), \qquad (x,y) \in \overline{\Omega},$$

para funciones ϕ, ψ apropiadas, definidas en $[0, L]$. Usando la ecuación vemos que ϕ, ψ deben cumplir

$$\phi''(x)\psi(y) + \phi(x)\psi''(y) + \lambda\phi(x)\psi(y) = 0 \qquad \text{en } \Omega, \tag{2}$$

y para satisfacer la condición de contorno es suficiente que

$$\phi(0) = \phi(L) = \psi(0) = \psi(L) = 0. \tag{3}$$

De (2) deducimos que (al menos en los puntos donde ϕ, ψ no se anulan)

$$-\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\psi''(y)}{\psi(y)} + \lambda \qquad \text{en } \Omega.$$

Como los dos miembros dependen de variables distintas es razonable imponer que sean igual a cierta constante $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \phi''(x) &= -\alpha\phi(x), \\ \psi''(y) &= (\alpha - \lambda)\psi(y). \end{aligned}$$

Estas ecuaciones tienen solución no trivial que cumple la condición de contorno (3) sólo cuando

$$\alpha = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \qquad \lambda - \alpha = \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2$$

para ciertos $n, m \geq 1$ enteros. En ese caso las soluciones no triviales son

$$\phi(x) = A \sin\left(\frac{\pi n x}{L}\right), \qquad \psi(x) = B \sin\left(\frac{\pi m x}{L}\right), \qquad (x \in [0, L])$$

para $A, B \neq 0$ reales. Elegimos, por ejemplo, $A = B = 1$. (Para el ejercicio no necesitamos saber que éstas son las *únicas* soluciones no triviales, basta con saber que son soluciones.) El único valor de n, m que hace que ϕ, ψ sean no negativas en $[0, L]$ es $n = m = 1$, así que si queremos una solución no negativa debemos tomar

$$\alpha = \lambda - \alpha = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \qquad \text{es decir:} \qquad \alpha = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2, \quad \lambda = 2\left(\frac{\pi}{L}\right)^2.$$

Se puede comprobar que efectivamente la función

$$u(x,y) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right), \qquad (x,y) \in [0, L] \times [0, L]$$

es la solución no negativa que buscamos, correspondiente a $\lambda = 2(\frac{\pi}{L})^2$.