4.2. Definiciones asociadas al concepto de determinante

El lector tendrá probablemente cierta familiaridad con la noción de determinante de una matriz cuadrada, al menos en el caso $2x2$ y $3x3$. Si se consideran las columnas de esas matrices como elementos de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, el valor absoluto del determinante se corresponde, respectivamente, con el área del paralelogramo cuyos lados están generados por los dos vectores de $\mathbb{R}^2$ y el volumen del paralelepípedo de lados generados por los tres vectores de $\mathbb{R}^3$. En particular, esta área o volumen es cero si y sólo si los correspondientes vectores son linealmente dependientes (esto es, el paralelogramo degenera en un segmento o en un punto, y el paralelepípedo en un paralelogramo o en un segmento o en un punto).

Todo ello es generalizable a dimensión superior pero, en cualquier caso, nosotros no entraremos en la discusión de los conceptos de *área* o *volumen* (los cuales es natural posponer hasta el estudio de *longitudes* en *espacios vectoriales métricos*). Sin embargo, sí desarrollaremos el de determinante, y observaremos que éste se anula al aplicarse a vectores linealmente dependientes.

Este desarrollo se lleva a cabo en cuatro pasos: (1) el tensor determinante, que abstrae propiedades conocidas de los determinates 2x2 y 3x3, (2) el determinante en una base ordenada, mostrando, en particular, la existencia de tensores determinantes, (3) el determinante de una matriz cuadrada, como caso particular del anterior, y (4) el determinante de un endomorfismo, con el que se gana en abstracción y, también, en simplicidad para alguna de las demostraciones.

4.2.1. Tensores determinantes

Definición 4.18. *Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Diremos que una aplicación:*

$$D : V \times \cdots \times^{(n)} V \to K$$

es un tensor determinante[3] *si verifica:*

(i) Es multilineal*, esto es, lineal en cada una de sus n variables en el sentido:*

$$\begin{aligned} D(w_1,\ldots,a\cdot w_i,\ldots,w_n) = &\quad a\cdot D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_n) \\ D(w_1,\ldots,w_i+w_i',\ldots,w_n) = &\quad D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_n)+D(w_1,\ldots,w_i',\ldots,w_n) \end{aligned}$$

para todo $w_1,...,w_n,w_i' \in V$, $a \in K$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.

(ii) Es antisimétrico*, esto es, para cada par de variables $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, $i < j$, se verifica:*

$$D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_j,\ldots,w_n) = -D(w_1,\ldots,w_j,\ldots,w_i,\ldots,w_n)$$

Ejercicio 4.19. *Demostrar que, supuesta la multilinealidad de D, la propiedad de ser antisimétrico equivale a la de ser* alternado*, esto es,*

$$D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_j,\ldots,w_n) = 0, \qquad si \qquad w_i = w_j$$

para algún par de índices $i \neq j$. ¿Qué ocurriría si se permitiera que la característica de K sea[4] 2?

[3] Este nombre resume que D verifica ser un tensor m-covariante (esto es, una aplicación $V \times \cdots \times^{(m)} V \to K$ que es multilineal en el sentido de (i)) con $m = n$ que es antisimétrica en el sentido de (ii).

[4] Debido a que en este caso la propiedad de ser alternado es más restrictiva que la de antisimetría (también llamada *hemisimetría*), se suele imponer directamente ser alternado en el estudio de tensores.

Ejercicio 4.20. *Demostrar que, en el conjunto $D(V)$ de todos los tensores determinantes sobre V, la suma $D+D'$ y el producto por escalares $a\cdot D$ para $D,D'\in D(V), a\in K$ definidos por:*

$$\begin{array}{rcl}(D+D')(w_1,\ldots,w_n) & := & D(w_1,\ldots,w_n)+D'(w_1,\ldots,w_n)\\ (a\cdot D)(w_1,\ldots,w_n) & := & a\cdot D(w_1,\ldots,w_n)\end{array}$$

para todo $w_1,\ldots,w_n\in V$, son también tensores determinantes y, con estas operaciones, $(D(V),+,\cdot K)$ resulta ser un espacio vectorial sobre K.

