Apellidos: .... Grupo: ...

Nombre: .... nif: .... nº hojas: ....

LMD

Grado en Ingeniería Informática

16 de mayo de 2018

1. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi\}$:

   a) $\alpha \to (\beta \to \gamma) = (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

   b) Si $\varphi \vDash \psi$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma, \psi) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \varphi)$.

   c) $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \to (\beta \to \gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma, (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

Solución. Al ser para cualesquiera fórmulas α, β y γ

$$(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$

una ley lógica, la conocida como *ley de Frege*, entonces:

$$\alpha \to (\beta \to \gamma) \vDash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \tag{1}$$

Recíprocamente, por la *regla de modus ponens*, monotonía, *ley de identidad* y el *Teorema de Deducción* son las siguientes relaciones ciertas:

$$\begin{aligned}
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \alpha, \beta &\vDash \beta \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \beta &\vDash \alpha \to \beta \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \beta &\vDash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \beta &\vDash \alpha \to \gamma \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \alpha, \beta &\vDash \gamma \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma), \alpha &\vDash \beta \to \gamma \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) &\vDash \alpha \to (\beta \to \gamma) \qquad (2)
\end{aligned}$$

Por la definición de equivalencia lógica, (1) y (2) se tiene para cualesquiera fórmulas α, β y γ:

$$\alpha \to (\beta \to \gamma) = (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \tag{3}$$

La segunda aproximación al apartado 1a) es observar:

$$\begin{aligned}
\alpha \to (\beta \to \gamma) &= \neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma \\
&= (\neg\beta \vee \neg\alpha \vee \gamma) \\
&= (\alpha \vee \neg\alpha \vee \gamma) \wedge (\neg\beta \vee \neg\alpha \vee \gamma) \\
&= (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\alpha \vee \gamma) \\
&= \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg\alpha \vee \gamma) \\
&= (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)
\end{aligned}$$

La tercera vía para demostrar lo requerido en al apartado 1a) es observar que:

$$\begin{aligned}
\neg((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)) &= (\neg\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \wedge \neg\gamma \\
\neg(\alpha \to (\beta \to \gamma)) &= \neg(\neg\alpha \vee (\neg\beta\gamma)) \\
&= \alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma
\end{aligned}$$

y que los conjuntos (vía p.e. el método de Davis&Putnam o simplemente resolución):

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \neg\alpha \vee \beta, \alpha, \neg\gamma\} \\
\Gamma_2 &= \{\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \alpha, \beta, \neg\gamma\}
\end{aligned}$$

son ambos insatisfacibles. Para el apartado 1b) supongamos ahora que $\varphi \vDash \psi$. Son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$\begin{aligned}
\Gamma \cup \{\psi\} &\subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \varphi) \\
\mathrm{Con}(\Gamma, \psi) &\subseteq \mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma, \varphi)) \\
&= \mathrm{Con}(\Gamma, \varphi)
\end{aligned}$$

Por simetría se tiene que si $\varphi = \psi$, entonces

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \varphi) = \mathrm{Con}(\Gamma, \psi) \tag{4}$$

Por (3) y (4), se tiene que:

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \to (\beta \to \gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma, (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$$

□

2. Empleando el algoritmo de Quine&McCluskey, encuentre una expresión minimal de la función booleana:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,4,5,7,8,11,12,15)$$

entre las que pueden representarla como suma de productos.

Solución.

1. **Generación de implicantes primos**; son obtenidos al seguir el proceso explicado. La tabla de la Figura 1 recoge la marcha del proceso y los resultados. Los implicantes primos son los marcados con un asterisco.

2. **Construcción de la tabla de implicantes primos**; es la que aparece en la Figura 2, donde además hemos marcado con un asterisco los implicantes primos esenciales y los minterm activos que cubren.

3. **Reducción de la tabla de implicantes primos**; suprimimos los implicantes primos esenciales y las columnas que quedan cubiertas por ellos. También suprimimos las columnas dominantes y las filas dominadas. Resultan entonces las tablas de la Figura 3. Así sabemos que son:

columna 1			columna 2			columna 3		
0	0000	✓	{0,4}	0_00	✓	{0,4,8,12}	_ _00	*
4	0100	✓	{0,8}	_000	✓	{0,8,4,12}	_ _00	
8	1000	✓	{4,5}	010_	*			
5	0101	✓	{4,12}	_100	✓			
12	1100	✓	{8,12}	1_000	✓			
7	0111	✓	{5,7}	01_1	*			
11	1011	✓	{7,15}	_111	*			
15	1111	✓	{11,15}	1_11	*			

Figura 1: Generación de implicantes primos

			0	4	5	7	8	11	12	15
*	{0,4,8,12}	_ _00	∘	∘			∘		∘	
	{4,5}	010_		∘	∘					
	{5,7}	01_1			∘	∘				
	{7,15}	_111				∘				∘
*	{11,15}	1_11						∘		∘

Figura 2: Tabla de implicantes primos

		5	7
{4,5}	010_	∘	
{5,7}	01_1	∘	∘
{7,15}	_111		∘

(a) Sin implicantes esenciales

			5	7
**	{5,7}	01_1	∘	∘

(b) Sin filas dominadas

Figura 3: Tabla de implicantes primos sin los esenciales.

- implicantes primos esenciales primarios: $\{0, 4, 8, 12\}$ de patrón $\_\_00$ y $\{11, 15\}$ de patrón 1_11.
- implicantes primos esenciales secundarios: $\{5, 7\}$ de patrón 01_1.
- no hay más implicantes primos esenciales, pues la tabla está resuelta.

Por tanto, la expresión de $f(a, b, c, d)$ solicitada es:

$$f(a, b, c, d) = \bar{c}\bar{d} + \bar{a}bd + acd$$

$\square$