TOPOLOGÍA I. CURSO 2019-20
RELACIÓN 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS

1. En los siguientes casos, estudiar si T es o no una topología en el conjunto X:
   a) $X \neq \emptyset$ y $T = \mathcal{P}(A) \cup \{X\}$, donde $A \subsetneq X$ y $A \neq \emptyset$.
   b) $X = \mathbb{N}$ y $T = \{U_n \,/\, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$, donde $U_n = [n, +\infty) \cap \mathbb{N}$.
   c) $X = \{f : (-1, 1) \to \mathbb{R} \text{ función}\}$ y $T = \{U \subseteq X \,/\, \exists f \in U \text{ derivable}\} \cup \{\emptyset\}$.

2. Describir todas las topologías de X cuando $\#X = 2$ y $\#X = 3$.

3. Sea X un conjunto no vacío y $\{T_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de topologías en X.
   a) Demostrar que la intersección
   $$T = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha = \{U \subseteq X \,/\, U \in T_\alpha \ \forall \alpha \in \Lambda\}$$
   es una topología en X.
   b) Probar mediante un contraejemplo que, en general, la unión
   $$T = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} T_\alpha = \{U \subseteq X \,/\, U \in T_\alpha \text{ para algún } \alpha \in \Lambda\}$$
   no es una topología en X.

4. Sea X un conjunto no vacío y $A, B \subsetneq X$ con $A, B \neq \emptyset$. ¿Qué debe cumplirse para que la familia $T = \{\emptyset, A, B, X\}$ sea una topología en X?

5. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se define el semiplano $U_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y > \alpha\}$.
   a) Demostrar que la familia $T = \{U_\alpha \,/\, \alpha \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}^2\}$ es una topología en $\mathbb{R}^2$.
   b) Estudiar si $T \leqslant T_u$ o $T_u \leqslant T$.
   c) Describir la familia de cerrados C_T.

6. (Topología fuerte en un punto). Sea X un conjunto y $x_0 \in X$. Definimos:
   $$\mathcal{C} = \{F \subseteq X \,/\, x_0 \in F\} \cup \{F \subseteq X \,/\, F \text{ es finito}\}.$$
   Probar que existe una única topología T en X cuya familia de cerrados es $\mathcal{C}$. Describir los abiertos de T.

7. (Topología de Zariski). Sea $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ la familia de los polinomios con coeficientes reales en las variables $x_1, \ldots, x_n$. Dado $E \subseteq \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$, $E \neq \emptyset$, se define el

subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por:

$$F_E = \{a \in \mathbb{R}^n \,/\, p(a) = 0,\, \forall p \in E\}.$$

a) Demostrar que $\mathcal{C}_Z = \{F_E \,/\, E \subseteq \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]\}$ es la familia de cerrados de una única topología T_Z en $\mathbb{R}^n$.

b) Probar que, si $n = 1$, entonces $T_Z = T_{CF}$. ¿Es cierta esta igualdad si $n \geqslant 2$?

8. Resolver de forma razonada estas cuestiones:

   a) ¿Existe una topología T en $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tal que $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{2, 4, 5\}\}$ es una base de T?

   b) ¿Es la familia $\mathcal{B} = \{(a, b) \,/\, a, b \in \mathbb{Q},\, a < b\}$ una base de $(\mathbb{R}, T_u)$?

9. En $\mathbb{R}$ se consideran las familias:

   $$T_1 = \{(a, +\infty) \,/\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}, \quad T_2 = \{[a, +\infty) \,/\, a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

   a) Probar que T_1 es una topología en $\mathbb{R}$ y que T_2 no lo es.

   b) Demostrar que T_2 es base de una única topología T en $\mathbb{R}$.

   c) Estudiar si $T_u \leqslant T_1$, $T_1 \leqslant T_u$, $T_u \leqslant T$ o $T \leqslant T_u$.

   d) En $(\mathbb{R}, T)$, ¿es la intersección arbitraria de abiertos un conjunto abierto?

