
NOTA: .... PARCIALES: .... FINAL: ....

APELLIDOS: .... GRUPO: ....

NOMBRE: .... NIF: .... Nº HOJAS: ....

ASISTE A REVISIÓN: Sí ☐ .... No ☐

LMD

Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

23/01/2019

1. Haga lo siguiente:

   a) Siendo $\{F_n\}_n$ la sucesión de los números de Fibonacci, demostrar que para todo número natural n se cumple la igualdad:

   $$\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

   b) Solucionar la recurrencia:

   $$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n + 3^{n+1} + 3 \tag{1}$$

   Solución.

   a) Lo que se nos pide demostrar es que para todo número natural n vale la igualdad:

   $$\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

   y esto es cierto. La demostración es por inducción sobre n según el predicado $P(n)$ del tenor:

   $$\textstyle\sum_{i=0}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1$$

   Supongamos en el **caso base** que $n = 0$; $\sum_{i=0}^{0} F_{2i} = F_0 = 0 = 1 - 1 = F_1 - 1 = F_{2\cdot 0+1} - 1$. Así pues, $P(0)$ es cierto. Supongamos, como **hipótesis de inducción**, que n es un número natural no nulo y que es cierta $P(n-1)$. En el **paso de inducción** demostraremos que $P(n)$ es cierta. En efecto:

   $$\begin{aligned}
   \sum_{i=0}^{n} F_{2i} &= (\sum_{i=0}^{n-1} F_{2i}) + F_{2n} & \\
   &= F_{2(n-1)+1} - 1 + F_{2n} & \text{hip. de inducción} \\
   &= F_{2n-2+1} + F_{2n} - 1 & \\
   &= F_{2n-1} + F_{2n} - 1 & \\
   &= F_{2n+1} - 1 & \text{def. de } \{F_n\}_n
   \end{aligned}$$

   Por el *Principio de Inducción Finita* sabemos que para todo número natural n, $P(n)$ es cierta.

b) La ecuación característica de la recurrencia (1) es:

$$0 = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$$

por lo que tenemos las soluciones homogénea y particular son:

$$\begin{aligned} x_n^{(h)} &= c_0 + c_1 3^n \\ x_n^{(p)} &= nc_2 3^n + nc_3 \end{aligned}$$

Nuestro trabajo ahora es encontrar el valor de los coeficientes c_2 y c_3; para ello tegamos en cuenta que:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 3 &= u_{n+2} - 4u_{n+1} + 3u_n \\ x_{n+1}^{(p)} &= (n+1)(c_2 3^{n+1} + c_3) = (n+1)(3c_2 3^n + c_3) \\ x_{n+2}^{(p)} &= (n+2)(c_2 3^{n+2} + c_3) = (n+2)(9c_2 3^n + c_3) \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 3^n + 3 &= (n+2)(9c_2 3^n + c_3) \\ &\quad - 4(n+1)(3c_2 3^n + c_3) \\ &\quad + 3n(c_2 3^n + c_3) \\ &= (9(n+2) - 12(n+1) + 3n)c_2 3^n \\ &\quad + (n + 2 - 4(n+1) + 3n)c_3 \\ &= (9n + 18 - 12n - 12 + 3n)c_2 3^n \\ &\quad + (n + 2 - 4n - 4 + 3n)c_3 \\ &= 6c_2 3^n - 2c_3 \end{aligned}$$

por lo que basta con considerar:

$$\begin{aligned} 3 &= 6c_2 & \Rightarrow \quad & c_2 = \frac{1}{2} \\ 3 &= -2c_3 & \Rightarrow \quad & c_3 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Como consecuencia:

$$x_n^{(p)} = n(\frac{1}{2}3^n - \frac{3}{2})$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} x_n &= x_n^{(h)} + x_n^{(p)} \\ &= c_0 + c_1 3^n + n(\frac{1}{2}3^n - \frac{3}{2}) \\ &= c_0 - \frac{3n}{2} + (\frac{n}{2} + c_1)3^n \end{aligned}$$

□

2. Sean α, β y γ fórmulas cualesquiera (no necesariamente variables proposicionales). Clasifique la fórmula:

$$\varphi \equiv (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\gamma \to \alpha))$$

en función del carácter de sus subfórmulas.

