

COMPENDIO ENUNCIADOS TEMA 4

Daniel Monjas Miguélez

2 DGIIM Universidad de Granada

May 11, 2020

1 Funciones Medibles Lebesgue

Definición 1 Sea E un conjunto medible en \mathbb{R}^n . Sea f una función real definida en E , que es, $-\infty \leq f(x) \leq +\infty$, $x \in E$. Entonces, f es llamada función medible Lebesgue en E , o simplemente función medible, si para todo a finito, el conjunto

$$\{x \in E : f(x) > a\} \quad (1)$$

es un subconjunto medible de \mathbb{R}^n .

1.1 Propiedades elementales de las funciones medibles

Teorema 1 Sea f una función real definida en un conjunto medible E . Entonces E es medible si y sólo si cualquiera de las siguientes afirmaciones se cumple para cualquier a finito:

(i) $\{f \geq a\}$ es medible

(ii) $\{f < a\}$ es medible

(iii) $\{f \leq a\}$ es medible

Corolario 1 Sea f una función definida en un conjunto medible E . Si f es medible, entonces $\{f > -\infty\}$, $\{f < +\infty\}$, $\{a \leq f \leq b\}$, $\{f = a\}$, etc., son todos medibles. Además, para cualquier f , si bien $\{f = +\infty\}$ o $\{f = -\infty\}$ es medible, entonces f es medible si $\{a < f < +\infty\}$ es medible para todo a finito.

Teorema 2 Sea f una función definida en un conjunto medible E . Si f es medible, entonces para cada conjunto abierto G en \mathbb{R}^1 , la imagen inversa $f^{-1}(G)$ es un subconjunto medible de \mathbb{R}^n y ya sea $\{f = +\infty\}$ o $\{f = -\infty\}$ es medible.

Teorema 3 Sea A un subconjunto denso de \mathbb{R}^1 . Entonces f es medible si $\{f > a\}$ es medible para todo $a \in A$.

Definición 2 Una propiedad se dice que se verifica casi por doquier en E , si se verifica en E excepto en algún subconjunto de E cuya medida sea 0.

Teorema 4 Si f es medible y si $g = f$ casi por doquier, entonces g es medible y $\lambda(\{g > a\}) = \lambda(\{f > a\})$

Teorema 5 Sea ϕ continua en \mathbb{R}^1 y sea f finita por doquier en E , tal que, en particular, $\phi(f)$ es definida casi por doquier. Entonces $\phi(f)$ es medible si f lo es.

Remark 1 Los casos que surgen más frecuentemente son $\phi(t) = |t|$, $|t|^p$ ($p > 0$), e^{ct} , etc. Además,

$$|f|, |f|^p (p > 0), e^{cf} \quad (2)$$

son medibles si f es medible (incluso si no asumimos que f es finita casi por doquier, como se ve facilmente). Otro caso especial que merece mención es que

$$f^+ = \max\{f, 0\}, f^- = -\min\{f, 0\} \quad (3)$$

Es suficiente para observar que las funciones x^+ y x^- son continuas.

Demostración 1 Asumamos que f es finita en todo E . Usaremos el hecho de que $|\cdot|$ es continua, y sabemos que la inversa de un conjunto abierto por una función continua es un conjunto abierto. Por el Teorema 2 se tiene que para todo conjunto abierto G en \mathbb{R} , $\{x : |(f(x))| \in G\}$ es medible. Como sea, $\{x : |(f(x))| \in G\} = f^{-1}(|G|^{-1})$, y como $|G|^{-1}$ es un conjunto abierto, y f es medible, $f^{-1}(|G|^{-1})$ es medible por el Teorema 2.

Teorema 6 Si f y g son medibles, entonces $\{f > g\}$ es medible.

Demostración 2 Sea $\{r_k\}$ los números racionales. Entonces, por la densidad de los racionales, la definición de función medible, y el Teorema 1 de este compendio, sabemos que:

$$\{f > r_k\} \text{ y } \{g < r_k\} \quad (4)$$

son subconjuntos medibles para todo $r_k \in \{r_k\}$, pues cada r_k es un racional. Finalmente si escribimos el conjunto $\{f > g\}$ como unión numerable de conjuntos, pues la unión numerable de conjuntos medibles, es también un conjunto medible, se obtiene lo buscado. Entonces:

$$\{f > g\} = \cup_k \{f > r_k > g\} = \cup_k (\{f > r_k\} \cap \{g < r_k\}) \quad (5)$$

Como la intersección de dos conjuntos medibles es medible y la unión numerable de conjuntos medibles también es medible, queda demostrado el teorema.

Teorema 7 Si f es medible y μ es cualquier número real, entonces $f + \mu$ y $\mu * f$ son medibles.

Demostración 3 Sabemos que al ser f medible se verifica que $\{f > a\}$ para todo a finito. También se cumple que $a - \mu$ es un número real finito para todo a y μ finitos, y además todo número real finito, llámese $b \in \mathbb{R}$, se puede escribir como $b = a - \mu$. Finalmente llegamos a que $\{f + \mu > a\} = \{f > a - \mu = b\}$, que al ser $a - \mu = b$ finito, con $b \in \mathbb{R}$, se tendrá que $f + \mu$ verifica la definición de función medible. Luego queda demostrado que $\mu + f$ es una función medible.

Para el caso del producto diferenciaremos entre si $\mu > 0$, $\mu < 0$ y $\mu = 0$.

- Si $\mu > 0$ se tiene que $\{f * \mu > a\}$ para todo a finito. Sabemos que como μ es distinto de 0, $\frac{a}{\mu}$, será un número real finito por ser a y μ numeros reales finitos. Además, todo número real finito $b \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $b = \frac{a}{\mu}$, entonces, $\{f * \mu > a\} = \{f > \frac{a}{\mu}\}$, lo que implica que, $f * \mu$ es medible para $\mu > 0$.

