MÉTODOS NUMÉRICOS I

Tema V: Aproximación

Manuel Ruiz Galán

Curso 2018/2019
Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Índice Tema V

Aproximación: datos experimentales

- previsiones
- ajustes

V.1. Aproximación por mínimos cuadrados discreta y continua

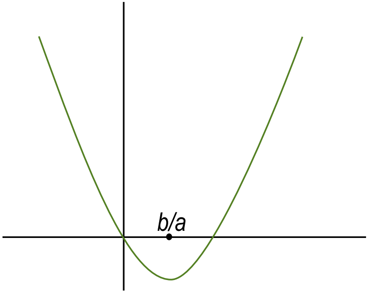
V.1.1. Principio del mínimo

$a > 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - bx$$

f alcanza su valor mínimo en $x = \dfrac{b}{a}$

$$f(b/a) = -\frac{1}{2a}b^2$$



Extensible a $\mathbb{R}^N$

$$a \rightsquigarrow \text{ matriz simétrica y definida positiva } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

$$b \rightsquigarrow \text{ vector } \mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$$

$f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

Principio del mínimo

Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ es una matriz simétrica y definida positiva, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$ y $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ es la función cuadrática definida en cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ como

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x},$$

entonces f alcanza su mínimo y además en un único vector, la solución del sistema $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y su valor mínimo es

$$-\frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} \text{ definida positiva} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ regular:}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \text{ solución de } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

DEMOSTRACIÓN. $\mathbf{x} := \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$

A simétrica

$$\begin{aligned} f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}^T\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}^T\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T\mathbf{A}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \end{aligned}$$

A definida positiva $\rightsquigarrow$ f alcanza su mínimo en $\mathbf{y} = \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$

$$f(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = -\frac{1}{2}\mathbf{b}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$\square$

Ejemplos

- Tema II: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$$\mathbf{A} \text{ simétrica y definida positiva } \Leftrightarrow \mathbf{A} \text{ admite factorización LU Cholesky}$$

- Condición suficiente: $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{N\times N}$

$$\mathbf{A} \text{ regular } \Rightarrow \mathbf{A}^T\mathbf{A} \text{ simétrica y definida positiva}$$

- Condición suficiente (más general): $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$

$$\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = N \Leftrightarrow \text{ columnas de } \mathbf{A} \text{ linealmente independientes}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} \text{ simétrica y definida positiva}$$

(y $N \leq M$)

- Condición suficiente (aún más general): $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{M\times M}$ simétrica y definida positiva, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$

$$\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = N \;\Leftrightarrow\; \text{columnas de } \mathbf{A} \text{ linealmente independientes}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A} \text{ simétrica y definida positiva}$$

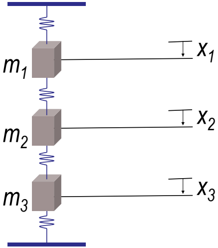
(y $N \leq M$)

Ejercicio

Comprueba las afirmaciones anteriores.

Aplicación I del principio del mínimo: sistemas mecánicos en equilibrio

4 muelles alineados
3 cuerpos entre los mismos de masas m_1, m_2 y m_3
pesos p_1, p_2 y p_3
sistema en *equilibrio*



Objetivo: determinar los desplazamientos x_1, x_2 y x_3 en función de p_1, p_2 y p_3

d_j deformación del muelle j, $j = 1, 2, 3, 4$
vectores de desplazamientos, deformaciones, fuerzas de reacción de los muelles y pesos:

$$\mathbf{x} := [x_1, x_2, x_3]^T,$$

$$\mathbf{d} := [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$$

$$\mathbf{y} := [y_1, y_2, y_3, y_4]^T,$$

$$\mathbf{p} := [m_1 g, m_2 g, m_3 g]^T$$

Tema II: sistema en equilibrio

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{Cd} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{p}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$

($c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ coeficientes de elasticidad)

