# Nociones de Lógica Proposicional

Fco. M. García Olmedo
Universidad de Granada
España

19 de noviembre de 2018

**Resumen**

Contiene un resumen de los conceptos y resultados fundamentales del enfoque semántico de la lógica proposicional. Se añade una explicación del Algoritmo de Davis y Putnam.

## Índice



## Índice de figuras

# 1. Lenguaje Proposicional

**Definición 1.1.** El *lenguaje proposicional* consta de los siguientes símbolos:

- las *proposiciones atómicas*, también llamados *enunciados atómicos* o simplemente *símbolos de variable proposicional*, y que representamos con las primeras letras minúsculas del alfabeto latino, subindicándolas si fuese preciso: $a$, $b$, $c$, $a_1$, $a_2$, $a_3$, etc. Supondremos que dado cualquier conjunto finito de variables proposicionales, existirá al menos una variable que no pertenece a él.
- símbolos lógicos: $\rightarrow$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$ y $\leftrightarrow$
- símbolos auxiliares: ) y (

y llamamos *expresión* del lenguaje proposicional a cada sucesión finita no vacía de sus símbolos. El hecho de que las expresiones $A$ y $B$ sean idénticas (i.e. símbolo a símbolo) se abrevia por $A \equiv B$.

*Observación* 1.1. Un ejemplo de expresión es la siguiente sucesión $a \rightarrow b)ca\vee$ y otro es $(a \rightarrow b) \vee c$. El lector reconocerá que el segundo ejemplo posee "una coherencia" o "equilibrio" que no parece tener el primero. En lo que sigue distinguiremos entre expresiones para definir las llamadas "formulas proposicionales" o "sentencias proposicionales".

**Definición 1.2.** Son *fórmulas proposicionales* o simplemente *fórmulas* del lenguaje proposicional:

- cada una de las proposiciones atómicas,
- las expresiones: $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ y $(\neg\alpha)$, siempre que $\alpha$ y $\beta$ sean fórmulas proposionales.

y convenimos en que no hay otras fórmulas proposicionales distintas a las antes mencionadas.

*Observación* 1.2. Es fácil demostrar que sea cual sea la fórmula que consideremos no existe más que una única forma de escribirla; se trata del *principio de lectura única*.

# 2. Implicación semántica

**Definición 2.1.** Si a cada proposición atómica $a$ le hacemos corresponder un valor (de verdad) 0 ó 1, hemos construido lo que se denomina una *valoración* o también *asignación* y que representaremos por la letra $v$. Por el *principio de lectura única*, cada valoración $v$ puede ser extendida de forma única a la totalidad de las fórmulas cumpliéndose, si dicha extensión la representamos con la misma letra $v$, que:

- $v(\neg\alpha) = v(\alpha) + 1$
- $v(\alpha \rightarrow \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1$
- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha)v(\beta)$

- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = v(\alpha) + v(\beta) + 1$

donde las sumas y multiplicaciones entre los elementos $0$ y $1$ que hemos considerado en la enumeración anterior son las que se consignan en la siguientes tablas:

| $+$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $1$ |
| $1$ | $1$ | $0$ |

| $\cdot$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|
| $0$ | $0$ | $0$ |
| $1$ | $0$ | $1$ |

*Ejemplo* 2.1. A modo de ejemplo de valoraciones ofrecemos los siguientes:

1. $v_1$ cumpliendo que para toda proposición atómica $x$, $v_1(x) = 1$.
2. $v_2$ cumpliendo que para toda proposición atómica $x$, $v_2(x) = 0$.
3. Dado cualquier número natural $n$ y $A = \{a_0, \ldots, a_n\}$ cualquier conjunto de proposiciones atómicas con $n + 1$ elementos, $v_A = \chi_A$.

*Observación* 2.1. Obervar que de la Definición 2.1 se desprenden las siguiente consecuencias sencillas:

- $v(\neg\alpha) = 1$ sii $v(\alpha) = 0$
- $v(\alpha \to \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 0$ ó $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \vee \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 1$ ó $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = 1$ y $v(\beta) = 1)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = 1$ sii $(v(\alpha) = v(\beta))$

y esta consideración, tan útil en la práctica, queda recogida en las tablas de la Figura 1.

| $\alpha$ | $\neg\alpha$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

(a) negación

| $\to$ | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ \ $\beta$ | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |

(b) implicación

| $\vee$ | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ \ $\beta$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

(c) disyunción

| $\wedge$ | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ \ $\beta$ | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

(d) conjunción

| $\leftrightarrow$ | | |
|---|---|---|
| $\alpha$ \ $\beta$ | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

(e) equivalencia

Figura 1: Tablas para la interpretación semántica de los símbolos lógicos

**Definición 2.2.** Sea $\varphi$ una fórmula del lenguaje proposicional. Entonces:

1. $\varphi$ es una *fórmula satisfacible* sii, por def., existe (al menos) una valoración $v$ tal que $v(\varphi) = 1$.

2. $\varphi$ es una *fórmula refutable* sii, por def., $(\neg\varphi)$ es una fórmula satisfacible.

3. $\varphi$ es una *fórmula contingente* sii, por def., $\varphi$ es satisfacible y refutable.

4. $\varphi$ es una *fórmula tautológica*, *tautología* o *válida* sii, por def., para toda asignación $v$ se cumple $v(\varphi)$.

5. $\varphi$ es una *contradicción* sii, por def., $(\neg\varphi)$ es una *tautología*.

*Observación* 2.2. Sea observado que:

- $\varphi$ es una *fórmula refutable* sii existe (al menos) una valoración $v$ tal que $v(\varphi) = 0$.
- En palabras sencillas, una tautología es una fórmula que se evalúa como verdadera, se evalúen como se evalúen las fórmulas atómicas que intervienen en su única escritura; "la verdad" viene exigida por su única estructura sintáctica, significa "la verdad" por su forma y no por el valor mutable de sus partes atómicas.
- Si una fórmula $\varphi$ es satisfacible pero no tautología, entonces es también refutable.
- $\varphi$ es una *contradicción* sii para toda valoración $v$ se cumple la igualdad $v(\varphi) = 0$.
- Si una fórmula $\varphi$ es refutable pero no contradicción, entonces es también satisfacible.

*Ejemplo* 2.2.

1. $\alpha \to \alpha$ (*ley de identidad*)
2. $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$ (ley de silogismo fuerte)
3. $\big(\alpha \to (\beta \to \gamma)\big) \to \big(\beta \to (\alpha \to \gamma)\big)$ (*ley de conmutación de premisas* o *cambio del antecedente*)
4. $(\beta \to \gamma) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ (ley de silogismo débil)
5. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (*ley de "a fortiori"* (con mayor razón) o *"verum sequitur ad quodlibet"* (la verdad se sigue de cualquiera))
6. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$ (*ley de Frege o autodistributiva*)
7. $\alpha \to ((\alpha \to \beta) \to \beta)$ (ley de *modus ponens*)
8. $(\alpha \to (\alpha \to \beta)) \to (\alpha \to \beta)$ (*ley de reducción de premisas*)
9. $((\alpha \to \beta) \to (\beta \to \alpha)) \to (\beta \to \alpha)$
10. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\delta \to ((\beta \to (\gamma \to \varepsilon)) \to (\beta \to \varepsilon)))$
11. $\varepsilon \to ((\alpha \to \beta) \to ((\delta \to \alpha) \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \gamma))$
12. $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (((\beta \to \alpha) \to \gamma) \to \gamma)$ (ley de *Dummet*)
13. $((\alpha \to \beta) \to \beta) \to ((\beta \to \alpha) \to \alpha)$ (ley de *Tanaka*)
14. $\big((\alpha \to \beta) \to \alpha\big) \to \alpha$ (ley de *Peirce*)
15. $((((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$ (ley de *Meredith*)
16. $((\alpha \to \gamma) \to \beta) \to (((\beta \to \alpha) \to \beta) \to \beta)$ (ley para la trivalencia del sistema BCK)

*Ejemplo* 2.3.

1. $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (*ley de doble negación clásica o fuerte*)
2. $\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ (*ley de doble negación intuicionista o minimal*)
3. $\neg\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ (ley de *Brouwer*)
4. $\neg\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$ (*ley de Duns Scoto*)
5. $\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\beta)$ (*ley débil de Duns Scoto*)
6. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$ (*ley de "reductio ad absurdum" clásica o fuerte*)
7. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (*ley de contraposición "tollendo tollens"*)
8. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ (*ley de contraposición "ponendo ponens"*);
9. $(\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \neg\alpha)$ (*ley de contraposición "ponendo tollens"*);
10. $(\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \alpha)$ (*ley de contraposición "tollendo ponens"*);
11. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)$ (*ley "reductio ad absurdum" intuicionista o minimal*)
12. $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$ (*ley de Clavius*)
13. $(\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\alpha$ (*ley débil de Clavius*)
14. $\neg(\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta$ (*ley "ex falso sequitur quodlibet"* (de lo falso se sigue cualquier cosa))
15. $\alpha \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg(\alpha \rightarrow \beta))$
16. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta)$ (*ley del dilema*)
17. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \gamma))$ (ley de *modus ponens* generalizada)

*Ejemplo* 2.4.

1. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha$
2. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \beta$
3. $(\gamma \rightarrow \alpha) \rightarrow ((\gamma \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \rightarrow (\alpha \wedge \beta)))$
4. $\alpha \rightarrow \big(\beta \rightarrow (\alpha \wedge \beta)\big)$
5. $(\beta \wedge \alpha) \rightarrow (\alpha \wedge \beta)$
6. $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma)$ (*ley de importación*)
7. $((\alpha \wedge \beta) \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma))$ (*ley de exportación*)
8. $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \wedge \gamma) \rightarrow (\beta \wedge \gamma))$
9. $((\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$ (*ley "ex toto"* o *transitividad de* $\rightarrow$)
10. $(\alpha \wedge (\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow \beta$ (*ley de "modus ponens"*)

*Ejemplo* 2.5.

1. $\alpha \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
2. $\beta \rightarrow (\alpha \vee \beta)$
3. $(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow ((\alpha \vee \beta) \rightarrow \gamma))$

4. $(\alpha \to (\beta \vee \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \vee (\alpha \to \gamma))$
5. $(\alpha \to \beta) \vee (\beta \to \alpha)$
6. $(\beta \vee \alpha) \to (\alpha \vee \beta)$
7. $(\alpha \to \varphi) \to ((\beta \to \psi) \to ((\alpha \vee \beta) \to (\varphi \vee \psi)))$
8. $(\alpha \vee \varphi) \to ((\neg\alpha \vee \psi) \to (\varphi \vee \psi))$ (ley de resolución)

*Ejemplo* 2.6.

