3 DERIVADA

3.1 DEFINICIÓN

Definición 3.1.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es *derivable* en un punto $a \in A \cap A'$, si existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\,.$$

En caso de que exista dicho límite, recibe el nombre de *derivada* de f en a y se nota $f'(a)$.

Diremos que la función es derivable en un conjunto cuando lo sea en todos los puntos de dicho conjunto y notaremos f' a la función derivada.

La notación $f(x)$ se debe a Euler (1734), aunque el uso de paréntesis para la variable no se generaliza hasta su uso por Cauchy (1821). La notación f' se debe a Joseph Louis Lagrange. No estaba contento con el desarrollo del Cálculo en los términos de Newton o Leibniz y en su libro "*Theories des fonctions analytiques*" en 1797 introduce la notación fx, $f'x$, $f''x$ para referirse a las derivadas de una función primitiva.

Proposición 3.1.2. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $a \in A \cap A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *f es derivable en a.*

2) *Existe un número real L cumpliendo que: dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a) - L(x - a)| < \varepsilon\,|x - a|$.*

En caso de estas afirmaciones se cumplan, $f'(a) = L$.

Demostración. 1)⇒2) Si la función f es derivable en a, sabemos que existe el límite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

Usando la caracterización de límite, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$ entonces

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| < \varepsilon.$$

Operando,

$$\varepsilon > \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right| = \left| \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} \right|$$

o, lo que es lo mismo, $|f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)| < \varepsilon\,|x - a|$. Por tanto, la condición 2) se cumple tomando $L = f'(a)$.

2)⇒1) Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| < \varepsilon$$

si $x \in A$ y $0 < |x - a| < \delta$. En otras palabras, $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$ y, por tanto, f es derivable en a y $L = f'(a)$. □

3.2 CONDICIÓN NECESARIA Y PRIMEROS EJEMPLOS

Proposición 3.2.1. *Si* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *es derivable en* $a \in A \cap A'$, *entonces* f *es continua en* a.

Demostración. Usando que el límite de un producto es el producto de límites, se cumple que

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) = \lim_{x\to a}(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0\cdot f'(a) = 0.$$

Por tanto $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. □

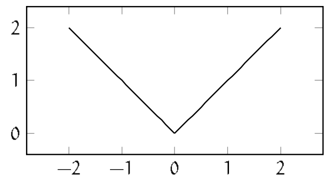


Figura 12: La función valor absoluto no es derivable en el origen

Observación 3.2.2. El recíproco no es cierto: hay funciones continuas que no son derivables como, por ejemplo, la función valor absoluto en el origen (véase el ejemplo 3.2.7).

3.2.1 Algunos ejemplos

Ejemplo 3.2.3. *Las funciones constantes son derivables.* En efecto, consideremos la función $f(x) = k$, para cualquier x. Si a es un punto del dominio,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{k-k}{x-a} = 0.$$

Por tanto, f es derivable en cualquier punto y $f'(x) = 0$, para cualquier x.

Ejemplo 3.2.4. Es sencillo comprobar que la función identidad $f(x) = x$ es derivable y su derivada es $f'(x) = 1$ para cualquier x.

La función $f(x) = x^2$ es derivable y su derivada vale

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = 2a.$$

En general, si n es un número natural, la función $f(x) = x^n$ es derivable y su derivada en un punto a vale

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{a^n+na^{n-1}h+\cdots+h^n-a^n}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(na^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\,a^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}\right)\\ &= na^{n-1}.\end{aligned}$$

Recuerda que

$$(x-a)\left(a^{n-1}+xa^{n-2}+\cdots+x^{n-1}\right) = (x^n-a^n),$$

si quieres calcular la derivada usando la definición original de derivada.

