Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

1 de abril de 2020

1. Tema 5: Grupos resolubles.

En la última clase, introducíamos el concepto de serie normal, serie normal propia y serie de composición.

Demostrábamos que una serie es de composición si y sólo si sus factores son grupos simples, siendo un grupo simple un grupo no trivial que no tiene subgrupos normales propios.

Podemos pues reconocer de forma fácil si una serie es o no de composición. Veamos un ejemplo:

Notación.

1. Para indicar que un subgrupo N de un grupo G es un subgrupo normal propiamente contenido en G usaremos el símbolo $\lhd$. Esto es
$$N \lhd G$$
indica que N es un subgrupo normal de G y $N \lneq G$.

2. En adelante denotaremos el subgrupo trivial $\{1\}$ simplemente por 1, siempre que no haya peligro de confusión.

Ejemplo 1.1. Por ejemplo la serie de S_4,

$$1 \lhd A_4 \lhd S_4$$

es normal y propia pero no es de composición pues uno de sus factores $A_4/1 = A_4$ no es un grupo simple.

Sin embargo, la serie

$$1 \lhd C_2 \lhd K \lhd A_4 \lhd S_4,$$

donde $K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$ es el subgrupo de Klein de A_4 y $C_2 = \langle (1\ 2)(3\ 4) \rangle$, el subgrupo cíclico de orden 2 (véase el Ejemplo 5.2 de la clase del 31 de marzo), sí es una serie de composición. En efecto, utilizaremos que todo grupo de orden primo p es isomorfo al cíclico C_p y que C_p es un grupo simple, por ser p primo. Entonces los factores de esta serie son

$S_4/A_4 \cong C_2$ (pues $|S_4/A_4| = [S_4 : A_4] = 2$) y entonces es simple,
$A_4/K \cong C_3$ (pues $|A_4/K| = [A_4 : K] = 3$) y entonces es simple,
$K/C_2 \cong C_2$ (pues $|K/C_2| = [K : C_2] = 2$) y entonces es simple, y
$C_2/1 = C_2$ que es simple.

Consecuentemente, por el Teorema 5.8 de la clase del 31 de marzo, la serie anterior es una serie de composición.

En la clase anterior vimos que el grupo de los números enteros no tiene series de composición. Esto es, no todo grupo tiene series de composición. En el caso de grupos finitos podemos asegurar que sí, como vemos en el teorema siguiente:

Teorema 1.2. *Todo grupo finito tiene una serie de composición.*

Demostración. Hacemos inducción en el orden del grupo. Sea G tal que $|G| = 2$ entonces $G \cong C_2$ y por tando es simple, con lo que $1 \lhd G$ es una serie de composición de G.

Supongamos $|G| > 2$ y el resultado cierto para todo grupo de orden menor que $|G|$. Puesto que G es finito, el retículo de subgrupos de G, $Sub(G)$, también es finito. Entonces el conjunto $\mathfrak{N} = \{K \in Sub(G)/K \lhd G\}$ es un conjunto finito y podemos entonces elegir en este conjunto aquel $K \lhd G$ tal que su orden $|K|$ sea el mayor.

Notemos que el grupo G/K es un grupo simple pues si no lo fuera tendría un subgrupo normal propio. Como los subgrupos normales propios de G/K son de la forma N/K con $K \lhd N \lhd G$, entonces N es un elemento de $\mathfrak{N}$ con $|N| > |K|$, en contra de la elección de K.

Como $K \lhd G$, entonces $|K| \lneqq |G|$ y, por hipótesis de inducción, K tiene una serie de composición

$$1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_r = K.$$

Entonces la serie

$$1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_r = K \lhd K_{r+1} = G$$

es una serie de composición de G pues sus factores son K_i/K_{i-1}, $i = 1, \ldots, r$, que son simples pues son los de la serie de composición de K, y $K_{r+1}/K_r = G/K$ que es también simple como hemos visto anteriormente.

Consecuentemente G tiene una serie de composición.

□

Sin embargo no hay una única serie de composición para un grupo G, por ejemplo

Ejemplo 1.3. Consideremos el grupo diédrico $D_4 = \langle r, s/r^4 = 1 = s^2, sr = r^3 s\rangle$. Las dos siguientes series

$$1 \lhd \langle s\rangle \lhd \langle s, r^2\rangle \lhd D_4$$

$$1 \lhd \langle r^2\rangle \lhd \langle r\rangle \lhd D_4$$

son series de composición pues sus factores son, en la primera serie

$$D_4/\langle s, r^2\rangle \cong C_2,\ \langle s, r^2\rangle/\langle s\rangle \cong C_2 \text{ y } \langle s\rangle/1 = \langle s\rangle \cong C_2$$

y entonces todos grupos simples. En la segunda serie, sus factores son

$$D_4/\langle r\rangle \cong C_2,\ \langle r\rangle/\langle r^2\rangle \cong C_2 \text{ y } \langle r^2\rangle/1 = \langle r^2\rangle \cong C_2,$$

por tanto también simples.

Tenemos pues dos series de composición distintas de D_4.

En este ejemplo observamos que aunque las series sean distintas, sin embargo tienen dos cosas en común: Tienen la misma longitud y los factores de composición son isomorfos. Nuestro objetivo siguiente es demostrar que esto es cierto para cuaquier grupo G que tenga series de composición (y por tanto para todo grupo finito). Damos en primer lugar la siguiente definición:

Definición 1.4. *Sea G un grupo y*

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_n = G,$$

$$1 = K_0 \trianglelefteq K_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq K_m = G$$

dos series normales de G. Diremos que son **equivalentes** *o* **isomorfas** *si:*

1. *$n = m$,*
2. *existe una permutación $\sigma \in S_n$ tal que $H_i/H_{i-1} \cong K_{\sigma(i)}/K_{\sigma(i)-1}$, para todo $i = 1, \ldots, n$.*

Esto es, tienen la misma longitud y sus factores son isomorfos.