- Si $\mu < 0$ la demostración es análoga a la anterior. Sabemos que $\frac{a}{\mu}$ es un real finito, y que todo $b \in \mathbb{R}$ se puede escribir como $b = \frac{a}{\mu}$, para algún a y algún μ . Finalmente, $\{f * \mu > a\} = \{f < \frac{a}{\mu}\}$ (el símbolo se invierte por ser μ un real negativo), obteniendo que se verifica la definición de función medible por el Teorema 1 (ii).
- Finalmente queda el caso en que $\mu = 0$ se pueden dar dos casos. El primero es que $\mu * f \geq a$, luego los conjuntos $\{f * \mu \geq a\}$ serán E , y por tanto serán medibles por el Teorema 1 (i). El otro caso es que $\mu * f < a$, luego el conjunto $\{f * \mu > a\}$, tendrá como único elemento el vacío, y por consiguiente será medible con medida 0.

Con esto queda demostrado que para todo $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu * f$ es medible.

Teorema 8 Si f y g son medibles, también lo es $f + g$.

Demostración 4 Por el teorema 7 tenemos que $a - g$, con a cualquier real, es medible. Ahora sabemos que $f + g$ es medible si $\{f + g > a\}$, para todo a finito. Por último, tenemos que $\{f + g > a\} = \{f > a - g\}$, que por el teorema 6 sabemos que es medible, y por tanto $f + g$ es una función medible.

Teorema 9 Si f y g son medibles, también lo es $f * g$. Si $g \neq 0$ casi por doquier, entonces f/g es medible.

Demostración 5 Por el Teorema 5 y el Remark que lo sigue, $f^2 (= |f|^2)$ es medible si f lo es. Por lo tanto, si f y g son medibles y finitas, la fórmula $f * g = [(f + g)^2 - (f - g)^2]/4$ implica que fg es medible. Ahora nos queda ver en el caso en el que no sean finitas es decir cuando fg es 0, $+\infty$ ó $-\infty$.

Veamos el caso en el que $fg = 0$. Denotemos B_1 al conjunto en el que f, g toman valores infinitos, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} B_1 = \{x : f(x) = 0 \text{ y } g(x) = 0\} \cup \{x : f(x) = 0 \text{ y } g(x) = +\infty\} \\ \cup \{x : f(x) = 0 \text{ y } g(x) = -\infty\} \cup \{x : f(x) = +\infty \text{ y } g(x) = 0\} \\ \cup \{x : f(x) = -\infty \text{ y } g(x) = 0\} \end{aligned} \quad (6)$$

Para el caso $fg = +\infty$, denotamos el conjunto B_2 tal que:

$$\begin{aligned} B_2 = \{x : f(x) > 0 \text{ y } g(x) = +\infty\} \cup \{x : f(x) < 0 \text{ y } g(x) = -\infty\} \\ \cup \{x : f(x) = +\infty \text{ y } g(x) > 0\} \cup \{x : f(x) = -\infty \text{ y } g(x) < 0\} \end{aligned} \quad (7)$$

Por último, sea el caso $fg = -\infty$, denotamos el conjuntos B_3 tal que:

$$\begin{aligned} B_3 = \{x : f(x) > 0 \text{ y } g(x) = -\infty\} \cup \{x : f(x) < 0 \text{ y } g(x) = +\infty\} \\ \cup \{x : f(x) = +\infty \text{ y } g(x) < 0\} \cup \{x : f(x) = -\infty \text{ y } g(x) > 0\} \end{aligned} \quad (8)$$

Para la última parte del teorema tomaremos el conjunto $B = \{x : 0 < |g(x)| < \infty\}$, en este conjunto se ignoran los x tal que $g(x) = 0$, ya que el conjunto de estas x tiene medida 0. Solamente tendremos que precisar que $1/g$ es medible sobre el conjunto B .

$$C = \{x \in B : 1/g(x) > a\} = \{x \in B : g(x) > 0\} \cap \{x \in B : a * g(x) < 1\} \cup \{x \in B : g(x) < 0\} \cap \{x \in B : a * g(x) > 1\} \quad (9)$$

Donde se puede ver que C , es unión e intersección numerable de conjuntos medibles ($a * g(x)$ medible por el Teorema 7), por consiguiente $1/g$ es una función medible, y por la primera parte de este mismo teorema $f * 1/g = f/g$ es medible. El caso de $\frac{1}{g(x)} = \pm\infty$, se tiene que $\{x : g(x) = \pm\infty\} = \{x : 1/g(x) = \pm\infty\}$, y por consiguiente al ser el primero un conjunto medible también lo es el segundo y por la primera parte del teorema en este caso también $\frac{f}{g}$ es una función medible.

Corolario 2 Una combinación lineal finita $\mu_1 * f_1 + \dots + \mu_n * f_n$ de funciones medibles f_1, \dots, f_n es medible supuesto que está bien definida. Así, la clase de funciones medibles en un conjunto E que son finitas casi por doquier en E forman un espacio vectorial; aquí, identificamos funciones medibles que son iguales casi por doquier.

Teorema 10 Si $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ es una secuencia de funciones medibles, entonces $\sup_k f_k(x)$ y $\inf_k f_k(x)$ son medibles.

Definición 3 Veamos que si f_1, \dots, f_n son medibles, entonces también lo son $\max_k f_k$ y $\min_k f_k$. En particular, si f es medible, también lo son $f^+ = \max\{f, 0\}$ y $f^- = -\min\{f, 0\}$, un hecho que se ya se ha observado como consecuencia del teorema 5.

Teorema 11 Si $\{f_k\}$ es una secuencia de funciones medibles, entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} \sup f_k$ y $\lim_{k \rightarrow \infty} \inf f_k$ son medibles. En particular, si $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ existe casi por doquier, es medible.

