

Práctica 4: Interpolación

MNI, Curso 18/19

El bagaje alcanzado en las prácticas anteriores permite resolver las cuestiones que se plantean a continuación.

→ ;

1 Ejercicios

1.- Programa la forma de Lagrange del polinomio p de grado menor o igual que N que resuelve el problema de interpolación polinómica: dados $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N)$ (abscisas distintas dos a dos), se tiene que $j=0, 1, \dots, N \Rightarrow p(x_j)=y_j$. Para ello, calcula previamente los polinomios de Lagrange. Aplícalo al problema: encuentra el polinomio p de grado menor o igual que 8 de forma que $p(j/8)=\sin(j/8)-j/4$, ($j=0, 1, \dots, 8$). Dibuja simultáneamente las gráficas de p y de $f(x)=\sin x - 2x$ en el intervalo $[0, 1]$.

2.- Programa la forma de Newton del polinomio p que resuelve el problema de interpolación polinómica anterior. Para ello, calcula previamente los polinomios nodales y las diferencias divididas. Aplícalo a los mismos datos del ejercicio anterior y comprueba que el resultado que obtienes es el mismo.

3.- Sea f la función en $C[-1, 1]$ definida como $f(x)=7.21 \cos(2x/\pi)$. Considera los nodos $x_j=1-2j/21$, $j=0, 1, \dots, 21$, los datos $(x_j, f(x_j))$ y los datos perturbados (x_j, f_j) , siendo $f_j=f(x_j)+10^{-(3-j)}(-1)^j$.

☐ Halla $\max\{|f(x_j)-f_j|: j=0, \dots, 21\}$.

☐ Estima gráficamente la distancia (norma ∞) de los interpolantes obtenidos para las dos series de datos. ¿Qué se puede decir del condicionamiento del problema de interpolación anterior?

☐ Da una estimación de la constante de Lebesgue L y relaciona el valor de este número con el apartado anterior.

☐ Determina los 22 nodos de Chebyshev en el intervalo $[-1, 1]$ y resuelve el problema de interpolación para esos nodos y la misma función f . Analiza el condicionamiento de este nuevo problema.

4.- Resuelve el problema de interpolación de Hermite: encuentra el polinomio p de grado menor o igual que 9 de forma que $p(j)=\log j$, $p'(j)=j/2.36$, $j=1, 2, 3, 4, 5$.

5.- Calcula la solución del problema de interpolación de Taylor: determina el polinomio p de grado menor o igual que 5 tal que la derivada de orden j en 1.47 coincide con la integral entre 0 y 1 de la función x^j , para $j=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

6.- Considera un intervalo real cualquiera $[a, b]$, con $a < b$, y una partición suya $P=\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$.

☐ Halla una base del espacio E de funciones splines continuas y afines a trozos.

☐ Utiliza la base anterior para encontrar el único elemento s de dicho espacio E de forma que $s(x_j)=a_j$, ($j=0, 1, \dots, N$), siendo a_j 's escalares dados.

☐ Aplica lo anterior a la partición $P=\{x_0=0.4, x_1=0.5, x_2=2.34, x_3=3.45, x_4=4.567, x_5=5.081, x_6=5.26\}$ del intervalo $[0.4, 5.26]$ para encontrar el único elemento s de E de forma que $s(x_j)=1-x_j^2/20.78$, ($j=0, 1, \dots, 6$). Dibuja conjuntamente las gráficas de s y de $f(x)=1-x^2/20.78$.

7.- Partiendo de una partición uniforme $P=\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ de in intervalo real cualquiera $[a, b]$,

☐ halla el único spline natural s de clase 2 y grado 3 de forma que $s(x_j)=a_j$, ($j=0, 1, \dots, N$), siendo a_j 's escalares dados,

☐ aplica lo anterior a la partición P del intervalo $[-2.09, 4.56]$ en 8 subintervalos iguales y con $s(x_j)=\log \sqrt[3]{1+|x_j|}$, ($j=0, 1, \dots, 8$) y

☐ dibuja conjuntamente las gráficas de s y de $f(x)=\log \sqrt[3]{1+|x|}$.