Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

14 de abril de 2020

1. Tema 5: Grupos resolubles.

El último día demostramos el Teorema de refinamiento de Schreier que afirma que cualesquiera dos series normales de un grupo G admiten refinamientos equivalentes.

Recordemos (véase Def. 1.4 del 1-abril-2020) que dos series normales de un grupo G se dicen equivalentes si tienen la misma longitud y sus factores son isomorfos, salvo el orden.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar el teorema de Jordan-Holder por el que veremos que dos series de composición de un grupo G son equivalentes.

Veamos previamente el siguiente

Lema 1.1. *Si una serie normal de un grupo G es equivalente a una serie de composición de G, entonces dicha serie normal es también una serie de composición.*

Demostración. En efecto, sean

$$1 = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G,$$

una serie normal de G que es equivalente a una serie de composición de G

$$1 = H_0 \trianglelefteq H_1 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq H_m = G,$$

Entonces $n = m$ y existe $\sigma \in S_n$ tal que $G_i/G_{i-1} \cong H_{\sigma(i)}/H_{\sigma(i)-1}$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Como la segunda serie es de composición entonces sus factores son simples (recordemos que una serie normal es una serie de composición si y solo si, sus factores son grupos simples) y por lo tanto, G_i/G_{i-1} es simple, para todo $i = 1, \ldots, n$. Concluimos entonces que la serie inicial es también de composición. $\square$

Podemos ya demostrar el teorema de Jordan-Holder establecido en parte por Jordan en 1869 y completado por Holder en 1889.

Teorema 1.2. *Teorema de Jordan-Holder.*

Sea G un grupo finito. Entonces:

(i) *Toda serie normal propia de G admite un refinamiento que es una serie de composición de G.*

(ii) *Cualesquiera dos series de composición de G son equivalentes.*

Demostración. Por ser G finito sabemos que tiene series de composición (véase el Teorema 1.2 de la clase del 1-abril-2020). Sea

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G \tag{1.1}$$

una serie de composición de G.
(i) Sea

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots \lhd H_m = G \tag{1.2}$$

una serie normal propia de G. Por el teorema de refinamiento de Schreier, las series (1.2) y (1.1) admiten refinamientos equivalentes.

Puesto que la serie (1.1) es una serie de composición entonces no tiene refinamientos propios, esto es cualquier refinamiento de (1.1) coincide con ella misma.

Entonces la serie (1.2) admite un refinamiento que es equivalente a a la serie de composición (1.1). Por el lema anterior, dicho refinamiento es también una serie de composición.
(ii) Puesto que los refinamientos de una serie de composición coinciden con ella misma, de nuevo por el teorema de Schreier, dos series de composición han de ser necesariamente equivalentes. □

Observación 1.3. Notemos que aunque el teorema de Jordan-Holder lo hemos enunciado para grupos finitos, sin embargo es también cierto para grupos no necesariamente finitos que admitan al menos una serie de composición (observad que en la demostración es la existencia de una serie de composición lo que utilizamos).

Como consecuencia del teorema de Jordan-Holder, la longitud de las series de composición de un grupo finito , así como sus factores, son un invariante del grupo y no dependen de la serie de composición elegida. Definimos entonces:

Definición 1.4. *Sea G un grupo finito,*

Definimos **la longitud** *de G, que denotaremos por $l(G)$, como la longitud de sus series de composición.*

Definimos **los factores de composición** *de G a los factores de sus series de composición. Al conjunto de los factores de composición de G lo denotaremos por $fact(G)$.*

