Joaquín Pérez Muñoz

Geometría II

Índice general

Capítulo 1

Diagonalización.

Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensión n, y una base ordenada B de V, tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales $F_B \colon \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$F_B(f) = M(f, B) = M(f, B, B).$$

La elección de la base B no influye en el cálculo de ciertos invariantes asociados a f, como por ejemplo el rango, la traza o el determinante. Así que tiene sentido preguntarse qué base B de V hace a $M(f, B)$ lo más sencilla posible, por ejemplo una matriz *diagonal.* Surgen entonces las preguntas:

> **(Q1)** Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, ¿Existe una base ordenada de V tal que $M(f, B)$ es diagonal? Y si existe, ¿cómo podemos calcularla?

Si elegimos dos bases ordenadas cualesquiera B_1, B_2 de V, las matrices del mismo endomorfismo f en esas bases están relacionadas por la ecuación

$$M(f, B_1) = M(1_V, B_2, B_1) M(f, B_2) M(1_V, B_1, B_2) = P^{-1} M(f, B_2) P,$$

donde $P = M(1_V, B_1, B_2) \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$.

Definición 1.0.1 Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dicen *semejantes* si existe $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ tal que $B = P^{-1} A P$.

Según lo anterior, dos matrices del mismo endomorfismo son siempre semejantes. El recíproco es cierto: si $A = M(f, B_1) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ siendo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ y B_1 una base ordenada de V, entonces dada $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semejante a A, existe una única base ordenada B_2 de V tal que $B = M(f, B_2)$ (Ejercicio 1).

'Ser semejante a' es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Por ejemplo, la clase de la matriz identidad I_n es $\{I_n\}$. Podemos identificar cada clase de equivalencia según esta relación (es decir, cada *clase de semejanza de matrices*) con todas las matrices asociadas a un mismo endomorfismo f. La pregunta (Q1) entonces puede reformularse: en una clase de semajanza de matrices, ¿existe siempre un representante dado por una matriz diagonal? O dicho de otra forma:

> **(Q2)** Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ¿Existe una matriz semejante a A que sea diagonal?
> Y si existe, ¿cómo podemos calcularla?

En general, la respuesta a las preguntas equivalentes (Q1) y (Q2) es negativa. Veamos algunos ejemplos.

1. En $\mathbb{R}^2$, un giro f respecto al origen de ángulo $\theta \neq 0, \pi$ no puede representarse por una matriz $M(f, B)$ diagonal, porque si $v \in \mathbb{R}^2$ cumple $f(v) = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $v = 0$.

2. El endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, y)$, cumple $(f - 1_{\mathbb{R}^2})^2 = 0$, luego si $v \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ cumple $f(v) = \lambda v$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $0 = (f - 1_{\mathbb{R}^2})^2(v) = (\lambda - 1)^2 v$ luego $\lambda = 1$. Esto nos dice que no existe ninguna base de $\mathbb{R}^2$ tal que $M(f, B)$ es diagonal (porque la única matriz semejante a I_2 es I_2, pero f no es la identidad en $\mathbb{R}^2$).

Sin embargo, toda simetría respecto de una recta en $\mathbb{R}^2$ admite una base donde la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Definición 1.0.2 Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ se dice *diagonalizable* si existe una base ordenada B de V tal que $M(f, B)$ es diagonal. Al proceso de entontrar tal base se le llama *diagonalización* de f. Análogamente, una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice *diagonalizable* si existe $P \in Gl(n, \mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP$ es diagonal.

Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ es *diagonalizable* si y sólo si cualquier de sus matrices $M(f, B)$ es diagonalizable.

1.1. Vectores y valores propios.

Diagonalizar un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ equivale a encontrar una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V tal que para cada $i = 1, \ldots, n$, $f(v_i)$ es colineal con v_i. Esto nos lleva a considerar las soluciones no triviales (si existen) de la ecuación

$$f(v) = \lambda v, \tag{1.1}$$

siendo $\lambda \in \mathbb{K}$ y $v \in V$. Esta ecuación tiene dos incógnitas λ y v. Claramente, $v = 0$ es solución de (1.1) para cualquier valor de λ, pero no nos interesa dicha solución puesto que 0 no puede formar parte de ninguna base de V.

Definición 1.1.1 Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$, un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se dice *valor propio* (o *autovalor*) de f si existe $v \in V - \{0\}$ tal que (1.1) se cumple. En este caso, a v se le llama *vector propio* (o *autovector*) de f asociado al valor propio λ.

Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ se dice *valor propio* (o *autovalor*) de A si existe $x \in \mathbb{K}^n - \{0\}$ tal que $Ax = \lambda x$. En este caso, a x se le llama *vector propio* (o *autovector*) de A asociado al valor propio λ.

Diagonalizar un endomorfismo (o una matriz cuadrada) equivale a encontrar una base formada por vectores propios. Algunas propiedades sencillas (la demostración se deja como ejercicio):

1. Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de f con autovector asociado $v \in V - \{0\}$, entonces dada una base ordenada B de V se tiene que λ es valor propio de $M(f, B)$, y las coordenadas de v respecto de B forman un vector propio de $M(f, B)$ asociado al valor propio λ.

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A con autovector asociado $x \in \mathbb{K}^n - \{0\}$, entonces dado un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ tal que $A = M(f, B)$ para cierta base ordenada B de V, se tiene que λ es valor propio de f, y el vector de V cuyas coordenadas respecto de B son x es vector propio de f asociado al valor propio λ.

3. En $\mathbb{R}^2$, un giro f respecto al origen de ángulo $\theta \neq 0, \pi$ no tiene ningún valor propio real.

4. El endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, y)$, tiene como único valor propio a $\lambda = 1$.

1.2. Polinomio característico y ecuación característica.

Resolver la ecuación (1.1) (o su equivalente $Ax = \lambda x$ en el caso de matrices cuadradas) requiere encontrar sus soluciones en λ y en v. El siguiente razonamiento muestra cómo simplificar el problema eliminando la variable v.

Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ un endomorfismo. Que exista $v \in V - \{0\}$ tal que $f(v) = \lambda v$ (para cierto $\lambda \in \mathbb{K}$) equivale a que $v \in \ker(f - \lambda 1_V)$, o a que $\det(f - \lambda 1_V) = 0$. Esto lleva a estudiar el polinomio de grado $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ con coeficientes en $\mathbb{K}$

$$t \in \mathbb{K} \mapsto p_f(t) = \det(f - t1_V), \tag{1.2}$$

cuyas raíces son exactamente los valores propios de f.

Definición 1.2.1 Dado un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$, al polinomio $p_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ dado por (1.2) se le llama el *polinomio característico* de f. Análogamente, el polinomio característico de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se define como

$$p_A(t) = \det(A - tI_n).$$

Así que

$$\{\text{valores propios de } f \text{ (resp. de } A)\} = \{\text{raíces de } p_f(t) \text{ (resp. de } p_A(t))\}.$$

Es fácil probar que

1. $p_f(t) = p_{M(f,B)}(t)$, donde B es cualquier base ordenada de V. En particular, si dos matrices son semejantes entonces tienen el mismo polinomio característico (el recíproco no es cierto).

2. (Ejercicio 7). Para un endomorfismo f de un espacio vectorial de dimensión n, $p_f(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\mathrm{Tr}(f)t^{n-1} + \ldots + \det f$. En particular, dos endomorfismos con el mismo polinomio característico tendrán el mismo el determinante y la misma traza (el recíproco no es cierto). Lo mismo es válido para matrices cuadradas.

3. La identidad $1_{\mathbb{R}^2}$ y el endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, y)$ tienen ambos el mismo polinomio característico $p(t) = (t - 1)^2$. Así que el polinomio característico no distingue al endomorfismo, ni tampoco si éste es diagonalizable.

La relación anterior entre valores propios y raíces del polinomio característico motivan que recordemos algunas propiedades sencillas de las raíces de un polinomio:

1. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es raíz de un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, entonces $p(t)$ es divisible por $t - \lambda$, es decir, existe $q(t) \in \mathbb{K}[t]$ tal que $p(t) = (t - \lambda)q(t)$.

2. Un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ se dice *irreducible* si no admite ninguna descomposición en factores $p(t) = h(t)q(t)$ con $h(t), q(t) \in \mathbb{K}[t]$ y $\mathrm{gr}(h(t)), \mathrm{gr}(q(t)) < \mathrm{gr}(p(t))$.

3. Dado $p(t) \in \mathbb{K}[t]$, a un polinomio de tipo $t - \lambda$ en una descomposición en factores polinómicos de $p[t]$ (o más generalmente, $at + b$ para $a, b \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$) se le llama *factor simple* de $p(t)$. Un factor del tipo $at^2 + bt + c \in \mathbb{K}[t]$ se dice *factor cuadrático.*

4. **Teorema fundamental del Algebra.** Todo polinomio $p(t) \in \mathbb{C}[t]$ se descompone como producto de factores simples (tantos como el grado). Equivalentemente, todo polinomio $p[t] \in \mathbb{C}[t]$ tiene una raíz compleja.

5. Las raíces (complejas) de todo polinomio $p(t) = at^2 + bt + c \in \mathbb{R}[t]$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, vienen dadas por $t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. A la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se le llama *discriminante* de $p(t)$.

- Si $\Delta > 0$, $p(t)$ tiene dos raíces reales distintas (simples).
- Si $\Delta = 0$, $p(t)$ tiene una raíz real (doble).
- Si $\Delta < 0$, $p(t)$ no tiene raíces reales y tiene dos raíces complejas conjugadas. En este caso, $p(t)$ es irreducible sobre $\mathbb{R}[t]$ pero no sobre $\mathbb{C}[t]$.

6. Todo polinomio $p(t) \in \mathbb{R}[t]$, se descompone de la forma

$$p(t) = A(t - a_1)^{m_1} \cdot (t - a_k)^{m_k} \cdot q_1(t) \cdot \ldots \cdot q_m(t),$$

donde $A \in \mathbb{R} - \{0\}$, $a_1, \ldots, a_k$ son las raíces reales distintas de $p(t)$ y $q_1(t), \ldots, q_m(t)$ son factores cuadráticos irreducibles.

7. Si $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ tiene grado impar, entonces $p(t)$ tiene al menos una raíz real.

Lema 1.2.1 *Si f es diagonalizable, entonces $p_f(t)$ tiene n raíces en $\mathbb{K}$ contando multiplicidades.*

Demostración. Basta notar que el polinomio característico de una matriz diagonal A es $(t - a_1) \cdot \ldots \cdot (t - a_n)$, donde $a_1, \ldots a_n \in \mathbb{K}$ son las entradas de la diagonal de A. $\square$

Definición 1.2.2 Dado $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f, se define el *subespacio propio asociado* a λ como

$$V_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\} = \ker(f - \lambda 1_V) \neq \{0\}.$$

Análogamente, dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de A, se define el *subespacio propio asociado* a λ como

$$(\mathbb{K}^n)_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\} = \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0\}.$$

Si $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, B es una base ordenada de V y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de f, se tiene que el subespacio propio asociado a λ para la matriz $A = M(f, B)$ cumple que dado $v \in V$,

$$v \in V_\lambda \text{ si y sólo si las coordenadas de } v \text{ respecto a } B \text{ están en } (\mathbb{K}^n)_\lambda.$$

Definición 1.2.3 Asociados a cada valor propio λ de $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$ (para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es análogo) tenemos dos números: la multiplicidad de λ como raíz de $p_f(t)$ y la dimensión de V_λ. Al primero de estos números le llamaremos la *multiplicidad algebraica* y al segundo la *multiplicidad geométrica* de λ como valor propio de f.

Estos números no han de coincidir, pero siempre hay una relación entre ellos:

Lema 1.2.2 *La multiplicidad geométrica es siempre menor o igual que la multiplicidad algebraica de un valor propio.*

Demostración. Lo probamos para un endomorfismo $f \in \text{End}_{\mathbb{K}} V$ (para $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es análogo). Tomemos una base ordenada de V del tipo $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ donde $\{v_1, \ldots, v_k\}$ es una base de V_λ. entonces, la matriz de f en B es (por cajas)

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_k & C \\ \hline 0 & D \end{array} \right)$$

para ciertas $C \in \mathcal{M}_{k\times(n-k)}(\mathbb{K}), D \in \mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{K})$. Por tanto, $p_f(t) = (\lambda - t)^k p_D(t)$ (Ejercicio 14) y se tiene el lema. □

Un caso en que no se da la igualdad en la desigualdad del Lema 1.2.2 es el siguiente: Para el endomorfismo $f \in \text{End}_{\mathbb{K}}\mathbb{R}^2$ dado por $f(x, y) = (x + y, y)$, la multiplicidad algebraica de $t = 1$ como propio de f es dos, pero la dimensión de $(\mathbb{R}^2)_1$ es uno.

Proposición 1.2.1 *Sea $f \in \text{End}_{\mathbb{K}} V$.*

1. *Todo subespacio propio es invariante. Es decir, si V_λ es el subespacio propio asociado a un valor propio λ de f, entonces $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.*
2. *Si $\lambda \neq \mu$ son valores propios distintos de f, entonces $V_\lambda \cap V_\mu = \{0\}$, o equivalentemente, $V_\lambda + V_\mu = V_\lambda \oplus V_\mu$.*
3. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ son valores propios distintos de f, entonces $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$.*

Demostración. Si $v \in V_\lambda$, entonces $f(v) = \lambda v$ luego $f(v) \in V_\lambda$ y 1 está probado.

Si $v \in V_\lambda \cap V_\mu$ siendo $\lambda \neq \mu$, entonces $f(v) = \lambda v$ y $f(v) = \lambda v$ luego restando $0 = (\lambda - \mu)v$. Como $\lambda \neq \mu$, lo anterior implica que $v = 0$ y 2 está probado.

