Algebra I (Doble Grado Matemáticas-Informática)

Relación 3

Curso 2018-2019

1. Para cada una de las siguientes parejas de enteros (a,b), calcula el máximo común divisor $d = m.c.d(a,b)$ y enteros u,v que satisfagan la relación de Bezout, esto es, tales que $d = ua + vb$

$$\begin{array}{ll} a = -99\,, & b = 17, \\ a = 6643\,, & b = 2873, \\ a = -7655\,, & b = 1001 \\ a = 24230\,, & b = 586. \end{array}$$

2. Demuestra que para todo $n \in \mathbb{N}$:

a) $3^{2n} - 2^n$ es divisible por 7, b) $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ es divisible por 7,

c) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es divisible por 11, d) $3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible por 17.

3. Demostrar que si a y b son enteros primos relativos y n es un entero divisible por a y por b entonces lo es por ab.

4. Demuestra que si $3|a^2 + b^2$, entonces $3|a$ y $3|b$.

5. Demuestra que si $5|a^2 + b^2 + c^2$, entonces $5|a$ o $5|b$ o $5|c$.

6. Para n natural calcula: $m.c.d.(n,n^2)$, $m.c.d.(n,n+1)$ y $m.c.d.(n,n+2)$.

7. Resolver las ecuaciones diofánticas

$$60x + 36y = 12, \qquad 35x + 6y = 8, \qquad 12x + 18y = 11.$$

8. Se dispone de 4050 euros para gastar en bolígrafos de 10 euros y en plumas de 46 euros. Calcular cuantos bolígrafos y plumas se pueden comprar si se quiere el menor número posible de bolígrafos.

9. (Antiguo problema chino) Tres agricultores dividieron equitativamente el arroz que habían cultivado en común. Para venderlo fueron a mercados diferentes, donde se usaban diferentes medidas de peso, además todos ellos usaron carretas en las que podían transportar un máximo de 1000 libras. En el primer mercado la medida era de 11 libras, en el segundo de 14 y en el tercero de 15 libras. Cada agricultor vendió todo lo que pudo en medidas enteras y cuando volvieron al hogar, el primero llevaba 5 libras de arroz, el segundo 6 y el tercero 4. ¿Cuanto arroz habían cultivado entre los tres?

10. (Antiguo problema chino) Cuatro cuadrillas de albañiles emprenden la construcción de un dique, cada una se compromete a ejecutar el mismo número de jornadas de trabajo y todas ellas trabajarán al menos una jornada completa, siendo el número de jornadas completas de trabajo inferior a 1500. La primera de las cuadrillas consta de 2 hombres, la segunda de tres, la tercera de 7 y la cuarta de 25. Completando el trabajo en jornadas completas de cada cuadrilla, al final quedó un día de trabajo para un hombre de la primera cuadrilla, para dos de la segunda y para cinco de la tercera y cuarta. ¿Cuantos fueron los días de trabajo empleados en construir el dique?

11. Encontrar todas las soluciones del sistema de congruencias:

$$x \equiv 3(mod 5); x \equiv -2(mod 4); x \equiv 1(mod 7)$$

12. Calcular la menor capacidad posible de un depósito de agua sabiendo que a un depósito de doble capacidad le ha faltado un litro para poder ser llenado con garrafas de 5 litros, mientras que a uno de quíntuple capacidad tambi+n le ha faltado un litro tanto si se llenaba con garrafas de 7 litros como de 11 litros.

13. En la finca de Juan todos los años se consume la misma cantidad de fertilizante, que siempre viene en un camión de menos de 2 toneladas de capacidad. En los tres últimos años Juan ha utilizado, para envasar el fertilizante, sacos de 75, 56 y 143 kilogramos respectivamente. El primer año al envasar el fertilizante sobraron 21 Kg, el segundo 45 y el tercero 77. ¿Qué cantidad de fertilizante consume Juan anualmente? En la finca vecina de la de Juan se han utilizado, también en los últimos tres años, los mismos sacos que Juan y al envasar su fertilizante en estos sacos han sobrado las mismas cantidades que a Juan, sin embargo en esta finca se necesitan más de un camión para transportar su fertilizante. ¿Qué cantidad mínima de fertilizante se usa en la finca vecina de la de Juan?