Teorema 12 (i) Toda función f puede ser escrita como el límite de una sucesión $\{f_k\}$ de funciones simples.

(ii) Si $f \geq 0$, la sucesión puede ser elegida para crecer hasta f , que es, elegida de forma que $f_k \leq f_{k+1}$ para todo k .

(iii) Si la función f es medible en (i) o en (ii), entonces f_k puede ser elegida para ser medible.

1.2 Funciones semicontinuas

Teorema 13 (i) Una función f es semicontinua superiormente relativa a E si y sólo si $\{x \in E : f(x) \geq a\}$ es relativamente cerrada (equivalentemente, $\{x \in E : f(x) < a\}$ es relativamente abierta) para todo a finito.

- (ii) Una función f es semicontinua inferiormente relativa a E si y sólo si $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ es relativamente cerrada (equivalentemente, $\{x \in E : f(x) > a\}$ es relativamente abierta) para todo a finito.

Corolario 3 Una función finita f es continua relativa a E si y sólo si todos los conjuntos de la forma $\{x \in E : f(x) \geq a\}$ y $\{x \in E : f(x) \leq a\}$ son relativamente cerrados (o, equivalentemente, todo $\{x \in E : f(x) > a\}$ y $\{x \in E : f(x) < a\}$ son relativamente abiertos) para a finito.

Corolario 4 Sea E medible, y sea f una función definida en E . Si f es semicontinua superiormente (semitcontinua inferiormente, continua) relativa a E , entonces f es medible.

1.3 Propiedades de funciones medibles y Teoremas de Egorov y Lusin

Definición 4 Sea f definida en E , y sea x_0 un punto límite de E que está en E . Entonces f es denominada semicontinua superiormente en x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0 : x \in E} \sup f(x) \leq f(x_0) \quad (10)$$

Análogamente, se dirá que f es semicontinua inferiormente en x_0 , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0 : x \in E} \inf f(x) \geq f(x_0) \quad (11)$$

Teorema 14 (Teorema de Egorov) Supóngase que $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles que converge casi por doquier en un conjunto E de medida finita a un límite finito f . Entonces dado $\epsilon > 0$, hay un subconjunto cerrado F de E tal que $\lambda(E - F) < \epsilon$ y $\{f_k\}$ converge uniformemente a f en F .

Lema 1 Bajo las mismas hipótesis que el teorema de Egorov, dado $\epsilon > 0$, $\eta > 0$, hay un F subconjunto cerrado de E y un entero K tal que $\lambda(E - F) < \eta$ y $\lambda(f(x) - f_k(x)) < \epsilon$ para $x \in F$ y $k > K$.

Definición 5 Una función f definida en un conjunto medible E tiene propiedad \mathcal{C} en E si dado $\epsilon > 0$, hay un subconjunto cerrado $F \subset E$ que

- (i) $\lambda(E - F) < \epsilon$
- (ii) f es continua relativa a F

Donde (ii) significa que si x_0 y $\{x_k\}$ pertenecen a F y $x_k \rightarrow x_0$, entonces $f(x_0)$ es finito y $f(x_k) \rightarrow f(x_0)$. Si F está acotado (y, por tanto, compacto), (ii) implica que la restricción de f a F es uniformemente continua.

Lema 2 Una función medible simple tiene propiedad \mathcal{C}

Teorema 15 (Teorema de Lusin) Sea f finita en un conjunto medible E . Entonces f es medible si y sólo si tiene propiedad \mathcal{C} en E .

1.4 Convergencia en medida

Definición 6 Sean f y $\{f_k\}$ funciones medibles que son definidas y finitas casi por doquier en un conjunto E . Entonces $\{f_k\}$ se dice convergente en medida a f en E si para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\}) = 0 \quad (12)$$

Notación: Usaremos la siguiente notación para indicar convergencia en medida

$$f_k \xrightarrow{m} f \quad (13)$$

Teorema 16 Sean f y f_k , $k = 1, 2, \dots$, medibles y finitas casi por doquier en E . Si $f_k \rightarrow f$ casi por doquier en E y $\lambda(E) < +\infty$, entonces $f_k \xrightarrow{m} f$ en E (f_k converge en medida a f).

Teorema 17 Si $f_k \xrightarrow{m} f$ en E , hay una subsucesión f_{k_j} tal que $f_{k_j} \rightarrow f$ casi por doquier en E .

Teorema 18 Una condición necesaria y suficiente para que $\{f_k\}$ converja en medida en E es que para cada $\epsilon > 0$,

$$\lim_{k, I \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in E : |f_k(x) - f_I(x)| > \epsilon\}) = 0 \quad (14)$$

2 La integral de Lebesgue

2.1 Definición de integral de una función no negativa

Definición 7 Sea una función no negativa f , $0 \leq f \leq +\infty$, definido en una conjunto medible E de \mathbb{R}^n . Sea

$$\begin{aligned} \Gamma(f, E) &= \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, f(x) < +\infty\} \\ R(f, E) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in E, 0 \leq y \leq f(x) \text{ si } f(x) < +\infty\} \end{aligned}$$

$\Gamma(f, E)$ es llamado gráfica de f sobre E y $R(f, E)$ la región por debajo de f sobre E .

Si $R(f, E)$ es medible, su medida $\lambda(R(f, E))$ es llamada la integral de Lebesgue sobre E , y se escribe

$$\lambda(R(f, E)) = \int_E f(x) dx \quad (15)$$

Teorema 19 Sea f una función no negativa definida en un conjunto medible E . Entonces $\int_E f$ existe si y sólo si f es medible

Lema 3 Sea E un subconjunto de \mathbb{R}^n , $0 \leq a \leq +\infty$, y definimos $E_a = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y \leq a\}$ para un a y $E_\infty = \{(x, y) : x \in E, 0 \leq y < +\infty\}$. Si E es medible, entonces E_a es medible y $\lambda(E_a) = a * \lambda(E)$.

