3.5. El espacio dual

El espacio dual es un caso particular del espacio de todas las aplicaciones lineales entre dos e.v. prefijados $\mathrm{Lin}(V,V')$ para el cual V' es el cuerpo $K(K)$ sobre el que está definido V. Por tanto, podremos aplicar a él todo lo que sabemos sobre $\mathrm{Lin}(V,V')$.

Restringiremos nuestro estudio al caso finitamente generado. Así, en adelante, $V(K)$ será un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3.5.1. Concepto de espacio dual y forma lineal

Definición 3.67. *Dado un e.v. $V(K)$, su* espacio dual *es el espacio*

$$V^*(K) := \mathrm{Lin}(V,K) = \{\phi : V \to K : \ \phi \textit{ lineal}\}.$$

A cada elemento del dual $\phi \in V^*(K)$ se le llamará forma lineal de V.

De la propia definición se sigue inmediatamente:

Corolario 3.68. *Dado un e.v. V de dimensión n, el espacio dual $V^*(K)$, dotado de sus operaciones naturales, es un espacio vectorial de la misma dimensión n.*

Demostración. Basta con particularizar las propiedades generales de $\mathrm{Lin}(V,V')$ para concluir que $V^* = \mathrm{Lin}(V,\mathbb{R})$ es un e.v., cuya dimensión resulta ser: $\dim V \cdot \dim K = n \cdot 1 = n$. ∎

Si fijamos una base ordenada $\mathcal{B} = (v_1,\ldots,v_n)$ de $V(K)$ y tomamos $\{1\}$ como elección estándar de una base en $K(K)$ entonces para cada $\phi \in V^*(K)$ podemos calcular la matriz de la aplicación ϕ expresada en dichas bases $M(\phi,\{1\} \leftarrow \mathcal{B})$, la cual resulta ser igual a $(\phi(v_1)\ldots\phi(v_n))$. De esta forma, si $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in V$ entonces

$$\phi(v) = \sum_{i=1}^n \phi(v_i)a_i = (\phi(v_1)\ldots\phi(v_n)) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= M(\phi,\{1\} \leftarrow \mathcal{B}) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K.$$

Ejercicio 3.69. *Demostrar que toda forma lineal $\phi \in (K^n)^*(K)$ se escribe como $\phi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i1}^n b_i x_i$ para ciertos $b_1,\ldots,b_n \in K$.*

Observación 3.70. Por el ejercicio anterior, el núcleo de una forma lineal $\phi \in (K^n)^*(K)$ es el conjunto de soluciones del sistema líneal homogéneo:

$$b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0,$$

cuyas soluciones, siempre que ϕ no sea la forma lineal nula, constituyen un subespacio vectorial de dimensión $n-1$. Estas propiedades se generalizan automáticamente a cualquier espacio vectorial V, sin más que fijar una base ordenada y calcular $M(\phi,\{1\} \leftarrow \mathcal{B})$.

La importancia del núcleo para las formas lineales se pone de manifesto a continuación.

Proposición 3.71. *Sea* $\phi \in V^*(K)$*:*

(a) Si ϕ *no es la forma lineal nula entonces* $Nuc(\phi)$ *es un hiperplano vectorial, por lo que* $dim_K Nuc(\phi) = n-1$.

(b) Si $H \subset V$ *es un hiperplano vectorial, existe un forma lineal* ϕ *tal que* $Nuc(\phi) = H$.

(c) Dos formas lineales no nulas ϕ, ψ *son proporcionales (esto es,* $\psi = a\phi$ *para algún* $a \in K \setminus \{0\}$*) si y sólo si sus núcleos coinciden.*

Demostración. (a) Por el teorema del rango, $\dim_K \mathrm{Nuc}(\phi) = n - \dim_K \mathrm{Im}(\phi)$. Como $\mathrm{Im}(\phi) \subset K$ y ϕ no es la forma lineal nula, $\mathrm{Im}(\phi) = K$, de donde $\dim_K \mathrm{Im}(\phi) = 1$ y se sigue el resultado (una demostración alternativa se sigue de la observación 3.70).

(b) Sea $\mathcal{B}_H = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ una base de H y sea $v_n \in V$ cualquier vector que amplía $\mathcal{B}_H$ a una base $\mathcal{B}$ de V (esto es, $v_n \notin H$). La única forma lineal $\phi : V \to K$ tal que

$$\phi(v_1) = \cdots = \phi(v_{n-1}) = 0, \qquad \phi(v_n) = 1$$

satisface claramente $H \subset \mathrm{Nuc}(\phi) \subsetneq V$. Así, las dimensiones de H y $\mathrm{Nuc}(\phi)$ coinciden y $H = \mathrm{Nuc}(\phi)$.

(c) Claramente, de $\psi = a\phi$ se sigue $\phi(v) = 0 \Rightarrow \psi(v) = 0$, esto es, $\mathrm{Nuc}(\phi) \subset \mathrm{Nuc}(\psi)$ y, como $a \neq 0$, también se verifica la inclusión contraria. Recíprocamente, llamemos H al núcleo común, $H = \mathrm{Nuc}(\phi) = \mathrm{Nuc}(\psi)$ y, como en el apartado anterior, construyamos una base $\mathcal{B}$ ampliando una $\mathcal{B}_H$ de H. Se tiene entonces:

$$\begin{array}{ll} M(\phi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) = (0, \ldots, 0, \phi(v_n)), & \qquad \phi(v_n) \neq 0 \\ M(\psi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) = (0, \ldots, 0, \psi(v_n)), & \qquad \psi(v_n) \neq 0 \end{array}$$

por lo que basta con tomar $a = \psi(v_n) \cdot \phi(v_n)^{-1}$. ∎

Ejercicio 3.72. *(1) Si* $\phi, \psi \in V^*$*, demostrar:* $\psi = a\phi$ *para algún* $a \in K$ *si y sólo si* $Nuc(\phi) \subset Nuc(\psi)$.

