Tema 2

Espacios vectoriales

Los espacios vectoriales son estructuras básicas en matemáticas que aparecen no sólo en Geometría, sino también en Álgebra o en Cálculo, y representan las estructuras abstractas más simples en las que se estudia geometría. A pesar de su sencillez, desempeñan un papel clave en el estudio de figuras complicadas como curvas o superficies; de hecho, el método que se sigue para estudiar estas figuras consiste en asociarles en cada punto el espacio vectorial que "mejor las aproxime" en la cercanía del punto (la recta o el plano tangente en ese punto) y en analizar cómo este espacio vectorial cambia al movernos sobre la figura.

Los espacios vectoriales también son muy importantes en otras ciencias, como la Física, donde es habitual el empleo de magnitudes vectoriales para modelar magnitudes como las velocidades o las fuerzas; de hecho, la definición formal de espacio vectorial que estudiaremos resulta esencial para distinguir entre las propiedades intrínsecas de esas magnitudes (asociadas a su naturaleza física) y las extrínsecas (dependientes de las coordenadas con las que un observador las mida).

2.1. Definición, primeras propiedades y ejemplos

2.1.1. Concepto de espacio vectorial

Cuando hablamos de vectores pensamos en segmentos de recta orientados (flechas), con propiedades tales como la "dirección", el "sentido" o el "módulo". Sabemos desde la enseñanza secundaria que en el plano o en el espacio dos vectores se pueden sumar obteniéndose otro vector. También se puede multiplicar un número real por un vector y el resultado es un nuevo vector. Además, estas operaciones presentan algunas propiedades con similitudes a las que se vieron en la definición de anillo. Pues bien, los espacios vectoriales suponen la abstracción matemática de los conjuntos que admiten una suma interna y un producto por elementos de un cuerpo de modo que se cumplen esas mismas propiedades. La definición de espacio vectorial *se centra sólo en esa suma y producto*, sin tener en cuenta otros conceptos con el que el alumno pueda estar familiarizado (como el de módulo, producto escalar o vectorial), y que se irán desarrollando conforme se profundice más en Geometría.

Definición 2.1. *Sea* $(K,+,\cdot)$ *un cuerpo conmutativo. Un* espacio vectorial *(e.v.) sobre* $(K,+,\cdot)$ *o* K-espacio vectorial *es una terna* $(V,+,\cdot K)$ *formada por un conjunto* V *(a posteriori necesariamente no vacío) dotado de una operación (ley de composición interna) en* V*,*

$$+ : V \times V \to V$$

y una aplicación

$$\cdot : K \times V \to V$$

o ley de composición externa *de K sobre V tales que:*

I) *$(V,+)$ es un grupo conmutativo. Esto es, la operación $+$ en V, que asocia a cada par $(u,v) \in V \times V$ un único $u+v \in V$ verifica las propiedades ya estudiadas de grupo abeliano:*

- *(i) Asociativa: $(u+v)+w = u+(v+w)$, para cualesquiera $u,v,w \in V$.*
- *(ii) Elemento neutro: existe un elemento $e \in V$ tal que $v+e = e+v = v$, para todo $v \in V$. Al neutro lo denotaremos 0 e incluso $\vec{0}$ cuando se le quiera distinguir explícitamente del neutro 0 de $(K,+)$.*
- *(iii) Elemento simétrico: para cada $v \in V$, existe $w \in V$ tal que $v+w = w+v = 0$. Al elemento simétrico de v se le denotará $-v$ y se le llamará* opuesto de *v*.
- *(iv) Conmutativa: $u+v = v+u$, para todo $u,v \in V$.*

II) *La ley de composición externa $\cdot : K \times V \to V$, que asocia a cada $a \in K$ y cada $v \in V$ un único vector que denotaremos $a \cdot v \in V$, verifica las propiedades:*

- *(i) Pseudoasociativa: $(a \cdot b) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$, para todo $a,b \in K$ y todo $v \in V$,*
- *(ii) Unimodular: $1 \cdot v = v$, para todo $v \in V$, donde 1 es el elemento neutro de $(K \setminus \{0\}, \cdot)$*
- *(iii) Distributiva respecto de la suma en K: $(a+b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$, para cualesquiera $a,b \in K$ y $v \in V$,*
- *(iv) Distributiva respecto de la suma en V: $a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$, para todo $a \in K$ y cualesquiera $u,v \in V$.*

Observación 2.2. (1) En la definición anterior se usan con frecuencia los símbolos $+$ y $\cdot$ para representar dos conceptos distintos: para $+$, las operaciones en $(V,+)$ y $(K,+)$; para $\cdot$ la segunda operación del cuerpo $(K,+,\cdot)$ y la ley de composición externa en el espacio vectorial. Como ejercicio, explíquese qué significa cada símbolo cada vez que aparece en la definición anterior. ¿Hay alguna posibilidad de confusión en la notación?

(2) El lector puede comprobar directamente que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial con la suma en $\mathbb{R}^2$ usual

$$(x,y)+(x',y') := (x+x', y+y') \qquad \forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$$

y la ley de composición externa de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^2$:

$$a \cdot (x,y) := (a \cdot x, a \cdot y) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Obsérvese que, en cada caso, en el miembro izquierdo los símbolos $+$, $\cdot$ denotan las operaciones que se están definiendo en el espacio vectorial, mientras que en el derecho esos mismos símbolos denotan la suma y productos usuales en $\mathbb{R}$.

(3) En adelante, al igual que hablaremos simplemente del "cuerpo K" cuando se sobreentiendan las operaciones (sin especificarlas explícitamente), hablaremos del espacio vectorial $V(K)$ sin especificar sus leyes de composición externa e interna, e incluso V si se sobreentiende cuál es el cuerpo (ya sea uno concreto o uno genérico). Así, el ejemplo del punto 2) anterior se denotará $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ o sólo $\mathbb{R}^2$.

(4) Nótese que la operación $\cdot$ en un anillo parece tener propiedades muy similares a la ley de composición externa en un e.v. Sin embargo, en un anillo el producto $\cdot$ es una operación en él (es una ley de composición interna porque multiplican dos elementos del anillo, obteniéndose entonces otro elemento del anillo) mientras que en un e.v. el producto $\cdot$ no es interno (se multiplica un elemento de K por otro de V resultando un elemento de V). Esto justifica que la primera propiedad del producto $\cdot$ de un e.v. no sea una propiedad asociativa propiamente dicha, y se le llame "pseudoasociativa".

(5) Para nada se ha usado en la definición que el cuerpo K sea conmutativo y, de hecho, podría mantenerse esta definición cuando no lo es. No obstante, en ese caso, tendríamos dos opciones distintas para la propiedad pseudoasociativa: $(a.b).v = a.(b.v)$ y $(a.b).v = b.(a.v)$. Para darse cuenta de que esta segunda opción sería tan razonable como la primera, bastaría con denotar la ley de composición externa escribiendo primero el elemento de V y luego el de K. Concretamente, poniendo: $v \cdot a$, la segunda opción se escribiría $v \cdot (a \cdot b) = (v \cdot a) \cdot b$. Según la opción que se escogiera para la propiedad pseudoasociativa se hablaría de un espacio vectorial *por la izquierda* (nuestra opción por defecto) o *por la derecha* (la anterior opción alternativa). No obstante, nosotros no tendremos en cuenta esta sutileza, al suponer siempre que los cuerpos sean conmutativos. Empero, es de remarcar que todo nuestro estudio de espacios vectoriales se extiende sin dificultad al caso no conmutativo.

Definición 2.3. *Si V es un e.v. sobre K, llamaremos* escalares *a los elementos de K y* vectores *a los elementos de V; usualmente, usaremos las letras $a,b,c,\ldots$ para referirnos a los escalares y las letras $u,v,w,\ldots$ para referirnos a los vectores.*

La operación $+$ de V se llamará suma de vectores *y la ley de composición externa $\cdot$ de K sobre V se llamará* producto de escalares por vectores. *Cuando $K = \mathbb{R}$ (resp. $K = \mathbb{C}$) diremos que V es un* e.v. real *(resp.* e.v. complejo*).*

2.1.2. Propiedades elementales

Es de remarcar que, como en todo espacio vectorial $V(K)$, se cumple que $(V,+)$ es un grupo abeliano, todas las propiedades que conocemos de grupos se mantienen para la suma de vectores. En particular (compruébese como un ejercicio de repaso)

Proposición 2.4. *En todo espacio vectorial $V(K)$:*

(a) El elemento neutro 0 de la suma de vectores es único.

(b) La suma de vectores permite simplificar:

$$v + w = v + w' \Rightarrow w = w' \qquad v + w = w' + w \Rightarrow w = w', \forall v, w, w` \in V.$$

(c) Para cada vector v, su elemento opuesto $-v$ es único, y de la igualdad $v + w = 0$ se deduce $w = -v, v = -w$ (en particular $-(-v) = v$).

Como notación, dados $u, v \in V$ escribiremos $u - v$ para referirnos al vector $u + (-v)$. Esto se llamará *diferencia de vectores* y consiste en sumar al primero el opuesto del segundo. Obsérvese que, cuando consideramos además el producto por escalares, expresiones como

$$-(a \cdot v), \qquad (-a) \cdot v, \qquad a \cdot (-v),$$

son conceptualmente distintas (¿qué significa el signo $-$ en cada caso?) Sin embargo, la siguiente proposición nos tranquilizará al demostrar, en particular, que las tres coinciden, por lo que se puede escribir de manera no ambigua $-a \cdot v$. De hecho, será fácil darse cuenta de que otros abusos de notación usuales como *no* escribir explícitamente el símbolo del producto escalar (esto es, poner av en vez de $a \cdot v$) o no distinguir notacionalmente entre el neutro 0 de $(K,+)$ y $\vec{0}$ de $(V,+)$, no deben dar lugar a ambigüedad o confusión.

Proposición 2.5. *Sea $V(K)$ un e.v. Se verifican las siguientes propiedades:*

1) $a \cdot 0 = 0$ (esto es, $a \cdot \vec{0} = \vec{0}$), para todo $a \in K$.

2) $0 \cdot v = 0$ (esto es, $0 \cdot v = \vec{0}$), para todo $v \in V$.

3) Dados $a \in K$ y $v \in V$, si $a \cdot v = 0$, entonces $a = 0$ ó $v = 0$.

4) $-(a \cdot v) = (-a) \cdot v = a \cdot (-v)$, para todo $a \in K$ y todo $v \in V$.

5) $-v = (-1) \cdot v$, para todo $v \in V$.

6) $-(u+v) = -u-v$ (esto es, $-(u+v) = (-u)+(-v)$), para todo $u, v \in V$.

7) $(-a) \cdot (-v) = a \cdot v$, para todo $a \in K$ y todo $v \in V$.

8) Si $a \cdot u = a \cdot v$ con $a \in K$, $a \neq 0$ y $u, v \in V$, entonces $u = v$.

9) Si $a \cdot v = b \cdot v$ con $a, b \in K$ y $v \in V$ con $v \neq 0$, entonces $a = b$.

Demostración. 1). Usando la propiedad de neutro para $\vec{0}$ en $(V,+)$ y la distributiva

$$a \cdot \vec{0} = a \cdot (\vec{0} + \vec{0}) = a \cdot \vec{0} + a \cdot \vec{0},$$

por lo que el resultado se obtiene simplificando en $(V,+)$ (para más claridad en la simplificación, obsérvese que en el miembro izquierdo se puede sustituir $a \cdot \vec{0}$ por $a \cdot \vec{0} + \vec{0}$).

2) Usando ahora que 0 es el neutro en $(K,+)$:

$$0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$$

por lo que basta de nuevo con simplificar.

3) Sean $a \in K$ y $v \in V$ con $a \cdot v = 0$. Del enunciado se sigue que basta con demostrar: si $a \neq 0$ entonces $v = 0$. Como K es un cuerpo, podemos tomar el inverso a^{-1}. Multiplicando por a^{-1} a ambos lados de $a \cdot v = 0$, y usando la propiedad 1), se tiene:

$$0 = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = (a^{-1} \cdot a) \cdot v = 1 \cdot v = v,$$

donde se ha usado la propiedad pseudoasociativa en la segunda igualdad, y la unimodular en la última.