10. (Semiplano de Moore). En $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y \geqslant 0\}$ se considera la familia:

    $$\mathcal{B}_M = \{B((x, y), \varepsilon) \,/\, y > 0,\, \varepsilon \in (0, y)\} \cup \{B((x, y), y) \cup \{(x, 0)\} \,/\, y > 0\}.$$

    Probar que existe una única topología T_M en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathcal{B}_M$ es base para T_M.

11. (Topología generada por una familia). Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Definimos la familia:

    $$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \left\{ \bigcap_{i \in I} S_i \,/\, I \neq \emptyset,\, I \text{ finito},\, S_i \in \mathcal{S}\ \forall i \in I \right\} \cup \{\emptyset, X\}.$$

    a) Demostrar que $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ es base de una única topología $T(\mathcal{S})$ en X.

    b) Probar que $T(\mathcal{S})$ es la topología menos fina en X tal que $\mathcal{S} \subseteq T(\mathcal{S})$.

    c) Identifica la topología $T(\mathcal{S})$ es estos casos:

       c1) $X = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{S}$ es la familia de las rectas afines de $\mathbb{R}^2$.

       c2) $X \neq \emptyset$ y $\mathcal{S} = \{X\}$.

       c3) $X \neq \emptyset$ con $\#X \geqslant 3$ y $\mathcal{S} = \{A \subseteq X \,/\, \#A = 2\}$.

12. (Subbases de topología). Sea (X, T) un espacio topológico y $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ con $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Se dice que $\mathcal{S}$ es una *subbase* de T si $T(\mathcal{S}) = T$, es decir, $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ es una base de T. Demostrar que la familia:

    $$\mathcal{S} = \{(-\infty, b) \,/\, b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, +\infty) \,/\, a \in \mathbb{R}\}$$

    es una subbase de $(\mathbb{R}, T_u)$ pero no es una base.

13. Sea X un conjunto infinito. ¿Es (X, T_{CF}) un espacio de Hausdorff? ¿Es (X, T_{CF}) un espacio metrizable?

14. Dos distancias d y d' sobre un conjunto X son *equivalentes* si existen constantes $m, m' > 0$ tales que $d' \leqslant m\, d$ y $d \leqslant m'\, d'$. Probar que, si d y d' son equivalentes, entonces $T_d = T_{d'}$.

15. Sea (X, d) un espacio métrico y $\{x_m\}$ una sucesión en X con $\{x_m\} \to x$ para cierto $x \in X$. Si definimos $A = \{x_m \,/\, m \in \mathbb{N}\}$, demostrar que:

$$\overline{A} = A \cup \{x\}$$

para la topología T_d.

16. En $\mathbb{R}$ se considera la familia de subconjuntos:

$$T = \{U \subseteq \mathbb{R} \,/\, 0 \notin U\} \cup \{U \subseteq \mathbb{R} \,/\, (-1, 1) \subseteq U\}.$$

   a) Probar que T es una topología en $\mathbb{R}$. Describir los cerrados de T.
   b) Encontrar una base $\mathcal{B}$ para T con la menor cantidad posible de abiertos.
   c) Dado $x \in \mathbb{R}$, encontrar una base de entornos de x en $(\mathbb{R}, T)$.
   d) Calcular la clausura, el interior y la frontera de $[0, 1]$ en $(\mathbb{R}, T)$.

17. Sea X un conjunto y $A \subsetneq X$ con $A \neq \emptyset$. Probar que la familia:

$$\mathcal{B} = \{A \cup \{x\} \,/\, x \in X\}$$

es base de una topología T en X. Calcular el interior y la clausura de A en (X, T).

18. Sea S un subespacio afín de $\mathbb{R}^n$.
   a) Probar que S es cerrado en $(\mathbb{R}^n, T_u)$.
   b) Demostrar que, si $\dim(S) < n$, entonces el interior de S es vacío en $(\mathbb{R}^n, T_u)$.