Ejemplo 3.2.5. La función exponencial es derivable. Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} e^a\cdot\frac{e^{x-a}-1}{x-a}.$$

Para calcular el límite usamos la regla del número e (la implicación de vuelta):

$$\lim_{x\to a}\frac{e^{x-a}-1}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\cdot\left(e^{x-a}-1\right) = L \iff \lim_{x\to a}\left(e^{x-a}\right)^{1/(x-a)} = e^L$$

Como $\lim_{x\to a}\left(e^{x-a}\right)^{1/(x-a)} = \lim_{x\to a} e$ y, por tanto $L = 1$. En consecuencia,

$$\lim_{x\to a}\frac{e^x - e^a}{x-a} = \lim_{x\to a} e^a \cdot \frac{e^{x-a}-1}{x-a} = e^a.$$

En otras palabras, la derivada de la función exponencial es la misma función exponencial.

Ejemplo 3.2.6. La función $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$ para cualquier $x \neq 0$ es derivable en todo su dominio. En efecto, si $a \in \mathbb{R}^*$,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{a-x}{xa}}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{-1}{xa} = \frac{-1}{a^2}\ .$$

En el lado negativo, no es difícil construir funciones que no son derivables en algún punto.

Ejemplo 3.2.7. La función valor absoluto no es derivable en el origen. El motivo es que el límite no existe al no coincidir los límites laterales: si $f(x) = |x|$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}\ \lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x} = -1.$$

En $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, sí es derivable. ¿Cuál es su derivada?

También existen ejemplos en los que la no existencia del límite no se debe a los límites laterales.

Ejemplo 3.2.8. La función $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x^2, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, \end{cases}$$

es derivable únicamente en el origen. No es continua en ningún otro punto.

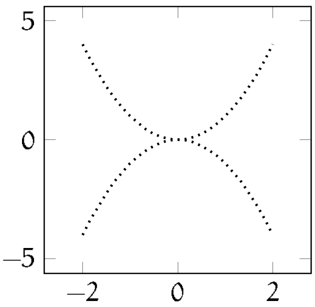


Figura 13: La función del ejemplo 3.2.8

Observación 3.2.9. Como hemos visto, no es difícil construir ejemplos de funciones que no son derivables en algún punto. Incluso en casi ningún punto, pero ¿hasta cuántos puntos es posible llegar? En 1872, Karl Weierstraß construyó una función que no era derivable en ningún punto, pero que sí era continua en todo $\mathbb{R}$. La función estaba definida por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(3^n x)}{2^n} \qquad (x\in\mathbb{R}).$$

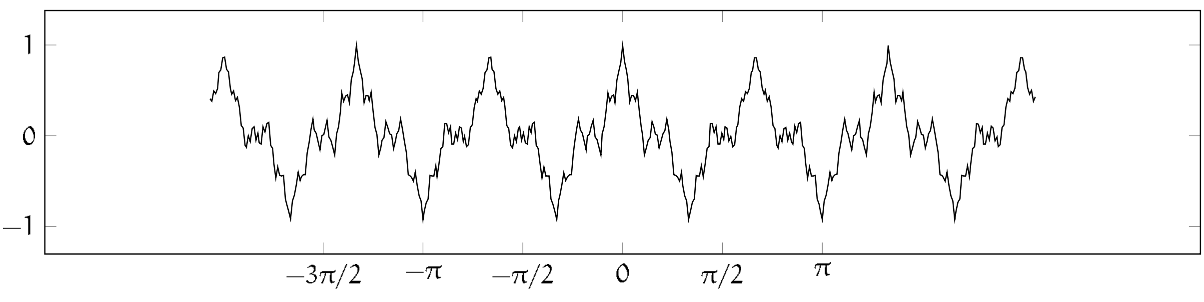


Figura 14: Los diez primeros sumandos de la función de Weierstraß $\sum_{n=0}^{10}\frac{\cos(3^n x)}{2^n}$

3.3 MEJOR APROXIMACIÓN AFÍN

Proposición 3.3.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función real de variable real y sea* $a \in A \cap A'$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f *es derivable en* a.

