

Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Leer y escribir correctamente

1. Describe con palabras los conjuntos $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ y $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 3\}$.
2. Representa simbólicamente el conjunto de los números reales cuyos inversos están entre 1 y 2.
3. Enuncia sin usar símbolos matemáticos el siguiente teorema: “Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) > 0$ entonces existe algún punto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.”
4. Lee el epígrafe 1.1.1. “Axiomas, definiciones, teoremas, lemas, corolarios.” de mi libro

Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable.

Después de leerlo explica el significado de la expresión “ $H \implies T$ ”. Explica también con todo detalle qué es lo que hacemos en matemáticas cuando demostramos un teorema.

5. Cuando en una expresión matemática aparecen cuantificadores es muy importante el orden de los mismos. Lee las siguientes afirmaciones (se supone que $A \subset \mathbb{R}$ es un conjunto no vacío de números reales):
 - a) Para todo $x \in A$ hay un $z \in \mathbb{R}$ que verifica $z > x$.
 - b) Hay un $z \in \mathbb{R}$ que verifica $z > x$ para todo $x \in A$.Explica con detalle lo que se dice en a) y en b). ¿Te parece que se dice lo mismo en ambas?
6. Dados dos números reales a y b , prueba que las siguientes afirmaciones, que debes expresar con palabras, son equivalentes:
 - i) $a \leq b$.
 - ii) Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se verifica que $b + \varepsilon \geq a$.
 - iii) Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ se verifica que $a - \varepsilon \leq b$.
7. Dados dos números reales a y b , prueba las siguientes igualdades que debes enunciar con palabras:

$$\{x \in \mathbb{R} : x > b\} = \{b + \varepsilon : \varepsilon > 0\}, \quad \{x \in \mathbb{R} : x < a\} = \{a - \varepsilon : \varepsilon > 0\}.$$

Vuelve a enunciar con palabras los apartados del ejercicio anterior.

8. Dados dos números reales a y b , prueba que las siguientes afirmaciones, que debes expresar con palabras, son equivalentes:
 - i) $a \leq b$.
 - ii) Para todo $v > b$ se verifica que $v \geq a$.
 - iii) Para todo $u < a$ se verifica que $u \leq b$.Compara este ejercicio con el ejercicio 6.

9. a) Estudia si hay números x e y que verifican la igualdad $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$.

b) Estudia si hay números a, b, c, d que verifican la igualdad $\frac{1}{a^2+d} + \frac{1}{b+c^2} = \frac{1}{a^2+b+c^2+d}$.