Desigualdad de las medias. Conjuntos finitos y conjuntos numerables

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Universidad de Granada

Si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n. Y la suma es igual a n si, y sólo si, todos ellos son iguales a 1.

Si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n. Y la suma es igual a n si, y sólo si, todos ellos son iguales a 1.

Desigualdad de las medias. Cualesquiera sean los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se verifica que:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n. Y la suma es igual a n si, y sólo si, todos ellos son iguales a 1.

Desigualdad de las medias. Cualesquiera sean los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se verifica que:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Y la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Un conjunto A se dice que es *equipotente* a otro B, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de A sobre B. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Un conjunto A se dice que es *equipotente* a otro B, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de A sobre B. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden* n.

Un conjunto A se dice que es *equipotente* a otro B, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de A sobre B. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden* n.

Un conjunto A se llama *finito* si es vacío o si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que A es equipotente a $S(n)$.

Un conjunto A se dice que es *equipotente* a otro B, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de A sobre B. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden* n.

Un conjunto A se llama *finito* si es vacío o si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que A es equipotente a $S(n)$.

Sean n y m números naturales y supongamos que $S(n)$ y $S(m)$ son equipotentes. Entonces $n = m$.

Un conjunto A se dice que es *equipotente* a otro B, y escribimos $A \sim B$, si existe una aplicación biyectiva de A sobre B. Esta relación es una relación de equivalencia entre conjuntos pues tiene las propiedades reflexiva ($A \sim A$), simétrica (si $A \sim B$ entonces también $B \sim A$) y transitiva (si $A \sim B$ y $B \sim C$ entonces $A \sim C$).

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $S(n) = \{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n\}$ se llama *segmento de orden* n.

Un conjunto A se llama *finito* si es vacío o si existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que A es equipotente a $S(n)$.

Sean n y m números naturales y supongamos que $S(n)$ y $S(m)$ son equipotentes. Entonces $n = m$.

si A es un conjunto finito y no vacío hay un *único* $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim S(n)$, dicho número n se llama *número de elementos* de A y escribimos $\sharp(A) = n$. Por convenio, se acepta que $\sharp(\varnothing) = 0$

Propiedades de los conjuntos finitos

- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Dicho de otra forma, si B es un conjunto finito y $f : A \to B$ es una aplicación inyectiva entonces A es finito.

Propiedades de los conjuntos finitos

- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Dicho de otra forma, si B es un conjunto finito y $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación inyectiva entonces A es finito.
- La imagen de un conjunto finito por una aplicación es un conjunto finito. Dicho de otra forma, si A es finito y $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación sobreyectiva, entonces B es finito.

Propiedades de los conjuntos finitos

- Todo subconjunto de un conjunto finito es finito. Dicho de otra forma, si B es un conjunto finito y $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación inyectiva entonces A es finito.
- La imagen de un conjunto finito por una aplicación es un conjunto finito. Dicho de otra forma, si A es finito y $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación sobreyectiva, entonces B es finito.
- Todo conjunto finito no vacío de números reales tiene máximo y mínimo.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Por tanto, todo conjunto que contenga a $\mathbb{N}$ es infinito.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Por tanto, todo conjunto que contenga a $\mathbb{N}$ es infinito.

También es claro que hay subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son infinitos.

Un conjunto que no es finito se llama *infinito*.

Como $\mathbb{N}$ no tiene máximo deducimos que $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Por tanto, todo conjunto que contenga a $\mathbb{N}$ es infinito.

También es claro que hay subconjuntos de $\mathbb{N}$ que son infinitos.

Probaremos que $\mathbb{N}$ es el "más pequeño" conjunto infinito, pues cualquier subconjunto infinito de $\mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que φ es estrictamente creciente, es decir, si n, m son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, φ es inyectiva.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que φ es estrictamente creciente, es decir, si n, m son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, φ es inyectiva.

Si además se supone que φ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que φ es estrictamente creciente, es decir, si n, m son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, φ es inyectiva.

Si además se supone que φ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que φ es estrictamente creciente, es decir, si n, m son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, φ es inyectiva.

Si además se supone que φ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, φ es la identidad, es decir, $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que φ es estrictamente creciente, es decir, si n, m son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, φ es inyectiva.

Si además se supone que φ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, φ es la identidad, es decir, $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que $\varphi(n) < \varphi(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se verifica entonces que φ es estrictamente creciente, es decir, si n, m son números naturales tales que $n < m$ entonces $\varphi(n) < \varphi(m)$. En particular, φ es inyectiva.

Si además se supone que φ toma valores en $\mathbb{N}$, esto es, $\varphi(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$, entonces:

i) $\varphi(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
ii) Si $\varphi(\mathbb{N}) = \mathbb{N}$, φ es la identidad, es decir, $\varphi(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea A un conjunto infinito de números naturales. Entonces existe una única biyección creciente de $\mathbb{N}$ sobre A.

Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío A es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre A.

Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío A es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre A.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío A es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre A.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Sea B un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x \in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío A_x. Se verifica entonces que el conjunto $\mathscr{A} = \bigcup_{x \in B} A_x$ es numerable.

Un conjunto A se llama *numerable* si es vacío o si existe alguna aplicación inyectiva de A en $\mathbb{N}$.

Un conjunto es numerable si, y sólo si, es finito o es equipotente a $\mathbb{N}$.

Un conjunto no vacío A es numerable si, y sólo si, hay una aplicación sobreyectiva de $\mathbb{N}$ sobre A.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.

Sea B un conjunto numerable no vacío. Supongamos que para cada $x \in B$ tenemos un conjunto numerable no vacío A_x. Se verifica entonces que el conjunto $\mathscr{A} = \bigcup\limits_{x \in B} A_x$ es numerable.

El conjunto de los números racionales es numerable.

Principio de los intervalos encajados. Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

Principio de los intervalos encajados. Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

Principio de los intervalos encajados. Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

Principio de los intervalos encajados. Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

Principio de los intervalos encajados. Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ no es vacío.

Principio de los intervalos encajados. Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ no es vacío.

Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a, b]$ no es numerable.

Principio de los intervalos encajados. Para cada número natural n sea $I_n = [a_n, b_n]$ un intervalo cerrado no vacío y supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $I_{n+1} \subseteq I_n$. Se verifica entonces que:

i) $\alpha = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \leqslant \beta = \inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$,

ii) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\alpha, \beta]$.

En particular, el conjunto $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ no es vacío.

Dados dos números reales $a < b$ se verifica que el intervalo $[a, b]$ no es numerable.

$\mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son conjuntos no numerables.