Proposición 4.21. *Todo tensor determinante D verifica:*

(1) Para cualquier permutación $\sigma\in S_n$:

$$D(w_{\sigma(1)},\ldots,w_{\sigma(n)})=\mathrm{sig}(\sigma)\cdot D(w_1,\ldots,w_n)$$

(2) $D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_n)=0$ si alguno de los vectores w_i es 0, o si se repiten dos de los argumentos de D (esto es, $w_i=w_j$ para algún par de índices $i\neq j$).

(3) Si uno de los vectores w_i es una combinación lineal del resto de vectores, el valor del determinante se anula, esto es:

$$D(w_1,\ldots,\sum_{k\neq i}a^kw_k,\ldots,w_n)=0,\qquad \forall a^1,\ldots,a^{k-1},a^{k+1},\ldots a^n\in K.$$

(4) Si a uno de los vectores w_i se le añade una combinación lineal del resto de vectores, el valor del determinante no cambia, esto es:

$$D(w_1,\ldots,w_i+\sum_{k\neq i}a^kw_k,\ldots,w_n)=D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_n).$$

(5) D queda determinado por su valor sobre una base $B=(v_1,\ldots,v_n)$. Esto es, si D y D' son dos tensores determinantes sobre V tales que $D(v_1,\ldots,v_n)=D'(v_1,\ldots,v_n)$ entonces $D=D'$.

Demostración. (1) Si σ es una permutación $\mathrm{sig}(\sigma)=-1$ y la propiedad se deduce de la antisimetría de D. En caso contrario se escribe σ como composición de k trasposiciones y se aplica k veces el resultado para trasposiciones.

(2) Para la primera afirmación, obsérvese $w_i=0\cdot w_i$ y aplíquese la linealidad respecto a la variable i-ésima[5]. La segunda es muy sencilla (ejercicio 4.19).

(3) En efecto, por la linealidad en la i-ésima variable:

$$D(w_1,\ldots,\sum_{k\neq i}a^kw_k,\ldots,w_n)=\sum_{k\neq i}a^kD(w_1,\ldots,w_k,\ldots,w_n)$$

y cada sumando es nulo, porque el vector w_k aparece en las variables k-ésima e i-ésima de D.

(4) Aplicando la linealidad respecto a la variable i-ésima:

$$\begin{array}{rl}D(w_1,\ldots,w_i+\sum_{k\neq i}a^kw_k,\ldots,w_n) & =D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_n)+D(w_1,\ldots,\sum_{k\neq i}a^kw_k,\ldots,w_n)\\ & =D(w_1,\ldots,w_i,\ldots,w_n).\end{array}$$

(la última igualdad por el apartado anterior.)

(5) Sean n vectores $w_j=\sum_{i=1}^n a^i{}_jv_i$ para $j=1,\ldots,n$. Cambiando el subíndice mudo i por i_j en la expresión de cada w_j para evitar confusiones:

[5]Como una argumento alternativo, la propiedad se verifica porque, fijados los valores de w_j con $j\neq 1$, se tiene una aplicación lineal en la variable i-ésima, la cual aplicará el 0 en el 0.

$$\begin{aligned} D(w_1,\dots,w_n) = &\ D(\sum_{i_1=1}^n a^{i_1}_1 v_{i_1},\dots,\sum_{i_n=1}^n a^{i_n}_n v_{i_n}) \\ = &\ \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n \left(a^{i_1}_1 \dots a^{i_n}_n\, D(v_{i_1},\dots,v_{i_n})\right). \end{aligned}$$

En esta expresión, será nulo cada sumando (escrito entre paréntesis grandes) para el cual alguno de los índices $i_1,\dots,i_n$ se repita. Por tanto, podemos restringirnos a los casos en que $i_1,\dots,i_n$ son una permutación, esto es, $i_1 = \sigma(1),\dots,i_n = \sigma(n)$ para algún

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ 1 & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \in C_n.$$