1. $\alpha \vee \neg\alpha$ (*ley "tertium non datur"* o *principio del tercio excluso*)
2. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \to \beta$ (*principio de inconsistencia*)
3. $(\neg\beta \wedge (\alpha \to \beta)) \to \neg\alpha$ (*principio del "modus tollendo tollens"*)
4. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\beta) \to \alpha$
5. $((\alpha \vee \beta) \wedge \neg\alpha) \to \beta$
6. $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma)) \to \gamma$
7. $((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta)) \to \neg\gamma$
8. $((\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \varphi) \wedge (\beta \to \psi)) \to (\varphi \vee \psi)$
9. $((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\varphi \to \alpha) \wedge (\psi \to \beta)) \to (\neg\varphi \vee \neg\psi)$
10. $\neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$ (*principio de no contradicción*)

**Definición 2.3.** Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma$ —posiblemente vacío— y una fórmula $\varphi$ decimos que $\Gamma$ *implica semánticamente* a $\varphi$, abreviadamente $\Gamma \models \varphi$, si para toda valoración $v$ se tiene $v(\varphi) = 1$ siempre que para toda fórmula $\gamma$ de $\Gamma$ valga la igualdad $v(\gamma) = 1$. Si $\Gamma$ consta solamente de las fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, en lugar de $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \models \varphi$ escribimos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$ y cuando $\Gamma = \emptyset$ escribimos simplemente $\models \varphi$ en lugar de $\emptyset \models \varphi$.

*Ejemplo* 2.7.

1. $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$
2. $\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to \beta, \alpha \models \gamma$
3. $\alpha \to \beta, \beta \to \gamma \models \alpha \to \gamma$
4. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \gamma) \wedge (\beta \to \gamma) \models \gamma$
5. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\gamma \to \alpha) \wedge (\gamma \to \beta) \models \neg\gamma$
6. $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \to \varphi) \wedge (\beta \to \psi) \models \varphi \vee \psi$
7. $(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\varphi \to \alpha) \wedge (\psi \to \beta) \models \neg\varphi \vee \neg\psi$
8. $a \vee b \not\models a$
9. $a \not\models a \wedge b$

**Lema 2.1.** *Para toda fórmula $\alpha$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$\alpha$ es tautología.*

*2.* $\models \alpha$.

**Definición 2.4.** Un conjunto $\Gamma$ de fórmulas del lenguaje proposicional es *insatisfacible* sii, por def., para toda valoración $v$ existe $\varphi_v \in \Gamma$ tal que $v(\varphi_v) = 0$. Un conjunto $\Gamma$ de fórmulas del lenguaje es *satisfacible* cuando, y sólo cuando, no es insatisfacible.

*Ejemplo* 2.8.

1. El conjunto $\emptyset$ es satisfacible. En efecto, considérese cualquier asignación (cfr. Ejemplo 2.1) $v$. $v$ satisface al conjunto $\emptyset$, pues si no lo satisfaciese sería porque existiera al menos un elemento $\alpha$ de $\emptyset$ tal que $v(\alpha) = 0$ y con ello el conjunto vacío habría de tener elementos, lo cual es absurdo.

2. Para todo símbolo de variable proposicional $a$, $\{a, \neg a\}$ es insatisfacible.

3. Cualquier conjunto que contenga a $\{a, \neg a\}$, siendo $a$ un símbolo de variable proposicional cualquiera, es insatisfacible.

*Observación* 2.3. Sea observado que:

- Un conjunto $\Gamma$ de fórmulas del lenguaje proposicional es satisfacible sii existe una asignación $v$ (al menos) tal que todo $\gamma \in \Gamma$, $v(\gamma) = 1$.
- $\varphi$ es satisfacible sii $\{\varphi\}$ es satisfacible.
- Según un *razonamiento por vacuidad*, el conjunto $\emptyset$ es satisfacible.
- Si $\Gamma$ es un conjunto de fórmulas proposicionales, $\varphi \in \Gamma$ y $\varphi$ es una tautología, entonces $\Gamma$ es satisfacible sii $\Gamma \setminus \{\varphi\}$ es satisfacible.
- Si $\Gamma$ es un conjunto de fórmula, $\varphi \in \Gamma$ y $\varphi$ es una contradicción, entonces $\Gamma$ es insatisfacible.

# 3. Propiedades Básicas de $\models$

**Definición 3.1.** Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma$ del lenguaje, sea $\mathrm{Con}(\Gamma)$ el conjunto de fórmulas $\gamma$ tales que $\Gamma \models \gamma$. Para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\}$, acordamos abreviar al conjunto $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\})$ por $\mathrm{Con}(\Gamma, \gamma_0, \ldots, \gamma_n)$.

**Teorema 3.1.** *Para cualesquiera conjuntos de fórmulas $\Gamma$ y $\Delta$ se cumple:*

*1.* $\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$

*2.* *Si* $\Gamma \subseteq \Delta$, *entonces* $\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Con}(\Delta)$

*3.* $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$

*4.* $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma)$

**Teorema 3.2.** *Para todo conjunto de fórmulas proposicionales* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ *y todo símbolo de variable* $a$ *se cumple:*

*1.* $\mathrm{Con}(\varnothing) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$

*2.* $\mathrm{Con}(\{a \wedge \neg a\})$ *es igual al conjunto de todas las fórmulas.*

*3.* $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \wedge \beta) = \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha, \beta)$

*4.* $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta) = \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) \cap \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$

*5.* $\mathrm{Con}(\Gamma, \beta) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha)$*, siempre que* $\alpha \models \beta$*.*

**Definición 3.2.** Dos fórmula $\alpha$ y $\beta$ son *lógicamente equivalentes* o símplemente *equivalentes* si, y sólo si, por definición, $\models \alpha \leftrightarrow \beta$, es decir si $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una tautología. La frase "$\alpha$ y $\beta$ son *lógicamente equivalentes*" será abreviada ocasionalmente como $\alpha = \beta$.

*Ejemplo* 3.1. Sean $\alpha$, $\alpha'$, $\beta$, $\beta'$ y $\gamma$ fórmulas. Si $\alpha$ es logicamente equivalente a $\alpha'$ y $\beta$ es lógicamente equivalente a $\beta'$, entonces cada *item* subsiguiente enumera fórmulas lógicamente equivalentes:

1. $\alpha$, $\alpha$
2. $\alpha$ y $\beta$, tautologías cualesquiera.
3. $\alpha \vee \beta$, $\alpha' \vee \beta'$
4. $\alpha \wedge \beta$, $\alpha' \wedge \beta'$
5. $\alpha \to \beta$, $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$
6. $\neg\alpha \to \beta$, $\alpha \vee \beta$
7. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma)$, $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
8. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma)$, $(\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$

**Lema 3.3.** *La relación* $=$ *es una relación de equivalencia entre fórmulas compatible con* $\to$ *y* $\neg$*.*

**Teorema 3.4.** *Sean* $\alpha$ *y* $\beta$ *fórmulas de un lenguaje proposicional. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

*1.* $\alpha$ *y* $\beta$ *son lógicamente equivalentes*

*2.* $\models \alpha \to \beta$ *y* $\models \beta \to \alpha$

*3.* $\alpha \models \beta$ *y* $\beta \models \alpha$

*4. Para toda valoración* $v$*,* $v(\alpha) = v(\beta)$

*Observación* 3.1. Es claro que si $\alpha$ es una tautología y $\alpha \models \beta$, entonces $\beta$ debe ser también una tautología; por lo que *a fortiori* si una fórmula es lógicamente equivalente a una tautología cualquiera, ella será una tautología; y más aún, cualesquiera dos tautologías son lógicamente equivalentes. Por demás existen fórmulas lógicamente equivalentes que no son tautologías, como se ha mostrado antes, y existen parejas de fómulas que no son lógicamente equivalentes. Sin ir más lejos, ninguna proposición atómica es lógicamente a otra salvo ella misma (si convenimos en admitir que la verdad y la falsedad son entes distintos).

**Corolario 3.5.** *Para cualquier conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$*,* $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) = \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$ *siempre que* $\alpha = \beta$*.*

*Observación* 3.2. La afirmación recíproca de la establecida en el Corolario 3.5 no es cierta en general (cfr. Ejercicio 7).

**Teorema 3.6.** *Para cualesquier conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \psi\}$ *se cumple:*

*1. Si* $\Gamma \models \alpha$ *y* $\Gamma \models \alpha \to \beta$ *entonces* $\Gamma \models \beta$ *(regla de Modus Ponens)*

*2. Si* $\Gamma \models \neg\alpha \to \beta$ *y* $\Gamma \models \alpha \to \psi$ *entonces* $\Gamma \models \neg\beta \to \psi$ *y* $\Gamma \models \neg\psi \to \beta$

*3. Si* $\Gamma \models \alpha \vee \beta$ *y* $\Gamma \models \neg\alpha \vee \psi$ *entonces* $\Gamma \models \beta \vee \psi$ *(regla de Resolución)*

**Teorema 3.7** (Teorema de la Deducción). *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$ *un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma, \psi \models \varphi$
2. $\Gamma \models \psi \to \varphi$

**Corolario 3.8.** *Para todo conjunto de fórmulas* $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\}$*, si* $\Gamma, \varphi \models \psi$ *y* $\Gamma \models \varphi$ *entonces* $\Gamma \models \psi$*.*

**Corolario 3.9.** *Para cualesquiera fórmulas* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ *(*$2 \leq n$*) son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$
2. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \models \varphi$
3. $\models \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \to \varphi$

**Teorema 3.10.** *Sea* $\Gamma \cup \{\varphi\}$ *un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \models \varphi$
2. $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ *es insatisfacible*

**Corolario 3.11.** *Para cualesquiera fórmulas* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ *(*$2 \leq n$*) son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$
2. $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \neg\varphi\}$ *es insatisfacible*
3. $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\varphi$ *es insatisfacible*

**Teorema 3.12.** *Sea* $\Gamma \cup \{\psi, \varphi\}$ *un conjunto de fórmulas. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $\Gamma \models \psi$ *y* $\Gamma \models \varphi$
2. $\Gamma \models \psi \wedge \varphi$

**Teorema 3.13.** *Sea* $\Gamma \cup \{\psi, \varphi, \xi\}$ *un conjunto de fórmulas.*

1. *Si* $\Gamma, \psi \models \xi$ *y* $\Gamma, \varphi \models \xi$*, entonces* $\Gamma, \psi \vee \varphi \models \xi$*.*
2. *Si* $\Gamma \models \varphi$*, entonces* $\Gamma \models \psi \vee \varphi$