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{d}, \quad \mathbf{Cd} = \mathbf{y}, \quad \mathbf{A}^T\mathbf{y} = \mathbf{p} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^T\mathbf{CA} = \mathbf{p}$$

K matriz de rigidez

$$\mathbf{K} := \mathbf{A}^T\mathbf{CA}$$

Solución del problema = solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\mathbf{Kx} = \mathbf{p}$$

Enfoque complementario: **x** minimiza la energía potencial del sistema

Consecuencia del Principio del mínimo

energía potencial sistema = energía potencial masas + energía potencial muelles

- energía potencial masas

$$-m_1gx_1 - m_2gx_2 - m_3gx_3 = -\mathbf{p}^T\mathbf{x}$$

- energía potencial muelles

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}c_1d_1^2 + \frac{1}{2}c_2d_2^2 + \frac{1}{2}c_3d_3^2 + \frac{1}{2}c_4d_4^2 &= \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{C}\mathbf{d}\\ &= \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x}\end{aligned}$$

energía potencial sistema (en función del vector de desplazamientos $\mathbf{x}$)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{x}$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{p}^T\mathbf{x}$$

$$\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = 3 \;\Leftrightarrow\; \text{columnas de } \mathbf{A} \text{ l.i.}$$

$$+$$

C simétrica y definida positiva

$$\Downarrow$$

$\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}$ simétrtica y definida positiva

Principio del mínimo

energía potencial mínima corresponde al vector de desplazamientos solución del sistema

$$\mathbf{A}^T\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{p} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{p}$$

desplazamientos en equilibrio $\leftrightsquigarrow$ *desplazamientos minimizando energía potencial*

V.1.2. Aproximación por mínimos cuadrados discreta

Aplicación II del principio del mínimo: mejor aproximación euclídea en dimensión finita

S subespacio vectorial de $\mathbb{R}^M$,

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{bmatrix} \right\} \text{ base de } S$$

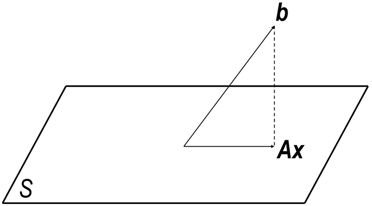
$$\Downarrow$$

$$\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = N, \quad S = \{\mathbf{Ax} : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N\}$$

Dado $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$

- $\mathbf{b} \in S \ \Leftrightarrow \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ compatible
- $\mathbf{b} \notin S \ \Leftrightarrow \ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ incompatible

¿Existe un vector $\mathbf{Ax} \in S$ más próximo (norma euclídea) a $\mathbf{b}$?



$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ \|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2 \leq \|\mathbf{Ay}-\mathbf{b}\|_2?$$

$$\Updownarrow$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ \|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2^2 \leq \|\mathbf{Ay}-\mathbf{b}\|_2^2?$$

$$\Updownarrow$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ (\mathbf{Ax}-\mathbf{b})^T(\mathbf{Ax}-\mathbf{b}) \leq (\mathbf{Ay}-\mathbf{b})^T(\mathbf{Ay}-\mathbf{b})?$$

$$\Updownarrow$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ \mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}+\mathbf{b}^T\mathbf{b}-2\mathbf{b}^T\mathbf{Ax} \leq \mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ay}+\mathbf{b}^T\mathbf{b}-2\mathbf{b}^T\mathbf{Ay}?$$

$$\Updownarrow$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ax}-\mathbf{b}^T\mathbf{Ax} \leq \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{Ay}-\mathbf{b}^T\mathbf{Ay}?$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{y}?$$

Principio del mínimo ($\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ simétrica y definida positiva)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$$

Respuesta afirmativa

Solución

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

ecuaciones normales

$\mathbf{Ax}$ *mejor aproximación* de $\mathbf{b}$ en S en el sentido de los mínimos cuadrados (discretos, $(\mathbf{R}^{\mathbf{M}}, \|\cdot\|_2)$)

(si no hay lugar a ambigüedad, mejor aproximación)

