

2.3. Bases, dimensión y coordenadas en un espacio vectorial

Una de las ideas principales en la teoría de espacios vectoriales consiste en expresar todos los vectores a partir de “unos pocos” mediante combinaciones lineales. El alumno ya debe de tener alguna familiaridad con esta idea, que aparece en la enseñanza preuniversitaria. Por ejemplo, si en el e.v. real \mathbb{R}^2 de los vectores libres en el plano fijamos un sistema de referencia cartesiano con vectores asociados $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, entonces cualquier otro vector \vec{v} se expresa como $a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$ para ciertos $a, b \in \mathbb{R}$ (para ello, basta proyectar \vec{v} sobre las rectas vectoriales $L(\vec{e}_1)$ y $L(\vec{e}_2)$). Esto significa que $\mathbb{R}^2 = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, es decir, con tan sólo dos vectores de \mathbb{R}^2 podemos generar todos los demás haciendo combinaciones lineales. Además, la forma de expresar \vec{v} como c.l. de \vec{e}_1 y \vec{e}_2 es única, pues es sencillo comprobar que $\mathbb{R}^2 = L(\vec{e}_1) \oplus L(\vec{e}_2)$. Así, los números $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = a \cdot \vec{e}_1 + b \cdot \vec{e}_2$ son únicos y se llaman coordenadas de \vec{v} en el sistema de referencia.

Con argumentos análogos, en el e.v. real \mathbb{R}^3 de los vectores libres en el espacio se prueba que $\mathbb{R}^3 = L(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ son los vectores de un sistema de referencia cartesiano. Además, la forma de expresar $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ como c.l. de $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es única, pues no es difícil comprobar que $\mathbb{R}^3 = L(\vec{e}_1) \oplus L(\vec{e}_2) \oplus L(\vec{e}_3)$. Así, se puede hablar como antes de coordenadas asociadas a un vector de \mathbb{R}^3 respecto del sistema de referencia dado.

En este apartado del tema desarrollaremos todas estas ideas en cualquier e.v.

2.3.1. Sistemas de generadores

Comenzaremos precisando la idea de generar todos los vectores de un e.v. a partir de unos pocos.

Definición 2.60. Sea $V(K)$ y sea $S \subset V$ un subconjunto. Se dice que S es un sistema de generadores (s.d.g.) o conjunto generador de V si $V = L(S)$. En el caso de que S no sea vacío, esto equivale a que todo vector de V se expresa como c.l. finita de vectores de S , es decir, para cada $v \in V$, existen $m \in \mathbb{N}$, vectores $v_1, \dots, v_m \in S$ y escalares $a_1, \dots, a_m \in K$, tales que $v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m$.

Es obvio que $V = L(V)$ y, por tanto, V es un s.d.g. de V . Esto no es muy interesante si nuestro objetivo es generar todos los vectores de V (probablemente infinitos) a partir de la menor cantidad posible de vectores. En particular, y como primera aproximación, nos interesarán los e.v. que tengan un s.d.g. finito.

Definición 2.61. Sea V un e.v. sobre un cuerpo K . Diremos que V es finitamente generado (f.g.) si V admite un s.d.g. con un número finito de vectores, esto es, si existe $S = \{v_1, \dots, v_m\} \subset V$ tal que $V = L(S)$ (por lo que para cada $v \in V$, existen $a_1, \dots, a_m \in K$ tales que $v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m$).

Practiquemos un poco las definiciones anteriores con ejemplos concretos.

Ejemplo 2.62. Nos preguntamos si en \mathbb{R}^2 la familia $S = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = (1, 0)$ y $v_2 = (1, 1)$ es un s.d.g. Para ello tomamos un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y estudiamos si es c.l. de S . Buscamos $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $v = a \cdot v_1 + b \cdot v_2$. Al tomar componentes y operar esta igualdad se transforma en $(x, y) = (a + b, b)$. Por tanto, llegamos al SEL dado por las ecuaciones $a + b = x$ y $b = y$, que es compatible determinado con soluciones $b = y$, $a = x - y$. Esto prueba que S es un s.d.g. de \mathbb{R}^2 . En particular, \mathbb{R}^2 es f.g. como e.v. real. En el caso particular $v = (-2, 3)$ se tiene que $a = -5$ y $b = 3$, por lo que $v = -5 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$.

Ejemplo 2.63. Nos preguntamos si en \mathbb{R}^2 la familia $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1, 2)$, $v_2 = (2, 4)$ y $v_3 = (3, 6)$ es un s.d.g. Para ello tomamos $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y estudiamos si es c.l. de S . Buscamos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $v = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3$. Tomando componentes y operando, esto equivale a que $(x, y) = (a + 2b + 3c, 2a + 4b + 6c)$. Llegamos así a un SEL con ecuaciones $a + 2b + 3c = x$ y $2a + 4b + 6c = y$. Obviamente este SEL será compatible si y sólo si $2x = y$. Por tanto, si $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ no cumple que $2x = y$, entonces v no es c.l. de S . Esto ocurre por ejemplo con el vector $v = (0, 1)$. Concluimos que S no es un s.d.g. de \mathbb{R}^2 .

Ahora mostraremos algunos s.d.g. para los espacios vectoriales que estudiamos en la primera sección de este tema.

Ejemplo 2.64. Sea $n \in \mathbb{N}$ y K un cuerpo. Consideremos K^n como e.v. sobre K . Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ definimos $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0)$, donde el 1 se encuentra en la i -ésima posición. Afirmamos que la familia $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ es un s.d.g. de K^n . Esto se debe a que todo vector $v = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in K^n$ se escribe como $x_1 \cdot e_1 + \dots + x_i \cdot e_i + \dots + x_n \cdot e_n$, que es una c.l. de S (nótese que los coeficientes de la combinación coinciden con las componentes del vector). En particular, K^n es f.g. como e.v. sobre K .