(2) Demostrar que las aplicaciones $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \phi(x,y) = 2x + y, \psi(x,y) = x - 2y$ *son formas lineales independientes. Representar gráficamente los núcleos de* $\phi, \psi, 2\phi$ *y* $\phi + \psi$ *así como las preimágenes de* $1 \in \mathbb{R}$ *para cada una de esas formas lineales.*

3.5.2. Base dual y teorema de reflexividad

Consideremos los espacios vectoriales $V(K)$, $V^*(K)$ y fijemos una base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de $V(K)$.

Teorema 3.73. *Existe una única base* $\mathcal{B}^* = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ *de* $V^*(K)$ *que verifica*

$$\phi^i(v_j) = \delta^i_j \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \textit{(donde } \delta^i_j \textit{es la delta de Kronecker).} \tag{3.4}$$

A esta base $\mathcal{B}^*$ *se le llamará* base dual *de la base* $\mathcal{B}$.

Demostración. Mediante el procedimiento de extensión lineal (teorema 3.8) se sigue inmediatamente que, para cada índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ las relaciones (3.4) definen unívocamente una forma lineal. Por tanto, basta con demostrar que el conjunto $\mathcal{B}^*$ es linealmente independiente (recuérdese que $\dim_K V = n$). Sean $a_1, \ldots, a_n \in K$ tales que:

$$a_1\phi^1 + \cdots + a_n\phi^n = 0$$

donde el 0 a la derecha debe entenderse como la forma lineal nula ($0(v) = 0, \forall v \in V$). Aplicando ambos miembros de la igualdad a cada vector de la base v_j se obtiene

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi^i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta^i_j = a_j$$

como se quería. ∎

Corolario 3.74. *Si $v \in V$ verifica $\phi(v) = 0$ para todo $\phi \in V^*$ entonces $v = 0$.*

Demostración. Si $v \neq 0$ se puede ampliar una base $\mathcal{B} = (v = v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de V, y el primer elemento ϕ^1 de $\mathcal{B}^*$ verifica $\phi^1(v) = 1 \neq 0$. ∎

Observación 3.75. Para los elementos de la base dual se tiene

$$\begin{array}{rcl} M(\phi^1, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) & = & (1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots & & \vdots \\ M(\phi^n, \{1\} \leftarrow \mathcal{B}) & = & (0, 0, \ldots, 1). \end{array}$$

Esto es, la base dual coincide con la base $B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ obtenida en general para $\mathrm{Lin}(V, V')$ en el teorema 3.47 para $V' = \mathbb{R}$, $B' = \{1\}$. De hecho, como en el caso de $\mathrm{Lin}(V, V')$, se tiene para cualquier forma lineal ϕ que $M(\phi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B})$ coincide con las coordenadas (escritas por filas) de ϕ en la base $\mathcal{B}^*$.

Esta última observación justifica el siguiente convenio.

Convenio. Usaremos la notación $M(\phi, \mathcal{B}) := M(\phi, \{1\} \leftarrow \mathcal{B})$, y abusaremos del lenguaje llamando a esta matriz (tipo fila) *coordenadas de ϕ en $\mathcal{B}$* (en lugar de coordenadas de ϕ en $\mathcal{B}^*$, que propiamente es una matriz columna). Por este motivo, también denotaremos $\phi_{\mathcal{B}} = M(\phi, \mathcal{B})$; esto es, $\phi_{\mathcal{B}} = (\phi_{\mathcal{B}^*})^t$.

Observación 3.76. Fijada la base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ y su base dual $\mathcal{B}^* = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ se verifica $\phi^j(v) = \phi^j(\sum_{i=1}^n a^i v_i) = \sum_{i=1}^n a^i \phi^j(v_i) = \sum_{i=1}^n a^i \delta^j_i = a^j$. Esto es,

$$v = \phi^1(v)v_1 + \cdots + \phi^n(v)v_n = \sum_{i=1}^{n} \phi^i(v)v_i, \quad \forall v \in V.$$

Análogamente, si $\phi \in V^*$ y $\phi = \sum_{i=1}^n b_i \phi^i$ entonces $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^n b_i \delta^i_j = b_j$. Esto es,

$$\phi = \phi(v_1)\phi^1 + \cdots + \phi(v_n)\phi^n = \sum_{i=1}^{n} \phi(v_i)\phi^i, \quad \forall \phi \in V^*. \tag{3.5}$$

Convenio. Los siguientes convenios sobre las posiciones de índices (que se seguirán en adelante) resultan imprescindibles para el estudio sistemático y uso práctico de tensores. El lector sólo interesado en el espacio dual puede o no seguirlos.

Los índices de los vectores de la base $\mathcal{B}$ se escribirán como subíndices $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ mientras que las coordenadas de un vector v en la base $\mathcal{B}$ se escribirán como superíndices $(a^1, \ldots, a^n)$ de modo que se tiene: $v = \sum_i a^i v_i$.