4) Tenemos que demostrar dos igualdades. Usando la proposición 2.4(c), para la primera igualdad basta con comprobar que al sumar $a \cdot v$ con $(-a) \cdot v$ se obtiene $\vec{0}$, y para la segunda que también ocurre al sumarlo con $a \cdot (-v)$. Claramente:

$$a \cdot v + (-a) \cdot v = (a + (-a)) \cdot v = 0 \cdot v = \vec{0},$$
$$a \cdot v + a \cdot (-v) = a \cdot (v - v) = a \cdot \vec{0} = \vec{0},$$

donde en la primera igualdad de cada caso se usa una de las pripiedades distributivas, y en la última igualdad en se usan 2) y 1), resp.

5) Tómese $a = 1$ en la primera igualdad 4) y úsese la propiedad unimodular.

6) Por 4) y una de las distributivas, se tiene:

$$-(u+v) = (-1) \cdot (u+v) = (-1) \cdot u + (-1) \cdot v = -u + (-v) = -u - v$$

(para la última igualdad, obsérvese que en cualquier anillo unitario se tiene $(-1)\cdot a = -a$ por lo que $(-1)\cdot(-a) = -(-a) = a$).

7) Por la propiedad 5) y la pseudoasociativa, se tiene:

$$(-a)\cdot(-v) = (-a)\cdot((-1)\cdot v) = ((-a)\cdot(-1))\cdot v = a\cdot v.$$

8) Multiplíquese por a^{-1} a ambos lados de $a\cdot u = a\cdot v$ y úsese la pseudoasociativa y la unimodular.

9) La igualdad $a\cdot v = b\cdot v$ equivale a $a\cdot v-(b\cdot v) = 0$. Partiendo de esta igualdad, usando 4) y una de las distributivas:

$$0 = a\cdot v-(b\cdot v) = a\cdot v+(-b)\cdot v = (a+(-b))\cdot v = (a-b)\cdot v$$

Como por hipótesis $v\neq 0$, de la propiedad 3), se sigue $a-b=0$, es decir, $a=b$. ∎

Observación 2.6. Una consecuencia inmediata de la propiedad 9) es la siguiente: *si V es un e.v. sobre un cuerpo infinito K, entonces o bien V tiene un único vector (el nulo) o bien contiene infinitos*. En efecto, supongamos que existe $v\in V$ con $v\neq 0$. Afirmamos que *la familia $L(v) := \{a\cdot v : a\in K\}$ es infinita.* De hecho, si ocurriese $a\cdot v = b\cdot v$, entonces por la propiedad 9) se tendría $a=b$. Por tanto, para diferentes valores de $a\in K$ los vectores $a\cdot v$ son distintos. Como K es infinito, entonces $L(v)$ también lo es. Y como $L(v)\subset V$, entonces V es infinito.

Ejercicio 2.7. *Demostrar que si V es un e.v. sobre K entonces se cumplen las igualdades:*

$$a\cdot(u-v) = a\cdot u-a\cdot v,$$
$$(a-b)\cdot v = a\cdot v-b\cdot v,$$

para todo $a,b\in K$ y todo $u,v\in V$.

Ejercicio 2.8. *(1) Obsérvese que el enunciado de la propiedad 6) de la proposición 2.5 sólo involucra propiedades de $(V,+)$. ¿Se puede deducir directamente de las propiedades de este grupo?*

(2) Demostrar que en un e.v. la conmutatividad de la suma de vectores es una consecuencia de los otros axiomas que aparecen en la definición.

Ejercicio 2.9. *Sea V un e.v. sobre K. Usar inducción sobre $m\in\mathbb{N}$, $m\geq 3$, para comprobar:*

$$(v_1+v_2+\ldots+v_{m-1})+v_m = v_1+(v_2+\ldots+v_{m-1}+v_m),$$

para cada familia finita $\{v_1,v_2,\ldots,v_{m-1},v_m\}$ de vectores de V. Gracias a esta propiedad y a la conmutatividad de la suma en V se sigue que podemos sumar los vectores de $\{v_1,v_2,\ldots,v_{m-1},v_m\}$ en el orden que queramos. Así, tiene sentido escribir:

$$v_1+v_2+\ldots+v_{m-1}+v_m$$

para referirnos a dicha suma.

Supongamos ahora que $a,a_1,\ldots,a_m\in K$ y $v\in V$. Demostrar por inducción:

$$a\cdot(v_1+\ldots+v_m) = a\cdot v_1+\ldots+a\cdot v_m,$$
$$(a_1+\ldots+a_m)\cdot v = a_1\cdot v+\ldots+a_m\cdot v.$$

2.1.3. Algunos ejemplos de espacios vectoriales

A continuación mostraremos diversos ejemplos que reflejan la riqueza y abundancia de espacios vectoriales en distintas ramas de las matemáticas. En cada uno indicaremos escalares, vectores, igualdad de vectores, suma de vectores y producto de escalares por vectores. Además, mostraremos cuáles son el vector cero y los vectores opuestos.

Ejemplo 2.10 (Los espacios K^n)**.** Generalizando el ejemplo de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ considerado en la observación 2.2, podemos sustituir $\mathbb{R}$ por un cuerpo (conmutativo) K cualquiera y el exponente 2 por cualquier número natural. Veámoslo explícitamente.

Sea K un cuerpo y $n \in \mathbb{N}$. Generalizando el concepto de par ordenado, una *n-upla* en K es una colección de n elementos de K separados por comas y delimitados por paréntesis, esto es, un elemento del producto cartesiano $K \times \cdots \times^{(n)} K$ (formalmente, el producto cartesiano de n conjuntos se puede definir inductivamente a partir del ya visto para dos). Así, una n-upla es de la forma $(x_1,\ldots,x_n)$ donde $x_i \in K$ para cada $i = 1,\ldots,n$. Diremos que dos n-uplas $(x_1,\ldots,x_n)$ e $(y_1,\ldots,y_n)$ son iguales si $x_i = y_i$ para cada $i = 1,\ldots,n$. Representaremos por K^n al conjunto de todas las n-uplas en K. Sobre este conjunto definimos las siguientes operaciones realizadas "coordenada a coordenada" mediante la suma y el producto de K:

$$(x_1,\ldots,x_n)+(y_1,\ldots,y_n) := (x_1+y_1,\ldots,x_n+y_n), \quad a\cdot(x_1,\ldots,x_n) := (a\cdot x_1,\ldots,a\cdot x_n).$$

Usando las propiedades de la suma y del producto en K es fácil verificar que las operaciones anteriores convierten a K^n en un e.v. sobre K, que se denotará $K^n(K)$ o simplemente K^n. Claramente, el vector nulo está dado por $(0,\ldots,0)$, mientras que el opuesto de $(x_1,\ldots,x_n)$ es $(-x_1,\ldots,-x_n)$. (Estos espacios serán muy importantes pues veremos que, en cierto sentido, son los modelos *de dimensión finita*.)

Ejercicio 2.11. *Sean V_1 y V_2 dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K. Demostrar que el producto cartesiano $V_1 \times V_2 = \{(v_1,v_2) : v_1 \in V_1,\, v_2 \in V_2\}$ es un espacio vectorial sobre K cuando se define la suma y el producto por elementos de K como:*

$$\begin{aligned}(u_1,u_2)+(v_1,v_2) &= (u_1+v_1,u_2+v_2),\\ a\cdot(v_1,v_2) &= (a\cdot v_1,a\cdot v_2),\end{aligned}$$

para todo $(u_1,u_2),(v_1,v_2) \in V_1 \times V_2$ y todo $a \in K$.

Ejercicio 2.12. *En $\mathbb{R}^3$ se considera la suma de elementos coordenada a coordenada y el producto por escalares reales dado por:*

$$a \star (x,y,z) = (a\cdot x, a\cdot y, 2016\cdot a\cdot z),$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Determínese si $\mathbb{R}^3$ con estas operaciones satisface las propiedades de un espacio vectorial real.

Ejemplo 2.13 (Espacios de matrices)**.** Sean $m,n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $M_{m\times n}(K)$ al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en K. Cada matriz A es una "expresión rectangular entre paréntesis" de elementos de K distribuidos en m filas "horizontales" y n columnas "verticales"; escribiremos $A = (a_{ij})$, donde $i \in \{1,\ldots,m\}$ es el índice de la fila, y $j = \{1,\ldots,n\}$ el de la columna (formalmente, lo que importa de la matriz es que equivale a una aplicación de $\{1,\ldots,m\}\times\{1,\ldots,n\} \to K$, $(i,j) \mapsto a_{ij}$). Cuando $m = n$ (matrices cuadradas de orden n) denotaremos a $M_{m\times n}(K)$ como $M_n(K)$. Veamos que $M_{m\times n}(K)$ se puede dotar de estructura de e.v. sobre K de manera natural.

Dadas dos matrices $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ en $M_{m\times n}(K)$ definimos $A+B$ como la matriz en $M_{m\times n}(K)$ cuyo elemento ij es $a_{ij}+b_{ij}$ (con la suma de K). Esto significa que $A+B=(a_{ij}+b_{ij})$. Por otro lado, dado $a\in K$ y $A=(a_{ij})$ en $M_{m\times n}(K)$, definimos $a\cdot A$ como la matriz en $M_{m\times n}(K)$ cuyo elemento ij es $a\cdot a_{ij}$ (con el producto de K). Esto significa que $a\cdot A=(a\cdot a_{ij})$. Vamos a probar con detalle que $M_{m\times n}(K)$ es un e.v. sobre K con las operaciones anteriores.

Veamos que la suma de matrices es asociativa. Sean $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$ y $C=(c_{ij})$ tres matrices en $M_{m\times n}(K)$. Entonces:

$$\begin{aligned}(A+B)+C&=(a_{ij}+b_{ij})+(c_{ij})=((a_{ij}+b_{ij})+c_{ij})\\&=(a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij}))=(a_{ij})+(b_{ij}+c_{ij})=A+(B+C),\end{aligned}$$

donde hemos usado cómo se suman matrices y la propiedad asociativa de la suma en K.

Veamos que la suma de matrices tiene neutro. Definimos la *matriz nula* de orden $m\times n$ como la matriz de $M_{m\times n}(K)$ cuyas entradas coinciden todas con el elemento $0\in K$. La denotaremos $0_{m\times n}$. Dada cualquier matriz $A=(a_{ij})$ en $M_{m\times n}(K)$, se tiene:

$$\begin{aligned}A+0_{m\times n}&=(a_{ij}+0)=(a_{ij})=A,\\0_{m\times n}+A&=(0+a_{ij})=(a_{ij})=A,\end{aligned}$$

donde hemos usado cómo se suman matrices y que 0 es el neutro para la suma en K.

Veamos que la suma de matrices verifica la propiedad elemento simétrico. Sea $A=(a_{ij})$ una matriz en $M_{m\times n}(K)$. La *matriz opuesta* de A es la matriz en $M_{m\times n}(K)$ definida por $-A=(-a_{ij})$. Se tiene:

$$A+(-A)=\big(a_{ij}+(-a_{ij})\big)=(0)=0_{m\times n}, \tag{2.1}$$

$$-A+A=(-a_{ij}+a_{ij})=(0)=0_{m\times n}, \tag{2.2}$$

donde hemos usado cómo se suman matrices y que $-a_{ij}$ es el opuesto de a_{ij} en K.

Veamos que la suma de matrices es conmutativa. Sean $A=(a_{ij})$ y $B=(b_{ij})$ dos matrices en $M_{m\times n}(K)$. Entonces:

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})=(b_{ij}+a_{ij})=B+A,$$

donde hemos usado cómo se suman matrices y la propiedad conmutativa de la suma en[1] K.

Comprobemos ahora la propiedad pseudoasociativa. Dados $a,b\in K$ y $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$, se tiene:

$$(a\cdot b)\cdot A=((a\cdot b)\cdot a_{ij})=(a\cdot(b\cdot a_{ij}))=a\cdot(b\cdot a_{ij})=a\cdot(b\cdot A),$$

donde hemos usado cómo se multiplican elementos de K por matrices y la propiedad asociativa del producto de K.

Comprobemos la propiedad unimodular. Dada $A=(a_{ij})\in M_{m\times n}(K)$, se tiene:

$$1\cdot A=(1\cdot a_{ij})=(a_{ij})=A,$$

donde hemos usado que 1 es el neutro para el producto en K.