Ejemplo 2.65. Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y K un cuerpo. Consideremos $M_{m \times n}(K)$ como e.v. sobre K . Para cada par de índices $i \in \{1, \dots, m\}$ y $j \in \{1, \dots, n\}$, definimos $E_{ij} = (e_{kl})$ como la matriz en $M_{m \times n}(K)$ tal que $e_{kl} = 0$ si $(k, l) \neq (i, j)$ y $e_{ij} = 1$. Afirmamos que la familia $S = \{E_{ij} \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ es un s.d.g. de $M_{m \times n}(K)$ como e.v. sobre K . Esto se debe a que toda matriz $A = (a_{ij})$ en $M_{m \times n}(K)$ se expresa como:

$$A = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot E_{ij} = a_{11} \cdot E_{11} + \dots + a_{1n} \cdot E_{1n} + \dots + a_{m1} \cdot E_{m1} + \dots + a_{mn} \cdot E_{mn},$$

que es una c.l. de S (nótese que los coeficientes de la combinación coinciden con las entradas de A). En particular, $M_{m \times n}(K)$ es f.g. como e.v. sobre K .

Ejemplo 2.66. Sea K un cuerpo y $K[x]$ el e.v. sobre K de los polinomios con coeficientes en K . Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definimos $p_i(x) = x^i$, entendiendo que $p_0(x) = 1$. Afirmamos que la familia $S = \{p_i(x) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ es un s.d.g. de $K[x]$. Esto se debe a que todo polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ se escribe como $a_0 \cdot p_0(x) + a_1 \cdot p_1(x) + \dots + a_n \cdot p_n(x)$, que es una c.l. finita de elementos de S . Nótese que S es un conjunto infinito numerable.

Lo anterior no demuestra que $K[x]$ no es f.g., pues pudiera existir algún s.d.g. de $K[x]$ que fuera finito. Veamos que esto es imposible. Supongamos que $S = \{p_1(x), \dots, p_m(x)\}$ fuese un s.d.g. de $K[x]$. Para cada $i \in \{1, \dots, m\}$ denotamos $n_i = \text{grado}(p_i(x))$. Sea $n = \max\{n_1, \dots, n_m\}$. Es claro entonces que $S \subset K_n[x]$ y, por tanto, $L(S) \subset K_n[x]$. De este modo, el polinomio en $K[x]$ dado por $p(x) = x^{n+1}$ no se expresa como c.l. de S , pues $p(x) \notin K_n[x]$. Esto es una contradicción. Se sigue que $K[x]$ no es f.g. como e.v. sobre K .

Ejemplo 2.67. En el e.v. real $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consideramos el subconjunto U de las funciones dos veces derivables y tales que $f''(x) + f(x) = 0$ para cada $x \in \mathbb{R}$. No es difícil demostrar, usando la Proposición 2.22 y reglas de derivación conocidas de la enseñanza secundaria, que U es un s.v. de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. El estudio de ecuaciones diferenciales⁵ demuestra que, si $f \in U$, entonces

⁴Para facilitar estas expresiones, se introduce el símbolo dependiente de dos índices δ_{ij} , llamado *delta de Kronecker*, el cual es igual a 1 si $i = j$ y a 0 en caso contrario; por ejemplo, la matriz identidad I_n , verifica $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$. Las matrices E_{ij} se reescriben entonces $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jl}$.

⁵Asignatura Ecuaciones Diferenciales I.

existen $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, es fácil comprobar que cada función f de este tipo pertenece a U . Así, deducimos que $U = L(\sin(x), \cos(x))$. En particular, U es f.g. como e.v. real.

Ahora mostraremos la influencia de K cuando hablamos de s.d.g. y de espacios f.g.

Ejemplo 2.68. 1. Sea \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos. Sabemos que \mathbb{C} es un e.v. complejo y también un e.v. real. Teniendo en cuenta el Ejemplo 2.64 con $K = \mathbb{C}$ y $n = 1$ se sigue que $S = \{1\}$ es un s.d.g. de \mathbb{C} como e.v. complejo. Sin embargo, $S = \{1\}$ no es un s.d.g. de \mathbb{C} como e.v. real, ya que ningún número imaginario puro se expresa como $a \cdot 1$ con $a \in \mathbb{R}$. De hecho, $L(S) = \mathbb{R}$ cuando vemos \mathbb{C} como e.v. real.

2. Sabemos que \mathbb{R} es f.g. como e.v. real. También podemos ver \mathbb{R} como e.v. sobre $K = \mathbb{Q}$ (la suma sería la de números reales y el producto de un racional por un real sería el producto usual en \mathbb{R}). En un ejercicio de la relación de problemas se propone probar que \mathbb{R} no es f.g. como e.v. sobre \mathbb{Q} .

Ya hemos comentado que nuestro objetivo es encontrar s.d.g. de un e.v. que sean “lo más pequeños posible”. Esto nos conduce al siguiente problema.

Cuestión 2.69. Si V es un e.v. sobre K y V es f.g., ¿cuál es el menor número de vectores que puede tener un s.d.g. de V ?

Nótese que el número mínimo de vectores de un s.d.g. es una medida del “tamaño” del e.v. pues es intuitivo que, cuantos más vectores sean estrictamente necesarios para generarlo, más grande será el espacio. Responderemos a la Cuestión 1 a lo largo de esta sección. De momento nos podemos plantear cuándo es posible suprimir algún vector de un s.d.g. de forma que el resultado siga siendo un s.d.g. con menos vectores. Es obvio que esto no se puede hacer en general (piénsese por ejemplo en el s.d.g. de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ dado por $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$). El próximo resultado nos dice que un s.d.g. se puede “refinar” siempre que contenga vectores “que no aporten información”. Probaremos este principio en el caso finito (el caso infinito queda como ejercicio).

