2.3.5. Coordenadas respecto de una base

Una de las utilidades principales de tener una base en un e.v. es la de poder identificar cada vector con una familia de escalares que llamaremos coordenadas. Veamos en detalle cómo se realiza esta identificación.[10]

Sea $V(K)$ un e.v. y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Como $\mathcal{B}$ es un s.d.g. de V sabemos que todo vector de V se expresa como c.l. de $\mathcal{B}$. Dicho de otro modo, para cada $v \in V$, existen escalares $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n$. Como esta propiedad la cumple cualquier s.d.g. de V nos planteamos si, al ser $\mathcal{B}$ una base, tenemos alguna ventaja adicional. Esto es lo que veremos en el siguiente resultado.

Teorema 2.131 (coordenadas)**.** *Sea $V(K)$ un e.v. y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Entonces, para cada $v \in V$, existen escalares únicos $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n$.*

Demostración. Sea $v \in V$. La existencia de escalares a_i que cumplen $v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n$ se debe a que $\mathcal{B}$ es un s.d.g. de V. La unicidad de estos escalares es consecuencia de la independencia lineal de $\mathcal{B}$; aunque esta propiedad se vio en la proposición 2.79 para todo conjunto l.i., la detallamos nuevamente por su importancia.

Supongamos que tenemos dos expresiones de v como c.l. de $\mathcal{B}$, esto es,

$$v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n,$$
$$v = b_1 \cdot v_1 + \ldots + b_n \cdot v_n.$$

para ciertos escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in K$. Queremos demostrar que $a_i = b_i$, para cada $i = 1, \ldots, n$. Si a la primera igualdad de arriba le restamos la segunda, llegamos a:

$$(a_1 - b_1) \cdot v_1 + \ldots + (a_n - b_n) \cdot v_n = 0,$$

que es una expresión del vector nulo como c.l. de la familia $\mathcal{B}$. Como $\mathcal{B}$ es l.i. deducimos que $a_i - b_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, n$, como se quería demostrar. ∎

Observación 2.132. El recíproco del resultado anterior es cierto. De hecho, si $V(K)$ es un e.v. y $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

(i) $\mathcal{B}$ es una base de V.

(ii) $V = L(v_1) \oplus \ldots \oplus L(v_n)$.

(iii) Para cada $v \in V$, existen escalares únicos $a_i \in K$ tales que $v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n$.

La demostración de estas equivalencias queda como ejercicio.

[10] Para el desarrollo de esta sección es preciso tener algunos conocimientos elementales sobre el producto de matrices (esencialmente su definición, asociatividad y, en el caso de matrices cuadradas, las propiedades asociadas a su estructura de anillo unitario), que se unen a las propiedades ya vistas de espacio vectorial respecto a la suma y el producto por escalares, y se repasarán aparte. También conviene, desde el punto de vista práctico, tener un procedimiento algorítmico que permita calcular la matriz inversa de una matriz regular. Aquí también se verá aparte un procedimiento sencillo basado en la resolución de SEL por el método de Gauss; más adelante se verá otro usando determinantes, que probablemente conozca ya el alumno.

El teorema previo nos indica que, en presencia de una base, tenemos una “determinación numérica” de los vectores, pues a cada vector le asociamos de forma única tantos escalares como la dimensión. No obstante, debemos discutir un detalle sobre la ordenación de los escalares y la base. Obsérvese que en el teorema anterior los elementos de la base estaban ordenados por un subíndice. Esta ordenación coincidía con la ordenación física de los símbolos $v_1, \ldots v_n$, pero desde un punto de vista conjuntista se verifica, por ejemplo $\{v_1, v_2\} = \{v_2, v_1\}$. Como los escalares deben asignarse con precisión a los vectores, introducimos el siguiente concepto.

Definición 2.133. *Diremos que una n-úpla $(v_1, \ldots, v_n) \in V \times \ldots \times^{(n)} V$ es una base ordenada si el conjunto $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base de $V(K)$.*

Con este concepto, pasamos a dar nombre a los escalares proporcionados por el teorema 2.131.

Definición 2.134. *Sea $V(K)$ un e.v. y $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ordenada de $V(K)$. Dado $v \in V$, a la única n-úpla de escalares $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ tal que $v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_n \cdot v_n$ se le llamará* n-úpla de coordenadas *o, simplemente,* coordenadas, *de v respecto de $\mathcal{B}$. En tal caso escribiremos:*

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.135. Las bases ordenadas $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ y $\mathcal{B}' = (v_2, v_1, \ldots, v_n)$ dan lugar a la misma base conjuntista. Dado $v \in V$, nótese si

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

son las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}$, entonces:

$$v_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

son las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}'$; obviamente $v_{\mathcal{B}} \neq v_{\mathcal{B}'}$.

Convenio 2.136. Aunque las coordenadas de un vector constituyen una n-úpla que se asigna a una base ordenada (no a una base), usualmente se abusa del lenguaje y no se distingue entre bases y bases ordenadas. Esto puede hacerse cuando se proporcione la base $\mathcal{B}$ de modo que tenga una ordenación natural (aunque no se diga explícitamente que está ordenada) se habla de coordenadas en la base $\mathcal{B}$. Así, en el ejemplo anterior se puede decir simplemente que v_B son las coordenadas de v en la base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Observación 2.137. Dada una base ordenada $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ en V, las coordenadas $v_{\mathcal{B}}$ de un vector $v \in V$ proporcionan un elemento de K^n, si identificamos este espacio con $M_{n\times 1}(K)$. Esto nos da una conexión entre V y K^n a través de la aplicación $f_{\mathcal{B}} : V \to K^n$ definida por $f_{\mathcal{B}}(v) = v_{\mathcal{B}}$. Es sencillo comprobar que $f_{\mathcal{B}}$ es biyectiva. De hecho, anticipando el lenguaje del próximo tema $f_{\mathcal{B}}$ es un *isomorfismo de espacios vectoriales*: además de la biyectividad, cumple que $f_{\mathcal{B}}(a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot f_{\mathcal{B}}(u) + b \cdot f_{\mathcal{B}}(v)$, para todo $a, b \in K$ y todo $u, v \in V$. Esto equivale a la identidad $(a \cdot u + b \cdot v)_{\mathcal{B}} = a \cdot u_{\mathcal{B}} + b \cdot v_{\mathcal{B}}$, que se puede demostrar como ejercicio.

Este isomorfismo $f_{\mathcal{B}}$ establece una "identificación" (dependiente de $\mathcal{B}$) entre V y K^n como espacios vectoriales sobre K. Así, propiedades de V que sólo dependan de la estructura de e.v. son equivalentes a las mismas propiedades en K^n. Por ejemplo, es fácil demostrar[11] directamente que $S = \{u_1, \ldots, u_m\}$ es un s.d.g. (resp. una familia l.i.) de V si y sólo si $S_{\mathcal{B}} = \{(u_1)_{\mathcal{B}}, \ldots, (u_m)_{\mathcal{B}}\}$ es un s.d.g. (resp. una familia l.i.) de K^n.