En cuanto al apartado 3, tomemos $v_i \in V_{\lambda_i} - \{0\}$ para $i = 1, \ldots, k$ y veamos que $v_1, \ldots, v_k$ son linealmente independientes (esto terminará de probar el apartado). Sean $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0. \tag{1.3}$$

Así,

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda_i v_i. \tag{1.4}$$

Por otro lado, multiplicando por λ_k en (1.3) y restando (1.4) obtenemos

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i = 0. \tag{1.5}$$

Lo anterior sugiere que probemos el apartado por inducción sobre el número de sumandos: para dos sumandos, la propiedad se tiene por el apartado 2. Si suponemos cierta la propiedad para $k-1$ sumandos, entonces $v_1, \ldots, v_{k-1}$ son linealmente independientes luego de (1.5) se deduce que $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ para cada $i = 1, \ldots, k-1$. Como $\lambda_i \neq \lambda_k$ para $i = 1, \ldots, k-1$, tenemos $a_1 = \ldots a_{k-1} = 0$. Volviendo a (1.3) tenemos $a_k v_k = 0$, luego $a_k = 0$ porque $v_k \neq 0$. □

Corolario 1.2.1 *Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, y sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ todos los valores propios (distintos) de f. Entonces, f es diagonalizable si y sólo si $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$.*

Demostración. Si f es diagonalizable, existe una base ordenada de V formada por vectores propios de f. Agrupemos los elementos de esa base de forma que primero aparezcan los de V_{λ_1}, después los de V_{λ_2}, y así sucesivamente hasta los de V_{λ_k}. Eso nos dice que todo vector de V se escribe como suma de un vector en cada V_{λ_i}, luego $V = V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k}$, que coincide con $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ por el apartado 3 de la Proposición 1.2.1.

Recíprocamente, si $V = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ entonces tomando una base de cada V_{λ_i} y poniendo una a continuación de otra, formaremos una base de V formada por vectores propios de f. Por tanto, f es diagonalizable. □

Corolario 1.2.2 *Si $f \in End_{\mathbb{K}} V$ tiene $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ valores propios distintos, entonces f es diagonalizable.*

Teorema 1.2.1 (Teorema fundamental de diagonalización) *Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$. Entonces, f es diagonalizable si y sólo si se cumplen las dos condiciones:*

1. *$p_f(t)$ tiene n raíces en $\mathbb{K}$ contando multiplicidades.*
2. *Para cada valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ de f, la multiplicidad geométrica de λ coincide con su multiplicidad algebraica.*

Demostración. Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ todos los valores propios (distintos) de f.

Si f es diagonalizable, entonces 1 se tiene por el Lema 1.2.1, y por el Corolario 1.2.1,

$$\dim_{\mathbb{K}} V = \dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{K}} V_{\lambda_i} \overset{(\star)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} m_i = n = \dim_K V, \tag{1.6}$$

donde en $(\star)$ hemos usado el Lema 1.2.2, m_i es la multiplicidad algebraica de λ_i como valor propio de f, y en la última igualdad hemos usado el apartado 1 ya demostrado. De la igualdad en (1.6) concluimos que $\dim_{\mathbb{K}} V_{\lambda_i} = m_i$ para cada i, que es el apartado 2.

Recíprocamente, consideremos el subespacio $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_k}$, que coincide con $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}$ por el apartado 3 de la Proposición 1.2.1. Entonces,

$$\dim_{\mathbb{K}}(V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k}) = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{K}} V_{\lambda_i} \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{k} m_i \overset{(1)}{=} n = \dim_{\mathbb{K}} V,$$

luego $V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_k} = V$ y f es diagonalizable por el Corolario 1.2.1. □

Corolario 1.2.3 *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces, A es diagonalizable si y sólo si se cumplen las dos condiciones:*

1. *$p_A(t)$ tiene n raíces en $\mathbb{K}$ contando multiplicidades.*
2. *Para cada valor propio $\lambda \in \mathbb{K}$ de A, la multiplicidad geométrica de λ coincide con su multiplicidad algebraica.*

Corolario 1.2.4 *Dos matrices diagonalizables $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son semejantes si y sólo si tiene el mismo polinomio característico.*

Demostración. Sólo tenemos que comprobar la condición suficiente. Si A, B tienen el mismo polinomio característico, entonces tienen los mismos valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ con las mismas multiplicidades algebraicas $m_1, \ldots, m_k$. Como A, B son diagonalizables, ambas son semejantes a la matriz diagonal que se obtiene poniendo en la diagonal (por cajas) $\lambda_1 \cdot I_{m_1}, \ldots, \lambda_k \cdot I_{m_k}$ y 0 fuera de esas cajas. Por transitividad de la relación de equivalencia 'ser semejante a', A, B son semejantes. □

1.3. Aplicaciones de la diagonalización.

1. Supongamos que queremos calcular A^m siendo $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz y $m \in \mathbb{N}$ grande. Aunque la potencia de cálculo de los ordenadores actuales nos permite calcular esto mediante la 'fuerza bruta', es conveniente tener un método sencillo para resolver este problema, al menos en el caso de que A sea diagonalizable. En este caso, existe $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ tal que $P^{-1}AP$ es una matriz diagonal D. Como D es diagonal, D^m es muy sencilla de calcular (basta elevar a m cada entrada de la diagonal de D), y $D^m = (P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$, luego $A^m = PD^mP^{-1}$.

   Si $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{K})$ es diagonalizable y m es un entero negativo, podemos calcular A^m aplicándole el método anterior a A^{-1}, que también es diagonalizable (Ejercicio 4).

2. Supongamos que $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$. Veamos condiciones para que exista $h \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}V$ tal que $h \circ h = f$. Impondremos que f es diagonalizable; sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ los valores propios de f con multiplicidades respectivas $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$, y B una base ordenada de V tal que $M(f, B) = D$, siendo D la matriz diagonal obtenida poniendo en la diagonal (por cajas) $\lambda_1 \cdot I_{m_1}, \ldots, \lambda_k \cdot I_{m_k}$ y 0 fuera de esas cajas.

   Si para cada $i = 1, \ldots, k$ existe $b_i \in \mathbb{K}$ tal que $b_i^2 = \lambda_i$ (esto se cumple siempre si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y cuando $\lambda_i \geq 0\ \forall i$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), entonces la matriz diagonal $D' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ obtenida poniendo en la diagonal (por cajas) $b_1 \cdot I_{m_1}, \ldots, b_k \cdot I_{m_k}$ y 0 fuera de esas cajas, cumple $(D')^2 = D$. Por tanto, el endomorfismo h dado por $M(h, B) = D'$ cumple $h \circ h = f$.

1.4. El Teorema de Hamilton-Cayley.

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con polinomio característico

$$p_A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in \mathbb{K}[t]. \tag{1.7}$$

Como $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene estructura de anillo, podemos ver $p_A[t]$ actuando sobre matrices $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mediante

$$p_A(T) = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot T + \ldots + a_n \cdot T^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Esto nos permite ver p_A como una aplicación $p_A \colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (no lineal a menos que $n = 1$).

Teorema 1.4.1 (Hamilton-Cayley) *Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con polinomio característico $p_A(t) \in \mathbb{K}[t]$, se tiene $p_A(A) = 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Demostración. Sabemos que dada $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se tiene

$$C \cdot \mathrm{Adj}(C)^T = \det C \cdot I_n.$$

Tomando $C = A - tI_n$ para $t \in \mathbb{K}$ y aplicando la definición de polinomio característico, se tiene

$$(A - tI_n) \cdot \mathrm{Adj}(A - tI_n)^T = p_A(t) \cdot I_n. \tag{1.8}$$

De la definición de matriz adjunta se deduce que las n^2 entradas de la matriz $\mathrm{Adj}(A - tI_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ y grado a lo más $n-1$. Por tanto, podemos escribir

$$\mathrm{Adj}(A - tI_n)^T = C_0 + C_1 t + \ldots + C_{n-1} t^{n-1},$$

para ciertas matrices $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Por otro lado, sustituyendo $p_A(t)$ mediante (1.7), la ecuación (1.8) se reescribe

$$(A - tI_n)(C_0 + C_1 t + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}) = (a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n) \cdot I_n. \tag{1.9}$$

Operando, $AC_0 + (AC_1 - C_0)t + (AC_2 - C_1)t^2 + \ldots + (AC_{n-1} - C_{n-2})t^{n-1} - C_{n-1}t^n = a_0 I_n + a_1 I_n t + \ldots + a_n I_n t^n$. Igualando coeficientes del mismo grado en t obtenemos

$$\begin{array}{rcr}
AC_0 = a_0 I_n & \Longrightarrow & AC_0 = a_0 I_n \\
AC_1 - C_0 = a_1 I_n & \overset{\text{(multiplico por } A)}{\Longrightarrow} & A^2 C_1 - AC_0 = a_1 A \\
AC_2 - C_1 = a_2 I_n & \overset{\text{(multiplico por } A^2)}{\Longrightarrow} & A^3 C_2 - A^2 C_1 = a_2 A^2 \\
\ldots & \ldots & \ldots \\
AC_{n-1} - C_{n-2} = a_{n-1} I_n & \overset{\text{(multiplico por } A^{n-1})}{\Longrightarrow} & A^n C_{n-1} - A^{n-1} C_{n-2} = a_{n-1} A^{n-1} \\
-C_{n-1} = a_n I_n & \overset{\text{(multiplico por } A^n)}{\Longrightarrow} & -A^n C_{n-1} = a_n A^n.
\end{array}$$

Sumando los términos de la derecha tenemos $0 = a_0 \cdot I_n + a_1 \cdot A + \ldots + a_n \cdot A^n = p_A(A)$. $\square$

1.5. Ejercicios.

1. Sean $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) de dimensión n, $f \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}} V$ y B_1 una base ordenada de V. Probar que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semejante a $M(f, B_1)$, entonces existe una base ordenada B_2 de V tal que $B = M(f, B_2)$.

2. Dar un ejemplo de matrices cuadradas no semejantes con el mismo polinomio característico.

3. Probar que 0 no es un valor propio de un endomosfismo f si y sólo si f es un automorfismo. ¿Cuál es la propiedad correspondiente para matrices cuadradas?

4. Probar que si $A \in \mathsf{Gl}(n, \mathbb{K})$ es diagonalizable, entonces A^{-1} también lo es. ¿Qué relación hay entre los valores propios de A y los de A^{-1}? ¿Y entre sus autovectores?

5. Sea $V(\mathbb{K})$ un espacio vectorial n-dimensional. Si a es un valor propio de un endomorfismo f de V, probar que a^m, $m \in \mathbb{N}$, es un valor propio de f^m. Si además f es un automorfismo, demostrar que $\forall p \in \mathbb{Z} - \{0\}$, a^p es un valor propio de f^p.

6. Determinar los vectores propios y valores propios de las siguientes matrices reales,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   ¿Es alguna de estas matrices diagonalizable en $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ $(k = 3, 4)$? ¿Hay alguna de ellas que no sea diagonalizable en $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ pero sí lo sea en $\mathcal{M}_k(\mathbb{C})$?

7. Sea $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Probar que el polinomio característico de A adopta la siguiente forma:

   i) Para $n = 2$, $p_A(t) = t^2 - \mathsf{Traza}(A)t + \det A$.

   ii) Para $n = 3$,

$$p_A(t) = -t^3 + \mathsf{Traza}(A)t^2 - \left[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \right] t + \det A.$$

iii) Para n general,

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}\mathsf{Traza}(A)t^{n-1} + c_{n-2}t^{n-2} + \ldots + c_1 t + \det A,$$

donde $c_1, \cdots, c_{n-1}$ son ciertos elementos en $\mathbb{K}$.

iv) Concluir que si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tienen el mismo polinomio característico, entonces comparten el mismo determinante y la misma traza.

8. Probar que si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tiene $\det A < 0$, entonces A es diagonalizable.

9. Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y cada $a \in \mathbb{K}$, encontrar la relación que hay entre los valores propios de A y los de $A + aI_n$. Demostrar que A es diagonalizable si y sólo si lo es $A + aI_n$.

10. Hallar los autovalores y los subespacios propios de la siguiente matriz cuadrada de orden $n \geq 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a \end{pmatrix}.$$

¿Es A diagonalizable?

11. Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3. Denotemos por $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de V. De un endomorfismo $f : V \to V$ se sabe que

   - f transforma el vector $6u_1 + 2u_2 + 5u_3$ en sí mismo.
   - $U = \{(x_1, x_2, x_3)_B \mid 2x_1 + 11x_2 - 7x_3 = 0\}$ es un subespacio propio de f.
   - La traza de f es 5.

   Hallar los valores propios de f y calcular la matriz de f respecto a B.

12. Sea A la siguiente matriz real que depende del parámetro a:

$$A = \begin{pmatrix} 2a+4 & 1-a & -2a-a^2 \\ 0 & 4-a & 0 \\ 0 & 0 & 4-a^2 \end{pmatrix}.$$

i) Obtener los valores de a para los que A es diagonalizable.

ii) Diagonalizar A para $a = 1$ y $a = 2$.

13. Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en una base ordenada B es

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} 1+a & -a & a \\ 2+a & -a & a-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Obtener los valores propios de f y comprobar que no dependen de a.

ii) Obtener los subespacios propios de f en función de a y estudiar cuándo f es diagonalizable. Cuando sea posible, diagonalizar f.

14. Sean $A \in \mathcal{M}_m(\mathbb{K})$, $A' \in \mathcal{M}_{m\times(n-m)}(\mathbb{K})$ y $A'' \in \mathcal{M}_{(n-m)\times(n-m)}(\mathbb{K})$. Se considera la matriz sobre $\mathbb{K}$ de orden n

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & A' \\ \hline 0 & A'' \end{array}\right)$$

Demostrar que el polinomio característico de M es el producto de los polinomios característicos de A y de A''.

15. Dar tres ejemplos de endomorfismos de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ que, respectivamente, tengan por polinomios característicos

$$(1-t)^3, \qquad -(1-t)^2(1+t), \qquad (1-t)(t^2+1),$$

y estudiar si los endomorfismos dados son o no diagonalizables.

