Cálculo I
Series de números reales

UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1+a_2,\ A_3 = a_1+a_2+a_3, \dots,\ A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n,\ \dots$$

o, si te gusta más, $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$.

Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1+a_2,\ A_3 = a_1+a_2+a_3, \ldots,\ A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n,\ \ldots$$

o, si te gusta más, $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$.

La sucesión $\{A_n\}$ así definida se llama *serie de término general a_n* o *serie definida por la sucesión $\{a_n\}$*, y la representaremos por $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ o, más sencillamente, $\sum a_n$. El número $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ se llama *suma parcial de orden n* de la serie $\sum a_n$.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***.

En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es “acotada”, “convergente” o “positivamente divergente”.

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \text{lím}\{A_n\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

La igualdad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, hay un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k - S\right| < \varepsilon$.

Serie geométrica

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$.

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$.

Es costumbre representar la serie geométrica de razón x con el símbolo $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

Serie geométrica

Dado un número x, la sucesión

$$\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x.

Observa que dicha serie se obtiene sumando consecutivamente los términos de la sucesión $\{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\}$.

Es costumbre representar la serie geométrica de razón x con el símbolo $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^n$.

Dicha serie converge si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Serie armónica

La serie de término general $1/n$, es decir, la sucesión $\{H_n\}$ donde $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, que simbólicamente representamos por $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$, se llama **serie armónica**. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\} = +\infty.$$

Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Serie armónica alternada

Se llama así la serie de término general $\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; es decir, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\log 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\log 2.$$

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando ***consecutivamente*** los términos de la sucesión

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \ldots\ldots\right\}$$

Reordenando términos en la serie armónica alternada podemos obtener otra serie con distinta suma.

Como hemos visto, la serie armónica alternada es la sucesión que se obtiene sumando ***consecutivamente*** los términos de la sucesión

$$\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \ldots\ldots\right\}$$

Vamos a cambiar el orden de los términos en esta sucesión poniendo uno positivo seguido de dos negativos manteniendo sus posiciones relativas. Obtenemos así la sucesión

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{10}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{14}, -\frac{1}{16}, \ldots\ldots\right\},$$

cuya serie asociada, obtenida sumando ***consecutivamente*** sus términos, es la sucesión $\{S_n\}$ dada por:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= 1 - \frac{1}{2} \\
S_3 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\
S_4 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \\
S_5 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \\
S_6 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \\
\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\
S_9 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} \\
\ldots\ldots &= \ldots\ldots \\
S_{3n} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{2j-1} - \frac{1}{4j-2} - \frac{1}{4j} \right)
\end{aligned}
$$

Tenemos que:

$$S_{3n} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2}\right) - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2n} \frac{(-1)^{j-1}}{j}.$$

Deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{j-1}}{j} = \dfrac{1}{2}\log 2$. Es claro que $\lim\{S_{3n} - S_{3n-1}\} = \lim\{S_{3n} - S_{3n-2}\} = 0$ de donde se sigue que:

$$\lim\{S_n\} = \frac{1}{2}\log 2.$$

La particularidad del estudio de las series

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: **se trata de deducir propiedades de la serie $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, a partir del comportamiento de $\{a_n\}$.** Es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\{A_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$. La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión* $\{a_n\}$ *es el dato que podemos utilizar*.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie $\sum a_n$ a partir de uno en adelante.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie $\sum a_n$ a partir de uno en adelante.

El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie $\sum a_n$ a partir de uno en adelante.

El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y supongamos que hay un número $q \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant q + 1$ es $a_n = b_n$. Entonces se verifica que las series $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ o bien convergen ambas o no converge ninguna, y en el primer caso se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{j=1}^{q} a_j = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{j=1}^{q} b_j .$$

Consideremos una serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$.

Consideremos una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ .Dado $q\in\mathbb{N}$ definamos $b_n = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant q$, $b_n = a_n$ para todo $n \geqslant q+1$. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ se llama **serie resto de orden** q de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

Consideremos una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ .Dado $q \in \mathbb{N}$ definamos $b_n = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant q$, $b_n = a_n$ para todo $n \geqslant q+1$. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ se llama **serie resto de orden** q de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

Es usual representar dicha serie resto con la notación $\sum\limits_{n\geqslant q+1} a_n$.