Ejercicio 2.138. *Sea $V(K)$ un e.v. y $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ una base ordenada de V. ¿Qué coordenadas tiene el vector nulo respecto de $\mathcal{B}$? ¿Y cada uno de los vectores v_i?*

Ahora veremos cómo se calculan las coordenadas en algunas de las bases estudiadas con anterioridad.

Ejemplo 2.139. Si en K^n tomamos la base (ordenada) usual $\mathcal{B}_u = (e_1, \ldots, e_n)$ entonces cada vector $v = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ se expresa como $v = x_1 \cdot e_1 + \ldots + x_n \cdot e_n$. Esto implica que:

$$v_{\mathcal{B}_u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

es decir, las coordenadas coinciden con las componentes del vector. Esta es una propiedad exclusiva de $\mathcal{B}_u$ que facilita mucho los cálculos.

Ejemplo 2.140. Si en $M_{m\times n}(K)$ tomamos $\mathcal{B}_u = \{E_{ij} \,|\, i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\}$, entonces cada $A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(K)$ se expresa como $A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot E_{ij}$. Tomando $\mathcal{B}$ como una base ordenada (consistentemente con el convenio 2.136, ordenaremos $\mathcal{B}$ suponiendo que en primer lugar se tienen los elementos de la primera fila con su ordenación natural, después los de la segunda, etc.) esto implica que las componentes de la matriz coinciden con sus coordenadas en $\mathcal{B}_u$ (suponiendo análogamente que la $m \times n$-úpla de coordenadas se escribe como una matriz situando las n primeras coordenadas en la primera fila, las n siguientes en la segunda, etc.)

Ejemplo 2.141. Si en $\mathbb{K}_n[x]$ tomamos la base usual $\mathcal{B}_u = (1, x, \ldots, x^n)$ se cumple que cada $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ se expresa como $p(x) = a_0 \cdot p_0(x) + a_1 \cdot p_1(x) + \ldots + a_n \cdot p_n(x)$, donde $p_i(x) = x^i$, para cada $i = 0, 1, \ldots, n$. Así, las coordenadas de $p(x)$ respecto de $\mathcal{B}_u$ coinciden con los coeficientes del polinomio (ordenados de menor a mayor).

En general, el cálculo de las coordenadas respecto de una base es equivalente a la resolución de un SEL compatible determinado. Veámoslo con un ejemplo.

Ejemplo 2.142. En $\mathbb{R}^2$ consideramos el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (-1, 1)$. Es obvio que $\mathcal{B}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ pues $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$ y $\mathcal{B}$ es l.i. (v_1 y v_2 no son proporcionales). Calculemos las coordenadas de $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ respecto de $\mathcal{B}$ (con su ordenación natural). Éstas serán los únicos números $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tales que $v = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$. Operando y tomando componentes llegamos a la

[11] Demostraremos un resultado más general válido para todo isomorfismo de e.v. en el tema siguiente.

igualdad $(x,y) = (a-b,b)$, de donde se tiene el SEL de ecuaciones $a-b = x$ y $b = y$. Este SEL es compatible determinado con soluciones $a = x+y$ y $b = y$. Por tanto:

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}.$$

Se comprueba rápidamente que, efectivamente, $v = (x+y)\cdot v_1 + y\cdot v_2$. Por ejemplo, si $v = (-2,7)$ entonces $v = 5\cdot v_1 + 7\cdot v_2$. Sin embargo, en $\mathcal{B}_u$ se tiene que $v = -2\cdot e_1 + 7\cdot e_2$.

En el ejemplo anterior apreciamos que un mismo vector puede tener coordenadas distintas en distintas bases. Nos preguntamos ahora lo siguiente: ¿qué relación existe entre las coordenadas de un vector en dos bases distintas de un mismo e.v.? Para responder esta cuestión necesitamos relacionar los vectores de ambas bases.

Para fijar ideas, supongamos que V es un e.v. sobre un cuerpo K con $\dim_K(V) = n$. Tomamos dos bases $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ y $\mathcal{B}' = (v'_1,\ldots,v'_n)$ de V. Dado $v \in V$, la cuestión es: ¿qué relación hay entre $v_{\mathcal{B}}$ y $v_{\mathcal{B}'}$? (p. ej., supongamos que conocemos $v_{\mathcal{B}}$ y queremos determinar $v_{\mathcal{B}'}$ a partir de $v_{\mathcal{B}}$). Para ello necesitamos conocer cómo los vectores de $\mathcal{B}$ se expresan como c.l. de los de $\mathcal{B}'$.

Definición 2.143. *En las condiciones anteriores, la* matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ *es la matriz que denotaremos $M(\mathcal{B},\mathcal{B}')$ o $M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ en $M_n(K)$ cuya columna j-ésima contiene las coordenadas del vector v_j de $\mathcal{B}$ respecto de $\mathcal{B}'$. Lo simbolizamos así:*

$$M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \big((v_1)_{\mathcal{B}'}\,|\,(v_2)_{\mathcal{B}'}\,|\,\ldots\,|\,(v_n)_{\mathcal{B}'}\big).$$

Ahora ya podemos resolver el problema que nos habíamos planteado.

Proposición 2.144 (cambio de base)**.** *En las condiciones anteriores, se tiene que:*

$$v_{\mathcal{B}'} = M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Llamaremos a la ecuación anterior la expresión matricial del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Demostración. Supongamos que:

$$v_j = a_{1j}\cdot v'_1 + \ldots + a_{nj}\cdot v'_n, \text{ para cada } j = 1,\ldots,n.$$

De esta forma, la j-ésima columna de $M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ contiene exactamente a los escalares a_{ij} con $i = 1,\ldots,n$. Supongamos también que:

$$v = x_1\cdot v_1 + \ldots + x_n\cdot v_n,$$

es decir, $v_{\mathcal{B}}$ contiene a los escalares x_i con $i = 1,\ldots,n$. Buscamos expresar v como c.l. de $\mathcal{B}'$. Sustituyendo la primera ecuación en la segunda tenemos la igualdad:

$$\begin{aligned} v &= x_1\cdot(a_{11}\cdot v'_1 + \ldots + a_{n1}\cdot v'_n) + \ldots + x_n\cdot(a_{1n}\cdot v'_1 + \ldots + a_{nn}\cdot v'_n) \\ &= (a_{11}\cdot x_1 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n)\cdot v'_1 + \ldots + (a_{n1}\cdot x_1 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n)\cdot v'_n, \end{aligned}$$

que nos expresa v como c.l. de $\mathcal{B}'$. Esto significa que los coeficientes de la c.l. anterior son las coordenadas de v respecto de $\mathcal{B}'$. Por definición de producto de matrices, la entrada i-ésima de $v_{\mathcal{B}'}$ es el producto de la fila i-ésima de $M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ con el vector columna $v_{\mathcal{B}}$. ∎

Ejemplo 2.145. En K^n, la matriz $M(I,\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}) = \big((v_1)_{\mathcal{B}_u}\,|\,(v_2)_{\mathcal{B}_u}\,|\,\dots\,|\,(v_n)_{\mathcal{B}_u}\big)$ es aquella cuyas columnas contienen las componentes de los vectores de $\mathcal{B}$.

