ANÁLISIS MATEMÁTICO I, 2^0 Doble Grado Informática y Matemáticas

Curso 2019-20, Primer cuatrimestre

III. Ejercicios (Función inversa e implícita. Extremos condicionados.)

1. Sea $F : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$ una aplicación de clase C^1 tal que
$$\|x - y\| \leq \|F(x) - F(y\|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$
Prueba que $DF(a)$ es inversible para cada $a \in \mathbb{R}^N$, que $F(\mathbb{R}^N)$ es cerrado y F es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^N$ en $\mathbb{R}^N$.
Indicación: Usa el Teorema de la función inversa y las hipótesis.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ el campo vectorial definido por
$$f(x, y, z) = (x - xy, xy - xyz, xyz) \qquad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3).$$
Justifica que el conjunto $\Omega = \{(x, y, z) : xy \neq 0\}$ es un abierto de $\mathbb{R}^3$ y que f es un difeomorfismo de Ω en $f(\Omega)$. Calcula la matriz jacobiana de f^{-1} en $(0, 0, 1)$.

3. Justifica que cada una de las siguientes funciones es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^\infty$ sobre su imagen (**Coordenadas esféricas**)
$$f(\rho, \vartheta, \varphi) = (\rho \ \cos\vartheta \ \cos\varphi, \rho \ \sin\vartheta \ \cos\varphi, \rho \ \sin\varphi), \forall(\rho, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi[\times]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$
$$g(x, y) = (x - y, xy), \ \forall(x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + y > 0\}$$
<u>Indicación:</u> Utiliza el Teorema global de la función inversa.

4. Prueba que existe una función φ derivable en I, donde I es un intervalo abierto tal que $0 \in I$, y tal que se verifica
$$1 - \varphi(x)e^x + xe^{\varphi(x)} = 0, \quad \forall x \in I.$$
Calcula el polinomio de Taylor de orden 1 de φ en 0.

5. Prueba que existen dos funciones u y v de clase infinito definidas en un entorno de $(1, 1)$ que verifican las ecuaciones
$$xe^u + ye^v = 1 + e, \qquad ue^x + ve^y = e$$
y además $u(1, 1) = 0, v(1, 1) = 1$.
Prueba que existen dos abiertos A y B de $\mathbb{R}^2$ difeomorfos por (u, v) tales que $(1, 1) \in A$ y $(0, 1) \in B$. Calcula la matriz jacobiana de la aplicación $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ en el punto $(1, 1)$ y la matriz jacobiana de la aplicación inversa en $(0, 1)$.

6. Calcula las derivadas parciales de primer orden de la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por la ecuación
$$yz^4 + x^2z^3 - e^{xyz} = 0.$$
Particulariza en el punto $(x, y) = (1, 0)$.

7. Calcula las derivadas parciales de primer orden de la función $z = f(x, y)$ en el punto $(2, 1)$, siendo $z(2, 1) = 2$, donde z está definida implícitamente por

$$3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4zy^3 - 4 = 0.$$

8. Calcula las derivadas parciales de primer orden de la función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por

$$z^3 + ze^x + \cos y = 0.$$

9. Justifica que las dos igualdades

$$xu - yv + e^u \cos v = 1, \qquad xv + yu + e^u \sin v = 0$$

definen localmente a u y a v como funciones de x e y en un entorno del punto $(0, 0)$ en el que se verifica

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

10. Probar que el sistema de ecuaciones

$$uv - 3x + 2y = 0$$

$$u^4 - v^4 = x^2 - y^2$$

define implícitamente a u y v como funciones de x e y en el punto $(1, 1, 1, 1)$. Calcular $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ en dicho punto.

11. Prueba que las ecuaciones

$$xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1 \quad \text{y} \quad yx^5 + uy^5 + z^5v = 1$$

definen a u y v como funciones de (x, y, z) en un entorno de $(0, 1, 1, 1, 0)$. Calcula $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ en $(0, 1, 1)$.

12. Comprueba que los siguientes conjuntos son variedades. Describe el subespacio tangente a cada variedad en el punto a que se indica en cada apartado.
a) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}, a = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}\}, a = (0, 0, 1)$.
c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 8\}, a = (2, 2, 2)$.

13. Calcula el máximo y mínimos absolutos de la función $f(x, y) = xy$ en el conjunto S^1 dado por

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

14. ¿Cuál es el ortoedro con volumen 8 que tiene superficie lateral mínima?

15. Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, ¿cuál es la mínima distancia de (a, b, c) a un punto del plano $x + y + z = 0$?

16. Calcula la distancia del origen al conjunto A de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + y^2 = z^2 + 1\}.$$

17. Sea E el elipsoide dado por

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}.$$

¿Cuál es el ortoedro de volumen máximo inscrito en E?

18. Calcula la distancia del origen al elipsoide el ejercicio anterior.

19. Calcula el máximo absoluto de la función f dada por

$$f(x) = \Big(\prod_{i=1}^{n} x_i\Big)^2$$

en el conjunto

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = r\}$$

donde $r \in \mathbb{R}^+$. Deduce que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \forall x_i \in \mathbb{R}_0^+.$$

¿Cuándo se da la igualdad en la desigualdad anterior?

20. Calcula la distancia mínima entre la recta $x - y = 2$ y la parábola $y = x^2$.

21. Calcula el máximo y el mínimo absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$ en el conjunto K dado por

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\}.$$

22. Si la superficie lateral de una caja rectangular es constante, ¿cuáles son las dimensiones de los lados para que el volumen sea máximo?

23. Calcula y clasifica los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$. Calcula también el máximo y mínimo absolutos de f en la bola cerrada para la norma euclídea de centro 0 y radio 4.