II. Ejercicios (Capítulo II. Diferenciación. Regla de la cadena. Extremos absolutos y relativos de campos escalares.)

1. Calcula las derivadas direccionales en el punto $(0,1,0)$ de la función $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y,z) = x^3 - 3xy + z^3 \qquad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3).$$

2. Calcula las derivadas parciales de primer orden de los siguientes campos escalares:
a) $f(x,y,z) = x^2y + z^2x + y\operatorname{sen}(xz)$
b) $f(x,y) = (x^2+y^3)e^{-xy}$
c) $f(x,y,z) = xe^z + ze^y + xyz$

3. Prueba que en $\mathbb{R}^N$ la norma no es diferenciable en 0.

4. Comprueba que la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^4} \quad \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \qquad f(0,0) = 0$$
es continua en $(0,0)$, tiene derivadas direccionales en $(0,0)$ según cualquier vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash (0,0)$, pero no es diferenciable en $(0,0)$.

5. Sea Z un espacio normado y $B:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow Z$ una aplicación bilineal. Prueba que existe un número real K que verifica
$$\|B(x,y)\| \leq K\|x\|_\infty \|y\|_\infty \leq K\|x\|_2\|y\|_2, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m.$$
Por supuesto, por el Teorema de Hausdorff, el resultado anterior también es cierto si a la derecha de la desigualdad se usan dos normas cualesquiera en $\mathbb{R}^n$ y en $\mathbb{R}^m$.

6. Prueba que toda aplicación bilineal $B:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ es diferenciable en todo punto $(u,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ y además se verifica la igualdad
$$DB(u,v)(x,y) = B(u,y) + B(x,v), \qquad \forall u,x \in \mathbb{R}^n, v,y \in \mathbb{R}^m.$$

7. Calcula las derivadas parciales de primer y segundo orden de los siguientes campos escalares:
a) $f(x,y,z) = \tan\Big((xy)^z\Big)x^2y + z^2x + y\operatorname{sen}(xz)$
b) $f(x,y) = \operatorname{sen}\Big(\cos e^{xy}\Big)$
c) $f(x,y) = \ln\Big(4 + \arctan\Big(\frac{x}{y}\Big)\Big)$

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto y $f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función con derivadas parciales y tal que $\nabla f:\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ está acotada. Prueba que f es continua.
Justifica que la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{si} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}, \qquad f(0,0) = 0,$$
verifica las hipótesis del resultado anterior y, sin embargo, no es diferenciable en $(0,0)$.

9. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \Omega$ un campo vectorial derivable en a y $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $b = f(a)$. Prueba que $g \circ f$ es derivable en a y además
$$(g \circ f)'(a) = (\nabla g(b) | f'(a)).$$

10. Si $p \in \mathbb{R}^*$, consideremos la funcion $f : \mathbb{R}^N \backslash \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por
$$f(x) = \|x\|_2^p \qquad\qquad (x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}).$$
Prueba que $f \in C^1(\mathbb{R}^N \backslash \{0\})$ y además
$$\nabla f(x) = p\|x\|_2^{p-2} x, \forall x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}.$$
Da una función $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ que verifique que $\nabla f(x) = x$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$.

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, estudia la continuidad, diferenciabilidad y continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por
$$f(x,y) = (x+y)^n \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}), \quad f(0,0) = 0.$$

12. Estudiar la continuidad, diferenciabilidad y continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por
$$f(x,y,z) = \frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}), \quad f(0,0,0) = 0.$$

13. Calcula las ecuaciones de la rectas tangentes a las siguientes curvas en cada punto de la curva
$$\alpha(t) = \big(t, 1-t\big), \qquad \alpha(t) = \big(t^2, e^t, 2\operatorname{sen} t\big).$$

14. Calcula el plano tangente a la gráfica de f para cada una de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = x^2+y^2$, **b**) $f(x,y) = 2x+3y-1$, **c**) $f(x,y) = e^x+\arctan(y)$.

