# Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

28 de abril de 2020

## 1. Tema 6: G-conjuntos y p-grupos.

Comenzamos hoy con el Tema 6 del programa. En este tema nos dedicaremos, por un lado, al estudio de $G$-conjuntos ($G$ un grupo) que son conjuntos sobre los que hay definida una acción por el grupo $G$ y, por otro lado, al estudio de $p$-grupos ($p$ un número primo) que son grupos cuyos elementos tienen orden una potencia de $p$. Dedicaremos especial atención al estudio de los $p$-subgrupos de un grupo dado.

### 1.1. G-conjuntos

Comenzamos el tema con el estudio de $G$-conjuntos. Veremos numerosos ejemplos y estudiaremos algunas propiedades y resultados que serán fundamentales para la segunda parte del tema dedicada a $p$-grupos. Comenzamos entonces dando la definición de acción y de $G$-conjunto. Trabajaremos con acciones y $G$-conjuntos por la izquierda, aunque de forma análoga se tienen los conceptos de acción y $G$-conjunto por la derecha.

**Definición 1.1.** *Sea $G$ un grupo y $X$ un conjunto no vacío. Una* **acción de $G$ sobre $X$** *(por la izquierda) es una aplicación*

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \mapsto {}^{g}x$$

*que asocia a cada $g \in G$ y $x \in X$ un elemento en $X$ que denotaremos por ${}^{g}x$. Esta aplicación ha de verificar las dos siguientes propiedades:*

1. ${}^{1}x = x$ *para todo* $x \in X$,
2. ${}^{g}({}^{h}x) = {}^{(gh)}x$ *para cualesquiera* $g, h \in G$ *y* $x \in X$.

*Diremos que $G$* **actúa sobre $X$** *(por la izquierda) y que $X$ es un* **$G$-conjunto** *(izquierda). El grupo $G$ se llama el* **dominio de operadores de la acción** *y la aplicación anterior se llama la* **aplicación de $G$-estructura** *del $G$-conjunto $X$.*

*Observación* 1.2. Trabajaremos siempre con acciones por la izquierda y $G$-conjuntos por la izquierda. Asi hablaremos simplemente de acción y $G$-conjunto entendiendo que nos estamos refiriendo a acción por la izquierda y $G$-conjunto izquierda.

Hay otra forma equivalente de definir una acción que vemos a continuación:

**Teorema 1.3.** *Sea $G$ un grupo y $X$ un conjunto no vacío. Son equivalentes:*

*(a) Dar una acción de $G$ sobre $X$,*

*(b) Dar un homomorfismo de $G$ en el grupo $S(X)$, el grupo de permutaciones del conjunto $X$.*

*(Recuérdese que $S(X)$ es el grupo de aplicaciones biyectivas de $X$ en sí mismo con operación dada por la composición.)*

*Demostración.* Supongamos dada una acción del grupo $G$ sobre el conjunto $X$, esto es una aplicación

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \mapsto {}^{g}x,$$

verificando las condiciones *1.* y *2.* de la definición anterior.

Para cada $g \in G$ podemos definir una aplicación:

$$\phi(g) : X \to X, \text{ dada por } \phi(g)(x) := {}^{g}x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

La condición *1.* nos dice que

$$\phi(1) = id_X,$$

pues $\phi(1)(x) = {}^{1}x = x$ para todo $x \in X$. La condición *2.* nos dice que para cualesquiera $g, h \in G$ se tiene que

$$\phi(gh) = \phi(g)\phi(h),$$

pues, dado $x \in X$ se tiene $\phi(gh)(x) = {}^{(gh)}x = {}^{g}({}^{h}x) = \phi(g)({}^{h}x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = (\phi(g)\phi(h))(x)$.

En particular tomando $h = g^{-1}$, será $\phi(g)\phi(g^{-1}) = id_X = \phi(g^{-1})\phi(g)$, esto es, $\phi(g)$ es una aplicación biyectiva. Tenemos pues asociada a la acción un homomorfismo de grupos

$$\phi : G \to S(X), \quad g \mapsto \phi(g)$$

de $G$ en el grupo de permutaciones del conjunto $X$,

Recíprocamente, supongamos dado un homomorfismo de grupos

$$\phi : G \to S(X)$$

. Definimos entonces una aplicación

$$G \times X \to X, \quad \text{dada por } {}^{g}x := \phi(g)(x),$$

que es en efecto una acción de $G$ sobre $X$ pues, como $\phi$ es un homorfismo de grupos, entonces $\phi(1) = id_X$, esto es ${}^{1}x = \phi(1)(x) = id_X(x) = x$, para todo $x \in X$ y se tiene la condición *1.* Análogamente, por ser $\phi$ homomorfismo de grupos, para cualesquiera $g, h \in G$ será $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$, con lo que ${}^{g}({}^{h}x) = \phi(g)(\phi(h)(x)) = (\phi(g)\phi(h))(x) = \phi(gh)(x) = {}^{(gh)}x$, para todo $x \in X$, y se tiene la condición *2.* □