16. Sean n un número entero positivo, $\mathbb{K}$ un cuerpo y $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$. Demostrar que la matriz A de orden n sobre $\mathbb{K}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

tiene polinomio característico

$$p_A(t) = (-1)^n(a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n),$$

y que si $a \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A, entonces el vector $(1, a, a^2, \ldots, a^{n-1})$ es un vector propio de A de valor propio a.

17. Comprobar que la siguiente matriz cuadrada de orden n es diagonalizable en $\mathbb{C}$ y obtener su forma diagonal:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

18. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz tal que la suma de los elementos de cada línea (fila y columna) es 1. Demostrar que 1 es un valor propio de A.

19. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que traza$(A) = \det(A) = 0$. Probar que $A^2 = 0$. Recíprocamente, dada $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verificando $A^2 = 0$, demostrar que $A = 0$ o bien $\{A, I_2\}$ son linealmente independientes y por tanto traza$(A) = \det(A) = 0$.

20. En $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcular A^{12} y A^{-7}. ¿Es posible encontrar $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tal que $B^2 = A$?. ¿Es posible encontrar $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ tal que $C^2 = A$?.

21. *i)* Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$. Probar que si su ecuación característica $p_f(t) = 0$ tiene $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ soluciones en $\mathbb{K}$ (no necesariamente distintas), entonces existe una base ordenada B de V tal que

$$M(f, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde los escalares de la diagonal son los valores propios de f. (Indicación: Usar inducción sobre n).

ii) ¿Es diagonalizable el endomorfismo f de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$ dado por $f(x, y) = (-2x - y, x)$? En caso negativo, encontrar, si es posible, una base B de $\mathbb{R}^2$ donde $M(f, B)$ sea del tipo anterior.

22. Como aplicación del problema anterior, probar que cada matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es semejante a una del tipo
$$M(f,B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$
donde los elementos de la diagonal son los valores propios de A.

23. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$ que tiene $n = \dim_{\mathbb{K}} V$ valores propios (contando multiplicidades). Demostrar que existen $f_1, f_2 \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ tales que f_1 es diagonalizable, $f_2^n = 0$ y $f = f_1 + f_2$.

24. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = rI_n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son $\sqrt{r}$ y $-\sqrt{r}$. Probar también que A es diagonalizable.

25. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que cumple $A^2 = -rI_n$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son $i\sqrt{r}$ y $-i\sqrt{r}$. Probar también que A es diagonalizable.

26. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ que cumple $A^2 = rA$, $r \in \mathbb{K}$, $r \neq 0$. Demostrar que los únicos valores propios posibles de A son r y 0. Probar también que A es diagonalizable.

27. *i)* Probar que la única matriz diagonalizable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 = 0$ es $A = 0$.

    ii) Probar que la única matriz diagonalizable $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que cumple $A^2 - 2A + I_n = 0$ es $A = I_n$.

28. Se considera la matriz $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ -1 & a & -1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$. Estudiar para qué valores de a es $A(a)$ diagonalizable. Calcular, si es posible, una base de autovectores de $A(1)$.

29. Una demostración por inducción del Teorema de Hamilton-Cayley.
Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz real o compleja, con polinomio característico $p_A(t)$. En este ejercicio veremos una prueba distinta del Teorema 1.4.1, por inducción sobre n.

    i) Demostrar que si $B = P^{-1}AP$ es una matriz semejante a A, siendo $P \in Gl(n, \mathbb{K})$, entonces $p_A(A) = Pp_A(B)P^{-1}$.

    ii) Deducir del apartado anterior que si $p_B(B) = 0$, entonces $p_A(A) = 0$. Es decir, para probar el Teorema de Hamilton-Cayley podemos cambiar A por cualquier matriz semejante a ésta.

iii) Probar que A es semejante a una matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ del tipo

$$B = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline 0 & C \end{array}\right), \tag{1.10}$$

donde $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}^{n-1}$ y $C \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{C})$. Según el apartado *ii)*, para probar el Teorema de Hamilton-Cayley par A basta demostrar que $p_B(B) = 0$.

iv) Demostrar que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ viene dada por (1.10), y $p(t)$ es cualquier polinomio con coeficientes complejos, entonces

$$p(B) = \left(\begin{array}{c|c} p(a) & b' \\ \hline 0 & p(C) \end{array}\right)$$

para cierto $b' \in \mathbb{C}^{n-1}$.

v) Deducir de los apartados anteriores que

$$p_B(B) = (aI_n - B)\left(\begin{array}{c|c} p_C(a) & b' \\ \hline 0 & p_C(C) \end{array}\right).$$

Deducir que si suponemos que el Teorema de Hamilton-Cayley se cumple para C, entonces también se cumple para B, es decir, $p_B(B) = 0$. Formalizar la demostración por inducción sobre n del Teorema de Hamilton-Cayley en su versión general.

Capítulo 2

Formas bilineales y formas cuadráticas.

¿Cómo podemos medir en un espacio vectorial? La herramienta habitual en $\mathbb{R}^n$ es el *producto escalar usual,*

$$g(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \text{donde } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n),$$

que permite hablar de perpendicularidad, longitud o ángulos entre vectores, entre otros conceptos: Si lo anterior es cero, medimos perpendicularidad. Si es positivo o negativo, medimos si los vectores están en un mismo semiespacio o no. Si tomamos $x = y$, medimos longitud. A menudo nos encontraremos situaciones en las que es necesario generalizar el producto escalar usual a otras herramientas con funciones similares; un ejemplo de esto es la teoría de la Relatividad especial, donde el papel que jugaba el producto escalar usual anterior ahora es realizado por la llamada *métrica de Lorentz-Minkowski,*

$$g((x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, s) = -st + \sum_{i=1}^{3} x_i y_i,$$

siendo $(x_1, x_2, x_3, t), (y_1, y_2, y_3, s) \in \mathbb{R}^4$.

Lo primero que haremos es preguntarnos qué propiedades básicas debemos pedir a una métrica $g\colon V \times V \to \mathbb{K}$ para que haga el papel deseado en un espacio vectorial $V(\mathbb{K})$. Es razonable pedir que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ porque queremos medir, luego hace falta una ordenación en el cuerpo $\mathbb{K}$. También es razonable imponer simetría de g en sus variables, y que se comporte bien respecto a la estructura de espacio vectorial de V (que sea bilineal y simétrica).

2.1. Formas bilineales y métricas.

Definición 2.1.1 Dado un espacio vectorial real $V(\mathbb{R})$, una *forma bilineal* sobre V es una aplicación $g : V \times V \to \mathbb{R}$ que es lineal en cada variable por separado. g se dice *métrica* si es una forma bilineal simétrica. Al par (V, g) donde g es una métrica sobre V, se le llama *espacio vectorial métrico* (EVM).

Ejemplos:

1. $(\mathbb{R}^n, g_0)$, $g_0(x, y) = x^t \cdot y$ (producto escalar usual).

2. Dada una matriz $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (simétrica), consideremos el EVM $(\mathbb{R}^n, g_A)$, donde $g_A(x, y) = x^t \cdot A \cdot y$. Este ejemplo generaliza al anterior, que tiene $A = I_n$. En el caso de que tomemos
$$A = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right),$$
obtenemos la *métrica de Lorentz-Minkowski* en $\mathbb{R}^n$, que aparece en la teoría de la Relatividad especial.

3. Sobre el espacio vectorial $V = C([a, b], \mathbb{R})$ de las funciones continuas en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se define el *producto* L^2 como
$$g(f, h) = \int_a^b f(t)h(t)\, dt, \quad f, h \in C([a, b], \mathbb{R}).$$

4. Sobre el espacio vectorial $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, se define $g(A, B) =$Traza$(A^t \cdot B)$. ¿Qué tiene que ver esta métrica con el producto escalar usual en $\mathbb{R}^{n^2}$?

5. Si (V, g) es un EVM y $U \subset V$ es un subespacio vectorial, entonces $(U, g|_{U\times U})$ vuelve a ser un EVM (*métrica inducida* en un subespacio).

6. Si (V_i, g_i), $i = 1, 2$ son dos EVM, en $V_1 \times V_2$ se define la *métrica producto* como $g((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2))$.

2.2. Congruencia de matrices.

Sea g una métrica sobre un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ de dimensión n. Dada una base ordenada $B = \{v_1, \ldots, v_n)$ de $V(\mathbb{R})$, se define la *matriz* de g respecto a B como la matriz simétrica de orden n

$$M_B(g) = (g(v_i, v_j))_{i,j=1\ldots,n}\,. \tag{2.1}$$

Notemos que podemos conocer $g(x,y)$ para $x,y \in V$ arbitrarios, mediante la fórmula

$$g(x,y) = (x_B)^t \cdot M_B(g) \cdot y_B,$$

y x_B, y_B son las coordenadas de x,y respecto a B.

Recordemos que para un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}} V$, matrices distintas de f cambian por semejanza. Esto no va a ser cierto para matrices de una misma métrica:

Lema 2.2.1 *Si B, B' son bases ordenadas de V, se tiene $M_{B'}(g) = P^T \cdot M_B(g) \cdot P$, donde $P = M(1_V, B', B)$.*

Demostración. Pongamos $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $B' = \{v_1', \ldots, v_n'\}$. Si $v_j' = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i$ (es decir, $P = (a_{i,j})_{i,j}$), entonces

$$g(v_i', v_j') = g\left(\sum_{k=1}^n a_{ki} v_k, \sum_{h=1}^n a_{hj} v_h\right) = \sum_{k,h=1}^n a_{ki} g(v_k, v_h) a_{hj} = \sum_{k,h=1}^n (P^T)_{ik} (M_B(g))_{kh} P_{hj}. \qquad \square$$

Definición 2.2.1 Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se dicen *congruentes* si existe $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $B = P^T A P$.

Las matrices de una misma métrica g sobre un espacio vectorial son siempre congruentes. Recíprocamente, si $A = M_{B_1}(g)$ siendo g una métrica sobre $V(\mathbb{R})$ y B_1 una base ordenada de V, entonces dada $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ congruente a A, existe una única base ordenada B_2 de V tal que $B = M_{B_2}(g)$ (Ejercicio 1).

'Ser congruente a' es una relación de equivalencia en $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2.3. Formas cuadráticas.

Definición 2.3.1 Dado un EVM (V,g) EVM, se define la *forma cuadrática* asociada a g como

$$F_g \colon V \to \mathbb{R}, \quad F_g(x,x) = g(x,x).$$

Las formas cuadráticas tienen las siguientes propiedades:

Lema 2.3.1 *Con la notación anterior, sean $x, y \in V$ y $a \in \mathbb{R}$. Entonces,*

1. $F_g(ax) = a^2 F_g(x)$,
2. $g(x,y) = \frac{1}{2}\left[F_g(x+y) - F_g(x) - F_g(y)\right]$.

Demostración. Ejercicio. $\square$

El apartado 2 del Lema 2.3.1 permite recuperar la métrica sabiendo sólo la forma cuadrática. Esto da pie a definir forma cuadrática sin partir de una métrica:

Definición 2.3.2 Dado un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, una *forma cuadrática* sobre V es una aplicación $F\colon V \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) El apartado 1 del Lema 2.3.1 se cumple.

(ii) El apartado 2 del Lema 2.3.1 define una métrica sobre V (*métrica asociada* a F).

Métricas y formas cuadráticas son dos lenguajes para expresar conceptos equivalentes en cierto sentido que precisamos en en siguiente enunciado.

Proposición 2.3.1 *$V(\mathbb{R})$. $S_2(V) = \{$métricas en $V\}$, $F(V) = \{$formas cuadráticas en $V\}$. Entonces:*

1. *$S_2(V), F(V)$ son EV reales de dimensión $\frac{n(n+1)}{2}$.*
2. *La aplicación $\Phi\colon S_2(V) \to F(V)$, $\Phi(g) = F_g$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Es fácil ver que $S_2(V)$ es un espacio vectorial. La dimensión de $S_2(V)$ es $\frac{n(n+1)}{2}$, porque ésta es la dimensión del espacio vectorial $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ de matrices simétricas de orden n, y dada una base ordenada B de V, la aplicación $\Psi_B\colon S_2(V) \to \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dada por

$$\Psi_B(g) = M_B(g)$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Que $F(V)$ es un espacio vectorial es consecuencia directa de la Definición 2.3.2 (dadas $F_1, F_2 \in F(V)$, $F_1 + F_2$ saca los escalares al cuadrado y $F_1 + F_2$ tiene por métrica asociada a $g_{F_1+F_2} = g_{F_1} + g_{F_2}$ sin más que usar la fórmula del apartado 2 del Lema 2.3.1).

Que Φ es un isomorfismo de espacios vectoriales (con inversa $\Phi^{-1}(F) = g_F$) es un cálculo directo. En particular, la dimensión de $F(V)$ es también $\frac{n(n+1)}{2}$. □

2.4. Perpendicularidad: tipos de métricas.

Definición 2.4.1 Sea (V, g) un EVM. Dos vectores $x, y \in V$ se dicen ortogonales (o perpendiculares, $x \perp y$) respecto a g si $g(x, y) = 0$.

En el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$, el único vector ortogonal a sí mismo es $0 \in \mathbb{R}^n$. Esto no tiene porqué se cierto en otros EVM. Por ejemplo, en $(\mathbb{R}^2, g_A)$ siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, se tiene que $(1,1) \perp_{g_A} (1,1)$.

Definición 2.4.2 (Tipos de métricas) Sea g una métrica sobre un espacio vectorial real V.

- g se dice degenerada si existe $x \in V - \{0\}$ tal que $x \perp y$, $\forall y \in V$.
- g se dice *no degenerada* si el único vector ortogonal a todos los vectores de V es $x = 0$.
- g se dice *semidefinida positiva* si $g(x, x) \geq 0$, $\forall x \in V$.
- g se dice *semidefinida negativa* si $g(x, x) \leq 0$, $\forall x \in V$.
- g se dice *definida positiva* (o *euclídea*) si es semidefinida positiva y además el único vector perpendicular a sí mismo es $x = 0$.
- g se dice *definida negativa* si $-g$ es euclídea.
- Finalmente, g se dice *indefinida* si es no degenerada, pero no es definida positiva ni definida negativa.