[1] Obsérvese que hemos demostrado la propiedad conmutativa al final, pues esta es una propiedad adicional a la estructura de grupo. No obstante, si ésta se demuestra antes entonces se puede simplificar la demostración de la propiedad elemento neutro y elemento simétrico (por ejemplo, bajo conmutatividad bastaría con demostrar (2.1) para que también se verificara (2.2)).

Comprobemos por último las dos propiedades distributivas. Sean $a,b \in K$ y tomemos también $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ en $M_{m\times n}(K)$. Se tiene:

$$\begin{aligned}(a+b)\cdot A &= ((a+b)\cdot a_{ij}) = (a\cdot a_{ij}+b\cdot a_{ij}) = (a\cdot a_{ij})+(b\cdot a_{ij}) = a\cdot A+b\cdot A,\\ a\cdot(A+B) &= a\cdot(a_{ij}+b_{ij}) = (a\cdot(a_{ij}+b_{ij})) = (a\cdot a_{ij}+a\cdot b_{ij})\\ &= (a\cdot a_{ij})+(a\cdot b_{ij}) = a\cdot A+a\cdot B,\end{aligned}$$

donde hemos usado cómo se suman matrices, cómo se multiplican elementos de K por matrices, y la propiedad distributiva en K (obsérvese que, aunque en K sólo hay una propiedad distributiva, aquí se usa "distribuyendo la suma a la izquierda" en el primer caso y "a la derecha" en el segundo).

Todo lo anterior demuestra que $M_{m\times n}(K)$ (dotado de las operaciones naturales antes definidas y que no se especifican ahora en la notación) es un e.v. sobre K. Obsérvese que el vector nulo es la matriz $0_{m\times n}$. Además, el vector opuesto de A es la matriz $-A$ antes definida.

Ejemplo 2.14. *[Espacios de funciones]* El siguiente ejemplo es relevante en Análisis Matemático. Sea X un conjunto y K un cuerpo. Una *función* de X en K es cualquier aplicación $f : X \to K$ (la cual asociará a cada elemento $x \in X$ un único elemento $f(x) \in K$, siendo X el dominio y K el codominio de f). Como para cualesquiera aplicaciones con el mismo dominio y codominio, $f,g : X \to K$ son iguales si y sólo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$ y; en este caso, escribimos $f = g$. Representaremos por $F(X,K)$ al conjunto de todas las funciones de X en K. Veamos que $F(X,K)$ admite una estructura natural de e.v. sobre K.

Dadas dos funciones $f,g : X \to K$ definimos su suma como la función

$$f+g : X \to K, \qquad (f+g)(x) := f(x)+g(x), \qquad x \in X.$$

Dado $a \in K$ y una función $f : X \to K$ definimos su producto como la función

$$a\cdot f : X \to K, \qquad (a\cdot f)(x) := a\cdot f(x), \qquad \forall x \in X.$$

Usando las propiedades de anillo unitario de K se comprueba fácilmente que $F(X,K)$ es un e.v. sobre K con las operaciones anteriores. De hecho, el vector nulo es la *función cero* $0 : X \to K$ que asocia a cada $x \in X$ el elemento $0 \in K$. Además el vector opuesto de una funcián $f : X \to K$ es la función de X en K que asocia a cada $x \in X$ el opuesto $-f(x)$ de $f(x)$ en K.

Como caso particular, si $K = \mathbb{R}$ y $X \subset \mathbb{R}$, entonces $F(X,\mathbb{R})$ es el e.v. real de todas las *funciones reales de una variable real* definidas en X. Cuando $X = \mathbb{N}$ obtenemos el e.v. real de las *sucesiones de números reales*.

Ejercicio 2.15. *Sea X un conjunto no vacío y V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Denotamos por $F(X,V)$ al conjunto de las aplicaciones $f : X \to V$. En $F(X,V)$ se definen la suma y el producto por elementos de K siguientes:*

$$\begin{array}{ll}(f+g)(x) = f(x)+g(x), & \forall x \in X, \quad \forall f,g \in F(X,V),\\ (a\cdot f)(x) = a\cdot f(x), & \forall x \in X, \quad \forall a \in K, \quad \forall f \in F(X,V).\end{array}$$

Demostrar que, con estas operaciones, $F(X,V)$ es un espacio vectorial sobre K.

Ejemplo 2.16 (Espacios de polinomios)**.** Existen dos maneras naturales de definir los polinomios sobre un cuerpo (conmutativo) K, del cual supondremos además que tiene característica 0 (esto es, sumando su unidad iteradamente nunca se obtiene 0). La primera de ellas es como el subconjunto de todas las *aplicaciones polinómicas* de $F(K,K)$. Éstas son las aplicaciones $p \in F(K,K)$ que pueden expresarse como un *polinomio*, esto es, mediante una expresión del tipo

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \ldots + a_n \cdot x^n, \qquad \forall x \in K, \tag{2.3}$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (el valor de n puede variar con p, pero siempre es finito) y $a_i \in K$ para cada $i = 0, \ldots, n$ (se entiende que x^i significa operar x consigo mismo i veces en $(K, \cdot)$). Es fácil comprobar que las operaciones suma y producto por escalares ya definidas en $F(X,K)$ para el caso particular $X = K$, se inducen de manera natural en el conjunto de todas las aplicaciones polinómicas (esto es, si p, q son aplicaciones polinómicas y $a \in K$ entonces $p+q$ y $a \cdot p$ son aplicaciones polinómicas). Además, la aplicación cero se puede escribir como un polinomio (el polinomio nulo, que se puede escribir como $0 = 0 + 0x + \ldots + 0x^n$ para cualquier n) y el opuesto de una aplicación polinómica resulta ser también una aplicación polinómica. En consecuencia, se comprueba con facilidad que el conjunto de todas los aplicaciones polinómicas tiene una estructura de espacio vectorial.

La segunda forma de definir los polinomios es interesante especialmente en Álgebra; la explicaremos brevemente sin ahondar en consideraciones más penetrantes. Dado un cuerpo K, una *expresión polinómica* con coeficientes en K es una expresión del tipo:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n, \tag{2.4}$$

donde $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_i \in K$ para cada $i = 0, \ldots, n$ y donde $x, x^2, \ldots, x^n$ se consideran como símbolos. Se define la expresión polinómica nula como $p_0 = 0$, y diremos que una expresión polinómica no nula tiene grado n si se escribe como en (2.4) con $a_n \neq 0$. En adelante, se adopta el convenio para cualquier expresión polinómica distinta de la nula que $a_n \neq 0$ (esto es, si $a_n = 0$ no se escribe el término correspondiente $a_n x^n$ en (2.4)). Bajo este convenio, representaremos por $K[x]$ al conjunto de todas las expresiones polinómicas con coeficientes en K. Veamos que $K[x]$ tiene estructura natural de e.v. sobre K.

Dados $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ en $K[x]$ con $n \leq m$, definimos:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \ldots + (a_n + b_n) x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots + b_m x^m,$$

es decir, sumamos los monomios del mismo grado; una expresión análoga se toma si $n \geq m$. En el caso $n = m$, debe tenerse presente que tal vez $a_n + b_n = 0$, por lo que en este caso se suprime el correspondiente monomio de la expresión (esta precaución hay que tenerla en cuenta de nuevo para la nueva expresión polinómica si $a_{n-1} + b_{n-1} = 0$, y así sucesivamente). Dados $a \in K$ y un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ en $K[x]$, definimos:

$$a \cdot p(x) = (a \cdot a_0) + (a \cdot a_1) x + \ldots + (a \cdot a_n) x^n$$

(en el caso $a = 0$ se entiende consistentemente $a.p(x) = p_0$). No es difícil comprobar que, con las operaciones anteriores, $K[x]$ es un e.v. sobre K. El vector cero es la expresión polinómica nula p_0, mientras que el opuesto de una expresión polinómica $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ es la expresión $-a_0 - a_1 x - \ldots - a_n x^n$.

Observación 2.17. Es interesante observar que en los los ejemplos anteriores la suma y el producto de escalares por vectores se construyen a partir de la suma y del producto en K. De hecho, las propiedades de las operaciones de e.v. se deducen a partir de las propiedades de anillo unitario que cumple K.

Observación 2.18. En la definición de e.v., la importancia del cuerpo K queda de manifiesto en lo siguiente: un mismo conjunto puede ser un e.v. sobre diferentes cuerpos para la misma operación suma. Por ejemplo, sabemos que, de manera natural, $\mathbb{C}$ admite una estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, la cual denotamos $\mathbb{C}(\mathbb{C})$ (véase el ejemplo 2.10 con $K = \mathbb{C}$ y $n = 1$). No obstante, de manera natural, $\mathbb{C}$ también admite una estructura de e.v. real, que denotaremos $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, definida como sigue. En primer lugar, consideramos siempre su suma natural, esto es, dados $z = x+yi$ y $w = x'+y'i$ en $\mathbb{C}$, la suma está dada por:

$$z+w = (x+x')+(y+y')\,i.$$

Claramente, $(\mathbb{C},+)$ es un grupo abeliano (de hecho, esto lo sabíamos de las propiedades de $\mathbb{C}$ como cuerpo). Definimos ahora el producto por escalares reales como la ley de composición externa $\mathbb{R}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, que a cada $a\in\mathbb{R}$ y $z = x+yi\in\mathbb{C}$ proporciona $a\cdot z := (a\cdot x)+(a\cdot y)\,i$ (esta ley de composición externa no es más que la restricción a $\mathbb{R}\times\mathbb{C}$ del producto en $\mathbb{C}$, el cual servía a su vez como ley de composición externa para $\mathbb{C}(\mathbb{C})$). Con estas operaciones es fácil comprobar que $\mathbb{C}$ es un e.v. real.

Esta observación es general para los cuerpos $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$: manteniendo la *misma operación suma* $+$, todo espacio vectorial real $(V,+,\cdot\mathbb{R})$ genera un espacio vectorial sobre $\mathbb{Q}$, sin más que *restringir el dominio de la ley de composición externa* $\cdot:\mathbb{R}\times V\to V$ al subconjunto $\mathbb{Q}\times V\subset\mathbb{R}\times V$); análogamente, todo espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ genera uno sobre $\mathbb{R}$ (y, por tanto, sobre $\mathbb{Q}$). Más adelante veremos que hay mucha diferencia entre estas estructuras de e.v. sobre diferentes cuerpos.

Nota 2.19 (Vectores libres en el plano y el espacio)**.** Como un último ejemplo, consideremos los vectores libres que el alumno conocerá de manera intuitiva desde la enseñanza secundaria. Se define un vector *ligado* (o *fijo*) en el plano como un segmento de recta orientado, el cual está delimitado por dos puntos, llamados origen y extremo. Este segmento tiene una dirección (la de la recta que lo contiene) un sentido (proporcionado por el orden en el que se dan su origen y extremo) y una longitud. Cuando dos vectores ligados tienen igual dirección (están contenidos en rectas paralelas), sentido y longitud (aunque tal vez distinto origen y extremo), se dice que determinan un *vector libre*.

El conjunto $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ de los vectores libres del plano, admite una suma y producto por escalares que le confieren una estructura de e.v. Concretamente, dados dos vectores libres $\overrightarrow{u}$ y $\overrightarrow{v}$, su suma $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$ es el vector libre asociado a un vector ligado cuyo origen es el origen de cualquier vector ligado asociado a $\overrightarrow{u}$ y cuyo extremo es el extremo de un vector ligado asociado a $\overrightarrow{v}$ para el cual se toma como origen de $\overrightarrow{v}$ el extremo de $\overrightarrow{u}$. Por otro lado, si $a\in\mathbb{R}$ y $\overrightarrow{v}$ es un vector libre, se define $a\cdot\overrightarrow{v}$ como el vector libre con la misma dirección de $\overrightarrow{v}$, el mismo sentido si $a\geq 0$ o sentido contrario si $a<0$, y cuya longitud es la de $\overrightarrow{v}$ multiplicada por $|a|$. Con estas operaciones, $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ se convierte en un e.v. real. El vector nulo de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ es el vector libre de longitud 0 (el asociado a cualquier vector ligado donde el origen y el extremo coinciden). Además, el opuesto de un vector $\overrightarrow{v}$ es el vector libre asociado a cualquier vector con la misma dirección, la misma longitud y sentido contrario. Una construcción análoga lleva permite definir los vectores libres del espacio $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$.