2) f *es continua en el punto* a *y existe una función afín* g *tal que*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0.$$

En caso de que se cumplan dichas afirmaciones, la función g *viene dada por*

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2) Es suficiente con tomar $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Sea $g(x) = \alpha + \beta(x-a)$ la función afín verificando que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{x-a} = 0.$$

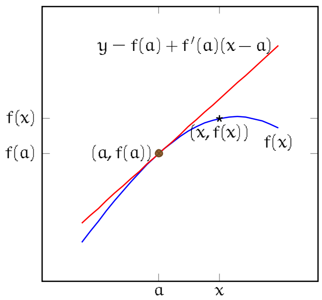
Del límite anterior se deduce que

$$0 = \lim_{x\to a} (f(x) - g(x)) = f(a) - g(a) = f(a) - \alpha.$$

Si volvemos a escribir el mismo límite usando que $\alpha = f(a)$, tenemos que

$$0 = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - \beta(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - \beta.$$

En particular, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \beta$ con lo que f es derivable y $\beta = f'(a)$ como queríamos demostrar. □



3.3.1 Interpretación geométrica

La derivada de la función f en el punto a se puede interpretar como la *pendiente* de la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

La *recta tangente* a una función f en un punto a es la función afín que mejor aproxima a la función f en dicho punto. Su ecuación, según acabamos de ver, es $y = f(a) + f'(a)(x-a)$.

3.3.2 La diferencial

Si una función f es derivable en a, entonces para $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, si notamos

$$\epsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a),$$

se tiene que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$. Despejando, podemos escribir

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h \cdot \epsilon(h). \tag{3.1}$$

Esta igualdad también se cumple cuando $h = 0$. Nos indica que, para h cercano a cero, $f(a+h) - f(a)$ se parece a una función lineal, la función $h \mapsto f'(a)h$. La diferencia es pequeña, $h\,\epsilon(h)$. Si se tiene en cuenta que $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$ y que, obviamente, $\lim_{h\to 0} h = 0$, la diferencia es pequeña por, digamos, dos motivos.

Esta situación en realidad caracteriza la derivabilidad de una función como ya hemos visto en la proposición 3.3.1.

Proposición 3.3.2. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función y sea* $a \in A \cap A'$. *Entonces* f *es derivable en* a *si, y sólo si, existe una función lineal* $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tal que*

$$f(a+h) = f(a) + L(h) + h \cdot \epsilon(h),$$

donde $h \in \mathbb{R}$ *y* $a+h \in A$ *y* $\epsilon\colon \{h \in \mathbb{R} : a+h \in A\} \to \mathbb{R}$ *es una función verificando que* $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.

Es claro que la aplicación L es única ($L(x) = f'(a)x$). A esta función se la llama la *diferencial* de f en a y se suele notar df_a o $df(a)$.

Esta forma de considerar la derivabilidad de una función puede parecer más complicada, pero es el camino adecuado cuando se trabaja con funciones de varias variables.

3.4 CARÁCTER LOCAL Y DERIVADAS LATERALES

Los resultados sobre derivadas laterales o el carácter local son consecuencia directa de los correspondientes resultados sobre límites.

3.4.1 Carácter local

Proposición 3.4.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función y sea* $a \in A \cap A'$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) f *es derivable en* a.

2) *Dado* $r > 0$, *la restricción de* f *a* $]a-r, a+r[\cap A$ *es derivable en* a.

3.4.2 Derivadas laterales

Definición 3.4.2. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A \cap A'$.

1) Supongamos que $a \in A'_+$. Diremos que f es *derivable por la derecha* en a si existe el límite $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

2) Supongamos que $a \in A'_-$. Diremos que f es derivable por la izquierda en a si existe el límite $\lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Proposición 3.4.3. *Una función es derivable en un punto si, y sólo si, existes todas las derivadas que tengan sentido y coinciden.*

Observación 3.4.4. Sabemos por la proposición 3.2.1 que cualquier función derivable es continua. Por el mismo motivo, si una función es derivable por la izquierda, tiene que ser continua por la izquierda. Lo mismo ocurre con las derivadas por la derecha. En particular, si una función tiene derivadas laterales, aunque no coincidan, es continua.

