Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

29 de abril de 2020

1. Tema 6: G-conjuntos y p-grupos.

1.1. G-conjuntos

En la clase de ayer introducíamos el concepto de acción de un grupo sobre un conjunto (G-conjunto) y vimos varios ejemplos. Nos ocuparemos hoy de introducir los conceptos de órbita y estabilizadores asociados a un G-conjunto y lo particularizaremos a los casos de la acción por conjugación de un grupo G sobre sí mismo (véase Ejemplo 1.10 del 28-abril-2020) y la acción por conjugación de un grupo G sobre el retículo de subgrupos $Sub(G)$ (véase Ejemplo 1.11 del 18-abril-2020).

Sea G un grupo y supongamos dado un G-conjunto X con acción

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \mapsto {}^{g}x.$$

Podemos entonces definir la siguiente **relación de equivalencia en el conjunto X asociada a la acción** que denotaremos simplemente por $\sim$:

Dados elementos $x, y \in X$ diremos que

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists g \in G \text{ tal que } \quad y = {}^{g}x. \tag{1.1}$$

Es fácil ver que $\sim$ es una relación de equivalencia (hacedlo como ejercicio).

Como siempre que se tiene una relación de equivalencia sobre un conjunto, se consideran las clases de equivalencia de los elementos de dicho conjunto, que llamaremos órbitas de la acción. Esto es:

Definición 1.1. *Sea G un grupo y X un G-conjunto. Para cada $x \in X$ definimos la* **órbita de** *x, que denotaremos por $O(x)$, como la clase de equivalencia de x por la relación de equivalencia (1.1), asociada a la acción de G sobre X. Esto es,*

$$O(x) = \{y \in X | x \sim y\} = \{y \in X | \exists g \in G \textit{ tal que } y = {}^{g}x\} = \{{}^{g}x | g \in G\}.$$

Desde la teoría general de clases de equivalencia, las órbitas verifican:

(a) $O(x) = O(y) \Longleftrightarrow x \sim y \Longleftrightarrow \exists g \in G$ tal que $y = {}^{g}x$.

(b) $O(x) \neq O(y) \Longleftrightarrow O(x) \cap O(y) = \emptyset$.

(c) El conjunto de las órbitas distintas, es decir el conjunto cociente $X/\sim$, constituye una partición del conjunto X. Esto es, si $X/\sim = \{O(x)/x \in X\}$, entonces $X = \bigcup_{x\in X} O(x)$ y esta unión es disjunta.

A las acciones para las que hay una única órbita o, en otros términos, todas las órbitas sean iguales, les daremos un nombre:

Definición 1.2. *Sea G un grupo y X un G-conjunto..*

Diremos que la acción es **transitiva** *si $X/\sim$ es unitario, es decir, si $O(x) = O(y)$, $\forall x, y \in X$. Notemos que por (a), esto es equivalente a decir que*

Transitividad: *Para cualesquiera $x, y \in X, \exists g \in G$ tal que $x = {}^{g}y$.*

Definimos a continuación los estabilizadores

Definición 1.3. *Sea G un grupo y X un G-conjunto. Para cada elemento x de X definimos el* **estabilizador** *de x en G, que denotaremos por $Stab_G(x)$, como:*

$$Stab_G(x) := \{g \in G|\, {}^{g}x = x\}.$$

En otros términos, el estabilizador del elemento x está formado por aquellos elementos de G que dejan fijo a x.

Es fácil ver que $Stab_G(x)$ es un subgrupo de G (hacedlo como ejercicio), llamado también el grupo de isotropía *del elemento x.*

Una primera relación de las órbitas con los estabilizadores la establece la siguiente

Proposición 1.4. *Sea G un grupo y X un G-conjunto. Si $x, y \in X$ son dos elementos que están en la misma órbita (i.e. $O(x) = O(y)$), entonces $Stab_G(x)$ y $Stab_G(y)$ son subgrupos de G conjugados.*

Demostración. Sean pues $x, y \in X$ dos elementos tales que $O(x) = O(y) \Rightarrow x \sim y$ y por tanto existirá $g \in G$ tal que $y = {}^{g}x$. Entonces ${}^{g^{-1}}y = {}^{g^{-1}}({}^{g}x) = {}^{g^{-1}g}x = {}^{1}x = x$.

Veamos que $gStab_G(x)g^{-1} = Stab_G(y)$: Lo vemos por doble inclusión. Sea $h \in Stab_G(x) \Rightarrow {}^{h}x = x$ entonces

$${}^{ghg^{-1}}y = {}^{gh}({}^{g^{-1}}y) = {}^{(gh)}x = {}^{g}({}^{h}x) = {}^{g}x = y$$

y por tanto $ghg^{-1} \in Stab_G(y)$ y tenemos que $gStab_G(x)g^{-1} \leq Stab_G(y)$.

Por un razonamiento análogo, tendremos que $g^{-1}Stab_G(y)g \leq Stab_G(x)$ y entonces, multiplicando por g en la izquierda y por g^{-1} en la derecha, tenemos que $Stab_G(y) \leq gStab_G(x)g^{-1}$. De la doble inclusión deducimos que

$$gStab_G(x)g^{-1} = Stab_G(y)$$

y por tanto $Stab_G(x)$ y $Stab_G(y)$ son subgrupos de G conjugados. □

Probamos ahora un resultado que nos dice que cuando el grupo G es finito entonces las órbitas también son finitas y además el número de elementos de cada órbita es un divisor del orden del grupo G.