**Corolario 3.14** (Demostración por casos). *Para cualesquiera* $n+1$ *fórmulas* $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}, \varphi$ *(*$2 \leq n$*), si* $\gamma_0 \vee \cdots \vee \gamma_{n-1}$ *es una tautología y para todo* $0 \leq i \leq n-1$*,* $\Gamma, \gamma_i \models \varphi$*, entonces* $\Gamma \models \varphi$*.*

# 4. Forma Normal Conjuntiva

Dada una fórmula $\varphi$ el conjunto de sus subfórmulas, representado por $\mathrm{sub}(\varphi)$, es definido recursivamente como sigue:

1. $\mathrm{sub}(a) = \{a\}$, para toda fórmula atómica $a$ del lenguaje
2. $\mathrm{sub}(\neg\alpha) = \{\neg\alpha\} \cup \mathrm{sub}(\alpha)$
3. $\mathrm{sub}(\alpha \to \beta) = \{\alpha \to \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
4. $\mathrm{sub}(\alpha \vee \beta) = \{\alpha \vee \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
5. $\mathrm{sub}(\alpha \wedge \beta) = \{\alpha \wedge \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$
6. $\mathrm{sub}(\alpha \leftrightarrow \beta) = \{\alpha \leftrightarrow \beta\} \cup \mathrm{sub}(\alpha) \cup \mathrm{sub}(\beta)$

**Lema 4.1.** *Sean $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ fórmulas. Entonces:*

1. $\alpha = \alpha$
2. $\alpha = \alpha \vee \alpha$
3. $\alpha = \alpha \wedge \alpha$
4. $\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha$
5. $\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha$
6. $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$
7. $(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma)$
8. $\neg\neg\alpha = \alpha$
9. $\alpha \to \beta = \neg\alpha \vee \beta$
10. $\neg(\alpha \wedge \beta) = \neg\alpha \vee \neg\beta$
11. $\neg(\alpha \vee \beta) = \neg\alpha \wedge \neg\beta$
12. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$
13. $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
14. $\alpha = \alpha \vee (\beta \wedge \neg\beta)$
15. $\alpha = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)$
16. $\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$
17. $(\neg\alpha \vee \alpha) \wedge \beta = \beta$
18. $(\neg\alpha \vee \alpha) \vee \beta = \neg\alpha \vee \alpha$
19. $(\neg\alpha \wedge \alpha) \vee \beta = \beta$
20. $(\neg\alpha \wedge \alpha) \wedge \beta = \neg\alpha \wedge \alpha$

*Observación* 4.1. En virtud del Lema 4.1, podemos escribir $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ sin que haya lugar a confusión, pues las fórmulas $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$ y $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$ se ha visto que son equivalentes. Podemos hacer una consideración análoga para la conectiva $\vee$.

**Lema 4.2.** *Sean $\alpha$ y $\beta$ fórmulas del lenguaje. Si $\alpha' = \alpha$ y $\beta = \beta'$, entonces:*

1. $(\alpha \to \beta) = (\alpha' \to \beta')$
2. $(\alpha \vee \beta) = (\alpha' \vee \beta')$

*3.* $(\alpha \wedge \beta) = (\alpha' \wedge \beta')$

*4.* $(\alpha \leftrightarrow \beta) = (\alpha' \leftrightarrow \beta')$

**Teorema 4.3.** *Sean $\varphi$, $\alpha$ y $\beta$ fórmulas del lenguaje. Si $\alpha \in \mathrm{sub}(\varphi)$, $\alpha$ es lógicamente a $\beta$ y $\tilde{\varphi}$ es cualquier fórmula obtenida de $\varphi$ sustituyendo por $\beta$ alguna (o ninguna) de sus ocurrencia de $\alpha$, entonces $\varphi$ y $\tilde{\varphi}$ son lógicamente equivalentes.*

**Definición 4.1.** Una fórmula $\lambda$ es un *literal proposicional* si existe una proposición atómica $a$ tal que $\lambda$ es la fórmula $a$ o es la fórmula $\neg a$. Dado un literal $\lambda$, definimos su *literal complementario* $\lambda^c$ como sigue:

$$\lambda^c = \begin{cases} \neg a & , \textit{si } \lambda = a \\ a & , \textit{si } \lambda = \neg a \end{cases}$$

Llamamos *cláusula* a toda fórmula de la forma $\lambda_0 \vee \cdots \vee \lambda_m$ donde $m$ es un número natural y para todo $0 \leq i \leq m$, $\lambda_i$ es un literal del lenguaje. Admitimos además entre las cláusulas a una especial que es la *cláusula vacía*, representanda por el símbolo $\square$, y que consideramos como la disyunción de los literales del conjunto vacío, es decir, en la enumeración de sus literales no hay ninguno. Una fórmula $\varphi$ está en *forma normal conjuntiva*, abreviadamente f.n.c., si es una conjunción de cláusulas, es decir, $\varphi$ se escribe como:

$$\bigwedge_{i=0}^{n} (\lambda_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda_{i,m_i})$$

donde para todo $1 \leq i \leq n$, $\lambda_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda_{i,m_i}$ es una cláusula. En tal caso llamamos *conjunto* a cada fórmula $\lambda_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda_{i,m_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$. Una fórmula $\varphi$ está en *forma normal disyuntiva*, abreviadamente f.n.d., sii $\varphi$ se escribe como:

$$\bigvee_{i=0}^{n} (\lambda_{i,0} \wedge \cdots \wedge \lambda_{i,m_i})$$

donde $\lambda^c_{i,0} \vee \cdots \vee \lambda^c_{i,m_i}$ es una cláusula.

**Lema 4.4.** *Toda fórmula $\varphi$ es lógicamente equivalente a una fórmula $\xi$ que se escribe sin el signo $\rightarrow$ ni el signo $\leftrightarrow$.*

**Lema 4.5.** *Toda fórmula $\varphi$ es lógicamente equivalente a una fórmula $\psi$ que se escribe sin el signo $\rightarrow$ ni el signo $\leftrightarrow$ y que tiene todos los símbolos de negación adjuntos a subfórmulas atómicas.*

**Teorema 4.6.** *Para toda fórmula $\varphi$ del lenguaje existe una fórmula $\varphi_{fnc}$ cumpliendo:*

*1.* $\varphi_{fnc}$ *está en forma normal conjuntiva*

*2.* $\varphi = \varphi_{fnc}$.

**Corolario 4.7.** *Para toda fórmula $\varphi$ del lenguaje existe una fórmula $\varphi_{fnd}$ cumpliendo:*

*1.* $\varphi_{fnd}$ *está en forma normal disyuntiva*

*2.* $\varphi = \varphi_{fnd}$

## Método para encontrar una forma normal conjuntiva

Dada una fórmula del lenguaje que no es tautología, para encontrar una fórmula equivalente a ella en forma normal conjuntiva procedemos como se sugiere a continuación:

- Tener en cuenta el Teorema 4.3.

- Usar que

$$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \land (\psi \to \varphi) \tag{1}$$
$$\varphi \to \psi = \neg\varphi \lor \psi \tag{2}$$

  y en ese orden.

- Usar repetidamente que:

$$\neg\neg\varphi = \varphi \tag{3}$$

  las *leyes de De Morgan* que establecen que:

$$\neg(\varphi \lor \psi) = \neg\varphi \land \neg\psi \tag{4}$$
$$\neg(\varphi \land \psi) = \neg\varphi \lor \neg\psi \tag{5}$$

- Usar que

$$\varphi \lor (\phi \land \psi) = (\varphi \lor \phi) \land (\varphi \lor \psi)$$

# 5. El Método de Davis y Putnam

**Definición 5.1.** En ocasiones veremos a la cláusula como el conjunto de sus literales, pues en ella no importa el orden. Toda cláusula con un literal recibe el nombre de *cláusula unit*. Una cláusula es *ampliación* de otra si todos los literales de ésta están presentes en aquella.

*Observación* 5.1. Formalmente entenderemos que toda cláusula es la disyunción de la vacía y otra, vacía o no. Así, por ejemplo, si de una cláusula unit restamos su único literal, queda la cláusula vacía. Convendremos en que la cláusula vacía es insatisfacible.[1]

**Lema 5.1** (Regla de las Tautologías (regla 1))**.** *Sea $\Sigma$ un conjunto de cláusulas. Si $\Sigma'$ se obtiene de $\Sigma$ sustrayendo de éste alguna cláusula tautológica, entonces $\Sigma$ es satisfacible si, y sólo si, lo es $\Sigma'$.*

**Teorema 5.2** (Regla de la Cláusula Unit (regla 2))**.** *Sea $\Sigma$ un conjunto de cláusulas que cuenta entre sus elementos con una cláusula unit $\lambda$ y sea $\Sigma'$ el conjunto de cláusulas obtenido sustrayendo de $\Sigma$ todas las ampliaciones de $\lambda$.*

1. *Si $\Sigma' = \emptyset$, entonces $\Sigma$ es satisfacible*
2. *Si $\Sigma' \neq \emptyset$, sea $\Sigma''$ el conjunto que resulta de $\Sigma'$ tras suprimir todas las ocurrencias de $\lambda^c$ en las cláusulas de $\Sigma'$. $\Sigma''$ es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\Sigma$.*

**Definición 5.2.** Un literal $\lambda$ es *puro* en un conjunto de cláusas $\Sigma$ si aparece él en al menos una cláusula y no aparece $\lambda^c$ en ninguna de las cláusulas de $\Sigma$.

**Lema 5.3** (Regla del Literal Puro (regla 3))**.** *Sea $\Sigma$ un conjunto de cláusulas. Si $\lambda$ es un literal puro de $\Sigma$ y $\Sigma'$ es el conjunto que resulta de $\Sigma$ sustrayendo de éste todas las cláusulas que son ampliación de $\lambda$, entonces $\Sigma'$ es insatisfacible si, y sólo si, lo es $\Sigma$.*

**Teorema 5.4** (Regla de Descomposición (regla 4))**.** *Sea $\Sigma$ un conjunto de cláusulas que puede ser expresado como*

$$\{\alpha_0 \lor \lambda, \ldots, \alpha_m \lor \lambda, \beta_0 \lor \lambda^c, \ldots, \beta_n \lor \lambda^c\} \cup \Omega$$

*donde $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \cup \{\beta_0, \ldots, \beta_n\} \cup \Omega$ es un conjunto de cláusulas en las que no aparece ni $\lambda$ ni $\lambda^c$ y sea $\Sigma_1 = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_m\} \cup \Omega$ y $\Sigma_2 = \{\beta_0, \ldots, \beta_n\} \cup \Omega$. $\Sigma$ es insatisfacible si, y sólo si, $\Sigma_1$ y $\Sigma_2$ son insatisfacibles.*

[1] Este convenio no es arbitrario, una forma de justificarlo consiste en decir: dado que una cláusula es tanto más fácil de satisfacer cuanto más literales tiene, es "lógico" que la cláusula que no tiene ningún literal sea imposible de satisfacer.

