TEMA 1: Variables aleatorias continuas

Contenidos

- Distribución Uniforme Continua.
- Distribución Normal.
- Distribución Gamma: Distribución Exponencial.
- Distribución de Erlang.
- Distribución Beta

Distribución Uniforme $X \sim \mathcal{U}(a, b)$

En este apartado se considera la distribución uniforme continua sobre un intervalo (a, b), caracterizada por tomar valores en dicho intervalo y tener una densidad de probabilidad constante. Más concretamente,

$$X \sim \mathcal{U}(a, b),\ a < b,\ \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}, \quad \forall x \in (a, b).$$

- *Función de Distribución* Para cualquier $x \in (a, b)$, se tiene

  $$F_X(x) = \int_a^x f_X(y)dy = \int_a^x \frac{1}{b-a}dy = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

  Para $x < a$, $F_X(x) = 0$ y para $x \geq b$, $F_X(x) = 1$, según se deriva de la definición de función de distribución de una variable aleatoria continua, de acuerdo a lo que se vio en el capítulo de Preliminares I.

- *Función de Generatriz de momentos (f.g.m)*

  $$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_a^b \frac{e^{tx}}{b-a}dx = \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

- *Momentos*
  - *No Centrados*

$$\begin{aligned} m_k &= E[X^k] = \int_a^b \frac{x^k}{b-a}dx = \left[\frac{x^{k+1}}{(k+1)(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{b^{k+1}}{(k+1)(b-a)} - \frac{a^{k+1}}{(k+1)(b-a)} = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}. \end{aligned}$$

  - *Centrados*

$$\begin{aligned} \mu_k &= E[(X-m_1)^k] = \int_a^b \frac{(x-m_1)^k}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{(k+1)(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^{k+1} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad k \in \mathbb{N} \text{ impar} \\ \frac{(b-a)^k}{2^k(k+1)} & k \in \mathbb{N} \text{ par} \end{cases} \end{aligned}$$

- *Resultado sobre* $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Para cualquier variable aleatoria X continua con función de distribución F_X, la variable $Y = F_X(X)$ tiene distribución $\mathcal{U}(0,1)$, i.e., $F_X(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$.

Distribución Normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $\mu \in \mathbb{R},\ \sigma^2 \in \mathbb{R}_+$

Se dice que una variable aleatoria (v.a.) continua X se distribuye según una normal de parámetros μ y σ^2 si su función de dennsidad f_X viene dada por la siguiente expresión:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \tag{3}$$

Resultados

Proposición 1 *(i)* $X \sim \mathcal{N}(0,1) \ \Leftrightarrow\ M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{t^2}{2}}$.
(ii) $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \ \Leftrightarrow\ M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

Demostración (i) Sea $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned} M_X(t) = E[e^{tX}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(tx - \frac{x^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) dx = \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \end{aligned} \quad (4)$$

dado que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) dx = 1,$$

puesto que $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right)$ es la densidad de probabilidad de una v.a. $X \sim \mathcal{N}(t,1)$.
(ii) Dado que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$, es decir, se tiene la siguiente igualdad en distribución

$$X \underset{d}{=} \sigma Z + \mu,$$

se obtiene entonces a partir del apartado (i),

$$\begin{aligned} M_X(t) = E[e^{tX}] &= E[e^{t(\sigma Z + \mu)}] = e^{t\mu} E[e^{(t\sigma) Z)}] \\ &= e^{t\mu} M_Z(t\sigma) = e^{t\mu} e^{(t\sigma)^2/2} = e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}} \end{aligned} \quad (5)$$

Teorema 1 ***(De Moivre-Laplace de convergencia de la distribución binomial a la normal)*** *Sea $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, la siguiente convergencia en distribución, cuando el número de pruebas independientes de Bernoulli tiende a infinito, es satisfecha*

$$Z_n = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \Rightarrow F_{Z_n}(z) \to F_Z(z), \quad n \to \infty, \quad \forall z \in \mathbb{R},\ Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Demostración Su demostración se verá en el Tema 6.