Lema 4 Si f es una función medible no negativa en E , $0 \leq \lambda(E) \leq +\infty$, entonces $\Gamma(f, E)$ tiene medida cero.

Corolario 5 Si f es una función medible no negativa, tomando valores constante a_1, a_2, \dots (posiblemente $+\infty$) en conjuntos disjuntos E_1, E_2, \dots , respectivamente, y si $E = \cup E_j$, entonces

$$\int_E f = \sum_j a_j \lambda(E_j) \quad (16)$$

2.2 Propiedades de la integral

Teorema 20 (i) Si f y g son medible y si $0 \leq g \leq f$ en E , entonces $\int_E g \leq \int_E f$. En particular, $\int_E (\inf f) \leq \int_E f$.

(ii) Si f es no negativa y medible en E y si $\int_E f$ es finita, entonces $f < +\infty$ casi por doquier en E .

(iii) Sean E_1 y E_2 medibles y $E_1 \subset E_2$. Si f es no negativa y medible en E_2 , entonces $\int_{E_1} f \leq \int_{E_2} f$.

Teorema 21 (Teorema de convergencia monótona para funciones no negativas) Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas tal que $f_k \nearrow f$ en E , entonces

$$\int_E f_k \rightarrow \int_E f$$

Teorema 22 Suponga que f es no negativa y medible en E y que E es la unión disjunta de conjuntos medibles E_j , $E = \cup E_j$. Entonces

$$\int_E f = \sum \int_{E_j} f$$

Teorema 23 Sea f no negativa y medible en E . Entonces

$$\int_E f = \sup \sum_j [\inf_{x \in E_j} f(x)] \lambda(E_j)$$

donde el supremo es tomado entre todas las descomposiciones $E = \cup_j E_j$ de E como unión de un número finito de conjuntos medibles disjuntos E_j

Teorema 24 Sea f no negativa en E . Si $\lambda(E) = 0$, entonces $\int_E f = 0$.

Teorema 25 Si f y g son no negativas y medibles en E y si $g \leq f$ c.p.d en E , entonces $\int_E g \leq \int_E f$.

En particular, si f y g son no negativas y medibles en E y si $f = g$ c.p.d en E , entonces $\int_E f = \int_E g$

Teorema 26 Sea f no negativa y medible en E . Entonces $\int_E f = 0$ si y sólo si $f = 0$ c.p.d en E .

Corolario 6 (Desigualdad de Tchebyshev) Sea f medible y no negativa en E . Si $\alpha > 0$, entonces

$$\lambda(\{x \in E : f(x) > \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_E f$$

Teorema 27 Si f es no negativa y medible, y si c es cualquier constante no negativa, entonces

$$\int_E cf = c \int_E f$$

Teorema 28 Si f y g son no negativas y medibles, entonces

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g$$

Corolario 7 Suponga que f y ϕ son medibles en E , $0 \leq f \leq \phi$, y $\int_E \phi$ es finita. Entonces

$$\int_E (\phi - f) = \int_E \phi - \int_E f$$

Teorema 29 Si f_k , $k = 1, 2, \dots$, son no negativas y medibles, entonces

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k$$

Teorema 30 (Lema de Fatou) Si $\{f_k\}$ es una sucesión de funciones medibles no negativas en E , entonces

$$\int_E \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k \right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k$$

Corolario 8 Sea f_k , $k = 1, 2, \dots$, medible y no negativa en E , y sea $f_k \rightarrow f$ c.p.d. Si $\int_E f_k \leq M$ para todo k , entonces $\int_E f \leq M$.

Teorema 31 (Convergencia Dominada de Lebesgue para funciones no negativas) Sea $\{f_k\}$ un sucesión de funciones medibles no negativas en E tal que $f_k \rightarrow f$ c.p.d en E . Si existe una función medible ϕ tal que $f_k \leq \phi$ c.p.d para todo k y si $\int_E \phi$ es finita, entonces

$$\int_E f_k \rightarrow \int_E f$$

2.3 La integral de una Función Medible Arbitraria f

Definición 8 Sea f cualquier función medible definida en un conjunto E . Entonces $f = f^+ - f^-$ (por resultados anteriores f^+ y f^- son medibles. Además, las integrales $\int_E f^+(x)dx$ y $\int_E f^-(x)dx$ existe y son no negativas, posiblemente con valor $+\infty$. Dado que al menos una de estas integrales sea finita, definimos

$$\int_E f(x)dx = \int_E f^+(x)dx - \int_E f^-(x)dx$$

y digamos que la integral $\int_E f(x)dx$ existe. Si $\int_E f$ existe, por supuesto, $-\infty \leq \int_E f \leq +\infty$. Si \int_E existe y es finita, decimos que f es Lebesgue integrable, o simplemente integrable, en E y escribimos $f \in L(E)$. Además,

$$L(E) = \{f : \int_E f \text{ es finita}\}$$

Teorema 32 Sea f medible en E . Entonces f es integrable sobre E si y sólo si $|f|$ lo es.

Teorema 33 Si $f \in L(E)$, entonces f es finita c.p.d en E .

Teorema 34 (i) Si ambas $\int_E f$ y $\int_E g$ existen y si $f \leq g$ c.p.d en E , entonces $\int_E f \leq \int_E g$. También, si f y g son funciones con $f = g$ c.p.d en E y si $\int_E f$ existe, entonces $\int_E g$ existe y $\int_E f = \int_E g$.

(ii) Si $\int_{E_2} f$ existe y E_1 es un subconjunto medible de E_2 , entonces $\int_{E_1} f$ existe.