*Observación* 5.2. Observar que en el teorema 5.4 podíamos haber concluido de forma equivalente "$\Sigma$ es satisfacible si, y sólo si, $\Sigma_1$ es satisfacible o $\Sigma_2$ satisfacible".

*Observación* 5.3. Para saber si un conjunto de cláusulas es satisfacible o no, aplicamos las anteriores reglas en el orden que han sido dadas.

*Ejemplo* 5.1. El conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&a_7 \vee a_8,\\ &a_0 \vee a_6 \vee a_7 \vee \neg a_8,\\ &a_0 \vee a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7,\\ &a_1 \vee a_7,\\ &\neg a_5 \vee \neg a_6,\\ &a_0 \vee \neg a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7,\\ &\neg a_0 \vee a_5 \vee \neg a_6,\\ &a_0 \vee \neg a_3 \vee \neg a_6,\\ &a_0 \vee a_6 \vee \neg a_7,\\ &\neg a_0 \vee \neg a_8\}\end{aligned}$$

es satisfacible. El algoritmo de Davis& Putnam lo pondrá de manifiesto en el estudio de la Figura 2. Allí hemos completado el grafo, pero en realidad no sería necesario. Si es completado "primero en profundidad con rectroceso" de izquierda a derecha, habríamos llegado a $\Sigma_{11112}$ y volveríamos a $\Sigma_{1112}$. Esta rama determinaría la detención al llegar a $\Sigma_{11122}$ pues resulta vacío; por tanto, $\Sigma$ es satisfacible. Encontrar una asignación que satisfaciese al conjunto sería ahora fácil. En efecto, bastaría con tomar cualquier asignación $v$ tal que:

- $v(a_7) = 1$
- $v(\neg a_3) = 1$, con lo que $v(a_3) = 0$
- $v(\neg a_6) = 0$, con lo que $v(a_6) = 1$
- $v(\neg a_5) = 1$, con lo que $v(a_5) = 0$
- $v(a_0) = 0$
- $v(a_1) = 1$

Así pues, bastaría con cualquier asignación $v$ que cumpliese:

- $v(a_0) = 0$
- $v(a_1) = 1$
- $v(a_3) = 0$
- $v(a_5) = 0$
- $v(a_6) = 1$
- $v(a_7) = 1$

Obsérvese que no es impuesto ningún valor a $a_8$, aún siendo uno de los símbolos de variable que intervienen en $\Sigma$; por tanto, $v$ puede asignar a $a_8$ cualquiera de los dos valores de verdad.

$$\Sigma$$

Reg. Lit. Puro, $\lambda \equiv a_1, 1$

$$\Sigma_1 = \{a_7 \vee a_8, a_0 \vee a_6 \vee a_7 \vee \neg a_8, a_0 \vee a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7, \neg a_5 \vee \neg a_6, a_0 \vee \neg a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7, \neg a_0 \vee a_5 \vee \neg a_6, a_0 \vee \neg a_3 \vee \neg a_6, a_0 \vee a_6 \vee \neg a_7, \neg a_0 \vee \neg a_8\}$$

R. D.

$\lambda \equiv a_0, 0$

$$\Sigma_{11} = \{a_7 \vee a_8, a_6 \vee a_7 \vee \neg a_8, a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7, \neg a_5 \vee \neg a_6, \neg a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7, \neg a_3 \vee \neg a_6, a_6 \vee \neg a_7\}$$

Reg. Lit. Puro, $\lambda \equiv \neg a_5, 1$

$$\Sigma_{111} = \{a_7 \vee a_8, a_6 \vee a_7 \vee \neg a_8, a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7, \neg a_3 \vee a_6 \vee \neg a_7, \neg a_3 \vee \neg a_6, a_6 \vee \neg a_7\}$$

R. D.

$\lambda \equiv a_6$

$$\Sigma_{1111} = \{a_7 \vee a_8, a_7 \vee \neg a_8, a_3 \vee \neg a_7, \neg a_3 \vee \neg a_7, \neg a_7\}$$

R. Cla. Unit $\lambda \equiv \neg a_7$

$$\Sigma'_{1111} = \{a_7 \vee a_8, a_7 \vee \neg a_8\} \neq \varnothing$$

$$\Sigma_{11111} = \{a_8, \neg a_8\}$$

R. Cla. Unit $\lambda \equiv a_8$

$$\Sigma'_{11111} = \{\neg a_8\} \neq \varnothing$$

$$\Sigma_{11112} = \{\Box\}$$

$\lambda \equiv \neg a_6, 0$

$$\Sigma_{1112} = \{a_7 \vee a_8, \neg a_3\}$$

R. Cla. Unit $\lambda \equiv \neg a_3, 1$

$$\Sigma'_{1112} = \{a_7 \vee a_8\}$$

$$\Sigma_{11121} = \{a_7 \vee a_8\}$$

Reg. Lit. Puro $\lambda \equiv a_7, 1$

$$\Sigma_{11122} = \varnothing$$

$\lambda \equiv \neg a_0$

$$\Sigma_{12} = \{a_7 \vee a_8, \neg a_5 \vee \neg a_6, a_5 \vee \neg a_6, \neg a_8\}$$

R. Cla. Unit $\lambda \equiv \neg a_8$

$$\Sigma'_{12} = \{a_7 \vee a_8, \neg a_5 \vee \neg a_6, a_5 \vee \neg a_6\} \neq \varnothing$$

$$\Sigma_{121} = \{a_7, \neg a_5 \vee \neg a_6, a_5 \vee \neg a_6\}$$

R. Cla. Unit $\lambda \equiv a_7$

$$\Sigma'_{121} = \{\neg a_5 \vee \neg a_6, a_5 \vee \neg a_6\} \neq \varnothing$$

$$\Sigma_{122} = \{\neg a_5 \vee \neg a_6, a_5 \vee \neg a_6\}$$

Reg. Lit. Puro $\lambda \equiv \neg a_6$

$$\Sigma_{123} = \varnothing$$

Figura 2: Estudio de la satisfacibilidad de un conjunto vía el *Algoritmo de Davis&Putnam*.

*Ejercicio* 5.1. Demuestre que la fórmula conocida como *ley de Meredith*(cfr. [1]):

$$((((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$$

es una tautología.

*Solución.* Demostrar que:

$$\models ((((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$$

es equivalente por el *Teorema de la Deducción* (cfr. Teorema 3.7), usado reiteradas veces, a demostrar que:

$$(((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma, \gamma \to \varphi, \beta \models \varphi \tag{6}$$

En primer lugar consideremos que:

$$\begin{aligned}
(((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma &= \neg(\neg(\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\alpha \vee \neg\beta)) \vee \alpha) \vee \gamma \\
&= \neg(((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\alpha \vee \neg\beta)) \vee \alpha) \vee \gamma \\
&= (\neg((\neg\varphi \vee \psi) \wedge \neg(\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha) \vee \gamma \\
&= ((\neg(\neg\varphi \vee \psi) \vee (\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha) \vee \gamma \\
&= (((\varphi \wedge \neg\psi) \vee (\alpha \vee \neg\beta)) \wedge \neg\alpha) \vee \gamma \\
&= ((\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg\alpha) \vee \gamma \\
&= (\varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \wedge (\neg\alpha \vee \gamma) \\
\gamma \to \varphi &= \neg\gamma \vee \varphi
\end{aligned}$$

Sean las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned}
\varphi_0 &\equiv \varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \\
\varphi_1 &\equiv \neg\psi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma, \\
\varphi_2 &\equiv \neg\alpha \vee \gamma, \\
\varphi_3 &\equiv \varphi \vee \neg\gamma, \\
\varphi_4 &\equiv \beta.
\end{aligned}$$

y sea

$$\Sigma_0 = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$$

El problema (6) equivale a demostrar que:

$$\Sigma_0 \models \varphi$$

y esto último es cierto. Para demostrarlo usaremos la *Regla de Resolución* (cfr. Teorema 3.6):

| | |
|---|---|
| $\Sigma_0 \models \varphi \vee \alpha \vee \neg\beta \vee \gamma$ | $\varphi_0 \in \Sigma_0$ |
| $\Sigma_0 \models \beta$ | $\varphi_4 \in \Sigma_0$ |
| $\Sigma_0 \models \varphi \vee \alpha \vee \gamma$ | regla de Resolución |
| $\Sigma_0 \models \neg\alpha \vee \gamma$ | $\varphi_2 \in \Sigma_0$ |
| $\Sigma_0 \models \varphi \vee \gamma \vee \gamma$ | regla de Resolución |
| $\Sigma_0 \models \varphi \vee \gamma$ | $\gamma \vee \gamma = \gamma$ |
| $\Sigma_0 \models \varphi \vee \neg\gamma$ | $\varphi_3 \in \Sigma_0$ |
| $\Sigma_0 \models \varphi \vee \varphi$ | regla de Resolución |
| $\Sigma_0 \models \varphi$ | $\varphi \vee \varphi = \varphi$ |

Obsérvese que $\varphi_1$ no ha sido utilizado por lo que también $\Sigma_0 \setminus \{\varphi_1\} \models a_0$. Otra forma de abordar este problema es mediante el algoritmo de Davis&Putnam. Para ello consideramos la fórmula:

$$((((a_0 \to a_1) \to (\neg a_2 \to \neg a_3)) \to a_2) \to a_4) \to ((a_4 \to a_0) \to (a_3 \to a_0))$$

Demostrar que:

$$\models ((((a_0 \to a_1) \to (\neg a_2 \to \neg a_3)) \to a_2) \to a_4) \to ((a_4 \to a_0) \to (a_3 \to a_0))$$

es equivalente a demostrar, como antes por el *Teorema de la Deducción*, que se cumple:

$$(((a_0 \to a_1) \to (\neg a_2 \to \neg a_3)) \to a_2) \to a_4, a_4 \to a_0, a_3 \models a_0$$

y vía el Teorema 3.10, esto es equivalente a demostrar que el conjunto:

$$\Gamma = \{(((a_0 \to a_1) \to (\neg a_2 \to \neg a_3)) \to a_2) \to a_4, a_4 \to a_0, a_3, \neg a_0\}$$

es insatisfacible. Razonando como antes, la insatisfacibilidad de $\Gamma$ es la del conjunto $\Sigma = \Sigma_0 \cup \{\neg a_0\}$, donde $\Sigma_0$ es el conjunto de fórmulas compuesto por exactamente las siguientes:

$$\begin{aligned}
\sigma_0 &\equiv a_0 \vee a_2 \vee \neg a_3 \vee a_4, \\
\sigma_1 &\equiv \neg a_1 \vee a_2 \vee \neg a_3 \vee a_4, \\
\sigma_2 &\equiv \neg a_2 \vee a_4, \\
\sigma_3 &\equiv a_0 \vee \neg a_4, \\
\sigma_4 &\equiv a_3.
\end{aligned}$$

El método de Davis&Putnam soluciona el problema según lo que expresa su aplicación resumida en el esquema de la Figura 3. En ella vemos que $\square \in \Sigma_4$, por lo que $\Sigma_4$ es insatisfacible y, equivalentemente, $\Sigma$ es insatisfacible. Obsérvese que $\neg a_1 \in \Sigma_4$; ello indica de nuevo que también $\Sigma \setminus \{\varphi_1\}$ es insatisfacible.