Proposición 2.70 (Ampliación y reducción de s.d.g.). Sea V un e.v. sobre un cuerpo K y $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ un s.d.g. de V .

(i) Si $S' \subset V$ y $S \subset S'$, entonces S' es un s.d.g. de V .

(ii) Si existe⁶ $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $v_i \in L(S - \{v_i\})$, entonces $S - \{v_i\} = \{v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_m\}$ es un s.d.g. de V .

Demostración. (i) Como S es s.d.g. de V entonces $V = L(S)$. Nótese que $L(S')$ es un s.v. de V que contiene a S' y, por tanto, a S . Esto implica que $L(S) \subset L(S')$ por la Proposición 2.40. De aquí se sigue que $V \subset L(S')$. Y como $L(S') \subset V$ llegamos a $L(S') = V$.

(ii). Sea $v \in V$. Queremos ver que v se expresa como c.l. de $S - \{v_i\}$. Por un lado, como S es un s.d.g. de V , se tiene que:

$$v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{i-1} \cdot v_{i-1} + a_i \cdot v_i + a_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + a_m \cdot v_m.$$

⁶Obsérvese que incluso en el caso $V = \{0\}, S = \{0\}$ el convenio $L(\emptyset) = \{0\}$ explicado en la Observación 2.42 es consistente aquí.

Por otro lado, como $v_i \in L(S - \{v_i\})$, entonces:

$$v_i = b_1 \cdot v_1 + \dots + b_{i-1} \cdot v_{i-1} + b_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + b_m \cdot v_m.$$

Sustituyendo la igualdad anterior en la expresión de v como c.l. de S , y usando propiedades de un e.v., llegamos a:

$$\begin{aligned} v &= a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{i-1} \cdot v_{i-1} \\ &\quad + a_i \cdot (b_1 \cdot v_1 + \dots + b_{i-1} \cdot v_{i-1} + b_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + b_m \cdot v_m) \\ &\quad + a_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + a_m \cdot v_m \\ &= (a_1 + a_i \cdot b_1) \cdot v_1 + \dots + (a_{i-1} + a_i \cdot b_{i-1}) \cdot v_{i-1} \\ &\quad + (a_{i+1} + a_i \cdot b_{i+1}) \cdot v_{i+1} + \dots + (a_m + a_i \cdot b_m) \cdot v_m, \end{aligned}$$

lo que nos dice que $v \in L(S - \{v_i\})$, como se quería demostrar. ■

Ejercicio 2.71. Compruébese que la proposición anterior se extiende al caso de que S sea infinito, obteniéndose así:

Si $S \subset V$ es un s.d.g. se verifica (i) todo $S' \subset V$ que incluya S es un s.d.g., (ii) si $v \in S$ y $v \in L(S - \{v\})$ entonces $S - \{v\}$ es un s.d.g.

2.3.2. Familias linealmente independientes

La Proposición 2.70 (ii) implica que si un s.d.g. contiene vectores que se escriben como c.l. de los demás generadores, entonces dichos vectores se pueden eliminar para obtener un s.d.g. más pequeño. Así, un s.d.g. será “irreducible” y, por tanto, tendrá el menor número posible de vectores cuando ningún generador sea c.l. del resto. Esto nos llevará a la noción de sistema linealmente independiente, pero antes pero antes la caracterizaremos como sigue.

Lema 2.72. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$, $m \in \mathbb{N}$ un subconjunto (finito no vacío) de V . Equivalen:

(i) Ningún vector $v_i \in S$ verifica $v_i \in L(S \setminus \{v_i\})$ (esto es, en el caso $m \geq 2$ ningún vector de S se puede escribir como combinación lineal del resto de vectores de S y, en el caso $m = 1$, $v_1 \neq 0$).

(ii) La única combinación lineal de elementos de S igual a 0 es la que se obtiene con todos sus escalares nulos, esto es: dados $a_1, \dots, a_m \in K$ si

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0$$

entonces

$$a_1 = \dots = a_m = 0.$$

Demostración. (i) \Rightarrow (ii). Razonando por el contrarrecíproco, existen escalares $a_1, \dots, a_m \in K$ no todos nulos tales que $a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m = 0$. Sea $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $a_i \neq 0$. Si en la igualdad anterior despejamos $a_i \cdot v_i$ tenemos:

$$a_i \cdot v_i = (-a_1) \cdot v_1 + \dots + (-a_{i-1}) \cdot v_{i-1} + (-a_{i+1}) \cdot v_{i+1} + \dots + (-a_m) \cdot v_m.$$

Como K es un cuerpo y $a_i \neq 0$ podemos multiplicar por a_i^{-1} y usar las propiedades de \cdot para obtener:

$$v_i = (-a_i^{-1} \cdot a_1) \cdot v_1 + \dots + (-a_i^{-1} \cdot a_{i-1}) \cdot v_{i-1} + (-a_i^{-1} \cdot a_{i+1}) \cdot v_{i+1} + \dots + (-a_i^{-1} \cdot a_m) \cdot v_m,$$

por lo que $v_i \in L(S - \{v_i\})$ (obsérvese que en el caso $m = 1$ se tiene necesariamente $i = 1$ y se obtiene directamente $v_1 = 0$, por lo que $v_1 \in \{0\} = L(\emptyset) = L(S \setminus v_1)$).