Solución. Téngase en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\varphi &= \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta \vee \gamma) \vee \neg(\neg\alpha \vee \beta) \vee (\neg\gamma \vee \alpha) \\
&= (\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\neg\gamma \vee \alpha) \\
&= (\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee ((\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma)) \\
&= ((\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \vee \neg\gamma)) \wedge ((\alpha \wedge \beta \wedge \neg\gamma) \vee (\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma)) \\
&= (\alpha \vee \neg\gamma) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \neg\gamma) \wedge (\alpha \vee \neg\gamma) \\
&\wedge (\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \neg\beta \vee \neg\gamma) \wedge (\alpha \vee \neg\beta \vee \neg\gamma) \\
&= \alpha \vee \neg\gamma
\end{aligned}$$

por lo que:

- $\models \varphi$ sii $\{\gamma, \neg\alpha\}$ es insatisfacible.
- $\models \neg\varphi$ sii $\{\alpha \vee \neg\gamma\}$ es insatisfacible sii α es contradicción y γ tautología.

Así pues, la casuística ordenada por γ es la siguiente:

- γ es tautología:
  - *a*) α es tautología $\Rightarrow$ φ es tautología.
  - *b*) α es contingente $\Rightarrow$ φ es contingente.
  - *c*) α es contradicción $\Rightarrow$ φ es contradicción.
- γ es contingente (entonces φ es satisfacible):
  - *a*) $\{\gamma, \neg\alpha\}$ es insatisfacible $\Rightarrow$ φ es tautología.
  - *b*) $\{\gamma, \neg\alpha\}$ es satisfacible $\Rightarrow$ φ es contingente.
- γ es contradicción $\Rightarrow$ φ es tautología

Y ordenada por α, de forma equivalente, es la siguiente:

- α es tautología $\Rightarrow$ φ es tautología
- α es contingente:
  - γ es tautología $\Rightarrow$ φ es contingente.
  - γ es contingente:
    - $\{\gamma, \neg\alpha\}$ es insatisfacible $\Rightarrow$ φ es tautología.
    - $\{\gamma, \neg\alpha\}$ es satisfacible $\Rightarrow$ φ es contingente.
  - γ es contradicción $\Rightarrow$ φ es tautología.
- α es contradicción $\Rightarrow$ el carácter de φ es el de $\neg\gamma$, esto es:
  - Si γ es tautología $\Rightarrow$ φ es contradicción.
  - Si γ es contingente $\Rightarrow$ φ es contingente.
  - Si γ es contradicción $\Rightarrow$ φ es tautología.

□

3. Para cualesquiera fórmulas proposicionales α y β, $\alpha \leq \beta$ sii, por def., $\models \alpha \to \beta$. Para cualesquier conjunto de fórmulas proposicionales Γ y fórmulas α, β y γ demuestre lo siguiente:
   - *a*) Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma, \gamma \to \beta) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \gamma \to \alpha)$.
   - *b*) Si $\alpha \leq \beta$, entonces $\mathrm{Con}(\Gamma, \alpha \to \gamma) \subseteq \mathrm{Con}(\Gamma, \beta \to \gamma)$.

Solución.

a) Supongamos que $\alpha \leq \beta$. Tenemos lo siguiente:

$\models (\alpha \to \beta) \to ((\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta))$	instancia de la ley del silogismo débil
$\models \alpha \to \beta$	hipótesis
$\models (\gamma \to \alpha) \to (\gamma \to \beta)$	modus ponens,

luego $\gamma \to \alpha \leq \gamma \to \beta$.

b) Supongamos que $\alpha \leq \beta$. Tenemos lo siguiente:

$\models (\alpha \to \beta) \to ((\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma))$	instancia de la ley del silogismo fuerte
$\models \alpha \to \beta$	hipótesis
$\models (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \gamma)$	modus ponens,

luego $\beta \to \gamma \leq \alpha \to \gamma$.

c) Supongamos $\alpha \leq \beta$ y demostremos que $\text{Con}(\Gamma, \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \alpha)$. Tenemos que $\Gamma \cup \{\beta\} \subseteq \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\})$, por lo que:

$$\text{Con}(\Gamma \cup \{\beta\}) \subseteq \text{Con}(\text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\})) = \text{Con}(\Gamma \cup \{\alpha\})$$

d) Si $\alpha \leq \beta$ entonces $\gamma \to \alpha \leq \gamma \to \beta$. Aplicando lo anterior se tiene que $\text{Con}(\Gamma, \gamma \to \beta) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \gamma \to \alpha)$.

e) Si $\alpha \leq \beta$ entonces $\beta \to \gamma \leq \alpha \to \gamma$. Aplicando lo anterior se tiene $\text{Con}(\Gamma, \alpha \to \gamma) \subseteq \text{Con}(\Gamma, \beta \to \gamma)$.

