Relación de Ejercicios del Tema IV

Métodos Numéricos I – Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada – Curso 2018/2019

En la resolución de los ejercicios que consideres conveniente puedes hacer uso de *Maxima*.

1. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_M$ $M+1$ números reales. Comprueba que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_{M-1} & x_M \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_{M-1}^2 & x_M 2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_0^M & x_1^M & \cdots & x_{M-1}^M & x_M^M \end{bmatrix} = \prod_{\substack{i,j=0 \\ i<j}}^{M} (x_j - x_i).$$

   Deduce que si $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$ son tales que

$$i, j = 1, \ldots, M \;\Rightarrow\; x_i \neq x_j,$$

   entonces existe una única función polinómica $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de grado menor o igual que M con

$$i = 0, 1, \ldots, M \;\Rightarrow\; p(x_i) = y_i.$$

2. Comprueba que el problema de interpolación anterior no está bien definido si el grado de la función polinómica p es distinto de M (número de datos menos 1).

3. Demuestra que si $a < b$, $f \in C^3([a, b])$ y $\mathbf{I}_2 f$ es el polinomio en $\mathbb{P}_2$ de forma que

$$\mathbf{I}_2 f(x_0) = f(x_0),\; \mathbf{I}_2 f(x_1) = f(x_1),\; \mathbf{I}_2 f(x_2) = f(x_2),$$

   con los nodos igualmente espaciados $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ y $x_2 = b$, entonces el correspondiente error de interpolación $\mathbf{E}_2 f$ verifica

$$\|\mathbf{E}_2 f\|_\infty \leq \frac{\|f'''\|_\infty}{9\sqrt{3}} h^3,$$

   siendo $h = (b - a)/2$.

4. Calcula los 7 nodos de Chebyshev $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ del intervalo $[1.6, 3]$ y úsalos para resolver el problema de interpolación

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_6 : \; i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \;\Rightarrow\; p(x_i) = \sqrt{|x_i - 2|}$$

   mediante las fórmulas de Lagrange y Newton. Analiza el condicionamiento de este problema y obtén una estimación del error de interpolación.

5. Considera en el intervalo $[-1,1]$ 9 nodos x_i uniformemente distribuidos y los correspondientes 9 nodos de Chebyshev u_i. Estudia en cada caso el problema de interpolación

$$\text{encontrar } p \in \mathbb{P}_8 : \; i = 0,1,2,3,4,5,6,7,8 \;\Rightarrow\; p(x_i) = 2|x_i| + 1,$$

así como el análogo para los nodos u_i. Dibuja simultáneamente ambos interpolantes junto con la función $2|x|+1$, $-1 \leq x \leq 1$.

6. Resulve el problema de interpolación de Hermite: encontrar $p \in \mathbb{P}_7$ de forma que

$$p(0) = 0 = p'(0),\; p(1) = 0.4,\; p'(1) = 1,\; p(-1) = 0,\; p'(-1) = -1, p(-2) = 1,\; p'(-2) = 1.2.$$

7. Dada la partición uniforme P del intervalo $[-1,1]$ determinada por 6 puntos y la función de Runge f, determina el spline s que verifica

$$i = 0,1,2,3,4,5 \;\Rightarrow\; s(-1+2i/5) = f(-1+2i/5),$$

siendo, o bien $s = \mathbf{S}_5^1 \in \mathbb{S}_0^1(P)$, o bien $s = \mathbf{S}_5^2 \in \mathbb{S}_3^2(P)$ con $s''(-1) = s''(1) = 0$ (natural). Ilustra con un ejemplo el principio de mínima energía para este último spline.

8. Considera el perfil de Sierra Nevada que aparece en la fotografía. Ayúdate de la cuadrícula superpuesta para fijar 28 puntos elegidos convenientemente y plantea y resuelve el correspondiente problema de interpolación de forma que el interpolante obtenido se ajuste al perfil. Justifica tu elección.