Teorema 35 Si $\int_E f$ existe y $E = \cup_k E_k$ es la unión numerable de conjuntos medibles disjuntos E_k , entonces

$$\int_E f = \sum_k \int_{E_k} f$$

Teorema 36 Si $\lambda(E) = 0$ o si $f = 0$ c.p.d en E , entonces $\int_E f = 0$.

Lema 5 Si $\int_E f$ está definida, entonces también lo está $\int_E (-f) = -\int_E f$.

Teorema 37 Si $\int_E f$ existe y c es cualquier constante real, entonces $\int_E (cf)$ existe y

$$\int_E (cf) = c \int_E f.$$

Teorema 38 Si $f, g \in L(E)$, entonces $f + g \in L(E)$ y

$$\int_E (f + g) = \int_E f + \int_E g.$$

Corolario 9 Sean f y ϕ medible en E , $f \geq \phi$ c.p.d, y $\phi \in L(E)$. Entonces,

$$\int_E (f - \phi) = \int_E f - \int_E \phi$$

Teorema 39 Si $f \in L(E)$, g es medible en E , y existe una constante finita M tal que $|g| \leq M$ c.p.d en E , entonces $fg \in L(E)$ y $\int_E |fg| \leq M \int_E |f|$.

Corolario 10 Si $f \in L(E)$, $f \geq 0$ c.p.d, y existen constantes finita α y β tal que $\alpha \leq g \leq \beta$ c.p.d en E , entonces

$$\alpha \int_E f \leq \int_E fg \leq \beta \int_E f$$

Teorema 40 (Teorema de Convergencia Monotona) Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones medibles en E :

- (i) Si $f_k \nearrow f$ c.p.d en E y existe $\phi \in L(E)$ tal que $f_k \geq \phi$ c.p.d en E para todo k , entonces $\int_E f_k \rightarrow \int_E f$.
- (ii) Si $f_k \searrow f$ c.p.d en E y existe $\phi \in L(E)$ tal que $f_k \leq \phi$ c.p.d para todo k , entonces $\int_E f_k \rightarrow \int_E f$.

Teorema 41 (Teorema de Convergencia Uniforme) Sea $f_k \in L(E)$ para $k = 1, 2, \dots$, y sea $\{f_k\}$ convergente uniformemente a f en E , $\lambda(E) < \infty$. Entonces $f \in L(E)$ y $\int_E f_k \rightarrow \int_E f$.

Lema 6 (Lema de Fatou) Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones medibles en E . Si existe $\phi \in L(E)$ tal que $f_k \geq \phi$ c.p.d en E para todo k , entonces

$$\int_E (\liminf_{k \rightarrow \infty} f_k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k$$

Corolario 11 Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones medibles en E . Si existe $\phi \in L(E)$ tal que $f_k \leq \phi$ c.p.d en E para todo k , entonces

$$\int_E (\limsup_{k \rightarrow \infty} f_k) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k$$

Teorema 42 (Teorema de Lebesgue de Convergencia Dominada) Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones medibles en E tal que $f_k \rightarrow f$ c.p.d en E . Si existe $\phi \in L(E)$ tal que $|f_k| \leq \phi$ c.p.d en E para todo k , entonces $\int_E f_k \rightarrow \int_E f$.

Corolario 12 (Teorema de Convergencia Acotada) Sea $\{f_k\}$ una sucesión de funciones medibles en E tal que $f_k \rightarrow f$ c.p.d en E . Si $\lambda(E) < +\infty$ y hay una constante M finita tal que $|f_k| \leq M$ c.p.d, entonces $\int_E f_k \rightarrow \int_E f$.

2.3.1 Integral de Lebesgue vs. Integral de Riemann

Toda integral de Riemann es integrable en el sentido de Lebesgue y ,es más, el valor es el mismo. La ventaja de la integral de Lebesgue es que se podrán integrar más funciones.

Teorema 43 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Si f es integrable-Riemann entonces, f es integrable-Lebesgue. En tal caso $(L) \int_{[a,b]} f = (R) \int_a^b f$.

Teorema 44 (Integrales "impropias" de Riemann) a) Sea $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, tal que es integrable Riemann (y acotada) sobre cualquier intervalo de la forma $[a + \epsilon, b]$, ($\epsilon > 0$). Llamamos $I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (R) \int_{a+\epsilon}^b f$.

(Observación: $0 \leq I \leq \infty$)

Entonces f es medible (según Lebesgue), y existe $\int_E f$ con $(L) \int_a^b f = I$

b) Sea $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ tal que es integrable-Riemann (y acotada) sobre cualquier intervalo de la forma $[a, M]$ ($M > a$). Llamamos $I = \lim_{M \rightarrow +\infty} (R) \int_a^M f$ ($0 \leq I \leq +\infty$).

Entonces f es medible (Lebesgue), y existe $\int_E f$ con $(L) \int_{[a,b]} f = I$.

Observación: Si f cambia de signo, podría ser impropriamente integrable-Riemann, y no Lebesgue.

Ejemplo: Sea $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Existe $I = \lim_{M \rightarrow +\infty} (R) \int_1^M f(x) dx$. Esta función f es impropriamente integrable-Riemann, pero no es integrable para Lebesgue, ya que $\int_E |f|$ no es menor que infinito, luego la integral de f no existe pues, $\int_E f^+ = \infty$ y $\int_E f^- = \infty$

Teorema 45 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. f es integrable-Riemann, si y sólo si, f es continua c.p.d en $[a, b]$.