3.5 EJERCICIOS

Ejercicio 3.1. Calcula las rectas tangentes de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ que pasan por el punto $(-1, 1)$.

4 REGLAS DE DERIVACIÓN

4.1 ÁLGEBRA DE DERIVADAS

Proposición 4.1.1. *Sean* $f, g \colon A \to \mathbb{R}$ *funciones derivables en* $a \in A \cap A'$.

1) *La suma* $f+g$ *es derivable en* a *y* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

2) *El producto* fg *es derivable en* a *y*
$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

3) *Si* $g(a) \neq 0$, *la función* $1/g$ *es derivable en* a *y*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}.$$

4) *El cociente* f/g *es derivable en* a *y*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Demostración. 1) Usando la definición de derivada, calculamos
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x) - (f+g)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)+g(x)-f(a)-g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a) + g'(a).
\end{aligned}$$

Por tanto $f+g$ es derivable en a y $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

2) Calculamos la derivada del producto:
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{f(x)g(x) - f(a)g(x) + f(a)g(x) - f(a)g(a)}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} g(x) \cdot \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} f(a) \cdot \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).
\end{aligned}$$

3) Usando la definición de derivada,
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to a} \frac{(1/f)(x) - (1/f)(a)}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(a)}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{f(a)-f(x)}{f(a)f(x)}}{x-a} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{1}{f(a)f(x)} \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(a)-f(x)}{x-a} \\
&= -\frac{f'(a)}{f(a)^2}.
\end{aligned}$$

4) Basta usar los dos apartados anteriores. □

4.2 REGLA DE LA CADENA

Lema 4.2.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función y sea* $a \in A \cap A'$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *La función* f *es derivable en* a.
2) *Existe una función* $f_a\colon A \to \mathbb{R}$ *continua en* a *verificando que* $f(x) = f(a) + (x-a)f_a(x)$.

En ese caso $f_a(a) = f'(a)$.

Demostración. Si f es derivable, podemos definir la función $f_a\colon A \to \mathbb{R}$ como

$$f_a(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}, & \text{si } x \neq a, \\ f'(a), & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Recíprocamente, si existe la función f_a, basta con dividir por $x-a$ y tomar límite para comprobar que f es derivable y que $f'(a) = f_a(a)$. □

Proposición 4.2.2. *Sean* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *y* $g\colon B \to \mathbb{R}$ *dos funciones verificando que:*

1) f *es derivable en* $a \in A \cap A'$;
2) $f(A) \subset B$ *y* $b = f(a) \in B \cap B'$;
3) g *es derivable en* $f(a)$.

Entonces $g \circ f$ *es derivable en* a *y* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Demostración. Consideremos la función $g_b\colon B \to \mathbb{R}$ definida como

$$g_b(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y)-g(b)}{y-b}, & \text{si } y \neq b, \\ g'(b), & \text{si } y = b \end{cases}$$

del lema anterior. Como g es derivable en b, entonces g_b es continua en b. Además se cumple que $g_b(y)(y-b) = g(y) - g(b)$ para cualquier $y \in B$. Vamos a calcular la derivada de $g \circ f$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{x-a} &= \lim_{x\to a} \frac{g_b(f(x))\,(f(x)-f(a))}{x-a} \\ &= \lim_{x\to a} g_b(f(x)) \cdot \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= g'(f(a)) \cdot f'(a). \end{aligned}$$

□

4.3 FUNCIÓN INVERSA

Teorema 4.3.1 (de derivación de la función inversa)**.** *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función inyectiva y sea* $B = f(A)$. *Supongamos que* f *es derivable en* $a \in A \cap A'$. *Entonces* $b = f(a) \in B'$ *y las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $f'(a) \neq 0$ *y* f^{-1} *es continua en* b.
2) f^{-1} *es derivable en* b.