<table>
<tr><td rowspan="6">Tipos de Métricas</td><td rowspan="3">no degeneradas</td><td>euclídea (def. +)</td></tr>
<tr><td>def. −</td></tr>
<tr><td>indefinida</td></tr>
<tr><td rowspan="3">degeneradas</td><td>semidef. +</td></tr>
<tr><td>semidef. −</td></tr>
<tr><td>otras</td></tr>
</table>

Proposición 2.4.1 *Sea (V, g) un EVM y B una base ordenada de V. Entonces, g es no degenerada si y sólo si $M_B(g)$ es regular.*

Demostración. Llamemos $B = (v_1, \ldots, v_n)$. Usando la fórmula (2.1) tenemos que dados $x, y \in V$,

$$g(x, y) = 0 \ \forall y \in V \iff (x_B)^t \cdot M_B(g) \cdot y_B = 0 \ \forall y_B \in \mathbb{R}^n \iff (x_B)^t \cdot M_B(g) = 0.$$

Luego g es no degenerada si y sólo si el sistema de ecuaciones lineales $(x_B)^t \cdot M_B(g) = 0$ tiene solución no trivial, lo cual equivale a que $\det M_B(g) = 0$. □

2.5. Endomorfismos autoadjuntos.

Veamos que podemos reducir el estudio de las métricas (o de formas cuadráticas) sobre un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$ de dimensión n al estudio de cierto tipo de endomorfismos.

Tomemos una base ordenada $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V. Asociada a B tenemos una métrica natural $g \in S_2(V)$:

$$g(x, y) = (x_B)^T \cdot (y_B), \tag{2.2}$$

donde $x_B, y_B \in \mathbb{R}^n$ son las coordenadas de x, y respecto de B (comparar con el producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$). Es fácil comprobar que g es euclídea, en particular es no degenerada.

En todo lo que sigue en esta sección, usaremos la métrica euclídea auxiliar g, que depende de la elección de la base B. En la Nota 2.6.2 veremos que en realidad no tenemos porqué empezar con una base sino con una métrica euclídea g. En particular, el concepto de endomorfismo autoadjunto que desarrollaremos a continuación puede definirse respecto de cualquier métrica euclídea.

Consideremos la aplicación $\Psi \colon V \to V^*$ que lleva cada $x \in V$ en la forma lineal $y \in V \mapsto g(x, y)$. Ψ es lineal y por ser g no degenerada, $\ker(\Psi) = \{0\}$. Como $\dim V = \dim V^*$, deducimos que Ψ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Dada $g' \in S_2(V)$ (no necesariamente euclídea), definimos $f_{g'} \colon V \to V$ de forma que dado $x \in V$, $f_{g'}(x)$ es el único vector que por Ψ se aplica en la forma lineal $y \in V \mapsto g'(x, y)$ (existencia y unicidad se deducen de que Ψ es biyectiva). Es decir:

$$g\left(f_{g'}(x), y\right) = g'(x, y), \quad \forall x, y \in V. \tag{2.3}$$

La versión matricial de (2.3) es que

$$M(f_{g'}, B) = M_B(g'). \tag{2.4}$$

Teorema 2.5.1 *En la situación anterior, la aplicación $\Phi_g \colon S_2(V) \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ dada por $\Phi_f(g') = f_{g'}$ es un monomorfismo de espaciones vectoriales, cuya imagen es*

$$\Phi_g(S_2(V)) = \mathcal{A}_g := \{f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \mid g(x, f(y)) = g(x, f(y)),\ \forall x, y \in V\}.$$

Definición 2.5.1 En la situación del Teorema 2.5.1, a los endomorfismos en $\mathcal{A}_g$ se les llama *autoadjuntos respecto a g*.

El Teorema 2.5.1 implica que el conjunto de endomorfismos autoadjuntos respecto a g es un espacio vectorial isomorfo a $S_2(V)$. Por tanto, estudiar las métricas sobre V equivale a estudiar los endomorfismos autoadjuntos respecto a la métrica euclídea g.

Demostración. (del Teorema 2.5.1). Que Φ_g es lineal se deduce de que $f_{g'_1+g'_2} = f_{g'_1} + f_{g'_2}$ y $f_{ag'} = a f_{g'}$ para cada $g'_1, g'_2, g' \in S_2(V)$ y $a \in \mathbb{R}$. Estas dos igualdades se deducen fácilmente de (2.3) o de (2.4).

Que $\ker(\Phi_g) = \{0\}$ se deduce de que si $f_{g'} = 0$ entonces $g' = 0$, de nuevo por (2.3) ó (2.4).

Dada $g' \in S_2(V)$, $g(f_{g'}(x), y) = g'(x, y) = g'(y, x) = g(f_{g'}(y), x) = g(x, f_{g'}(y))$, luego $f_{g'} \in \mathcal{A}_g$. Recíprocamente, si $f \in \mathcal{A}_g$, entonces definiendo $g' \in S_2(V)$ por $g'(x, y) = g(f(x), y))$ se tiene que $\Phi_g(g') = f$ y hemos terminado. □

Lema 2.5.1 *En la situación del Teorema 2.5.1, un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$ es autoadjunto respecto a g si y sólo si $M(f, B)$ es simétrica.*

Demostración. Ejercicio. □

2.6. Bases ortonormales en un EVME.

En esta sección y la siguiente, supondremos que (V, g) es un espacio vectorial métrico eucllídeo (EVME).

Definición 2.6.1 Un vector $x \in V$ se dice *unitario* si $g(x, x) = 1$. Un subconjunto $\{x_1, \ldots, x_k\} \subset V$ se dice *ortogonal* si $g(x_i, x_j) = 0$, $\forall i \neq j$. Un subconjunto ortogonal se dice *ortonormal* si todos sus vectores son unitarios. Una *base ortonormal* de (V, g) es una base que además es un conjunto ortonormal.

Nota 2.6.1 Podíamos haber hecho la definición anterior suponiendo sólo que (V, g) es un EVM. Del apartado 2 del siguiente lema se deduce que si (V, g) es un EVM que admite una base ortonormal, entonces (V, g) es euclídeo.

Lema 2.6.1 *Sea $B = (x_1, \ldots, x_n)$ una base ortonormal de (V, g). Entonces:*

1. *Las coordenadas de cada $x \in V$ respecto a B son $x_B = (g(x, x_1), \ldots, g(x, x_n))_B \in \mathbb{R}^n$.*
2. *Dados $x, y \in V$, $g(x, y) = (x_B)^T \cdot y_B$ (es decir, (2.2) se cumple).*

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 2.6.1 (Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt)
Sea (V, g) un EVME y $B = \{y_1, \ldots, y_n\}$ una base de V. Entonces:

1. *Definiendo $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2 - a_{12} z_1$ con $a_{12} = \frac{g(y_2, z_1)}{g(z_1, z_1)}, \ldots, z_n = y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_{in} z_i$ con $a_{in} = \frac{g(y_n, z_i)}{g(z_i, z_i)}$, se tiene que $\{z_1, \ldots, z_n\}$ es una base ortogonal de (V, g).*
2. *Definiendo $x_i = \frac{1}{\sqrt{g(z_i, z_i)}} z_i$ $\forall i$ tenemos que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es una base ortonormal de (V, g).*

Demostración. Ejercicio. □

Nota 2.6.2 El Teorema 2.6.1 implica que todo EVME (V, g) de dimensión finita admite una base ortonormal B. La métrica auxiliar dada por la ecuación (2.2) a partir de esta base B no es otra que la propia g; en particular, si B, B' son dos bases ortonormales del mismo EVME (V, g), las métricas auxiliares dadas por la ecuación (2.2) a partir de B, B' coinciden con g. Esto nos dice que el concepto de endomorfismo autoadjunto y los resultados que obteníamos en la Sección 2.5 apoyándonos en la métrica euclídea asociada a una base B son ahora válidos para cualquier métrica euclídea. En particular, se tiene lo siguiente:

Lema 2.6.2 *Dado un EVME (V, g), un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, son equivalentes:*

1. *f es autoadjunto respecto a g.*
2. *Existe B base ortonormal de (V, g) tal que $M(f, B)$ es simétrica.*
3. *Para toda base ortonormal B de (V, g), $M(f, B)$ es simétrica.*

¿Cómo es la matriz de cambio de base entre bases ortonormales?

Del Lema 2.2.1 se deduce que si B, B' son bases ortonormales de un EVME (V, g), entonces $M(1, B, B') \in O(n)$, donde

$$O(n) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A^{-1}\} \subset Gl(n, \mathbb{R}) \quad \text{(grupo ortogonal)}.$$

En particular, el determinante de toda matriz ortogonal es ± 1.

Lema 2.6.3 *Sea (V, g) un EVME, B una base ortonormal y B' una base cualquiera. Entonces, B' es ortonormal si y sólo si $M(1_V, B, B') \in O(n)$.*

Demostración. Ejercicio. □

2.7. Suplemento ortogonal en un EVME.

Continuamos suponiendo que (V, g) es un EVME.

Definición 2.7.1 Sea $U \leq V$ un subespacio vectorial. Se define el *suplemento ortogonal* de U respecto a g como $U^{\perp} = \{x \in V \mid g(x, y) = 0,\ \forall y \in U\}$, que es un subespacio vectorial de V por la linealidad de g en la primera variable.

Ejemplo: en $(\mathbb{R}^2, g)$ siendo $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (métrica euclídea), si $U = L(\{(1, 0)\})$, entonces $U^{\perp} = L(\{(1, -2)\})$.

Nota 2.7.1 Podíamos haber definido $U^{\perp}$ de la misma forma si (V, g) sólo es un EVM, pero en ese caso no tiene porqué darse el primer apartado del lema siguiente, con lo que no deberíamos llamar *suplemento* a $U^{\perp}$ sino simplemente el *subespacio ortogonal de U*. Ver el Ejercicio 40.

Lema 2.7.1 *Sea (V, g) un EVME y U un subespacio vectorial de V. Entonces:*

1. *$V = U \oplus U^{\perp}$.*

2. $(U^\perp)^\perp = U$, $\{0\}^\perp = V$, $V^\perp = \{0\}$.

Demostración. Veamos que $V = U + U^\perp$. Tomemos una base ortonormal $B_U = (x_1, \ldots, x_k)$ de $(U, g|_{U\times U})$. Ampliamos B_U a una base $(x_1, \ldots, x_k, y_{k+1}, \ldots, y_n)$ de V y aplicamos a esta última el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt. De esta forma, obtenemos una base ortonormal de (V, g) del tipo $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$ (los primeros k vectores no cambian), y claramente $x_i \in U^\perp$ $\forall i = k+1, \ldots, n$. Así que $V = U + U^\perp$.

Si $x \in U \cap U^\perp$, entonces $g(x, x) = 0$ luego $x = 0$ porque g es euclídea. Por tanto, $U \cap U^\perp = \{0\}$ y 1 está probado. 2 se deja como ejercicio. □

Definición 2.7.2 Sea (V, g) un EVME y U un subespacio vectorial de V. Definimos la *proyección ortogonal de V sobre U* como $p_U\colon V \to V$, $p_U(x) = x_1 \in U$, donde $x = x_1 + x_2$, $x_2 \in U^\perp$ (esta descomposición es única por el apartado 1 del Lema 2.7.1).

Es fácil comprobar que p_U es lineal, luego $p_U \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$. De forma análoga podemos definir $p_{U^\perp}$, y se cumple $p_U + p_{U^\perp} = 1_V$. Además, p_U es un endomorfismo autoadjunto respecto a g, como consecuencia del apartado 2 del siguiente lema.

Lema 2.7.2 *Sea $U \leq V$. Entonces:*

1. *$p_U \circ p_U = p_U$ (p_U es una proyección).*

2. *$g(p_U(x), y) = g(x, p_U(y))$, $\forall x, y \in V$.*

3. *p_U es diagonalizable, y $U = \mathrm{Im}(p_U) = V_1$, $U^\perp = \ker(p_U) = V_0$ (subespacios propios).*

4. *$\exists B$ base ortonormal de (V, g) tal que $M(p_U, B)$ es diagonal.*

Demostración. Los apartados 1 y 2 se dejan como ejercicio. Para los apartados 3 y 4, notemos que la restricción de p_U a U es 1_U y la restricción de p_U a $U^\perp$ es idénticamente cero. Finalmente, si B_U es una base ortonormal de $(U, g|_{U\times U})$ y $B_{U^\perp}$ es una base ortonormal de $(U^\perp, g|_{U^\perp\times U^\perp})$, entonces $B = (B_U, B_{U^\perp})$ es una base ortonormal de (V, g) tal que $M(p_U, B)$ es diagonal (con unos y ceros en la diagonal). □

2.8. Diagonalización de endomorfismos autoadjuntos.

Lema 2.8.1 *Toda matriz $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tiene (al menos) un valor propio real.*

Demostración. Sea $p_A(t) = \det(A - tI_n) \in \mathbb{R}[t]$ el polinomio característico de A. El Teorema Fundamental del Algebra asegura que $\exists a \in \mathbb{C}$ tal que $p_A(a) = 0$. S e trata de comprobar que $a \in \mathbb{R}$ (en particular, A tendrá un vector propio REAL asociado a a).

Como a es autovalor complejo de A, $\exists z = (z_1, \ldots, z_n)^T \in \mathbb{C}^n - \{0\}$ tal que $Az = az$, y

$$\overline{z}^T Az = \overline{z}^T az = a\overline{z}^T z = a \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2. \tag{2.5}$$

Además,

$$\overline{z}^T Az = \sum_{i=1}^{n} (\overline{z}^t)_i (Az)_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{z}_i a_{ij} z_j \in \mathbb{C}. \tag{2.6}$$

Por tanto,

$$\overline{\overline{z}^T Az} = \sum_{i,j=1}^{n} z_i a_{ij} \overline{z_j}. \tag{2.7}$$

Como A es simétrica, (2.6) y (2.7) coinciden luego $\overline{z}^T Az \in \mathbb{R}$. Como $\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 \in \mathbb{R} - \{0\}$, de (2.5) se deduce que $a \in \mathbb{R}$. $\square$

Tomemos una métrica euclídea g sobre V, y consideremos el espacio vectorial $\mathcal{A}_g$ de endomorfismos autoadjuntos respecto a g (ver la Nota 2.6.2).