Teorema 46 (Teorema de la Convergencia Absoluta) Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ medible, $f_n : E \rightarrow [-\infty, +\infty]$ integrables $\forall n \in \mathbb{N}$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| < \infty$$

Entonces la serie $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge absolutamente c.p.d en E . (Es decir, $\sum_{n \geq 1} |f_n(x)|$ converge c.p.d) y, llamando $F = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$, se tiene que $F \in L(E)$, con $\int_E |F - \sum_{n=1}^{\infty} f_n| \rightarrow 0$, en consecuencia $\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n$.

Ejemplo: Probar que $\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} * \frac{1}{2n+1} < \infty$. Usando el desarrollo de Taylor de la función seno:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}; \quad \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \\ \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} \stackrel{??}{\rightarrow} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!} dx \end{aligned}$$

Ejemplo: Probar que $\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(2n+1)} < \infty$. (Con el criterio de cociente se puede comprobar que la serie es convergente) (Escribir en forma de serie de potencias la función elevada al cuadrado). Sale con el Teorema de la convergencia monótona para funciones no negativas.

2.3.2 Integrales dependientes de un parámetro

Consideremos familias de funciones en $L(E)$ dependientes de un parámetro. Sea $I \subset \mathbb{R}$ intervalo:

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow L(E) \\ t &\longmapsto f_t : E \rightarrow [-\infty, +\infty] \\ &\quad x \longmapsto f_t(x) \end{aligned}$$

Otra forma de notarlo sería $f_t(x) = f(t, x)$. f_t se denota $f(t, \cdot) \in L(E)$, con esto nos referimos a t quieta y x moviéndose. Otro tipo de denotar sería $f(\cdot, x)$ significa x fijo y t variable.

$$\begin{aligned} &\text{Podemos calcular, para cada } t \in I, \int_E f_t = (\in \mathbb{R}) \\ \varphi : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \int_E f_t(x) dx = \int_E f(t, x) dx \end{aligned}$$

Estudiaremos bajo qué condiciones φ es continua o derivable (esto implica continuidad).

Teorema 47 (Límites en integrales dependientes de un parámetro) Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ medible, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $\alpha \in I'$ (acumulación).

Sea $f : I \times E \rightarrow [-\infty, +\infty]$, supongamos que:

- (i) $\forall t \in I$ la función $f(t, \cdot) \in L(E)$
- (ii) $\forall x \in E$ la función $f(\cdot, x)$ tiene límite ($t \rightarrow \alpha$)
- (iii) $\exists \phi \in L(E) : |f(t, x)| \leq \phi(x)$ c.p.d en E , $\forall t \in I$.

Entonces la función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_E f(t, x) dx = \int_E f(t, \cdot)$, tiene límite para $t \rightarrow \alpha$.

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \int_E f(t, x) dx \right) = \int_E \lim_{t \rightarrow \alpha} f(t, x) dx$$

Idea de la dem: Sea $t_n \rightarrow \alpha$ con $t_n \in I \setminus \{\alpha\}$.

$f_n = f(t_n, \cdot)$ y aplicar T.C.D.

Teorema 48 (Continuidad de integrales dependientes de un parámetro)
 Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ medible, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, $\alpha \in I$. Sea $f : I \times E \rightarrow [-\infty, +\infty]$, supongamos que:

- (i) $\forall t \in I$, la función $f(t, \cdot) \in L(E)$
- (ii) $\forall x \in E$, la función $f(\cdot, x)$ es continua en α .
- (iii) $\exists \phi \in L(E) : |f(t, x)| \leq \phi(x)$ c.p.d en E , $\forall t \in I$.

Entonces la función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_E f(t, \cdot) = \int_E f(t, x) dx$ es continua en α .

Teorema 49 (Derivabilidad de integrales dependientes de un parámetro)
 Sea $E \subset \mathbb{R}^N$ medible, $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, sea $f : I \times E \rightarrow [-\infty, +\infty]$, supongamos que:

- (i) $\forall t \in I$, la función $f(t, \cdot) \in L(E)$.
- (ii) $\forall x \in E$, la función $f(\cdot, x)$ es derivable en I .
- (iii) $\exists \phi \in L(E) : \left| \frac{\partial f(t, x)}{\partial t} \right| \leq \phi(x)$ c.p.d en E , $\forall t \in I$.

Entonces la función $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \int_E f(t, \cdot) = \int_E f(t, x) dx$, es derivable en α , con

$$\varphi'(\alpha) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(\alpha, x) dx \quad (17)$$

Ejemplo: La "función Gamma" de Euler.

$$\Gamma :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \Gamma(t) = \int_0^{+\infty} f(t, \cdot) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} \cdot e^{-x} dx$$

$$f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(t, x) = x^{t-1} e^{-x}.$$

Ejemplo: Sea $\{r_n\}$ una numeración de $Q \cap [0, 1] = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ ($r_n \neq r_m \forall n \neq m$).

Sea $\{a_n\}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ($\Leftrightarrow \sum_{n \geq 1} a_n$ absolutamente convergente).

3 Cálculo de integrales y estudio de integrabilidad

3.0.1 Integrales simples (dimensión N=1)

Definición 9 Sea $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diremos que "f es localmente acotada" si está acotada en todo intervalo compacto contenido en I.

Diremos que "f es localmente integrable" si es integrable en todo intervalo compacto contenido en I.

Ejemplos: $I =]\alpha, \beta[, -\infty \leq \alpha \leq \beta \leq +\infty$, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces f es localmente acotada (por Weierstrass).

f continua \Rightarrow medible y $J \subset I$, $f|_J$ acotada y $\lambda(J) = \text{long}(J) < \infty$, entonces $f|_J$ integrable $\Rightarrow f$ es localmente integrable.

Para estudiar integrales (calcular $\int_J f$) (ó integrabilidad) de una función "continua a trozos". Calcularemos (ó acotaremos) las integrales en cada "trozo" (Riemann). En cada "trozo":

- Regla de Barrow
- Integración "por partes"
- Cambios de variable

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ ($p \in \mathbb{R}$ fijo)

- ¿Es f localmente integrable?
- ¿Es f integrable en $]0, 1[$?
- ¿Es integrable en $[1, +\infty[$?
- ¿Es f integrable en \mathbb{R}^+ ?