Ejemplo

$$S := \mathrm{lin}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}\right\}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}2\\1\\7.3\end{bmatrix}$$

¿Mejor aproximación de **b** en S (mínimos cuadrados)?

base

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}$$

Ecuaciones normales

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}14 & 32\\32 & 77\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25.9\\56.8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.272\overline{2} \\ -0.6\overline{2} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 3.272\overline{2} \\ -0.6\overline{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.78\overline{3} \\ 3.4\overline{3} \\ 6.08\overline{3} \end{bmatrix} \text{ mejor aproximación de } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 7.3 \end{bmatrix} \text{ en } S$$

Interpretación geométrica de la mejor aproximación en el sentido de los mínimos cuadrados (discretos)

S subespacio vectorial de $\mathbb{R}^M$

$$\left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{M1} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} a_{1N} \\ \vdots \\ a_{MN} \end{bmatrix} \right\} \text{ base de } S \;\Rightarrow\; S = \{\mathbf{Ax} : \; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N\}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto escalar euclídeo usual en $\mathbb{R}^M$

Ecuaciones normales

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$$

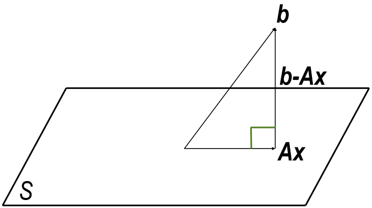
$$\Updownarrow$$

$$j = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, \mathbf{b} - \mathbf{Ax} \right\rangle = 0$$

$$j = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \right\rangle = 0$$

- Geométricamente el vector $\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$ es perpendicular a los vectores de la base de S, equivalentemente a todos los de S ($\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} \in S^{\perp}$) $\rightsquigarrow$ $\mathbf{A}\mathbf{x}$ *proyección ortogonal* de $\mathbf{b}$ sobre S

$$P_S(\mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$



- Cálculo equivalente de **x**

$$\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} - \sum_{i=1}^{N} x_i \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$j = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, \mathbf{b} - \sum_{i=1}^{N} x_i \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

Ejercicio

Demuestra que si un vector es ortogonal a los de una base de un subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^M$, entonces lo es a todos los vectores de S.

Ejemplo

Retomamos

$$S := \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}2\\1\\7.3\end{bmatrix}$$

¿Proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre S, $P_S(\mathbf{b})$?

base

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \right\} \rightsquigarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 5\\3 & 6\end{bmatrix}$$

Sistema

$$
\left|\begin{array}{l}
\left\langle \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\7.3\end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \right\rangle = 0 \\[2ex]
\left\langle \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\7.3\end{bmatrix} - x_1 \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - x_2 \begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix} \right\rangle = 0
\end{array}\right.
$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}14 & 32\\32 & 77\end{bmatrix} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25.9\\56.8\end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3.272\overline{2}\\-0.6\overline{2}\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
P_S(\mathbf{b}) &= 3.272\overline{2}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} - 0.6\overline{2}\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\\
&= \mathbf{A}\begin{bmatrix}3.272\overline{2}\\-0.6\overline{2}\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0.78\overline{3}\\3.4\overline{3}\\6.08\overline{3}\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- Idea geométrica | mejor aproximación
proyección ortogonal
- Cálculo explícito | ecuaciones normales $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b}$

$$j = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, \mathbf{b} - \sum_{i=1}^{N} x_i \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

Hemos deducido:

Teorema de la mejor aproximación (versión $\mathbb{R}^M$)

Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N}$ con $\mathrm{rango}(\mathbf{A}) = N$, sea S el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{M}}$ definido como

$$S := \{\mathbf{Ax} : \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N\}$$

y sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$. Entonces existe un único vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ de forma que

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|_2 = \text{mín}\{\|\mathbf{Ay} - \mathbf{b}\|_2 : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N\}.$$