Además, en caso de ser ciertas dichas afirmaciones, se cumple que

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}\,.$$

Demostración. Veamos en primer lugar que $b \in B'$. Como $a \in A'$, existe una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $a_n \neq a$ para todo n. Como la función f es inyectiva, se cumple que $f(a_n) \neq f(a)$ y, usando la continuidad, $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = b$. Por tanto, b es un punto de acumulación de B.

1)⇒2) Sean $b_n \in B$, $b_n \neq b$ tales que $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ y sea $a_n = f^{-1}(b_n)$. Como f^{-1} es continua en b, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f^{-1}(b_n) = f^{-1}(b) = a.$$

Usemos ahora que f es derivable en a:

$$f'(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b}{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}.$$

Como $f'(a) \neq 0$,

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{-1}(b_n) - f^{-1}(b)}{b_n - b}$$

y, por tanto, f^{-1} es derivable en b y $\left(f^{-1}\right)'(b) = 1/f'(a)$.

2)⇒1) Como f^{-1} es derivable en b, en particular f^{-1} es continua en b. Por la regla de la cadena, como $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = x$,

$$\left(f^{-1}\right)'(f(a)) \cdot f'(a) = 1,$$

y, por tanto, ambas derivadas son no nulas. □

Conocida una función f es fácil comprobar si su derivada se anula, en cambio puede ser más complicado demostrar la continuidad de su inversa sin conocerla explícitamente. En algunos casos, como vimos en el corolario 1.3.6, la continuidad de la función inversa se obtiene de forma automática.

Corolario 4.3.2. *Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Sea $J = f(I)$ y supongamos que f es derivable en a. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $f'(a) \neq 0$.
2) f^{-1} *es derivable en* $b = f(a)$.

Volveremos a este resultado en temas siguientes, después del teorema del valor medio.

4.4 EJERCICIOS

Ejercicio 4.1. Sean $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ dos funciones.

1) Comprueba que

$$\begin{aligned} \max(f,g) &= \frac{1}{2}\big((f+g) + |f-g|\big), \\ \min(f,g) &= \frac{1}{2}\big((f+g) - |f-g|\big). \end{aligned}$$

2) Si f y g son continuas en $a \in A$, entonces $\max(f,g)$ y $\min(f,g)$ son continuas en a.

5 EL TEOREMA DEL VALOR MEDIO

5.1 EXTREMOS LOCALES

Recordemos que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ alcanza su *máximo absoluto* en $a \in A$ si $f(a) \geqslant f(x)$ para cualquier $x \in A$ o, lo que es lo mismo,

$$f(a) = \max\{f(x) : x \in A\}.$$

Usaremos la expresión *extremo absoluto* para referirnos tanto a los máximos como a los mínimos absolutos.

Ejemplo 5.1.1. Si una función no está acotada superiormente, no tiene máximo. Si está acotada, tenemos garantizada la existencia de supremo, pero no de máximo. Por ejemplo, la función $f\colon]0,1[\to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ está acotada, pero no tiene máximo ni mínimo. ♮

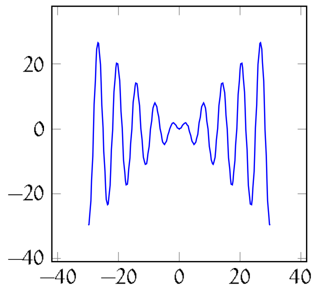


Figura 15: Gráfica de la función $x\,\mathrm{sen}(x)$

Definición 5.1.2. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $a \in A$.

1) Diremos que f tiene o alcanza un *máximo local* en $a \in A$ si existe $r > 0$ tal que $f(x) \leqslant f(a)$ para cualquier $x \in]a-r, a+r[\cap A$.

2) Diremos que f tiene o alcanza un *máximo relativo* en $a \in A$ si es un máximo local y $a \in \mathring{A}$.

3) De forma análoga se definen mínimos locales y relativos.