□

4. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole **cualquiera**. Demuestre que para todo $x, y \in B$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   a) $x \leq y$

   b) $x + y = y$

   c) $x \supset y = 1$

Solución. Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole y $x, y \in B$ elementos fijos pero arbitrarios. Entonces:

- Supongamos $x \leq y$, es decir, $xy = x$. Entonces:

$$\begin{aligned} x + y &= xy + y \\ &= y + yx \\ &= y \end{aligned}$$

- Supongamos ahora que $x + y = y$. Entonces:

$$\begin{aligned} x \supset y &= x \supset (x + y) \\ &= x' + (x + y) \\ &= (x' + x) + y \\ &= 1 + y \\ &= 1 \end{aligned}$$

$xy \backslash zu$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

(a) Suma de minterm

$xy \backslash zu$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	1	1	1
10	0	0	1	0

(b) Producto de maxterm

Figura 1: Expresiones de f

- Supongamos ahora que $x \supset y = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} x &= x1 \\ &= x(x \supset y) \\ &= x(x' + y) \\ &= xx' + xy \\ &= 0 + xy \\ &= xy \end{aligned}$$

de donde $x \leq y$.

□

5. Considere la función booleana $f\colon B^4 \longrightarrow B$ definida por:

$$f(x, y, z, u) = \sum m(7, 11, 13, 14, 15)$$

a) Calcule una expresión minimal de f a condición de ser suma de productos de literales.

b) Calcule una expresión minimal de f a condición de ser producto de sumas de literales.

c) Calcule el coste de cada una de las expresiones encontradas para f en los apartados 5*b*) y 5*a*) y señale cuál es la del menor.

Solución. Para la solución del problema nos basaremos en los mapas K de la Figura 1. Del mapa K de la subfigura 1a) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = yzu + xyu + xzu + xyz \tag{2}$$

y del mapa K de la subfigura 1b) deducimos:

$$f(x, y, z, u) = (x + y)(z + u)(y + u)(x + z)(y + z)(x + u) \tag{3}$$

El análisis de los costes es el siguiente:

- Expresión (2)
  - and: 4

- or: 1
- entradas: 16

que arroja un total de 21

- Expresión (3)
  - and: 1
  - or: 6
  - entradas: 18

que arroja un total de 25

□

6. Clasifique razonadamente la fórmula:[1]

$$\varphi \equiv \exists x p(x) \wedge \neg \exists y q(y) \wedge \forall z(p(z) \to q(z))$$

Solución. Supongamos que $\mathbf{A}$ es una estructura para el lenguaje sucinto en el que están expresadas las fórmulas. Al ser φ un sentencia, sea v una asignación de variables cualquiera. Si $I^v_{\mathbf{A}}(\varphi)$ tuviese valor 1, entonces:

- $I^v_{\mathbf{A}}(\exists x p(x)) = 1$ sii existe $m \in A$ tal que $m \in (p)^{\mathbf{A}}$ sii $(p)^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$.
- $I^v_{\mathbf{A}}(\neg \exists y q(y)) = 1$ sii para todo $m \in A$, $m \notin (q)^{\mathbf{A}}$ sii $(q)^{\mathbf{A}} = \varnothing$.
- $I^v_{\mathbf{A}}(\forall z(p(z) \to q(z))) = 1$ sii para todo $m \in A$, si $m \in (p)^{\mathbf{A}}$ entonces $m \in (q)^{\mathbf{A}}$ sii $(p)^{\mathbf{A}} \subseteq (q)^{\mathbf{A}}$.

En resumen, $I^v_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ sii

- $(p)^{\mathbf{A}} \neq \varnothing$
- $(q)^{\mathbf{A}} = \varnothing$
- $(p)^{\mathbf{A}} \subseteq (q)^{\mathbf{A}}$

y estas tres condiciones últimas no pueden darse a la vez; pues de darse, el conjunto vacío tendría elementos. Así pues, φ es una contradicción. □

7. Demuestre que para cualesquiera fórmula φ y símbolo de variable x, son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   a) φ es satisfacible.

   b) $\exists x \varphi$ es satisfacible.

Solución. Supongamos que φ es satisfacible y sea $\langle \mathbf{A}, s \rangle$ una interpretación tal que $I^s_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$. Sea $c = s(x)$, con lo que $s(x|c) = s$; entonces $I^{s(x|c)}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$ y, por tanto, existe $a \in A$ —verbigracia c— tal que $I^{s(x|a)}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$, o sea, $I^s_{\mathbf{A}}(\exists x \varphi) = 1$. Para el recíproco, si $\exists x \varphi$ es satisfacible, sea $\langle \mathbf{A}, s \rangle$ una interpretación que la satisface. Entonces $I^s_{\mathbf{A}}(\exists x \varphi) = 1$, o equivalentemente, existe $a \in A$ tal que $I^{s(x|a)}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$. Si llamanos s' a $s(x|a)$, lo que hemos expresado es que $I^{s'}_{\mathbf{A}}(\varphi) = 1$, es decir, hemos concluido que φ es satisfacible. □