Ejemplo 1.5. 1. Si $G = S_2$ entonces

$$1 \lhd S_2$$

es una serie de composición de S_2 pues su único factor $S_2/1 = S_2 \cong C_2$ es simple (recordemos que, según vimos en el Lema 5.7 de 31-marzo-2020, los grupos cíclicos de orden primo son todos grupos simples, de hecho son los únicos grupos abelianos simples). Entonces

$$l(S_2) = 1 \quad fact(S_2) = \{C_2\}.$$

2. Si $G = S_3$ entonces

$$1 \lhd A_3 \lhd S_3$$

es una serie de composición de S_2 pues sus factores son $A_3/1 = A_3 \cong C_3$ y $S_3/A_3 \cong C_2$ ambos grupos simples (pues son cíclico de orden primo). Entonces

$$l(S_3) = 2 \quad fact(S_3) = \{C_3, C_2\}.$$

3. Si $G = S_4$, como vimos en el Ejemplo 1.1 de 1-abril-2020 una serie de composición de S_4 es

$$1 \lhd C_2 \lhd K \lhd A_4 \lhd S_4,$$

con factores $C_2/1 = C_2$, $K/C_2 \cong C_2$, $A_4/K \cong C_3$ y $S_4/A_4 \cong C_2$. Entonces

$$l(S_4) = 4 \quad fact(S_4) = \{C_2, C_2, C_3, C_2\}.$$

Cuando demostremos el teorema de Abel veremos cúal es la longitud de S_n y sus factores para $n \geq 5$.

4 Si $G = D_3$ entonces

$$1 \lhd \langle r \rangle \lhd D_3$$

es una serie de composición de D_3 pues sus factores son $\langle r \rangle/1 = \langle r \rangle \cong C_3$ y $D_3/\langle r \rangle \cong C_2$, ambos grupos simples. Entonces

$$l(D_3) = 2 \quad fact(D_3) = \{C_3, C_2\}.$$

5 Si $G = D_4$, como vimos en el Ejemplo 1.3 de 1-abril-2020 una serie de composición de D_4 es

$$1 \lhd \langle r^2 \rangle \lhd \langle r \rangle \lhd D_4$$

con factores $\langle r^2 \rangle/1 = \langle r^2 \rangle \cong C_2$, $\langle r \rangle/\langle r^2 \rangle \cong C_2$ y $D_4/\langle r \rangle \cong C_2$. Entonces

$$l(D_4) = 3 \quad fact(D_4) = \{C_2, C_2, C_2\}.$$

Veamos a continuación el ejercicio 12 de la relación 4 para el caso de D_6.

Ejercicio. Ejercicio 12. Relación 4. Encontrar todas las series de composición del grupo D_6. Calcular la longitud y la lista de los factores de composición de este grupo diédrico.

Resolución. Para describir todas las series de composición de D_6 en primer lugar describiremos el retículo de subgrupos de D_6 y entre ellos cúales son normales.

$$D_6 = \langle r, s / r^6 = 1 = s^2, sr = r^5 s \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}.$$

Puesto que $|D_6| = 12$, los subgrupos propios de D_6 tendrán orden $2, 3, , 4$ ó 6.
Los subgrupos de orden 2 son cíclicos generados por los elementos de orden 2 de D_6 y así obtenemos siete subgrupos de orden 2 que son:

$$C_2 = \langle r^3 \rangle = \{1, r^3\},\ C_2' = \langle s \rangle = \{1, s\},\ C_2'' = \langle rs \rangle = \{1, rs\},\ C_2''' = \langle r^2s \rangle = \{1, r^2s\},$$
$$C_2^{iv} = \langle r^3s \rangle = \{1, r^3s\},\ C_2^{v} = \langle r^4s \rangle = \{1, r^4s\},\ C_2^{vi} = \langle r^5s \rangle = \{1, r^5s\}$$

Además, de todos ellos, se tiene que $C_2 = \langle r^3 \rangle \lhd D_6$, pues $r^3 \in Z(D_6)$ (véase ejercicio 9 Relación 3, resuelto en 23-marzo.2020) y entonces $a\langle r^3 \rangle a^{-1} \leq \langle r^3 \rangle$,

para todo $a \in D_6$. El resto de ellos no son normales en D_6. Así por ejemplo $rC'_2r^{-1} \nleq C'_2$, pues $rsr^{-1} = r^2s \notin C'_2$, y entonces C'_2 no es normal en D_6. De igual forma podéis verlo para el resto (comprobadlo!!)
Los subgrupos de orden 3 son cíclicos generados por elementos de orden 3 de D_6. Hay dos elementos de orden 3 en D_6 que son r^2 y r^4 que generan el mismo subgrupo y así obtenemos un único subgrupo de orden 3 que es