(ii) \Rightarrow (i). Supongamos por el contrarrecíproco que existe $v_i \in S$ tal que $v_i \in L(S \setminus \{v_i\})$. Si $m = 1$ eso quiere decir $v_1 \in L(\emptyset) = \{0\}$, esto es, $v_1 = 0$, por lo que la combinación lineal $1 \cdot v_1 = 0$ contradice (ii), como se quería. Si $m \geq 2$, existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $v_i \in L(S - \{v_i\})$, por lo que podemos escribir:

$$v_i = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{i-1} \cdot v_{i-1} + a_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + a_m \cdot v_m.$$

Sumando el opuesto de v_i en ambos lados de la igualdad llegamos a:

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{i-1} \cdot v_{i-1} + (-1) \cdot v_i + a_{i+1} \cdot v_{i+1} + \dots + a_m \cdot v_m = 0,$$

que es una expresión del vector nulo como c.l. de S con (al menos) el escalar (-1) , que multiplica a v_i , distinto de 0, obteniéndose una contradicción con (ii). ■

Observación 2.73. Obsérvese que si S verifica la propiedad (ii) entonces cualquier subconjunto $S' \subset S$ también la verifica. De hecho, reordenando los elementos de S para que los m' primeros sean los de S' (esto es, suponiendo $S' = \{v_1, \dots, v_{m'}\}$ sin pérdida de generalidad) se tiene

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{m'} \cdot v_{m'} = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_{m'} \cdot v_{m'} + 0 \cdot v_{m'+1} + \dots + 0 \cdot v_m.$$

Por tanto, si el primer miembro de esta expresión fuera igual a 0 entonces también lo sería el segundo y, por la independencia lineal de S , se obtendría $a_1 = \dots = a_{m'} = 0$.

La observación y lema anteriores motivan la siguiente definición.

Definición 2.74. Sea $V(K)$ un s.v. y $S \subset V$ cualquier subconjunto. Diremos que S es linealmente independiente (l.i.) si las únicas combinaciones lineales de elementos de S que son iguales a 0 son las que se obtienen con todos sus escalares nulos, esto es: para todo $\{v_1, \dots, v_m\} \subset S$, y $a_1, \dots, a_m \in K$:

$$a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \dots = a_m = 0. \quad (2.7)$$

En caso contrario, diremos que S es linealmente dependiente.

Observación 2.75. Podemos distinguir entonces los siguientes casos:

- Como caso límite, si $S = \emptyset$ entonces es l.i.
- Si S es finito no vacío, basta con comprobar la propiedad (2.7) para el caso en que $\{v_1, \dots, v_m\} = S$ (por la observación 2.73 no hace falta tener en cuenta sus subconjuntos). Por tanto, la independencia lineal resulta equivalente a la propiedad (i) del lema 2.72.
- Si S es infinito, S será l.i. si y sólo si todo subconjunto finito S' de S es l.i. Como para S' la caracterización (i) del lema 2.72 es aplicable, esta caracterización sigue siendo válida incluso cuando S es infinito.

Como resumen, de las observaciones anteriores y de la definición de independencia lineal se tiene la siguiente extensión del lema 2.72 al caso S vacío y S infinito (¡compruébese!):

Teorema 2.76. Sea $S \subset V$ cualquier subconjunto. Equivalen:

(i) Ningún vector $v_i \in S$ verifica $v_i \in L(S \setminus \{v_i\})$.

(ii) S es linealmente independiente (según la definición 2.74).

En este caso, cualquier subconjunto $S' \subset S$ también es linealmente independiente.

Ejemplo 2.77. Consideremos algunos casos particulares de S :

1. En el caso de que S tenga un único vector, $S = \{v\}$, se sigue: S es l.i. si y sólo si $v \neq 0$.

En efecto, sabemos por las propiedades de e.v. que la igualdad $a \cdot v = 0$ ocurre si y sólo si $a = 0$ ó $v = 0$. Así, si $v \neq 0$ entonces la igualdad sólo se da si $a = 0$, por lo que $\{v\}$ es l.i. Recíprocamente, si $v = 0$ la igualdad se da para todo $a \in K$, por lo que $\{0\}$ no es l.i.

2. Si S contiene al vector nulo, entonces será linealmente dependiente.

En efecto, sabemos que $S' = \{0\}$ es linealmente dependiente y, por hipótesis $S' \subset S$, por lo que la última afirmación del teorema 2.76 implica la dependencia lineal de S (como ejercicio, demuéstrese directamente usando sólo la definición de independencia lineal).

3. Supongamos ahora $S = \{u, v\}$. Que S sea l.d. equivale a que u es proporcional a v o v es proporcional a u . Que u sea proporcional a v significa que $u = a \cdot v$ para cierto $a \in K$. Si u es proporcional a v y $u \neq 0$ entonces $v \neq 0$, $a \neq 0$ y $v = a^{-1} \cdot u$, es decir, v es proporcional a u . Sin embargo, la relación de proporcionalidad entre vectores no es simétrica en general; de hecho, el vector 0 es proporcional a todos los demás pero el único vector proporcional a 0 es 0 . Por lo anterior, $S = \{u, v\}$ es l.i. si y sólo si $u \neq 0$, $v \neq 0$ y u no es proporcional a v . En tal caso, llamaremos a $L(u, v)$ el plano (vectorial) generado por u y v .

4. En el caso de los vectores libres (nota 2.19), el punto anterior se suele resumir diciendo: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ es l.i. si y sólo si \vec{u}, \vec{v} no son colineales. Para una cantidad mayor de vectores, el concepto de dependencia lineal generaliza al de colinealidad. Así, se puede comprobar que una familia $S = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ en $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ es l.d. si y sólo si los vectores de S son coplanarios, es decir, existe un plano vectorial en $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ que los contiene a todos.