Al ser tautología la fórmula:

$$((((a_0 \to a_1) \to (\neg a_2 \to \neg a_3)) \to a_2) \to a_4) \to ((a_4 \to a_0) \to (a_3 \to a_0)),$$

para cualesquiera fórmulas: $\varphi$, $\psi$, $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ lo será:

$$((((\varphi \to \psi) \to (\neg\alpha \to \neg\beta)) \to \alpha) \to \gamma) \to ((\gamma \to \varphi) \to (\beta \to \varphi))$$

la cual se obtiene de ella sustituyendo convenientemente. $\square$

*Ejercicio* 5.2. Considere el conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{\neg a \vee c \vee d, \neg b \vee c \vee c, a \vee \neg c \vee d, a \vee d \vee e, \neg a \vee \neg c, \neg a \vee \neg b, \neg a \vee b \vee \neg d, a \vee b \vee \neg d, a \vee e \vee \neg e\}$$

y demuestre que es satisfacible mediante el algoritmo de Davis&Putnam. Hecho esto, encuentre una asignación que satisfaga a $\Sigma$.

$$\Sigma = \{a_0 \vee a_2 \vee \neg a_3 \vee a_4, \neg a_1 \vee a_2 \vee \neg a_3 \vee a_4, \neg a_2 \vee a_4, a_0 \vee \neg a_4, a_3, \neg a_0\}$$

$$\text{Regla 2} \Bigg| \lambda \equiv a_3$$

$$\Sigma' = \{a_0 \vee a_2 \vee \neg a_3 \vee a_4, \neg a_1 \vee a_2 \vee \neg a_3 \vee a_4, \neg a_2 \vee a_4, a_0 \vee \neg a_4, \neg a_0\} \quad \neq \varnothing$$

$$\Bigg\downarrow$$

$$\Sigma_1 = \{a_0 \vee a_2 \vee a_4, \neg a_1 \vee a_2 \vee a_4, \neg a_2 \vee a_4, a_0 \vee \neg a_4, \neg a_0\}$$

$$\text{Regla 2} \Bigg| \lambda \equiv \neg a_0$$

$$\Sigma_1' = \{a_0 \vee a_2 \vee a_4, \neg a_1 \vee a_2 \vee a_4, \neg a_2 \vee a_4, a_0 \vee \neg a_4\} \quad \neq \varnothing$$

$$\Bigg\downarrow$$

$$\Sigma_2 = \{a_2 \vee a_4, \neg a_1 \vee a_2 \vee a_4, \neg a_2 \vee a_4, \neg a_4\}$$

$$\text{Regla 2} \Bigg| \lambda \equiv \neg a_4$$

$$\Sigma_2' = \{a_2 \vee a_4, \neg a_1 \vee a_2 \vee a_4, \neg a_2 \vee a_4\} \quad \neq \varnothing$$

$$\Bigg\downarrow$$

$$\Sigma_3 = \{a_2, \neg a_1 \vee a_2, \neg a_2\}$$

$$\text{Regla 2} \Bigg| \lambda \equiv \neg a_2$$

$$\Sigma_3' = \{a_2, \neg a_1 \vee a_2\} \quad \neq \varnothing$$

$$\Bigg\downarrow$$

$$\Sigma_4 = \{\square, \neg a_1\}$$

Figura 3: Tautología de Meredith vía el Álgoritmo de Davis&Putnam.

*Ejercicio* 5.3. Estudie si el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\begin{aligned}\Sigma = \{&\neg a \vee c \vee f,\\ &b \vee c \vee f,\\ &b \vee \neg c \vee f,\\ &\neg b \vee f,\\ &a \vee \neg b \vee f,\\ &\neg a \vee d \vee f,\\ &d \vee f,\\ &b \vee d \vee e \vee \neg f,\\ &b \vee \neg d \vee e \vee \neg f,\\ &b \vee \neg e \vee \neg f,\\ &a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg f,\\ &\neg a \vee \neg b \vee c \vee \neg f\}\end{aligned}$$

es o no insatisfacible y caso de ser satisfacible, dé una asignación que lo evidencie.

# 6. Ejemplos

*Ejercicio* 6.1. Sean $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ fórmulas cualesquiera. Clasifique la siguiente fórmula:

$$\varphi \equiv (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to \alpha) \to ((\alpha \vee \beta \vee \gamma) \to (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma))))$$

*Solución.* En primer lugar:

$$\begin{aligned}\models \varphi &\Leftrightarrow \alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \gamma \to \alpha, \alpha \vee \beta \vee \gamma \models \alpha \wedge \beta \wedge \gamma\\ &\Leftrightarrow \neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma, \neg\gamma \vee \alpha, \alpha \vee \beta \vee \gamma \models \alpha\\ &\text{y } \neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma, \neg\gamma \vee \alpha, \alpha \vee \beta \vee \gamma \models \beta\\ &\text{y } \neg\alpha \vee \beta, \neg\beta \vee \gamma, \neg\gamma \vee \alpha, \alpha \vee \beta \vee \gamma \models \gamma\end{aligned}$$

Usando reiteradamente la *regla de resolución* (cfr. 3) del Teorema 3.6) tendremos lo que muestra el esquema de la Figura 4; así pues, $\varphi$ es una tautología. □

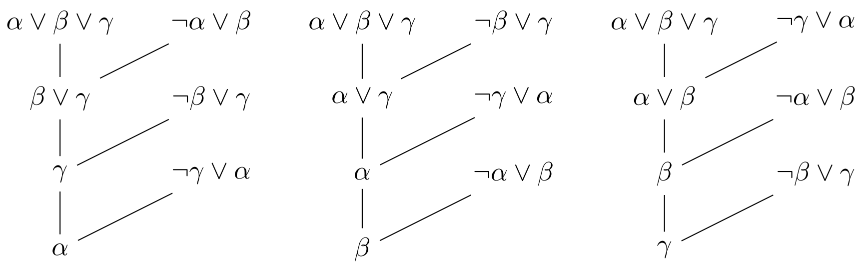


Figura 4: Estudio de la equivalencia.

*Ejercicio* 6.2. Sabemos que un conjunto $\Delta$ de fórmulas es cerrado sii, por def., $\mathrm{Con}(\Delta) = \Delta$. Demuestre que para todo conjunto $\Gamma$ de fórmulas está definido el conjunto de fórmulas de la derecha en la siguiente igualdad y que ella misma es cierta:

$$\mathrm{Con}(\Gamma) = \bigcap\{\Delta \colon \Delta \text{ es conjunto de fórmulas cerrado y } \Gamma \subseteq \Delta\} \tag{7}$$

Demuestre además que:

1. $\mathrm{Con}(\emptyset) = \bigcap\{\Delta \colon \Delta \text{ es cerrado}\}$
2. Para todo conjunto de fórmulas $\Delta$, $\mathrm{Con}(\emptyset) \subseteq \Delta$ siempre que $\Delta$ sea cerrado.
3. $\mathrm{Con}(\emptyset)$ es el menor conjunto cerrado.
4. para cualesquiera fórmulas $\varphi$ y $\psi$, $\psi \in \Delta$ siempre que $\varphi, \varphi \to \psi \in \Delta$ y $\Delta$ sea cerrado.

*Solución.* Al ser cerrado el conjunto de todas las fórmulas, el conjunto sobre el que se hará la intersección de (7) es no vacío y la intersección puede ser efectuada; demostremos ahora dicha igualdad. Supongamos $\Delta$ cualquier conjunto de fórmulas tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ y que $\Delta$ es cerrado entonces:

$$\begin{aligned} \mathrm{Con}(\Gamma) &\subseteq \mathrm{Con}(\Delta) && (\text{monotonía de } \mathrm{Con}) \\ &= \Delta && (\Delta \text{ es cerrado}) \end{aligned}$$

Así pues:

$$\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \bigcap\{\Delta \colon \Delta \text{ es conjunto de fórmulas cerrado y } \Gamma \subseteq \Delta\} \tag{8}$$

Por otra parte, sabemos que $\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$ y que $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma))$, es decir, que $\mathrm{Con}(\Gamma)$ es cerrado. Como la intersección de cualquier colección de conjuntos está incluida en cualquiera de los intersecados, deducimos que:

$$\bigcap\{\Delta \colon \Delta \text{ es conjunto de fórmulas cerrado y } \Gamma \subseteq \Delta\} \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma) \tag{9}$$

De las relaciones (8) y (9) deducimos la igualdad (7). Para lo que sigue:

1. Al ser el conjunto vacío subconjunto de cualquier conjunto, en particular lo es de cualquier conjunto cerrado, por lo que:
$$\mathrm{Con}(\emptyset) = \bigcap\{\Delta \colon \Delta \text{ es cerrado}\}$$
2. Si $\mathrm{Con}(\emptyset) = \bigcap\{\Delta \colon \Delta \text{ es cerrado}\}$, entonces $\mathrm{Con}(\emptyset)$ es subconjunto de cualquier conjunto de fórmulas cerrado.
3. Por el apartado 2), al ser $\mathrm{Con}(\emptyset)$ cerrado.
4. Supongamos que $\Delta$ es un conjunto de fórmulas cerrado, que $\varphi$ y $\psi$ son fórmulas y que $\varphi, \varphi \to \psi \in \Delta$. Al cumplirse $\{\varphi, \varphi \to \psi\} \subseteq \Delta$, se tendrá que
$$\mathrm{Con}(\{\varphi, \varphi \to \psi\}) \subseteq (\Delta)$$
Como $\psi \in \mathrm{Con}(\{\varphi, \varphi \to \psi\})$, tenemos lo que se pide.

