Daniel Monjas Miguélez

3.) Dadas R_1, R_2 del plano euclidiano $\mathbb{R}^2$, demuestra que el lugar de puntos

$$\{ p \in \mathbb{R}^2 : dist(p, R_1)^2 + dist(p, R_2)^2 = 1 \}$$

es cónica y clasifícala en función de la posición de R_1 y R_2.

Sea $p = (x,y)$, el punto ~~más cercano~~ a p de R_1

$p_1 = (a_1, b_1)$ y el punto más cercano a p de R_2 $p_2 = (a_2, b_2)$

Usando que $dist(p, R_1)^2 + dist(p, R_2)^2 = 1$

$$\Rightarrow (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 + (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + y^2 - 2b_1 y + b_1^2 + x^2 - 2a_2 x + a_2^2 + y^2 - 2y b_2 + b_2^2 = 1$$

$$2x^2 + x \cdot (-2a_1 - 2a_2) + 2y^2 + y \cdot (-2b_1 - 2b_2) + a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1$$

$$M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 1 & -a_1 - a_2 & -b_1 - b_2 \\ -a_1 - a_2 & 2 & 0 \\ -b_1 - b_2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

donde $M_{R_0}(H)$ se adecúa a la expresión matricial de una cónica

Sean R_1 y R_2 coincidentes $\Rightarrow$

$$M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 2a_1^2 + 2a_2^2 - 1 & -a_1 - a_2 & -a_1 - a_2 \\ -a_1 - a_2 & 2 & 0 \\ -a_1 - a_2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

si $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_2 = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $R_H = 2$ y $R_H = 2$

si $a_1 \neq -a_2$ y $a_1 \neq \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $R_H = 3$ y $R_H = 2$

Sacando el polinomio característico tenemos que

$\hat{P}(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ (igual independientemente de la posición de R).

donde $P(\lambda)$ tiene a lo sumo 2 raíces positivas. Como $P(\lambda)$ descompone en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $t = 2$ $s = 0$ y $R_H = R_H$ $\Rightarrow$ $S_H = 2$

luego H es equivalente a una cónica representada en R_0 por $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir, un punto.

Si $R_H = R_H + 1$ $\Rightarrow$ $\hat{t} = t + 1 = 3$ $\hat{s} = s = 0$ $\Rightarrow$

H es equivalente a una cónica representada en R_0 por $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vacío

Daniel Monjas Miguélez

Sean R_1 y R_2 paralelas $\Longrightarrow$

si $R_1 = p_1 + L((a_1,a_2))$ y $R_2 = p_2 + L((b_1,b_2))$

con $p_1 \neq p_2$ y p_1 y p_2 los puntos más cercanos a la cónica desde R_1 y R_2 resp. Podemos encontrar $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \mu a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

$\Longrightarrow$

~~$M_{R_0}(H) =$ $(dist(p,R_1)^2 + dist(p_1,p_2)) = dist(p_2.$~~

$$dist(p,R_1) + dist(p_1,p_2) = dist(p,R_2)$$

$$M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 + \lambda^2 a_1^2 + \mu^2 a_2^2 - 1 & -a_1 - a_2 & -\lambda a_1 - \mu a_2 \\ -a_1 - a_2 & 2 & 0 \\ -\lambda a_1 - \mu a_2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

con λ y μ distintos de 1 (simultáneamente) se que $R_H = 2$

y si $\lambda = \mu = 0$ y $a_1 = -a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ tenemos que $R_H = 2$

en otro caso $R_H = 3$

entonces si $R_H = R_H \Rightarrow$ H es equivalente a una cónica representada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ un punto}$$

si ~~$R_H + R_H = 1 \Rightarrow$~~ $R_H = R_H + 1 \Rightarrow \hat{t} = t+1 = 3 \quad \hat{s} = s = 0 \Rightarrow$

H es equivalente a una cónica representada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ vacío}$$

Si R_1 y R_2 se cortan entonces $R_H = 2$

se puede hacer un caso similar al anterior con escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

luego si $R_H = R_H \rightarrow$ H es equivalente a una cónica representada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ punto}$$

o si $R_H = R_H + 1 \Rightarrow$ H es equivalente a una cónica representada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ el vacío}$$

esto se deduce de que $R_H=2$ y $S_H=2$ independientemente de la posición de las rectas, luego ó $R_H=3 \Rightarrow R_H=R_H+1 \Rightarrow S_H=3$

ó $R_H=2 \Rightarrow$ es un punto pues $S_H=2$