La demostración del teorema anterior nos hace pensar que un e.v. no trivial V que sea f.g. tendrá varias bases, pues a partir de cualquier s.d.g. se consigue una base eliminando sucesivamente generadores que se escriben como c.l. del resto. De hecho, es fácil darse cuenta de que si el cuerpo K es infinito entonces a partir de una base se pueden construir infinitas. A continuación mostraremos que, aunque haya muchas bases, todas tienen algo en común: el número de vectores que poseen (obsérvese que esto no se ha visto aún, pues aunque dos bases son siempre irreducibles como s.d.g., en principio podría ocurrir que una tuviese más vectores que la otra).

Teorema 2.101 (de la dimensión)**.** *Todas las bases de un espacio f.g. son finitas y tienen el mismo número de vectores.*

Demostración. Veamos primero que todas las bases son finitas. Supongamos que hubiera dos bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ donde $\mathcal{B}_1$ tiene m vectores y $\mathcal{B}_2$ tiene infinitos. Como $\mathcal{B}_2$ es una familia l.i. entonces cualquier familia finita en $\mathcal{B}_2$ también lo es. Tomando una familia $\mathcal{B}_2'$ en $\mathcal{B}_2$ con $m+1$ vectores y aplicando el teorema de Steinitz con $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2'$ tendríamos una contradicción. Esto implica que todas las bases de V son a la vez finitas o infinitas. Como V es f.g. hemos visto en la prueba del Teorema 2.99 que V tiene bases finitas. Por tanto, todas las bases de V son finitas. Finalmente, dadas dos bases finitas $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ con m y k vectores, respectivamente, aplicamos el teorema de Steinitz tomando $\mathcal{B}$ como s.d.g. y $\mathcal{B}'$ como familia l.i. Esto nos da $k \leq m$. Intercambiando los papeles de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ llegamos a $m \leq k$. ∎

Gracias al teorema anterior la siguiente definición tiene sentido.

Definición 2.102. *Se define la* dimensión *de un e.v. $V(K)$, que denotaremos $\dim_K(V)$, como sigue: (i) si V es f.g. y $V \neq \{0\}$, definimos $\dim_K(V)$ como el número (natural) de vectores de cualquier base de V, (ii) si $V = \{0\}$ definimos $\dim_K(V) = 0$, y (iii) si V no es f.g. diremos que el e.v. es* de dimensión infinita *y escribiremos $\dim_K(V) = \infty$.*

En particular, diremos que V es una recta vectorial *si $\dim_K(V) = 1$, y que V es un* plano vectorial *si $\dim_K(V) = 2$.*

Ejemplo 2.103. Tenemos $\dim_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathbb{R}^2}) = 2$, $\dim_{\mathbb{R}}(\overrightarrow{\mathbb{R}^3}) = 3$, $\dim_K(K^n) = n$, $\dim_K(M_{m\times n}(K)) = m \cdot n$, $\dim_K(M_n(K)) = n^2$ y $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[x]) = \infty$. Podemos comprobar que $\mathbb{K}[x]$ no es f.g. o bien razonando como se hizo en el Ejemplo 2.66, o bien porque ya sabemos que $\mathbb{K}[x]$ tiene una base infinita (Ejemplo 2.98), por lo que si fuese f.g. todas sus bases serían finitas.

Veamos ahora que la dimensión de un espacio f.g. depende de forma esencial del cuerpo.

Ejemplo 2.104. Si vemos $\mathbb{C}$ como e.v. complejo entonces una base de $\mathbb{C}$ es $\mathcal{B}_{\mathbb{C}} = \{1\}$ y, por tanto, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. Si vemos $\mathbb{C}$ como e.v. real entonces una base está dada por $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{1, i\}$, de donde $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$. En la relación de problemas se generaliza este hecho: si V es un e.v. complejo con $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$, entonces V es un e.v. real con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2n$.

No obstante, cuando se sobrentiende el cuerpo K en el que se trabaja, se puede suprimir el subíndice K de la expresión $\dim_K(V)$, esto es, escribir sólo $\dim(V)$.

Ahora podemos dar una interpretación de la dimensión de un espacio f.g. que resuelve de manera precisa dos cuestiones pendientes de las secciones anteriores.