1. Si J es un intervalo compacto de la forma $J = [a, b] \subset \mathbb{R}^+$ con $0 < a < b < +\infty$

$f|_J$ es continua \Rightarrow acotada \Rightarrow integrable (sí, es localmente integrable)

2. ¿ $\int_{]0,1[} f < \infty$? $\Leftrightarrow f$ impropriamente integrable Riemann en $]0, 1[\Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f(x) dx < \infty?$$

\int_0^1 casos:

- ($p \neq -1$) $\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1$ casos:
 - ($p+1 > 0$) $\frac{1}{p+1} - 0 = \frac{1}{p+1} < \infty$
 - ($p+1 < 0$) $\frac{1}{p+1} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{p+1}}{p+1} = +\infty$
- ($p = -1$) $[\ln(x)]_0^1 = \ln 1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = 0 - (-\infty) = +\infty$

$$f(x) = x^p \in L([0, 1]) \Leftrightarrow p > -1$$

3. ¿ $\int_{[1, +\infty[} f < \infty$? $\Leftrightarrow (R) \int_1^{+\infty} f(x) dx < \infty$.

$$(R) \int_1^{+\infty} f(x) dx = (R) \int_1^{+\infty} x^p dx = (\text{casos})$$

- ($p+1 > 0$) $\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_1^{+\infty} = \infty - 1 = \infty$
- ($p = -1$) $[\ln x]_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) - \ln 1 = +\infty$

- $(p + 1 < 0) \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \right]_1^{+\infty} = 0 - \frac{1}{p+1} \in \mathbb{R}^+ \quad (< \infty)$

$$f(x) = x^p \in L([1, +\infty]) \Leftrightarrow p < -1$$

4. Nunca, $x^p \in L(\mathbb{R}^+) \Leftrightarrow$

- $\in L([0, 1]) \Leftrightarrow p > -1$

- $\in L([1, +\infty]) \Leftrightarrow p < -1$

ningún valor de p nos da que $x^p \in L(\mathbb{R}^+)$

$$\forall p \in \mathbb{R} \text{ (fijo)} \quad f(x) = x^p \notin L(\mathbb{R}^+)$$

Una consecuencia: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente.

$$\int_{\mathbb{R}^+} f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{[n-1, n]} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$f \leq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^+} f \leq 1 + \int_1^{+\infty} g$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \int_1^{+\infty} x^{-2} dx = 2$ (igual sería, $\sum n^p$ converge para cualquier $p < -1$).

3.1 Criterio de comparación para integrabilidad

$f \in L(I)$?

Si f es localmente integrable en I

$$f \in L(I) \Leftrightarrow (c \in I) \text{ (casos :)}$$

- $f \in L([\alpha, c])$

- $f \in L([c, \beta])$

Estudiaremos intervalos de la forma $[c, \beta[$ ($[\alpha, c]$ análogo).

Criterio de comparación: Si $f : [c, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que existe $g \in L([c, \beta])$ tal que $|f| \leq g$. Entonces $f \in L([c, \beta[)$

Criterio de comparación "por paso al límite": Sea $-\infty < c < \beta \leq +\infty$,

$f, g : [c, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ localmente integrable, con $g \neq 0 \forall x$ supongamos que

$$\lim_{x \rightarrow \beta^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Entonces:

(i) Si $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ f integrable en $[c, \beta[\Leftrightarrow g$ integrable en $[c, \beta[$

(ii) Si $L=0$ y g integrable $[c, \beta[\Rightarrow f$ integrable en $[c, \beta[$

(iii) Si $L = \pm\infty$ y f integrable en $[c, \beta[\Rightarrow g$ integrable en $[c, \beta[$

Demostración (es un corolario del criterio de comparación):

$$(i) \quad L \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lim_{x \rightarrow \beta} \frac{f(x)}{g(x)} = L \exists d \in [c, \beta[: \forall x > d \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < 2|L|$$

$$\frac{|L|}{2} |g(x)| < |f(x)| < 2|L| |g(x)|$$

en $[c, d]$ hay integrabilidad (es compacto), y en $[d, \beta[$ hacemos la comparación (la desigualdad anterior).

Ejemplo: $f(x) = x^p e^{-x}$ ($p \in \mathbb{R}$ fijo) en $]0, 1]$ $f(x) = x^p e^{-x} \Rightarrow$
 $\frac{1}{e} x^p \leq f(x) = x^p e^{-x} \leq x^p$
 $x^p \in L(]0, 1]) \Leftrightarrow p > -1$
 En $[1, +\infty[$ $f(x) = x^p e^{-x}$, $\sum_{n \geq 1} n^p e^{-n}$

Sea $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ ($-2 < -1$) $g \in L([1, +\infty[)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{p+2} * e^{-x} = 0$$

$$g \in L([1, +\infty[) \Rightarrow f \in L([1, \infty[)$$

$$f \in L(]0, +\infty)) \Leftrightarrow p > -1$$

4 Ejercicios

Ejercicio 4. Sea f definida y medible en \mathbb{R}^n . Si T es una transformación lineal no singular de \mathbb{R}^n , demuestra que $f(Tx)$ es medible.

