Daniel Monjas Miguélez
2°DGIIM

Geometría III

Relación 4

1.) Dar un ejemplo de dos rectas proyectivas en un espacio proyectivo de dimensión mayor o igual que tres que no se corten.

$P(E)$ con $\dim P(E) \geq 3$ sea $X, Y \subset P(E)$ dos rectas proyectivas con $\dim X = \dim Y = 1$

Tomamos dos vectores de $\mathbb{R}^4$, sean $(1,0,0,0)$ y $(0,1,0,0)$, donde claramente son linealmente independientes. y defino $\Pi_1 = L(\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)\})$ y

de igual manera para $\Pi_2 = L(\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\})$, donde el único punto en común de Π_1 y Π_2 y $(0,0,0,0)$, como $\pi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^3$

Sea $\pi(\Pi_1) = X$ y $\pi(\Pi_2) = Y$ con $X \cap Y = \emptyset$, pues el único punto común es $(0,0,0,0)$, como $\pi : \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^3$ y

$(1,0,0,0) \neq (0,0,\lambda,0) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ (análogo para $(0,0,0,\lambda)$ y $(0,1,0,0)$)

se tiene que $X \cap Y \neq \emptyset$ y como $\dim \hat{X} = \dim \hat{Y} = 2 \Rightarrow \dim X = \dim Y = 1$

luego obteniendo lo pedido

Daniel Monjas Miguélez 2º DGIIM

2) Calcular la ecuación de la recta proyectiva de $\mathbb{P}^2$ que pasa por los puntos $(0:1:0)$ y $(1:1:1)$

Tenemos que si $p=(0:1:0)$, $q=(1:1:1) \Rightarrow$ el conjunto $\pi^{-1}(\{p\})\cup\{0\}$ es una recta vectorial $L_p \subset E=\mathbb{R}^3$ y el conjunto $\pi^{-1}(\{q\})\cup\{0\}=L_q\subset\mathbb{R}^3$ es otra recta vectorial.

La recta que pasa por estos puntos es la variedad $V(\{p\}\cup\{q\})$. Los subespacios $\hat{X}, \hat{Y}$ son las rectas $L_p=L(\{(0,1,0)\})$ y $L_q=(\{(1,1,1)\})$ respectivamente. $V(\widehat{X\cup Y})=\hat{X}+\hat{Y}$, tenemos que las ecuaciones de $V(X\cup Y)$ son las ecuaciones implícitas del plano que pase por $(0,1,0),(1,1,1)$.

Luego

$$0=\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & X_0 \\ 1 & 1 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \end{pmatrix} = 0+X_0-X_2=0$$

3.) Calcular las ecuaciones de la recta proyectiva de $\mathbb{P}^3$ que pasa por los puntos ~~(0:1:0) y (1:1:1:0)~~ $(0:1:0:1)$ y $(1:1:1:0)$

Si $p=(0:1:0:1)$ y $q=(1:1:1:0)$. Los puntos $X=\{p\}$ y $Y=\{q\}$ son variedades proyectivas de dimensión 0, y la recta que pasa por ellos es $V(X\cup Y)$. $\hat{X},\hat{Y}$ son las rectas vectoriales $L(\{(0,1,0,1)\})$ y $L(\{(1,1,1,0)\})$ respectivamente. Como $V(\widehat{X\cup Y})=\hat{X}+\hat{Y}$, tenemos que las ecuaciones implícitas $V(X\cup Y)$ son las ecuaciones implícitas del plano de $\mathbb{R}^4$ que pasa por $(0,1,0,1)$ y $(1,1,1,0)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & X_0 \\ 1 & 1 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \\ 1 & 0 & X_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & X_0 \\ 1 & 1 & X_1 \\ 0 & 1 & X_2 \end{pmatrix} = X_0-X_2=0 \\ \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & X_0 \\ 1 & 1 & X_1 \\ 1 & 0 & X_3 \end{pmatrix} = X_1-X_0-X_3=0 \end{array}\right. \quad \left.\begin{array}{l} X_0-X_1=0 \\ X_1-X_0-X_3=0 \end{array}\right\}$$

son las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por $(0:1:0:1)$ y $(1:1:1:0)$

4) Consideremos la variedad proyectiva de $\mathbb{P}^3$ de ecuaciones:

$$x_0+x_1+x_2+x_3=0$$
$$-x_0-x_1+x_2+x_3=0$$

y la recta que pasa por los puntos $(1:-1:1:-1)$ y $(0:0:a:1)$. Calcular, en función de $a\in\mathbb{R}$, la intersección de ambas variedades proyectivas y la variedad suma:

Sean $X=\{p=(1:-1:1:-1)\}$ y $Y=\{q=(0:0:a:1)\}$, donde X e Y son variedades proyectivas de dimensión 0, y la recta que pasa por ambos puntos es $V(X\cup Y)$. Los subespacios $\hat{X},\hat{Y}$ son las rectas vectoriales $L(\{(1,-1,1,-1)\})$ y $L(\{(0,0,a,1)\})$. Como $\widehat{V(X\cup Y)}=\hat{X}+\hat{Y}$, tenemos las ecuaciones implícitas de $V(X\cup Y)$ son las ecuaciones implícitas del plano de $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ -1 & 0 & x_1 \\ 1 & a & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \det\begin{pmatrix} -1 & 0 & x_1 \\ 1 & a & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = -ax_3+x_1+ax_1+x_2=0 \\ \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_0 \\ 1 & a & x_2 \\ -1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} = ax_3+x_0+ax_0-x_2=0 \end{array} \right\} \text{ecuaciones implícitas } R$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0+x_1+x_2+x_3=0 \\ -x_0-x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1(a+1)+x_2-ax_3=0 \\ x_0(1+a)-x_2+ax_3=0 \end{array}\right\} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & 1 & -a \\ 1+a & 0 & -1 & a \end{pmatrix} = 4a^2+8a+4=0 \iff$$