Corolario 2.105. *Sea $V(K)$ un espacio vectorial f.g. Dados $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$, un s.d.g. de V, y $S' = \{u_1, \ldots, u_k\}$, una familia l.i. en V, entonces:*

$$k \leq \dim_K(V) \leq m.$$

Demostración. V admite una base $\mathcal{B}$ con n vectores, siendo $n = \dim_K(V)$. Si aplicamos el teorema de Steinitz con S como s.d.g. de V y $\mathcal{B}$ como familia l.i. tenemos que $n \leq m$. Si aplicamos el teorema de Steinitz con $\mathcal{B}$ como s.d.g. de V y S' como familia l.i. deducimos que $k \leq n$, concluyéndose la demostración. ∎

Observación 2.106 (Respuesta a las cuestiones 2.69 y 2.82)**.** El corolario anterior implica que $\dim_K(V)$ es el mínimo de vectores que un s.d.g. de V puede tener. Esto resuelve la cuestión 2.69. Asimismo $\dim_K(V)$ es el mayor número de vectores que una familia l.i. en V puede tener. Esto resuelve la cuestión 2.82. Se sigue que ambas cuestiones tienen la misma respuesta y, por tanto, $\dim_K(V)$ es un valor representativo del "tamaño" de V.

En el teorema 2.99 hemos demostrado que, a partir de cualquier s.d.g., se puede obtener una base eliminando eventualmente algunos vectores. Ahora veremos que también se puede conseguir una base añadiendo vectores a una familia l.i.

Teorema 2.107 (ampliación de la base)**.** *Sea V un e.v. con* $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$*. Si $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es un l.i. y $m \leq n$, entonces existen $n-m$ vectores, $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V.*

Demostración. En el caso $m = n$, bsta con comprobar que S es un s.d.g. En efecto, si no lo fuera, existiría un vector $v \in V \setminus \{v\}$ y $S \cup \{v\}$ sería l.i. (proposición 2.83) con $k = n+1$ vectores, en contradicción con el corolario anterior.

En el caso $m < n$, S no es un s.d.g. de V (de lo contrario S sería una base, en contradicción con el teorema 2.101), por lo que existe $v_{m+1} \in V$ con $v_{m+1} \notin L(S)$. En consecuencia, el conjunto $S \cup \{v_{m+1}\} = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}\}$ es l.i. (de nuevo por la proposición 2.83). Si $m+1 = n$ este conjunto será una base, aplicando el caso $m = n$ antes estudiado. En caso contrario, se repite el argumento un total de $n-m$ veces hasta conseguir una familia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ que es l.i. y tiene exactamente n vectores, la cual será una base aplicando de nuevo el caso $m = n$. ∎

Observación 2.108. Como caso particular, a partir de cualquier vector $v \in V$ con $v \neq 0$ se puede construir una base $\mathcal{B}$ de V con $v \in \mathcal{B}$. Como resulta patente en la demostración, la forma de ampliar una familia l.i. no es única en general.

Ejemplo 2.109. En $\mathbb{R}^2$ el vector $u = (1, -2)$ es no nulo, y por tanto, existe una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ con $u \in \mathcal{B}$. Para construir $\mathcal{B}$ basta elegir un vector $v \in \mathbb{R}^2$ que no sea proporcional a u. Tomando por ejemplo $v = (0, 1)$ es fácil probar que $\mathcal{B} = \{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Nota 2.110. El teorema 2.107 se puede extender a dimensión infinita, esto es, cualquier conjunto linealmente independiente S se puede ampliar a una base. Su demostración puede llevarse a cabo razonando con argumentos similares a los de la nota 2.100.

Ejercicio 2.111. *Sea V un e.v. no trivial sobre un cuerpo K. Supongamos que V es f.g. y que S, S' son dos familias finitas de vectores de V de modo que $S' \subset S$, S es s.d.g. y S' es l.i. Demostrar que existe una base $\mathcal{B}$ de V tal que $S' \subset \mathcal{B} \subset S$.*

A continuación refinamos el corolario 2.105 mostrando que sus desigualdades son óptimas: cuando alguna de ellas se convierte en igualdad el conjunto correspondiente es una base de V. Esto resulta interesante desde el punto de vista práctico, pues *para demostrar que un subconjunto de un espacio vectorial f.g.* que tenga tantos vectores como la dimensión *es una base, basta con que sólo una de las dos condiciones de la definición (s.d.g ó l.i.) se verifique.*

Corolario 2.112. *Sea V un e.v. sobre un cuerpo K con $\dim_K(V) = n \geq 1$. Dada una familia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ con n vectores de V, son equivalentes estas afirmaciones:*

(i) $\mathcal{B}$ es una base de V.

