Autor:Daniel Monjas Miguélez

6.- a) Una población se rige por el modelo

$$p_{n+1} = 10 * p_n * e^{-p_n}, n \geq 0 \tag{1}$$

Prueba que los equilibrios son inestables.

Definimos $f(x) = 10 * x * e^{-x}$ y buscamos los puntos tales que $f(x) = x$ para ello:

$$10 * x * e^{-x} = x \Longleftrightarrow x * (10 * e^{-x} - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \, o \, x = ln(10) \tag{2}$$

Una vez tenemos los puntos de equilibrio calculamos la derivada de $f(x)$ y evaluamos en dichos puntos la función:

$$f'(x) = 10 * (e^{-x} - x * e^{-x}) \tag{3}$$

Luego $f'(0) = 10 \notin (-1, 1)$ y $f'(ln(10)) = 1 - ln(10) \notin (-1, 1)$. Como al evaluar $f'(x)$ en $x = 0$ y en $x = ln(10)$ se tiene que las imagenes para dichos valores de x no están en $(-1, 1)$ llegamos a que dichos puntos de equilibrio no son estables.

6.- b) Para conseguir un equilibrio poblacional localmente asintóticamente estable (a.e), se propone vender una fracción α $(0 < \alpha < 1)$ de la población en cada periodo de tiempo dando lugar al modelo:

$$p_{n+1} = 10 * (1 - \alpha) * p_n * e^{-(1-\alpha)p_n} \tag{4}$$

b) i) Encuentre el intervalo abierto (de amplitud máxima) donde elegir α para que esté asegurada la estabilidad asintótica local del equilibrio positivo.

En primer lugar buscaremos los puntos fijos, por lo tanto definimos $f(x) = 10 * (1 - \alpha) * x * e^{-(1-\alpha)*x}$ e igualamos $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Longleftrightarrow x = 10 * (1 - \alpha)x * e^{-(1-\alpha)*x} \tag{5}$$

Despejando la ecuación anterior obtenemos que $x = 0$ es solución pero la descartamos porque nos preguntan por puntos de equilibrio positivos. La otra solución se obtiene al despejar:

$$1 = 10 * (1 - \alpha) * e^{-(1-\alpha)*x} \Longleftrightarrow ln(\frac{1}{10 * (1 - \alpha)}) = -(1 - \alpha) * x \tag{6}$$

finalmente obtenemos que el segundo punto de equilibrio dependerá del α y tendrá la siguiente forma

$$x = \frac{ln(10 * (1 - \alpha))}{(1 - \alpha)} \tag{7}$$

Ahora el objetivo será asegurar que x sea positivo, luego buscaremos la primera cota para α. Buscamos que $x > 0$ y debemos tener en cuenta que como $0 < \alpha < 1$ se tiene que $-(1 - \alpha) < 0$, por consiguiente,

$$x > 0 \iff ln(\frac{1}{10 * (1 - \alpha)}) < 0 \iff \alpha < \frac{9}{10} \tag{8}$$

Por último el objetivo será el obtener para que valores de α los puntos x de la forma (7), son estables. En primer lugar calculamos la derivada de $f(x)$,

$$f'(x) = 10 * (1 - \alpha) * (e^{-(1-\alpha)*x} + x * e^{-(1-\alpha)*x} * (-(1 - \alpha))) \tag{9}$$

Ahora evaluamos la expresión (7) y buscamos los valores de α para los que x es estable.

$$f'(\frac{ln(10 * (1 - \alpha))}{(1 - \alpha)}) = 1 - ln(10 * (1 - \alpha)) \tag{10}$$

Sabemos que para que x sea estable $f'(x) \in (-1, 1)$, por tanto

$$1 - ln(10 * (1 - \alpha)) < 1 \iff 10 * (1 - \alpha) > 1 \iff \alpha < \frac{9}{10} \tag{11}$$

Ahora hacemos la versión análoga para -1

$$1 - ln(10 * (1 - \alpha)) > -1 \iff e^2 > 10 * (1 - \alpha) \iff \alpha > \frac{10 - e^2}{10} \tag{12}$$

Llegando finalmente a la conclusión de que un punto de equilibrio será estable y positivo si tiene la forma de la expresión (7) y $\alpha \in (\frac{10-e^2}{10}, \frac{9}{10})$.

b) ii) Calcula el valor máximo de α para el que la población de equilibrio alcanza su valor máximo y el localmente estable.

Sabemos que para que x sea punto fijo y estable $\alpha \in (\frac{10-e^2}{10}, \frac{9}{10})$ y

$$x = \frac{ln(10 * (1 - \alpha))}{(1 - \alpha)} \tag{13}$$

Buscaremos el máximo de x en función de α para lo que definiré la siguiente función:

$$g(\alpha) = \frac{ln(10 * (1 - \alpha))}{(1 - \alpha)} \tag{14}$$

Se hace la derivada y se iguala a 0 para obtener puntos críticos de la función.

$$g'(\alpha) = \frac{-1 - ln(\frac{1}{10*(1-\alpha)})}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} \tag{15}$$

Igualando la derivada a cero se obtiene que,

$$g'(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow -1 - ln(\frac{1}{10 * (1-\alpha)}) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{10 * (1-\alpha)} = \frac{1}{e} \tag{16}$$

despejando la expresión anterior se obtiene que $\alpha = \frac{10-e}{10} \in (\frac{10-e^2}{10}, \frac{9}{10})$, por lo que x es estable, ahora falta por comprabar que se trata de un máximo. Para ello hacemos la segunda derivada de la función,

$$g''(\alpha) = \frac{3 + 2 * ln(\frac{1}{10*(1-\alpha)})}{(\alpha - 1)^3} \tag{17}$$

Y ahora evaluamos $g''(\alpha)$ en el punto crı́tico que hemos obtenido, de forma que

$$g''(\frac{10-e}{10}) = \frac{-1000}{e^3} < 0 \tag{18}$$

De donde obtenemos que el punto $\alpha = \frac{10-e}{10}$ es un máximo relativo de $g(\alpha)$ y además $\alpha \in (\frac{10-e^2}{10}, \frac{9}{10})$ por lo que α sería el máximo valor en el que x alcanza su valor máximo y es localmente estable.