APLICACIÓN: Aproximación de probabilidades binomiales (con corrección por continuidad) $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n > 10$, $np > 5$, $n(1-p) > 5$ y $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

- $F_X(k) = P(X \leq k) = P(X \leq k + 1/2) \simeq F_Z\left(\frac{k+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$, $k = 0, \ldots, n-1$, siendo $F_X(n) = 1$.

- La función masa de probabilidad se puede aproximar igualmente, considerando su expresión en términos de la función de distribución como sigue:

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X \leq 0) = F_X(0) \simeq F_Z\left(\frac{1/2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\
P(X=k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1) \\
&\simeq F_Z\left(\frac{k+1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - F_Z\left(\frac{k-1/2-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right), \quad k = 1, \ldots, n.
\end{aligned}
$$

Como aplicación del Teorem límite de Lévy (que se derivará en el Tema 6 del programa de esta asignatura), aplicando la propiedad de aditividad del modelo de Poisson, se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2 ***(sobre convergencia de la distribución de Poisson a la normal)***

$$
X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad Z_\lambda = \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow F_{Z_\lambda}(z) \to F_Z(z),\ \lambda \to \infty,\ \forall z \in \mathbb{R},\ Z \sim \mathcal{N}(0,1).
$$

APLICACIÓN. Aproximación mediante la distribución normal de las probabilidades de una v.a. de Poisson

$$
X \sim \mathcal{P}(\lambda), \quad \lambda > 10, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X \leq 0) = F_X(0) \simeq F_Z\left(\frac{1/2 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) \\
P(X=k) &= P(X \leq k) - P(X \leq k-1) = F_X(k) - F_X(k-1) \\
&\simeq F_Z\left(\frac{k+1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right) - F_Z\left(\frac{k-1/2-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right), \quad k \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Distribución Exponencial $X \sim \exp(\lambda), \lambda > 0$

$$X \sim \exp(\lambda) \Leftrightarrow f_X(x) = \lambda \exp(-\lambda x), \ \forall x \geq 0.$$

X puede representar el tiempo aleatorio entre dos fallos consecutivos en *Fiabilidad* o bien, entre dos llegadas o salidas en *Teoría de Colas*. También representa un tiempo aleatorio en *Análisis de Supervivencia*. En general, X suele representar un tiempo aleatorio transcurrido entre dos sucesos, que se producen de forma aleatoria y consecutiva en el tiempo. Dichos sucesos se contabilizan mediante un proceso de Poisson homogéneo. El parámetro λ representa la razón de ocurrencia de dichos sucesos, que en este caso es constante.

- *Función de Distribución*

$$F_X(x) = \int_0^x \lambda \exp(-\lambda x) dx = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0.$$

- *Función Generatriz de Momentos*

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E[e^{tX}] = \int_0^\infty \lambda \exp(x(t-\lambda)) dx = \left[\frac{\lambda \exp(x(t-\lambda))}{t-\lambda} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= -\frac{\lambda}{t-\lambda} = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-1}, \quad t < \lambda. \end{aligned} \tag{6}$$

- *Momentos*

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \frac{k!}{\lambda^k}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \\ E[X] &= \frac{1}{\lambda} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned}$$