Así, se pueden reemplazar los sumatorios $\sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n \equiv \sum_{i_1,\dots i_n=1}^n$ por $\sum_{\sigma\in S_n}$ obteniéndose:

$$\begin{aligned} D(w_1,\dots,w_n) = &\ \sum_{\sigma\in S_n} \left(a^{\sigma(1)}_{\ 1} \dots a^{\sigma(n)}_{\ n} D(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)})\right) \\ = &\ \sum_{\sigma\in S_n} \left(a^{\sigma(1)}_{\ 1} \dots a^{\sigma(n)}_{\ n} \operatorname{sig}(\sigma)\, D(v_1,\dots,v_n)\right), \\ = &\ \left(\sum_{\sigma\in S_n} (a^{\sigma(1)}_{\ 1} \dots a^{\sigma(n)}_{\ n} \operatorname{sig}(\sigma)\right) D(v_1,\dots,v_n) \end{aligned} \tag{4.2}$$

la segunda igualdad por el punto (1) anterior. Obsérvese que, para llegar al último miembro, sólo se han aplicado las propiedades de los tensores determinantes, de modo que para otro tal tensor D' se habría obtenido la misma expresión reemplazando el término $D(v_1,\dots,v_n)$ por $D'(v_1,\dots,v_n)$. Por tanto, si ambos términos coinciden, entonces D y D' coinciden sobre cualesquiera n-vectores. ∎

4.2.2. Determinante en una base

La demostración del último punto de la proposición 4.21 sugiere la construcción de un tensor determinante (usando la fórmula (4.2)) y, a partir de él, de todos los determinantes.

Definición 4.22. *Dada una base ordenada $B = (v_1,\dots,v_n)$ de V, llamaremos* determinante en B *a la aplicación*

$$\begin{aligned} \det_B : \quad & V \times \cdots \times^{(n)} V && \to K \\ & (w_1,\dots,w_n) && \mapsto \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a^{\sigma(1)}_{\ 1} \dots a^{\sigma(n)}_{\ n} \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $w_j = \sum_{i=1}^n a^i_{\ j} v_i$ para $j = 1,\dots,n$.

Proposición 4.23. *El determinante en $B = (v_1,\dots,v_n)$ verifica:*

(1) $\det_B$ es un tensor determinante.

(2) $\det_B(v_1,\dots,v_n) = 1$, y es el único tensor determinante que verifica esta igualdad.

(3) Si D es cualquier tensor determinante, se tiene: $D = D(v_1,\dots,v_n)\det_B$.

(4) Si $\bar{B} = (\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)$ es otra base ordenada, entonces:

$$\det_{\bar{B}} = \det_{\bar{B}}(v_1,\dots,v_n)\cdot \det_B$$

Demostración. (1) Multilinealidad: si se toman $a,b \in K$, $u_j = \sum_{i=1}^n b^i_{\ j} v_i \in V$ y en la expresión (4.3) que define $\det_B$ se reemplaza en la variable j-ésima el vector $w_j (= \sum_{i=1}^n a^i_{\ j} v_i)$ por $aw_j + bu_j = \sum_{i=1}^n (a a^i_{\ j} + b b^i_{\ j}) v_i$ se tiene:

$$\begin{aligned} \det_B(w_1,\dots,aw_j+bu_j,\dots,w_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a^{\sigma(1)}_{\ 1} \dots (a a^{\sigma(j)}_{\ j} + b b^{\sigma(j)}_{\ j}) \dots a^{\sigma(n)}_{\ n} \\ &= a\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a^{\sigma(1)}_{\ 1} \dots a^{\sigma(j)}_{\ j} \dots a^{\sigma(n)}_{\ n} + b\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sig}(\sigma)\, a^{\sigma(1)}_{\ 1} \dots b^{\sigma(j)}_{\ j} \dots a^{\sigma(n)}_{\ n} \\ &= a \det_B(w_1,\dots,w_j,\dots,w_n) + b \det_B(w_1,\dots,u_j,\dots,w_n) \end{aligned}$$