Ejemplo 2.146. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la base $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ con $v_1 = (1,0)$ y $v_2 = (-1,1)$ del último ejemplo. Ya vimos que, para cada $v = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene:

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix},$$

con un cálculo directo de las coordenadas. Vamos a llegar ahora al mismo resultado usando un cambio de base. Tomando $\mathcal{B}_u$ como base de referencia, la Proposición 2.144 nos dice que:

$$v_{\mathcal{B}} = M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u)\cdot v_{\mathcal{B}_u},\text{ donde } M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u) = ((e_1)_{\mathcal{B}},(e_2)_{\mathcal{B}}).$$

Necesitamos las coordenadas de e_1 y e_2 con respecto a $\mathcal{B}$. Tras unos cálculos sencillos:

$$(e_1)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } (e_2)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ por lo que } M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por último, teniendo en cuenta que en $\mathcal{B}_u$ las coordenadas de un vector están dadas por sus componentes, deducimos que:

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix},$$

con lo que llegamos al mismo resultado de antes.

Para terminar, veremos algunas propiedades generales de las matrices de cambio de base que se relacionan con las propiedades del producto de matrices.

Definición 2.147. *Sea A una matriz cuadrada, $A \in M_n(\mathbb{K})$. Diremos que A es regular si admite inversa para el producto, esto es, si existe otra matriz cuadrada, A^{-1} tal que $A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = I_n$, donde $I_n \in M_n(K)$ es la* matriz identidad*, definida por $(I)_{jk} = \delta_{jk}$.*

Proposición 2.148. *Sea $V(K)$ un e.v. y sean $\mathcal{B},\mathcal{B}',\mathcal{B}''$ tres bases ordenadas de $V(K)$. Se verifica:*
(i) $M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'') = M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}')\cdot M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}'')$.
(ii) $M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B})$ es la matriz identidad I_n.
(iii) $M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ es una matriz regular*, esto es, que admite inversa para el producto de matrices, verificando ésta además: $M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^{-1} = M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}')$*

Demostración. Para (i), sea v cualquier vector de V. La Proposición 2.144 nos dice:

$$v_{\mathcal{B}''} = M(I,\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}')\cdot v_{\mathcal{B}'} \qquad v_{\mathcal{B}'} = M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Sustituyendo la segunda igualdad en la primera, y usando la asociatividad del producto de matrices:

$$v_{\mathcal{B}''} = \big(M(I,\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}')\cdot M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\big)\cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Por otra parte, también sabemos:

$$v_{\mathcal{B}''} = M(I,\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B})\cdot v_{\mathcal{B}}$$

Restando las dos igualdades anteriores se tiene entonces:

$$\big(M(I,\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) - M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}')\cdot M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\big)\cdot v_{\mathcal{B}} = 0_{n\times 1}.$$

Tomando $v_{\mathcal{B}} = (v_j)_{\mathcal{B}}$ donde v_j es el $j-$ésimo vector de la base $\mathcal{B}$ (esto es $(v_j)_{\mathcal{B}}(=(e_j)_{B_u})$ tiene todas las componentes 0 salvo la $j-$ésima, que es igual a 1) se obtiene que la columna $j-$ésima está compuesta de ceros, esto es, $M(I,\mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) - M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = 0_n$ (matriz nula $n \times n$), de donde se deduce el resultado.

La afirmación (ii) es inmediata. Para (iii), aplicando primero la parte (i) y luego la (ii):

$$M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}) = I_n,$$

y para la igualdad $M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') = I_n$ basta con intercambiar el papel de las bases. ∎

Ejemplo 2.149. Una de las aplicaciones usuales del resultado anterior es realizar con facilidad cambios de base en K^n a través de la base usual $\mathcal{B}_u$, siempre que se sepa calcular la matriz inversa.

Por ejemplo, sea $\mathcal{B}$ una base de K^n y supongamos que queremos calcular $M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u)$, el cambio de base de coordenadas de $\mathcal{B}_u$ a $\mathcal{B}$. Por el corolario previo tenemos $M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u) = M(I,\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})^{-1}$. La ventaja de $M(I,\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})$ frente a $M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u)$ es que su cálculo suele ser inmediato, pues basta escribir por columnas las componentes de los vectores de $\mathcal{B}$ (eso sí, para terminar de obtener $M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u)$ necesitamos saber calcular $M(I,\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})^{-1}$). Así, el resultado del ejemplo 2.146 se reobtendría:

$$M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u) = M(I,\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Más aún, dadas cualesquiera dos bases $\mathcal{B},\mathcal{B}'$ de K^n se puede escribir:

$$M(I,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u) \cdot M(I,\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B}),$$

donde $M(I,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}_u)$ se calcula por el procedimiento anterior, y $M(I,\mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})$ es inmediata.

2.4. Aplicaciones: rango de una matriz y ecuaciones de un subespacio

Terminaremos este tema aprovechando la teoría de espacios vectoriales que hemos estudiado para obtener algunas consecuencias interesantes en la teoría de matrices y la discusión de SEL. Deduciremos también algunos principios que serán de utilidad en el cálculo de bases y dimensiones de subespacios vectoriales.

2.4.1. Bases y dimensión de $U = L(S)$

Sea V un e.v. sobre K y $U = L(S)$ un s.v. no trivial generado por $S = \{v_1,\dots,v_m\}$. Queremos calcular una base (ordenada) de U y $\dim_K(U)$.

Sabemos que $\dim_K(U)$ es el número máximo de vectores l.i. de S. Así, $\dim_K(U) = m$ si y sólo si S es l.i. (lo que equivale a que S sea una base de U). En general, $\dim_K(U) \leq m$ pues S no tiene por qué ser l.i. En tal caso, el Teorema 2.99 dice que hay una base $\mathcal{B}$ de U con $\mathcal{B} \subset S$. Para construir $\mathcal{B}$ debemos ir eliminando de S sucesivamente un vector que se exprese como c.l. del resto de generadores. Este proceso puede ser muy tedioso si m es grande. Para realizarlo más fácilmente construiremos un s.d.g. de U en el que la independencia lineal sea sencilla de estudiar. La idea es modificar S a través del siguiente resultado.