Esta definición del plano y espacio de vectores libres es suficiente para nuestros propósitos, por lo que basta con que el lector la tenga en mente desde el punto intuitivo explicado. No obstante, merece la pena detenerse en dos cuestiones sobre este concepto. La primera es que el concepto de "longitud" (a veces llamado "módulo") del vector precisa de una manera de medir vectores, de modo que en nestr introducción de los vectores libres se presupone esta posibilidad de medición. No obstante, ello se podría esquivar a partir de la noción de "paralelismo" que se usa para la definición de la dirección de vector libre (p.ej., dos vectores ligados generan un mismo vector libre cuando al unir sus extremos con un segmento y sus extremos con otro se genera un paralelogramo). La segunda es que cuando se dice que dos vectores ligados que verifican ciertas propiedades "determinan un mismo vector libre" lo que se hace desde el punto de vista formal es definir los vectores libres como clases de equivalencia por una relación de equivalencia (a la que se le llama relación de equipolencia). La suma de vectores libres antes introducida es una suma de clases de equivalencia, llevada a cabo escogiendo representantes de esa clase (dos vectores ligados con el mismo origen), sumando esos representantes (un nuevo vector ligado con ese origen) y tomando a continuación su clase (un vector libre, que resulta ser independiente del origen escogido en la elección de los vectores ligados).

Por completitud, describimos intuitivamente con más detalle el proceso anterior, sin más pretensiones. Para ello consideraremos un plano Π en el que suponemos que las propiedades intuitivas de paralelismo conocidas de geometría elemental pueden llevarse a cabo. Escogido un punto $P_0 \in \Pi$, llamaremos *vector ligado* de origen P_0 y extremo $P \in \Pi$ al segmento orientado $\overline{P_0P}$ que empieza en P_0 y termina en P (formalmente este segmento queda caracterizado como el par $(P_0, P) \in \Pi \times \Pi$). En el conjunto V_{P_0} de los vectores ligados en P_0, se define la suma como $\overline{P_0P} + \overline{P_0Q} := \overline{P_0R}$, donde R es el único punto de Π obtenido como cuarto vértice para el paralelogramo construido a partir de los lados $\overline{P_0P}$ y $\overline{P_0Q}$ (entendiéndose que los otros tres vértices son P_0, P, Q, y que el paralelogramo puede degenerar en un segmento o un punto). Para definir un producto por escalares (sobre $\mathbb{Q}$ ó $\mathbb{R}$), empezaremos definiendo $n \cdot \overline{P_0P}$ para $n \in \mathbb{N}$ trasladando paralelamente el segmento $\overline{P_0P}$ hasta hacer coincidir su origen con P y repitiendo análogamente la operación n veces. Definimos $-\overline{P_0P}$ trasladando paralelamente el vector ligado $\overline{PP_0} \in V_P$ hasta hacer coincidir su origen con P_0; esto permite además definir naturalmente $p \cdot \overline{P_0P}$ para $p \in \mathbb{Z}$. En Geometría elemental, el teorema de Tales permite dividir un segmento en $n \in \mathbb{N}$ partes, lo cual conduce a una definición natural de $(1/n) \cdot \overline{P_0P}$ para $n \in \mathbb{N}$ y, de manera inequívoca, a definir $r \cdot \overline{P_0P}$ para $r \in \mathbb{Q}$. Si se quiere extender intuitivamente este producto por escalares para todo $r \in \mathbb{R}$, podemos aproximar r por números racionales r_n, y tomar $r \cdot \overline{P_0P}$ como límite de los $r_n \cdot \overline{P_0P}$. Las propiedades elementales del paralelismo (eventualmente convenientemente axiomatizadas) permiten justificar que, con las anteriores operaciones, $(V_{P_0}, +, \cdot K)$ admite una estructura de espacio vectorial para $K = \mathbb{R}$ (y también para $K = \mathbb{Q}$, tanto por la construcción anterior como por la observación 2.18).

A partir de los anteriores espacios de vectores ligados, se llega al concepto de vector libre como sigue. Consideramos el conjunto de todos los vectores ligados

$$Vlig := \{\overline{P_0P} : P_0, P \in \Pi\}.$$

A continuación, se define la siguiente relación binaria, o *relación de equipolencia*, $\sim_e$ en $Vlig$:

$$\overline{P_0P} \sim_e \overline{Q_0Q} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{el cuadrilátero que generan con } \overline{P_0Q_0} \text{ y } \overline{PQ} \text{ es un paralelogramo,}$$

para todo $\overline{P_0P}, \overline{Q_0Q} \in Vlig$. Las propiedades del paralelismo permiten asegurar que $\sim_e$ es una relación de equivalencia. A cada clase de equivalencia $[\overline{P_0P}]$ se le llama *vector libre* y el conjunto cociente

$$Vlib := Vlig/\sim_e$$

es el *conjunto de los vectores libres* del plano Π. En este espacio se define la operación suma

$$[\overline{P_0P}] + [\overline{Q_0Q}] := [\overline{R_0R_P} + \overline{R_0R_Q}]$$

donde R_0 es cualquier punto de Π y R_P, R_Q se escogen de modo que

$$\overline{R_0R_P} \in [\overline{P_0P}], \qquad \overline{R_0R_Q} \in [\overline{Q_0Q}].$$

De nuevo, las propiedades del paralelismo aseguran que esta definición es consistente; de hecho, el vector libre suma resulta independiente del punto R_0 que se escoja en Π para tomar los vectores ligados en R_0 que representen las clases $[\overline{P_0P}]$ y $[\overline{Q_0Q}]$. Análogamente, se define el producto por escalares:

$$a \cdot [\overline{P_0P}] := [a \cdot \overline{P_0P}]$$

para todo $a \in \mathbb{R}$ y $[\overline{P_0P}] \in Vlib$ (el cual resulta ser independiente de que se tome cualquier otro representante $\overline{R_0R_P}$ de la clase $[\overline{P_0P}]$). Con las operaciones anteriores, el conjunto $Vlib$ de los vectores libres resulta ser un espacio vectorial real. Como notación habitual, cada clase $[\overline{P_0P}]$ se escribe $\overline{P_0P}$ o simplemente se usan letras como hicimos al principio, $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$. La construcción es generalizable a los *vectores libres del espacio.*

Sin embargo, no insistiremos en ejemplos como éstos, al exigir su desarrollo conceptos más allá de los que hemos definido con precisión. Además, cuando se profundice en Geometría (Geometría III) se estudiará el concepto de *espacio afín* A, el cual permite una representación sencilla de $Vlib$ a partir del espacio vectorial director V asociado a A. No obstante, conviene tener presente ejemplos intuitivos como éste (o provenientes de la Física, como el espacio vectorial de las velocidades de un móvil) para una mejor comprensión del significado y aplicaciones de los espacios vectoriales.

2.2. Subespacios vectoriales

Una vez definido el concepto de espacio vectorial vamos a introducir otra de las nociones fundamentales de esta asignatura: la de subespacio vectorial. Intuitivamente, si $V(K)$ es un e.v y U es un subconjunto de V, parece lógico decir que U es un subespacio vectorial de V si U hereda de forma natural la estructura de e.v. de V, es decir, si se puede definir en U una estructura de e.v. sobre K a partir de la estructura ya existente en V. En esta sección nos ocuparemos de estudiar esta noción, así como de mostrar varios ejemplos y métodos de construcción de subespacios vectoriales.

2.2.1. Definición, caracterizaciones y ejemplos

Consideraremos en adelante un e.v. V sobre un cuerpo K y, como siempre, denotaremos por $+$ y por $\cdot$ a la suma de vectores en V y al producto de escalares por vectores, resp.

Definición 2.20. *Sea $U \subset V$ un subconjunto de V. Diremos que U es un* subespacio vectorial *(s.v.) o una* subvariedad lineal *de $V(K)$ si se verifican:*

(i) *La operación suma $+ : V \times V \to V$ en V se puede restringir a U, esto es: para todo $u, v \in U$ se tiene $u + v \in U$ (se dice entonces que U es* cerrado para $+$*).*

En consecuencia, se induce una operación $+_U : U \times U \to U, (u, u') \mapsto (u + u')$ que, en adelante, denotaremos con el mismo símbolo $+$ que la suma en U.

(ii) *El producto por escalares $\cdot : K \times V \to V$ en $V(K)$ se puede restringir a U, esto es, para todo $a \in K$ y $u \in U$, entonces $a \cdot u \in U$ (U es cerrado para $\cdot$).*

En consecuencia, se induce una ley de composición externa $\cdot_U : K \times U \to U, (a, u) \mapsto a \cdot u$ que, en adelante, denotaremos con el mismo símbolo $\cdot$ que la suma en $V(K)$.

(iii) *Las operaciones en U definidas en (i) y (ii) cumplen todas las propiedades de un e.v.*

En resumen, U es un s.v. de V si las operaciones de $V(K)$ se pueden restringir a U y, entonces, U es un e.v. con estas operaciones restringidas.

La definición anterior aunque es clara no resulta muy práctica, pues hay que comprobar numerosas propiedades. No obstante, vamos a demostrar que es suficiente con verificar (i) y (ii) (esto es, que se puedan restringir las operaciones a U) y que U no es vacío para tener un s.v., lo cual resultará mucho más sencillo de aplicar sobre ejemplos concretos.

Proposición 2.21. *Sea $V(K)$ un e.v. y $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Se verifica que U es un s.v. de $V(K)$ si y sólo si se cumplen estas dos propiedades:*

(i) Si $u, v \in U$, entonces $u+v \in U$,

(ii) Si $a \in K$ y $u \in U$, entonces $a \cdot u \in U$.

Demostración. Supongamos primero que U es un s.v. de V. Necesariamente, U cumple (i), (ii) y (iii) de la definición de s.v. por lo que, en particular, cumple las propiedades (i) y (ii) del enunciado.

Recíprocamente, supongamos que U cumple (i) y (ii). Para demostrar que U es un s.v. de V basta entonces con demostrar que se cumple (iii), es decir, que las restricciones de $+$ y $\cdot$ al subconjunto U cumplen todas las propiedades de la definición de e.v.

Empecemos con demostrar la estructura de grupo conmutativo de $(U,+)$. La asociatividad de $(U,+)$ significa que $(u+v)+w = u+(v+w)$, para todo $u, v, w \in U$. Ahora bien, esto es inmediato, pues sabemos que esta igualdad se cumplía para cualesquiera $u, v, w \in V$ estén o no en U), por ser V un e.v. Análogamente se comprueba que la suma en U es conmutativa.

Ahora nos preguntamos si la suma en U tiene un neutro, es decir, buscamos $e \in U$ tal que $u+e = e+u = u$, para cada $u \in U$. Si demostramos que el vector 0 de V tiene que estar en U, entonces bastará con tomar $e = 0$ (al ser 0 el neutro de la suma en todo V, también lo será en U). Para probar que $0 \in U$, basta con tomar cualquier $u \in U$ (obsérvese que U no era vacío por hipótesis) y observar que $0 = 0 \cdot u$ en $V(K)$. Usando (ii) se sigue que $0 \in U$.

Veamos que la suma de U tiene opuestos. Sea $u \in U$. Queremos encontrar $v \in U$ tal que $u+v = v+u = 0$. Si probamos que $-u$ (el opuesto de u en V) está en U, entonces bastará con tomar $v = -u$ para acabar. Pero esto es consecuencia de (ii), pues $-u = (-1) \cdot u$.

Las propiedades que quedan por comprobar (pseudoasociativa, unimodular y distributivas) se demuestran igual que la asociativa y la conmutativa de la suma. Concretamente, como estas propiedades son válidas en V, y las operaciones que consideramos en U se obtienen al restringir las de V, entonces también se cumplen en U. ∎

Podemos incluso unificar las dos propiedades anteriores, unificándolas en una única como sigue.

