Relación 2

—

Derivación e integración numérica

Versión 12/4/2021 (soluciones)

1. *a*) Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia progresiva en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   b) Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f_2 \in \mathcal{C}^2[a, a+h]$.

   c) Use el método interpolatorio para obtener la fórmula de diferencia centrada en dos nodos para aproximar $f'(a)$. ¿Cuál es el grado de exactitud de dicha fórmula? Justifique la respuesta.

   d) Utilice la fórmula de Taylor para hallar la fórmula mencionada en el apartado anterior y la expresión de su error cuando $f_2 \in \mathcal{C}^3[a-h, a+h]$.

Solución.

a) $f'(a) \approx \alpha_0 f(a+h) + \alpha_1 f(a)$.

$$\begin{array}{c|c} a & f(a) \\ a+h & f(a+h) \end{array} \quad \tfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a))$$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a) + (x-a)\tfrac{1}{h}(f(a+h)-f(a)) \\ p'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \end{aligned}$$

Ya es exacta en $\mathbb{P}_1$ por construcción. No es exacta en x^2.

b)

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2 \\ f'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi) \end{aligned}$$

c) $f'(a) \approx \alpha_0 f(a+h) + \alpha_1 f(a-h)$.

$$\begin{array}{c|c} a-h & f(a-h) \\ a+h & f(a+h) \end{array} \quad \tfrac{1}{2h}(f(a+h)-f(a-h))$$

$$\begin{aligned} p(x) &= f(a-h) + (x-a+h)\tfrac{1}{2h}(f(a+h)-f(a-h)) \\ p'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \end{aligned}$$

Ya es exacta en $\mathbb{P}_1$ por construcción. También lo es en x^2. No es exacta en x^3.

d)

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}h^3 \\ f(a-h) &= f(a) - f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!}h^3 \end{aligned}$$

Se combinan ambos desarrollos con α_0, α_1 para que se anule la columna en $f(a)$ y resulte 1 la columna en $f'(a)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h & -h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{1}{2h} \\ \alpha_1 = -\frac{1}{2h} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \\ &= \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{6}f'''(\xi) \end{aligned}$$

2. Usando el método de los coeficientes indeterminados deduzca la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f'(a)$ y compruebe que coincide con la fórmula de diferencia centrada en dos nodos.

Solución. La fórmula es

$$f'(a) = \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h) + R(f),$$

y obligando exactitud en $\mathbb{P}_2$ se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-h & a & a+h \\ (a-h)^2 & a^2 & (a+h)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{2h} \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = \frac{1}{2h} \end{cases}$$

y como $\alpha_1 = 0$, la formula centrada en dos nodos $a-h$ y $a+h$ ha de ser la misma. En efecto, para

$$f'(a) = \alpha_0 f(a-h) + \alpha_1 f(a+h) + R(f),$$

obligando exactitud en $\mathbb{P}_1$ se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a-h & a+h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = -\frac{1}{2h} \\ \alpha_1 = \frac{1}{2h} \end{cases}$$

3. Obtenga la fórmula de diferencia progresiva en tres nodos para aproximar $f'(a)$ calculando directamente sus coeficientes mediante la base de Lagrange del problema de interpolación unisolvente asociado a dicha fórmula. Halle la expresión del error para esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^4[a, a+2h]$.

Solución. Modelo de fórmula, polinomios fundamentales de Lagrange y coeficientes:

$$\begin{aligned}
f'(a) &\approx \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(a+h) + \alpha_2 f(a+2h) \\
\ell_0 &= \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{-h(-2h)} = \frac{(x-a-h)(x-a-2h)}{2h^2}; \quad \alpha_0 = \ell_0'(a) = -\tfrac{3}{2h} \\
\ell_1 &= \frac{(x-a)(x-a-2h)}{h(-h)} = \frac{(x-a)(x-a-2h)}{-h^2}; \quad \alpha_1 = \ell_1'(a) = \tfrac{2}{h} \\
\ell_2 &= \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h \cdot h} = \frac{(x-a)(x-a-h)}{2h^2}; \quad \alpha_2 = \ell_2'(a) = -\tfrac{1}{2h}
\end{aligned}$$

Error de interpolación y término de error de la fórmula:

$$\begin{aligned}
E(f) &= f[a, a+h, a+2h, x](x-a)(x-a-h)(x-a-2h) \\
R(f) &= E'(a) = f[a, a+h, a+2h, a](-h)(-2h) = 2h^2 \frac{1}{3!} f'''(\xi) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi).
\end{aligned}$$

4. Se considera la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_n$ siguiente:

$$f''(c) \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \cdots + \alpha_n f(x_n)$$

con $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. Demuestre que si $f \in \mathcal{C}^{n+3}[a,b]$ con $[a,b]$ tal que $x_0, x_1, \cdots, x_n, c \in [a,b]$, entonces

$$R(f) = 2\frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c)$$

siendo $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2 \in]\text{mín}\{x_0, c\}, \text{máx}\{x_n, c\}[$ y $\Pi(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$.

