Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

15 de abril de 2020

1. Tema 5: Grupos resolubles.

En la clase de ayer demostramos el teorema de Jordan-Holder. Este teorema nos dice que cada grupo determina unívocamente a sus factores de composición. Nos permite por tanto definir clases especiales de grupos mediante propiedades que satisfacen sus factores de composición. Una de tales clases es la de los grupos resolubles que definimos a continuación en la forma mas general:

Definición 1.1. *Un grupo G se dice* **resoluble** *si tiene una serie normal*

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

tal que G_i/G_{i-1} es abeliano para todo $i = 1, \ldots, n$.

Esto es, un grupo G es resoluble si tiene una serie normal con factores abelianos

La terminología de grupo resoluble viene de la correspondencia, que se establece en Teoría de Galois, entre estos grupos y los polinomios que pueden resolverse por radicales (que esencialmente significa que hay una fórmula algebraica para calcular sus raíces). Esto lo veréis en el curso próximo.

Claramente **todo grupo abeliano es resoluble**, pues si G es abeliano entonces $1 \trianglelefteq G$ es una serie normal cuyo único factor $G/1 = G$ es abeliano.

Para grupos finitos, la resolubilidad, como decíamos al inicio de la clase, está caracterizada en función de los factores de composición. Lo vemos en el teorema siguiente

Teorema 1.2. *Sea G un grupo finito. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

(i) Los factores de composición de G son cíclicos de orden primo.

(ii) G es resoluble

Demostración. La implicación $(i) \Rightarrow (ii)$ es inmediata pues si los factores de composición son cíclicos, en particular son abelianos, con lo que cualquier serie de composición de G (que siempre existe por ser un grupo finito) es una serie normal con factores abelianos.

Veamos $(ii) \Rightarrow (i)$: Suponemos G resoluble, sea entonces

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G \tag{1.1}$$

una serie normal con G_i/G_{i-1} abeliano, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Por el teorema de Jordan-Holder, dicha serie admite un refinamiento que es una serie de composición. Sea

$$1 = H_0 \triangleleft H_1 \triangleleft \cdots \triangleleft H_m = G, \tag{1.2}$$

una serie de composición de G que refina a la anterior. Tendremos entonces que $n \leq m$ y todos los grupos de la serie (1.1) aparecen en la serie (1.2). Además $fact(G) = \{H_r/H_{r-1}; r = 1, \ldots, m\}$.

Veamos que para cada $r \geq 1$, el factor H_r/H_{r-1} es un grupo abeliano. En efecto, elegimos $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $H_r \leq G_i$ (notemos que $i > 0$ pues $H_r \neq 0$ al ser $r \geq 1$). Distinguimos dos casos:

<u>Caso 1:</u> $G_{i-1} = H_{r-1}$, entonces

$$H_r/H_{r-1} = H_r/G_{i-1} \leq G_i/G_{i-1}.$$

Así H_r/H_{r-1} es un subgrupo del grupo abeliano G_i/G_{i-1} y entonces también es abeliano.

<u>Caso 2:</u> $G_{i-1} \neq H_{r-1}$, entonces tenemos que

$$G_{i-1} \triangleleft H_{r-1} \triangleleft H_r \leq G_i$$

pues como G_{i-1} es un subgrupo normal de G_i entonces también es normal en todo subgrupo de G_i que lo contenga, además $H_{r-1}/G_{i-1} \triangleleft H_r/G_{i-1}$. Por el segundo teorema de isomorfía se tiene

$$(H_r/G_{i-1})/(H_{r-1}/G_{i-1}) \cong H_r/H_{r-1}.$$

Como H_{r-1}/G_{i-1} y H_r/G_{i-1} son subgrupos de G_i/G_{i-1} entonces ambos son grupos abelianos y entonces el cociente es abeliano.

Tenemos demostrado pues que los factores de composición de G son grupos abelianos. Como también son simples (por ser factores de una serie de composición) entonces necesariamente son cíclicos de orden un número primo (pues como vimos en el Lema 5.7 de la clase del 31-marzo-2020, en el caso abeliano, los únicos grupos simples son los cíclicos de orden primo), lo que acaba la demostración.

□

Como aplicación directa del teorema anterior

Ejemplo 1.3.

1. Puesto que $fact(S_2) = \{C_2\}$, $fact(S_3) = \{C_3, C_2\}$ y $fact(S_4) = \{C_2, C_2, C_3, C_2\}$ (véase Ejemplo 1.5 de 14-abril-2020), entonces S_2, S_3 y S_4 son grupos resolubles.

   Veremos al final de este tema que estos son los únicos grupos simétricos resolubles.

2. Puesto que $fact(D_3) = \{C_3, C_2\}$, $fact(D_4) = \{C_2, C_2, C_2\}$ y $fact(D_6) = \{C_3, C_2, C_2\}$ (véase Ejemplo 1.5 y el Ejercicio 12 de la Relación 4, ambos en la clase del 14-abril-2020), entonces D_3, D_4 y D_6 son grupos resolubles.

   Veremos en breve que de hecho todos los grupos diédricos son resolubles.