Consideremos una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ .Dado $q \in \mathbb{N}$ definamos $b_n = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant q$, $b_n = a_n$ para todo $n \geqslant q+1$. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ se llama **serie resto de orden** q de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

Es usual representar dicha serie resto con la notación $\sum\limits_{n\geqslant q+1} a_n$.

De la proposición anterior deducimos que las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant q+1} a_n$ ninguna converge o ambas convergen y, cuando esto ocurre es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{q} a_k = \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n .$$

Consideremos una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ .Dado $q \in \mathbb{N}$ definamos $b_n = 0$ para $1 \leqslant n \leqslant q$, $b_n = a_n$ para todo $n \geqslant q+1$. La serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ se llama **serie resto de orden** q de la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$.

Es usual representar dicha serie resto con la notación $\sum\limits_{n\geqslant q+1} a_n$.

De la proposición anterior deducimos que las series $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant q+1} a_n$ ninguna converge o ambas convergen y, cuando esto ocurre es:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{k=1}^{q} a_k = \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n.$$

No lo olvides: para calcular la suma de una serie convergente debes tener siempre presente el índice desde el que empieza la serie.

Condición necesaria para la convergencia de una serie. Para que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{a_n\} = 0$.

Condición necesaria para la convergencia de una serie. Para que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{a_n\} = 0$.

Esta condición necesaria no es suficiente.

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*.

Condición necesaria para la convergencia de una serie. Para que la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{a_n\} = 0$.

Esta condición necesaria no es suficiente.

Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*.

Una serie de términos positivos es una sucesión creciente por lo que o bien es convergente (cuando está mayorada) o es positivamente divergente.

Criterio básico de convergencia para series de términos positivos. Una serie de términos positivos $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M$, en cuyo caso su suma viene dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k \;:\; n \in \mathbb{N}\right\}$$

Una serie de términos positivos que no está mayorada es (positivamente) divergente.

La serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n!}$ es convergente y su suma es el número e.

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

La serie $\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!}$ es convergente y su suma es el número e.

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

El número e es irracional.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación. Sean $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to L\in\mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to L\in\mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L\in\mathbb{R}^+$ las series $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to L\in\mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L\in\mathbb{R}^+$ las series $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k\in\mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente, también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación. Sean $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\} \to L\in\mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$.

- Si $L = +\infty$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es divergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ es convergente también $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L\in\mathbb{R}^+$ las series $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ y $\sum_{n\geqslant 1} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

En particular, **si dos sucesiones de números positivos, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son asintóticamente equivalentes, las respectivas series, $\sum a_n$ y $\sum b_n$ ambas convergen o ambas divergen.**

Criterio de condensación de Cauchy. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se verifica que las series $\{A_n\}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, donde

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \quad B_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

ambas convergen o ambas divergen.

Criterio de condensación de Cauchy. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se verifica que las series $\{A_n\}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, donde

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \quad B_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

ambas convergen o ambas divergen.

Series de Riemann. Dado un número real α, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

Criterio de condensación de Cauchy. Sea $\{a_n\}$ una sucesión decreciente de números positivos. Se verifica que las series $\{A_n\}$ y $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, donde

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,, \quad B_n = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^n a_{2^n}$$

ambas convergen o ambas divergen.

Series de Riemann. Dado un número real α, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

Series de Bertrand. La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ converge si $\alpha > 1$ cualquiera sea β, y también si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$. En cualquier otro caso es divergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\limsup \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\limsup \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $\liminf \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\limsup \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $\liminf \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\limsup \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$ la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $\liminf \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Cuando se verifica que

$$\liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leqslant 1 \leqslant \limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

la serie puede ser convergente o divergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\operatorname{lím\,sup}\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $\operatorname{lím\,inf}\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = \ell > 1$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Cuando se verifica que

$$\operatorname{lím\,inf}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \leqslant 1 \leqslant \operatorname{lím\,sup}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$$

la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\operatorname{lím}\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\limsup \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $\liminf \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Cuando se verifica que

$$\liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leqslant 1 \leqslant \limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\lim \left\{ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\displaystyle \limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $\displaystyle \liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Cuando se verifica que

$$\liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leqslant 1 \leqslant \limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\displaystyle \lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768) Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Si $\displaystyle \limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L < 1$ la serie $\displaystyle \sum_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $\displaystyle \liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = \ell > 1$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\displaystyle \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto $\displaystyle \sum_{n \geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Cuando se verifica que

$$\liminf \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leqslant 1 \leqslant \limsup \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\displaystyle \lim \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\displaystyle \sum_{n \geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\displaystyle \sum_{n \geqslant 1} a_n$ no es convergente.