19. En $(\mathbb{R}, T_{CF})$ calcular la clausura, el interior y la frontera de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\{1, 2\}$.

20. Calcular A' y $\mathrm{Ais}(A)$ en los siguientes casos:
   a) (X, T_t) y $A \subseteq X$ con $\#A \geqslant 2$,
   b) (X, T_D) y $A \subseteq X$,
   c) (X, T_{CF}) y $A \subseteq X$ finito,
   d) $(\mathbb{R}, T_S)$ y $A = (0, 1]$.

21. Se considera la recta de Sorgenfrey $(\mathbb{R}, T_S)$.
   a) Calcular la clausura de los conjuntos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\{\frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$ y $\{\frac{-1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N}\}$.
   b) ¿Cuál es la frontera de los conjuntos $(a, b]$ y $[a, b)$?

22. (Recta diseminada). En $\mathbb{R}$ se considera la familia de subconjuntos:
$$T = \{A \cup B \,/\, A \in T_u,\ B \subseteq \mathbb{R} - \mathbb{Q}\}.$$
   a) Demostrar que T es una topología en $\mathbb{R}$ con $T_u < T$.
   b) Probar que los intervalos $[a, b]$ y $[c, d)$ con $d \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ son cerrados en $(\mathbb{R}, T)$.
   c) Calcular la clausura, el interior y la frontera en $(\mathbb{R}, T)$ de $[0, 1]$ y $[0, \sqrt{2})$.
   d) Calcular una base entornos de $x \in \mathbb{R}$ en $(\mathbb{R}, T)$.
   e) Obtener la clausura, el interior y la frontera de $\{x\}$ con $x \in \mathbb{R}$.

23. Tomemos el conjunto $A = [0, 1) \cup (1, 3) \cup \{5\}$ con la topología inducida por $(\mathbb{R}, T_u)$.
   a) Estudiar si los conjuntos $\{5\}$ y $(1, 3)$ son abiertos o cerrados en $(A, T_{u\,|A})$.
   b) Comprobar si $[0, 1/2]$ es entorno de 0 en $(A, T_{u\,|A})$.
   c) Calcular la clausura de $[0, 1)$ en $(A, T_{u\,|A})$.

24. Probar que en el semiplano de Moore $(\mathbb{R}^2, T_M)$ definido en el ejercicio 10, el eje de abcisas es un subconjunto discreto.

25. Sea (X, T) un espacio topológico y $A \subseteq X$. Demostrar que $\partial \mathring{A} \subseteq \partial A$. Describe una situación en la que $\partial \mathring{A} = \partial A$ y otra en la que $\partial \mathring{A} \neq \partial A$.

26. Sea T_1 y T_2 dos topologías sobre un conjunto X con $T_1 \leqslant T_2$. Dado $A \subseteq X$, ¿existe alguna relación entre la clausura y el interior de A en (X, T_1) y en (X, T_2)?

27. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
   a) Probar que un espacio topológico admite un subconjunto denso no trivial si y sólo si la topología no es la discreta.
   b) Sea X un conjunto no vacío y P una partición de X. Demostrar que existe una única topología T en X tal que P es base de T. Probar que los abiertos de T y los cerrados de T coinciden. ¿Es, en general, (X, T) un espacio de Hausdorff?

28. Resolver de forma razonada las siguientes cuestiones:
   a) Dado un espacio métrico (X, d) y un punto $x \in X$, probar que:
$$\mathcal{V}_x = \{\overline{B}(x, \varepsilon) \,/\, \varepsilon > 0\}$$
      es una base de entornos de x para la topología T_d.
   b) Demostrar que si (X, d) es un espacio métrico y $A \subseteq X$, entonces la topología en A inducida por T_d coincide con la topología métrica en (A, d).