(ii) $\mathcal{B}$ es un s.d.g. de V.

(iii) $\mathcal{B}$ es una familia l.i. de V.

Demostración. Es obvio que (i) implica (ii) y (iii) por definición de base. Veamos que (ii) implica (i). Supongamos que $\mathcal{B}$ es s.d.g. de V. Si $\mathcal{B}$ no fuese l.i. podríamos emplear el Teorema 2.99 para conseguir una base de V eliminando algunos vectores de $\mathcal{B}$. Así, obtendríamos una base de V con una cantidad de vectores menor que n, lo que contradice el teorema 2.101. Por último, (iii) implica (i) se sigue directamente del teorema 2.107 con $n = m$. ∎

Ejemplo 2.113. Consideremos la familia $\mathcal{B} = \{u, v\}$ del Ejemplo 2.109. Como $\mathcal{B}$ tiene 2 vectores y $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$ se sigue que $\mathcal{B}$ será una base de $\mathbb{R}^2$ si $\mathcal{B}$ es l.i. Pero esto es inmediato, ya que los vectores u y v no son proporcionales.

Finalmente, el siguiente resultado (su apartado (3)) también tiene gran utilidad práctica.

Proposición 2.114. *Sea $V(K)$ un e.v. y $S = \{v_1, \ldots, v_m\} \subset V$ y $v \in V$ tal que $v = a_1v_1 + \ldots a_mv_m$ para ciertos $a_1, \ldots, a_m \in K$. Sea S_i el conjunto que se obtiene reemplazando en S al vector v_i por v, esto es, $S_i = \{v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_m\}$. Se verifica:*

(1) En el caso de que S sea s.d.g., S_i es s.d.g. si $a_i \neq 0$.

(2) En el caso de que S sea l.i., S_i es l.i. si (y sólo si) $a_i \neq 0$.

(3) En el caso de que S sea una base, S_i es una base si y sólo si $a_i \neq 0$.

Demostración. (1) Reducción ya conocida de un s.d.g. (proposición 2.70 (ii)).

(2) La demostración puede hacerse directamente (como se propone en el ejercicio 2.115 a continuación). No obstante, la haremos ahora anticipando propiedades de subespacios vectoriales, las cuales se desarrollarán en la próxima subsección.

Observemos primero que, al ser S un conjunto l.i., $\dim_k(L(S)) = m$. Si $a_i \neq 0$ se tiene $v_i \in L(S_i)$ (porque v_i se puede despejar de la expresión de v). En consecuencia $S \subset L(S_i)$ y se tiene $L(S) = L(S_i)$ (pues $S_i \subset L(S)$ es inmediato). Por tanto, S_i es una base de $L(S)$, ya que es un s.d.g. de m elementos en un espacio vectorial de dimensión m. En particular, S_i es l.i. como subconjunto de $L(S)$ y, por tanto, también es l.i. como subconjunto de V (ya que la suma y el producto por escalares en U son los de V restringidos).[9]

(3) Inmediato de los casos anteriores. ∎

Ejercicio 2.115. *Pruébese el apartado (3) de la proposición anterior directamente de las definiciones de s.d.g, conjunto l.i. y base.*

[9]Por otra parte, es trivial que si $a_i = 0$, entonces v se escribe como combinación lineal del resto de vectores de S_i ($v_i \in S_i \setminus \{v\}$), por lo que S_i es linealmente dependiente.

2.3.4. Bases y dimensión de un subespacio. Fórmula de Grassmann

Sea $V(K)$ un e.v. Si U es un s.v. de V entonces U es un e.v. sobre K con las operaciones de V restringidas, por lo que, en particular, podemos hablar tanto de bases de U como de la dimensión de U sobre K, a la cual denotaremos $\dim_K(U)$.

Observación 2.116. Como la suma y el producto por escalares en U son restricción de los de V, para cualquier subconjunto S de U, toda combinación lineal de S como subconjunto de U es también una combinación lineal en V, y viceversa. En consecuencia, todo subconjunto S de U que sea l.i. en U, también es l.i. en V.

Ejemplo 2.117. Si $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$ entonces una base de U es $\mathcal{B}_U = \{(1,1)\}$ y, por tanto, $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 1$.

Ejemplo 2.118. Si $S = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es una familia l.i. en V, entonces S es una base de $U = L(S)$ y $\dim_K(U) = m$. Si los vectores de S no son necesariamente l.i. entonces $\dim_K(U) \leq m$ en virtud del Corolario 2.105.