Utilizando la pista del libro consideramos los conjuntos $E_1 = \{x : f(x) > a\}$ y $E_2 = \{x : f(Tx) > a\}$, donde el primero es medible para todo a finito, por ser f una función medible, y el segundo es el que queremos comprobar que sea medible. Para ello se tiene que verificar que $T^{-1}(E_1) = E_2$, pues de esta manera implicaría que E_2 es un conjunto medible por el Teorema 3.33. Para ello haremos:

$$E_2 = \{y : f(Ty) > a\} \xrightarrow{y=T^{-1}x} \{T^{-1}x : f(TT^{-1}x) > a\} = \{T^{-1}x : f(x) > a\} = T^{-1}E_1$$

Por el Teorema 3.33, al ser E_1 medible, la inversa de un medible es medible, por tanto, E_2 es medible, y por consiguiente la composición $f(Tx)$ es medible por serlo el conjunto E_2 .

Ejercicio 7. Sea f semicontinua superiormente, menor que $+\infty$ en un conjunto compacto E . Demuestra que f está acotada superiormente en E . Demuestra que f alcanza su máximo en E , que es, que existe $x_0 \in E$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in E$.

Sabemos que el conjunto $\{x \in E : -\infty \leq f(x) < +\infty\} = E$. Además se tiene que $E \subset \{x : -\infty \leq f(x) \leq +\infty\}$, y por lo tanto,

$$B = \{x : -\infty \leq f(x) \leq +\infty\} - E \neq \emptyset$$

por tanto sea c un punto del conjunto B , este verificará que $f(c) > f(x)$ para todo $x \in E$, por consiguiente se tiene que f está acotada superiormente.

Ahora sea M el supremo de f , y vemos que $M - \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ no puede ser supremo. Entonces, existe un punto $d_n \in E$, tal que $M - \frac{1}{n} < f(d_n)$. Esto genera una sucesión $\{d_n\}$ según vamos dando valores naturales a n . Como M es supremo de f , se tiene que $M - \frac{1}{n} < f(d_n) \leq M$ para todo n natural. Entonces, si hacemos tender n hacia infinito por el "Lema del Sandwich (notación del año pasado)", tenemos que $\{f(d_n)\}$ converge a M . Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que existe una subsucesión $\{d_{n_k}\}$, que converge a un punto d , y, dado que E es compacto, d está en E . Entonces tenemos que, la sucesión $\{f(d_{n_k})\}$ converge a $f(d)$. Como esta es una subsucesión de $f(d_n)$ y esta última converge al supremo se tiene que $f(d) = M$. Como hemos visto que el punto d pertenece al conjunto E , llegamos a la conclusión de que el supremo pertenece a E y por tanto en E se alcanza un máximo.

Ejercicio Propuesto 3 Abril. Constatar el teorema de Lusin con la función característica de los racionales. Es una función medible, por tanto el Teorema de Lusin afirma que para todo $\epsilon > 0$ existe un F cerrado ... (**describir el cerrado F**).

En primer lugar definiremos la función,

$$\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

,donde si x es racional $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 1$ y si x es irracional $\chi_{\mathbb{Q}}(x) = 0$. Ahora para todo $\epsilon > 0$ definimos el conjunto $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} [q_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}]$ que es un conjunto abierto por ser unión de abiertos. Además como los racionales son numerables, todo $\mathbb{Q} \subset A$. Ahora veamos la medida del conjunto:

$$\lambda(A) = \lambda(\cup_{n \in \mathbb{N}} [q_n - \frac{\epsilon}{2^{n+1}}, q_n + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}]) < \sum_{n \in \mathbb{N}} 2 * \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \epsilon \quad (18)$$

Hemos obtenido un abierto cuya medida es menor que ϵ . Tomando su complementario $F = A^c$ obtenemos un cerrado tal que $\lambda(\mathbb{R} \setminus F) < \epsilon$. Ahora sólo nos queda ver que la función restringida a este conjunto es continua. Como $\mathbb{Q} \subset A$ se tiene que $F \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ y por consiguiente para todo $x \in F$, $\chi_{\mathbb{Q}|F}(x) = 0$, por lo tanto al ser constante se verifica que es continua en F , y finalmente $\chi_{\mathbb{Q}}$ verifica el teorema de Lusin.

Ejercicio Propuesto 3 Abril. Escribir en detalle la condición de Cauchy para la convergencia en medida.

Condición suficiente y necesaria para que $\{f_n\}$ converja en medida en E . Para todo $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $p, q \geq n_1$ se verifique que,

$$A_{p,q} = \{x \in E : |f_p(x) - f_q(x)| > \epsilon\} \quad (19)$$

Ahora, para todo $\epsilon' > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq n_2$ se verifica que:

$$|\lambda(A_{p,q})| < \epsilon' \quad (20)$$

Esta condición es suficiente y necesaria para que $\{f_n\}$ converja en medida en E.

Para la segunda parte demostraremos que si $\epsilon = \epsilon'$, se sigue verificando. Estudiaremos dos casos:

- Si $\epsilon > \epsilon'$ claramente al tomar $n_2 = n_1$ y $\epsilon' = \epsilon$ se seguirá verificando el enunciado, pues si para $\epsilon' > 0$ se verificaba que $\lambda(A_{p,q}) < \epsilon'$ como $\epsilon > \epsilon'$ se seguirá verificando que $\lambda(A_{p,q}) < \epsilon$. Y al sustituir n_2 por n_1 no aseguramos de que se siga verificando que $\{x \in E : |f_p(x) - f_q(x)| < \epsilon\}$
- Si $\epsilon' > \epsilon$ claramente al tomar $n_1 = n_2$ y $\epsilon = \epsilon'$ se verificará que $|\lambda(A_{p,q})| < \epsilon'$, ya que al sustituir ϵ por ϵ' , los conjuntos $\{x \in E : |f_p(x) - f_q(x)| > \epsilon'\}$ tendrá menos puntos, y por consiguiente su medida, si es que se reduce, será menor. Además al sustituir n_1 por n_2 , de lo que nos aseguramos es de que la función de medida λ con los conjuntos $A_{p,q}$ siga convergiendo a 0.