Los índices de las formas de la base $\mathcal{B}^*$ se escribirán como superíndices $\mathcal{B} = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ mientras que las coordenadas de una forma ϕ en la base $\mathcal{B}^*$ se escribirán como subíndices $(b_1, \ldots, b_n)$ de modo que se tiene: $\phi = \sum_i b_i \phi^i$.

Las matrices de cambio de base que se estudiarán a continuación serán consistentes con este convenio, levantando cuando sea preciso el índice de fila (para el cambio en V) o el de la columna (para el cambio en V^*); esta notación será también consistente con el convenio que se seguirá para aplicaciones lineales y trasposición, tomando esas aplicaciones como la identidad.

Cambio de base en el dual

Sean $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$, $\overline{\mathcal{B}} = (\bar{v}_1,\dots,\bar{v}_n)$ dos bases de $V(K)$ y $\mathcal{B}^* = (\phi^1,\dots,\phi^n)$, $\overline{\mathcal{B}}^* = (\overline{\phi}^1,\dots,\overline{\phi}^n)$ sus respectivas bases duales. Supongamos que

$$\bar{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j v_i, \qquad \forall j \in \{1,\dots,n\} \tag{3.6}$$

es decir,

$$M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \overline{\mathcal{B}}) = (a^i{}_j)_{i,j} = \begin{pmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a^n{}_1 & \dots & a^n{}_n \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Entonces, si $v \in V$ y $v = \sum_{i=1}^n a^i v_i = \sum_{j=1}^n \bar{a}^j \bar{v}_j$ se tiene $a^i = \sum_{i=1}^n a^i{}_j \bar{a}^j$. Esto es,

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \overline{\mathcal{B}}) \cdot \begin{pmatrix} \bar{a}^1 \\ \vdots \\ \bar{a}^n \end{pmatrix}.$$

Proposición 3.77. *Con la notación anterior:*

$$M(I_{V^*},\overline{\mathcal{B}}^* \leftarrow \mathcal{B}^*) = M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \overline{\mathcal{B}})^t. \tag{3.8}$$

Demostración. Escribimos ahora $\phi^k = \sum_{j=1}^n b_j^k \bar{\phi}^j$ donde los elementos de la matriz (b_j^k) serán los de la matriz $M(Id,,\overline{\mathcal{B}}^* \leftarrow \mathcal{B}^*)$ (el índice superior es ahora el segundo, por lo que indicará columna y no fila). Así, (3.8) se sigue de $b_j^k = \phi^k(\bar{v}_j) = a^k{}_j$ (la primera igualdad por (3.5)). ∎

Como consecuencia de (3.8), si $\phi = \sum_{i=1}^n b_i \phi^i = \sum_{j=1}^n \bar{b}_j \overline{\phi}^j$ se tiene

$$\bar{b}_j = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j b_i,$$

(o bien, directamente, $\bar{b}_j = \phi(\bar{v}_j) = \sum_{i=1}^n a^i{}_j \phi(v_i) = \sum_{i=1}^n a^i{}_j b_i$).

Ejercicio. Se consideran en $\mathbb{R}^3$ la base usual $\mathcal{B}_u$ y la base

$$\overline{\mathcal{B}} = ((0,1,1),(1,0,1),(-1,-1,0)).$$

Hallar las coordenadas de la forma lineal $\phi(x,y,z) = x + 2z$ en $\mathcal{B}_u^*$ y $\overline{\mathcal{B}}^*$, así como la matriz de cambio de base $M(I_{V^*},\mathcal{B}_u^* \leftarrow \overline{\mathcal{B}}^*)$.

Teorema de Reflexividad

Sean $V(K)$ y $V^*(K)$ un espacio vectorial y su dual, respectivamente. Podemos considerar el dual de $V^*(K)$, o *bidual* de $V(K)$: $V^{**}(K) = (V^*(K))^*$. Estos tres espacios vectoriales tienen igual dimensión y, por tanto, son isomorfos. Sin embargo, mientras que no existe ningún isomorfismo canónico general entre $V(K)$ y $V^*(K)$, sí podemos definir uno entre $V(K)$ y $V^{**}(K)$. Ello, en la práctica, equivale a considerar ambos espacios como iguales y a que no nos resulte necesario recurrir a espacios como el dual del bidual $V^{***}(K)$ (que sería naturalmente isomorfo al dual $V^*(K)$), etc.

Lema 3.78. *Fijado un vector $v \in V$ la aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi_v : V^* &\to K \\ \phi &\mapsto \phi(v) \end{aligned}$$

es lineal y, por tanto, pertenece al bidual $V^{**}(K)$.