Proposición 2.150. *Sea V un e.v. sobre K y $U = L(S)$ con $S = \{v_1,\dots,v_i,\dots,v_j,\dots,v_m\} \subset V$. Entonces, se tiene:*

1. *Si se considera S como un conjunto ordenado (como en la nota 2.78), entonces cualquier reordenación S' de S es también un s.d.g.*

2. *Si $a \in K$ y $a \neq 0$, entonces $S'' = \{v_1, \ldots, a \cdot v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m\}$ es un s.d.g. de U.*

3. *Si $a \in K$ entonces $S''' = \{v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j + a \cdot v_i, \ldots, v_m\}$ es un s.d.g. de U.*

Demostración. El lema es consecuencia tanto de la Proposición 2.70 como de la 2.114. Usaremos la primera de ellas, aunque resulta más inmedito de la segunda.

Es obvio que, desde el punto de vista conjuntista, $S = S'$ y, por tanto[12], $L(S') = L(S) = U$. Por otro lado, si $a \in K$ y $a \neq 0$, se tiene que $S \cup \{a \cdot v_i\}$ es un s.d.g. de U. Como $v_i = a^{-1} \cdot (a \cdot v_i)$ entonces $(S \cup \{a \cdot v_i\}) - \{v_i\} = S''$ es un s.d.g. de U. Por último, dado $a \in K$, sabemos que $S \cup \{v_j + a \cdot v_i\}$ es un s.d.g. de U. Y como $v_j = (v_j + a \cdot v_i) + (-a) \cdot v_i$, entonces $(S \cup \{v_j + a \cdot v_i\}) - \{v_j\} = S'''$ es un s.d.g de U (pues la proposición 2.70(2) resulta aplicable). ∎

Veamos cómo aplicar el lema previo para calcular una base de $U = L(S)$, donde $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es una familia de vectores en K^n. Sea M la matriz cuya fila i-ésima se identifica con v_i. El lema anterior nos dice que, aplicando a M transformaciones elementales por filas, obtenemos un nuevo s.d.g. de U. Procedemos como en el método de Gauss, realizando transformaciones hasta conseguir la matriz de un SEL escalonado. Entonces, las filas no nulas se identifican con una base de U, y el número de tales filas es $\dim_K(U)$.

Ejemplo 2.151. Calculemos una base y la dimensión del s.v. de $\mathbb{R}^4$ dado por $U = L(S)$, donde $S = \{(1,-2,1,0), (2,3,-2,1), (4,-1,0,1)\}$. La matriz asociada M es:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos transformaciones elementales por filas hasta conseguir la matriz de un SEL escalonado. Enseguida llegamos a:

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como el vector nulo se puede eliminar de cualquier s.d.g., se sigue que $\mathcal{B} = \{(1,-2,1,0), (0,7,-4,1)\}$ es una base de $\mathcal{B}$ (es un s.d.g. y l.i.). Así, $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$.

Observación 2.152. Es de remarcar que este procedimiento resulta extensible a cualquier s.d.g. finito S de un s.v. U de cualquier e.v. finitamente generado $V(K)$. Basta con fijar una base $\mathcal{B}$ de $V(K)$, tomar las coordenadas de los elementos de S en esa base y considerar el subespacio en K^n generado por estas coordenadas. Así, la base que se obtiene para este subespacio proporciona las coordenadas en $\mathcal{B}$ de la base requerida de $L(S)$ (recuérdese la observación 2.137).

[12]Se puede apreciar ahora que, en la definición de $L(S)$ para S finito, se fijaba implícitamente una ordenación de los elementos de S, si bien el resultado era obviamente independiente de esta ordenación por la conmutatividad de la suma.

2.4.2. Rango de una matriz

Asociaremos a cada matriz A un número $\mathrm{rg}(A) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que desempeñará un papel importante en lo sucesivo. Para ello nos basaremos en la teoría de espacios vectoriales estudiada hasta ahora (existen otros enfoques para definir el rango).

Definición 2.153. *Sea K un cuerpo y $m,n \in \mathbb{N}$. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ en $M_{m\times n}(K)$, definimos $v_j = (a_{1j},\ldots,a_{mj})$, que es el vector en K^m cuyas componentes coinciden con las entradas de la columna j-ésima de A. Definimos el* rango *de A como:*

$$rg(A) = dim_K(U), \ con\ U = L(v_1,\ldots,v_n).$$

Así, $rg(A)$ es el número máximo de columnas l.i. en A cuando se interpretan como vectores de K^m.

Observación 2.154. 1. En principio la definición anterior sería el *rango por columnas* de A, y habría una definición análoga para el *rango por filas* (que sería igual al rango por columnas de A^t). No obstante, como veremos este rango por filas coincidirá con el que hemos definido usando columnas.

2. Es claro que $\mathrm{rg}(A) \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y que $\mathrm{rg}(A) \leq \min\{n,m\}$. Además, $\mathrm{rg}(A) = 0$ si y sólo si $A = 0_{m\times n}$.

Gracias a la proposición 2.150 y a la definición de rango deducimos lo siguiente.

Corolario 2.155. *El rango de A es invariante por transformaciones elementales por columnas de A.*

Observación 2.156. Las transformaciones elementales por columnas de A pueden verse como transformaciones elementales por filas de A^t. Como se dijo en la observación anterior, veremos que los rangos de A y A^t son iguales, por lo que se podrán realizar transformaciones elementales por filas y transformaciones elementales por columnas sin cambiar el rango de una matriz[13].

Ejercicio 2.157. *Calcular, en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$, el rango de la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora podemos dar caracterizaciones de los conceptos fundamentales de la Sección 2.3 a través de condiciones sobre el rango.

Lema 2.158. *Sea $S = \{v_1,\ldots,v_n\}$ una familia de vectores en K^m. Consideremos la matriz en $M_{m\times n}(K)$ dada por $A = \big((v_1)_{\mathcal{B}_u} \,|\, (v_2)_{\mathcal{B}_u} \,|\, \ldots \,|\, (v_n)_{\mathcal{B}_u}\big)$. Entonces:*

(i) S es un s.d.g. de K^m (necesariamente entonces $n \geq m$) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = m$.

(ii) S es una familia l.i. en K^m (necesariamente entonces $n \leq m$) si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = n$.

(iii) S es una base de K^m si y sólo si $n = m$ y $\mathrm{rg}(A) = m$.

Demostración. Sabemos que $\mathrm{rg}(A) = \dim_K(U)$ con $U = L(S)$. Si S es s.d.g. de K^m entonces $U = L(S) = K^m$ y $\mathrm{rg}(A) = m$. Recíprocamente, si $\mathrm{rg}(A) = m$, entonces $\dim_K(U) = m = \dim_K(K^m)$. Como U es un s.v. de K^m deducimos que $L(S) = U = K^m$. Esto demuestra (i).

