Algebra I (Doble Grado Matemáticas-Informática)

Relación 4

Curso 2018-2019

1. **1.** Demuestra que $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4+x+1)}$ es un cuerpo y calcula el inverso de la clase de x^2+1.

2. **2.** Calcula, si es posible, el inverso de la clase de x en el anillo cociente $\mathbb{Q}[x]/(x^4+x+1)$.

3. **3.** Calcula las unidades de los anillos cociente $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+x+1)$, $\mathbb{Z}_5[x]/(x^2+1)$ y $\mathbb{Z}_3[x]/(x^2+2)$.

4. **4.** Considera el polinomio $f(x) = x^3+2x+1 \in \mathbb{Z}_3[x]$. Prueba que $f(x)$ es irreducible y calcula el inverso de la clase $[x^2+x+2]$ en el anillo cociente $\mathbb{Z}_3[x]/f(x)\mathbb{Z}_3[x]$.

5. **5.** Halla la intersección, la suma y el producto de los ideales de $\mathbb{Q}[x]$ generados por los polinomios x^2+x-2 y x^2-1.

6. **6.** En el anillo $A[x]$ se consideran los ideales $I_1 = (7), I_2 = (x)$ e $I_3 = (x^2)$. Describe los ideales I_1+I_2, I_2+I_3, $I_2 \cap I_3$, $I_1 \cap (I_2+I_3)$, reconociendo cuales de éstos son principales, en los casos en que $A = \mathbb{Z}$ y $A = \mathbb{Q}$.

7. **7.** Encuentra un polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado 3 tal que:

$$\begin{aligned} f(0) &= 6 \\ f(1) &= 12 \\ f(x) &\equiv 3x+3 \mod x^2+x+1 \end{aligned}$$

8. **8.** Encuentra el polinomio $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de menor grado que cumpla que al multiplicarlo por x y dividirlo por x^2+x+1 da de resto $x+1$ y que al dividirlo por x^3+2x+2 da de resto x^2. Encuentra otro polinomio que cumpla las mismas condiciones que $f(x)$ pero que tenga grado 23.

9. **9.** Calcula todas las raíces de x^2+7 en $\mathbb{Z}_8[x]$. Deduce que en $\mathbb{Z}_8[x]$ no hay factorización única.

10. **10.** Encuentra los polinomios irreducibles de grados 2 y 3 en $\mathbb{Z}_2[x]$, $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$.

11. **11.** Estudia si los siguientes polinomios son reducibles ó irreducibles en $\mathbb{Z}[x]$ y en $\mathbb{Q}[x]$:

   a) $2x^5-6x^3+9x^2-15$
   b) x^4+15x^3+7
   c) $x^5+x^4+x^2+x+2$
   d) x^4-22x^2+1
   e) $x^3+17x+36$
   f) x^5-x^2+1

g) $x^4+10x^3+5x^2-2x-3$

h) $x^4+6x^3+4x^2-15x+1$

i) x^4-x^2-2x-1

j) $x^5+5x^4+7x^3+x^2-3x-11$

k) $x^5-10x^4+36x^3-53x^2+26x+1$

l) $x^4+6x^3+4x^2-15x+1$

m) $x^6+3x^5-x^4+3x^3+3x^2+3x-1$

n) $x^4+4x^3-x^2+4x+1$

o) $2x^4+2x^3+6x^2+4$

p) $3x^5-x^4-4x^3-2x^2+2x+1$

q) $x^4-x^3+9x^2-4x-1$

r) $x^7+5x^6+x^2+6x+5$

s) $3x^5+42x^3-147x^2+21$

t) $x^5+3x^4+10x^2-2$

u) x^4+3x^2-2x+5

v) $3x^6+x^5+3x^2+4x+1$

w) $2x^4+x^3+5x+3$

x) $2x^5-2x^2-4x-2$

12. Estudia si los siguientes polinomios son reducibles o irreducibles en $\mathbb{Z}[x,y]$ y en $\mathbb{Q}[x,y]$:

a) $y^3+x^2y^2+xy+x$

b) $(y^5-y^4-2y^3+y-1)+x(y-2y^3)+x^2(y^4+y^3+1)+x^3y^3$

c) $(x^4+x+1)+(1-2x-x^3)y+(x^3+x)y^2$

d) $yx^3+(-y^2+y-1)x^2+(-y^2+y-1)x+(y^3-y^2-1)$

e) $x^3y^2+(x^2+1)y-x^2-1$

f) $y^2x+yx-y^2+x-y-1$

.

13. Estudia si son cuerpos los siguientes anillos cociente $K[x]/I$:

a) $K=\mathbb{Q}$; $I=\langle x^2+2\rangle$

b) $K=\mathbb{R}$; $I=\langle x^2+2\rangle$

c) $K=\mathbb{Q}$; $I=\langle x^4+2x^3+x^2+8x-12\rangle$

d) $K=\mathbb{Z}_3$; $I=\langle x^2+x+1\rangle$

14. Dado un anillo conmutativo R y un elemento $a\in R$ demuestra que la aplicación $\phi: R[x]\to R[x]$ dada por $\phi(f(x))=f(x+a)$ es un isomorfismo de anillos. Aplica este resultado y el criterio de Eisenstein para ver que el polinomio $f(x)=x^4+1$ es irreducible en $\mathbb{Z}[x]$ estudiando el polinomio $f(x+1)$.

15. Factoriza en irreducibles de $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ y $\mathbb{Z}_3[x]$ los siguientes polinomios:

(a) $f_1 = 2x^6 + 5x^5 + 12x^4 + 9x^3 + 2x^2 - 2x - 1$,

(b) $f_2 = 2x^5 - 10x^4 + 20x^2 + 50x - 10$,

(c) $f_3 = x^4 + 3x^2 - 2x + 5$,

(d) $f_4 = 30x^5 + 105x^4 - 135x^3 + 180x^2 + 765x + 315$,

(e) $f_5 = 20x^4 + 15x^3 - 15x^2 + 20x - 5$,

(f) $f_6 = x^5 + 8x^4 + 18x^3 + 11x^2 + 7x + 3$.

16. Factoriza en $\mathbb{Q}[x]$ el polinomio $f(x) = -3x^5 + x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x + 1$, utilizando en el método general de factorización, que se sabe que tiene un factor $p(x)$ de grado dos verificando:

(a) $p(0) \equiv 1 \bmod 3$,

(b) $p(1) \equiv 0 \bmod 3$,

(c) $p(-1) \equiv 1 \bmod 3$ y

(d) $p(0) \equiv 0 \bmod 5$.