- **Relación con la distribción de Poisson**
  - $Y \sim \mathcal{P}(\lambda t)$, Y indica el número de sucesos aleatorios ocurridos en un intervalo de longitud t, cuando su razón de ocurrencia es λ.
  - $X \sim \exp(\lambda)$, X indica el tiempo aleatorio transcurrido hasta la ocurrencia del primer suceso aleatorio, o bien, entre la ocurrencia de dos sucesos aleatorios consecutivos, cuando su razón de ocurrencia es constante (i.e., cuando dichos sucesos ocurren en un intervalo de longitud t según una v.a. $Y \sim \mathcal{P}(\lambda t)$). Por tanto,

$$P(Y = 0) = e^{-\lambda t} = P(X > t) = 1 - F_X(t) = 1 - 1 + e^{-\lambda t}$$

– *La exponencial es la única distribución continua que verifica la propiedad de 'falta de memoria'*, i.e.,

$$P(X > t + s/X > s) = P(X > t) \quad \forall s, t > 0.$$

- *Distribución de Erlang.* Indica el tiempo aleatorio transcurrido hasta la ocurrencia del n-ésimo suceso aleatorio, i.e., $X_i \sim \exp(\lambda),\ i = 1, \ldots, n,$ mutuamente independientes,

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = E \sim \mathcal{E}(n, \lambda).$$

  Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, y $\lambda > 0$, la densidad de probabilidad f_X de la v.a. E se define como sigue

$$f_E(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} \exp(-\lambda x), \quad \Gamma(n) = (n-1)! \quad x \in \mathbb{R}_+$$

- *Función Generatriz de Momentos*

$$M_{\mathcal{E}}(t) = \left[\left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)\right]^{-n}, \quad t < \lambda.$$

Distribución Gamma $X \sim \Gamma(u, \lambda)$

Es una extensión de la distribución de Erlang, definida cuando el parámetro n no es un número natural sino que es un número real. Es decir, se obtiene ampliando el espacio paramétrico de la distribución de Erlang.

$$X \sim \Gamma(u, \lambda),\ u, \lambda \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow f_X(x) = \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} x^{u-1} \exp(-\lambda x).$$

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} \exp(-x) dx, \quad u > 0. \tag{7}$$

- *Función Generatriz de Momentos*

$$M_{\mathcal{E}}(t) = \left[\left(1 - \frac{t}{\lambda} \right) \right]^{-u}, \quad t < \lambda.$$

- *Momentos*

$$\begin{aligned} E[X^k] &= \frac{\lambda^u}{\Gamma(u)} \int_0^\infty x^{k+u-1} \exp(-\lambda x) dx \\ &= \frac{\Gamma(u+k)}{\lambda^k \Gamma(u)}, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

$$E[X] = \frac{u}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = E\left[X - \frac{u}{\lambda}\right]^2 = \frac{u}{\lambda^2}$$

- *Propiedades de la función* Γ
  - $\Gamma(1) = 1$
  - $\Gamma(u+1) = u\Gamma(u), \quad u > 0$
  - $\Gamma(u+k) = (u+k-1)(u+k-2)\ldots(u+1)u\Gamma(u), \quad k \in \mathbb{N},\ u > 0$
  - $\Gamma(k) = (k-1)!, \quad k \in \mathbb{N}$
  - $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$
  - Puesto que $\lambda > 0$, a partir de la definición (**??**) de la función Γ, considerabdo el cambio de variable $y = \lambda x$, se obtiene

$$\int_0^\infty x^{u-1} \exp(-\lambda x) dx = \frac{\Gamma(u)}{\lambda^u}, \quad u > 0$$

Distribución Beta

$$X \sim \beta(p,q) \;\Leftrightarrow\; f_X(x) = \frac{1}{\beta(p,q)} x^{p-1}(1-x)^{q-1}, \quad x \in (0,1), \quad p,q > 0$$

$$\beta(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q > 0$$

- $p = q = 1 \Rightarrow X \sim \mathcal{U}(0,1)$
- *Momentos*

$$\begin{aligned}
E[X^k] &= \frac{1}{\beta(p,q)} \int_0^1 x^k x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \\
&= \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+k)} \\
&= \frac{\Gamma(p+q)\Gamma(p+k)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+k)} \\
E[X] &= \frac{p}{p+q} \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)}
\end{aligned}$$

- *Simetría* $X \sim \beta(p,q) \Leftrightarrow 1 - X \sim \beta(q,p)$