Demostración. Aplicando la definición de Φ_v,

$$\Phi_v(a\phi + b\psi) = (a\phi + b\psi)(v) = a\phi(v) + b\psi(v) = a\Phi_v(\phi) + b\Phi_v(\psi)$$

para todo $\phi, \psi \in V^*$ y para todo $a, b \in K$. ∎

Teorema 3.79. *(de Reflexividad). La aplicación*

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to V^{**} \\ v &\mapsto \Phi_v \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Por el lema anterior, la aplicación Φ está definida consistentemente. Para demostrar que es lineal, debemos comprobar que $\Phi_{av+bw} (= \Phi(av+bw))$ es igual a $a\Phi_v + b\Phi_w (= a\Phi(v) + b\Phi(w))$ para todo $v, w \in V$, $a, b \in K$. Para ello, aplicamos ambos a una forma lineal genérica $\phi \in V^*$:

$$\begin{aligned} \Phi_{av+bw}(\phi) = &\quad \phi(av+bw) = a\phi(v) + b\phi(w) \\ (a\Phi_v + b\Phi_w)(\phi) = &\quad a\Phi_v(\phi) + b\Phi_w(\phi) = a\phi(v) + b\phi(w), \end{aligned}$$

comprobándose que son iguales. Para demostrar la biyectividad de Φ, basta con comprobar su inyectidad (al tener V y V^{**} la misma dimensión), esto es, $\mathrm{Nuc}(\Phi) = \{0\}$. Sea $v \in V$ tal que Φ_v es la forma nula del bidual. Esto quiere decir $\Phi_v(\phi) = 0$, esto es, $\phi(v) = 0$, para todo $\phi \in V^*$, lo que implica que v es 0 (véase el corolario 3.74). ∎

Observación 3.80. El significado de este isomorfismo puede entenderse como sigue. Sean $\mathcal{B}$, $\overline{\mathcal{B}}$ dos bases de $V(K)$. Sabemos que existe un único isomorfismo $F : V \to V^*$ que, de manera ordenada, aplica $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}^*$ y, análogamente, un único isomorfismo $G : V^* \to V^{**}$ que aplica $\mathcal{B}^*$ en su base dual $\mathcal{B}^{**}$. De igual modo, con $\overline{\mathcal{B}}$ obtenemos isomorfismos $\overline{F} : V \to V^*$, $\overline{G} : V^* \to V^{**}$. En general, $F \neq \overline{F}$ y $G \neq \overline{G}$. Sin embargo, las composiciones $G \circ F, \overline{G} \circ \overline{F} : V \to V^{**}$ sí verifican $G \circ F = \overline{G} \circ \overline{F}$; de hecho, ambos coinciden con el isomorfismo que proporciona el Teorema de Reflexividad (compruébese como ejercicio).

Corolario 3.81. *Toda base $\mathcal{B}' = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$ de $V^*(K)$ es la base dual de una única base $\mathcal{B}$ de $V(K)$.*

Demostración. En efecto, dada la base del dual $\mathcal{B}'$, podemos tomar su base dual $\mathcal{B}'^* \subset V^{**}$, y escribir $\mathcal{B}'^* = (\Phi_{v_1}, \ldots, \Phi_{v_n})$ donde $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ es la base $\Phi^{-1}(\mathcal{B}'^*)$ de $V(K)$, proporcionada por el teorema de reflexividad. Se tiene entonces

$$\delta^i_j = \Phi_{v_j}(\phi^i) = \phi^i(v_j) \ , \qquad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

la primera igualdad por ser $\mathcal{B}'^*$ la base dual de $\mathcal{B}'$ y la segunda por la definición de Φ. En consecuencia, $\mathcal{B}'$ satisface la ecuación $\phi^i(v_j) = \delta^i_j$ que define la base dual de $\mathcal{B}$, esto es, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}'$. ∎

3.5.3. Anuladores

Como se comentó en la observación 3.70, el núcleo de una forma lineal siempre se puede ver como la solución de un sistema lineal homogéneo de una sola ecuación:

$$a_1 x^1 + \cdots + a_n x^n = 0.$$

En el caso de que tengamos un sistema de m ecuaciones, cada fila de su matriz $A = (a^i{}_j)$ proporciona una forma lineal ϕ^i que "anula" a todas las soluciones del sistema. En general, todo subespacio vectorial U puede verse de este modo cuando escribimos unas ecuaciones implícitas para él. Desarrollamos a continuación estas ideas.

Definición 3.82. *Dado cualquier subconjunto $S \subset V$, se define su* anulador *en V^* como*

$$an(S) = \{\phi \in V^* : \phi(v) = 0, \forall v \in S\}.$$

Proposición 3.83. *El anulador verifica las siguientes propiedades:*
(1) $an(S)$ es un subespacio vectorial de V^*.
(2) Si $S \subset S'$ entonces $an(S) \supset an(S')$.
(3) $an(S) = an(L(S))$
(4) $an(\{0\}) = V^*$; $an(V) = \{0\}$ (donde $0 \in V^*$ es la forma lineal nula).

Demostración. (1) Sean $\phi, \psi \in \mathrm{an}(S)$, $a, b \in K$. Entonces, para cualquier vector v de S:

$$(a\phi + b\psi)(v) = a\phi(v) + b\psi(v) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0,$$

esto es, $a\phi + b\psi \in \mathrm{an}(S)$
(2) Es inmediato (¡compruébese!).
(3) La inclusión $\supset$ es consecuencia del apartado anterior. Para la contraria, sea $\phi \in \mathrm{an}(S)$ y $w \in L(S)$, esto es, $v = \sum_{i=1}^m a_i v_i$ con $v_1, \ldots, v_m \in S$. Entonces,

$$\phi(v) = \phi(\sum_{i=1}^m a_i v_i) = \sum_{i=1}^m a_i \phi(v_i) = \sum_{i=1}^m a_i \cdot 0 = 0.$$

(4) Trivialmente, $\mathrm{an}(\{0\}) \subset V^*$, y la inclusión contraria se da porque $\phi(0) = 0$ para todo $\phi \in V^*$ (al ser ϕ una aplicación lineal).