Ejemplo 2.119. En $\mathbb{K}_n[x]$ la familia $\mathcal{B}_u = \{p_i(x) \,|\, i \in \{0,1,\ldots,n\}\} = \{1, x, \ldots, x^n\}$ es una base de $\mathbb{K}_n[x]$, que llamaremos *base usual o canónica* de $\mathbb{K}_n[x]$ y representaremos por $\mathcal{B}_u$. En consecuencia, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}_n[x]) = n+1$.

Más tarde veremos cómo calcular eficazmente la dimensión de un subespacio solución de un SEL homogéneo y de un subespacio $U = L(S)$ con S finito.

Ejercicio 2.120. *Calcúlese una base de cada subespacio de matrices $S_n(K)$ y $A_n(K)$ (con característica de $K \neq 2$), y compruébese $\dim_K S_n(K) = n(n+1)/2$, $\dim_K A_n(K) = n(n-1)/2$.*

Si U es un s.v. de V resulta natural plantearse estas cuestiones: ¿es U un espacio f.g. si lo es V? ¿Qué relación hay entre $\dim_K(U)$ y $\dim_K(V)$? ¿Y entre las bases de U y de V? Responderemos estas preguntas en el siguiente resultado.

Proposición 2.121. *Sea $V(K)$ un e.v. finitamente generado, $n = \dim_K(V)$, y U un s.v. de V. Entonces:*

(i) U es f.g., y su dimensión $m = \dim_K(U)$ satisface $m \leq n$, dándose la igualdad si y sólo si $U = V$.

(ii) Sea $0 \leq m \leq n$ y $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de U. Entonces existen $n-m$ vectores $v_{m+1}, \ldots, v_n \in V$ tales que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ es una base de V, y el subespacio $W := L(v_{m+1}, \ldots, v_m)$ es un complementario de U en V, esto es, $V = U \oplus W$.

Demostración. (i) Si U no fuera f.g., razonando como en el teorema 2.107 podríamos construir un conjunto l.i. en U y, por tanto, l.i. en V, con un vector más que la dimensión n de V, lo que es absurdo. Igualmente, sería absurdo $m > n$, por lo que $m \leq n$. Si $m = n$ cualquier base $\mathcal{B}_U$ de U es un conjunto l.i. en V de n vectores. Por tanto, $\mathcal{B}_U$ es una base de V (corolario 2.112), y $U = L(\mathcal{B}_U) = V$.

(ii) La primera afirmación es una consecuencia inmediata del Teorema 2.107. Para la última se debe comprobar $V = U + W$ y $U \cap W = \{0\}$. Para la suma, basta con observar que de $\mathcal{B} \subset U \cup V$ se sigue $L(\mathcal{B}) \subset L(U \cup W)$ y, por ser $\mathcal{B}$ un s.d.g, $V \subset U + W$.

Sea ahora $v \in U \cap W$. El resultado se obtiene trivialmente si $U = \{0\}$ ó $W = \{0\}$, por lo que podemos suponer $0 < m < n$. Como $U = L(\mathcal{B}_U)$ existen escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $v = a_1 \cdot$

$v_1 + \ldots + a_m \cdot v_m$. Y como $W = L(v_{m+1}, \ldots, v_n)$ existen $a_{m+1}, \ldots, a_n \in K$ tales que $v = a_{m+1} \cdot v_{m+1} + \ldots + a_n \cdot v_n$. Restando ambas igualdades para v obtenemos

$$0 = a_1 \cdot v_1 + \ldots + a_m \cdot v_m - a_{m+1} \cdot v_{m+1} + \ldots - a_n \cdot v_n,$$

que es una expresión del vector nulo como c.l. de $\mathcal{B}$. Puesto que $\mathcal{B}$ es l.i. se concluye $a_i = 0$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Por tanto, $v = 0$. ∎

Observación 2.122. La demostración anterior nos da un método de construcción de subespacios complementarios. En efecto, hemos visto que si $\mathcal{B}_U = \{v_1, \ldots, v_m\}$ es una base de U y la completamos con vectores $\{v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ hasta obtener una base de V, entonces el subespacio $W = L(v_{m+1}, \ldots, v_n)$ es un complementario de U en V. Nótese que cada completación de $\mathcal{B}_U$ hasta una base de V dará lugar a un complementario eventualmente distinto.