$$C_3 = \langle r^2 \rangle = \{1, r^2, r^4\} = \langle r^4 \rangle.$$

Este subgrupo sí es un subgrupo normal, esto es $a\langle r^2 \rangle a^{-1} \leq \langle r^2 \rangle$, para todo $a \in D_6$ (comprobadlo!!).
Los subgrupos de orden 4 son cíclicos generados por elementos de orden 4 o tipo Klein. Como en D_6 no hay elementos de orden 4, entonces no tiene subgrupos cíclicos de orden 4. Buscamos subgrupos tipo Klein, esto es subgrupos generados por dos elementos de orden 2 que conmuten entre sí y encontramos los siguientes:

$$K_1 = \langle r^3, s \rangle = \{1, r^3, s, r^3s\} = \langle r^3, r^3s \rangle = \langle s, r^3s \rangle,$$
$$K_2 = \langle r^3, rs \rangle = \{1, r^3, rs, r^4s\} = \langle r^3, r^4s \rangle = \langle rs, r^4s \rangle,$$
$$K_3 = \langle r^3, r^2s \rangle = \{1, r^3, r^2s, r^5s\} = \langle r^3, r^5s \rangle = \langle r^2s, r^5s \rangle.$$

En este caso, ninguno de ellos es un subgrupo normal de D_6 pues, por ejemplo, $rK_1r^{-1} \nleq K_1$ ya que $rsr^{-1} = rsr^5 = rr^{-5}s = rrs = r^2s \notin K_1$. De igual forma se ve para los otros dos (comprobadlo!!).
Finalmente **los subgrupos de orden 6** son cícllcos generados por elementos de orden 6 ó isomorfos a D_3 (véase Ejercicio 23 Relación 2, resuelto en 16-marzo-2020). Hay dos elementos de orden 6 en D_6 que son r y r^5 que generan el mismo subgrupo. Obtenemos así un subgrupo de D_6, cíclico de orden 6 que es

$$C_6 = \langle r \rangle = \{1, r, r^2, r^3, r^4, r^5\} = \langle r^5 \rangle.$$

Para ver si D_6 tiene subgrupos de orden 6 isomorfos a D_3 hemos de ver si existen elementos $a, b \in D_6$ tal que $a^3 = 1 = b^2$ y $ba = a^2b$ (pues $D_3 = \langle a, b / a^3 = 2 = b^2, ba = a^2b \rangle$). Se trata entonces de buscar entre los elementos de orden 3 de D_6 (esto es r^2 y r^4) y los elementos de orden 2 de D_6 (esto es r^3 y r^is, $0 \leq i \leq 5$) parejas que verifique la condición $ba = a^2b$.
Por ejemplo si tomamos $a = r^2$ y $b = s$, tenemos que

$$ba = sr^2 = r^{-2}s = r^4s = a^2b$$

y entonces obtenemos un subgrupo de orden 6 de D_6 isomorfo a D_3 que es

$$H_1 = \langle r^2, s \rangle = \{1, r^2, r^4, s, r^2s, r^4s\}.$$

Análogamente, si tomamos $a = r^2$ y $b = rs$, tenemos que

$$ba = rsr^2 = rr^{-2}s = r^{-1}s = r^5s = a^2b$$

y entonces obtenemos otro subgrupo de orden 6 de D_6 isomorfo a D_3 que es

$$H_2 = \langle r^2, rs \rangle = \{1, r^2, r^4, rs, r^3s, r^5s\}.$$

Comprobad que las otras posibles combinaciones de a, b que generan un subgrupo tipo D_3 coinciden con H_1 ó con H_2 .

Puesto que todo subgrupo de índice 2 es normal (véase ejercicio 3 Relación 3, resuelto en 17-marzo-2020) C_6, H_1, H_2 son subgrupos normales de D_6.