Si S es l.i. entonces S es base de U y, por tanto, $\mathrm{rg}(A) = \dim_K(U) = n$. Recíprocamente, si $\mathrm{rg}(A) = n$, entonces $\dim_K(U) = n$. Como S es un s.d.g. de U con exactamente n vectores, el corolario 2.112 nos dice que S es un base de U. En particular, S es l.i. Esto demuestra (ii).

El apartado (iii) es consecuencia directa de (i) y (ii). ∎

[13] Esta libertad para el cálculo del rango contrasta con la necesidad de hacer las transformaciones elementales sólo por filas en el procedimiento de extraer una base visto entre la proposición 2.150 y el ejercicio 2.151; de de hecho, si allí se llevaran a cabo transformaciones elementales por columnas cambiaríamos las coordenadas de los correspondientes vectores.

Ejercicio 2.159. *Estudiar si la familia* $S = \{(1,0,-1),(1,2,5),(-2,1,3)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$.

2.4.3. El teorema de Rouché-Frobenius

Hasta ahora hemos usado los SEL para resolver problemas de geometría lineal. Ahora veremos cómo la teoría de espacios vectoriales se puede emplear para discutir eficazmente un SEL sin necesidad de resolverlo.

Teorema 2.160 (Rouché-Frobenius)**.** *Consideremos un* SEL *con ecuación matricial asociada* $A \cdot x = b$*, donde* $A \in M_{m\times n}(K)$ *y* $b \in M_{m\times 1}(K)$*. Entonces:*

(i) El sistema es compatible si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$.

(ii) El sistema es compatible determinado si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = n$.

(iii) El sistema es compatible indeterminado si y sólo si $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = r < n$*. En tal caso, las soluciones quedan expresadas en función de* $n-r$ *parámetros de* K.

Demostración. Sea v_j (resp. v_0) el vector de K^m asociado a la columna j-ésima de A (resp. a la columna b). Por la definición del producto de matrices:

$$(x_1,\dots,x_n) \text{ es solución del SEL si y sólo si } x_1\cdot v_1+\ldots+x_n\cdot v_n = v_0. \tag{2.10}$$

Por tanto, el SEL es compatible si y sólo si $v_0 \in L(v_1,\dots,v_n)$. En tal caso, las soluciones del SEL coinciden con los coeficientes que permiten expresar v_0 como c.l. de $\{v_1,\dots,v_n\}$.

Vamos a demostrar (i). Se tiene que:

$$\begin{aligned}\text{SEL compatible} &\Leftrightarrow v_0 \in L(v_1,\dots,v_n) \Leftrightarrow L(v_1,\dots,v_n,v_0) = L(v_1,\dots,v_n)\\ &\Leftrightarrow \dim_K(L(v_1,\dots,v_n,v_0)) = \dim_K(L(v_1,\dots,v_n)) \Leftrightarrow \operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg}(A),\end{aligned}$$

donde en la segunda y en la tercera equivalencia hemos empleado la Proposición 2.70 y el segundo apartado de la Proposición 2.121.

Demostremos (ii). Supongamos que el SEL es compatible determinado. Gracias a (2.10) existen escalares únicos $x_1,\dots,x_n \in K$ tales que $x_1\cdot v_1+\ldots+x_n\cdot v_n = v_0$. Queremos que $\dim_K(U) = n$ con $U = L(v_1,\dots,v_n)$. Para ver que $\{v_1,\dots,v_n\}$ es l.i. tomamos una c.l.

$$a_1\cdot v_1+\ldots+a_n\cdot v_n = 0,$$

con $a_1,\dots,a_n \in K$. Sumando el vector v_0 a ambos lados de la igualdad:

$$a_1\cdot v_1+\ldots+a_n\cdot v_n+v_0 = v_0.$$

Teniendo en cuenta la expresión de v_0 de arriba:

$$(a_1+x_1)\cdot v_1+\ldots+(a_n+x_n)\cdot v_n = v_0.$$

Por la unicidad de los escalares x_i se tiene que $a_i+x_i = x_i$ y, por tanto, $a_i = 0$ para cada $i = 1,\dots,n$. Recíprocamente, si $\operatorname{rg}(A) = n$, entonces $\dim_K(U) = n$ y $\{v_1,\dots,v_n\}$ es una base de U por el corolario 2.112. Como $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$ el SEL es compatible, es decir, $v_0 \in U$. Por el Teorema 2.131 existen escalares únicos $x_1,\dots,x_n \in K$ tales que $v_0 = x_1\cdot v_1+\ldots+x_n\cdot v_n$. Gracias a (2.10) el SEL es compatible determinado.

Vamos a demostrar (iii). Por (i) y (ii) el SEL es compatible indeterminado si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = r < n$ (nótese que $\mathrm{rg}(A) \leq m,n$). Veamos que las soluciones se expresan en función de $n-r$ parámetros de K. Como $\dim_K(U) = \mathrm{rg}(A) = r$, tenemos r vectores l.i. en $\{v_1,\ldots,v_n\}$. Tras renombrar los vectores si fuera preciso, podemos suponer que la familia $\{v_1,\ldots,v_r\}$ es l.i y, por tanto, una base de U. Gracias a (2.10) se tiene que:

$$(x_1,\ldots,x_n) \text{ es solución si y sólo si } x_1\cdot v_1+\ldots+x_r\cdot v_r = v_0 - x_{r+1}\cdot v_{r+1} - \ldots - x_n\cdot v_n.$$

Usando el Teorema 2.131, cada vez que tomamos $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r} \in K$, existen $x_1,\ldots,x_r \in K$ únicos tales que $(x_1,\ldots,x_r,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r})$ es solución del SEL. A partir de aquí se sigue que

$$\{(x_1,\ldots,x_r,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r})\,|\,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r}\in K\}$$

es el conjunto de soluciones del SEL. ∎

Corolario 2.161. *Sea W el conjunto de soluciones del* SEL *homogéneo con ecuación matricial $A\cdot x = 0$, donde $A \in M_{m\times n}(K)$. Entonces, W es un s.v. de K^n con* $\dim_K(W) = n - \mathrm{rg}(A)$.

Si se considera ahora un SEL no homogéneo $Ax = b$ que sea compatible, y x_0 es una solución suya, entonces el conjunto de todas las soluciones es $x_0 + W := \{x_0 + w|\ w \in W\}$.