Antisimetría respecto a las variables $i < j$: si τ es la trasposición (i, j)

$$\begin{aligned}\det_B(w_{\tau(1)}, \dots, w_{\tau(i)}, \dots w_{\tau(j)}, \dots, w_{\tau(n)}) &= \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sig}(\sigma)\, a^{\sigma(1)}_{\tau(1)} \dots a^{\sigma(i)}_{\tau(i)} \dots a^{\sigma(j)}_{\tau(j)} \dots a^{\sigma(n)}_{\tau(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} (-\mathrm{sig}(\sigma\circ\tau))\, a^{\sigma(\tau(1))}_{1} \dots a^{\sigma(\tau(i))}_{i} \dots a^{\sigma(\tau(j))}_{j} \dots a^{\sigma(\tau(n))}_{n} \\ &= -\sum_{\rho\in S_n} \mathrm{sig}(\rho)\, a^{\rho(1)}_{1} \dots a^{\rho(i)}_{i} \dots a^{\rho(j)}_{j} \dots a^{\rho(n)}_{n}\end{aligned}$$

donde en la segunda fila se ha usado que $\mathrm{sig}(\sigma) = -\mathrm{sig}(\sigma\circ\tau)$ (puesto que τ es una trasposición) y se han reordenado los factores en orden creciente de subíndices; en la tercera se ha tomado $\rho = \sigma\circ\tau$ y se ha usado que, al ser biyectiva en S_n la aplicación $\sigma \mapsto \sigma\circ\tau$, resulta equivalente sumar en $\sigma \in S_n$ que en $\rho = \sigma\circ\tau \in S$.

(2) En este caso $a^i{}_j = \delta^i_j$ (delta de Kronecker) por lo que todos los sumandos en (4.3) son nulos salvo el correspondiente a la permutación identidad, que es igual a 1. La unicidad es inmediata de la proposición 4.21(5).

(3) Puesto que el ambos miembros de la igualdad son tensores determinantes, por la proposición 4.21(5) basta con comprobar que ambos coinciden al aplicarse sobre $(v_1, \dots, v_n)$. Pero esto es inmediato usando el punto (2) para el cálculo del miembro derecho.

(4) Aplíquese el punto anterior a $D = \det_{\bar{B}}$ ∎

Observación 4.24. El último punto de la proposición anterior puede reescribirse de manera más mnemotécnica como

$$\det_{\bar{B}} = \det_{\bar{B}}(B) \cdot \det_B$$

o, con más precisión, $\det_{(\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)}(w_1, \dots, w_n) = \det_{(\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)}(v_1, \dots, v_n) \cdot \det_{(v_1,\dots,v_n)}(w_1, \dots, w_n)$.

Como consecuencia, se tiene una caracterización sencilla (y útil a la hora de la práctica) de cuándo n vectores son linelamente independientes.

Corolario 4.25. *$\{w_1, \dots, w_n\} \subset V$ es linealmente independiente (y, por tanto, una base) si y sólo si $\det_B(w_1, \dots, w_n) \neq 0$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Si fuera linealmente dependiente, sabemos que $D(w_1, \dots, w_n) = 0$ para todo tensor determinante D (en particular, para $D = \det_B$).

($\Rightarrow$) Puesto que $\bar{B} = (w_1, \dots, w_n)$ es una base, se tiene $\det_B = \det_B(w_1, \dots, w_n) \det_{\bar{B}}$ por lo que $\det_B(w_1, \dots, w_n)$ no puede anularse. ∎

Ejercicio 4.26. *Si $\bar{B}$ se obtiene cambiando uno de los vectores v_j de B por $\bar{v}_j := av_j$ con $a \neq 0$ ¿qué relación hay entre $\det_B$ y $\det_{\bar{B}}$?*

Finalmente, damos la siguiente consecuencia para el espacio vectorial $D(V)$ de todos los tensores determinantes (recuérdese el ejercicio 4.20), la cual no era en absoluto evidente de su definición.