Ejemplo 2.123. Sea U el s.v. de $\mathbb{R}^2$ dado por $U = L(u)$ con $u = (1, -2)$. Es claro que $\mathcal{B}_U = \{u\}$ es una base de U y, por tanto, $\dim_K(U) = 1$. Dado $w = (0, 1)$, entonces $\mathcal{B} = \{u, v\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$ y, por tanto, $W = L(w)$ es un complementario de U en $\mathbb{R}^2$. Asimismo, si $w' = (1, 0)$ y $W' = L(w)$ entonces W' es otro complementario. Así, se cumplen $\mathbb{R}^2 = U \oplus W = U \oplus W'$ (obsérvese que $W \neq W'$, esto es, ¡no se puede "simplificar" en la igualdad anterior!).

Definición 2.124. *Sea $V(K)$ un e.v. y $U \subset V$ un s.v. de V. Si $\dim_K(U) = 1$ diremos que U es una* recta vectorial en V. *Si $\dim_K(U) = 2$ diremos que U es un* plano vectorial en V.

Si V es f.g. llamamos codimensión *de U en V al número en $\mathbb{N} \cup \{0\}$ dado por:*

$$codim_K(U) = dim_K(V) - dim_K(U).$$

Si $codim_K(U) = 1$, es decir, $dim_K(U) = dim_K(V) - 1$ diremos que U es un hiperplano vectorial de V.

Observación 2.125. Es obvio que $U = V$ si y sólo si $\operatorname{codim}_K(U) = 0$. Así, la codimensión de U en V es una medida de lo "próximo" que está U de coincidir con V.

Terminamos esta sección resolviendo la siguiente cuestión: ¿qué relación hay entre la dimensión del subespacio suma $U_1 + U_2$ y las dimensiones de los sumandos? ¿Cómo construir una base de $U_1 + U_2$ a partir de bases de U_1 y de U_2? ¿Qué papel desempeña $U_1 \cap U_2$?

Teorema 2.126 (Fórmula de Grassmann)**.** *Sea $V(K)$ un e.v. y sean U_1 y U_2 dos s.v. finitamente generados de V. Se verifica:*

$$\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2) - \dim_K(U_1 \cap U_2).$$

Observación 2.127. La fórmula tiene sentido, pues todos los espacios que aparecen son f.g. Por otra parte, esta fórmula resulta natural si se piensa, p. ej., en el número de elementos de la unión de dos conjuntos finitos (o en propiedades como el volumen de dos objetos cuya intersección es no vacía).

Demostración. Sea $m = \dim_K(U_1 \cap U_2)$ y $n_i = \dim_K(U_i)$ para cada $i = 1, 2$. Queremos demostrar que $\dim_K(U_1 + U_2) = n_1 + n_2 - m$. Nuestro objetivo es construir una base de $U_1 + U_2$ con exactamente $n_1 + n_2 - m$ vectores.

Sea $\mathcal{B}_{U_1 \cap U_2} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ una base de $U_1 \cap U_2$ (si $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, tomamos consistentemente $\mathcal{B}_{U_1 \cap U_2} = \emptyset$). Por la Proposición 2.121 (ii), como $U_1 \cap U_2$ es un s.v. de U_1 y de U_2, podemos encontrar vectores $v^i_{m+1}, \ldots, v^i_{n_i} \in U_i$ tales que $\mathcal{B}_i = \{v_1, \ldots, v_m, v^i_{m+1}, \ldots, v^i_{n_i}\}$ es una base de U_i. Sea

$W_i = L(v^i_{m+1}, \dots, v^i_{n_i})$, que es un s.v. de U_i (obsérvese que si $U_1 \cap U_2 = U_i$, tomamos consistentemnete $W_i = \{0\}$). Por la Proposición 2.121 (iv) sabemos que $U_i = (U_1 \cap U_2) \oplus W_i$, para cada $i = 1, 2$. Consideremos ahora la familia de vectores:

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{v_1, \dots, v_m, v^1_{m+1}, \dots, v^1_{n_1}, v^2_{m+1}, \dots, v^2_{n_2}\}.$$

Una primera observación sobre este conjunto es que no se han escrito dos vectores repetidos en la expresión del miembro derecho (la única posibilidad no trivial sería $v^1_i = v^2_j$ para algún $i \in \{m+1, \dots, n_1\}$ y $j \in \{m+1, \dots, n_2\}$, pero en ese caso ese vector común $v := v^1_i = v^2_j$ pertenecería a $U_1 \cap U_2$, por lo que v se podría escribir como c.l. de $\{v_1, \dots, v_m\}$, en contradicción con la independencia lineal de cada $\mathcal{B}_i$). Por tanto, en $\mathcal{B}$ hay $m + (n_1 - m) + (n_2 - m) = n_1 + n_2 - m$ vectores, y basta con demostrar:

- $\mathcal{B}$ es una base de $U_1 + U_2$.