Proposición 2.8.1
Sea $f \in \mathcal{A}_g$. Entonces:

1. *Si $U \leq V$ cumple $f(U) \subseteq U$, entonces $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.*

2. *f tiene (al menos) un valor propio real.*

3. *Si $a \neq b \in \mathbb{R}$ son valores propios distintos de f, entonces $V_a \perp V_b$.*

Demostración. Si $x \in U^\perp$ e $y \in U$, entonces $g(f(x), y) = g(x, f(y)) = 0$ por ser $f(y) \in U$; esto prueba 1. El apartado 2 es consecuencia directa de los Lemas 2.5.1 y 2.8.1.

Veamos 3: si $x \in V_a$ e $y \in V_b$, entonces $a\, g(x, y) = g(ax, y) = g(f(x), y) = g(x, f(y)) = g(x, by) = b\, g(x, y)$ luego $g(x, y) = 0$. $\square$

Teorema 2.8.1 *Sea (E, g) EVME y $f \in \mathcal{A}_g$. Entonces existe B base ortonormal de (V, g) tal que $M(f, B)$ es diagonal.*

Demostración. (Por inducción sobre $n = \dim V$). Si $n = 1$ no hay nada que probar. Supongamos que el teorema es cierto para $n-1$. Sea $V(\mathbb{R})$ con $\dim V = n$ y $f \in \mathcal{A}_g$. Por el apartado 2 de la Proposición 2.8.1, existen $a \in \mathbb{R}$ y $x_1 \in V - \{0\}$ tales que $f(x_1) = ax_1$. Reescalando, pordemos suponer que $g(x_1, x_1) = 1$. Sea $U = L(\{x\})$. Como $f(U) \subseteq U$, el apartado 1 de la Proposición 2.8.1 implica que $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$, luego $f|_{U^\perp}$ es un endomorfismo autoadjunto del EVME $(U^\perp, g|_{U^\perp \times U^\perp})$. Como $\dim U^\perp = n-1$, por hipótesis de inducción existe una base ortonormal $B_1 = (x_2, \ldots, x_n)$ de $(U^\perp, g|_{U^\perp \times U^\perp})$ tal que $M(f|_{U^\perp}, B_1)$ es diagonal. Tomando $B = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ obtenemos una base ortonormal de (V, g) y $M(f, B)$ es diagonal. □

Corolario 2.8.1

1. *Toda matriz simétrica real es ortogonalmente diagonalizable: si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, entonces $\exists P \in O(n)$ tal que $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal*[1].

2. *Si (V, g) es un EVME y $g' \in S_2(V)$, entonces $\exists B$ base ortonormal de (V, g) tal que $M_B(g')$ es diagonal.*

3. *Si (V, g) es un EVME y F es una forma cuadrática sobre V, entonces $\exists B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de (V, g) y $\exists r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$ tales que*
$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i^2 \quad \textit{para todo } v \in V,$$
donde $x_B = (a_1, \ldots, a_n)$ son las coordenadas de x respecto a B.

Demostración. Para el apartado 1, sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Sea (V, g) un EVME con $\dim V = n$ y B una base ortonormal de (V, g). Por el Lema 2.5.1, existe $f \in \mathcal{A}_g$ tal que $M(f, B) = A$. Por el Teorema 2.8.1, existe B' base ortonormal de (V, g) tal que $M(f, B')$ es diagonal. Consideremos la métrica $g' \in S_2(V)$ asociada a f (es decir, $f_{g'} = f$, ver el Teorema 2.5.1). Entonces, $M_B(g') = M(f, B) = A$ y $M_{B'}(g) = M(f, B')$ usando dos veces la ecuación (2.4). Por tanto, el Lema 2.2.1 nos dice que $M_{B'}(g) = P^T \cdot M_B(g) \cdot P = P^T \cdot A \cdot P$, donde $P = M(1_V, B', B) \in O(n)$ por el Lema 2.6.3. Esto prueba el apartado 1. 2 y 3 se dejan como ejercicio. □

2.9. El Teorema de Sylvester.

Sabemos que todo EVME admite una base ortonormal. El siguiente resultado generaliza esta propiedad.

[1] Como $P \in O(n)$, esta diagonalización de A es por semejanza y por congruencia simultáneamente.

Teorema 2.9.1 (Sylvester) *Sea (V, g') un EVM. Entonces, existen $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que sólo dependen de g' y existe una base ordenada B de V tal que (por cajas)*

$$M_B(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \tag{2.8}$$

A s se le llama el índice *de (V, g'); a $r+s$ se le llama el* rango *de (V, g'); y a $n-(r+s)$ la* nulidad *de (V, g').*

Demostración. Tomemos una base ordenada auxiliar B_1 de V y sea $g \in S_2(V)$ la métrica euclídea dada por (2.2) cambiando B por B_1. Por el apartado 2 del Corolario 2.8.1, $\exists B_2 = \{y_1, \ldots, y_n\}$ base ortonormal de (V, g) tal que $M_{B_2}(g')$ es diagonal. Reordenamos los vectores de B_2 de forma que primero estén los vectores correspondientes a valores propios negativos, luego los asociados a positivos y por último a cero. Si $g'(y_j, y_j) < 0$, definimos $x_j = \frac{1}{\sqrt{-g(x_j,x_j)}} y_j$; si $g'(y_j, y_j) > 0$, definimos $x_j = \frac{1}{\sqrt{g(x_j,x_j)}} y_j$; finalmente, si $g'(y_j, y_j) = 0$, definimos $x_j = y_j$. Ahora $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ cumple que $M_B(g')$ es como en el enunciado del teorema.

Sólo queda ver que s, r no dependen de la construcción anterior. Supongamos que B' es otra base ordenada de V tal que

$$M_{B'}(g') = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_{s'} & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_{r'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Se trata de ver que $s = s'$ y $r = r'$. Como las matrices $M_{B'}(g)$, $M_{B'}(g')$ son congruentes, tienen el mismo rango. Por tanto, $s + r = s' + r'$. Queda ver, por ejemplo, que $s = s'$. Llamemos

$$B = \{x_1, \ldots, x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{s+r}, x_{s+r+1}, \ldots, x_n\},$$
$$B' = \{x'_1, \ldots, x'_{s'}, x'_{s'+1}, \ldots, x'_{s'+r'}, x'_{s'+r'+1}, \ldots, x'_n\}$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que $s > s'$ (si $s < s'$ el razonamiento es análogo). Considero los subespacios vectoriales de V

$$U_1 = L(\{x_1, \ldots, x_s\}), \quad U_2 = L(\{x'_{s'+1}, \ldots, x'_{s'+r'}, x'_{s'+r'+1}, \ldots, x'_n\}).$$

Entonces, $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) = s + (n - s') - \dim(U_1 + U_2) \geq s + (n - s') - n = s - s' > 0$, luego $\exists x \in U_1 \cap U_2$, $x \neq 0$. Como $x \in U_1$, $g(x, x) < 0$. Como $x \in U_2$, $g(x, x) \geq 0$, contradicción. □

Corolario 2.9.1

1. *Dada* $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$*, existen* $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *que sólo dependen de* A *(con* $r + s = \mathrm{rango}(A)$*) y existe* $P \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ *tales que*

$$P^t \cdot A \cdot P = \left(\begin{array}{c|c|c} -I_s & 0 & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

2. *Si* $V(\mathbb{R})$ *es un espacio vectorial real y* F *es una forma cuadrática sobre* V*, entonces existen* $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *que sólo dependen de* F *y existe una base* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *de* V *tales que*

$$F(x) = -\sum_{i=1}^{s} a_i^2 + \sum_{i=s+1}^{s+r} a_i^2 \quad \textit{para todo } v \in V,$$

donde $x_B = (a_1, \ldots, a_n)$ *son las coordenadas de* x *respecto a* B*.*

Demostración. Ejercicio. □

2.10. Isometrías.

Definición 2.10.1 Una aplicación $f\colon (V, g) \to (V', g')$ entre EVM se llama *isometría* si es lineal, biyectiva y

$$g'(f(x), f(y)) = g(x, y) \quad \forall x, y \in V. \tag{2.9}$$

Luego una isometría es un isomorfismo entre EVM que conserva las métricas.

Como los dos miembros de (2.9) son bilineales (supuesto que f es lineal), que se dé (2.9) equivale a que se dé sólo para los vectores de una base de V.

Definición 2.10.2 Dos EVM (V, g), (V', g') se dicen ISOMETRICOS si $\exists f\colon (V, g) \to (V', g')$ isometría. La composición de dos isometrías entre EVM es una isometría (ejercicio 30) y 'ser isométrico a' es una relación de equivalencia en el conjunto de los EVM.

Por ejemplo, dos EVME serán isométricos si y sólo si tienen la misma dimensión. Esto no es verdad para EVM generales:

Corolario 2.10.1 *Sean* (V, g)*,* (V', g') *dos EVM. Entonces, son equivalentes:*

1. (V, g)*,* (V', g') *son isométricos.*
2. $\dim V = \dim V'$*,* $\mathrm{Indice}(V, g) = \mathrm{Indice}(V' g')$ *y* $\mathrm{Rango}(V, g) = \mathrm{Rango}(V', g')$*.*

3. $\dim V = \dim V'$, *Indice*$(V, g) =$ Indice$(V'g')$ *y* Nulidad$(V, g) =$ Nulidad(V', g').

Demostración. La relación entre la dimensión, la nulidad y el rango nos dice que basta probar que 1 y 2 son equivalentes.

Si 1 se da, existe $f\colon (V, g) \to (V', g')$ isometría. Aplicando el Teorema de Sylvester a (V, g), existen $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ que sólo dependen de g y existe una base ordenada B de V tal que $M_B(g)$ se escribe como en (2.8). Como f es isomorfismo de espacios vectoriales, $f(B)$ será una base de V'. Por ser f isometría, tenemos $M_{f(B)}(g') = M_B(g)$, luego (V', g') tiene la misma dimensión, índice y rango que (V, g), y 2 está probado.

Recíprocamente, supongamos que 2 se da. Aplicando a (V, g), (V', g') el Teorema de Sylvester, existirán $s, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (los mismos para g, g') y bases ordenadas B de V y B' de V' tales que $M_B(g)$ y $M_{B'}(g')$ se escriben simultáneamente como en (2.8). Consideremos la única aplicación lineal $f\colon V \to V'$ que lleva cada vector de B en el correspondiente vector de B', sin alterar el orden de los vectores en las bases. Entonces, $M_B(g) = M_{B'}(g') = M_{f(B)}(g')$ luego f es una isometría de (V, g) en (V', g') y se tiene 1. □

Proposición 2.10.1 *Sea (V, g) un EVME con $\dim V = n$ y B una base ordenada ortonormal de V. Entonces:*

1. *Dada $A \in Gl(n, \mathbb{R})$, sea $f\colon V \to V$ el único automorfismo de V tal que $M(f, B) = A$. Entonces, f es una isometría de (V, g) es sí mismo si y sólo si $A \in O(n)$.*

2. *El conjunto* $\mathrm{Iso}(V, g) = \{f\colon (V, g) \to (V, g) \mid f$ *isometría de* (V, g) *en sí mismo*$\}$ *es un grupo con la composición, y la aplicación $F_B\colon \mathrm{Iso}(V, g) \to O(n)$ dada por $F_B(f) = M(f, B)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Si f es una isometría, se tiene $M_B(g) = M_{f(B)}(g) = P^T \cdot M_B(g) \cdot P$ donde $P = M(1_V, f(B), B)$ por el Lema 2.2.1. Notemos que $M(1_V, f(B), B) = M(f, B) = A$, luego $P = A$. Finalmente, $M_B(g) = I_n$ porque B es ortonormal, luego $A \in O(n)$. El recíproco de 1 y el apartado 2 se dejan como ejercicio. □

2.11. Ejercicios.

1. Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial real de dimensión n, $g \in S_2(V)$ y B_1 una base ordenada de V. Probar que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es congruente a $M_{B_1}(g)$, entonces existe una base ordenada B_2 de V tal que $B = M_{B_2}(g)$.

2. Prueba el Lema 2.3.1.

3. Demuestra que todo espacio vectorial real admite una métrica euclídea.

4. En $\mathbb{R}^2$ se considera la base usual $B_u = \{e_1, e_2\}$ y las métricas g_k, $k = -2, -1, 0, 1, 2$ dadas por
$$M_{B_u}(g_k) = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}.$$
Estudiar en función de k de qué tipo es la métrica g_k.

5. Construye una métrica sobre $\mathbb{R}^2$ tal que el vector $(1, -2)$ sea ortogonal a todos los vectores.

6. Sea (V, g) un EVME. Probar que todo conjunto $\{y_1, \ldots, y_k\} \subset V$ de vectores no nulos y ortogonales dos a dos es linealmente independiente.

7. Prueba que durante el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt, no se cambian los subespacios generados por cada conjunto ordenado de la base original. Es decir, si $\{y_1, \ldots, y_n\}$ es la base original de V y $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es la base ortonormal obtenida por ortonormalización de Gram-Schmidt a partir de ella, entonces
$$L(\{y_1\}) \oplus \ldots \oplus L(\{y_i\}) = L(\{x_1\}) \oplus \ldots \oplus L(\{x_i\}), \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

8. Sea g la métrica sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base usual es $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Prueba que g es euclídea.

9. Es posible que la restricción de una métrica no degenerada a un subespacio sea degenerada (esto no ocurre para métricas euclídeas): prueba que la métrica g sobre $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base usual es $M_{B_u}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es no degenerada, pero que la restricción de g a $U = L(\{(1, 0)\})$ es degenerada.