Solución. $R(f) = L(E)$ siendo $L(f) = f''(c)$ y $E(x)$ el error de interpolación. Derivando dos veces, sustituyendo y aplicando propiedades de las diferencias divididas se tiene

$$\begin{aligned}
E(x) &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi(x) \\
E'(x) &= f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]\Pi(x) + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi'(x) \\
E''(x) &= 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x, x]\Pi(x) + 2f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x, x]\Pi'(x) \\
&\quad + f[x_0, x_1, \ldots, x_n, x]\Pi''(x) \\
L(E) = E''(c) &= 2\frac{f^{(n+3)}(\xi_2)}{(n+3)!}\Pi(c) + 2\frac{f^{(n+2)}(\xi_1)}{(n+2)!}\Pi'(c) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_0)}{(n+1)!}\Pi''(c).
\end{aligned}$$

5. Use el método de los coeficientes indeterminados para obtener la fórmula de diferencia regresiva en tres nodos para aproximar $f''(a)$. Halle la expresión del error de truncamiento para esta fórmula cuando $f \in \mathcal{C}^5[a-2h, a]$.

Solución. La fórmula es $f''(a) \approx \alpha_0 f(a-2h) + \alpha_1 f(a-h) + \alpha_2 f(a)$. Obligando exactitud en $\{1, x, x^2\}$ tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-2h & a-h & a \\ (a-2h)^2 & (a-h)^2 & a^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 = \frac{1}{h^2} \\ \alpha_1 = -\frac{2}{h^2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{h^2} \end{array} \right.$$

El error se obtiene como $R(f) = E''(a)$ siendo $E(x) = f[a-2h, a-h, a, x]\Pi(x)$ con $\Pi(x) = (x-a+2h)(x-a+h)(x-a)$. Por tanto

$$\begin{aligned}
R(f) = \cdots &= 2f[a-2h, a-h, a, a, a]\Pi'(a) + f[a-2h, a-h, a, a]\Pi''(a) \\
&= 2\frac{f^{iv}(\xi_1)}{4!}2h^2 + \frac{f'''(\xi_2)}{3!}6h = \frac{h^2}{6}f^{iv}(\xi_1) + hf'''(\xi_2)
\end{aligned}$$

6. Use la fórmula de Taylor para obtener, cuando $f \in \mathcal{C}^4[a-h, a+h]$, la fórmula de diferencia centrada en tres nodos para aproximar $f''(a)$ y la expresión de su error. ¿Cuál es el orden de precisión de esta fórmula? ¿Por qué?

Solución. Se combinan los desarrollos en la forma

$$\begin{array}{rlcccccccccccl}
\alpha_0 & \times [& f(a-h) & = & f(a) & - & f'(a)h & + & \frac{f''(a)}{2!}h^2 & - & \frac{f'''(a)}{3!}h^3 & + & \frac{f^{iv}(\xi_1)}{4!}h^4 &] \\
\alpha_1 & \times [& f(a) & = & f(a) & & & & & & & & &] \\
\alpha_2 & \times [& f(a+h) & = & f(a) & + & f'(a)h & + & \frac{f''(a)}{2!}h^2 & + & \frac{f'''(a)}{3!}h^3 & + & \frac{f^{iv}(\xi_2)}{4!}h^4 &] \\
\hline
 & & \text{fórmula} & = & 0 & + & 0 & + & f''(a) & + & 0 & - & R(f) &
\end{array}$$

en donde se ha aumentado un orden de derivación porque la columna en f''' también se va a anular, y se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ h & 0 & -h \\ h^2 & 0 & h^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{h^2} \\ \alpha_1 = -\frac{2}{h^2} \\ \alpha_2 = \frac{1}{h^2} \end{cases}$$

y por tanto $R(f) = -\frac{h^2}{24}(f^{iv}(\xi_1) + f^{iv}(\xi_2)) = -\frac{h^2}{12}f^{iv}(\xi)$, con lo que la fórmula queda

$$f''(a) = \frac{1}{h^2}(f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)) - \frac{h^2}{12}f^{iv}(\xi).$$

7. *a*) Halle la fórmula de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$ de la forma

$$f'(a) \approx \alpha_0 f(a-h_1) + \alpha_1 f(a) + \alpha_2 f(a+h_2)$$

con $h_1, h_2 > 0$, así como la expresión de su error de truncamiento cuando $f \in \mathcal{C}^4[a-h_1, a+h_2]$. ¿Cuál es el grado de exactitud de esta fórmula? Justifique la respuesta.

b) Use la tabla de valores

x	0.7	1.25	1.50	1.75
$f(x)$	−0.1	0.2	0.3	0.25

para dar valores aproximados de $f'(0.7)$, $f'(1.25)$, $f'(1.5)$ y $f'(1.75)$ utilizando para cada uno de ellos la fórmula de derivación numérica más adecuada. Indique la fórmula usada en cada caso y justifique su uso.