Demostración. Como el SEL es homogéneo sabemos que W es un s.v. de K^n. Gracias a los argumentos en la demostración del teorema anterior tenemos, sabemos que W admite una representación con $n-r$ parámetros del tipo:

$$\{(x_1,\ldots,x_r,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r})\,|\,\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r}\in K\},$$

donde, para cada $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-r} \in K$, los escalares $x_1,\ldots,x_r$ son los únicos tales que:

$$x_1\cdot v_1+\ldots+x_r\cdot v_r = -\lambda_1\cdot v_{r+1} - \ldots - \lambda_{n-r}\cdot v_n. \tag{2.11}$$

Sea $w_i \in W$ la única solución del SEL cuando $\lambda_i = 1$ y $\lambda_j = 0$ si $i \neq j$. Basta con comprobar que $\mathcal{B}_W = \{w_1,\ldots,w_{n-r}\}$ es una base de W. Es sencillo demostrar que $\mathcal{B}_W$ es l.i. Además, $L(\mathcal{B}_W) \subset W$ al ser W un s.v. que contiene a $\mathcal{B}_W$. Sea $w = (x_1,\ldots,x_n) \in W$. Sabemos que $x_1,\ldots,x_r$ son los únicos escalares en K que cumplen (2.11) con $\lambda_i = x_{r+i}$ para cada $i = 1,\ldots,n-r$. Afirmamos que $w = w'$ con $w' = x_{r+1}\cdot w_1+\ldots+x_n\cdot w_{n-r}$. Nótese que $w' \in W$. Si ponemos $w' = (y_1,\ldots,y_n)$ entonces $y_{r+i} = x_{r+i}$, para cada $i = 1,\ldots,n-r$. Por la unicidad en las soluciones de (2.11) concluimos que $y_i = x_i$ para cada $i = 1,\ldots,r$. Esto muestra que $w = w' \in L(\mathcal{B}_W)$, lo que termina la demostración para W.

Para la última afirmación, obsérvese que si x_0' es otra solución del SEL no homogéneo entonces $A\cdot(x_0' - x_0) = b - b = 0$, esto es, $x_0' - x_0 \in W$ y $x_0' \in x_0 + W$. Recíprocamente, si $x_0' \in x_0 + W$ entonces $x_0' = x_0 + w$ para algún $w \in W$ y

$$A\cdot x_0' = A\cdot(x_0+w) = A\cdot x_0 + A\cdot w = b + 0 = b,$$

esto es, x_0' también es una solución del SEL no homogéneo. ∎

Ejemplo 2.162. Vamos a calcular una base de:

$$W = \{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y=0,\, z+t=0\}.$$

Una forma de hacerlo es resolver el SEL homogéneo. Otra se basa en el corolario previo. La matriz de coeficientes del SEL es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es obvio que $\mathrm{rg}(A) = 2$, ya que el s.v. que generan sus columnas es $\mathbb{R}^2$ (hay al menos dos columnas l.i.). Por tanto, $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$. Para obtener una base de W necesitamos dos soluciones l.i. del SEL. Como $w_1 = (1,-1,0,0)$ y $w_2 = (0,0,1,-1)$ cumplen esto, entonces $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2\}$ es una base de W.

Como una aplicación, caractericemos de modo sencillo a las matrices regulares.

Corolario 2.163. *Una matriz cuadrada $A \in M_n(K)$ si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) = n$.

Demostración. Si A es regular, cada SEL con ecuación matricial asociada $A \cdot x = b$ es compatible determinado (multiplicando por A^{-1} a la izquierda de ambos miembros y usando la asociatividad del producto se obtiene la única solución $x = A^{-1} \cdot b$). Aplicando Rouché-Frobenius, $\mathrm{rg}(A) = n$.

Recíprocamente, si $\mathrm{rg}(A) = n$ y $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, donde v_j se identifica con la j-ésima columna de A, el Lema 2.158 nos dice que $\mathcal{B}$ es una base de K^n. Como $A = M(I, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})$, la proposición 2.148 implica que $A \in \mathrm{GL}(n,K)$. ∎

Definición 2.164. *Llamaremos* grupo lineal general de orden n sobre el cuerpo K *al conjunto* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$ *formado por todas las matrices regulares de $M_n(K)$.*

El nombre de grupo se justifica por el siguiente resultado.

Proposición 2.165. *La operación producto de matrices*

$$\mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \times \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}) \to \mathrm{GL}(n,\mathbb{K}), \qquad (A,C) \mapsto A \cdot C$$

está bien definida en $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$*, y* $\mathrm{GL}(n,K)$*, con esta operación, tiene estructura de grupo.*

Demostración. Para comprobar que está bien definida, debemos demostrar que si $A, C \in \mathrm{GL}(n,K)$ entonces $A \cdot C \in \mathrm{GL}(n,K)$. Para ello, fijemos la base usual $\mathcal{B}_u$ de K^n. Por ser C regular existe una única base $\mathcal{B}'$ tal que $C = M(I, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ y, obtenida $\mathcal{B}'$, por ser A regular existe una única base $\mathcal{B}''$ tal que $A = M(I, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}')$. Usando la proposición 2.148

$$A \cdot C = M(I, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(I, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = M(I, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}),$$

la cual es una matriz de cambio de base y, por tanto, regular.

La asociatividad se sigue por ser ésta una propiedad general del producto de matrices (sean cuadradas o no, siempre que se puedan multiplicar). Por computación directa se tiene que $I_n \in \mathrm{GL}(n,K)$ verifica ser el elemento neutro para el producto. El elemento simétrico existe por la propia definición de $\mathrm{GL}(n,K)$ como el conjunto de las matrices regulares. ∎

Observación 2.166. En la demostración anterior, la base $\mathcal{B}_u$ y el espacio vectorial $K^n(K)$ no representan ningún papel especial. Esto es, se puede escoger cualquier otro e.v. $V(K)$ de dimensión n así como cualquier base ordenada suya $\mathcal{B}$, y los pasos de la demostración funcionarían igual reemplazándolos por $K^n(K)$ y $\mathcal{B}_u$.

2.4.4. El rango de la matriz traspuesta

Nuestro objetivo a continuación es demostrar que el rango de una matriz $A \in M_{n\times m}(K)$ coincide con el de su traspuesta $A^t \in M_{m\times n}(K)$, esto es, que el número máximo de columnas independientes de A (vistas como elementos de K^m coincide con el número máximo de filas independientes (vistas como elementos de K^n). La demostración se basa en el siguiente lema, inspirado en técnicas del espacio dual que se desarrollarán en el Tema 4 (de hecho, en ese lema se dará una nueva demostración).

Observemos en primer lugar que cada ecuación de un SEL será del tipo $a_1 \cdot x_1 + \ldots + a_n \cdot x_n = 0$. Si w representa al vector columna en $M_{n\times 1}(K)$ de entradas $a_1, \ldots, a_n$, entonces la ecuación se escribe como $v \cdot w = 0$, con $v = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$.

Lema 2.167. *Sea U un s.v. de K^n con $\dim_K(U) = m$. Definimos el conjunto:*

$$U_0 = \{w \in M_{n\times 1}(K) \,|\, v \cdot w = 0, \text{ para todo } v \in U\}.$$

Entonces U_0 es un s.v. de K^n con $\dim_K(U_0) = n - m$.