Nota 2.78. En ocasiones se habla de independencia lineal para conjuntos donde se permite que haya dos “elementos repetidos”. Así, si, por ejemplo $S = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_m\}$ cumple $i < j$ y $v_i = v_j$ se entendería que ese conjunto es l.d. a causa de la combinación lineal $1 \cdot v_i + (-1) \cdot v_j = 0$. En nuestra definición formal de conjunto esto no puede. No obstante, también podemos incluir la idea subyacente a este caso como sigue. Primero, se entiende que S es un conjunto ordenado, esto es, una n -úpla de vectores. Se definen entonces las combinaciones lineales para toda n -úpla de vectores tomando combinaciones lineales de sus elementos y, en el caso de que dos de ellos estén repetidos k veces, se permiten k repeticiones de esos vectores en cada expresión de la correspondiente combinación lineal. Así, en el ejemplo anterior, $S = (v_1, \dots, v_i = v, \dots, v_j = v, \dots, v_m)$ sería una n -úpla de vectores linealmente dependiente.

Una propiedad relevante de los conjuntos l.i. es la siguiente.

Proposición 2.79. Sea $S \subset V$ un conjunto l.i. Entonces todo $v \in L(S)$ se escribe de manera única como combinación lineal de los elementos de S , esto es:

$$v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m = a'_1 \cdot v_1 + \dots + a'_m \cdot v_m \quad \Rightarrow \quad a_1 = a'_1, \dots, a_m = a'_m. \quad (2.8)$$

Demostración. Operando en el espacio vectorial se tiene de la expresión a la izquierda:

$$(a_1 - a'_1) \cdot v_1 + \cdots + (a_m - a'_m) \cdot v_m = 0,$$

que es una combinación lineal de elementos de S igual a 0. Al ser S l.i. $a_1 - a'_1 = \cdots = a_m - a'_m = 0$. ■

Observación 2.80. (a) El recíproco de la proposición anterior es inmediato. De hecho, que el vector 0 se escriba como combinación lineal única de los elementos de S , es precisamente la definición de ser linealmente independiente.

(b) Merece la pena darse cuenta de que la expresión (2.8) recoge el significado de que todo vector de $L(S)$ se escribe como combinación lineal *única* de los elementos de S . Esto resulta claro en el caso de que S sea finito (teniendo en cuenta de que en el caso $S = \emptyset$ no hay nada que comprobar). En el caso de que S sea infinito, que se pueda escribir v como combinación lineal de dos maneras distintas de elementos de S quiere decir que existen dos subconjuntos finitos S_1 y S_2 tales que $v \in L(S_1)$ y $v \in L(S_2)$. Ahora bien, $S' := S_1 \cup S_2$ es finito y tanto $L(S_1)$ como $L(S_2)$ están incluidos en $L(S')$. Por tanto, v se puede escribir como combinación lineal de elementos de S' de dos maneras. No obstante, la expresión (2.8) dice que esas dos maneras son la misma (y, de hecho, $v \in L(S_1 \cap S_2)$).

Ejercicio 2.81. Sea $S = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un subconjunto finito no vacío de $V(K)$. Demuéstrese: S es l.i. si y sólo si se tiene la suma directa $L\{v_1\} \oplus \cdots \oplus L\{v_m\}$.

Resulta intuitivo pensar que el número máximo de vectores que puede tener una familia l.i. es una medida del “tamaño” del e.v., pues indica en cuántas direcciones podemos movernos libremente dentro del espacio. Esto nos lleva a un problema similar al que planteamos para s.d.g. (cuestión 2.69).

Cuestión 2.82. Si V es un e.v. sobre K y V es f.g., ¿cuál es el mayor número de vectores que una familia l.i. de V puede tener?

De momento, damos una primera respuesta sobre cuándo podemos reducir una familia l.i.

Proposición 2.83 (Ampliación de familias l.i.). Sea $V(K)$ un e.v. Si S es una familia l.i. y existe $v \in V$ con $v \notin L(S)$, entonces la familia $S \cup \{v\}$ es también l.i.

Demostración. Escribamos 0 como una combinación lineal finita de elementos de $S \cup \{v\}$. Si v no es uno de los vectores de la combinación, todos los coeficientes serán nulos por ser S independiente. En consecuencia, basta con tomar cualquier c.l. finita del tipo $a_1 \cdot v_1 + \cdots + a_m \cdot v_m + a_{m+1} \cdot v = 0$, con $a_1, \dots, a_{m+1} \in K$, $v_1, \dots, v_m \in S$. Queremos ver que $a_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, m+1$. Como S es l.i. la demostración concluye si vemos que $a_{m+1} = 0$ (ya que la c.l. anterior nos daría una expresión del vector nulo como c.l. de vectores de S). Ahora bien, si $a_{m+1} \neq 0$ podríamos despejar v en la ecuación de arriba y tendríamos:

$$v = (-a_{m+1}^{-1} \cdot a_1) \cdot v_1 + \cdots + (-a_{m+1}^{-1} \cdot a_m) \cdot v_m.$$

Esto implicaría que $v \in L(S)$, lo que supone una contradicción. ■

Observación 2.84. Combinando este resultado con la última afirmación del teorema 2.76 y las propiedades de los sistemas de generadores se obtiene, para cualesquiera $S \subset S' \subset V$ y $v \in V$:

- Si S es un s.d.g. entonces S' es un s.d.g.
- Si S es l.i. y $S' = S \cup \{v\}$ entonces: S' es l.i. si y sólo si $v \notin L(S)$.

- Si S' es l.i. entonces S es l.i.

Si S' es s.d.g. y $S' = S \cup \{v\}$ entonces: S es s.d.g. si y sólo si $v \in L(S)$.

Practicemos a continuación las caracterizaciones del concepto de independencia lineal en algunos ejemplos concretos.