Corolario 4.27. *Fijada una base $B = (v_1, \dots, v_n)$, la aplicación*

$$D(V) \to K, \qquad D \mapsto D(v_1, \dots, v_n)$$

es un isomorfismo de e.v. En consecuencia, $\dim_K(D(V)) = 1$.

Demostración. La aplicación el trivialmente lineal (¡compruébese!) y es inyectiva por la proposición 4.21(5). También es suprayectiva porque todo $a \in K$ es la imagen del tensor determinante $a\det_B$. ∎

4.2.3. Determinante de una matriz cuadrada

Estamos ahora en condiciones de definir el determinante de una matriz cuadrada $A = (a^i{}_j)$ y deducir fácilmente muchas de sus propiedades. Para ello, sea $B_u = (e_1, \ldots, e_n)$ la base usual de K^n y, fijada A, consideremos los vectores w_j tales que $(w_j)_{B_u}$ es la j-ésima columna de A.

Definición 4.28. *Sea $A = (a^i{}_j) \in M_n(K)$. Se define el* determinante de la matriz cuadrada A *como*

$$\det A := \det_{B_u}(w_1, \ldots, w_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}(\sigma)\, a^{\sigma(1)}{}_1 \ldots a^{\sigma(n)}{}_n \qquad (\textit{donde } w_j = \sum_{i=1}^n a^i{}_j e_i).$$

Usaremos también la notación:

$$\det A = \begin{vmatrix} a^1_1 & \cdots & a^1_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^1_n & \cdots & a^n_n \end{vmatrix}$$

Ejercicio 4.29. *Proporcionar fórmulas explícitas (escribiendo todos los sumandos) de los determinantes de las matrices cuadradas de orden 2 y 3 (regla de Sarrus).*

Corolario 4.30. *Sea B una base de un espacio vectorial V, sean $w_1, \ldots, w_n \in V$ y sea A la matriz que se obtiene escribiendo por columnas $(w_1)_B, \ldots, (w_n)_B$. Entonces*

$$\det A = \det_B(w_1, \ldots, w_n).$$

En particular, si B y $\bar{B}$ son dos bases ordenadas de V:

$$\det M(I_V, \bar{B} \leftarrow B) = \det_{\bar{B}}(B) \qquad \textit{y, por tanto,} \qquad \det_{\bar{B}} = \det M(I_V, \bar{B} \leftarrow B) \cdot \det_B$$

Demostración. Para la primera afirmación, basta con comprobar que la forma explícita de $\det A$ en la definición 4.28 coincide con la definición de $\det_B$ aplicado a n vectores (fórmula (4.3)).

La última afirmación es una consecuencia inmediata de la anterior y la observación 4.24. ∎

Ejercicio 4.31. *Enunciar todas las propiedades del determinante de una matriz cuadrada que se deducen directamente de la definición 4.18, el ejercicio 4.19 y la proposición 4.21.*

La siguiente propiedad del determinante de una matriz no se deduce directamente de las propiedades de los tensores determinantes (de hecho, está relacionada con el determinante de un endomorfismo, y su trasposición, que se estudia seguidamente), pero resulta sencilla de demostrar directamente.

Proposición 4.32. $\det A = \det A^t$*, para toda $A \in M_n(K)$.*

Demostración. Sea $A = (a^i{}_j)$ y $A^t = (b^i{}_j)$ de modo que $a^i{}_j = b^j{}_i$. Se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \det A &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}(\sigma)\, a^{\sigma(1)}{}_1 \ldots a^{\sigma(n)}{}_n \\ &= \textstyle\sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}(\sigma)\, a^1{}_{\sigma^{-1}(1)} \ldots a^n{}_{\sigma^{-1}(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sig}(\sigma^{-1})\, a^1{}_{\sigma^{-1}(1)} \ldots a^n{}_{\sigma^{-1}(n)} \\ &= \textstyle\sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sig}(\tau)\, a^1{}_{\tau(1)} \ldots a^n{}_{\tau(n)} = \sum_{\tau \in S_n} \mathrm{sig}(\tau)\, b^{\tau(1)}{}_1 \ldots b^{\tau(n)}{}_n \\ &= \det A^t \end{aligned}$$