De hecho, el vector $\mathbf{Ax}$ (mejor aproximación de $\mathbf{b}$ en S, proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre S) viene caracterizado por las ecuaciones normales

$$\mathbf{A}^T\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^T\mathbf{b},$$

equivalentemente,

$$j = 1, \ldots, N \ \Rightarrow \left\langle \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{Mj} \end{bmatrix}, \mathbf{b} - \sum_{i=1}^{N} x_i \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{bmatrix} \right\rangle = 0.$$

Aplicación del teorema de la mejor aproximación (versión $\mathbb{R}^M$): ajuste de datos

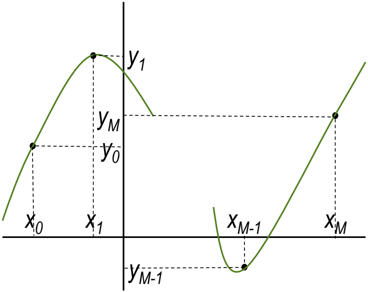
Datos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$

$$i, j = 0, 1, \ldots, M \;\Rightarrow\; x_i \neq x_j$$

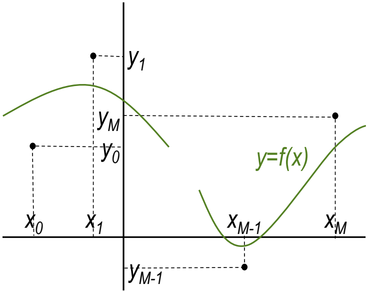
Existe una única función polinómica de grado menor o igual que M $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$i = 0, 1, \ldots, M \;\Rightarrow\; p(x_i) = y_i$$

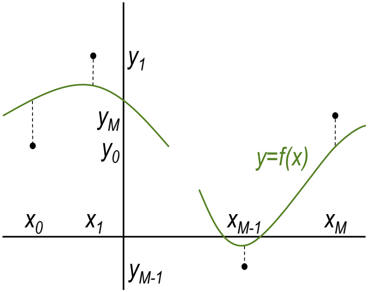
(Tema IV)



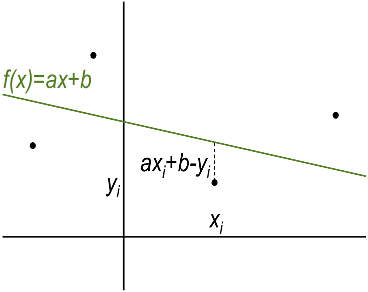
Ajuste mínimos cuadrados $\left|\begin{array}{l}\text{datos } (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{tipo de función } f\end{array}\right.$



Ajuste mínimos cuadrados | datos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$
tipo de función f



Ejemplo: ajuste de datos mediante una recta o lineal



f(x)=ax+b, ¿*a,b*?

$$\text{minimizar} \sum_{i=0}^{M} (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\text{minimizar} \ \sum_{i=0}^{M} (ax_i + b - y_i)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{minimizar} \ \left\| a \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{minimizar} \ \left\| a \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2$$

$$\text{minimizar } \left\| a \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2$$

$$S := \mathrm{lin} \left\{ \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución $P_S(\mathbf{y})$

$$\dim(S) = 2$$

$$\Downarrow$$

$$P_S(\mathbf{y}) = a\mathbf{x} + b\mathbf{1} \rightsquigarrow f(x) = ax + b$$

Ejemplo

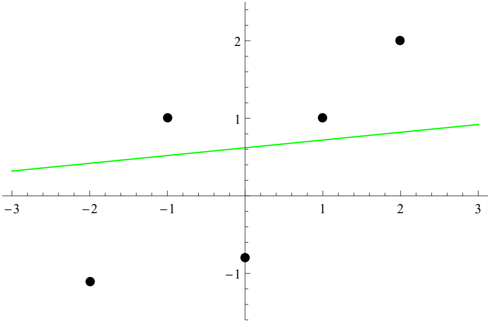
Calcula la recta de ecuación $y = ax + b$ que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos $(1,1), (2,2), (0,-0.8), (-1,1), (-2,-1.1)$.