10. Prueba el Lema 2.6.3.

11. Prueba el apartado 2 del Lema 2.7.1.

12. Prueba los apartados 1,2 del Lema 2.7.2.

13. Prueba los apartados 2 y 3 del Corolario 2.8.1.

14. Prueba el Corolario 2.9.1.

15. Sean g, g' dos métricas sobre el mismo espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, tales que dados $x, y \in V$, $g(x, y) = 0$ si y sólo si $g'(x, y) = 0$. ¿Tienen que coincidir g y g'?

16. En $(\mathbb{R}^3, g_0)$ (producto escalar usual) se consideran los planos vectoriales cuyas ecuaciones implícitas respecto de la base usual son $U_1 = \{a_1 + a_2 - a_3 = 0\}$, $U_2 = \{a_1 + a_2 + 2a_3 = 0\}$. Probar que $U_1^\perp \subset U_2$ y que $U_2^\perp \subset U_1$ pero estas inclusiones no son igualdades.

17. Sea (V, g) un EVME y $p \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ tal que $p \circ p = p$ (es decir, p es una proyección). Demostrar que $V = \ker(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ y que si p es autoadjunto respecto a g, entonces p es la proyección ortogonal de V sobre el subespacio $U = \mathrm{Im}(p)$.

18. Sea $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grado}(p(x)) \leq 2\}$. Consideremos la aplicación
$$g : V \times V \to \mathbb{R} \mid g(p(x), q(x)) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt.$$
   i) Prueba que g es una métrica euclídea sobre V.

   ii) Demuestra que la base $\{1, x, x^2\}$ no es ortonormal respecto de g y obtén a partir de ésta, una base ortonormal por el procedimiento de Gram-Schmidt.

19. Sea V un espacio vectorial real, y U, W subespacios vectoriales de V tales que $V = U \oplus W$. Demuestra que existe una métrica euclídea g sobre V tal que W es el suplemento ortogonal de U respecto a g.

20. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V, g) de dimensión finita. Prueba que V es suma directa ortogonal de $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

21. En el espacio vectorial $C([-1, 1], \mathbb{R})$ con el producto L^2, probar que el suplemento ortogonal del subespacio formado por las funciones pares coincide con el subespacio de las funciones impares.

22. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con la métrica $g(A, B) = \mathrm{Tr}(A^T \cdot B)$, calcular el suplemento ortogonal del subespacio vectorial formado por las matrices diagonales.

23. Supongamos que (V, g) es un EVM no degenerado, y $U \leq V$ tal que $g|_U$ es no degenerada. Definiendo $U^\perp$ como en el caso euclídeo, probar que $V = U \oplus U^\perp$. Indicación: para ver que $V = U + U^\perp$, toma $x \in V$ y una base $\{x_1, \ldots, x_k\}$ de U. ¿Cuándo el paréntesis en la descomposición $x = \sum_{i=1}^k a_i x_i + \left(x - \sum_{i=1}^k a_i x_i\right)$ está en $U^\perp$? (traduce esto a un sistema de ecuaciones lineales).

24. Sea (V, g) un EVM con dimensión n y B una base de V. Probar que un automorfismo f de V es una isometría de (V, g) en sí mismo si y sólo si $M(f, B)^T \cdot M_B(g) \cdot M(f, B) = M_B(g)$.

25. Sea (V, g) un EVM y $f : V \to V'$ un isomorfismo de V en otro espacio vectorial real. Prueba que existe una única métrica g' sobre V' que hace a f una isometría de (V, g) en (V', g').

26. Sea (V', g') un EVM y $f : V \to V'$ un monomorfismo de otro espacio vectorial real V en V'. Prueba que existe una única métrica g sobre V que hace a f una isometría de (V, g) en $(f(V), g'|_{f(V)\times f(V)})$.

27. En $\mathbb{R}^2$ se consideran las métricas g_1, g_2, g_3 definidas por sus respectivas matrices de coordenadas respecto de la base ordenada usual B:

$$M_B(g_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_B(g_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_B(g_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Discutir razonadamente las posibles isometrías que existan entre $(\mathbb{R}^2, g_1), (\mathbb{R}^2, g_2)$ y $(\mathbb{R}^2, g_3)$.

28. Sea $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, B una base de $V(\mathbb{R})$ y g la única métrica sobre V tal que $M_B(g) = A$. Demuestra que g es euclídea si y sólo si existe $Q \in Gl(n, \mathbb{R})$ tal que $A = Q^t \cdot Q$.

29. Probar que un isomorfismo f entre dos EVM $V, g), (V', g')$ es isometría si y sólo si conserva las formas cuadráticas asociadas a g, g'.

30. Probar que la composición de dos isometrías entre EVM es una isometría.

31. Probar el recíproco del apartado 1 y el apartado 2 en la demostración de la Proposición 2.10.1.

32. En $\mathbb{R}^4$ se considera el producto escalar usual y los subespacios vectoriales

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y = 0,\ z + t = 0\}, \quad W = L(\{(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}).$$

Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una isometría que verifica las condiciones

(A) $f(U) = W$,

(B) $f(1, -1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$,

(C) $\det f = 1$.

¿Existe alguna isometría f como la anterior que sea diagonalizable? Si existe, calcula una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$ con que esté formada por vectores propios de f.

33. **(A)** Sea $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3$ definido por $f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z)$. Demostrar que f es autoadjunto respecto al producto escalar usual g_0 y calcular una base ortonormal de $(\mathbb{R}^3, g_0)$ formada por autovectores de f.

    (B) Idem para $f(x,y,z) = (y, x+2z, 2y)$.

34. Encuentra una matriz $P \in O(3)$ tal que si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $P^t \cdot A \cdot P$ es diagonal.

35. Sea f un endomorfismo autoadjunto de un EVME (V,g), tal que $g(f(x),x) \geq 0 \; \forall x \in V$. Prueba que $\exists h$ endomorfismo autoadjunto de (V,g) tal que $h \circ h = f$. ¿Es h único?

36. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las formas cuadráticas

$$F_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz + yz, \quad F_2(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2 - 8xz.$$

    Encontrar bases ortonormales de $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual que diagonalicen a F_1 y a F_2.

37. En $\mathbb{R}^2$ se considera la métrica g cuya matriz en la base usual B es $M_B(g) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

    (A) Probar que g es euclídea y encontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$.

    (B) Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por $M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Demostrar que f es autoadjunto respecto a g y entontrar una base ortonormal de $(\mathbb{R}^2, g)$ formada por autovectores de f.

38. Criterio de los menores para saber si una métrica es euclídea. Sea (V,g) un EVM y B una base ordenada de V. Dado $k \in \{1,\dots,n\}$, sea A_k el menor de $M_B(g)$ formado por las k primeras filas y columnas de A. Demuestra que g es euclídea si y sólo si $\forall k$, $\det(A_k) > 0$. Indicación para la condición suficiente: Razona por inducción sobre $\dim V$ y encuentra una base ortonormal $B_U = (y_1,\dots,y_{n-1})$ de $g|_U$, donde $U \subset V$ está generado por los primeros $n-1$ vectores de B. Amplía B_U a $B_1 = (y_1,\dots,y_{n-1},y_n)$ y expresa

$$M_{B_1}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & a^t \\ \hline a & a_n \end{array}\right)$$

    para cierto $a = (a_1,\dots,a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Define $B_2 = (y_1,\dots,y_{n-1}, y_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i y_i)$ y prueba que

$$M_{B_2}(g) = \left(\begin{array}{c|c} I_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 \end{array}\right).$$

Finalmente, prueba que $a_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i^2 > 0$, por lo que g será euclídea.

39. Isomorfismos musicales. Sea (V, g) un EVM no degenerado con dimensión finita.

    (A) Sea $x \in V$, se define $x^\flat \colon V \to \mathbb{R}$ como $x^\flat(y) = g(x, y)$, $y \in V$. Probar que $x^\flat \in V^*$ es una forma lineal, y que la aplicación $\flat \colon V \to V^*$ tal que $\flat(x) = x^\flat$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.

    (B) Dada $\varphi \in V^*$, probar existe un único vector $\varphi^\sharp \in V$ tal que $g(\varphi^\sharp, y) = \varphi(y)$ para todo $y \in V$. Demostrar que la aplicación $\sharp \colon V^* \to V$ definida por $\sharp(\varphi) = \varphi^\sharp$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, y que $\flat^{-1} = \sharp$. A $\flat, \sharp$ se les lama isomorfismos musicales.

    (C) Definiendo $g^* \colon V^* \times V^* \to \mathbb{R}$ mediante $g^*(\varphi, \psi) = g(\varphi^\sharp, \psi^\sharp)$, probar que g^* es una métrica no degenerada sobre V^*, y que g^* es la única métrica sobre V^* que hace a $\flat \colon (V, g) \to (V^*, g^*)$ una isometría.

    (D) Probar que si cambiamos la hipótesis 'g es no degenerada' por 'g es euclídea', entonces g^* para a ser euclídea también.

    (E) Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base ordenada de V, y $B^* = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ su base ordenada dual. Probar que $M_B(g) = M(\flat, B, B^*)$ y que $M_{B^*}(g^*) = M(\sharp, B^*, B)$. Deducir que $M_{B^*}(g^*) = M_B(g)^{-1}$.

    (F) Demostrar que si g es euclídea y B es una base ordenada ortonormal de (V, g), entonces B^* es base ordenada ortonormal para (V^*, g^*).

40. Sea (V, g) un EVM y $U \leq V$ un subespacio vectorial. Si definimos $U^\perp = \{x \in V \mid g(x, y) = 0 \ \forall y \in U\}$, demostrar que $U^\perp$ es un subespacio vectorial de V y que $(U, g|_{U \times U})$ es no degenerado si y sólo si $U \cap U^\perp = \{0\}$. Probar que si (V, g) es no degenerado, entonces $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$.

41. Diagonalización simultánea de dos endomorfismos autoadjuntos.
    Sean f, h endomorfismos autoadjuntos de un EVME (V, g) con dimensión n, tales que $f \circ h = h \circ f$.

    (A) Probar que los subespacios propios de f (resp. de h) son invariantes por h (resp. por f).

    (B) Demostrar que existe una base ordenada ortonormal de B de (V, g) tal que $M(f, B)$ y $M(h, B)$ son matrices diagonales.

Capítulo 3

Espacios vectoriales métricos euclídeos.

Tras estudiar los EVM generales en el tema anterior, vamos a profundizar en las propiedades de los EVME. Veremos que guardan mucha relación con la geometría de $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar usual. En todo ese capítulo, (V, g) denotará un EVME.

3.1. Norma y ángulo en un EVME.

Definición 3.1.1 Dado $x \in V$, se define la *norma* de x como $\|x\| = \sqrt{g(x,x)} \in \mathbb{R}_0^+$.

Ejemplos:

1. En $(\mathbb{R}^n, g_0)$ (producto escalar usual), $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ si $x = (a_1, \ldots, a_n)$.

2. En $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), g)$ (ejemplo 4 de la Sección 2.1): $\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2}$ si $A = (a_{ij})_{i,j}$.

3. En $(C([a,b], \mathbb{R}), g)$ (producto L^2, ejemplo 3 de la Sección 2.1): $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\, dt}$.

Proposición 3.1.1 *Dados $x, y \in V$, $a \in \mathbb{R}$, se tienen:*

1. $\|x\| \geq 0$, *con igualdad si y sólo si* $x = 0$.

2. $\|ax\| = |a|\|x\|$.

3. *(Desigualdad de Schwarz):* $|g(x,y)| \leq \|x\|\|y\|$, *con igualdad si y sólo si* x, y *son linealmente dependientes.*

4. *(Desigualdad de Minkowski o triangular):* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demostración. 1,2 se dejan como ejercicio. Veamos la desigualdad de Schwarz: Tomemos $x, y \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$0 \leq g(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 g(x,x) + 2\lambda g(x,y) + g(y,y).$$

Viendo lo anterior como polinomio en λ (parábola), su discriminante Δ ha de ser ≤ 0. Pero

$$\Delta = 4g^2(x,y) - 4g(x,x)g(y,y),$$

luego la desigualdad de Schwarz se cumple. Si la igualdad se da en la desigualdad de Schwarz, entonces $\Delta = 0$ luego la parábola anterior en λ toca al eje de abscisas: $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 = \lambda^2 g(x,x) + 2\lambda g(x,y) + g(y,y) = g(\lambda x + y, \lambda x + y)$, de donde $\lambda x + y = 0$.

Finalmente, la desigualdad triangular:
$\|x+y\|^2 = g(x+y, x+y) = g(x,x) + 2g(x,y) + g(y,y) \leq g(x,x) + 2|g(x,y)| + g(y,y)$
$\leq g(x,x) + 2\|x\|\|y\| + g(y,y) = (\|x\| + \|y\|)^2$. □

Dados $x, y \in V - \{0\}$, la desigualdad de Schwarz implica que $\frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|} \in [0,1]$, luego éste es el coseno de un ángulo (en general, de dos ángulos en $[0, 2\pi)$; nos quedaremos con el menor para la siguiente definición).

Definición 3.1.2 Sean $x, y \in V - \{0\}$. Se define el *ángulo* entre x e y como $\sphericalangle(x,y) \in [0,\pi]$ tal que $\cos \sphericalangle(x,y) = \frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|}$.

Proposición 3.1.2 *Dados* $x, y \in V - \{0\}$, *se tienen:*

1. $g(x,y) = \|x\|\|y\| \cos \sphericalangle(x,y)$.

2. $\sphericalangle(x,y) = 0, \pi$ *si y sólo si* x, y *son linealmente dependientes.*

3. $\sphericalangle(x,y) = \frac{\pi}{2}$ *si y sólo si* $x \perp y$.