Teorema 1.5. *Sea G un grupo finito que actúa sobre un conjunto X, entonces para cada $x \in X$, su órbita $O(x)$ es también un conjunto finito y, si denotamos por $|O(x)|$ al cardinal de la órbita de x, se verifica además que*

$$|O(x)| = [G : Stab_G(x)].$$

En particular, el cardinal de la órbita es un divisor del orden de G (i.e., $|O(x)|$ divide a $|G|$).

Demostración. Consideramos el conjunto $G/Stab_G(x) = \{gStab_G(x)/g \in G\}$ de clases laterales por la izquierda módulo $Stab_G(x)$ y sea

$$\Lambda : G/Stab_G(x) \to O(x) = \{\,^{g}x/g \in G\}$$

la aplicación definida

$$\Lambda(gStab_G(x)) := \,^{g}x.$$

Λ está bien definida pues si

$$\begin{aligned} gStab_G(x) = hStab_G(x) &\Rightarrow h^{-1}g \in Stab_G(x) \Rightarrow x = \,^{h^{-1}g}x \\ &\Rightarrow \,^{h}x = \,^{h}(\,^{h^{-1}g}x) = \,^{g}x \\ &\Rightarrow \Lambda(gStab_G(x)) = \Lambda(hStab_G(x)). \end{aligned}$$

y así Λ está bien definida. Es claro que Λ es sobreyectiva, veamos que también es inyectiva: Si

$$\begin{aligned} \Lambda(gStab_G(x)) = \Lambda(hStab_G(x)) &\Rightarrow \,^{g}x = \,^{h}x \\ &\Rightarrow \,^{g^{-1}}(\,^{g}x) = x = \,^{g^{-1}}(\,^{h}x) = \,^{g^{-1}h}x \\ &\Rightarrow g^{-1}h \in Stab_G(x) \Rightarrow gStab_G(x) = hStab_G(x). \end{aligned}$$

Consecuentemente la aplicación Λ es biyectiva y entonces como $G/Stab_G(x)$ es finito (por serlo el grupo G) también lo es $O(x)$ y además tienen el mismo número de elementos. Como por definición, $[G : Stab_G(x)]$ es el número de clases laterales por la izquierda módulo $Stab_G(x)$, esto es, el cardinal de $G/Stab_G(x)$, concluimos que

$$|O(x)| = [G : Stab_G(x)],$$

como queríamos demostrar. □

Veamos un ejemplo

Ejemplo 1.6. (Ejercicio 1.Relación 4)

Dado el conjunto $X = \{1, 2, 3, 4\}$; para cada subgrupo $H \leq S_4$ se considera la acción $^{\sigma}i := \sigma(i)$. Encontrar la órbita y el estabilizador del punto $2 \in X$ para los siguientes subgrupos:

1. $H = A_4$.
2. $H = K$ el subgrupo de Klein de A_4. .

1.: Para $H = A_4$ tenemos

$$O(2) = \{\,^{\sigma}2/\sigma \in A_4\} = \{\sigma(2)/\sigma \in A_4\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Como $[A_4 : Stab_{A_4}(2)] = |O(2)| = 4$ entonces $Stab_{A_4}(2)$ es un subgrupo de orden 3 de A_4 y éste es

$$Stab_{A_4}(2) = \{\sigma \in A_4 / {}^{\sigma}2 = 2\} = \{\sigma \in A_4/\sigma(2) = 2\} = \{id, (1\,3\,4), (1\,4\,3)\}.$$

2.:Para $H = K = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$ tenemos también

$$O(2) = \{{}^{\sigma}2/\sigma \in K\} = \{\sigma(2)/\sigma \in K\} = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Como $[K : Stab_K(2)] = |O(2)| = 4$ entonces $Stab_K(2)$ es un subgrupo de orden 1 de K, con lo que necesariamente

$$Stab_K(2) = \{id\}.$$

A continuación supondremos que no sólo G sino también X son finitos. Obtendremos una fórmula de cálculo del cardinal de X que tendrá importantes consecuencias cuando lo apliquemos a acciones específicas en la clase siguiente:

En primer lugar damos la siguiente

Definición 1.7. *Sea G un grupo y X un G-conjunto. Decimos que un elemento $x \in X$ es* **fijo** *por la acción si ${}^{g}x = x$ para todo elemento $g \in G$. Denotaremos por $Fix(X)$ al conjunto de elementos fijos, esto es*

$$Fix(X) := \{x \in X |\, {}^{g}x = x, \forall g \in G\}.$$

Observación 1.8.

- Notemos que

$$x \in Fix(X) \Longleftrightarrow O(x) = \{x\} \Longleftrightarrow Stab_G(x) = G.$$

- Sea G un grupo finito y X un G-conjunto finito, entonces $X/\sim$ será también un conjunto finito. Supongamos que

$$X/\!\sim = \{O(x_1), \dots O(x_n)\},$$

entonces, puesto que el conjunto de órbitas constituye una partición de X, tendremos que $|X| = \sum_{i=1}^{n} |O(x_i)|$. Ahora si $x_i \in Fix(X) \Rightarrow O(x_i) = \{x_i\} \Rightarrow |O(x_i)| = 1$, y entonces obtenemos la siguiente fórmula para el cálculo de $|X|$:

$$\begin{aligned} |X| &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} |O(x_i)| \\ &= |Fix(X)| + \textstyle\sum_{x_i \notin Fix(X)} |O(x_i)| \\ &= |Fix(X)| + \textstyle\sum_{x_i \notin Fix(X)} [G : Stab_G(x_i)] \end{aligned} \tag{1.2}$$