GEOMETRÍA I. DGIIM

ESPACIO DUAL

Relación de problemas

1. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Demostrar que si $v \in V$ y $v \neq 0$ entonces existe $\varphi \in V^*$ tal que $\varphi(v) \neq 0$. ¿Es φ única en estas condiciones?

2. Calcular la base dual de la base B del espacio V en estos casos:

   a) $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}, \quad V = \mathbb{R}^3$.

   b) $B = \{(i,0),(0,i)\}, \quad V = \mathbb{C}^2$.

   c) $B = \{1, 1+x, 1+x^2, 1+x^3\}, \quad V = \mathbb{R}_3[x]$.

3. En el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual a 2 se considera la aplicación $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ dada por:

   $$\varphi(p(x)) = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx.$$

   Se pide lo siguiente:

   a) Demostrar que $\varphi \in (\mathbb{R}_2[x])^*$. Calcular las coordenadas de φ en la base dual de $\{1,x,x^2\}$.

   b) Construir una base $\overline{B}$ de $(\mathbb{R}_2[x])^*$ a partir de φ.

   c) Obtener una base B de $\mathbb{R}_2[x]$ de forma que $B^* = \overline{B}$.

4. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Dados dos subespacios vectoriales U y W de V, demostrar que:

   $$\mathrm{an}(U+W) = \mathrm{an}(U) \cap \mathrm{an}(W), \qquad \mathrm{an}(U \cap W) = \mathrm{an}(U) + \mathrm{an}(W).$$

   Deducir que si $V = U \oplus W$ entonces $V^* = \mathrm{an}(U) \oplus \mathrm{an}(W)$.

5. Sea V un espacio vectorial sobre K finitamente generado. Sabemos que si $\varphi \in V^*$ y $\varphi \neq \varphi_0$, entonces $\mathrm{Nuc}(\varphi)$ es un hiperplano de V. Demostrar que, dado un hiperplano H de V, existe $\varphi \in V^*$ con $\mathrm{Nuc}(\varphi) = H$. ¿Qué relación hay entre dos formas lineales φ y ψ sobre V tales que $\mathrm{Nuc}(\varphi) = \mathrm{Nuc}(\psi) = H$?

6. En cada uno de los siguentes casos, obtener unas ecuaciones implícitas para el subespacio U del espacio vectorial V:

   a) $U = L((1,-1,1),(2,1,0),(5,-2,3)), \quad V = \mathbb{R}^3$.
   b) $U = L((-1,1,1,1),(1,-1,1,1)), \quad V = \mathbb{R}^4$.
   c) $U = L((1,-1,0),(0,1,-1)) \cap L((0,1,0))$.
   d) $U = L((1,-1,1,0)) + L((1,0,0,0),(0,1,0,0),(2,0,1,0))$.

7. Se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$f(1,1,0) = (1,-1), \quad f(1,0,1) = (3,0), \quad f(0,1,1) = (-2,1).$$

   Calcular la matriz de f^t con respecto a las bases duales de las bases usuales de $\mathbb{R}^2$ y de $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Calcular bases de $\mathrm{Nuc}(f^t)$ e $\mathrm{Im}(f^t)$.

8. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Toda forma lineal $\varphi \neq \varphi_0$ sobre un espacio vectorial V es un epimorfismo.
   b) Existe un subespacio de $\mathbb{R}^{12}$ que está definido por 7 ecuaciones implícitas independientes y está generado por 4 vectores.
   c) Para cada $v \in \mathbb{R}^3$ con $v \neq 0$, existe un epimorfismo $f : \mathrm{an}(\{v\}) \to \mathbb{R}^3$.
   d) Una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K finitamente generados es un isomorfismo si y sólo si también lo es su aplicación traspuesta.