Ejemplo 2.85. En \mathbb{R}^2 la familia $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ con $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$ y $v_3 = (0, 1)$ es l.d. ya que $v_2 = v_1 + v_3$. En particular, el teorema 2.76 implica la existencia de una c.l. del tipo $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = 0$ con no todos los coeficientes nulos. Tomando componentes y operando, la igualdad anterior se transforma en $(a + b, b + c) = (0, 0)$. Por tanto, llegamos al SEL homogéneo de ecuaciones $a + b = 0$ y $b + c = 0$. Este SEL es compatible indeterminado (está escalonado y tiene incógnitas secundarias). Para encontrar una expresión no trivial de 0 como c.l. de S basta encontrar una solución no trivial del SEL anterior, por ejemplo $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$. Se comprueba enseguida que, efectivamente, $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Posteriormente probaremos que en \mathbb{R}^2 no puede haber familias l.i. con más de dos vectores.

Ejemplo 2.86. Analicemos si en \mathbb{R}^2 la familia $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ donde $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (1, 1)$ y $v_3 = (0, 1)$ es l.i. Dada una c.l. del tipo $a \cdot v_1 + b \cdot v_2 + c \cdot v_3 = 0$ nos preguntamos si $a = b = c = 0$. Tomando componentes y operando, la igualdad anterior se transforma en $(a + b, b + c) = (0, 0)$. Por tanto, llegamos al SEL homogéneo de ecuaciones $a + b = 0$ y $b + c = 0$. Así, la familia S será l.i. si y sólo este SEL es compatible determinado (para que la única solución sea la trivial). Sin embargo, el SEL es compatible indeterminado (está escalonado y tiene incógnitas secundarias). Concluimos que S es l.d. Para encontrar una expresión no trivial de 0 como c.l. de S basta considerar una solución no trivial del SEL anterior, por ejemplo $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$. Se comprueba enseguida que, efectivamente, $v_1 - v_2 + v_3 = 0$. Posteriormente probaremos que en \mathbb{R}^2 no puede haber familias l.i. con más de dos vectores.

Ejemplo 2.87. Estudiemos si en $\mathbb{R}[x]$ la familia $S = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ donde $p_1(x) = x^2 + x + 1$, $p_2(x) = 2x + 1$ y $p_3(x) = x^2 + 1$ es l.i. Dada una c.l. del tipo $a \cdot p_1(x) + b \cdot p_2(x) + c \cdot p_3(x) = 0$ nos preguntamos si $a = b = c = 0$. Operando, la igualdad anterior se transforma en $(a + c)x^2 + (a + 2b)x + (a + b + c) = 0$. Esto nos lleva al SEL homogéneo de ecuaciones⁷ $a + c = 0$, $a + 2b = 0$ y $a + b + c = 0$. Este SEL es compatible determinado y, por tanto, su única solución es $a = b = c = 0$. Concluimos que la familia S es l.i.

Ahora demostraremos que los s.d.g. que estudiamos en la anterior subsección son familias l.i. en el espacio correspondiente.

Ejemplo 2.88. En K^n la familia $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ del Ejemplo 2.64 es l.i. Para verlo tomamos una c.l. del tipo $a_1 \cdot e_1 + \dots + a_n \cdot e_n = 0$ y nos preguntamos si $a_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$. Al tomar componentes y operar, la igualdad anterior se transforma en $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$, por lo que $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Ejemplo 2.89. En $M_{m \times n}(K)$ la familia $S = \{E_{ij} \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ definida en el Ejemplo 2.65 es l.i. Para verlo tomamos una c.l. del tipo

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot E_{ij} = a_{11} \cdot E_{11} + \dots + a_{1n} \cdot E_{1n} + \dots + a_{m1} \cdot E_{m1} + \dots + a_{mn} \cdot E_{mn} = 0_{m \times n},$$

⁷Si se consideran los polinomios como aplicaciones polinómicas, esto puede deducirse derivando esta igualdad dos veces, con lo que se obtiene $2(a + c) = 0$ así como $(a + 2b)x + (a + b + c) = 0$, derivando a continuación esta igualdad una vez, de donde resulta $a + 2b = 0$ así como $a + b + c = 0$.

y nos preguntamos si $a_{ij} = 0$ para cada $i = 1, \dots, m$ y cada $j = 1, \dots, n$. Teniendo en cuenta cómo se definen las matrices E_{ij} la igualdad anterior equivale a la igualdad $A = 0_{m \times n}$, donde $A = (a_{ij})$. A partir de aquí se concluye lo que se quería.

Ejemplo 2.90. En $K[x]$ la familia $S = \{p_i(x) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ definida en el Ejemplo 2.66 es l.i. Hay que comprobar que cada familia finita de S es l.i. Tomamos cualquier familia finita $S' = \{p_{i_1}(x), \dots, p_{i_m}(x)\}$ de S y una c.l. del tipo $a_1 \cdot p_{i_1}(x) + \dots + a_m \cdot p_{i_m}(x) = 0$. Como $p_{i_k}(x) = x^{i_k}$, la igualdad previa implica inmediatamente que $a_i = 0$ para cada $i = 1, \dots, m$.

Finalmente, veamos que el papel de K es importante cuando hablamos de independencia lineal.

Ejemplo 2.91. Sea \mathbb{C} el cuerpo de los números complejos. Tomemos la familia $S = \{v_1, v_2\}$ con $v_1 = 1$ y $v_2 = i$. Si pensamos en \mathbb{C} como e.v. complejo entonces S es l.d. pues $v_2 = i \cdot v_1$. Si vemos \mathbb{C} como e.v. real entonces S es l.i. pues v_1 y v_2 son no nulos y no proporcionales (no existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $v_2 = a \cdot v_1$).