Demostración. Ejercicio. □

3.2. Orientación en un espacio vectorial real.

En el conjunto $\mathcal{B}$ de las bases ordenadas en un espacio vectorial $V(\mathbb{R})$, se define la relación de equivalencia

$$B \sim B' \Leftrightarrow \det M(1_V, B, B') > 0.$$

El conjunto cociente $\mathcal{B}/\sim$ tiene dos clases de equivalencia:

$$C(B) = \{B_1 \in \mathcal{B} \mid \det M(1_V, B, B_1) > 0\}, \quad C(B') = \{B_1 \in \mathcal{B} \mid \det M(1_V, B, B_1) < 0\},$$

donde $B' = (-x_1, x_2, \ldots, x_n)$ si $B = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Definición 3.2.1 A cada una de las dos clases $C(B), c(B')$ se le llama una *orientación* sobre V, y al par $(V, c(B))$ se le llama *espacio vectorial orientado.* Cada espacio vectorial real produce dos espacios vectoriales orientados.

Definición 3.2.2 Un isomorfismo entre EV orientados $f\colon (V_1, c(B_1)) \to (V_2, c(B_2))$ se dice que *conserva la orientaciones* $c(B_1)$ *y* $c(B_2)$ si dada $B \in C(B_1)$, la base $f(B)$ está en $c(B_2)$ (esto no depende del representante $B \in C(B_1)$). Si f no conserva las orientaciones $c(B_1)$ y $c(B_2)$, decimos que las *invierte.*

Si cambiamos la orientación en uno de V_1 ó V_2 (pero no en los dos), el mismo isomorfismo f pasa de conservar a invertir las orientaciones, y viceversa. En el caso de un automorfismo $f : V \to V$, podemos hablar de si f conserva o invierte la orientación sin especificar cuál de las dos, porque entendemos que consideramos la misma orientación sobre V en el dominio y en el codominio de f.

Si (V, g) es un EVME, podemos representar cada orientación de V por una base ortonormal. El cambio de base entre dos bases ordenadas ortonormales en la misma orientación es 1.

3.3. Angulo orientado en un EVME bidimensional.

En esta sección, (V, g) es un EVME con $\dim V = 2$.

Lema 3.3.1 *Sea B una base ortonormal de (V, g). Entonces,*

$$(\det_B(x, y))^2 + g(x, y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2, \quad \forall x, y \in V,$$

donde $\det_B$ *es el tensor determinante en la base B, es decir,*

$$\det_B(x, y) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

si $x_B = (a_1, a_2), y_B = (b_1, b_2)$ son las coordenadas de x, y respecto a B.

Demostración. Si $B = (x_1, x_2)$ y $x_B = (a_1, a_2)$, $y_B = (b_1, b_2)$ son las coordenadas de x, y respecto a B, entonces

$$\|x\|^2\|y\|^2 - g(x,y)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (\det_B(x,y))^2 .$$

□

Si además suponemos $x, y \in V - \{0\}$, el Lema 3.3.1 se traduce en

$$\left(\frac{\det_B(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right)^2 + \left(\frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|}\right)^2 = 1.$$

Definición 3.3.1 Sea $C(B)$ una orientación en un plano euclídeo (V, g), representada por una base ortonormal B. Dados $x, y \in V - \{0\}$, el ángulo orientado entre x e y es el único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\det_B(x,y)}{\|x\|\|y\|}, \qquad \cos\theta = \frac{g(x,y)}{\|x\|\|y\|}.$$

El ángulo orientado no es simétrico, porque $\det_B$ es antisimétrico: si el ángulo orientado entre x e $y \in V - \{0\}$ respecto a $c(B)$ es θ, entonces el ángulo orientado entre y y x respecto a $c(B)$ es $2\pi - \theta$. Un argumento parecido nos dice que el ángulo orientado pasa de ser θ a $2\pi - \theta$ si cambiamos la orientación en (V, g) sin cambiar el orden de x, y.

3.4. Producto vectorial en un EVME tridimensional.

En esta sección, (V, g) es un EVME con $\dim V = 3$. Sabemos que por ser g no degenerada, la aplicación

$$\Phi \colon V \to V^*, \quad \Phi(x) = \varphi_x \colon V \to \mathbb{R}$$

donde $\varphi_x(y) = g(x, y)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Sea B una base ortonormal, y $\det_B$ el tensor determinante en esa base, es decir

$$\det_B(y_1, y_2, y_2) = \det((y_1)_B, (y_2)_B, (y_3)_B), \quad \forall y_1, y_2, y_3 \in V,$$

donde $(y_i)_B \in \mathbb{R}^3$ son las coordenadas de $y_i \in V$ respecto a B.

Dados $x, y \in V$, consideremos la forma lineal $\det_B(x, y, \cdot) \in V^*$. Así, existe un único vector $x \times y \in V$ tal que $\Phi(x \times y) = \det_B(x, y, \cdot)$. Es decir,

$$g(x \times y, z) = \det_B(x, y, z) \quad \forall z \in V. \tag{3.1}$$

Definición 3.4.1 A $x \times y$ se le llama el *producto vectorial* de x e y respecto a la orientación $c(B)$.

$x \times y$ no depende de la base ortonormal elegida en $C(B)$: en efecto, si $B' \in C(B)$ es otra base ortonormal, entonces $\det_B = \det_{B'}$ (esto se deduce de que para dos bases cualesquiera $B.B'$ de V, no necesariamente ortonormales, se tiene $\det_B = \det M(1_V, B', B) \cdot \det_{B'}$). Por tanto, (3.1) nos dice que $x \times y$ es independiente de si usamos B o B'.

Si cambiamos la orientación en (V, g), entonces $x \times y$ cambia de signo, porque si B, B' son dos bases ortonormales en distintas orientaciones, entonces $\det_B = -\det_{B'}$.

Proposición 3.4.1 (Propiedades del producto vectorial) *Dados $x, y, z, x', y' \in V$, $a, b \in \mathbb{R}$,*

1. *Si $x_B = (a_1, a_2, a_3)$, $y_B = (b_1, b_2, b_3)$, entonces*
$$(x \times y)_B = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\imath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

2. $(ax + bx') \times y = a(x \times y) + b(x' \times y)$.

3. $x \times (ay + by') = a(x \times y) + b(x \times y')$.

4. $x \times y = -y \times x$.

5. $g(x \times x', y \times y') = g(x, y)\, g(x', y') - g(x, y')\, g(x', y)$.

6. $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - g(x, y)^2$.

7. $\|x \times y\| = \|x\|\,\|y\| \operatorname{sen} \sphericalangle(x, y)$ *si $x, y \neq 0$ (aquí $\sphericalangle(x, y) \in [0, \pi]$ es el ángulo no orientado en el plano generado por x, y).*

8. $x \times (y \times z) = g(x, z)y - g(x, y)z$.

Demostración. 1 se deduce de (3.1) tomando z como cada vector de B. 2 y 3 son triviales. 4 se deduce de que $\det_B$ es antisimétrico en sus dos primeras variables. 6 se deduce de 5 tomando $y = x, y' = x'$.

Veamos 5: Ambos miembros de la igualdad son tensores[1] de tipo $(4, 0)$ luego basta ver que coinciden sobre los vectores de una base ordenada ortonormal positiva $B = (x_1, x_2, x_3)$ de (V, g). Hay $3^4 = 81$ listas de cuatro vectores con los elementos de B, pero no tenemos que comprobarlos todos debido a las propiedades de simetría en los dos miembros. Por ejemplo, es fácil comprobar que

- Si $x = x'$ o $y = y'$, los dos miembros se anulan.
- Si cambiamos x por x' o bien y por y', los dos miembros cambian de signo.

[1] Es decir, son lineales en cada una de sus cuatro variables por separado.

- Si cambiamos la primera pareja por la segunda pareja de variables, los dos miembros permanecen igual.

Usando las propiedades anteriores, al evaluar en una lista (x_i, x_j, x_k, x_j) de vectores de B, tenemos:

- Si sólo interviene un dígito distinto en la lista, los dos miembros valen cero.
- Si intervienen dos dígitos distintos $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$ en la lista, sólo tenemos que comprobar la igualdad para listas del tipo (x_a, x_b, x_a, x_b) con $a < b$. Esto produce 3 posibles listas (abreviado): $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 3, 1, 3)$, $(2, 3, 2, 3)$.
- Si intervienen 3 dígitos distintos $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ en la lista, sólo tenemos que comprobar la igualdad para listas del tipo (x_a, x_b, x_a, x_c). Esto produce otras 3 posibles listas (abreviado): $(1, 2, 1, 3)$, $(2, 1, 2, 3)$, $(3, 1, 3, 2)$.

La igualdad en cada una de las 6 listas anteriores se comprueba por cálculo directo.

Probamos 7: $\|x \times y\|^2 \overset{(6)}{=} \|x\|^2\|y\|^2(1 - \cos^2 \sphericalangle(x, y)) = \|x\|^2\|y\|^2 \operatorname{sen}^2 \sphericalangle(x, y)$, y sólo queda extraer raíces cuadradas ($\operatorname{sen} \sphericalangle(x, y) \geq 0$ porque $\sphericalangle(x, y) \in [0, \pi]$).

Terminamos probando 8: Por definición, $x \times (y \times z)$ es el único vector de V tal que

$$g(x \times (y \times z), w) = \det_B(x, y \times z, w), \quad \forall w \in V.$$

Pero $g(g(x, z)y - g(x, y)z, w) = g(x, z)g(y, w) - g(x, y)g(z, w) = g(x, z)g(w, y) - g(x, y)g(z, w) \overset{(5)}{=} g(x \times w, z \times y) = \det_B(x, w, z \times y) = \det_B(x, y \times z, w)$. □

3.5. Clasificación de las isometrías de un EVME.

En esta sección, (V, g) es un EVME con $\dim V = n$.

Lema 3.5.1 *Sea $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. Entonces:*

1. $\det f = \pm 1$.
2. *Si $a \in \mathbb{R}$ es un valor propio de f, entonces $a = \pm 1$.*
3. *Si $U \leq V$ cumple $f(U) \subseteq U$, entonces $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$.*

Demostración. 1,2 se dejan como ejercicio. Probamos 3: Sean $x \in U^\perp$, $y \in U$. $g(f(x), y) = g(x, f^{-1}(y))$, luego para que esto sea cero basta probar que $f^{-1}(U) \subseteq U$. Pero $f(U) \subseteq U$ implica $f(U) = U$, luego $U = f^{-1}(U)$. □

Definición 3.5.1 Una isometría $f \in \mathrm{Iso}(V,g)$ se dice *rotación* si $\det f = 1$, y *reflexión* si $\det f = -1$.

Teorema 3.5.1 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim 2) *Sea (V,g) un EVME con $\dim V = 2$, y $f \in \mathrm{Iso}(V,g)$. Entonces, $\exists B$ base ortonormal de (V,g) tal que*

$$M(f,B) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \textit{para algún } \theta \in [0,2\pi), \textit{ ó } M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Tomemos una base ortonormal B_1 de (V,g). Por la Proposición 2.10.1, $M(f,B_1) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O(2)$. Como $\det f = \pm 1$, tenemos $ad - bc = \pm 1$. De la ecuación matricial $M(f,B_1)\cdot M(f,B_1)^T = I_2$ obtenemos otras tres ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1, \quad ac + bd = 0.$$

Sean $u, v, w \in V$ tales que $u_{B_1} = (a,b)$, $v_{B_1} = (c,d)$, $w_{B_1} = (d,-c)$. Como B_1 es ortonormal, las ecuaciones anteriores implican que

$$g(u,w) = \pm 1, \quad \|u\| = \|v\| = \|w\| = 1, \quad g(u,v) = 0.$$

Por la desigualdad de Schwarz, $1 = |g(u,w)| \leq \|u\|\|w\| = 1$, luego $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tal que $u = \lambda w$. Tomando normas, $\lambda = \pm 1$ luego $u = \pm w$. Discutimos casos:

- Si $u = w$, tenemos $M(f,B_1) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$ con $a^2 + c^2 = 1$, luego existe un único $\theta \in [0,2\pi)$ tal que $\cos\theta = a$, $\operatorname{sen}\theta = c$. Es decir, podemos tomar la base ortonormal B del enunciado como <u>cualquier</u> base ortonormal de (V,g).

- Si $u = -w$, tenemos $M(f,B_1) = \begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ con $a^2 + c^2 = 1$, luego existe un único $\theta \in [0,2\pi)$ tal que $\cos\theta = a$, $\operatorname{sen}\theta = c$, es decir, $M(f,B_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$. Esta matriz es simétrica (luego ortogonalmente diagonalizable por el Corolario 2.8.1). Su polinomio característico es $p_f(t) = (t-1)(t+1)$. Tomemos dos vectores propios $x_1 \in V_1$, $x_2 \in V_{-1}$ con $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$. Como f es autoadjunto (ya que $M(f,B_1)$ es simétrica y B_1 es ortonormal), tenemos $x_1 \perp x_2$ (apartado 3 de la Proposición 2.8.1) luego $B = (x_1, x_2)$ es una base ortonormal de (V,g) y $M(f,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. $\square$

Corolario 3.5.1 *Toda matriz $A \in O(2)$ es de la forma*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \textit{rotación de ángulo } \theta, \textit{ ó}$$
$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \equiv \textit{simetría respecto de la recta generada por } (\cos\tfrac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\tfrac{\theta}{2}).$$

para un único $\theta \in [0, 2\pi)$.