Trivialmente, $\mathrm{an}(V) \supset \{0\}$, y la inclusión contraria equivale a decir que si $v \in V$ verifica $\phi(v) = 0$ para todo $\phi \in V$ entonces $v = 0$, lo que ya es conocido (corolario 3.74). ∎

Ejercicio 3.84. *Dado cualquier subconjunto $\tilde{S} \subset V^*$ definimos su anulador en V como*

$$an(\tilde{S}) = \{v \in V : \phi(v) = 0, \forall \phi \in \tilde{S}\} \quad (= \cap_{\phi\in\tilde{S}}\mathrm{Nuc}(\phi)).$$

(1) Enunciar propiedades para $an(\tilde{S})$ análogas a las vistas para $an(S)$ en la proposición anterior, comprobándolas de dos maneras: (a) directamente, y (b) aplicando el teorema de reflexividad.

(2) Comprobar que, en el caso finito, $\tilde{S} = \{\phi^1, \dots, \phi^m\}$, su anulador puede escribirse como la solución de un SEL homogéneo de m ecuaciones y n incógnitas (véase la observación 3.70).

(3) Demostrar que si $\tilde{S} \subset V^*$, su anulador en V, $an_V(\tilde{S})$ y su anulador en V^{**}, $an_{V^{**}}(S)$ están relacionados por el teorema de reflexividad, esto es, $\Phi(an_V(\tilde{S})) = an_{V^{**}}(\tilde{S})$.

Teorema 3.85. *Sea U un subespacio vectorial de $V(K)$ de dimensión m. Entonces:*

(1) $\dim_K(an(U)) = n - m$.

(2) Si Φ es el isomorfismo del teorema de reflexividad entonces $\Phi(U) = an(an(U))$, esto es, con la identificación natural de V y V^{**}, $U = an(an(U))$.

(3) Dado otro subespacio W, se tiene que $U = W$ si y sólo si $an(U) = an(W)$.

Demostración. (1) Sea $B = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ una base de todo $V(K)$ obtenida ampliando una $B_U = (v_1, \dots, v_m)$ de U. La base dual $B^* = (\phi^1, \dots, \phi^m, \phi^{m+1}, \dots, \phi^n)$ verifica $\{\phi^{m+1}, \dots, \phi^n\} \subset \mathrm{an}(U)$ trivialmente. Puesto que este conjunto es linealmente independiente y consta de $n-m$ elementos, basta con comprobar que es un sistema de generadores de $\mathrm{an}(U)$. Para ello, sea $\phi \in \mathrm{an}(U)$ y escribámoslo como combinación lineal de B^*:

$$\phi = b_1\phi^1 + \dots b_m\phi^m + b_{m+1}\phi^{m+1} + \dots + b_n\phi^n.$$

Como cada b_i verifica $b_i = \phi(v_i)$ y los primeros m vectores de B pertenecen a U (que está contenido en el núcleo de ϕ), se sigue $b_1 = \dots = b_m = 0$, como se quería demostrar.

(2) Como por el apartado anterior $\dim_K(\mathrm{an}(\mathrm{an}(U)) = n-$ $\dim_K(\mathrm{an}(U)) = \dim_K(U)$, la cual coincide con $\dim_K(\Phi(U))$, basta con demostrar la inclusión $\subset$, que es inmediata (para cada $u \in U$ y todo $\phi \in \mathrm{an}(U)$ se tiene $\Phi_u(\phi) = \phi(u) = 0$, esto es, $\Phi_u \in \mathrm{an}(\mathrm{an}\ (U))$ como se quería)

(3) La implicación hacia la derecha es trivial. Hacia la izquierda, de $\mathrm{an}(U) = \mathrm{an}(W)$ se sigue $\mathrm{an}(\mathrm{an}(U)) = \mathrm{an}(\mathrm{an}(W))$ y por el apartado anterior $U = W$. ∎

Observación 3.86. Desde el punto de vista teórico, el punto (1) del teorema anterior permite construir explícitamente una base del anulador de S:

Paso 1: se determina una base $B_S = \{v_1, \dots, v_m\}$ de $L(S)$.

Paso 2: se amplía hasta una base $B = (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$ de $V(K)$.

Paso 3: Se construye la base dual $B^* = (\phi^1, \dots, \phi^m, \phi^{m+1}, \dots, \phi^n)$.

Paso 4: $\{\phi^{m+1}, \dots, \phi^n\}$ es la base de $\mathrm{an}(S)$ que se buscaba.

Además, puede usarse que si se construyó la base B calculando sus coordenadas respecto a otra base prefijada B_0, esto es, si se conoce $M(I_V, B_0 \leftarrow B)$, entonces el Paso 4 se resuelve sin más que tener en cuenta $M(I_V, B_0 \leftarrow B)^t = M(I_{V^*}, B^* \leftarrow B_0^*)$, y calcular la inversa de esta última matriz.