Proposición 2.22. *Sea $V(K)$ un e.v. y $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Se verifica que U es un s.v. de $V(K)$ si y sólo si se cumplen la siguiente propiedad:*

$$a \cdot u + b \cdot v \in U, \quad \text{para todo } a, b \in K \text{ y todo } u, v \in U. \tag{2.5}$$

Demostración. Basta con comprobar que esta propiedad se verifica si y sólo si se cumplen las propiedades (i) y (ii) en la proposición 2.21 anterior.

($\Rightarrow$) Vamos a deducir a partir de (i), (ii) la propiedad escrita en (2.5). Sean $a, b \in K$ y $u, v \in U$. Por la propiedad (ii) sabemos que $a \cdot u$ y $b \cdot v$ pertenecen a U. Por la propiedad (i) sabemos que la suma de $a \cdot u$ y $b \cdot v$ también pertenece a U, esto es, $a \cdot u + b \cdot v \in U$, como se quería.

($\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que se cumple (2.5) y comprobemos que se satisfacen (i) y (ii). Para (i), sean $u, v \in U$, y nos preguntamos si $u+v \in U$. Esto se cumple porque $u+v = 1 \cdot u + 1 \cdot v$, y esta última expresión pertenece a U gracias a (2.5). Para (ii) sea ahora $a \in K$ y $u \in U$ y comprobemos que $a \cdot u \in U$. Esto se cumple porque $a \cdot u = a \cdot u + 0 = a \cdot u + 0 \cdot u$, y esta última expresión pertenece a U gracias a (2.5). ∎

Ejercicio 2.23. *Demuéstrese que un subconjunto U no vacío de $V(K)$ es un s.v. si y sólo si verifica:*

$$a \cdot u + v \in U, \quad \text{para todo } a \in K \text{ y todo } u, v \in U. \tag{2.6}$$

Observación 2.24 (Criterio del vector nulo)**.** Obsérvese que si $V(K)$ es un espacio vectorial entonces V no puede ser el conjunto vacío (pues $V(,+)$ debe tener un elemento neutro). Por tanto, ningún s.v. puede ser vacío (esta propiedad se deduce sin imponerla de la definición de subespacio, aunque se debe imponer en las proposiciones 2.21, 2.22). Más aún, en la demostración de la proposición 2.21 se puso de manifiesto el siguiente hecho: si U es un s.v. de V, entonces $0 \in U$. Esto significa que todos los subespacios vectoriales de un e.v. deben contener forzosamente al vector cero. En particular, podemos afirmar que si $0 \notin U$, entonces U no es un s.v. de V.

Ejemplo 2.25. El criterio anterior nos dice que la propiedad de ser s.v. es restrictiva. De hecho, dentro de un e.v. hay "pocos" subespacios vectoriales. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$ algunos subconjuntos sencillos como la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ o la recta de ecuación $y = x + 1$ no son subespacios vectoriales, pues no contienen al vector nulo de $\mathbb{R}^2$.

Ejemplo 2.26. Por supuesto, sería un error aplicar el criterio del vector nulo afirmando que si $0 \in U$ entonces U es un s.v. Esta afirmación NO es cierta en general, como muestra el siguiente contraejemplo. En $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ tomamos el subconjunto $U = \{(0,0),(1,0)\}$. Es claro que U contiene al vector nulo de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, se puede probar de varias maneras que U no es un s.v. de $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, si tomamos $u = (1,0) \in U$, entonces $2 \cdot u = (2,0) \notin U$, con lo que falla la propiedad (ii) en la proposición 2.21 (la cual coincidía con la (ii) en la definición de s.v.). Con más generalidad, U no puede ser un subespacio vectorial porque tiene dos vectores y sabemos que todo e.v. real con más de un vector debe tener infinitos vectores (observación 2.6).

Algunos ejemplos de subespacios vectoriales

Ejemplo 2.27 (Subespacios vectoriales impropios)**.** Todo e.v $V(K)$ tiene siempre dos subespacios vectoriales especiales, que son $U = \{0\}$ y $U = V$. Estos subespacios se llaman *impropios*. Todo s.v. de V que no sea uno de los anteriores se llamará *propio*. (Por supuesto, los subespacios impropios son distintos en todo espacio vectorial excepto en el e.v. trivial $V = \{\,0\}$.)

Ejemplo 2.28 (Rectas y planos)**.** Usando la Proposición 2.21 es fácil comprobar que en $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ las rectas que pasan por el origen son subespacios vectoriales. Análogamente, las rectas y planos de $\mathbb{R}^3$ que pasan por el origen son s.v. de $\mathbb{R}^3$. Las rectas y planos que no contienen al origen no son s.v. de $\mathbb{R}^3$: se llaman *subespacios afines* (y se estudiarán en otras partes de Geometría).

El siguiente ejemplo servirá para poner de manifiesto la relevancia del cuerpo K cuando hablamos de subespacios vectoriales.

Ejemplo 2.29 (Dependencia con el cuerpo)**.** Sabemos que $\mathbb{C}$ admite las estructuras de e.v. real $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ y de e.v. complejo $V(\mathbb{C})$. Veamos que las diferentes estructuras de e.v. se reflejan en los posibles subespacios vectoriales.

Sea $U = \{b\,i : b \in \mathbb{R}\}$ la familia de números complejos imaginarios (aquellos cuya parte real se anula). Veamos que U *es un s.v. de* $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, usando la Proposición 2.21. Claramente U no es vacío ($0 \in U$), y sean $u = b\,i$ y $v = b'\,i$ vectores en U. Entonces $u + v = (b + b')\,i$, que también pertenece a U. Del mismo modo, si $u = b\,i \in U$ y $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \cdot u = (a \cdot b)\,i$, que pertenece a U.

Sin embargo, U *no es un s.v. de* $\mathbb{C}(\mathbb{C})$. En efecto; si lo fuera, se deberá cumplir que $a \cdot u \in U$ para cada $a \in \mathbb{C}$ y cada $u \in U$. Para ver que esta propiedad falla, basta tomar $a = i \in \mathbb{C}$ y $u = i \in U$; de hecho, se cumple $a \cdot u = i \cdot i = i^2 = -1 \notin U$.

Ejemplo 2.30 (Polinomios de grado menor o igual que n)**.** Recordemos (ejemplo 2.16) que $K[x]$ es el e.v. sobre K cuyos vectores son los polinomios en la variable x con coeficientes en un cuerpo K. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos:

$$\begin{aligned} K_n[x] &= \{p(x) \in K[x] \,:\, \text{grado}(p(x)) \leq n\} \\ &= \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n \,:\, a_i \in K, \forall i = 0, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Veamos que $K_n[x]$ es un s.v. de $K[x]$. Usaremos la Proposición 2.22. Sean $a, b \in K$ y $p(x), q(x) \in K_n[x]$. Si escribimos $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x_n$ y $q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x_n$, entonces resulta claro que:

$$a \cdot p(x) + b \cdot q(x) = (a \cdot a_0 + b \cdot b_0) + (a \cdot a_1 + b \cdot b_1)x + \ldots + (a \cdot a_n + b \cdot b_n)x^n,$$

que, obviamente, pertenece a $K_n[x]$.

Los siguientes tres ejemplos muestran espacios de sucesiones y funciones que aparecen en Análisis Matemático. Cada uno de ellos pueden verse como un subespacio de un e.v. $F(X, K)$ (ejemplo 2.14) para una elección apropiada de X con $K = \mathbb{R}$

Ejemplo 2.31 (Subespacio de sucesiones convergentes)**.** Sea $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ el e.v. real de las sucesiones de números reales. Sea $U \subset F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ el subconjunto formado por las sucesiones convergentes. Propiedades elementales de Analisis Matemático demuestran que las proposiciones 2.21, 2.22 son aplicables a U, por lo que U resulta ser un s.v. de $F(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.32 (Subespacios de funciones continuas y derivables)**.** Sea $F(I, \mathbb{R})$ el e.v. real de las funciones $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo de $\mathbb{R}$ que contenga más de un punto. Dentro de $F(I, \mathbb{R})$ consideramos los subconjuntos U y W formados, respectivamente, por las funciones continuas y por las derivables en todo I. Propiedades elementales de Analisis Matemático demuestran que las proposiciones 2.21, 2.22 son aplicables a U y W, por lo que ambos resultan ser son subespacios vectoriales de $F(I, \mathbb{R})$.

Ejemplo 2.33 (Subespacios de funciones integrables)**.** Sea $F([a, b], \mathbb{R})$ el e.v. real de las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dentro de $F([a, b], \mathbb{R})$ consideramos el subconjunto U formado por las funciones acotadas e integrables. Propiedades elementales de Analisis Matemático demuestran que las proposiciones 2.21, 2.22 son aplicables a U, por lo que U resulta ser un s.v. de $F([a, b], \mathbb{R})$.

Ejemplos en SEL y matrices simétricas/antisimétricas

Por su importancia en nuestros objetivos de Geometría, detallemos algunos ejemplos de subespacios vectoriales como los obtenidos en K^n como solución a un SEL homogéneo o los subespacios de las matrices cuadradas formados por las matrices simétricas y por las antisimétricas.

Ejemplo 2.34 (Subespacio de soluciones de un SEL homogéneo)**.** Sea K un cuerpo. Consideremos un SEL de m ecuaciones y n incógnitas con coeficientes en K:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right. .$$

Sea U el subconjunto de K^n formado por todas las soluciones del SEL. Una condición necesaria para que U sea un s.v. de K^n es que $(0, \ldots, 0) \in U$. Ahora bien, esto ocurrirá si y sólo si $b_1 = \ldots = b_m = 0$, es decir, el SEL es homogéneo. En tal caso, no es difícil verificar mediante la Proposición 2.22 que U es un s.v. de K^n, al cual llamaremos *subespacio de soluciones del* SEL.

Con más detalle, supongamos que $a,b \in K$ y $u = (\alpha_1,\dots,\alpha_n), v = (\beta_1,\dots,\beta_n) \in U$. Queremos dempstrar que el vector $a\cdot u + b\cdot v = (a\cdot\alpha_1 + b\cdot\beta_1,\dots,a\cdot\alpha_n + b\cdot\beta_n)$ está en U. Fijamos un índice $i = 1,\dots,m$ y comprobamos que se cumple la ecuación i-ésima:

$$\begin{aligned} &a_{i1}\,(a\cdot\alpha_1 + b\cdot\beta_1) + \ldots + a_{in}\,(a\cdot\alpha_n + b\cdot\beta_n) \\ &= a\,(a_{i1}\,\alpha_1 + \ldots + a_{in}\,\alpha_n) + b\,(a_{i1}\,\alpha_1 + \ldots + a_{in}\,\alpha_n) = 0, \end{aligned}$$

donde se han usado propiedades del cuerpo K, así como que $u,v \in U$. Esto demuestra que $a\cdot u + b\cdot v$ es una solución de todas las ecuaciones del SEL, es decir, $a\cdot u + b\cdot v \in U$.

La moraleja que podemos extraer de este ejemplo es la siguiente: las soluciones de un SEL homogéneo no se distribuyen de cualquiera manera dentro de K^n, sino que lo hacen de forma que resulte un s.v. de K^n. Volveremos a esta cuestión más adelante cuando hablemos de las ecuaciones cartesianas de un s.v. de K^n.

Observación 2.35. En general, si tenemos un sistema de m ecuaciones *no lineales* con coeficientes en K y n incógnitas que sea homogéneo en el sentido de que incluya al vector nulo como una solución, entonces el conjunto de soluciones U puede ser o no un s.v. de K^n. Por ejemplo $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}$ no es un s.v. de $\mathbb{R}^2$. Para comprobarlo, basta con observar que los vectores $u = (1,1)$ y $v = (2,4)$ están en U, mientras que $u+v = (3,5)$ no lo está. Por otro lado, $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0,0)\}$, que sí es un s.v. (impropio) de $\mathbb{R}^2$.

Observación 2.36. En el caso de que el cuerpo no fuera conmutativo (por lo que $K^n(K)$ sería un espacio vectorial por la izquierda, véase la observación 2.2(5)) ¿seguiría siendo cierto que las soluciones de un SEL homogéneo forman un subespacio vectorial? (Suger.: obsérvese que no se tiene el mismo SEL si se multiplican los coeficientes a la derecha de las incógnitas que si se hace a la izquierda).