El Teorema de Jordan-Hölder asegura que cualesquiera dos series de composición son equivalentes. Antes de demostrar este teorema, establecemos primero un resultado probado por Schreier en 1928.

Teorema 1.5. *(Teorema de refinamiento de Schreier). Dos series normales arbitrarias de un grupo G admiten refinamientos equivalentes.*

Para la demostración de este teorema haremos uso del conocido como Lema de la Mariposa o cuarto teorema de isomorfía. Enunciamos a continuación dicho lema aunque omitiremos la demostración. (Aun así os pondré en un documento aparte la demostración de dicho Lema)

Teorema 1.6. *Lema de la Mariposa o Cuarto Teorema de Isomorfismo. Sea G un grupo y C_1, A_1, C_2, A_2 subgrupos de G tales que $C_1 \trianglelefteq A_1$ y $C_2 \trianglelefteq A_2$. Entonces*

(a) $(A_1 \cap C_2)C_1 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_1$.

(b) $(A_2 \cap C_1)C_2 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_2$.

(c) Existen isomorfismos

$$\frac{(A_1 \cap A_2)C_1}{(A_1 \cap C_2)C_1} \cong \frac{A_1 \cap A_2}{(A_1 \cap C_2)(A_2 \cap C_1)} \cong \frac{(A_1 \cap A_2)C_2}{(A_2 \cap C_1)C_2}.$$

Veamos ahora la demostración del Teorema de refinamiento de Schreier:

Demostración. (Demostración del Teorema 1.5) Sea G un grupo y consideremos dos series normales de G

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = G,$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 0, 1, \dots, m$ sea

$$G_{i,j} := (G_i \cap H_j)G_{i-1}.$$

Puesto que
$G_{i,0} = (G_i \cap \{1\})G_{i-1} = \{1\}G_{i-1} = G_{i-1}$,
$G_{i,m} = (G_i \cap G)G_{i-1} = G_iG_{i-1} = G_i$ (pues $G_{i-1} \leq G_i$) y
$G_{i,j} = (G_i \cap H_j)G_{i-1} \leq G_{i,j+1} = (G_i \cap H_{j+1})G_{i-1}$ (pues $H_j \leq H_{j+1}$),
obtenemos una cadena de subgrupos

$$G_{i-1} = G_{i,0} \leq G_{i,1} \leq \cdots \leq G_{i,m-1} \leq G_{i,m} = G_i \text{ para cada } i = 1, \dots, n.$$

Por otro lado, para cada $i = 0, 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$ sea

$$H_{i,j} := (H_j \cap G_i)H_{j-1}.$$

Como anteriormente, puesto que
$H_{0,j} = (H_j \cap \{1\})H_{j-1} = \{1\}H_{j-1} = H_{j-1}$,
$H_{n,j} = (H_j \cap G)H_{j-1} = H_jH_{j-1} = H_j$ (pues $H_{j-1} \leq H_j$) y
$H_{i,j} = (H_j \cap G_i)H_{j-1} \leq H_{i+1,j} = (H_j \cap G_{i+1})H_{j-1}$ (pues $G_i \leq G_{i+1}$),
obtenemos una cadena de subgrupos

$$H_{j-1} = H_{0,j} \leq H_{1,j} \leq \cdots \leq H_{n-1,j} \leq H_{n,j} = H_j \text{ para cada } j = 1, \dots, m.$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, m$, aplicamos el cuarto teorema de isomorfía a los subgrupos de G

$$C_1 = G_{i-1} \trianglelefteq A_1 = G_i \text{ y } C_2 = H_{j-1} \trianglelefteq A_2 = H_j,$$

entonces por (a) y (b) del teorema serán

$(A_1 \cap C_2)C_1 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_1$, esto es $G_{i,j-1} \trianglelefteq G_{i,j}$
y
$(A_2 \cap C_1)C_2 \trianglelefteq (A_1 \cap A_2)C_2$, esto es $H_{i-1,j} \trianglelefteq H_{ij}$
con lo que las inclusiones anteriores son normales. Además por el apartado (c) será

$$G_{i,j}/G_{i,j-1} \cong H_{i,j}/H_{i-1,j} \text{ para cada } i = 1, \dots, n \; j = 1, \dots, m. \tag{1.1}$$

Insertando en cada serie las correspondientes cadenas obtenemos dos series normales

$$1 = G_{1,0} \trianglelefteq G_{11} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{1,m} = G_1 \trianglelefteq G_{2,1} \dots$$
$$G_{n-1} = G_{n,0} \trianglelefteq G_{n,1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_{n,m-1} \trianglelefteq G_{n,m} = G_n$$

y

$$1 = H_{0,1} \trianglelefteq H_{1,1} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1,1} = H_1 \trianglelefteq H_{1,2} \trianglelefteq \dots$$
$$H_{m-1} \trianglelefteq H_{1,m} \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_{n-1,m} \trianglelefteq H_{n,m} = H_m$$

que son refinamientos de cada una de las series originales respectivamente. Estos dos refinamientos son series equivalentes pues tienen la misma longitud (nm) y por (1.1), sus factores son isomorfos, lo que acaba la demostración. $\square$