No obstante, desde un punto de vista práctico, debe tenerse en cuenta lo siguiente. Siempre que se tenga un subespacio vectorial U determinado por unas ecuaciones implícitas (bien porque se esté trabajando en $K^n(K)$ o, con más generalidad, porque se haya prefijado una base B de V y se esté trabajando con coordenadas en esa base):

$$\begin{array}{cccc} a^1_1 x^1 + & \dots & + a^1_n x^n & = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^m_1 x^1 + & \dots & + a^m_n x^n & = 0 \end{array}$$

entonces la fila i-ésima puede verse como la ecuación del núcleo de la forma lineal ψ^i tal que

$$\psi^i_B = ({a^i}_1, \dots, {a^i}_n)$$

de modo que una base de $\mathrm{an}(U)$ es, directamente,[10] $\{\psi^1, \dots, \psi^m\}$.

Por otra parte, el punto (2) del teorema anterior asegura que, si $\{\psi^1, \dots, \psi^m\}$ genera el anulador de U, entonces U es el anulador de $\{\psi^1, \dots, \psi^m\}$.

Ejercicio 3.87. *Se consideran los siguientes subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$:*

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}, \qquad W = L(\{(1,1,1),(3,2,0)\}.$$

Calcular bases de $an(U)$, $an(W)$, $an(U+W)$ y $an(U\cap W)$.

Ejercicio 3.88. *Sean U,W dos subespacios vectoriales de $V(K)$. Demostrar:*

(1) an $(U+W)$ =$an(U)\cap$ $an(W)$,

(2) an $(U\cap W) = an(U)+$ $an(W)$.

Nota: *es posible demostrar el apartado (2) a partir del apartado (1) (tómense los anuladores de cada miembro de (2) y aplíquense (1) y el teorema de reflexividad).*

3.5.4. Trasposición de aplicaciones lineales

Sean $V(K)$, $V'(K)$ dos espacios vectoriales y $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre ellos. Para cada $\phi' \in V'^*(K)$ podemos definir la aplicación $\phi' \circ f : V \to K$. Como $\phi' \circ f$ es una composición de aplicaciones lineales se tiene que $\phi' \circ f$ es también lineal y, por tanto, $\phi' \circ f \in V^*(K)$.

Definición 3.89. *Dada una aplicación lineal $f : V \to V'$, su* aplicación traspuesta *f^t se define por:*

$$\begin{aligned} f^t : V'^* &\to V^* \\ \phi' &\mapsto f^t(\phi') := \phi' \circ f. \end{aligned}$$

Las propiedades de la trasposición se resumen en el siguiente resultado.

Proposición 3.90. *Sea $f : V \to V'$ lineales.*

(1) La aplicación traspuesta f^t es lineal.

(2) $I_V^t = I_{V^*}$, esto es, la traspuesta de la aplicación identidad en V es la identidad en V^*.

(3) Si V'' es otro e.v. y $h : V' \to V''$ es lineal entonces $(h\circ f)^t = f^t \circ h^t$.

(4) $(f+g)^t = f^t + g^t$ y $(a\cdot f)^t = a\cdot f^t$, para todo $g \in \mathrm{Lin}(V,V')$, $a \in K$. Más aún, la aplicación trasposición

$$\begin{aligned} t : \mathrm{Lin}(V,V') &\to \mathrm{Lin}(V'^*, V^*) \\ f &\mapsto f^t \end{aligned}$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales.

(5) Con la identificación natural de V con V^{**} y V' con V'^{**},

$$f = (f^t)^t \qquad \text{esto es} \qquad f = (\Phi')^{-1} \circ (f^t)^t \circ \Phi$$

donde $\Phi : V \to V^{**}$, $\Phi' : V' \to V'^{**}$ son los isomorfismos naturales por reflexividad.

[10] Por supuesto, si no estuviera garantizado que las ecuaciones son independientes, este conjunto de formas sería un sistema de generadores de $\mathrm{an}(U)$, del cual se podría extraer una base.

Demostración. (1) Veamos que, para todo $\phi', \psi' \in V'^*$ y $a, b \in K$ se tiene $f^t(a\cdot\phi' + b\cdot\psi') = a\cdot f^t(\phi') + b\cdot f^t(\psi')$. Como ambas expresiones pertenecen a V^*, comprobaremos que proporcionan el mismo resultado al aplicarlas a un $v \in V$ arbitrario:

$$\begin{aligned}
[f^t(a\cdot\phi' + b\cdot\psi')](v) &= (a\cdot\phi' + b\cdot\psi')(f(v)) = a\cdot\phi'(f(v)) + b\cdot\psi'(f(v)) \\
[a\cdot f^t(\phi') + b\cdot f^t(\psi')](v) &= a\cdot[f^t(\phi')](v) + b\cdot[f^t(\psi')](v) = a\cdot\phi'(f(v)) + b\cdot\psi'(f(v))
\end{aligned}$$

donde en la primera igualdad de la primera línea y la última de la segunda se usa la definición de la traspuesta.

(2) Para todo $\phi \in V^*$, $I_V^t(\phi) = \phi \circ I_V = \phi$.

(3) Como $(h\circ f)^t, f^t \circ h^t : V''^* \to V^*$ debemos comprobar que, para todo $\phi'' \in V''^*$ se tiene $(h\circ f)^t(\phi'') = f^t \circ h^t(\phi'')$. Ambas expresiones pertenecen a V^*, y es fácil comprobar que coinciden:

$$\begin{aligned}
(h\circ f)^t(\phi'') &= \phi'' \circ (h\circ f) \\
(f^t \circ h^t)(\phi'') &= f^t(h^t(\phi'')) = f^t(\phi'' \circ h^t) = (\phi'' \circ h)\circ f,
\end{aligned}$$

y la igualdad se sigue de la asociatividad de la composición.