Los grupos resolubles se comportan bien respecto a subgrupos y cocientes:

Proposición 1.4. *1. Si G es un grupo resoluble y $H \leq G$ es un subgrupo suyo, entonces H también es resoluble.*

2. Si G es un grupo resoluble y $N \trianglelefteq G$ es un subgrupo normal suyo, entonces G/N también es resoluble.

3. Sea G un grupo y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal suyo tal que N y G/N son resolubles, entonces G también es resoluble

Demostración. Para la demostración de esta proposición haremos uso de dos resultados que os propongo como ejercicio:

(a) Sea G un grupo y sean N, N' y H subgrupos de G tal que $N \trianglelefteq N'$. Entonces $H \cap N \trianglelefteq H \cap N$‘.

(b) Sea G un grupo y sean A, B, C subgrupos de G tal que $B \trianglelefteq A$ y $C \trianglelefteq G$. Entonces $BC \trianglelefteq AC$.

Veamos entonces la demostración de la proposición:
1. Suponemos pues que G es un grupo resoluble. Sea entonces

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

una serie normal de G con G_i/G_{i-1} abeliano para todo $i = 1, \ldots, n$.
Sea $H \leq G$, utilizando (a), obtenemos que

$$1 = G_0 \cap H \trianglelefteq G_1 \cap H \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n \cap H = H$$

es una serie normal de H. Analicemos sus factores:
Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, aplicando el tercer teorema de isomorfía al grupo G_i y a sus subgrupos $K = G_i \cap H \leq G_i$ y $N = G_{i-1} \triangleleft G_i$ obtenemos que existe un isomorfismo $K/(N \cap K) \cong NK/N$. Como

$$K/(N \cap K) = (G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap (G_i \cap H)) = (G_i \cap H)/(G_{i-1} \cap H)$$

y

$$NK/N = (G_{i-1}(G_i \cap H))/G_{i-1} \leq G_i/G_{i-1} \Rightarrow \; NK/N \text{ es un grupo abeliano por serlo } G_i/G_{i-1},$$

concluímos entonces que los factores de la serie normal de H son grupos abelianos. Consecuentemente, H es resolube.

2. Suponemos G resoluble y consideramos de nuevo la serie normal

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$$

con G_i/G_{i-1} abeliano para todo $i = 1, \ldots, n$.
Sea $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de G. Utilizando (b), para cada $i = 1, \ldots n$ será $G_{i-1}N \trianglelefteq G_iN$. Además todos ellos contienen a N de forma normal, pues N es normal en G. Realizando los cocientes, obtenemos una serie

$$1 = G_0N/N \trianglelefteq G_1N/N \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_nN/N = G/N$$

quw es una serie normal de G/N. Analicemos los cocientes: Sea $i \in \{1, \ldots, n\}$, por el segundo teorema de isomorfía, sabemos que

$$(G_I N/N)/(G_{i-1}N/N) \cong G_i N/G_{i-1}N.$$

Por otro lado, aplicando el tercer teorema de isomorfía al grupo $G_i N$ y sus subgrupos $G_i \leq G_i N$ y $G_{i-1}N \trianglelefteq G_i N$, obtenemos que

$$G_i N/G_{i-1}N = (G_i(G_{i-1}N))/G_{i-1}N \cong G_i/(G_i \cap (G_{i-1}N)).$$

Como $G_i/(G_i \cap (G_{i-1}N))$ es abeliano pues es un cociente de G_i/G_{i-1} (¿cual?), entonces $G_i N/G_{i-1}N$ es un grupo abeliano.

Concluimos entonces que G/N es resoluble pues tiene una serie con factores abelianos.

3. Suponemos ahora $N \trianglelefteq G$ y que tanto N como G/N son resolubles. Sean entonces

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_r = N$$

una serie normal de N con N_i/N_{i-1} abeliano, para todo $i = 1, \ldots, r$ y

$$1 = H_0/N \trianglelefteq H_1/N \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_s/N = G/N$$

una serie normal de G/N con $(H_j/N)/(H_{j-1}/N) \cong H_i/H_{i-1}$ abeliano para todo $j = 1, \ldots, s$.

Entonces puesto que $N_r = N = H_0$, obtenemos una serie

$$1 = N_0 \trianglelefteq N_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq N_r = N = H_o \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_s = G$$

que es una serie normal de G y cuyos factores son abelianos. Consecuentemente, G es resoluble.

□

Como una primera consecuencia de la proposición anterior tenemos

Ejemplo 1.5. **Para todo $\mathbf{n \geq 3}$ el grupo diédrico $\mathbf{D_n}$ es resoluble.** En efecto, sea $D_n = \langle r, s / r^n = 1 = s^2, sr = r^{n-1}s \rangle$ y consideramos el subgrupo $C_n = \langle r \rangle \trianglelefteq D_n$, que es normal pues $[D_n : C_n] = 2$. Como todo grupo abeiiano es resoluble, tenemos que

- C_n es abeliano y entonces resoluble.
- $D_n/C_n \cong C_2$, por tanto abeliano y entonces resoluble.

Aplicando el apartado 3. de la proposición anterior, concluimos que D_n es resoluble.