Damos entonces la siguiente

**Definición 1.4.** *Sea $G$ un grupo y*

$$G \times X \longrightarrow X, \quad (g, x) \mapsto {}^g x$$

*una acción de $G$ sobre el conjunto $X$. El homomorfismo asociado a la acción por el teorema anterior*

$$\phi : G \to S(X) \ g \mapsto \phi(g)$$

*siendo*

$$\phi(g) : X \to X, \text{ dada por } \phi(g)(x) := {}^g x, \quad \text{para todo } x \in X,$$

*lo llamaremos la* **representación de $G$ por permutaciones asociada a la acción.** *El núcleo de $\phi$, esto es*

$$Ker(\phi) = \{g \in G | \phi(g) = id_X\} = \{g \in G | {}^g x = x, \forall x \in X\},$$

*se llama el* **el núcleo de la acción**. *Por definición $Ker(\phi)$ es un subgrupo normal de $G$.*

*Diremos que la acción es* **fiel** *si $Ker(\phi) = 1$*

*Observación* 1.5. Notemos que por el Teorema 1,2, podemos dar una acción bien dando la aplicación $G \times X \to X$ verificando las condiciones *1.* y *2.* de la Definición 1.1, bien dando un homomorfismo (la representación asociada) $\phi : G \to S(X)$.

A continuación vemos algunos ejemplos. En cada uno de ellos la comprobación de las propiedades *1.* y *2.* de la Definición 1.1 os la dejo como ejercicio.

*Ejemplo* 1.6.

1. Para cualquier grupo $G$ y cualquier conjunto no vacío $X$, se tiene siempre definida una acción, que llamaremos la acción **trivial** de $G$ sobre $X$ que es la dada por:

$$G \times X \longrightarrow X, \quad {}^g x := x, \quad \forall x \in X, \forall g \in G$$

   cuya representación asociada es el homomorfismo trivial $1 : G \to S(X)$, que aplica cada elemento de $G$ en la identidad en $X$

2. Si $G$ actúa sobre un conjunto $X$, con representación $\phi : G \to S(X)$, y $H$ es un subgrupo de $G$, entonces $H$ actúa sobre $X$ por la composición

$$H \hookrightarrow G \xrightarrow{\phi} S(X)$$

   de la inclusión $H \hookrightarrow G$ con $\phi$. Esta acción la llamaremos la acción por **restricción** de $H$ sobre X.

3. Sea $G = S_n$ y $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \geq 2$. Entonces la aplicación

$$S_n \times X \longrightarrow X, \quad (\sigma, x) \mapsto {}^\sigma x := \sigma(x)$$

   es una acción. Su representación asociada no es mas que $id : S_n \to S_n$ y se trata pues de una acción fiel.

4. Sea $G = D_4 = \langle r, s | r^4 = 2 = s^2, sr = r^3 s\rangle$ el grupo diédrico, y $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Entonces la aplicación $\phi : D_4 \to S_4 = S(X)$ definido por

$$\phi(r^i) = (1\ 2\ 3\ 4)^i \quad y \quad \phi(r^i s) = (1\,2\,3\,4)^i(2\ 4),\ 0 \leq i \leq 3$$

es un homomorfismo de grupos (comprobadlo!!).

Por el Teorema 1.2, $\phi$ define entonces, una acción de $D_4$ sobre $X$ cuya representación asociada es el mismo (describid quién ${}^g x$ para cada $g \in D_4$ y $x \in \{1, 2, 3, 4\}$).

Es fácil ver que este homomorfismo es inyectivo, esto es, que la acción es fiel.

5. Sea $X$ un conjunto no vacío y consideremos el grupo simétrico $S_n$, $n \geq 2$. Entonces $S_n$ actúa sobre $X^n = X \times \overset{n}{\cdots} \times X$ por la aplicación

$$S_n \times X^n \longrightarrow X^n$$
$$(\alpha, (x_1, \ldots, x_n)) \mapsto {}^{\alpha}(x_1, \ldots, x_n) := (x_{\alpha^{-1}(1)}, \ldots, x_{\alpha^{-1}(n)}).$$

Si $\phi : S_n \to S(X^n)$ es la representación asociada a esta acción, entonces

$$\begin{aligned} Ker(\phi) =& \{\alpha \in S_n / {}^{\alpha}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n),\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\} \\ &= \{\alpha \in S_n / (x_{\alpha^{-1}(1)}, \ldots, x_{\alpha^{-1}(n)}) = (x_1 \ldots, x_n),\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\} \\ &= \{\alpha \in S_n / x_{\alpha^{-1}(1)} = x_1, x_{\alpha^{-1}(2)} = x_2, \ldots, x_{\alpha^{-1}(n)} = x_n,\ \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\} \\ &= \{\alpha \in S_n / \alpha(j) = j,\ j = 1, 2, \ldots, n\} = \{id\}. \end{aligned}$$

Esto es $\phi$ es monomorfismo y la acción es fiel.