Demostración. Para comprobar que U_0 es un s.v. de K^n basta usar la Proposición 2.22 y propiedades del producto de matrices.

Sobre la dimensión, en el caso $m = 0$ entonces $U = \{0\}$ y $U_0 = M_{n\times 1}(K)$, por lo que $\dim_K(U_0) = n$. Si $m = n$ entonces $U = K^n$, y tomando $v = e_i$ (i-ésimo vector de la base usual en K^n) para cada $i = 1, \ldots, n$ se sigue que $U_0 = \{0_{n\times 1}\}$ y, por tanto, $\dim_K(U_0) = 0$.

Supongamos el caso no trivial $1 \leq m < n$. Sea $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de U. Por el teorema de ampliación de la base encontramos una base de K^n del tipo $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$. Consideremos la matriz en $M_n(K)$ dada por $A = \big((v_1)_{\mathcal{B}_u} \,|\, (v_2)_{\mathcal{B}_u} \,|\, \ldots \,|\, (v_n)_{\mathcal{B}_u}\big)$. Como $\mathcal{B}$ es una base de K^n y $A = M(I, \mathcal{B}_u \leftarrow \mathcal{B})$ se sigue por la proposición 2.148 que A es regular. Esto implica que A^t también es regular; de hecho, $A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I_n^t = I_n$, y la inversa de A^t resulta ser $(A^{-1})^t$. Escribiendo $C = A^t$ la ecuación matricial $C \cdot x = e_i$ tiene solución única $w_i = C^{-1} \cdot e_i \in M_{n\times 1}(K)$. Afirmamos que $\mathcal{B}' = \{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base de $M_{n\times 1}(K)$. Por el corolario 2.112 basta comprobar que $\mathcal{B}'$ es l.i. Tomemos una c.l. del tipo $a_1 \cdot w_1 + \ldots + a_n \cdot w_n = 0_{n\times 1}$. Multiplicando por la izquierda por C obtenemos $a_1 \cdot e_1 + \ldots + a_n \cdot e_n = 0_{n\times 1}$. Como la familia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es l.i. en $M_{n\times 1}(K)$ se sigue que $a_i = 0$, para cada $i = 1, \ldots, n$.

Para terminar la demostración veamos que $\mathcal{B}_0 = \{w_{m+1}, \ldots, w_n\}$ es una base de U_0. Nótese que las filas de C se identifican con los vectores de $\mathcal{B}$. Por definición de producto de matrices se tiene que la entrada j-ésima de $C \cdot w_i$ coincide con $v_j \cdot w_i$. Como $C \cdot w_i = e_i$, entonces $v_j \cdot w_i = 0$ para cada $j \neq i$. En particular, $v_j \cdot w_i = 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$ y cada $i = m+1, \ldots, n$. Esto demuestra que $\mathcal{B}_0 \subset U_0$ (cada vector de U es c.l. de $\{v_1, \ldots, v_m\} = \mathcal{B}_U$). Es claro que $\mathcal{B}_0$ es l.i. ya que $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}'$ es l.i. Veamos por último que $L(\mathcal{B}_0) = U_0$. Sea $w \in U_0$. Como $\mathcal{B}'$ es una base de $M_{n\times 1}(K)$ existen escalares únicos $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que $w = a_1 \cdot w_1 + \ldots + a_n \cdot w_n$. Multiplicando por la matriz C obtenemos $C \cdot w = a$, donde $a \in M_{n\times 1}(K)$ tiene como componentes $a_1, \ldots, a_n$. La componente i-ésima de $C \cdot w$ es $v_i \cdot w$. Como $w \in U_0$ deducimos que $a_i = 0$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Sustituyendo esta información llegamos a $w = a_{m+1} \cdot w_{m+1} + \ldots + a_n \cdot w_n$. Así, $w \in L(\mathcal{B}_0)$ y se concluye. ∎

Podemos ahora establecer el siguiente resultado fundamental.

Teorema 2.168. *Para cada $A \in M_{m\times n}(K)$ se cumple que* $\mathrm{rg}(A^t) = \mathrm{rg}(A)$.

Demostración. Sea v_j el vector de K^m que se identifica con la columna j-ésima de A. Llamemos $U = L(v_1, \ldots, v_n)$. Sea W el subespacio de $M_{m\times 1}(K)$ de las soluciones de la ecuación matricial $A^t \cdot y =$

$0_{n\times 1}$. Escribiendo las matrices A y A^t se demuestra enseguida que $W = U_0$. Teniendo en cuenta el Corolario 2.161 y el Lema 2.167, deducimos que:

$$\mathrm{rg}(A^t) = m - \dim_K(W) = m - \dim_K(U_0) = m - (m - \dim_K(U)) = \dim_K(U) = \mathrm{rg}(A),$$

como se quería demostrar. ∎

Corolario 2.169. *El rango de A es invariante por transformaciones elementales por filas o por columnas de A.*

De este modo, podemos calcular $\mathrm{rg}(A)$ haciendo transformaciones elementales por filas de A hasta obtener la matriz de un SEL escalonado. Entonces $\mathrm{rg}(A)$ coincidirá con el número de filas no nulas de dicha matriz.

2.4.5. Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio

Sea U un s.v. de K^n con $\dim_K(U) = m \geq 1$. Tomemos una base $\mathcal{B}_U = (v_1, v_2, \ldots, v_m)$ de U. Como $U = L(\mathcal{B}_U)$, los vectores de U son exactamente de la forma $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_m \cdot v_m$ con $\lambda_i \in K$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Si ponemos $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y $v_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$ entonces, al tomar componentes en la igualdad $v = \lambda_1 \cdot v_1 + \ldots + \lambda_m \cdot v_m$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^1 \cdot \lambda_1 + x_1^2 \cdot \lambda_2 + \ldots + x_1^m \cdot \lambda_m, \\
x_2 &= x_2^1 \cdot \lambda_1 + x_2^2 \cdot \lambda_2 + \ldots + x_2^m \cdot \lambda_m, \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
x_n &= x_n^1 \cdot \lambda_1 + x_n^2 \cdot \lambda_2 + \ldots + x_n^m \cdot \lambda_m,
\end{aligned}$$

que son unas *ecuaciones paramétricas* para U. Nótese que hay n ecuaciones paramétricas con m parámetros $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Los coeficientes que acompañan a cada λ_i son las coordenadas de v_i en la base usual $\mathcal{B}_u$. Cuando damos cada parámetro un valor concreto, obtenemos un vector de U, y los valores de los parámetros son las coordenadas de ese vector en la base original B_U. En particular, el vector i-ésimo de la base $\mathcal{B}_U$ se recupera de las ecuaciones paramétricas sin más que tomar $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{i-1} = 0$, $\lambda_i = 1$, $\lambda_{i+1} = \cdots = \lambda_m = 0$.