(4) Para probar la linealidad basta con tomar también $b \in K$ y demostrar $(a\cdot f + b\cdot g)^t = a\cdot f^t + b\cdot g^t$. Como ambas se definen de $V'^* \to V^*$, debemos demostrar $(a\cdot f + b\cdot g)^t(\phi') = (a\cdot f^t + b\cdot g^t)(\phi')$ para $\phi' \in V'^*$:

$$\begin{aligned}
(a\cdot f + b\cdot g)^t(\phi') &= \phi' \circ (a\cdot f + b\cdot g) \\
(a\cdot f^t + b\cdot g^t)(\phi') &= a\cdot f^t(\phi') + b\cdot g^t(\phi') = a\cdot(\phi' \circ f) + b\cdot(\phi' \circ g)
\end{aligned}$$

y la igualdad de ambas expresiones se sigue de la linealidad de ϕ' (¡compruébese aplicándolas a un $v \in V$ arbitrario!).

Para demostrar que la aplicación trasposición es un isomorfismo, basta con comprobar que es inyectiva (al tener su dominio y codominio la misma dimensión), y para esto que su núcleo es 0, esto es, si $f^t = 0$ entonces $f = 0$. Ahora bien, si $f^t = 0$ se tiene $f^t(\phi') = \phi' \circ f = 0$ para todo $\phi' \in V'^*$. Así, para cada $v \in V$ se tiene $\phi(f(v)) = 0$ para todo $\phi \in V'^*$, por lo que $f(v) = 0$, como se quería.

(5) Debemos demostrar $\Phi' \circ f = (f^t)^t \circ \Phi$. Como ambas se definen $V \to V'^{**}$, debemos demostrar que $\Phi'_{f(v)} (= \Phi' \circ f(v))$ coincide con $(f^t)^t(\Phi_v) (= (f^t)^t \circ \Phi(v))$ para todo $v \in V$. Como ambos pertenecen a V'^{**}, debemos comprobar que coinciden al aplicarlo a un $\phi' \in V'^*$ arbitrario:

$$\begin{aligned}
\Phi'_{f(v)}(\phi') &= \phi'(f(v)) \\
[(f^t)^t(\Phi_v)](\phi') &= [\Phi_v \circ f^t](\phi') = \Phi_v[f^t(\phi')] = \Phi_v(\phi' \circ f) = (\phi' \circ f)(v),
\end{aligned}$$

esto es, la igualdad se cumple aplicando las definiciones de trasposición e isomorfismos Φ, Φ'. ∎

Para trabajar con bases, fijemos la siguiente notación. Tomamos bases $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_m)$ en V y V', resp., y sus correspondientes bases duales $\mathcal{B}^* = (\phi^1, \ldots, \phi^n)$, $\mathcal{B}'^* = (\phi'^1, \ldots, \phi'^m)$. Aunque no sea imprescindible, conviene subir uno de los índices de las matrices de las aplicaciones lineales, el de fila o el de columna según la aplicación sea entre V y V' o sus duales. Esto es:

• Al construir $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ subiremos (consistentemente con convenios anteriores) el primer índice (filas) para los elementos de esa matriz , esto es, escribiremos $f(v_j) = \sum_i a^i{}_j v'_i$. En consecuencia, para cada columna j, los $a^i{}_j$ son las coordenadas del vector $f(v_j)$ en la base $\mathcal{B}'$, con el correspondiente índice i arriba.

• Sin embargo, si $h^*: V^* \to V'^*$ es una aplicación lineal entre los correspondientes espacios duales, para los elementos de la matriz $M(h^*, \mathcal{B}'^* \leftarrow \mathcal{B}^*)$ subiremos el segundo índice (columnas), esto es, escribiremos $h^*(\phi^j) = \sum_i a_i{}^j \phi'^i$. En consecuencia, para cada columna j, los $a_i{}^j$ son las coordenadas de la forma $h^*(\phi^j)$ en la base $\mathcal{B}'^*$, con el correspondiente índice i abajo.

Proposición 3.91. *La matriz de la aplicación traspuesta f^t verifica:*

$$M(f^t, \mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}'^*) = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^t.$$

Demostración. (i) Si se denota por $a^i{}_j$ (resp. $b_i{}^j$) el elemento (i, j) de la matriz de f (resp. de f^t) se obtiene:

$$b_i{}^j = [f^t(\phi'^j)](v_i) = (\phi'^j \circ f)(v_i) = \phi'^j(f(v_i)) = \phi'^j(\sum_{l=1}^{n} a^l{}_i v'_l) = \sum_{l=1}^{n} a^l{}_i \phi'^j(v'_l) = a^j{}_i$$

(obsérvese que el índice de columna y el de fila a la izquierda coincide, resp. con el de fila y columna a la derecha). ∎

Observación 3.92. Tomando $f = I_V$, de este resultado se reobtiene la fórmula del cambio de base: $M(I_{V^*}, \mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}'^*) = M(I_V^t, \mathcal{B}^* \leftarrow \mathcal{B}'^*) = M(I_V, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^t$.

La proposición anterior permite afirmar que el rango de f coincide con el de su traspuesta, a partir de las propiedades ya conocidas del rango de matrices. No obstante, el siguiente resultado permite dar una demostración directa para aplicaciones lineales y, en consecuencia, deducir a partir de él que el rango de una matriz coincide con el de su traspuesta (compárese con el lema 2.169 y teorema 2.170 del tema anterior).

