Diseño de algoritmos

Jesús Bermúdez de Andrés. UPV-EHU
Ejercicios: Notación asintótica

Curso 2008-09

1. Usando la definición de notación asintótica Θ, demuestre con detalle que $1024\,n^2 + 5n \in \Theta(n^2)$.

2. Usando las definiciones de notación asintótica, demuestre si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes:

   a) $(n+1)! \in O(3n!)$
   b) $n^2 \in \Omega((n+1)^2)$

3. Demuestre las proposiciones siguientes:

   a) $g(n) \in O(f(n))$ si y sólo si $f(n) \in \Omega(g(n))$.
   b) $g(n) \in o(f(n))$ si y sólo si $f(n) \in \omega(g(n))$.
   c) $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$
   d) Si $g(n) \in o(f(n))$ entonces $g(n) \in O(f(n)) - \Omega(f(n))$

4. Demuestre que las proposiciones siguientes son equivalentes:

   a) $O(f(n)) = O(g(n))$
   b) $\Theta(f(n)) = \Theta(g(n))$
   c) $g(n) \in \Theta(f(n))$

5. Demuestre que $\lg n \in o(n^\alpha)$ para cualquier $\alpha > 0$.

6. Demuestre que $n^k \in o(2^n)$ para cualquier $k > 0$.

7. Justifique si son verdaderas o falsas cada una de las afirmaciones que aparecen a continuación: Por ejemplo, a la afirmación $n^2 \in O(n^3)$ y $n^2 \in \Theta(n^3)$ se debería responder *verdadero* y *falso*.

   a) $\frac{n}{\lg n} \in \Theta(n)$ y $\frac{n}{\lg n} \in o(n)$
   b) $\lg\lg n \in o(\lg n)$ y $\lg\lg n \in \omega(\lg n)$
   c) $4^{\lg_2 n} \in O(n^2)$ y $4^{\lg_2 n} \in \Omega(n^2)$
   d) Siendo $0 < \varepsilon < 1$, $n^{1+\varepsilon} \in \omega(n \lg n)$ y $n^{1+\varepsilon} \in O(n \lg n)$
   e) Siendo $0 < \varepsilon < 1$, $\frac{n^2}{\lg n} \in \Theta(n^{1+\varepsilon})$ y $\frac{n^2}{\lg n} \in \omega(n^{1+\varepsilon})$

f) $(\lg n)^2 \in o(\sqrt{n})$ y $\sqrt{n} \in O((\lg n)^2)$

g) $3^n \in \Omega(2^n)$ y $3^n \in \Theta(2^n)$

8. Demuestre si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: $f(n) \in O(r(n))$ y $g(n) \in O(s(n))$ implica que $\frac{f(n)}{g(n)} \in O(\frac{r(n)}{s(n)})$.

9. Una función $f : N \to R^*$ es *asintóticamente no decreciente* si $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ f(n) \leq f(n+1)$. Una función $f : N \to R^*$ es *b-armónica* ($b \in N\ \wedge\ b \geq 2$) si es *asintóticamente no decreciente* y la función $g(n) = f(bn)$ es de $O(f(n))$.

   Demuestre que si f es *b-armónica* entonces es *k-armónica* para cualquier $k \geq 2$.

10. Definimos una notación asintótica *condicional* del siguiente modo. Sea $P(n)$ una propiedad.

$$\begin{aligned}\Theta(f(n)|P(n)) \quad = \quad & \{g(n)|\ \exists c_1, c_2.\ \exists n_0. \\ & \forall n \geq n_0.\ (P(n) \Rightarrow c_1 f(n) \leq g(n) \leq c_2 f(n))\}\end{aligned}$$

   Demuestre la siguiente proposición: Si $f(n)$ es b-armónica, $t(n)$ es asintóticamente no decreciente y $t(n) \in \Theta(f(n)|\ n\ \textit{potencia de}\ b)$ $(b \geq 2)$, entonces $t(n) \in \Theta(f(n))$.