donde en la segunda línea primero se reordenan los factores de cada sumando por orden creciente de superíndice, y a continuación se usa $\mathrm{sig}(\sigma) = \mathrm{sig}(\sigma^{-1})$, en la tercera se toma $\tau = \sigma^{-1}$ (al ser biyectiva la aplicación $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ en S_n, resulta equivalente sumar en $\sigma \in S_n$ que en $\tau = \sigma^{-1} \in S$), y a continuación se cambia cada $a^i{}_j$ por $b^j{}_i$. ∎

Observación 4.33. Como consecuencia de esta proposición, todas las propiedades de los determinantes "por columnas" (por ejemplo, las obtenidas en el ejercico anterior), serán también válidas "por filas" y viceversa.

4.2.4. Determinante de un endomorfismo

Vemos a continuación cómo todo endomorfismo f de V permite definir, para cada tensor determinante D, otro tensor determinante que denotaremos $f^*(D)$, y las consecuencias que se derivan.

Lema 4.34. *Sea* $f \in \mathrm{End}(V)$.

(1) Para cada $D \in D(V)$ *la aplicación:*

$$\begin{array}{rccl} f^*(D): & V \times \ldots^{(n)} \times V & \to & K \\ & (w_1, \ldots, w_n) & \mapsto & D((f(w_1), \ldots, f(w_n)) \end{array}$$

es también un tensor determinante.

(2) Más aún, la aplicación:

$$\begin{array}{rccl} f^*: & D(V) & \to & D(V) \\ & D & \mapsto & f^*(D) \end{array}$$

es una aplicación lineal, esto es, $f^* \in End(D(V))$.

(3) En consecuencia, f^* *es un múltiplo de la aplicación identidad de* $D(V)$.

Demostración. Los puntos (1) y (2) son una computación directa de la que damos los pasos, que puede justificar el lector.

(1) Multilinealidad:

$$\begin{array}{rl} f^*(D) & (w_1, \ldots, aw_i + bw_i', \ldots, w_n) = \\ = & D((f(w_1), \ldots, f(aw_i + bw_i'), \ldots, f(w_n)) = D((f(w_1), \ldots, af(w_i) + bf(w_i'), \ldots, f(w_n)) \\ = & aD((f(w_1), \ldots, f(w_i), \ldots, f(w_n)) + bD((f(w_1), \ldots, f(w_i'), \ldots, f(w_n)) \\ = & af^*D(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) + bf^*D(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_n) \end{array}$$

Antisimetría:

$$\begin{array}{l} f^*D(w_1, \ldots, w_i, \ldots, w_j, \ldots, w_n) = D(f(w_1), \ldots, f(w_i), \ldots, f(w_j), \ldots, f(w_n)) \\ = -D(f(w_1), \ldots, f(w_j), \ldots, f(w_i), \ldots, f(w_n)) = -f^*D(w_1, \ldots, w_j, \ldots, w_i, \ldots, w_n) \end{array}$$

(2) Para demostrar $f^*(aD + bD') = af^*(D) + bf^*(D')$ se aplican a la misma n-úpla:

$$\begin{array}{rl} f^*(aD + bD')(w_1, \ldots, w_n) = & (aD + bD')((f(w_1), \ldots, f(w_n)) \\ = & aD((f(w_1), \ldots, f(w_n)) + bD'((f(w_1), \ldots, f(w_n)) \\ (af^*(D) + bf^*(D'))(w_1, \ldots, w_n) = & af^*(D)(w_1, \ldots, w_n) + bf^*(D')(w_1, \ldots, w_n) \\ = & aD((f(w_1), \ldots, f(w_n)) + bD'((f(w_1), \ldots, f(w_n)), \end{array}$$

obteniéndose la misma expresión en ambos casos, como se quería.

(3) Inmediato por ser $f^* : D(V) \to D(V)$ lineal y (véase el corolario 4.27) $\dim_K(D(V)) = 1$. ∎

El último punto permite dar una sorprendente definición del determinante de un endomofismo.