Comprobemos primero que $\mathcal{B}$ un s.d.g. de $U_1 + U_2$, esto es, $L(\mathcal{B}) = U_1 + U_2$. Claramente $\mathcal{B} \subset U_1 \cup U_2 \subset U_1 + U_2$, por lo que $L(\mathcal{B}) \subset U_1 + U_2$. Recíprocamente, nótese que $\mathcal{B}_i \subset \mathcal{B}$ para cada $i = 1, 2$. Como $U_i = L(\mathcal{B}_i)$ se sigue que $U_1, U_2 \subset L(\mathcal{B})$ y, por tanto, $U_1 + U_2 \subset L(\mathcal{B})$.

Para comprobar que $\mathcal{B}$ es un conjunto l.i. en $U_1 + U_2$, dada una expresión del tipo:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v_i + \sum_{i=m+1}^{n_1} b_i \cdot v^1_i + \sum_{i=m+1}^{n_2} c_i \cdot v^2_i = 0,$$

nos preguntamos si todos los coeficientes son nulos. La igualdad anterior es equivalente a:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v_i + \sum_{i=m+1}^{n_1} b_i \cdot v^1_i = - \sum_{i=m+1}^{n_2} c_i \cdot v^2_i, \tag{2.9}$$

donde el miembro izquierdo de la igualdad es un vector de U_1 y el derecho es un vector de W_2. Ahora bien, observemos que $U_1 \cap W_2 = \{0\}$. En efecto, por construcción $(U_1 \cap U_2) \cap W_2 = \{0\}$ y, trivialmente, $W_2 = U_2 \cap W_2$, por lo que $\{0\} = (U_1 \cap U_2) \cap W_2 = U_1 \cap (U_2 \cap W_2) = U_1 \cap W_2$. Así, los dos miembros de la igualdad (2.9) coinciden con el vector nulo, es decir:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \cdot v_i + \sum_{i=m+1}^{n_1} b_i \cdot v^1_i = 0 = \sum_{i=m+1}^{n_2} c_i \cdot v^2_i.$$

A partir de aquí deducimos que todos los coeficientes se anulan ya que $\mathcal{B}_1$ es una familia l.i. y $\{v^2_{m+1}, \dots, v^2_{n_2}\} \subset \mathcal{B}_2$, que es también l.i. Esto completa la demostración. ∎

Como consecuencia inmediata tenemos este resultado, cuya prueba queda como ejercicio.

Corolario 2.128. *Sea V un espacio f.g. sobre un cuerpo K. Dados dos subespacios vectoriales U_1 y U_2 de V, son equivalentes estas afirmaciones:*

(i) $\dim_K(U_1 + U_2) = \dim_K(U_1) + \dim_K(U_2)$.

(ii) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

Ejercicio 2.129. *Sea $V(K)$ un espacio y $\{U_1, U_2, U\}$ subespacios de V, U f.g., tales que $U_1, U_2 \subset U$. Demostrar que son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) $U = U_1 \oplus U_2$.

(ii) $dim_K(U) = dim_K(U_1) + dim_K(U_2)$.

(iii) *Para cada base de* U_i*,* $i = 1,2$*, se tiene que* $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ *es una base de* U.

¿Se puede obtener toda base de U *como en el punto (iii)?*

Ejercicio 2.130 (Generalización de la fórmula de Grassmann para una suma finita de subespacios)**.** . *Sea* $V(K)$ *un e.v. y sea* $\{U_i : i = 1,\ldots,m\}$ *una familia finita de s.v. finitamente generados de* $V(K)$*. Entonces:*

$$dim_K\left(\sum_{i=1}^{m} U_i\right) = \sum_{i=1}^{m} dim_K(U_i) - \sum_{i=1}^{m-1} dim_K\big((\sum_{j=1}^{i} U_j) \cap U_{i+1}\big).$$

En particular, equivalen: (a) $U_1 \oplus \ldots \oplus U_m$*, y (b)* $dim_K\left(\sum_{i=1}^{m} U_i\right) = \sum_{i=1}^{m} dim_K(U_i)$*. (Sugerencia: téngase en cuenta el ejercicio 2.81(ii) y la definición 2.56).*