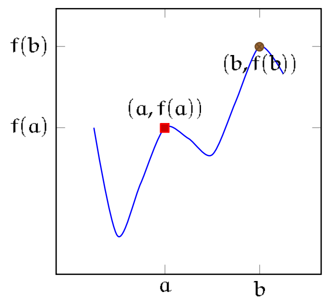


Figura 16: Un máximo relativo o local puede no ser un máximo absoluto

Relación entre extremos absolutos y extremos locales

1) *Los extremos absolutos son extremos locales.* El recíproco no es cierto como se puede ver en las figuras 15 y 16. Por ejemplo, la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x)$ no está acotada y, por tanto, no tiene extremos absolutos aunque tiene extremos locales.

2) Los extremos relativos son extremos locales que se alcanzan en puntos del interior del dominio. La función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos, y por tanto locales, en los extremos del intervalo. No son extremos relativos al no estar en el interior del intervalo.

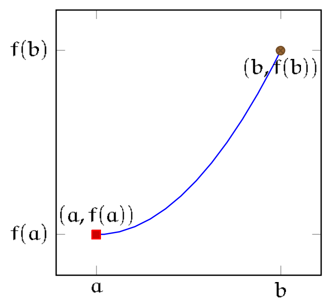


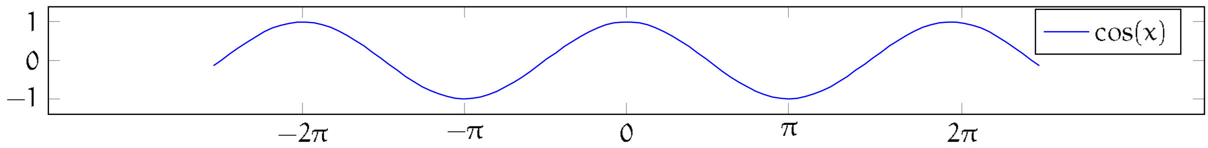
Figura 17: Los extremos absolutos no son relativos si no se alcanzan en el interior del dominio

Resumiendo, los extremos absolutos son extremos locales y también son relativos si pertenecen al interior del dominio.

Proposición 5.1.3. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y supongamos que f alcanza su máximo absoluto en $a \in A$. Entonces f tiene un extremo relativo en a si, y sólo si, $a \in \mathring{A}$.*

Ejemplo 5.1.4. 1) La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \cos(x)$ alcanza su máximo absoluto en aquellos puntos donde $\cos(x) = 1$, esto es, en los puntos de la forma $\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Todos ellos son máximos absolutos y relativos.

Los mínimos absolutos, y relativos, se alcanzan en aquellos puntos en los que $\cos(x) = -1$, esto es, en los puntos de la forma $\{(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.



2) La función parte entera $E \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no está acotada ni superior ni inferiormente y, por tanto, no tiene extremos absolutos. Por otro lado, todos los puntos son máximos relativos y, salvo los enteros, todos son también mínimos relativos.

Extremos relativos y derivadas

Lema 5.1.5 (Teorema de Fermat)**.** *Sea $f \colon A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real. Supongamos que f tiene un extremo relativo en $a \in A$ y que f es derivable en a. Entonces $f'(a) = 0$.*

Demostración. Si a es un extremo relativo de f, entonces $A_a^+ \cap A_a^-$. Esto es, podemos estudiar el límite de la función f en a por la izquierda y por la derecha.

Supongamos que f tiene un máximo relativo en a. Entonces, por una parte,

$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leqslant 0$$

ya que $f(a) \geqslant f(x)$ y $x \geqslant a$ cerca de a. Por otra parte

$$f'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$$

ya que, ahora se sigue cumpliendo que $f(a) \geqslant f(x)$, pero $x \leqslant a$ cerca de a. Por tanto $f'(a) = 0$. Si f tiene un mínimo relativo en a, basta considerar $-f$ y aplicarle lo anterior. □

Definición 5.1.6. Diremos que a es un *punto crítico* de la función $f \colon A \to \mathbb{R}$ si $f'(a) = 0$.