Cuando $L = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821) Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\limsup \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}.$$

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821) Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\limsup \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821) Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\operatorname{lím\,sup}\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

En el caso de que $\operatorname{lím\,sup}\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821) Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\limsup \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

En el caso de que $\limsup \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\lim \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821) Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\limsup\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

En el caso de que $\limsup\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\lim\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821) Sea $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\limsup \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

En el caso de que $\limsup \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\lim \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821) Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos y sea

$$\limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

En el caso de que $\limsup \{\sqrt[n]{a_n}\} = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

En particular, si se verifica que $\lim \{\sqrt[n]{a_n}\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$ entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\{a_n\}$ no converge a cero y por tanto la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

En el caso de que $\lim \{\sqrt[n]{a_n}\} = 1$ la serie puede ser convergente o divergente.

Comparación de los criterios del cociente y de la raíz. Supuesto que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\underline{\text{lím}}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \overline{\text{lím}}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$$

Comparación de los criterios del cociente y de la raíz. Supuesto que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\underline{\text{lím}}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\} \leqslant \underline{\text{lím}}\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \overline{\text{lím}}\{\sqrt[n]{a_n}\} \leqslant \overline{\text{lím}}\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$$

Estas desigualdades implican que siempre que el criterio del cociente proporciona información sobre la convergencia de una serie, el criterio de la raíz también proporciona dicha información.

Comparación de los criterios del cociente y de la raíz. Supuesto que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:

$$\underline{\lim} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\} \leqslant \underline{\lim} \{ \sqrt[n]{a_n} \} \leqslant \overline{\lim} \{ \sqrt[n]{a_n} \} \leqslant \overline{\lim} \left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$$

Estas desigualdades implican que siempre que el criterio del cociente proporciona información sobre la convergencia de una serie, el criterio de la raíz también proporciona dicha información.Pero puede ocurrir que el criterio del cociente no proporcione información y el de la raíz sí.

Criterio de Raabe (1832). Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Supongamos que $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.

Criterio de Raabe (1832). Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Supongamos que $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L < 1$ o $L = -\infty$ o si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Criterio de Raabe (1832). Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Supongamos que $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L < 1$ o $L = -\infty$ o si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ es divergente.

Criterio de Raabe (1832). Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Supongamos que $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L < 1$ o $L = -\infty$ o si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es divergente.

Forma alternativa del criterio de Raabe. Sea $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Sea $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.

- Si $S_n \to e^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es convergente.

Criterio de Raabe (1832). Sea $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y pongamos

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

Supongamos que $\lim\{R_n\} = L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

- Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $L < 1$ o $L = -\infty$ o si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Forma alternativa del criterio de Raabe. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Sea $S_n = \left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.

- Si $S_n \to e^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $S_n \to e^L$ con $L < 1$ o si $S_n \to 0$, la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Se dice que una serie $\sum_{n \geqslant 1} a_n$ es **conmutativamente convergente** si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie

$$\sum_{n \geqslant 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$$

es convergente.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **conmutativamente convergente** si para toda biyección $\pi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$$

es convergente.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **conmutativamente convergente** si para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifica que la serie definida por la sucesión $\{a_{\pi(n)}\}$, es decir la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} a_{\pi(n)} = \{a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \cdots + a_{\pi(n)}\}$$

es convergente.

Se dice que una serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es conmutativamente convergente. Además, si la serie $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ es absolutamente convergente, entonces para toda biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

Teorema de Riemann. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea $\alpha \in \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$. Entonces existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

Teorema de Riemann. Sea $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ una serie convergente pero no absolutamente convergente y sea $\alpha \in \mathbb{R} \cup -\infty, +\infty$. Entonces existe una biyección $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \alpha.$$

Convergencia absoluta $\iff$ **Convergencia conmutativa**

Criterio de Leibniz para series alternadas. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente. Además, si $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$.