15. Dado el campo escalar definido en $\mathbb{R}^2$ por
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \frac{y}{x} - y^2 \arctan \frac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0, \end{cases}$$
estudia la continuidad y diferenciablidad de f en $(0,0)$. Calcula, en caso de que existan, $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Nota: Por definición, se tiene que
$$D_{ij}f(0,0) = D_j(D_i f)(0,0), \qquad \forall i,j \in \{1,2\}.$$

16. Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\alpha > 3$, estudia la diferenciabilidad y continuidad de las derivadas parciales del campo escalar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por
$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha}{x^2+y^2} \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}), \quad f(0,0) = 0.$$

17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable. Definimos $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(s,t) = f(s^2 - t^2, t^2 - s^2) \qquad ((s,t) \in \mathbb{R}^2).$$

Prueba que

$$t\frac{\partial g}{\partial s} + s\frac{\partial g}{\partial t} = 0.$$

18. Sea $z = \cos(xy) + e^{y-1}\cos(x)$, donde $x = u^2 + v, y = u - v^2$. Calcula $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ en el punto $(1,1)$. Con un lenguaje diferente, se pide la derivada parcial respecto de la primera variable en $(1,1)$ del campo escalar $g \circ f$, donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ están definidas por

$$f(u,v) = (u^2 + v, u - v^2), \qquad\qquad g(x,y) = \cos(xy) + e^{y-1}\cos(x).$$

19. Sea $z = f(x,y)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable. Si $x = u^2 + v^2$, $y = \dfrac{u}{v}$, calcula las derivadas parciales de primer orden de z respecto de u y v en función de las derivadas parciales de z respecto de x e y.

20. Sea $u = x^4 + y^2z^3 + \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$, donde $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable. Supongamos que

$$x = 1 + rse^t, \quad y = rs^2e^{-t}, \quad z = r^2 s \operatorname{sen} t.$$

Si $\varphi'\left(\frac{3}{2}\right) = -1$, calcula $\dfrac{\partial u}{\partial s}$ en el punto $(r,s,t) = (2,1,0)$.

21. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable. Definimos $F(x,y) = f\left(\dfrac{x}{x^2 - y^2}\right)$. Comprueba que se verifica la igualdad

$$(x^2 + y^2)\frac{\partial F}{\partial y} + 2xy\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable y $z = f(x,y)$. Si $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho \operatorname{sen}\theta$, calcula $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial f}{\partial \theta}$. Prueba que se verifica

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2.$$

23. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un abierto, y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dos funciones diferenciables. Prueba que entonces la función $h(x) =< f(x), g(x) >$ definida en A es derivable. Calcula su derivada.

24. Clasifica los puntos críticos de los siguientes campos escalares:
a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$
b) $f(x,y) = \cos(x)\cos(y)$
c) $f(x,y) = -xy + 2x^3y - xy^2 - 2x^3y^2$
d) $f(x,y) = 2x + y + x^2 + xy + y^3$
e) $f(x,y) = 2xy - 2x^3y - yx^2 + x^3y^2$.
f) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 3xyz - x - y - z$

25. Dados n puntos (x_i, y_i) en $\mathbb{R}^2$, determina los valores de a y b que hace mínimo el real

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(y_i - ax_i - b\Big)^2.$$

La recta con los parámetros anteriores se llama *recta de mínimos cuadrados.*

26. En cada uno de los siguientes casos, calcula la imagen de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$

i) $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2 - y^2\}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x \ \ ((x, y) \in A)$

ii) $A = \{(x, y) : -1 \leq y \leq x \leq 1\}, \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x \ \ ((x, y) \in A).$

27. Prueba que el campo vectorial $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$f(x, y) = \left(\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{3}, \frac{y^2 + 1}{3} \right) \qquad \left((x, y) \in \mathbb{R}^2 \right)$$

tiene al menos un punto fijo.