$$a=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot4\cdot4}}{8}=-1$$ si $a=-1$ este sistema no es compatible determinado,

$$\left.\begin{array}{l} x_0=-x_1-x_2-x_3 \Rightarrow x_0=-x_1 \Rightarrow x_0=-x_3 \\ \cancel{x_1}+x_2+x_3-\cancel{x_1}+x_2+x_3=2x_2+2x_3 \Rightarrow x_2=-x_3 \\ x_1(a+1)-(1+a)x_3=0 \Rightarrow x_1=x_3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \hat{X}\cap\hat{Y}=L(\{(-1,1,-1,1)\}) \\ \Rightarrow X\cap Y=(-1:1:-1:1) \text{ si } a\neq -1. \end{array}$$

Daniel Monjas Miguélez
2º DGIIM

si $a = -1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\right\} \quad x_0 = -x_1 - x_2 - x_3 \Rightarrow x_0 = -x_1$$

$$\cancel{x_1} + x_2 + x_3 \cancel{-x_1} + x_2 + x_3 = 2x_2 + 2x_3 \Rightarrow x_2 = -x_3$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{array}$$

Luego $\hat{X} \cap \hat{Y} = L(\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\}) \Rightarrow X \cap Y = V((-1:1:0:0) \cup (0:0:-1:1))$

Calculamos

$$\Pi = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array}\} = L(\{(-1,1,0,0),(0,0,-1,1)\})$$

si $a \neq -1$

$$\hat{\Pi} + \hat{R} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : (x,y,z,t) = u + w, \begin{array}{l} u \in \Pi \\ w \in R \end{array}\} = \widehat{V(X \cup Y)}$$

Como $\pi(\hat{\Pi}) = V((-1:1:0:0) \cup (0:0:-1:1))$ y $\pi(\hat{R}) = V((1:-1:1:-1) \cup (0:0:0:1))$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{-1} \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Como } a \neq -1 \ \dim \Pi + R = 3$$

$\Rightarrow \pi(\hat{\Pi} + \hat{R}) = V((-1:1:0:0) \cup (0:0:-1:1) \cup (0:0:a:1))$ tal que

$\dim \pi(\hat{\Pi} + \hat{R}) = 3$

si $a = -1 \Rightarrow \hat{X} \cap \hat{Y} = \hat{\Pi} \Rightarrow \pi = V((-1,1,0,0),(0,0,-1,1))$

5.) Calcula las ecuaciones de todas las proyectividades $f:\mathbb{P}^2\to\mathbb{P}^2$ tales que $f((1:1:0))=(0:1:1)$, $f((0:1:1))=(1:0:1)$ y $f((1:0:1))=(1:1:0)$.

En primer lugar buscamos la expresión analítica de f

Sea $B=\{(1:0:0),(0:1:0),(0:0:1)\}$

$B'=\{(1:1:0),(0:1:1),(1:0:1)\}$

$M(f,B)=M(I,B',B)\cdot M(f,B')\cdot M(Id,B,B')$

$$M(Id,B',B)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow M(Id,B,B')=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$M(f,B')=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$M(f,B)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=M(f,B)$$

Luego $f(x:y:z)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$ son las ecuaciones de esta proyectividad

Si añadimos un $\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\Rightarrow f(x:y:z)=\lambda\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda z\\\lambda x\\\lambda y\end{pmatrix}$

Como $u\sim v\iff\exists\lambda\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ $u=\lambda v$ tenemos que si $f(1:1:0)=(0:\lambda:\lambda)=(0:1:1)$ con $\lambda\neq0$ pues pertenecen a la misma clase de equivalencia

Daniel Vargas Miguélez 2°DG11H

7.) Dados dos puntos distintos p y q de un espacio proyectivo $P(E)$, demostrar que existe una única recta proyectiva de $P(E)$ que pasa por ambos.

Existencia $\Rightarrow$ Sea B una base de $P(E)$, las coordenadas homogeneas de p asociadas a B son las coordenadas de cualquier vector en $L_p \setminus \{0\}$ (analogo para q). Se tiene que $V(\{p\} \cup \{q\})$ es la recta proyectiva de $P(E)$ que pasa por ambos, y $\pi^{-1}(V(\{p\} \cup \{q\})) \cup \{0\}$ es en E el plano generado por L_p y L_q. Como $L_p \neq L_q$ el plano vectorial generado por L_p y L_q existe $\Rightarrow$ existe la recta que une ambos puntos en $P(E)$

Unicidad $\Rightarrow$ Si existiesen dos o más rectas que unen p y q significa que

$\pi^{-1}(V(\{p\} \cup \{q\})) \cup \{0\}$ da lugar a dos o más planos en E generados por L_p y L_q, lo cual es imposible, pues un plano vectorial viene unívocamente generado por dos rectas, luego si $\Pi_1, \ldots, \Pi_n$ vienen generados todos ellos por L_p y $L_q \Rightarrow \Pi_1 = \ldots = \Pi_n$.