Podemos ya formar todas las series de composición de D_6. Estas son (recordemos que una serie normal es series de composición si y sólo si sus factores son grupos simples.)

$$\begin{aligned}
1 \lhd \langle r^2 \rangle \lhd \langle r \rangle \lhd D_6 & \text{ con factores,} \, C_3, C_2, C_2 \text{ y entonce grupos simples} \\
1 \lhd \langle r^3 \rangle \lhd \langle r \rangle \lhd D_6 & \text{ con factores, salvo isomorfismo} \, C_2, C_3, C_2, \\
1 \lhd \langle r^2 \rangle \lhd \langle r^2, s \rangle \lhd D_6 & \text{ con factores, salvo isomorfismo} \, C_3, C_2, C_2 \\
1 \lhd \langle r^2 \rangle \lhd \langle r^2, rs \rangle \lhd D_6 & \text{ con factores, salvo isomorfismo} \, C_3, C_2, C_2
\end{aligned}$$

Finalmente concluimos que

$$l(D_6) = 3, \text{ y } fact(D_6) = \{C_3, C_2, C_2\}.$$

Os dejo a vosotros que hagáis El Ejercicio 9 de la Relación 4, que se hace de forma análoga al anterior.

Para terminar la clase veamos qué relación hay entre la longitud de un grupo finito y la de un subgrupo normal suyo:

Proposición 1.6. *Sea G un grupo finito y $N \lhd G$ un subgrupo normal propio de G. Entonces*

$$l(G) = l(N) + l(G/N) \text{ y } fact(G) = fact(N) \cup fact(G/N).$$

Demostración. Consideramos la serie normal propia de G

$$1 \lhd N \lhd G.$$

Por el apartado **(i)** del teorema de Jordan-Holder dicha serie admite un refinamiento que es una serie de composición. Sea

$$1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_r = N \lhd K_{r+1} \lhd \cdots \lhd K_n = G$$

una serie de composición de G que refina a la anterior. Tendremos entonces que los factores K_i/K_{i-1}, $i = 1, \ldots n$ son grupos simples, siendo

$$l(G) = n \text{ y } fact(G) = \{K_i/K_{i-1} \; ; \; i = 1, \ldots, n\}.$$

Entonces es claro que

$$1 = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots \lhd K_r = N$$

es una serie de composición de N y así

$$l(N) = r \text{ y } fact(N) = \{K_i/K_{i-1} \; ; \; i = 1, \ldots, r\}.$$

Como N es un subgrupo normal de G, entonces $K_j/N \leq G/N$, para todo $j = r \ldots, n$ y, puesto que $K_{j-1} \lhd K_j$ entonces $K_{j-1}/N \lhd K_j/N$, para todo $j = r+1, \ldots, n$. Obtenemos entonces una serie normal propia de G/N

$$1 = K_r/N = N/N \lhd K_{r+1}/N \lhd \cdots \lhd K_n/N = G/N$$

que es una serie de composición de G/N pues sus factores son, aplicando el segundo teorema de isomorfía,

$$(K_j/N)/(K_{j-1}/N) \cong K_j/K_{j-1} \; j = r+1, \ldots, n$$

y por tanto grupos simples. Por tanto

$$l(G/N) = n - r \text{ y } fact(G/N) = \{K_j/K_{j-1} \; ; \, j = r+1, \ldots, n\}.$$

Combinando ambas igualdades obtenemos que

$$l(N) + l(G/N) = r + n - r = n = l(G)$$

y

$$\begin{aligned} fact(N) \cup fact(G/N) = &\{K_i/K_{i-1} \; ; \, i = 1, \ldots, r\} \cup \{K_j/K_{j-1} \; ; \, j = r+1, \ldots, n\} = \\ &\{K_i/K_{i-1} \; ; \, i = 1, \ldots, n\} = fact(G), \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. $\square$

Observación 1.7. Para finalizar la clase de hoy, es fácil ver que grupos finitos isomorfos tienen la misma longitud y los mismos factores de composición. Sin embargo no es cierto el recíproco pues C_6 y S_3 son grupos no isomorfos que tienen la misma longitud y los mismos factores de composición.

(Hacedlo como ejercicio!!)