Ahora veremos que cada subespacio U de K^n es el conjunto de soluciones de un SEL homogéneo. De acuerdo con el Corolario 2.161 la matriz A de este SEL cumplirá $\mathrm{rg}(A) = n - m$ si $\dim_K(U) = m$. Usaremos en la siguiente demostración elementos del lema 2.167.

Proposición 2.170. *Sea U un s.v. de K^n con* $\dim_K(U) = m$ *y* $1 \leq m < n$. *Existe un* SEL *homogéneo con matriz de coeficientes $A \in M_{(n-m)\times n}(K)$ y* $\mathrm{rg}(A) = n - m$, *cuyo subespacio de soluciones es U.*

Demostración. Por el lema 2.167 sabemos que $\dim_K(U_0) = n - m$. Sea $\{w_1, \ldots, w_{n-m}\}$ una base de U_0. Si las entradas de w_i son $(w_i)_1, \ldots, (w_i)_n$ entonces tenemos una ecuación cartesiana $(w_i)_1 \cdot x_1 + \ldots + (w_i)_n \cdot x_n = 0$. Esto produce un SEL de $n - m$ ecuaciones con expresión matricial $A \cdot x = 0_{(n-m)\times 1}$, donde A es la matriz en $M_{(n-m)\times n}(K)$ cuya i-ésima fila se identifica con w_i. Por otro lado:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^t) = \dim_K\big(L(w_1, \ldots, w_{n-m})\big) = \dim_K(U_0) = n - m.$$

Sea W el subespacio de soluciones del SEL asociado a $A \cdot x = 0_{(n-m)\times 1}$. Sabemos que $\dim_K(W) = m$ por el Corolario 2.161. Como $U \subset W$ se concluye que $U = W$ por el segundo apartado de la Proposición 2.121. ∎

Definición 2.171. *En las hipótesis de la proposición anterior, diremos que las $n-m$ ecuaciones del SEL homogéneo $A \cdot x = 0_{(n-m)\times 1}$ son unas* ecuaciones implícitas o cartesianas *de U.*

Observación 2.172. Obsérvese que en esta definición se asume tácitamente que las $n-m$ ecuaciones son independientes (esto es, el rango de A es $n-m$).

La técnica empleada para demostrar la proposición 2.170 sirve directamente para obtener unas ecuaciones cartesianas de U. Veamos a continuación otro método alternativo que esquiva esa proposición (usa sólo que el rango de una matriz es igual al de su traspuesta) y puede servir para entender mejor el proceso; ambos métodos se aplican después a un ejemplo concreto.

Sea $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de U. Consideremos la matriz en $M_{n\times m}(K)$ dada por

$$C = \big((v_1)_{\mathcal{B}_u} \,|\, (v_2)_{\mathcal{B}_u} \,|\, \ldots \,|\, (v_m)_{\mathcal{B}_u}\big).$$

Sea $v = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$. Como $\mathcal{B}_U$ es una base de U, deducimos (a partir de (2.10)) que $v \in U$ si y sólo si el SEL con matriz ampliada $(C|x)$ es compatible, siendo $x = (v)_{\mathcal{B}_u}$ el vector columna que se identifica con v. Por el teorema de Rouché-Frobenius, esto equivale a que $\mathrm{rg}(C|x) = \mathrm{rg}(C) = m$. Realizamos transformaciones elementales por filas en $(C|x)$ hasta conseguir la matriz de un SEL escalonado $(\tilde{C}|\tilde{x})$. Esta matriz tiene el mismo rango por filas (y, por tanto, por columnas) que $(C|x)$; por tanto, su rango m si y sólo si $v \in U$. No obstante por ser escalonado el SEL de $(\tilde{C}|\tilde{x})$, las filas $m+1, \ldots, n$ de $\tilde{C}$ deben ser todas nulas, y el rango de $(\tilde{C}|\tilde{x})$ será m si y sólo si las últimas $n-m$ componentes del término independiente $\tilde{x}$ son 0. Por tanto, al igualar a cero estas componentes, se obtienen las $n-m$ ecuaciones lineales homogéneas (necesariamente independientes) buscadas.

Ejemplo 2.173. Calculamos unas ecuaciones cartesianas para la recta $U = L((1,3,-2))$ en $\mathbb{R}^3$. Claramente $\mathcal{B}_U = \{(1,3,-2)\}$ es una base de U. Así, sabemos que U tiene asociadas dos ecuaciones cartesianas. Las obtendremos de dos maneras distintas.

Método 1: Cada ecuación cartesiana es del tipo $ax+by+cz=0$. Imponemos que el vector $(1,3,-2)$ la cumpla; esto nos lleva a la ecuación lineal $a+3b-2c=0$, cuyo s.v. de soluciones U_0 tiene dimensión 2. Una base de U_0 viene dada por $\mathcal{B}_0 = \{(-3,1,0),(2,0,1)\}$. Así, unas ecuaciones cartesianas para U son $-3x+y=0$ y $2x+z=0$.

Método 2: Un vector $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ está en U si es proporcional a $(1,3,-2)$. Esto equivale a que la matriz dada por:

$$(C|v) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 3 & y \\ -2 & z \end{pmatrix}$$

cumpla que $\mathrm{rg}(C|v) = 1$. Al realizar transformaciones por filas se llega a:

$$(C|v) \sim \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & -3x+y \\ 0 & 2x+z \end{pmatrix}$$

Igualando a 0 las filas segunda y tercera obtenemos para U las mismas ecuaciones de antes.

Observación 2.174. Cuando estudiamos la posibilidad de obtener una base del s.v. $L(S)$ generado por un conjunto finito de vectores $S \subset K^n$, vimos que el procedimiento se extendía para cuando S está incluido en cualquier e.v. finitamente generado $V(K)$ (observación 2.152): bastaba con fijar una base $\mathcal{B}$ de $V(K)$ y trabajar con las coordenadas de los vectores en K^n. Análogamente, ahora los conceptos y modo de construcción de ecuaciones paramétricas e implícitas se extienden para cualquier s.v U

de un e.v. f.g $V(K)$ sin más que fijar una tal base[14] $\mathcal{B}$. Como antes, la clave está en el isomorfismo $f_{\mathcal{B}} : V \to K^n$, que establece una biyección entre los subespacios vectoriales (resp. s.d.g.; conjuntos l.i.) de $V(K)$ y de $K^n(K)$ (observación 2.137).

[14]Usualmente el término de ecuaciones *implícitas* se considera en este ambiente general, mientras que el de *cartesianas* se reserva para el caso particular de K^n con la base usual $\mathcal{B}_u$, como hemos hecho en esta sección.