Ejemplo 2.37 (Matrices simétricas y antisimétricas como subespacios de $M_n(K)$)**.** Sean $m,n \in \mathbb{N}$ y K un cuerpo. Dada una matriz $A = (a_{ij})$ en $M_{m\times n}(K)$, se define la *matriz traspuesta* de A como la matriz A^t en $M_{n\times m}(K)$ cuyas filas se obtienen escribiendo ordenadamente las columnas de A. Esto significa que el escalar en la posicián ij de A^t es a_{ji}, es decir, si $A = (a_{ij})$ entonces $A^t = (a_{ji})$. A partir de la definición es fácil comprobar que la trasposición de matrices define una aplicación

$$^t : M_{m\times n}(K) \to M_{n\times m}(K), \qquad A \mapsto A^t$$

que cumple las siguientes propiedades:

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$, para cada $A,B \in M_{m\times n}(K)$,

2) $(a\cdot A)^t = a\cdot A^t$, para cada $a \in K$ y cada $A \in M_{m\times n}(K)$,

3) $(A^t)^t = A$, para cada $A \in M_{m\times n}(K)$.

En efecto, para 1) si llamamos $C := A+B$, sabemos que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. De este modo, el escalar ij de C^t es $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$. Por tanto, $(A+B)^t = C^t = (a_{ji}) + (b_{ji}) = A^t + B^t$. Para 2) llamemos ahora $C = a\cdot A$. Sabemos que $c_{ij} = a\cdot a_{ij}$. Así, el elemento ij de C^t es $c_{ji} = a\cdot a_{ji}$. Por tanto, $(a\cdot A)^t = C^t = (a\cdot a_{ji}) = a\cdot(a_{ji}) = a\cdot A^t$. Finalmente para 3), llamemos $C = A^t$. Sabemos que $c_{ij} = a_{ji}$. Así, el elemento ij de C^t es $c_{ji} = a_{ij}$. De aquí se concluye que $C^t = C$.

Las propiedades 1) y 2) se resumen diciendo que "la trasposición de matrices es lineal" (esta terminología se aclarará en el tema siguiente).

En lo sucesivo trabajaremos en el espacio $M_n(K)$ de las matrices cuadradas de orden n con coeficientes en K. Obsérvese que para matrices cuadradas se tiene

$$^t : M_n(K) \to M_n(K), \qquad t \circ t = I_{M_n(K)} \text{ (aplicación identidad en } M_n(K)), \quad \text{esto es, } t^{-1} = t.$$

(¿Es cierta esta última igualdad si las matrices no son cuadradas?)

Diremos que una matriz $A = (a_{ij})$ en $M_n(K)$ es *simétrica* si $A^t = A$ (nótese que esto sólo tiene sentido para matrices cuadradas). Esto significa que $a_{ji} = a_{ij}$, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, es decir, no hay ninguna restricción sobre los elementos diagonales a_{ii} que constituyen la *diagonal principal* de la matriz cuadrada, pero la parte de la matriz "por debajo de la diagonal principal" tiene que coincidir con la parte "por encima de la diagonal principal". Ejemplos triviales de matrices simétricas son la matriz nula 0_n y la matriz identidad I_n. De hecho, toda matriz diagonal $A = (a_{ij})$ (esto es, tal que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$) es simétrica.

Diremos que una matriz $A = (a_{ij})$ en $M_n(K)$ es *antisimétrica* si $A^t = -A$. Esto significa que $a_{ji} = -a_{ij}$, para cada $i, j = 1, \ldots, n$, es decir, la parte de la matriz "por debajo de la diagonal principal" es opuesta a la parte "por encima de la diagonal principal". Además, debe ocurrir $a_{ii} = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$ en el caso de que K sea un cuerpo con *característica distinta de 2*, esto es, en donde se tenga $1 + 1 \neq 0$ (como ocurre en $\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ó $\mathbb{C}$). La matriz 0_n es antisimétrica, mientras que I_n no lo es. En general, una matriz $A \in M_n(K)$ no será simétrica ni antisimétrica.

Para denotar a los conjuntos de matrices simétricas y antisimétricas escribiremos:

$$S_n(K) = \{A \in M_n(K) : A^t = A\} \qquad A_n(K) = \{A \in M_n(K) : A^t = -A\}.$$

Es fácil demostrar que $S_n(K)$ *y* $A_n(K)$ *son s.v. de* $M_n(K)$. Lo comprobaremos solamente para $S_n(K)$ (la prueba para $A_n(K)$ es análoga y se deja como ejercicio). Para ello emplearemos la Proposición 2.22. Sean $a, b \in K$ y $A, B \in S_n(K)$. Queremos comprobar que $a \cdot A + b \cdot B \in S_n(K)$, es decir, $(a \cdot A + b \cdot B)^t = a \cdot A + b \cdot B$. Esto es cierto por la siguiente cadena de igualdades:

$$(a \cdot A + b \cdot B)^t = (a \cdot A)^t + (b \cdot B)^t = a \cdot A^t + b \cdot B^t = a \cdot A + b \cdot B,$$

donde hemos usado las propiedades 1) y 2) de la trasposición de matrices, así como las igualdades $A^t = A$ y $B^t = B$ que se verifican porque $A, B \in S_n(K)$.

2.2.2. Subespacio generado por una familia de vectores

En esta sección mostraremos un método para construir de forma rápida subespacios vectoriales de cualquier espacio vectorial. Empezaremos también a vislumbrar la idea fundamental en la teoría de espacios vectoriales consistente en que una cantidad "pequeña" (finita en muchos de los casos que nos interesarán) de vectores puede generar todo el espacio vectorial.

Comenzaremos con un ejemplo motivador. En $\mathbb{R}^3$ consideramos el subconjunto dado por $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + 3z = 0\}$. Como U es el conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea entonces U es un s.v. de $\mathbb{R}^3$ (de hecho, se sabe por la enseñanza secundaria que una ecuación cartesiana no trivial con tres incógnitas define un plano en $\mathbb{R}^3$). Nos preguntamos ahora cómo se pueden describir expresamente todos los vectores de U. Esto nos lleva a calcular todas las soluciones de la ecuación $x - 2y + 3z = 0$. Si ponemos $y = \lambda$ y $z = \mu$, entonces $x = 2\lambda - 3\mu$. Por tanto, todos los vectores de U son de la forma (x, y, z) con $x = 2\lambda - 3\mu$, $y = \lambda$ y $z = \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dicho de otro modo:

$$U = \{(2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\},$$

que nos da una descripción de los vectores de U en función de los parámetros reales λ y μ. Ahora, si en la expresión de los vectores de U "separamos los parámetros", tenemos que:

$$(2\lambda - 3\mu, \lambda, \mu) = (2\lambda, \lambda, 0) + (-3\mu, 0, \mu) = \lambda \cdot (2,1,0) + \mu \cdot (-3,0,1).$$

La última igualdad nos permite expresar U como:

$$U = \{\lambda \cdot (2,1,0) + \mu \cdot (-3,0,1) \,|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Esto significa que U está formado exactamente por los vectores de $\mathbb{R}^3$ que se obtienen a partir de sólo dos de ellos, el $(2,1,0)$ y el $(-3,0,1)$, cuando los multiplicamos por escalares reales y sumamos. Dicho de otro modo, usando solo los vectores $(2,1,0)$ y $(-3,0,1)$ podemos recuperar o generar todos los demás vectores de U mediante la suma y el producto por escalares (las operaciones de $\mathbb{R}^3$ como espacio vectorial real). Tiene sentido entonces decir que U es el *plano vectorial generado* por $(2,1,0)$ y $(-3,0,1)$. No es difícil dibujar esta situación en $\mathbb{R}^3$ (o pensarla en el espacio de vectores libres del espacio) para tener una visión geométrica de lo que estamos haciendo.

Lo anterior sirve como motivación para las siguientes definiciones.

Definición 2.38. *Sea $V(K)$ un e.v. y $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una familia finita no vacía de vectores de V. Una* combinación lineal *(c.l.) de S es cualquier vector de V obtenido al multiplicar cada v_i por un escalar $a_i \in K$ y después sumar los vectores resultantes. Dicho de otro modo, es cualquier vector de V que se puede escribir como:*

$$a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_m \cdot v_m, \quad \text{donde } a_i \in K, \forall i = 1, \ldots, m.$$

Llamaremos $L(S)$ al subconjunto de V formado por los vectores obtenidos como c.l. de S:

$$L(S) = L(v_1, \ldots, v_m) = \{a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_m \cdot v_m \,:\, a_i \in K, \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Por tanto, dado $v \in V$, se tiene que $v \in L(S)$ si y sólo si existen escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_m \cdot v_m$.

Cuando $S \subset V$ es cualquier familia no vacía de vectores definimos $L(S)$ como el subconjunto de V formado por todas combinaciones lineales *de subconjuntos* finitos *de vectores de S. Es decir:*

$$L(S) = \{a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_m \cdot v_m \,:\, m \in \mathbb{N},\, v_i \in S,\, a_i \in K, \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Ejemplo 2.39. Si tomamos los vectores de $\mathbb{R}^3$ dados por $u = (1,0,0)$ y $v = (0,0,1)$, entonces $L(\{u,v\}) = \{a \cdot u + b \cdot v \,|\, a,b \in \mathbb{R}\} = \{(a,0,b) \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}$.

Nótese que el conjunto S no tiene por qué ser un s.v. de V (en el ejemplo anterior ni siquiera contenía al vector nulo). Sin embargo, demostraremos enseguida que $L(S)$ sí es un s.v. De hecho, es el s.v. de V "más pequeño" que contiene a S y, por tanto, el más próximo a S en cierto sentido.

Proposición 2.40. *Sea V un e.v. sobre K y $S \subset V$ con $S \neq \emptyset$. Entonces $L(S)$ es un s.v. de V con $S \subset L(S)$. Además, $L(S)$ es el s.v. más pequeño que incluye a S, en el sentido de que si U es un s.v. de V con $S \subset U$, entonces $L(S) \subset U$.*

Demostración. Para comprobar que $L(S)$ es un s.v. de V usaremos la Proposición 2.22. Sean $a,b \in K$ y $u,v \in L(S)$. Por definición de $L(S)$ podemos expresar u y v como combinaciones lineales finitas de vectores de S. Esto significa que $u = a_1 \cdot u_1 + \ldots + a_m \cdot u_m$ para ciertos $m \in \mathbb{N}$, $u_1, \ldots, u_m \in S$ y

$a_1, \ldots, a_m \in K$, mientras que $v = b_1 \cdot v_1 + \ldots + b_n \cdot v_n$ para ciertos $n \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_n \in S$ y $b_1, \ldots, b_n \in K$. Por tanto:

$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= a \cdot (a_1 \cdot u_1 + \ldots + a_m \cdot u_m) + b \cdot (b_1 \cdot v_1 + \ldots + b_n \cdot v_n) \\ &= (a \cdot a_1) \cdot u_1 + \ldots + (a \cdot a_m) \cdot u_m + (b \cdot b_1) \cdot v_1 + \ldots + (b \cdot b_n) \cdot v_n, \end{aligned}$$

donde hemos usado la propiedad distributiva respecto de la suma de vectores y también la pseudoasociativa. Obsérvese que la expresión anterior es una c.l. de $m+n$ vectores de S. Concluimos por tanto que $a \cdot u + b \cdot v \in L(S)$, como se quería.

Veamos que $S \subset L(S)$. Dado $v \in S$, para comprobar que $v \in L(S)$ tenemos que expresar v como c.l. finita de vectores de S. Pero esto es obvio, ya que $v = 1 \cdot v$ por la propiedad unimodular.

Por último, supongamos que U es un s.v. de V con $S \subset U$. Queremos ver que $L(S) \subset U$. Sea $v \in L(S)$. Esto implica que $v = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_m \cdot v_m$ para ciertos $m \in \mathbb{N}$, $v_1, \ldots, v_m \in S$ y $a_1, \ldots, a_m \in K$. Como U es un s.v. de V y cada $v_i \in U$ se sigue que $v \in U$ (U es cerrado para la suma y el producto por escalares). Esto concluye la demostración. ▮

Ahora ya podemos introducir la siguiente definición.