$\square$

*Ejercicio* 6.3. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas proposicionales $\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}$ se cumple:

1. $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha, \beta\})$
2. $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}) = \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap \mathrm{Con}(\Gamma \cup \{\beta\})$

*Solución.*

1. Para toda asignación $v$, $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha)v(\beta)$ por lo que $v_*(\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\}) = \{1\}$ sii $v_*(\Gamma \cup \{\alpha, \beta\}) = \{1\}$ y de ello lo que afirma el apartado.

2. Razonamos por doble inclusión. En primer lugar supongamos que $\varphi \in \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\})$; entonces:

$$\begin{array}{ll}
\Gamma, \alpha \vee \beta \models \varphi & \text{(es lo supuesto)} \\
\Gamma \models \alpha \vee \beta \to \varphi & \text{(Teorema de la Deducción)} \\
\models \alpha \to \alpha \vee \beta & \\
\Gamma \models \alpha \to \alpha \vee \beta & \text{(monotonía)} \\
\models (\alpha \to \alpha \vee \beta) \to ((\alpha \vee \beta \to \varphi) \to (\alpha \to \varphi)) & \text{(silogismo)} \\
\Gamma \models (\alpha \to \alpha \vee \beta) \to ((\alpha \vee \beta \to \varphi) \to (\alpha \to \varphi)) & \text{(monotonía)} \\
\Gamma \models \alpha \to \varphi & \text{(modus ponens dos veces)} \\
\Gamma, \alpha \models \varphi & 
\end{array} \tag{10}$$

Por (10) y la simetría del problema deducimos que:

$$\text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}) \subseteq \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap \text{Con}(\Gamma \cup \{\beta\}) \tag{11}$$

Recíprocamente, supongamos que $\varphi \in \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap \text{Con}(\Gamma \cup \{\beta\})$. Entonces $\Gamma, \alpha \models \varphi$ y $\Gamma, \beta \models \varphi$, de donde $\Gamma \models \alpha \to \varphi$ y $\Gamma \models \beta \to \varphi$, pero

$$\models (\alpha \to \varphi) \to ((\beta \to \varphi) \to (\alpha \vee \beta \to \varphi))$$

por lo que:

$$\alpha \to \varphi, \beta \to \varphi, (\alpha \to \varphi) \to ((\beta \to \varphi) \to (\alpha \vee \beta \to \varphi)) \in \text{Con}(\Gamma)$$

de lo que se deduce (cfr. (4)) que

$$\alpha \vee \beta \to \varphi \in \text{Con}(\Gamma)$$

y en consecuencia

$$\varphi \in \text{Con}(\Gamma, \alpha \vee \beta)$$

de lo que se deduce que:

$$\text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap \text{Con}(\Gamma \cup \{\beta\}) \subseteq \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}) \tag{12}$$

De las inclusiones (11) y (12) deducimos que

$$\text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\}) = \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\}) \cap \text{Con}(\Gamma \cup \{\beta\})$$

□

*Ejercicio* 6.4. Estudie si el siguiente conjunto de cláusulas:

$$\Sigma = \{\neg a \vee c \vee d,\ \neg b \vee c,\ a \vee \neg c \vee d,\ a \vee d \vee e,\ \neg a \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee b \vee \neg d,\ a \vee b \vee \neg d\}$$

es o no insatisfacible y caso de ser satisfacible, dé una interpretación que lo ponga de manifiesto.

*Solución.* Se deduce del esquema de la Figura 5 que $\Sigma$ es satisfacible y que una asignación $v$ que lo satiface es, p.e., cualquiera que cumpla: $v(\neg c) = 1 = v(\neg d) = v(e)$ y $v(a) = 0 = v(b)$, o sea, $v(a) = 0 = v(b) = v(c) = v(d)$ y $v(e) = 1$. □

# 7. Ejercicios de Lógica Proposicional

1. Dado un conjunto de fórmulas $\Gamma$ del lenguaje, sea $\text{Con}(\Gamma)$ el conjunto de fórmulas $\gamma$ tales que $\Gamma \models \gamma$.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & \Sigma \arrow[d, "{\text{R. 3, } \lambda \equiv e, 1}"] & \\
 & & & \Sigma_1 = \{\neg a \vee c \vee d,\ \neg b \vee c,\ a \vee \neg c \vee d,\ \neg a \vee \neg c,\ \neg a \vee \neg b,\ \neg a \vee b \vee \neg d,\ a \vee b \vee \neg d\} \arrow[dl, "{\lambda \equiv a, 0}"'] \arrow[dr, "\lambda \equiv \neg a"] \arrow[d, phantom, "\text{R. 4}"] & \\
 & & \Sigma_{11} = \{\neg b \vee c, \neg c \vee d, b \vee \neg d\} \arrow[dl, "{\lambda \equiv b, 0}"'] \arrow[dr, "\lambda \equiv \neg b"] \arrow[d, phantom, "\text{R. 4}"] & & \Sigma_{12} = \{c \vee d, \neg b \vee c, \neg c, \neg b, b \vee \neg d\} \\
 & \Sigma_{111} = \{\neg d, \neg c \vee d\} \arrow[d, dash, "\text{R. 2}"', "{\lambda \equiv \neg d, 1}"] & & \Sigma_{112} = \{c, \neg c \vee d\} & \\
 & \Sigma'_{111} = \{\neg c \vee d\} \neq \varnothing \arrow[d] & & & \\
 & \Sigma_{1111} = \{\neg c\} \arrow[d, dash, "\text{R. 2}"', "{\lambda \equiv \neg c, 1}"] & & & \\
 & \Sigma'_{1111} = \varnothing & & &
\end{tikzcd}
$$

Figura 5: Estudio de la satisfacibilidad de $\Sigma$ vía el *Algoritmo de Davis&Putnam*.

*a*) Describa a $\mathrm{Con}(\Gamma)$ para los conjuntos $\Gamma$ de fórmulas insatisfacibles.

*b*) Demuestre que para cualesquiera conjuntos de fórmula $\Gamma$ y $\Delta$ son ciertas las siguientes afirmaciones:

1) $\Gamma \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
2) Si $\Gamma \subseteq \Delta$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma) \subseteq \mathrm{Con}(\Delta)$ (monotonía)
3) $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
4) $\mathrm{Con}(\emptyset) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma)$
5) $\mathrm{Con}(\mathrm{Con}(\Gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma)$ (idempotencia)

2. Sea $\Delta$ un conjunto de fórmulas. $\Delta$ es *cerrado* sii, por definición, $\mathrm{Con}(\Delta) = \Delta$. De ejemplos de conjuntos de fórmulas que no sean cerrados y que sí lo sean.

3. Para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$, demuestre que:

   *a*) Si $\Gamma \models \alpha \leftrightarrow \beta$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) = \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$.

   *b*) Si $\alpha = \beta$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha) = \mathrm{Con}(\Gamma, \beta)$.

4. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$ un conjunto de fórmulas del lenguaje proposicional. Demuestre que si $\alpha \vee \beta \in \mathrm{Con}(\Gamma)$ y $\neg\alpha \vee \gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma)$, entonces $\beta \vee \gamma \in \mathrm{Con}(\Gamma)$.

5. Demuestre que para todo cojunto $\Gamma$ de fórmulas:

   *a*) Si $\varphi \in \mathrm{Con}(\Gamma)$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma, \varphi) = \mathrm{Con}(\Gamma)$

   *b*) $\mathrm{Con}(\Gamma \cup \mathrm{Con}(\varnothing)) = \mathrm{Con}(\Gamma)$

6. Demuestre que para todo conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma\}$:

   *a*) $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \to \beta, \alpha \to (\beta \to \gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \to \beta, \alpha \to \gamma)$

   *b*) $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \to (\beta \to \gamma)) = \mathrm{Con}(\Gamma, (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

7. Sean las fórmulas:

   - $\gamma \equiv c \to a$
   - $\alpha \equiv a \wedge (\neg b \vee c)$
   - $\beta \equiv (a \wedge \neg b) \vee c$

   y sea $\Delta = \{\gamma\}$. Demuestre que:

   *a*) $\alpha \models \beta$

   *b*) $\Delta, \alpha \models \beta$

   *c*) $\beta \not\models \alpha$

   *d*) $\alpha \neq \beta$

   *e*) $\Delta, \beta \models \alpha$

   *f*) $\mathrm{Con}(\Delta, \alpha) = \mathrm{Con}(\Delta, \beta)$

   *Ejercicio* 7.1. Sean $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ fórmulas cualesquiera. Clasifique las siguientes fórmulas:

   *a*) $\varphi \equiv (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha))$

   *b*) $\varphi \equiv (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to ((\gamma \to \alpha) \to ((\alpha \vee \beta \vee \gamma) \to (\alpha \wedge \beta \wedge \gamma))))$

8. Sean $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ y $\delta$ fórmulas del lenguaje proposicional estándard. Demuestre que:

$$(((\alpha \to \beta) \to (\neg\gamma \to \neg\delta)) \to \gamma) \to \beta \models (\beta \to \alpha) \to (\delta \to \alpha)$$

9. Consideremos las fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

- $\alpha = a \to (b \wedge \neg c)$
- $\beta = (a \leftrightarrow \neg b) \vee c$

Encuentre una fórmula $\gamma$ de dicho lenguaje tal que para cualquier asignación de variables $v$ se cumpla $v(\gamma) = v(\alpha) + v(\alpha)v(\beta)$.

10. En el lenguaje proposicional estándar, sea $\alpha$ la fórmula:

$$(a \to (b \to (c \to d))) \to ((a \to b) \to (a \to (c \to d)))$$

Demuestre que $\alpha$ es una fórmula tautológica.

11. Clasifique la siguiente fórmula del lenguaje proposicional estándar:

$$((((a \vee b) \wedge \neg c) \to d) \wedge (\neg d \wedge (b \vee a))) \to (c \vee e)$$

12. Estudie si cada una de las siguientes implicaciones semánticas es cierta o no. Cuando no lo sea, encuentre una asignación de variables que lo revele:

   a) $(a \wedge \neg b) \to (a \vee c) \models ((\neg a \vee b) \to (a \vee c)) \to (a \vee c)$
   b) $(a \vee d) \to (b \to c) \models ((a \vee d) \to \neg b) \to \neg c$

13. Para cualesquiera $n+1$ fórmulas $\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}, \varphi$ $(2 \leq n)$, si $\gamma_0 \vee \cdots \vee \gamma_{n-1}$ es una tautología y para todo $0 \leq i \leq n-1$, $\Gamma, \gamma_i \models \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

14. Sea $\Gamma$ es siguiente conjunto de fórmulas del lenguaje proposicional estándard:

$$\{\neg a \vee a \vee c, b \vee c, \neg a \vee c \vee d \vee e, \neg e, a \vee \neg c \vee \neg d, \neg a \vee \neg d, c \vee \neg d, a \vee d, \neg c \vee d\}$$

Decida si $\Gamma$ es o no satisfacible.