14. Calcular el resto de dividir 279^{323} entre 17. Análogamente, si se divide 320^{207} entre 13.

15. Demostrar las reglas del 2,3,5 y 11 para la división.

16. Calcular las dos últimas cifras de $3^{3^{100}}$.

17. Discutir y resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\left.\begin{array}{rcrl} 3x & \equiv & -1 & (\text{mod} \quad 7) \\ x & \equiv & -2 & (\text{mod} \quad 5) \\ 5x & \equiv & 1 & (\text{mod} \quad 6) \end{array}\right\}$$

18. Sea $x = 12341^{56789}$. Sabiendo que al dividir x entre 4 da resto 1, y entre 25 da resto 11, calcula x mod 100.

19. Resolver, si es posible, la congruencia $43^{51}\, x \equiv 2 \pmod{36}$.

20. Decide razonadamente si $[5]^{10077}$ es una unidad de $\mathbb{Z}_{38808}$. Calcula su inverso en caso de que lo tenga.

21. Sea D un DFU y $a, b \in D$. Demostrar que si $ab \neq 0$ y $d \in D$ es un divisor de ab primo relativo con a, entonces d es un divisor de b.

22. Comprobar que los elementos $2, 3, 4+\sqrt{10}, 4-\sqrt{10}$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, pero no son primos. Deducir que $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ no es un DFU, exhibiendo un elemento con dos factorizaciones distintas como producto de irreducibles.

23. Decidir razonadamente si existen isomorfismos de anillos

$$\frac{\mathbb{Z}[i]}{\langle 1+i\rangle} \cong \mathbb{Z}_2, \qquad \frac{\mathbb{Z}[i]}{\langle i\rangle} \cong \mathbb{Z}.$$

24. En $\mathbb{Z}[i]$ se consideran $x = 1+3i, y = 3+4i$. Factorizar x e y como producto de irreducibles y calcular su máximo común divisor y su mínimo común múltiplo.

25. Resolver el siguiente sistema de congruencias en $\mathbb{Z}[i]$:

$$\begin{aligned} x &\equiv i \pmod{3}, \\ x &\equiv 2 \pmod{(2+i)}, \\ x &\equiv 1+i \pmod{(3+2i)}, \\ x &\equiv 3+2i \pmod{(4+i)}. \end{aligned}$$

26. Dar la solución general de la siguiente ecuación en $\mathbb{Z}[i]$:

$$4x + (3+3i)y = -1+5i.$$

27. Sea $I = \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}, a \equiv b \pmod{2}\}$. Demostrar que:

(a) I es un ideal de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$;

(b) I está generado por 2 y $1+\sqrt{-5}$;

(c) I es un ideal maximal;

(d) $I^2 \subseteq \langle 2\rangle$;

(e) I no es un ideal principal.

28. Razonar que $\mathbb{Z}[i]/\langle 1+i\rangle$ es un cuerpo que tiene un número finito de elementos.

29. Factorizar 2 en $\mathbb{Z}[i]$ y calcular el número de elementos de $\mathbb{Z}[i]/\langle 2\rangle$.

30. Resolver en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ la congruencia $(2+\sqrt{2})x \equiv 3-\sqrt{2} \pmod{3}$.

31. Sea $a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ con $ab \neq 0$. Demostrar que $a + bi$ es irreducible en $\mathbb{Z}[i]$ si, y sólo si, $a^2 + b^2$ es un número primo.

32. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ resolver el siguiente sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x &\equiv 1+2\sqrt{-2} \pmod{2-3\sqrt{-2}}, \\ x &\equiv 3 \pmod{1+\sqrt{-2}}. \end{aligned}$$

33. En el anillo $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ comprobar que $4 = 2\cdot 2$ y $4 = (1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})$ son dos factorizaciones en irreducibles no equivalentes. ¿Es $1+\sqrt{5}$ primo?.

34. En $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ factoriza $3+\sqrt{3}$ en irreducibles y calcula $\text{m.c.d.}(3+\sqrt{3}, 2)$ y $\text{m.c.m.}(3+\sqrt{3}, 2)$.