Definición 2.41. *Sea V un e.v. sobre K y $S \subset V$ con $S \neq \emptyset$. Llamaremos* subespacio vectorial de V generado por S *(o* envolvente lineal *de S) al subespacio vectorial $L(S)$ formado por las combinaciones lineales (finitas) de vectores de S.*

Observación 2.42. La proposición anterior permite definir alternativamente a $L(S)$ como el subespacio vectorial más pequeño que contiene a S, ya que $L(S)$ es un subespacio que contiene a S y cualquier otro s.v. que contenga a S también contendrá a $L(S)$. Con esta definición alternativa tiene sentido incluso considerar el caso $S = \emptyset$, obteniéndose trivialmente $L(\emptyset) = \{0\}$.

Ejemplo 2.43. Si $S = \{v\}$ entonces $L(S) = L(v) = \{a \cdot v : a \in K\}$. Cuando $v = 0$ entonces $L(v) = \{0\}$. Cuando $v \neq 0$ el s.v. $L(v)$ se llama *recta vectorial de V generada* por v. Este nombre está justificado si se piensa que, en $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$, para todo vector $\vec{v}$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, se tiene que $L(\vec{v})$ es la recta que parte del origen con vector director $\vec{v}$.

2.2.3. Operaciones con subespacios vectoriales

Nos ocuparemos ahora de construir un nuevo subespacio vectorial a partir de familias de subespacios vectoriales. Para ellos recordemos en primer lugar los conceptos conjuntistas de suma e intersección.

Sea X un conjunto, y $P(X)$ el conjunto de sus partes, esto es, el conjunto de todos los subconjuntos de X. Dados $A, B \in P(X)$ se define su intersección $A \cap B$ y su unión $A \cup B$ como los subconjuntos de X dados por:

$$A \cap B := \{x \in X : x \in A \text{ y } x \in B\} \qquad A \cup B := \{x \in X : x \in A \text{ ó } x \in B\}.$$

Obsérvese que tanto $\cap$ como $\cup$ pueden verse como operaciones en $P(X)$, cada una de las cuales verifica las propiedades asociativa y conmutativa.

Ejercicio 2.44. *Compruébese que se verifican estas propiedades (asociativa y conmutativa) así como las siguientes propiedades distributivas*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \qquad \forall A, B, C \in P(X)$$

¿Cuál es el elemento neutro para la operación intersección en $P(X)$? ¿Y para la unión? [2]

La asociatividad permite definir inductivamente la intersección y unión de un número finito de subconjuntos de X. También se puede definir directamente para una colección arbitraria (finita o no) de subconjuntos $\{A_i \in P(X) : i \in I\}$ (donde I es cualquier conjunto de índices para etiquetar los elementos de la colección) como sigue:

$$\cap_{i \in I} A_i := \{x \in X \,|\, x \in A_i, \forall i \in I\}, \qquad \cup_{i \in I} A_i := \{x \in X \,|\, \exists i \in I : x \in A_i\}.$$

Claramente, esta definición es consistente con la previa para dos o un conjunto finito de subconjuntos[3]. Tras estos preliminares, empezaremos hablando sobre la intersección de subespacios que resulta especialemente sencilla. Después estudiaremos la unión, que lleva aparejada el concepto de suma de subespacios y, finalmente, la suma directa. En nuestro estudio, consideraremos un subconjunto finito de subespacios. Según el nivel de dificultad que encuentre el lector, le recomendamos que haga un estudio detallado considerando sólo dos subespacios o con una familia infinita de ellos.

Intersección de subespacios

Definición 2.45. *Sea $V(K)$ un e.v. y $\{U_1, \ldots, U_m\}$ una familia finita de subespacios vectoriales de $V(K)$. La* intersección *de dicha familia es el subconjunto de V definido por su intersección conjuntista, esto es:*

$$\bigcap_{i=1}^{m} U_i := U_1 \cap \ldots \cap U_m = \{v \in V : v \in U_i \text{ para cada } i \in I\}.$$

Comprobemos que tal intersección resulta ser un s.v. de V.

Lema 2.46. *Si $\{U_1, \ldots, U_m\}$ es una familia finita de subespacios vectoriales de $V(K)$, entonces la intersección $U = \cap_{i=1}^{m} U_i$ es un s.v. de V.*

Demostración. Usaremos la Proposición 2.22. Claramente, la intersección de subespacios es no vacía, pues todos ellos contienen al vector nulo. Sean $a, b \in K$ y $u, v \in U$. Queremos demostrar que $a \cdot u + b \cdot v \in U$, es decir, que $a \cdot u + b \cdot v \in U_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Ahora bien, como $u, v \in U$, entonces $u, v \in U_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Finalmente, como cada U_i es un s.v. de V se concluye que $a \cdot u + b \cdot v \in U_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$. ∎

Observación 2.47. (1) La intersección $U = \cap_{i=1}^{m} U_i$ es el *mayor* s.v. de V que está contenido a la vez en cada U_i. En efecto, si W es otro s.v. de V de manera que $W \subset U_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$, entonces es obvio que $W \subset U$, por definición de intersección.

(2) Con una prueba formalmente análoga se demuestra que la intersección de cualquier familia (no necesariamente finita) de subespacios vectoriales de V es un s.v. de V.

[2] La estructura precisa de las operaciones intersección, $A \cap B$, y unión, $A \cup B$, junto a la de tomar complementario en X, denotado $X \setminus A$ ó $x - A$, se estudian en lógica de conjuntos dentro de las *álgebras de Boole*.

[3] Esta definición formal, aunque muy intuitiva, puede no obstante resultar un poco chocante cuando se lleva al límite. Así, si se tomara $I = \emptyset$ se obtendría $\cap_{i \in \emptyset} A_i = X$, $\cup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset$.

2.2.4. Suma de subespacios vectoriales

Como la intersección de subespacios vectoriales es un subespacio vectorial, tiene sentido plantearse si lo mismo ocurre con la unión $\bigcup_{i=1}^m U_i$ de subespacios vectoriales $U_1,\ldots,U_m$ de $V(K)$:

$$\bigcup_{i=1}^m U_i := U_1\cup\ldots\cup U_m = \{v\in V\,:\, v\in U_i \text{ para algún } i\in I\}.$$

En general, *la unión de subespacios vectoriales de un mismo e.v. $V(K)$ no es un subespacio vectorial* (aunque siempre habrá ejemplos particulares en que esta unión sí sea un s.v.).

Ejemplo 2.48. Cada eje de coordenadas es un s.v. de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ (es una recta que pasa por el origen). Sin embargo, la unión de los dos ejes no lo es, pues si tomamos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores no nulos con cada uno de ellos en un eje distinto, se tiene entonces $\vec{u}+\vec{v}$ no pertenenece en la unión de los ejes. Por otra parte, en $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ la unión de un plano U que pasa por el origen y de una recta $W\subset U$ que pasa por el origen es igual a U, que es trivialmente un s.v. de $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$.

Desde un punto de vista numérico el contraejemplo anterior es el siguiente. En $\mathbb{R}^2$ consideramos $U_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,y=0\}$ y $U_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,:\,x=0\}$. Ya sabemos que U_1 y U_2 son s.v. de $\mathbb{R}^2$ (son conjuntos de soluciones de ecuaciones lineales y homogéneas). Para comprobar que $U_1\cup U_2$ no es un s.v. de $\mathbb{R}^2$, tomando $u=(1,0)\in U_1\cup U_2$ y $v=(0,1)\in U_1\cup U_2$, obtenemos que $u+v=(1,1)$, que no pertenece a $U_1\cup U_2$.

Dado que la unión de subespacios vectoriales no tiene por qué ser un nuevo s.v., tiene sentido plantearse la siguiente cuestión: ¿es siempre posible encontrar un s.v. U de V que contenga a todos los U_i y que tenga "algo que ver" con ellos? Obviamente, si tomamos $U=V$ tenemos un s.v. que contiene a todos los U_i. Ahora bien, esto no es satisfactorio, pues al elegir V no estamos teniendo en cuenta la forma concreta de los U_i. Lo ideal para U es que fuese el s.v. "más pequeño que contenga a todos los U_i" (en el sentido de la proposición 2.42) para que, de algún modo, "esté próximo" a los U_i. Esta idea motiva la siguiente definición.

Definición 2.49. *Sea $V(K)$ un e.v. y $\{U_1,\ldots,U_m\}$ una familia finita de subespacios vectoriales de V. Definimos la* suma *de la familia como el subconjunto de V dado por:*

$$\sum_{i=1}^m U_i = U_1+\ldots+U_m = L\Big(\bigcup_{i=1}^m U_i\Big).$$

Esto es (véase la proposición 2.40), $\sum_{i=1}^m U_i$ es un s.v. de V que contiene a todos los U_i y que, además, es el subespacio vectorial más pequeño que verifica esta propiedad (si U es cualquier otro s.v. de V con $U_i\subset U$ para cada $i=1,\ldots,m$, entonces $\sum_{i=1}^m U_i\subset U$).

Demostremos a continuación que cada $u\in\sum_{i=1}^m U_i$ se puede expresar como una suma finita de vectores $u_i\in U_i$, lo que justifica la notación empleada para el subespacio suma.

Proposición 2.50. *Sea $V(K)$ un e.v. y $\{U_1,\ldots,U_m\}$ una familia finita de subespacios vectoriales de $V(K)$. Entonces:*

$$\sum_{i=1}^m U_i = \{u_1+\ldots+u_m\,|\,u_i\in U_i,\,\forall\, i=1,\ldots,m\}.$$

Por tanto, dado $u\in V$, se cumple que $u\in\sum_{i=1}^m U_i$ si y sólo si $u=u_1+\ldots+u_m$, donde $u_i\in U_i$ para cada $i=1,\ldots,m$.

Demostración. Denotaremos por U al subconjunto de vectores de V siguiente:

$$U = \{u_1 + \ldots + u_m \,|\, u_i \in U_i, \forall i = 1, \ldots, m\}.$$

Para demostrar que $\sum_{i=1}^m U_i = U$, procederemos por doble inclusión.

($\subset$). Para demostrar $\sum_{i=1}^m U_i \subset U$, es suficiente con ver que U es un s.v. de V con $U_i \subset U$ para cada $i = 1, \ldots, m$ (recuérdese la proposición 2.40). Sean $a, b \in K$ y $u, v \in U$. Por definición de U tenemos que $u = u_1 + \ldots + u_m$ y $v = v_1 + \ldots + v_m$ con $u_i, v_i \in U_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Veamos que $a \cdot u + b \cdot v \in U$. Para ello:

$$\begin{aligned} a \cdot u + b \cdot v &= a \cdot (u_1 + \ldots + u_m) + b \cdot (v_1 + \ldots + v_m) \\ &= (a \cdot u_1 + b \cdot v_1) + \ldots + (a \cdot u_m + b \cdot v_m). \end{aligned}$$

Si llamamos $w_i = a \cdot u_i + b \cdot v_i$, entonces $a \cdot u + b \cdot v = w_1 + \ldots + w_m$, donde cada $w_i \in U_i$ (por ser U_i un s.v. de V). Así, $a \cdot u + b \cdot v \in U$, lo que prueba que U es un s.v. de V. Además, si $u \in U_j$ entonces $u = 0 + \ldots + 0 + u + 0 + \ldots + 0$, donde cada u ocupa la posición j-ésima y cada sumando está en el correspondiente s.v. U_i. Por tanto, $u \in U$. Esto muestra que $U_j \subset U$ para cada $j = 1, \ldots, m$.

($\supset$). Finalmente, veamos que $U \subset \sum_{i=1}^m U_i$. Dado $u \in U$, se tiene que $u = u_1 + \ldots + u_m$ con $u_i \in U_i$ para cada $i = 1, \ldots, m$. Recordemos que $\sum_{i=1}^m U_i = L(\cup_{i=1}^m U_i)$, por lo que $\sum_{i=1}^m U_i$ está formado por las combinaciones lineales finitas de vectores de $\cup_{i=1}^m U_i$. En particular, como podemos escribir $u = 1 \cdot u_1 + \ldots + 1 \cdot u_m$, se sigue que $u \in \sum_{i=1}^m U_i$. ∎

Ejemplo 2.51. En $\mathbb{R}^3$ si tomamos como U_1 y U_2 dos ejes coordenados, entonces es fácil comprobar que $U_1 + U_2$ es el plano vectorial que los contiene. Veamos este ejemplo numéricamente.