15. Decida si:

$$(\neg a \to b) \wedge (c \to d), a \to c, (\neg b \wedge \neg c) \to d, b \to a, (d \wedge \neg c) \to a, a \to d \models a \wedge c \wedge d$$

16. Pruebe que:

$$\models ((((a \to b) \to (\neg c \to \neg d)) \to c) \to e) \to ((e \to \neg b) \to ((e \to a) \to (d \to (a \wedge \neg b))))$$

17. Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

   a) $\gamma_1 = (a \vee b) \to (c \vee d)$
   b) $\gamma_2 = (\neg a \wedge \neg d) \to (\neg c \wedge (c \vee e))$
   c) $\gamma_3 = a \to (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b))$
   d) $\varphi = (d \to (b \vee a)) \to (d \wedge \neg(a \vee \neg b))$

Estudie si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$ y caso de **no** serlo, dé una asignación de variables que lo evidencie.

18. Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

   a) $\gamma_1 = (r \vee t) \to (p \vee s)$
   b) $\gamma_2 = (\neg r \wedge \neg s) \to (\neg p \wedge (\neg p \to q))$
   c) $\gamma_3 = r \to (\neg(p \vee t) \to (\neg s \vee t))$
   d) $\varphi = \neg(s \to (t \vee r)) \vee (s \wedge \neg(t \to r))$

Estudie si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$ y caso de **no** serlo, dé una asignación de variables que lo evidencie.

19. Sean las siguientes fórmulas del lenguaje proposicional estándar:

    *a*) $\gamma_1 = (a \wedge b) \rightarrow (c \vee d)$

    *b*) $\gamma_2 = \neg((a \vee c \vee d) \wedge e)$

    *c*) $\varphi = (a \rightarrow b) \rightarrow (e \rightarrow \neg a)$

    Estudie si $\gamma_1, \gamma_2 \models \varphi$ y caso de **no** serlo, dé una asignación de variables que lo evidencie.

20. Llega un grupo de meteorólogos a la isla de los veraces y mendaces, insteresados en saber si durante la jornada anterior estuvo lloviendo en la misma. Encuentran a tres indígenas que dicen llamarse: Ana, Bruno y Carmen. Al ser preguntados por lo que interesa a los meteorólogos, las respuestas que dieron son las siguientes:

    - Ana: "ayer no llovió aquí"
    - Bruno: "ayer sí llovió aquí"
    - Carmen: "si ayer llovió aquí, yo soy mendaz"

    Averigüe el carácter de cada uno de los indígenas y si llovió o no la jornada anterior en la isla. Constate que los meteorólogos habrían tenido éxito en su pesquisa hablando sólo con Carmen.

21. Sean $\alpha$ una fórmula del lenguaje proposicional estándard. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    *a*) $\alpha$ es una tautología.

    *b*) $\models \alpha$

22. ¿Es cierto que cualesquiera dos tautologías son lógicamente equivalentes? En caso de respuesta negativa, de un ejemplo que lo justifique.

23. Sea $\Gamma \cup \{\varphi\}$ un conjunto de fórmulas. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    *a*) $\Gamma \models \varphi$

    *b*) $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ es insatisfacible

24. Sea $\Gamma \cup \{\psi, \varphi\}$ un conjunto de fórmulas. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    *a*) $\Gamma, \psi \wedge \varphi \models \xi$

    *b*) $\Gamma, \psi, \varphi \models \xi$

25. Demuestre que para cualesquiera fórmulas $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \varphi$ $(2 \leq n)$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

    *a*) $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \models \varphi$

    *b*) $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \neg\varphi\}$ es insatisfacible

    *c*) $\gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \cdots \wedge \gamma_n \wedge \neg\varphi$ es insatisfacible

26. Sea $\Gamma \cup \{\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \psi, \xi\}$ un conjunto de fórmulas del lenguaje de proposicional estándar. Demuestre las siguientes reglas:

    *a*) Si $\Gamma \models \alpha$ y $\Gamma \models \alpha \rightarrow \beta$ entonces $\Gamma \models \beta$ (*regla de modus ponens*)

    *b*) Si $\Gamma \models \alpha \rightarrow \varphi$ y $\Gamma \models \neg\alpha \rightarrow \psi$ entonces $\Gamma \models \neg\psi \rightarrow \varphi$ (*regla de modus ponens generalizada*)

    *c*) Si $\Gamma \models \alpha \rightarrow \varphi$ y $\Gamma \models \neg\alpha \rightarrow \psi$ entonces $\Gamma \models \neg\varphi \rightarrow \psi$

    *d*) Si $\Gamma, \alpha \models \beta$ y $\Gamma, \beta \models \gamma$ entonces $\Gamma, \alpha \models \gamma$.

    *e*) Si $\Gamma, \alpha \models \beta \rightarrow \gamma$ y $\Gamma, \alpha \models \beta$ entonces $\Gamma, \alpha \models \gamma$.

    *f*) Si $\xi$ es una tautología, $\Gamma, \xi \models \varphi$ sii $\Gamma \models \varphi$.

*g*) Si $\Gamma, \alpha \models \varphi$ y $\Gamma, \neg\alpha \models \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$.

*h*) Si $\Gamma, \alpha \to \beta \models \varphi$ y $\Gamma, \beta \to \alpha \models \varphi$, entonces $\Gamma \models \varphi$

*i*) Si $\Gamma, \alpha \to \beta \models \alpha$ entonces $\Gamma \models \alpha$

*j*) Si $\Gamma, \psi \models \varphi$ entonces Si $\Gamma, \neg\varphi \models \neg\psi$.

*k*) Si $\Gamma \models \varphi$ y $\Gamma \models \psi$, entonces $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$.

*l*) Si $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ entonces $\Gamma \models \varphi$.

*m*) $\Gamma, \alpha, \beta \models \varphi$ sii $\Gamma, \alpha \wedge \beta \models \varphi$

*n*) Si $\Gamma \models \alpha \vee \beta$ y $\Gamma \models \neg\alpha \vee \gamma$ entonces $\Gamma \models \beta \vee \gamma$ (*regla de resolución en log. proposicional*)

*ñ*) Si $\Gamma, \alpha \models \varphi$ y $\Gamma, \beta \models \varphi$, entonces $\Gamma, \alpha \vee \beta \models \varphi$.

*o*) Si $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi \vee \psi$

27. Dada una fórmula proposicional que no es tautología, ¿existe una única fórmula en forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a ella? ¿Qué se puede decir de dos fórmulas para las que se encuentra una fórmula en forma normal conjuntiva lógicamente equivalente a ambas? Si existe, encuentre una fórmula en forma normal conjuntiva para las siguientes fórmulas:

    *a*) $\neg(a \leftrightarrow \neg(b \vee c))$

    *b*) $(a \to \neg(b \to (c \vee d))) \to \neg(a \to b)$

28. Considere el conjunto de fórmulas:

$$\Gamma = \{a \vee \neg b \vee \neg c, \neg a \vee \neg b \vee c, a \vee b \vee \neg c \vee d, \neg d\}$$

    y decida mediante el método de Davis y Putnam si $\Gamma$ es satisfacible o no.

29. Considere el conjunto de fórmulas:

$$\Gamma = \{b \vee \neg b \vee c, \neg a \vee \neg b \vee c, \neg b \vee a, b, \neg c\}$$

    y decida mediante el método de Davis y Putnam si $\Gamma$ es satisfacible o no. Concluya razonadamente que

$$\models ((b \to a) \to (b \to (b \to c))) \to ((b \to a) \to (b \to c))$$

30. Considere el conjunto de cláusulas

$$\Gamma = \{a \vee c, \neg b \vee c, d, \neg b \vee \neg c \vee e, b, \neg e\}$$

    y decida mediante el método de Davis y Putnam si $\Gamma$ es satisfacible o no. Concluya razonadamente que

$$\models ((a \to b) \to c) \to (d \to ((b \to (c \to e)) \to (b \to e)))$$

31. Haciendo uso del algoritmo de Davis y Putnam decida si son satisfacibles o no los siguientes conjuntos:

    *a*) $\Sigma_1 = \{\neg a \vee a \vee c, b \vee c, \neg a \vee c \vee d \vee e, \neg e, a \vee \neg c \vee \neg d\}$

    *b*) $\Sigma_2 = \Sigma_1 \cup \{\neg a \vee \neg d, c \vee \neg d\}$

    *c*) $\Sigma_3 = \Sigma_2 \cup \{a \vee d, \neg c \vee d\}$

    *d*) Justifique razonadamente que:

$$\models \big((((\varphi \to \psi) \to (\neg\chi \to \neg\theta)) \to \chi\big) \to \tau\big) \to \big((\tau \to \varphi) \to (\theta \to \varphi)\big)$$

    *e*) Decida si el siguiente conjunto de fórmulas es o no satisfacible:

$$\{(b \wedge \neg a \wedge \neg b) \to c, \neg c \to \neg(\neg a \wedge \neg b), c \to a, b \to a, (\neg a \vee \neg b \vee \neg c) \wedge (d \vee e), a \to (b \to c), d \to \neg e\}$$

    y caso de respuesta afirmativa, encuentre al menos una valoración que lo satisfaga.

# 8. Otros Ejercicios

1. Para las fórmulas proposicionales:

    a) $p \to (q \to r)$
    b) $(\neg p \wedge \neg q) \to (\neg r \wedge s)$
    c) $p \leftrightarrow q$
    d) $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
    e) $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow r)$
    f) $p \wedge q \wedge r$

    Encontrar fórmulas lógicamente equivalentes a ellas en las que se usen solamente las conectivas:

    a) $\{\neg, \wedge\}$
    b) $\{\neg, \vee\}$
    c) $\{\neg, \to\}$
    d) $\{\vee, \wedge\}$

2. Estudiar si las siguientes equivalencias lógicas son ciertas o no. Justificar la respuesta.

    a) $a \to b \equiv \neg a \to \neg b$
    b) $a \leftrightarrow b \equiv \neg a \leftrightarrow \neg b$.
    c) $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \vee (b \to c)$.
    d) $(a \vee b) \to c \equiv (a \to c) \wedge (b \to c)$.
    e) $a \to (b \vee c) \equiv (a \to b) \vee (a \to c)$.
    f) $a \to (b \to c) \equiv (a \wedge b) \to c$

3. Probar que las siguientes fórmulas son tautologías:

    a) $p \to (q \to p)$
    b) $(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$
    c) $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

4. Encontrar en cada uno de los apartados siguientes una fórmula $\alpha$ que lo haga verdadero:

    a) $\alpha,\ a \to b \vDash a \to c$, pero $\alpha \nvDash a \to c$.
    b) $\alpha,\ a \vee \neg b \vDash \neg a$ y $\alpha, b \to c \vDash c$.
    c) $\alpha,\ a \to b \vDash \neg a$ y $\alpha \vDash b \to c$.
    d) $\alpha,\ a \to b \vDash \neg\alpha$ y $\alpha \nvDash b$.
    e) $\alpha,\ a \vDash b$ y $\alpha \vDash a \wedge \neg b$.
    f) $\alpha,\ a \to c,\ b \to c \vDash c$, pero $\alpha \nvDash a$ y $\alpha \nvDash b$.