Destacamos ahora dos ejemplos mas que tienen especial importancia por sus consecuencias en el estudio de grupos finitos y, en particular, en el estudio de $p$-grupos finitos.

*Ejemplo* 1.7. **La acción por traslación**: Sea $G$ un grupo, Entonces la aplicación

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \mapsto {}^g h := gh$$

define una acción de $G$ sobre sí mismo llamada la acción por traslación.

Esta acción es fiel, pues la representación asociada

$$\phi : G \to S(G),\ g \mapsto \phi(g)$$

siendo

$$\phi(g) : G \to G,\ \text{dada por } \phi(g)(h) = gh$$

tiene por núcleo

$$Ker(\phi) = \{g \in G / \phi(g) = id_G\} = \{g \in G / gh = h, \forall h \in G\} = \{1\},$$

Así pues $\phi$ es un monomorfismo y la acción es fiel.

En particular si $G$ es finito con $|G| = n$, entonces $S(G) \cong S_n$ y aplicando el primer teorema de isomorfía al homomorphism $\phi$ obtenemos que

$$G \cong Img(\phi).$$

De esta forma hemos demostrado el conocido

*Teorema* 1.8. **Teorema de Cayley**: *Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones.*

Otros ejemplos similares al ejemplo anterior son los siguientes:

*Ejemplo* 1.9.

1. Sea $G$ un grupo y $H \leq G$ un subgrupo suyo. Consideramos el conjunto $G/H = \{xH/x \in G\}$, de clases laterales por la izquierda módulo $H$. Entonces la aplicación

$$G \times G/H \longrightarrow G/H,\ (g, xH) \mapsto {}^{g}(xH) := (gx)H,$$

define una acción de $G$ sobre $G/H$.

2. Sea $G$ un grupo y $H \leq G$ un subgrupo suyo. Consideramos ahora el conjunto $H/G = \{Hx/x \in G\}$, de clases laterales por la derecha módulo $H$. Entonces la aplicación

$$G \times H/G \longrightarrow H/G,\ (g, Hx) \mapsto {}^{g}(Hx) := H(xg^{-1}),$$

define una acción de $G$ sobre $H/G$.

El siguiente ejemplo de acción nos será de utilidad en el estudio de $p$-grupos y también es particularmente importante en Teoría de representaciones de grupos finitos (que no abordamos en este curso):

*Ejemplo* 1.10. **La acción por conjugación**: Sea $G$ un grupo, entonces la aplicación

$$G \times G \longrightarrow G, \quad (g, h) \mapsto {}^{g}h := ghg^{-1}$$

define una acción de $G$ sobre sí mismo llamada la acción por conjugación.
La representación asociada

$$\phi : G \to S(G),\ \ g \mapsto \phi(g) = \varphi_g$$

aplica un elemento $g$ en el automorfismo interno o de conjugación por definido por $g$,

$$\varphi_g : G \to G,\ \varphi_g(h) = ghg^{-1},\ h \in G,$$

y así, su imagen es el grupo de automorfimos internos $Int(G)$ y su núcleo

$$\begin{aligned} Ker(\phi) &= \{g \in G/\varphi_g = id_G\} \\ &= \{g \in G/ghg^{-1} = h, \forall h \in G\} \\ &= \{g \in G/gh = hg, \forall h \in G\} = Z(G), \end{aligned}$$

coincide con el centro del grupo (véase el Ejercicio 16, Relación 3)

Consecuentemente la acción por conjugación de un grupo $G$ sobre sí mismo es fiel si, y sólo si, el centro del grupo es trivial.

Un ejemplo similar al anterior es el siguiente:

*Ejemplo* 1.11. Sea $G$ un grupo y consideremos $Sub(G)$ el retículo de subgrupos de $G$. Entonces la aplicación

$$G \times Sub(G) \longrightarrow Sub(G), \ (g, H) \mapsto {}^{g}H := gHg^{-1},$$

define una acción de $G$ sobre $Sub(G)$.

Esta acción no es en general una acción fiel (sí lo es, por ejemplo, si $G = A_n$ el $n$-ésimo grupo alternado, $n \geq 5$ comprobadlo!).

Nos irán apareciendo mas ejemplos de acciones en el desarrollo del tema.