Sean U_1 y U_2 los subespacios de $\mathbb{R}^3$ dados por $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\}$ y $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\}$. Sabemos que $U_1 + U_2 = \{u_1 + u_2 \,|\, u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\}$. Ahora, si $u \in U_1$ entonces $u_1 = (0,y,0)$, mientras que si $u_2 \in U_2$ entonces $u_2 = (x,0,0)$. Así, $u_1 + u_2 = (x,y,0)$. Esto prueba $U_1 + U_2 \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. De hecho, se tiene $U_1 + U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. Para probar la inclusión $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\} \subset U_1 + U_2$ nótese que si $v = (x,y,0)$, entonces $v = (0,y,0) + (x,0,0) = u_1 + u_2$ donde $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$.

Ejercicio 2.52. *Demostrar que $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^2$, donde U_1 y U_2 son los subespacios dados por $U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ y $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$.*

Suma directa de subespacios vectoriales

Sea $V(K)$ un e.v. y $\{U_1, \ldots, U_m\}$ una familia finita de subespacios vectoriales de $V(K)$. Dado $u \in \sum_{i=1}^m U_i$, sabemos que $u = u_1 + \ldots + u_m$ donde $u_i \in U_i$, para cada $i = 1, \ldots, m$. Ahora bien, esta forma de expresar u como suma de vectores en cada sumando U_i no tiene por qué ser única, es decir, podrán existir otros vectores $u_i' \in U_i$, distintos de los anteriores, y tales que $u = u_1' + \ldots + u_m'$. Veamos un ejemplo de que esto puede efectivamente ocurrir.

Ejemplo 2.53. Sean $U_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ y $U_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$. No es difícil demostrar que $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$, pues todo vector $v = (x,y,z)$ de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar como $u_1 + u_2$, donde $u_1 = (0,y,z) \in U_1$ y $u_2 = (x,0,0) \in U_2$. Veamos que el vector nulo de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar de muchas formas distintas como suma de un vector de U_1 y otro de U_2. En efecto, tenemos por ejemplo $(0,0,0) = (0,1,0) + (0,-1,0)$ o $(0,0,0) = (0,2,0) + (0,-2,0)$. De hecho $(0,0,0) = (0,a,0) + (0,-a,0)$, para cada $a \in \mathbb{R}$.

Ahora nos planteamos cómo se puede evitar esta falta de unicidad, es decir, bajo qué condiciones la expresión de $u \in \sum_{i=1}^{m} U_i$ como suma de vectores $u_i \in U_i$ es única. Veremos más adelante que esta cuestión tiene que ver con descomponer un e.v. en piezas más pequeñas.

Proposición 2.54. *Sea $V(K)$ un e.v. y $\{U_1,\ldots,U_m\}$ una familia finita de subespacios vectoriales de $V(K)$ con $m \geq 2$. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) Para cada $u \in \sum_{i=1}^{m} U_i$ existen vectores unívocamente determinados $u_i \in U_i$ tales que $u = u_1 + \ldots + u_m$.

(ii) $(\sum_{i=1}^{j} U_i) \cap U_{j+1} = \{0\}$, para cada $j = 1,\ldots,m-1$.

Veremos primero cómo se demuestra la proposición en el caso $m = 2$, que será el más frecuente. Así motivaremos también la prueba del caso general.

Demostración en el caso $m = 2$. En este caso, la afirmación (i) significa que, para cada vector $u \in U_1 + U_2$, existen vectores unívocamente determinados $u_1 \in U_1$ y $u_2 \in U_2$ tales que $u = u_1 + u_2$. La afirmación (ii) se reduce a la igualdad $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Veamos que (i) implica (ii). Sea $u \in U_1 \cap U_2$. Queremos ver que $u = 0$. Nótese que $u = u + 0$ con $u \in U_1$ y $0 \in U_2$. Además, $u = 0 + u$ con $0 \in U_1$ y $u \in U_2$. Como por hipótesis u se expresa de forma única como suma de un vector de U_1 y otro de U_2, entonces $u = 0$.

Veamos que (ii) implica (i). Sea $u \in U_1 + U_2$ y supongamos que hay dos expresiones de u como suma de un vector de U_1 y otro de U_2. Así, existen $u_1, u_1' \in U_1$ y $u_2, u_2' \in U_2$ tales que $u = u_1 + u_2$ y $u = u_1' + u_2'$. Queremos ver que $u_1' = u_1$ y $u_2' = u_2$. Tenemos $u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$, que equivale a $u_1' - u_1 = u_2 - u_2'$. Llamemos $v := u_1' - u_1 = u_2 - u_2'$. De estas igualdades, y usando que U_1, U_2 son subespacios vectoriales de V, se sigue que $v \in U_1 \cap U_2$. Como suponemos que $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ entonces $v = 0$. Como $v = u_1' - u_1$ deducimos que $u_1 = u_1'$. Y como $v = u_2 - u_2'$ concluimos que $u_2 = u_2'$. ∎

Demostración en el caso general. Veamos que (i) implica (ii). Fijamos $j \in \{1,\ldots,m-1\}$. Queremos ver que $(\sum_{i=1}^{j} U_i) \cap U_{j+1} = \{0\}$. Tomemos un vector u en dicha intersección. Como $u \in \sum_{i=1}^{j} U_i$ entonces $u = u_1 + \ldots + u_j$ con $u_i \in U_i$ para cada $i = 1,\ldots,j$. A partir de aquí podemos expresar u de dos formas distintas como suma de vectores de U_i, a saber, $u = u_1 + \ldots + u_j + 0 + u_{j+2} + \ldots + u_m$ y $u = 0 + \ldots + 0 + u + 0 + \ldots + 0$. Por la hipótesis (i) todos los vectores de las expresiones anteriores son nulos. En particular, $u = 0$.

Recíprocamente, veamos que (ii) implica (i) por inducción sobre el número de m de sumandos. El resultado ya ha sido demostrado para $m = 2$ (o, si, se prefiere, resulta trivial para $m = 1$), por lo que supondremos ahora como hipótesis de inducción que resulta cierto para $m-1$. Sea $u \in \sum_{i=1}^{m} U_i$ y supongamos que podemos expresar u de dos formas como suma de vectores en U_i. Así, para cada $i = 1,\ldots,m$, existen $u_i, u_i' \in U_i$ tales que $u = u_1 + \ldots + u_m$ y $u = u_1' + \ldots + u_m'$. Queremos ver que $u_i' = u_i$ para cada $i = 1,\ldots,m$. Tenemos $u_1 + \ldots + u_m = u_1' + \ldots + u_m'$, que equivale a

$$(u_1 - u_1') + \ldots + (u_{m-1} - u_{m-1}') = u_m' - u_m.$$

Poniendo $v := u_m' - u_m$, como U_m es un s.v. de V, se tiene $v \in U_m$ y, análogaamente $u_i - u_i' \in U_i$ para cada $i = 1,\ldots,m-1$. Por tanto, $v \in \sum_{i=1}^{m-1} U_i$ y aplicando la hipótesis (ii) con $j = m-1$ se sigue $v = 0$. Esto implica que $u_m' = u_m$ y $(u_1 - u_1') + \ldots + (u_{m-1} - u_{m-1}') = 0$. Esta última igualdad supone escribir el vector 0 como suma de vectores pertenecientes a U_i con $i = 1,\ldots,m-1$. Podemos ahora aplicar la hipótesis de inducción a $\{U_1,\ldots,U_{m-1}\}$ (obsérvese que como los m subespacios satisfacían la hipótesis (ii), los primeros $m-1$ subespacios también la verifican), y suponer que verifican (i). Escribiendo el vector 0 como $0+\ldots+0$, y considerando cada 0 como un vector de U_i para cada $i=1,\ldots,m-1$, se deduce $u_i'-u_i=0$ para cada $i=1,\ldots,m-1$, lo que concluye el resultado. ∎

Observación 2.55. Una consecuencia inmediata de la equivalencia establecida en la proposición anterior es que la condición *(ii)* resulta ser independiente de la ordenación de los subespacios U_i (pues es equivalente a *(i)*, que obviamente resulta independiente de tal ordenación).

Definición 2.56. *Sea $V(K)$ un e.v. y $\{U_1,\ldots,U_m,U\}$ subespacios vectoriales de V. Escribiremos $U=\oplus_{i=1}^m U_i=U_1\oplus\ldots\oplus U_m$ y diremos que U es la* suma directa *de la familia $\{U_1,\ldots,U_m\}$ si $U=\sum_{i=1}^m U_i$ y $(\sum_{i=1}^j U_i)\cap U_{j+1}=\{0\}$ para cada $j=1,\ldots,m-1$. Por la proposición anterior, esto equivale a que, para cada $u\in U$, existen vectores únicos $u_i\in U_i$ tales que $u=u_1+\ldots+u_m$.*

En el caso particular $m=2$, la expresión $U=U_1\oplus U_2$ significa que $U=U_1+U_2$ y $U_1\cap U_2=\{0\}$. Equivalentemente, para cada $u\in U$ existen vectores únicos $u_1\in U_1$ y $u_2\in U_2$ tales que $u=u_1+u_2$. En tal caso, diremos también que U_2 es un subespacio complementario *o* suplementario *de U_1 en U.*

Ejemplo 2.57. En el Ejemplo 2.53 teníamos una situación en la que $\mathbb{R}^3=U_1+U_2$. Sin embargo, no es cierto que $\mathbb{R}^3=U_1\oplus U_2$, pues vimos que el vector nulo se expresa de infinitas formas distintas como suma de un vector de U_1 y otro de U_2. Por otro lado, se tiene que $U_1\cap U_2\neq\{0\}$, pues $(0,1,0)\in U_1\cap U_2$.

Ejercicio 2.58. *Sean U_1 y U_2 los subespacios de $\mathbb{R}^2$ del Ejercicio 2.52. Demostrar que $\mathbb{R}^2=U_1\oplus U_2$.*

Ejemplo 2.59. [Suma directa de matrices simétricas y antisimétricas] Sea $n\in\mathbb{N}$ y K un cuerpo con característica distinta de 2 (esto es, $2:=1+1\neq 0$, como ocurre, por ejemplo, si $K=\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$). Siguiendo con las propiedades de matrices vistas en el ejemplo 2.37, vamos a demostrar que:

$$M_n(K)=S_n(K)\oplus A_n(K).$$

Para ello hay que comprobar dos propiedades: $M_n(K)=S_n(K)+A_n(K)$ y $S_n(K)\cap A_n(K)=\{0_n\}$.

Veamos que $M_n(K)=S_n(K)+A_n(K)$. La inclusión $S_n(K)+A_n(K)\subset M_n(K)$ es obvia. Probar que $M_n(K)\subset S_n(K)+A_n(K)$ significa mostrar que toda matriz $A\in M_n(K)$ se puede expresar como $B+C$, verificándose $B\in S_n(K)$ y $C\in A_n(K)$. Nótese que, como $2\neq 0$, entonces A se escribe como:

$$A=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t).$$

En la igualdad anterior el símbolo $1/2$ representa el inverso de 2 en K (que existe al suponer $2\neq 0$). Si llamamos $B=(1/2)(A+A^t)$ y $C=(1/2)(A-A^t)$, entonces se tiene $A=B+C$. Veamos que $B\in S_n(K)$ y $C\in A_n(K)$ a partir de propiedades de la trasposición de matrices:

$$\begin{aligned} B^t&=\frac{1}{2}(A+A^t)^t=\frac{1}{2}\left(A^t+(A^t)^t\right)=\frac{1}{2}(A^t+A)=B,\\ C^t&=\frac{1}{2}(A-A^t)^t=\frac{1}{2}\left(A^t-(A^t)^t\right)=\frac{1}{2}(A^t-A)=-C.\end{aligned}$$

Por último, comprobemos que $S_n(K)\cap A_n(K)=\{0_n\}$. Sea $A\in S_n(K)\cap A_n(K)$. Nos preguntamos si $A=0_n$. Como $A\in S_n(K)$, entonces $A^t=A$. Y como $A\in A_n(K)$ tenemos $A^t=-A$. Encadenando ambas igualdades se sigue que $A=-A$ y, por tanto, $A+A=O_n$. Así, $2A=O_n$, y como $2\neq 0$, llegamos a $A=0_n$, como se quería.