5. Justificar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos:

    a) Si $\alpha$ y $\beta$ son contingentes, entonces $\alpha \vee \beta$ es contingente.
    b) Si $\alpha$ y $\beta$ son contingentes, entonces $\alpha \wedge \beta$ es contingente.
    c) Si $\alpha$ y $\beta$ son contingentes, entonces $\alpha \to \beta$ es contingente.
    d) Si $\alpha$ y $\beta$ son contingentes, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es contingente.
    e) Si $\alpha$ y $\beta$ son contradicciones, entonces $\alpha \leftrightarrow \beta$ es tautología.
    f) Si $\alpha$ es tautología, entonces $\beta \vee \alpha$ es tautología.

*g*) Si $\alpha$ es insatisfacible, entonces $\alpha \to \beta$ es una tautología.

*h*) $\alpha \vee \beta$ es una tautología si, y sólo si, $\alpha$ y $\beta$ son tautologías.

*i*) Si $\alpha \vee \beta$ es contradicción, entonces $\alpha$ y $\beta$ son contradicciones.

*j*) Si $\alpha \vee \beta$ es una tautología, entonces $\alpha$ o $\beta$ son tautologías.

*k*) Si $\alpha \vee \beta$ es contingente, entonces $\alpha$ y $\beta$ lo es.

*l*) Si $\alpha \to \beta$ es una tautología, entonces $\alpha$ es una contradicción o $\beta$ es una tautología.

*m*) Si $\alpha \to \beta$ es una fórmula contingente, entonces $\alpha$ y $\beta$ son contingentes.

6. En cada una de las situaciones siguientes indicar en cada caso qué tipo de fórmula es $\beta$ (o qué tipo de fórmula no es $\beta$). Justificar la respuesta.

   *a*) $\alpha$ es una tautología y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.

   *b*) $\alpha$ es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es cotingente.

   *c*) $\alpha$ es una tautología y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.

   *d*) $\alpha$ es una tautología y $\alpha \to \beta$ es contingente.

   *e*) $\alpha$ es una tautología y $\alpha \to \beta$ es una contradicción.

   *f*) $\alpha$ es una contradicción y $\alpha \leftrightarrow \beta$ es una contradicción.

   *g*) $\alpha$ es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es una contradicción.

   *h*) $\alpha$ es una contradicción y $\alpha \vee \beta$ es contingente.

   *i*) $\alpha$ es una contradicción y $\beta \to \alpha$ es una tautología.

   *j*) $\alpha$ es contingente y $\alpha \vee \beta$ es una tautología.

   *k*) $\alpha$ es contingente y $\alpha \wedge \beta$ es una contradicción.

   *l*) $\alpha$ es contingente y $\alpha \to \beta$ es una tautología.

   *m*) $\alpha$ es contingente y $\alpha \to \beta$ es contingente.

7. Razonar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   *a*) Si una fórmula proposicional no es satisfacible, su negación sí lo es.

   *b*) Si una fórmula proposicional no es consecuencia de un conjunto de fórmulas, su negación sí lo es.

   *c*) Si una fbf no es consecuencia lógica de un conjunto de fórmulas, su negación tampoco.

   *d*) Si $\Gamma \vDash \alpha$ es posible que exista $\Delta \subset \Gamma$ tal que $\Delta \nvDash \alpha$.

   *e*) Si $\Gamma \nvDash \alpha$ es posible que exista $\Delta \subset \Gamma$ tal que $\Delta \vDash \alpha$.

8. Estudiar si el conjunto de proposiciones:

$$\Gamma = \{\gamma \to (\alpha \vee \beta), \beta \to (\gamma \to \alpha), \delta \wedge \neg(\gamma \to \alpha)\}$$

   es satisfacible o insatisfacible.

9. Usar los distintos tipos de técnicas estudiadas (cálculo de interpretaciones en $\mathbb{Z}_2$, resolución, algoritmo de Davis-Putnam) para determinar si son o no tautologías las siguientes fórmulas:

   *a*) $(q \to p \vee r) \to \big((p \to q) \to (p \to ((r \to q) \to r))\big)$

   *b*) $(\beta \to \neg\alpha) \to ((\neg\alpha \to \neg(\alpha \to \beta)) \to \alpha)$

   *c*) $(\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$

   *d*) $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$

   *e*) $(\beta \to \gamma) \to (\neg(\alpha \to \gamma) \to \neg(\alpha \to \beta))$

*f*) $((\alpha \to \beta) \to \gamma) \to (\beta \to \gamma)$

*g*) $((\neg\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \neg\beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$

*h*) $\neg(a \to b) \to (\neg a \to \neg b)$

*i*) $(\neg a \to \neg b) \to \neg(a \to b)$

*j*) $(p \to q) \to ((\neg p \to q) \to q)$

10. Estudiar si las siguientes afirmaciones son ciertas o no. Caso de no serlo, encuentra una asignación que lo muestre:

*a*) $\{a \to b,\ a \to \neg b\} \models \neg a$

*b*) $\{a \to b,\ a \vee b\} \models b.$

*c*) $\{a \to \neg b,\ a \wedge b\} \models c.$

*d*) $\{a \vee b,\ \neg a \vee \neg b\} \models a \leftrightarrow \neg b.$

*e*) $\{a \leftrightarrow \neg b,\ a \to c\} \models b \vee c.$

*f*) $\{(a \wedge b) \leftrightarrow c,\ \neg c\} \models \neg a \wedge \neg b.$

*g*) $\{\neg(a \wedge b \wedge c),\ (a \wedge c) \vee (b \wedge c)\} \models a \to \neg b.$

*h*) $\{b \to (c \vee a),\ a \leftrightarrow \neg(b \wedge d)\} \models b \leftrightarrow (c \vee d).$

*i*) $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to (a \vee d)\} \models b \to (\neg a \to c).$

*j*) $\{(a \vee c) \to \neg a,\ c \to \neg a,\ b \to \neg a\} \models \neg a.$

*k*) $\{(a \wedge b) \to c,\ c \to d,\ b \wedge \neg d\} \models \neg a.$

*l*) $\{(a \to b) \vee (c \to d),\ \neg a \to a,\ \neg c \to c\} \models b \vee d.$

*m*) $\{a \to (b \vee c),\ c \to d,\ \neg b \vee d\} \models \neg(a \wedge \neg d).$

*n*) $\{(b \to a) \wedge b,\ c \to d,\ b \to c\} \models a \vee d.$

*ñ*) $\{(a \wedge b) \to c,\ (\neg a \wedge \neg b) \to d,\ a \leftrightarrow b\} \models c \vee d.$

*o*) $\{a \to (b \vee c),\ d \vee \neg c,\ b \vee d\} \models a \to d.$

*p*) $\{(\neg b \wedge \neg c) \to \neg a,\ a \to b,\ a \leftrightarrow c\} \models b \vee c.$

*q*) $\{a \to (a \to b),\ (b \vee c) \to a,\ c \to (a \vee b)\} \models b.$

*r*) $\{(a \wedge \neg b) \to \neg c,\ (\neg a \wedge b) \to d,\ \neg a \vee \neg b,\ e \to (a \wedge \neg d)\} \models \neg e.$

*s*) $\{c \to d,\ a \vee b,\ \neg(\neg a \to d),\ \neg a \to b\} \models b \wedge \neg c.$

11. Aplicar el algoritmo de Davis-Putnam a los siguientes conjuntos de cláusulas:

*a*) $\{\neg a \vee \neg b \vee c \vee d, \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d, a \vee \neg b \vee \neg c \vee \neg d, \neg a \vee \neg b \vee \neg c \vee d, a \vee b \vee \neg c, a \vee b \vee \neg d, \neg a \vee c \vee d, \neg b \vee c \vee d, a \vee \neg b, \neg a \vee b, c\}$

*b*) $\{p \vee q, \neg p \vee \neg q, \neg q \vee r \vee t, q \vee \neg r \vee t, q \vee r \neg t, \neg q \vee \neg r \vee \neg t, \neg r \vee s, r \vee \neg s, \neg p \vee s \vee t, p \vee \neg s \vee t, p \vee s \vee \neg t, \neg p \vee \neg s \vee \neg t\}$

*c*) $\{p \vee \neg q \vee \neg r \vee s \vee \neg t, \neg q, p \vee \neg r \vee \neg s, q \vee r \vee \neg s, p \vee \neg q \vee r \vee s \vee \neg t, \neg p \vee \neg q \vee \neg s \vee \neg t, p \vee \neg q \vee r \vee \neg t, q \vee \neg r \vee s \vee t, p \vee \neg q \vee r \vee s, p \vee \neg r \neg s, \neg p \vee s, p \vee \neg q \vee t\}$

12. Formular como un conjunto de cláusulas el *principio del palomar* de orden $n$, $\mathbb{P}_n$, que dice que no es posible colocar $n+1$ objetos distintos en $n$ casilleros de forma que distintos objetos queden en distintos casilleros. Aplicar el algoritmo de Davis-Putnam para demostrar que el conjunto de $9$ cláusulas que se deriva de $\mathbb{P}_2$ es insatisfacible.

13. Formalizar en lenguaje proposicional los siguientes argumentos y decidir si son correctos:

*a*) Si no hay control de nacimientos, entonces la población crece ilimitadamente. Pero si la población crece ilimitadamente, aumentará el índice de pobreza. Por consiguiente, si no hay control de nacimientos, aumentará el índice de pobreza.

*b*) Si la función $f$ no es continua, entonces la función $g$ no es diferenciable. $g$ es diferenciable. Así pues, $f$ no es continua.

*c*) Si hay petróleo en Poligonia, entonces los expertos tienen razón o el gobierno está mintiendo. No hay petróleo en Poligonia o los expertos se equivocan. Así pues, el gobierno está mintiendo.

# Índice alfabético

## Referencias

[1] Monk, J. D. *Mathematical Logic.* Springer-Verlag, 1976.