2.3.3. Bases y dimensión

Ya hemos comentado que nos interesa encontrar s.d.g. de un espacio f.g. que tengan la menor cantidad posible de vectores, así como familias l.i. que sean lo más grandes posibles, y planteamos dos cuestiones (la 2.69 y 2.82) al respecto. El próximo teorema establece una desigualdad entre los números de vectores de tales conjuntos. Más aún, la demostración del teorema sirve para motivar la definición de *base*, y su tesis será fundamental a la hora de demostrar que dos bases de un espacio vectorial f.g. tienen el mismo número de vectores.

Teorema 2.92 (Teorema de Steinitz). *Sea V un e.v. sobre un cuerpo K . Supongamos que tenemos dos subconjuntos finitos $S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ y $S' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ de vectores de V tales que S es un s.d.g. de V y S' es l.i. Entonces, se cumple que $m \geq k$.*

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo. Suponemos que $m + 1 \leq k$ y pretendemos llegar a contradicción. La idea consiste en sustituir los vectores de S por vectores de S' hasta obtener, en m pasos, que $S_m = \{v_1, \dots, v_m\}$ es un s.d.g. de V . Como $k \geq m + 1$, tenemos el vector v_{m+1} de S' , que se escribirá como c.l. de S_m . Esto contradice que S' es l.i.

Paso 1: Como S es un s.d.g. de V , la Proposición 2.70 (i) nos dice que $\bar{S}_1 = \{v_1, u_1, u_2, \dots, u_m\}$ es un s.d.g. de V . Además, el vector v_1 de S' se expresa como una c.l. de S , es decir, existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_m \in K$ tales que:

$$v_1 = a_1 \cdot u_1 + a_2 \cdot u_2 + \dots + a_m \cdot u_m.$$

Nótese que $v_1 \neq 0$ por ser S' una familia l.i. Así, en la igualdad de arriba no todos los coeficientes son nulos. Renombrando si fuese necesario los vectores de S , podemos suponer que $a_1 \neq 0$. Pero entonces despejamos el vector u_1 en la ecuación de arriba y obtenemos:

$$u_1 = a_1^{-1} \cdot v_1 + (-a_1^{-1} \cdot a_2) \cdot u_2 + \dots + (-a_1^{-1} \cdot a_m) \cdot u_m,$$

por lo que u_1 es una c.l. de $\{v_1, u_2, \dots, u_m\}$, es decir, $u_1 \in L(\bar{S}_1 - \{u_1\})$. Aplicando la Proposición 2.70 (ii) deducimos que $S_1 = \bar{S}_1 - \{u_1\} = \{v_1, u_2, \dots, u_m\}$ es un s.d.g. de V .

Ahora distinguimos dos casos. Si $m = 1$ entonces $S_1 = \{v_1\}$ y como $k \geq m + 1 = 2$, tenemos el vector $v_2 \in S'$, que será c.l. de S_1 (al ser S_1 un s.d.g. de V). Esto es una contradicción al ser S' una familia l.i. Si $m \geq 2$ entonces continuamos con el siguiente paso.

Paso 2: Como S_1 es un s.d.g. de V , la Proposición 2.70 (i) dice que $\bar{S}_2 = \{v_1, v_2, u_2, \dots, u_m\}$ es un s.d.g. de V . Además, el vector v_2 de S' se podrá expresar como c.l. de S_1 , es decir, existen $b_1, \dots, b_m \in K$ tales que:

$$v_2 = b_1 \cdot v_1 + b_2 \cdot u_2 + \dots + b_m \cdot u_m.$$

La ecuación anterior se puede escribir como:

$$v_2 - b_1 \cdot v_1 = b_2 \cdot u_2 + \dots + b_m \cdot u_m.$$

Por otro lado, la Proposición 2.83 (i) nos indica que la familia $\{v_1, v_2\}$ es l.i. al serlo S' . Por tanto, algún $b_i \neq 0$ con $i \in \{2, \dots, m\}$. Tras renombrar los vectores se puede suponer que $b_2 \neq 0$. Despejando el vector u_2 en la ecuación de arriba, obtenemos:

$$u_2 = b_2^{-1} \cdot v_2 + (-b_2^{-1} \cdot b_1) \cdot v_1 + \dots + (-b_2^{-1} \cdot b_m) \cdot u_m,$$

por lo que u_2 es una c.l. de $\{v_1, v_2, \dots, u_m\}$, es decir, $u_2 \in L(\bar{S}_2 - \{u_2\})$. Aplicando la Proposición 2.70 (ii) se llega a que $S_2 = \bar{S}_2 - \{u_2\} = \{v_1, v_2, u_3, \dots, u_m\}$ es un s.d.g. de V .

Ahora distinguimos dos casos. Si $m = 2$ entonces $S_1 = \{v_1, v_2\}$ y como $k \geq m + 1 = 3$, tenemos el vector $v_3 \in S'$, que será c.l. de S_2 (al ser S_2 un s.d.g. de V). Esto contradice que S' es una familia l.i. Si $m \geq 2$ pasamos al siguiente paso.

En general, para un $m \in \mathbb{N}$ cualquiera, repetimos m veces el proceso anterior para obtener que $S_m = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es un s.d.g. de V . Como $k \geq m + 1$, tenemos el vector $v_{m+1} \in S'$, que será una c.l. de S_m (al ser S_m un s.d.g. de V). Esto contradice que S' es l.i. ■

Ejercicio 2.93. Encontrar cuatro subconjuntos finitos $S_i \subset \mathbb{R}^2$ con $i = 1, 2, 3, 4$, tales que S_1 sea s.d.g. pero no l.i., S_2 sea s.d.g. y l.i., S_3 no sea s.d.g. pero sí l.i. y S_4 no sea s.d.g. ni l.i. (esto ilustra que no existe relación entre el concepto de s.d.g. y el de familia l.i. más allá del teorema de Steinitz).

La idea de la demostración anterior sugiere la relevancia de conjuntos que sean a la vez s.d.g. y l.i.