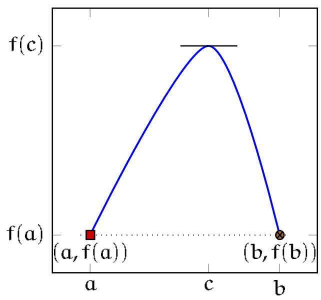


Figura 18: El teorema de Rolle nos dice que entre dos raíces consecutivas de la función hay un cero de la derivada. En consecuencia, entre dos ceros consecutivos de la derivada hay, a lo sumo, un cero de la función. Esta idea es clave para contar el número de ceros de una función o de su derivada.

5.2 TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Teorema 5.2.1 (Teorema de Rolle, 1690)**.** *Sea $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$, derivable en $]a, b[$ y verificando que $f(a) = f(b)$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Sabemos que f alcanza su máximo y su mínimo absolutos: existen $\alpha, \beta \in [a, b]$ tales que

$$f(\alpha) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \text{ y}$$
$$f(\beta) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Dichos máximo y mínimo pueden estar en el interior del intervalo o en los extremos:

1) Si $\alpha \in]a, b[$, entonces α es un mínimo relativo y, por tanto, $f'(\alpha) = 0$.

2) Si $\beta \in]a, b[$, entonces β es un máximo relativo y, por tanto, $f'(\beta) = 0$.

3) Si $\alpha, \beta \in \{a, b\}$, entonces $\min f = \max f$ con lo que la función es constante y su derivada se anula siempre.

En cualquier caso, existe $c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$. □

Geométricamente, el teorema de Rolle nos dice que hay un punto donde la pendiente de la función es cero o, lo que es lo mismo, la recta tangente a la función en dicho punto es horizontal, paralela a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. Si eliminamos la hipótesis de que la función valga lo mismo en los extremos del intervalo, pasamos a tener el dibujo "girado". El teorema del valor medio nos dice que hay un punto donde la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta, ya no horizontal, que une $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

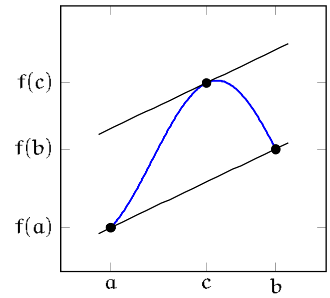


Figura 19: Interpretación geométrica del teorema del valor medio

Teorema 5.2.2 (Teorema del valor medio de Lagrange)**.** *Sea* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua en* $[a,b]$*, derivable en* $]a,b[$*. Entonces existe* $c \in]a,b[$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Demostración. Consideremos la función $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = (f(b) - f(a))\,x - f(x)(b-a).$$

La función g es continua en $[a,b]$ y derivable en $]a,b[$. Además

$$\begin{aligned} g(a) &= (f(b) - f(a))\,a - f(a)(b-a) = f(a)(b-a) = f(b)a - f(a)b, \\ g(b) &= (f(b) - f(a))\,b - f(b)(b-a) = -f(a)b + af(b). \end{aligned}$$

Como $g(a) = g(b)$, el teorema de Rolle nos dice que existe $c \in]a,b]$ tal que $g'(c) = 0$, esto es,

$$g'(c) = (f(b) - f(a)) - f'(c)(b-a) = 0,$$

como queríamos. □

Observación 5.2.3.
1) El teorema de Rolle es un caso particular del teorema del valor medio y, como acabamos de ver, el teorema del valor medio es una consecuencia del teorema de Rolle. Son dos resultados equivalentes.
2) Sea I un intervalo y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función derivable. Podemos aplicar el teorema del valor medio a cualquier intervalo $[x,y] \subset I$. Por tanto, dados $x, y \in I$ existe c (entre x e y) tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y-x).$$

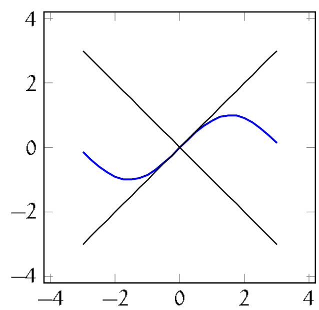


Figura 20: El teorema del valor medio se puede usar para acotar una función usando su derivada