Definición 4.35. *Para cada $f \in \mathrm{End}(V)$, llamaremos* determinante de f *al unico escalar* $\det f \in K$ *tal que (según el punto (3) del lema anterior) verifica*

$$f^* = \det f \cdot I_{D(V)}$$

Una primera propiedad de este determinante es, por supuesto, su consistencia con la del determinante de una matriz.

Proposición 4.36. *Sea $f \in \mathrm{End}(V)$ y B cualquier base de V. Entonces:*

$$\det f = \det M(f, B),$$

Demostración. De $f^* = \det f \cdot I_{D(V)}$ se sigue $f^* \det_B = \det f \cdot \det_B$. Cambiando el orden de los miembros de esta igualdad y aplicando ambos a $B = (v_1, \ldots, v_n)$:

$$\det f = f^* \det_B(v_1, \ldots, v_n) = \det_B(f(v_1), \ldots, f(v_n)) = \det M(f, B),$$

donde en la última igualdad se aplica el corolario 4.30 (tomando $w_i = f(v_i)$). ∎

Observación 4.37. (1) En el resultado anterior la matriz de f debe calcularse *en un única base* (esto es, se está tomando $M(f, B) = M(f, B \leftarrow B)$).

(2) Una consecuencia inmediata de la anterior proposición es que si dos matrices A y C son semejantes entonces sus determinantes son iguales. De hecho, por ser semejantes (según la definición[6] 3.51) existe un endomorfismo f de algún espacio vectorial V tal que $A = M(f, B)$ y $C = M(f, \bar{B})$ para dos bases $B, \bar{B}$ de V; por tanto, $\det A = \det f = \det C$.

(3) Podríamos preguntarnos si no habría sido más fácil definir directamente $\det f$ como el determinante de la matriz $M(f, B)$ y demostrar entonces que el valor de este determinante es independiente de la base B escogida. No obstante, la demostración de este hecho pasaría por saber algunas propiedades del determinante de matrices, entre ellas que el determinante del producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes de las dos matrices[7]. La demostración directa de este resultado, empero, no es sencilla[8], mientras que a partir de nuestra definición de $\det f$ va a resultar prácticamente inmediata.

Lema 4.38. *(1) $I_V^* = I_{D(V)}$.*

(2) Si $f, h \in \mathrm{End}(V)$ entonces $(f \circ h)^* = h^* \circ f^*$.

Demostración. (1) Dado $D \in D(V)$, para comprobar $I_V^*(D) = D$, sean $w_1, \ldots, w_n \in V$:

$$I_V^*(D)(w_1, \ldots, w_n) = D(I_V(w_1), \ldots, I_V(w_n)) = D(w_1, \ldots, w_n)$$

(2) De nuevo, para comprobar la igualdad, se aplican ambos términos al mismo $D \in D(V)$ y, entonces, a la misma n-úpla:

$$\begin{aligned} [(f \circ h)^*(D)](w_1, \ldots, w_n) &= D((f \circ h)(w_1), \ldots, (f \circ h)(w_n)) \\ [(h^* \circ f^*)(D)](w_1, \ldots, w_n) &= [h^*(f^*(D))](w_1, \ldots, w_n) = [f^*(D)](h(w_1), \ldots, h(w_n)) \\ &= D(f(h(w_1)), \ldots, f(h(w_n))) \end{aligned}$$

que claramente coinciden. Así, $(f \circ h)^*(D) = (h^* \circ f^*)(D)$ para todo D, como se quería. ∎

[6] Recuérdense también las caracterizaciones en la proposición 3.52.

[7] De hecho, sabemos que $M(f, \bar{B}) = P^{-1} M(f, B) P$ para la matriz regular $P = M(I_V, B \leftarrow \bar{B})$, por lo que la demostración se obtendría si se demuestra que $\det(P^{-1} M(f, B) P) = \det(P^{-1}) \det(M(f, B)) \det P$ y $\det(P^{-1}) = (\det P)^{-1}$.