Definición 2.94. Sea V un e.v. sobre un cuerpo K . Una base de V es una familia $\mathcal{B} \subset V$ tal que \mathcal{B} es un s.d.g. de V y \mathcal{B} es l.i.

La definición previa es válida para cualquier e.v. (aunque no sea f.g.). La idea es tener un s.d.g. irreducible, en el sentido de que ningún vector es c.l. del resto. La terminología “base” se justifica si pensamos que a partir de una cantidad mínima de vectores estamos generando todos los demás. Nos interesarán los e.v. que tengan bases finitas.

Ejemplo 2.95. Dado un sistema de referencia cartesiano en el espacio de vectores libres $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$ con vectores asociados $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, entonces $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^2}$. Dado un sistema de referencia cartesiano en $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ con vectores $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, entonces $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ es una base de $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$.

Ejemplo 2.96. En K^n la familia $\mathcal{B}_u = \{e_1, \dots, e_n\}$ definida en el Ejemplo 2.64 es una base, que llamaremos *base usual o canónica* de K^n .

Ejemplo 2.97. En $M_{m \times n}(K)$ la familia $\mathcal{B}_u = \{E_{ij} \mid i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ definida en el Ejemplo 2.65 es una base, que llamaremos *base usual o canónica* de $M_{m \times n}(K)$.

Ejemplo 2.98. En $K[x]$ la familia $\mathcal{B}_u = \{p_i(x) \mid i \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ con $p_i(x) = x^i$ es una base de $K[x]$, que llamaremos *base usual o canónica* de $K[x]$.

El disponer de una base en un e.v. es algo muy deseable, pues nos permite construir todos los vectores a partir de una cantidad mínima de ellos. En el caso límite del espacio vectorial trivial $V = \{0\}$, el conjunto vacío cumple formalmente los requisitos para ser base (pues es l.i. y $L(\emptyset) = \{0\} = V$). A continuación lo demostraremos para un caso mucho más interesante.

Teorema 2.99 (Existencia de bases). *Sea V un e.v. sobre un cuerpo K .*

Si V es finitamente generado entonces admite al menos una base.

Más aún, si S es cualquier s.d.g. de V , entonces existe una base \mathcal{B} de V incluida en S ($\mathcal{B} \subset S$).

Demostración. Basta con demostrar la afirmación sobre S y, por la discusión anterior, podemos eliminar los casos triviales $S = \emptyset$ (que fuerza $V = \{0\}$, por ser S s.d.g.) y $V = \{0\}$ (pues la base sería $\emptyset \subset S$). Así, escribamos $S = \{v_1, \dots, v_m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

La idea consiste en ir eliminando uno a uno generadores de S que se expresan como c.l. del resto hasta obtener, en una cantidad finita de pasos, un s.d.g. que es también l.i. Para formalizarlo con precisión, operaremos por inducción sobre el número m de vectores de S .

Si $m = 1$ entonces $S = \{v_1\}$. Además, como $V \neq \{0\}$ y $V = L(v_1)$, se sigue que $v_1 \neq 0$. Esto significa que S es una base de V y se concluye el resultado. Supongamos ahora por hipótesis de inducción que todo s.d.g. con $m - 1 \in \mathbb{N}$ elementos contiene una base, y consideremos un s.d.g. S de m elementos. Si S es una familia l.i., entonces S es una base de V y se concluye el resultado. De lo contrario, existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $v_i \in L(S - \{v_i\})$. Gracias a la Proposición 2.70 (ii) sabemos que $S - \{v_i\}$ es un s.d.g. de V . Puesto que $S - \{v_i\}$ consta de $m - 1$ vectores, la hipótesis de inducción garantiza que contiene una base. ■

Nota 2.100. Resulta también cierto que los e.v. no finitamente generados admiten bases. No obstante, para demostrarlo se requiere el llamado *axioma de elección*, el cual excede los contenidos del presente curso. Por conveniencia del lector, lo esbozamos brevemente. De entre las distintas formulaciones del axioma de elección, consideramos la que proporciona el *Lema de Zorn*:

Sea X cualquier conjunto no vacío X con una relación de orden parcial \leq que verifica:

toda *cadena* $C \subset X$ (esto es, todo subconjunto C totalmente ordenado por \leq) posee una *cota superior* (esto es, un elemento K tal que $A \leq K$ para todo $A \in C$).

Entonces, X admite un elemento *maximal* $M \in X$ (esto es, M satisface que, si $A \in X$ verifica $M \leq A$, necesariamente $M = A$).

Para demostrar la existencia de bases en $V(K)$, se toma como X el conjunto de todos los conjuntos linealmente independientes de V (X no es vacío, pues $\emptyset \in X$) y como relación de orden parcial la relación de inclusión \subseteq . Un cadena C en X no es más que una colección totalmente ordenada por \subseteq de subconjuntos l.i. de X , y la unión K de todos ellos sirve como cota superior ($K \in X$, esto es, K es l.i., porque cualquier subconjunto finito suyo estará incluido en un elemento A de la cadena, y como A es l.i. la última afirmación del teorema 2.76 resultará aplicable). El elemento maximal M que proporciona el Lema de Zorn es necesariamente una base. De hecho, M es l.i. por pertenecer a X (lo asegura el lema de Zorn), y es un s.d.g. porque dado cualquier $v \in V$ el conjunto $M \cup \{v\}$ es l.d. (pues si no $M \cup \{v\}$ sería l.i. por la proposición 2.83, y por tanto M no sería maximal).

La demostración del teorema anterior nos hace pensar que un e.v. no trivial V que sea f.g. tendrá varias bases, pues a partir de cualquier s.d.g. se consigue una base eliminando sucesivamente generadores que se escriben como c.l. del resto. De hecho, es fácil darse cuenta de que si K es infinito entonces