Teorema 3.93. *Para cualquier aplicación lineal $f: V \to V'$:*
(i) $an(Im\ f) = Nuc(f^t)$.
(ii) $rango(f) = rango(f^t)$.
En consecuencia, para cualquier matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ se tiene $rango(A) = rango(A^t)$.

Demostración. (i) Sea $\phi' \in V^*$, aplicando las definiciones:

$$\phi' \in \mathrm{an}(Imf) \quad \Leftrightarrow \quad \phi'(f(v)) = 0, \forall v \in V \quad \Leftrightarrow \quad \phi' \circ f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f^t(\phi') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \phi' \in \mathrm{Nuc} f^t$$

(ii) Aplicando el teorema del rango a f^t, el apartado anterior y que $\dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f)) = m - \dim(\mathrm{Im}(f))$:

$$\mathrm{rango}(f^t) := \dim(\mathrm{Im} f^t) = m - \dim(\mathrm{Nuc} f^t) = m - \dim(\mathrm{an}(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rango}(f).$$

Finalmente, para demostrar la última afirmación, dada A podemos hallar una aplicación lineal f cuya matriz asociada sea A (corolario 3.31) y el rango r de f coincidirá con el de A (proposición 3.36). Según se acaba de demostrar, r coincide con el rango de f^t y, como A^t es la matriz asociada a f^t en bases apropiadas (proposición 3.91), el rango de A^t coincide con r. ∎

Observación 3.94. Este último resultado muestra que se puede desarrollar toda la teoría de aplicaciones lineales independientemente de la de matrices. Una vez hecho esto, las propiedades de las matrices se deducen inmediatamente de las de las aplicaciones lineales.

Corolario 3.95. *$an(Nuc\ f) = Im(f^t)$.*

Demostración. Las siguientes dos demostraciones tienen interés propio.

Dem. 1 Aplicando el apartado (i) del teorema 3.93 anterior a f^t, se sigue an(Im f^t)=Nuc($(f^t)^t$). Tomando anuladores en ambos miembros se tiene an(an((Im f^t))=an(Nuc($(f^t)^t$)), y el resultado se sigue aplicando el teorema de reflexividad en V^*. □

Dem. 2 Para la inclusión ($\supset$), dado $\phi \in \mathrm{Im}(f^t)$, sea $\phi' \in V'^*$ tal que $\phi = f^t(\phi') = \phi' \circ f$. Claramente, esta composición se anula sobre $\mathrm{Nuc}(f)$ por lo que $\phi \in \mathrm{an}(\mathrm{Nuc}(f))$.

La inclusión ($\subset$) se obtiene directamente porque las dimensiones de ambos subespacios son iguales: dim(an(Nuc f))= dim(Im(f))= dim(Im(f^t)), la última igualdad por (ii) del teorema 3.93. □

Por completitud, incluimos también a continuación una demostración directa y constructiva de la inclusión ($\subset$).

Demostración alternativa de ($\subset$). Sea $\phi \in \mathrm{an}(\mathrm{Nuc} f)$, esto es, $\mathrm{Nuc}(f) \subset \mathrm{Nuc}(\phi)$. Podemos suponer $\phi \neq 0$ (pues el resultado sería trivial en este caso), con lo que $\mathrm{Nuc}(\phi)$ tiene dimensión $n-1$. Construyamos una base $B = (v_1, v_2, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_n)$ de V tomando primero una base de $\mathrm{Nuc}(f)$, que constituirá los últimos $n-r$ vectores de B, ampliándola a continuación a una base de $\mathrm{Nuc}(\phi)$, que constituirá los vectores de B a partir del segundo, y finalmente ampliando ésta a una base de V usando un vector v_1 (el cual, obviamente, no pertenecerá a $\mathrm{Nuc}(\phi)$) de modo que $\phi(v_1) = 1$. Necesariamente, $B'_{Imf} := \{f(v_1), \ldots, f(v_r)\} \subset V'$ es una base de $\mathrm{Im}(f)$, y podemos escoger una forma lineal ϕ' que cumpla: $\phi'(f(v_1)) = 1$ y ϕ' se anula sobre $f(v_2), \ldots, f(v_r)$ (por ejemplo, ϕ' se puede construir ampliando B'_{Imf} hasta una base ordenada B' de V y escogiendo el primer elemento de su dual B'^*). Se sigue entonces $\phi = f^t(\phi')$, pues al aplicar $f^t(\phi')$ sobre la base inicial B se obtiene:

$$\begin{cases} f^t(\phi')(v_1) = & \phi'(f(v_1)) = 1 \quad (= \phi(v_1)) & & \text{(por la elección de } \phi') \\ f^t(\phi')(v_k) = & \phi'(f(v_k)) = 0 \quad (= \phi(v_k)) & \forall k \in \{2, \ldots, r\} & \text{(por la elección de } \phi') \\ f^t(\phi')(v_k) = & \phi'(f(v_k)) = 0 \quad (= \phi(v_k)) & \forall k \in \{r+1, \ldots, n\} & \text{(porque } f(v_k) = 0) \end{cases}$$

En consecuencia, $\phi \in \mathrm{Im} f^t$, como se quería demostrar. ∎