[8] Véase el libro de Merino y Santos para una demostración a partir de propiedades de matrices elementales.

Teorema 4.39. *(1) El endomorfismo y la matriz identidad verifican:* $\det I_V = 1$, $\det I_n = 1$.

(2) La composición de endomorfismos y el producto de matrices verifican:

$$\det(f \circ h) = \det f \cdot \det h, \quad \forall f,h \in \mathrm{End}(V); \qquad \det(A \cdot C) = \det A \cdot \det C, \quad \forall A,C \in M_n(K).$$

(3) $f \in \mathrm{End}(V)$ *es biyectivo si y sólo si* $\det f \neq 0$. *En este caso,* $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$. *Consistentemente,* $A \in M_n(K)$ *es regular si y sólo si* $\det A \neq 0$. *En este caso,* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(4) $\det f = \det(f^t)$.

Demostración. (1) La primera igualdad es inmediata por el primer punto del lema previo y la definición de $\det I_V$. Para la segunda, usando la proposición 4.36: $\det I_n = \det M(I_V, B) = \det I_V = 1$ (o alternativamente, por computación directa en la definición 4.28).

(2) La igualdad para f,h se sigue de que, por la definición de determinante:

$$(f \circ h)^* = \det(f \circ h) \cdot I_{D(V)}, \qquad h^* \circ f^* = (\det h \cdot I_{D(V)}) \circ (\det f \cdot I_{D(V)}) = (\det h \cdot \det f) \cdot I_{D(V)}$$

y de que las dos expresiones coinciden por el segundo punto del lema anterior.

Para la igualdad en el caso de matrices, fijemos cualquier e.v. $V(K)$ de dimensión n y cualquier base suya (p. ej. $V(K) = K^n(K), B = B_u$), y sean f,h tales que $A = M(f,B), C = M(h,B)$. Entonces:

$$\det(A \cdot C) = \det(M(f,B) \cdot M(h,B)) = \det M(f \circ h, B) = \det(f \circ h) = (\det f)(\det h) = (\det A)(\det C).$$

(3) Fijada cualquier base $B = (v_1, \ldots, v_n)$ se tiene (véase la proposición 4.36):

$$\det f = \det_B(f(v_1), \ldots, f(v_n))$$

el cual es distinto de 0 si y sólo si $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente (corolario 4.25) y, por tanto, si y sólo si f es biyectiva. Además, en este caso

$$1 = \det I_V = \det(f \circ f^{-1}) = (\det f)(\det f^{-1}),$$

esto es, $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$.

Para el caso de la matriz A, tomamos f como en el punto anterior de modo que $A = M(f,B)$ y:

$$A \text{ regular} \iff f \text{ biyectiva} \iff \det f \neq 0 \iff \det A (= \det M(f,B)) \neq 0.$$

En este caso, $\det(A^{-1}) = \det(M(f,B)^{-1}) = \det M(f^{-1}, B) = \det f^{-1} = (\det f)^{-1} = (\det A)^{-1}$.

(4) Como el determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta (proposición 4.32):

$$\det f = \det M(f,B) = \det(M(f,B)^t) = \det M(f^t, B) = \det(f^t).$$

∎

Observación 4.40. Es fácil comprobar que si dos endomorfismos f,h verfican $f \circ h = I_V$ entonces ambos son automorfimos y $h = f^{-1}$. De esto se deduce que si $A, C \in M_n(K)$ verifican $A \cdot C = I_n$ entonces ambas matrices son regulares y $C = A^{-1}$. Esto también se puede deducir directamente de la segunda parte del punto (2). En efecto, tomando determinantes en la igualdad se deduce $\det A \neq 0 \neq \det C$ y, por tanto, A y C son matrices regulares, esto es, pertenecen al grupo $Gl(n,K)$. Como $A \cdot C = I_n = A \cdot A^{-1}$ el resultado se obtiene simplificando en el grupo (esto es, multiplicando a a izquierda por A^{-1} ambos miembros).