Solución.

a) Obligando exactitud

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-h_1 & a & a+h_2 \\ (a-h_1)^2 & a^2 & (a+h_2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_0 = -\frac{h_2}{h_1(h_1+h_2)} \\ \alpha_1 = \frac{h_2-h_1}{h_1h_2} \\ \alpha_2 = \frac{h_1}{h_2(h_1+h_2)} \end{array}$$

$$E(f) = f[a-h_1, a, a+h_2, x](x-a+h_1)(x-a)(x-a-h_2)$$

$$R(f) = E'(a) = -f[a-h_1, a, a+h_2, a]h_1h_2 = -\frac{h_1h_2}{6} f'''(\xi)$$

Ya es exacta en $\mathbb{P}_2$ por construcción. En x^3 resulta $3a^2 + h_1h_2 \neq 3a^2$.

b)
- Para $x = 0.7$ se puede emplear la fórmula progresiva con dos nodos $f'(a) \approx \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ con $a = 0.7$ y $h = 1.25 - 0.7 = 0.55$, que da $\frac{1}{0.55}(0.2 + 0.1) = 0.54545455$.
- Para $x = 1.25$ se puede emplear la del apartado anterior con $a = 1.25$, $h_1 = 0.55$ y $h_2 = 0.25$, que da 0.44545455.
- Para $x = 1.50$ se puede emplear la fórmula centrada con dos nodos (o tres, da igual) $f'(a) \approx \frac{1}{2h}(f(a+h) - f(a-h))$ con $a = 1.50$ y $h = 0.25$, que da $\frac{1}{0.50}(0.25 - 0.2) = 0.1$.
- Para $x = 1.75$ se puede emplear la fórmula regresiva con dos nodos $f'(a) \approx \frac{1}{h}(f(a) - f(a-h))$ con $a = 1.75$ y $h = 0.25$, que da $\frac{1}{0.25}(0.25 - 0.3) = -0.2$.

8. Halle una cota del valor absoluto del error que se comete al aproximar la derivada de la función $f(x) = \cos^2 x$ en $x = 0.8$ mediante la correspondiente fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio que usa los valores de f en los puntos 0.6, 0.8 y 1.

Solución. Se trata de la fórmula centrada con $a = 0.8$ y $h = 0.2$. Da igual dos o tres nodos, ya que el coeficiente en el nodo central es nulo. La fórmula es

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''(\xi)$$

con $\xi \in [0.6, 1.0]$. En nuestro caso se tiene

$$|R(f)| = \left| -\frac{h^2}{6} f'''(\xi) \right| = \left| -\frac{0.2^2}{6} 8 \cos(\xi) \sin(\xi) \right| < 0.053333.$$

9. Se considera la siguiente fórmula de integración numérica:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\, dx \approx \alpha_0 f(-1) + \alpha_1 f(0) + \alpha_2 f(1).$$

a) Halle de tres formas distintas los valores valores $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$ para que dicha fórmula sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$.

b) Halle el grado de exactitud de la fórmula obtenida en el apartado anterior.

c) Proporcione una fórmula de la forma propuesta que no sea de tipo interpolatorio en $\mathbb{P}_2$. Justifique la respuesta.

Solución.

a) 1) Primera forma: integrando los polinomios fundamentales de Lagrange.

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \int_{-1}^{1} \ell_0\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x(x-1)}{2}\,dx = \frac{1}{3},\\
\alpha_1 &= \int_{-1}^{1} \ell_1\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x^2-1}{-1}\,dx = \frac{4}{3},\\
\alpha_2 &= \int_{-1}^{1} \ell_2\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{x(x+1)}{2}\,dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

2) Segunda forma: obligando exactitud en $\mathbb{P}_2$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_0 = \frac{1}{3} \\ \alpha_1 = \frac{4}{3} \\ \alpha_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

3) Tercera forma: integrando el polinomio de interpolación (fórmula de Newton)

Tabla de diferencias divididas:

$$\begin{array}{r|lll}
-1 & f(-1) & & \\
 & & f(0)-f(-1) & \\
0 & f(0) & & \frac{1}{2}(f(1)-2f(0)+f(-1)) \\
 & & f(1)-f(0) & \\
1 & f(1) & &
\end{array}$$

Interpolante:

$$\begin{aligned}
p(x) &= f(-1) + (x+1)(f(0)-f(-1)) + x(x+1)\tfrac{1}{2}(f(1)-2f(0)+f(-1))\\
&= \tfrac{1}{2}x(x-1)f(-1) + (1-x^2)f(0) + \tfrac{1}{2}x(x+1)f(1)
\end{aligned}$$

Fórmula:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \int_{-1}^{1} p(x)\,dx\\
&= \frac{1}{2}f(-1)\int_{-1}^{1} x(x-1)\,dx + f(0)\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx + \frac{1}{2}f(1)\int_{-1}^{1} x(x+1)\,dx\\
&= \frac{1}{3}f(-1) + \frac{4}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1).
\end{aligned}$$

b) Ya es exacta en $\mathbb{P}_2$ por construcción. Se comprueba que también lo es en x^3 pero no en x^4, luego su grado es 3.

c) $\frac{2}{3}(f(-1)+f(0)+f(1))$ no es exacta en x^2.