Demostración. Para llegar a las dos posibilidades anteriores para A basta seguir la demostración del Teorema 3.5.1. Para probar que la segunda posibilidad es una simetría respecto de la recta generada por $(\cos\frac{\theta}{2}, \operatorname{sen}\frac{\theta}{2})$, basta diagonalizar la segunda matriz. □

Teorema 3.5.2 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim 3) *Sea (V, g) un EVME con $\dim V = 3$, y $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. Entonces, $\exists B$ base ortonormal de (V, g) y $\exists\theta \in [0, 2\pi)$ tales que*

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \quad \textit{ó} \quad M(f, B) = \left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right).$$

Demostración. El polinomio característico de f tiene grado 3, luego tiene al menos una raíz $a \in \mathbb{R}$. Por el apartado 2 del Lema 3.5.1, $a = \pm 1$. Tomemos $x \in V - \{0\}$ tal que $f(x) = ax$ y sea $U = L(\{x\})$. Así, $f(U) \subseteq U$ luego $f(U^\perp) \subseteq U^\perp$ por el apartado 3 del Lema 3.5.1. Por tanto, $f|_{U^\perp}$ cae en las hipótesis del Teorema 3.5.1 luego $\exists B' = (x_2, x_3)$ base ortonormal de $(U^\perp, g|_{U^\perp})$ tal que

$$M(f|_{U^\perp}, B') = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ó } M(f|_{U^\perp}, B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sea $x_1 = \frac{1}{\|x\|}x$, y $B_1 = (x_1, x_2, x_3)$, base ortonormal de (V, g). Entonces,

$$M(f, B_1) = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \quad \text{ó} \quad M(f, B_1) = \left(\begin{array}{c|cc} a & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Si $a = 1$, la matriz de la izquierda es una de las opciones del enunciado del Teorema (luego tomamos $B = B_1$), y la matriz de la derecha también lo es si intercambiamos el primer y el tercer vector de B_1 (luego tomamos $B = (x_3, x_1, x_2)$ y $\theta = 0$). Si $a = -1$, la matriz de la izquierda es una de las opciones del enunciado del Teorema (luego tomamos $B = B_1$), y la matriz de la derecha también lo es si tomamos $B = (x_2, x_3, x_1)$ y $\theta = \pi$. □

Nota 3.5.1 1. Si fijamos una orientación en V, la demostración anterior prueba que podemos elegir la base ortonormal B positivamente orientada.

2. La interpretación geométrica de f cuando su matriz en una base ortonormal $B = (x_1, x_2, x_3)$ es la de la izquierda en el enunciado del Teorema 3.5.2, es la de un giro de ángulo θ respecto al eje dado por $L(\{x_1\})$, en el sentido contrario a las agujas del reloj en el plano $L(\{x_2, x_3\})$ (y es una rotación en el sentido de la Definición 3.5.1). En el caso de que $M(f, B)$ venga dada por la de la derecha en el enunciado del Teorema 3.5.2, f es una reflexión (según la Definición 3.5.1), pero no es una reflexión geométrica respecto a un plano: es la composición de la simetría respecto del plano $L(\{x_2, x_3\})$ con el giro de ángulo θ respecto al eje $L(\{x_1\})$.

Teorema 3.5.3 (Clasificación de las isometrías de un EVME con dim n) *Sea (V, g) un EVME con $\dim V = n$ y $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$. Entonces, $\exists k_1, k_2 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\theta_1, \ldots, \theta_r \in [0, 2\pi)$ y una base ortonormal B de (V, g) tales que $k_1 + k_2 + 2r = n$ y*

$$M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} I_{k_1} & & & & \\ \hline & I_{k_2} & & & \\ \hline & & \mathrm{Rot}_{\theta_1} & & \\ \hline & & & \ddots & \\ \hline & & & & \mathrm{Rot}_{\theta_r} \end{array} \right),$$

donde $\mathrm{Rot}_{\theta_i} = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\operatorname{sen}\theta_i \\ \operatorname{sen}\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$ *y fuera de las cajas en la diagonal sólo hay ceros.*

Demostración. Llamemos $U = \{x \in V \mid f(x) = x\}$, $W = \{x \in V \mid f(x) = -x\}$. Es posible que U ó W sean $\{0\}$ (pero caso de que f tenga valores propios, éstos son ± 1). Como $U \cap W = \{0\}$, tenemos $U + W = U \oplus W$. Además, $f(U + W) \subseteq U + W$ luego $f[(U + W)^\perp] \subseteq (U + W)^\perp$ por el apartado 3 del Lema 3.5.1. Tenemos dos posibilidades:

- $\underline{(U + W)^\perp = \{0\}}$. En este caso, $U + W = V$ luego $V = U \oplus W$. Tomando una base en cada subespacio, tenemos $M(f, B) = \left(\begin{array}{c|c} I_{k_1} & \\ \hline & I_{k_2} \end{array} \right)$ con $k_1 = \dim U$, $k_2 = \dim U_2$, que es una de las opciones del enunciado.

- $\underline{(U + W)^\perp \neq \{0\}}$. En este caso, $f|_{(U+W)^\perp} \in \mathrm{Iso}((U + W)^\perp, g|_{(U+W)^\perp})$, y esta última isometría no tiene valores propios. Así que en este caso el argumento se reduce a clasificar las isometrías sin vectores propios de un EVME (en particular, éste ha de tener dimensión par). Esto es lo que haremos a continuación.

Simplificamos la notación llamando f a una isometría sin valores propios de un EVME (V, g). Veamos que $f + f^{-1}$ es un endomorfismo autoadjunto respecto a g: Dados $x, y \in V$,

$$g((f+f^{-1})(x), y) = g(f(x), y)+g(f^{-1}(x), y) = g(x, f^{-1}(y))+g(x, f(y)) = g(x, (f+f^{-1})(y)).$$

Como $f + f^{-1}$ es autoadjunto, admite al menos un valor propio $a_1 \in \mathbb{R}$ y por tanto existe $x_1 \in V - \{0\}$ tal que $(f + f^{-1})(x_1) = a_1 x_1$. Aplicando f, queda $f(f(x_1)) = -x_1 + a_1 f(x_1)$. Por tanto, $U_1 := L(\{x_1, f(x_1)\})$ cumple $f(U_1) \subset U_1$, luego $f|_{U_1} \in \mathrm{Iso}(U_1, g|_{U_1})$. Por el Teorema 3.5.1, $\exists \theta_1 \in [0, 2\pi)$ y una base ortonormal B_1 de $(U_1, g|_{U_1})$ tales que

$$M(f|_{U_1}, B_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rot}_{\theta_1}.$$

(la otra posibilidad del Teorema 3.5.1 no puede darse porque $f|_{U_1}$ no tiene valores propios). Como $f(U_1) \subseteq U_1$, tenemos $f(U_1^\perp) \subseteq U_1^\perp$ por el apartado 3 del Lema 3.5.1. Ahora consideramos la restricción $f|_{U_1^\perp} \in \mathrm{Iso}(U_1^\perp, g|_{U_1^\perp \times U_1^\perp})$, que está en la misma situación anterior (no tiene valores propios). Repitiendo el proceso en $U_1^\perp$ encontraremos un segundo plano vectorial $U_2 \subset U_1^\perp$ y una segunda rotación. De esta forma vamos descomponiendo V en planos vectoriales ortogonales U_1, $U_2 \subseteq U_1^\perp$, $U_3 \subseteq U_2^\perp \ldots$ hasta terminar con la dimensión de V (que es par). $\square$

3.6. Ejercicios.

1. Prueba los apartados 1 y 2 de la Proposición 3.1.1.

2. Caracteriza la igualdad en la desigualdad triangular.

3. Sea (V, g) un EVME y $x, y \in V$. Demostrar la *ley del paralelogramo,*

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

   y el Teorema de Pitágoras,

$$x, y \text{ son ortogonales } \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

4. Desigualdad de Bessel. Sea $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un subconjunto ortogonal de vectores no nulos en un EVME (V, g). Probar que dado $x \in V$, se tiene

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^{k} \frac{g(x, x_i)^2}{\|x_i\|^2},$$

   y que la igualdad es cierta si y sólo si $x = \sum_{i=1}^{k} \frac{g(x, x_i)}{\|x_i\|^2} x_i$.

5. Escribe las desigualdades de Schwarz y triangular en los casos particulares de $(\mathbb{R}^n, g_0)$ y en $C([a, b])$ con el producto L^2.

6. Prrueba que dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} a_i^2,$$

   y que la igualdad se da si y sólo si $a_1 = \ldots = a_n$.

7. Demuestra que si $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es cualquier función continua, entonces

$$\left(\int_0^1 f(x)\, dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2\, dx,$$

   y que la igualdad se da si y sólo si f es constante.

8. Demuestra que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, entonces $|\mathrm{Traza}(A)| \leq \sqrt{n}\, \|A\|$, y la igualdad se da si y sólo si A es un múltiplo de la identidad.

9. Prueba la Proposición 3.1.2.

10. Sea U un subespacio vectorial de un EVME (V, g). Prueba que dado $x \in V$, $p_U(x)$ en el único vector de U que minimiza $\|x - u\|$, $\forall u \in U$.

11. Prueba los apartados 1,2 del Lema 3.5.1.

12. Endomorfismo adjunto. Sea (V, g) un EVME y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$. El *endomorfismo adjunto* de f respecto a g es el único endomorfismo $\widehat{f} \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ tal que $g(f(x), y) = g(x, \widehat{f}(y))$, $\forall x, y \in V$.

    (A) Demostrar que la relación anterior define un endomorfismo de V.

    (B) Probar que la aplicación $H\colon \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ dada por $H(f) = \widehat{f}$ es un automorfismo de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ cuya inversa es la misma H, y que $H(f \circ h) = H(h) \circ H(f)$, $\forall f, h \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$.

    (C) Un endomorfismo $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ se dice *anti-autoadjunto* respecto a g si $\widehat{f} = -f$. Demostrar que $\mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ se escribe como suma directa del subespacio de los endomorfismos autoadjuntos y del subespacio de los endomorfismos anti-autoadjuntos.

13. (Descomposición polar de una matriz). Sea (V, g) un EVME y $f\colon V \to V$ un automorfismo de V. Definimos $\widehat{f}\colon V \to V$ mediante $g(f(x), y) = g(x, \widehat{f}(y))$, $\forall x, y \in V$.

    (A) Prueba que $f \circ \widehat{f}$ es un endomorfismo autoadjunto de (V, g), con todos sus valores propios positivos.

    (B) Encuentra un endomorfismo autoadjunto h de (V, g) con todos sus valores propios positivos tal que $h \circ h = f \circ \widehat{f}$.

    (C) Prueba que $h^{-1} \circ f$ es una isometría de (V, g).

    (D) Aplica lo anterior para probar que toda matriz $A \in Gl(n, \mathbb{R})$ puede escribirse como $A = P \cdot R$ donde $P \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tiene todos sus valores propios positivos y $R \in O(n)$.

14. Sea (V, g) un EVME de dimensión n y $U \leq V$ con $0 < \dim U < n$. Probar que para cada $f \in \mathrm{Iso}(U, g|_{U \times U})$, existe $F \in \mathrm{Iso}(V, g)$ tal que $F(x) = f(x)$ $\forall x \in U$. Demostrar que F siempre puede tomarse como una rotación.

15. Sea $(V, g, c(B))$ un EVME tridimensional orientado. Probar que dados $x, y \in V$, su producto vectorial $x \times y$ es perpendicular a x y a y, y que si x, y son unitarios y perpendiculares, entonces $\{x, y, x \times y\}$ es una base ortonormal de (V, g) positivamente orientada respecto a $C(B)$.

16. Sea (V, g) un EVME tridimensional con una orientación $C(B)$. Para cada $x \in V - \{0\}$ se define $F_x \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$ mediante $F_x(y) = x \times y$, $\forall y \in V$, donde el producto vectorial $\times$ es el asociado a la orientación $C(B)$.

(A) Caracterizar $\ker(F_x)$ e $\mathrm{Im}(F_x)$.

(B) Dado $z \in \mathrm{Im}(F_x)$, ¿existe más de un vector $y \in V$ tal que $F_x(y) = z$?

(C) Demostrar que el endomorfismo de V adjunto de F_x respecto de g (en el sentido del Ejercicio 12) es $F_{-x} = -F_x$. Por tanto, F_x es anti-autoadjunto.

17. Sea V un plano vectorial en $\mathbb{R}^3$, y $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}} V$. Demostrar que para toda base $\{u, v\}$ de V se cumple $f(u) \times f(v) = (\det f) u \times v$. En particular, si $\{u, v\}$ se toma ortonormal respecto de la restricción a $V \times V$ del producto escalar usual, deducir que $|\det f| = \|f(u) \times f(v)\|$.

18. Dentro de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tenemos los subconjuntos $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det A > 0\}$ y $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$.

(A) Probar que $\mathrm{Gl}^+(n, \mathbb{R})$ y $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ son subgrupos de $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ y que $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ es normal en $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ ($\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ se llama el *grupo especial lineal*).

(B) Al grupo $SO(n) = O(n) \cap \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ se le llama *grupo especial ortogonal.* Probar que $\mathrm{SO}(n)$ es normal en $O(n)$.

De ahora en adelante, (V, g) será un EVME.

(C) Probar que dos bases ordenadas ortonormales de (V, g) representan la misma orientación de V si y sólo si $M(1_V, B', B) \in SO(n)$.

(D) Sea $\mathrm{Iso}^+(V, g) = \{f \in \mathrm{Iso}(V, g) \mid f$ conserva la orientación$\}$. Probar que $f \in \mathrm{Iso}(V, g)$ conserva la orientación si y sólo si $\det f = 1$, que $\mathrm{Iso}^+(V, g)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Iso}(V, g)$.

(E) Sea B una base ordenada ortonormal de (V, g). Demostrar que la aplicación $F_B \colon \mathrm{Iso}^+(V, g) \to SO(n)$ dada por $F_B(f) = M(f, B)$ es un isomorfismo de grupos (comparar con el apartado 2 de la Proposición 2.10.1).

19. Probar que dado un subespacio vectorial U de un EVME, la proyección ortogonal p_U de V sobre U está caracterizada de la siguiente forma: dado $x \in V$, $p_U(x)$ es el único vector de U que minimiza la expresión $\|x - u\|$, para todo $u \in U$.

20. Sean U_1, U_2 dos rectas vectoriales en un EVME bidimensional (V, g). Llamemos S_i a la simetría respecto de U_i, $i = 1, 2$. Probar que S_1 y S_2 conmutan si y sólo si $U_1 = U_2$ ó $U_1 = U_2^{\perp}$.

21. Sean U_1, U_2 dos planos vectoriales en un EVME tridimensional (V, g). Llamemos S_i a la simetría respecto de U_i, $i = 1, 2$. Probar que S_1 y S_2 conmutan si y sólo si $U_1 = U_2$ ó $U_1^{\perp} \subseteq U_2$ (indicación: probar que S_2 lleva $U_1^{\perp}$ en sí mismo).