Ejemplo 5.2.4. Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$. Si x e y son números reales, $x \neq y$, existe $c \in]x,y[$ tal que $\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y) = \cos(c)(x-y)$. Usando que la función coseno toma valores en el intervalo $[-1,1]$, podemos acotar de la siguiente forma

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(y)| = |\cos(c)(x-y)| = |\cos(c)|\,|x-y| \leqslant |x-y|\,.$$

En particular $|\operatorname{sen}(x)| \leqslant |x|$.

Ejemplo 5.2.5. Consideremos la función $f(x) = \log(x)$. Si $x \in \mathbb{R}^+$, $x > 1$ y aplicamos el teorema del valor medio al intervalo $[1,x]$, existe $c \in]1,x[$ tal que

$$f(x) - f(1) = f'(c)(x-1) \iff \log(x) = \frac{1}{c} \cdot (x-1).$$

Usando que $1/x$ es decreciente en los positivos, $1 \leqslant \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{x}$, con lo que

$$\frac{x-1}{x} \leqslant \log(x) \leqslant x-1.$$

Comprueba que la desigualdad también es cierta para $x \in]0,1[$.

Corolario 5.2.6. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Supongamos que* $f'(x) = 0$ *para cualquier* $x \in I$*, entonces* f *es constante.*

Demostración. Sean $x, y \in I$, con $x < y$. Aplicando el teorema del valor medio, existe $c \in [x, y]$ tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) = 0 \cdot (y - x) = 0,$$

como queríamos demostrar. □

Corolario 5.2.7. *Sea* I *un intervalo y sean* $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ *funciones derivables. Supongamos que* $f'(x) = g'(x)$ *para cualquier* $x \in I$*. Entonces existe* $K \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = g(x) + K$ *para cualquier* $x \in I$*.*

Demostración. Basta aplicar el corolario 5.2.6 a la diferencia $f - g$. □

Corolario 5.2.8. *Sea* I *un intervalo y sea* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función derivable. Supongamos que* $f'(x) > 0$ *para todo* $x \in I$*, entonces* f *es una función estrictamente creciente.*

5.2.1 Otra demostración del teorema de Rolle*

De la demostración que hemos hecho del teorema de Rolle se puede sacar la impresión, errónea, de que el punto donde la derivada se anula ha de ser un extremo relativo de la función.

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a) = f(b)$. Usando el ejercicio 1.15, podemos encontrar dos puntos $x_1, y_1 \in [a, b]$ tales que

$$y_1 - x_1 = \frac{b - a}{2} \quad \text{y} \quad f(x_1) = f(y_1).$$

Si repetimos, construimos por inducción dos sucesiones de elementos de $[a, b]$, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tales que $a \leqslant x_n \leqslant y_n \leqslant b$,

$$y_n - x_n = \frac{b - a}{2^n} \quad \text{y} \quad f(x_n) = f(y_n).$$

Además la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, la sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es decreciente y $x_n \leqslant y_n$, para cualquier n natural. Por tanto, ambas son convergentes y con el mismo límite, llamémoslo c.

Como

$$0 = \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{y_n - c}{y_n - x_n} \cdot \frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} + \frac{c - x_n}{y_n - x_n} \cdot \frac{f(c) - f(x_n)}{c - x_n}$$

los dos sumandos tienen signo distinto.

Si la función f es derivable en c, en particular si es derivable en $]a, b[$, se obtiene que $f'(c) = 0$.

Aunque la demostración parece más larga que la usual, observa que hemos evitado completamente el teorema de Weierstraß y el teorema de Fermat.

5.3 EJERCICIOS

Ejercicio 5.1. Sea $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio de segundo grado. Si $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \neq y$, entonces

$$\frac{p(x) - p(y)}{x - y} = p'\left(\frac{x + y}{2}\right).$$