8. Diga razonadamente si el conjunto de cláusulas:

   a) $\neg s(f(x), g(a)) \vee r(f(a), x)$

   b) $s(f(y), y) \vee p(y)$

[1] Aquí y en el resto del del examen, cuando necesite evaluar una fórmula bajo una interpretación $\langle \mathbf{A}, v \rangle$ tendrá que hacerlo aplicando a la misma, formalmente y con rigor, $I^v_{\mathbf{A}}$. Sin ese requisito la puntuación a cualquier respuesta intuitiva será nula.

c) $\neg p(g(a)) \vee \neg p(z)$

d) $\neg r(x, y) \vee p(y)$

es satisfacible o insatisfacible. De ser satisfacible, póngalo de manifiesto aportando una interpretación construida al efecto.

Solución. Consideremos la siguiente demostración:

a) $\neg s(f(x), g(a)) \vee r(f(a), x)$, hip. 8*a*

b) $s(f(y), y) \vee p(y)$, hip. 8*b*

c) $p(g(a)) \vee r(f(a), g(a))$, resolución entre 8*a* y 8*b*, $\Phi = (x|g(a))(y|g(a))$

d) $\neg r(x, y) \vee p(y)$, hip. 8*d*

e) $p(g(a)) \vee p(g(a)) = p(g(a))$, resolución entre 8*c* y 8*d*, $\Phi = (x|f(a))(y|g(a))$

f) $\neg p(g(a))$, factor de hip. 8*c* con $(z|g(a))$

g) $\square$, resolución entre 8*e* y 8*f*

$\square$

9. Diga razonadamente si es cierta o no la siguiente afirmación:

$$\forall x \forall y \forall z(\neg p(f(x, y), g(z, b)) \to p(f(g(a, y), a), x)) \models \exists x \exists z p(f(x, w), z)$$

Solución. No es cierta. Para ponerlo de manifiesto sea:

- $\varphi \equiv \forall x \forall y \forall z(\neg p(f(x, y), g(z, b)) \to p(f(g(a, y), a), x))$
- $\psi \equiv \exists x \exists z p(f(x, w), z)$

y consideremos la siguiente interpretación:

- $\mathbf{A}$:
  - $A = \{0, 1, 2\}$
  - $(a)^{\mathbf{A}} = 0$, $(b)^{\mathbf{A}} = 1$
  - $(g)^{\mathbf{A}}$ es la función constantemente igual a 2 y

$$(f)^{\mathbf{A}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y = 0 \\ 2, & \text{si } y = 1 \\ 1, & \text{si } y = 2 \end{cases}$$

  - $(p)^{\mathbf{A}} = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 0, 1\rangle, \langle 0, 2\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$
- v cualquier asignación cumpliendo $v(w) = 1$, verbigracia, la función constantemente igual a 1.

Se tiene que:

- Para todo $m \in A$ y asignación v', $I_{\mathbf{A}}^{v'(x|m)}(p(f(g(a, y), a), x)) = 1$ pues para todo $m \in A$, $\langle 0, m\rangle \in (p)^{\mathbf{A}}$. Esto conlleva que $I_{\mathbf{A}}^{v}(\varphi) = 1$
- Por otra parte,

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{A}}^{v}(\psi) = 1 &\Leftrightarrow \text{ existen } m, n \in A \text{ tal que } \langle (f)^{\mathbf{A}}(m, v(w)), n\rangle \in (p)^{\mathbf{A}} \\ &\Leftrightarrow \text{ existen } m, n \in A \text{ tal que } \langle (f)^{\mathbf{A}}(m, 1), n\rangle \in (p)^{\mathbf{A}} \\ &\Leftrightarrow \text{ existen } m, n \in A \text{ tal que } \langle 2, n\rangle \in (p)^{\mathbf{A}} \end{aligned}$$

  La última condición es falsa, así que $I_{\mathbf{A}}^{v}(\psi) = 0$.

$\square$

10. Demuestre que en cualquier grafo finito en ejes y vértices, el número de vértices con grado impar debe ser par.

Solución. Para el grafo G sea V (resp. E) el conjunto de vértices (resp. ejes). Sabemos que:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Sea V_1 el conjunto de vértices de grado impar y sea $V_2 = V \setminus V_1$, es decir, V_2 es el conjunto de vértices de grado par. Se tiene:

$$\begin{aligned} 2|E| &= \sum_{v \in V} \deg(v) \\ &= (\sum_{v \in V_1} \deg(v)) + (\sum_{v \in V_2} \deg(v)) \\ &= \sum_{v \in V_1} \deg(v) + 2k \end{aligned}$$

de donde $\sum_{v \in V_1} \deg(v) = 2(|E| - k)$, o sea, un número par. $\square$