$$S := \operatorname{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -0.8 \\ 1 \\ -1.1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(S) = 2$$

$$P_S(\mathbf{y}) = a \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a = 0.62, \quad b = 0.42 \rightsquigarrow f(x) = 0.62x + 0.42$$



Predicciones: ajustes lineales

http://www.aemet.es/es/idi/clima/registros_climaticos

Ejercicio

Consulta en la Agencia Estatal de Meteorología (http://www.aemet.es/es/), y más concretamente en

http://www.aemet.es/es/serviciosclimaticos/vigilancia_clima/resumenes?w=0& datos=0& n=1

la temperatura y la precipitación media sobre España en los meses de noviembre de 2009 hasta 2018 para hacer una predicción vía un ajuste lineal por mínimos cuadrados de lo que ocurrirá este noviembre con relación a dicho par de parámetros atmosféricos.

Ejemplo: desastre del *Challenger* (1986)

Fallo anillas (cuatro o más) causa explosión

Datos 24 lanzamientos anteriores

°F	53	75	57	58	63	70	70	66	67	67	67
fallos	3	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0

68	69	70	70	72	73	75	76	76	78	79	80	81
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Pronóstico meteorológico 31 °F

Análisis NASA: ajuste lineal (mínimos cuadrados) de los datos correspondientes a temperaturas que han hecho fallar alguna anilla, para realizar así una predicción

$$f(x) = -\frac{71}{2796}x + \frac{4295}{1398}$$

$$\Downarrow$$

$$f(31) = \frac{6317}{2796} \approx 2.26 \quad \text{(redondeo)}$$

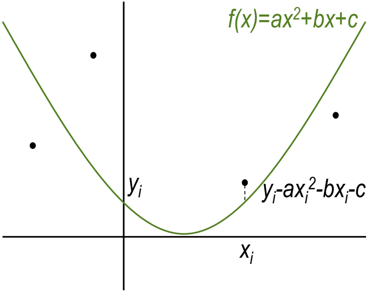
Ajuste lineal (mínimos cuadrados) de los datos correspondientes a los 24 lanzamientos, obteniendo así otra predicción

$$g(x) = -\frac{73}{1200}x + \frac{187}{40}$$

$$\Downarrow$$

$$g(31) = \frac{3347}{1200} \approx 2.79 \quad \text{(redondeo)}$$

Ejemplo: ajuste de datos mediante una parábola o cuadrático



$f(x) = ax^2 + bx + c$, ¿a, b, c?

$$\text{minimizar} \sum_{i=0}^{M} (ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

$$\text{minimizar} \ \sum_{i=0}^{M}(ax_i^2 + bx_i + c - y_i)^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{minimizar} \ \left\| a\begin{bmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_M^2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2^2$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{minimizar} \ \left\| a\begin{bmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_M^2 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2$$

$$\text{minimizar} \quad \left\| a \begin{bmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_M^2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_M \end{bmatrix} \right\|_2$$

$$S := \mathrm{lin} \left\{ \begin{bmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ \vdots \\ x_M^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_M \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Solución $P_S(\mathbf{y})$

Notación: $\mathbf{x}^2 := [x_0^2, x_1^2, \ldots, x_M^2]^T$

$$\dim(S) = 3$$

$$\Downarrow$$

$$P_S(\mathbf{y}) = a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c\mathbf{1} \;\rightsquigarrow\; f(x) = ax^2 + bx + c$$

Ejemplo

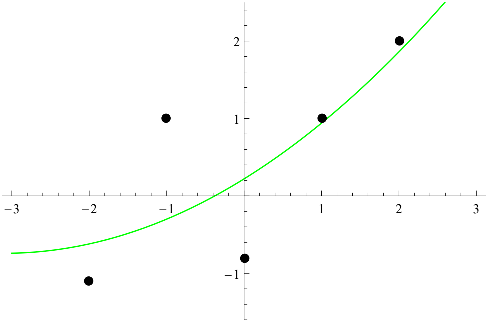
Determina la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ que mejor aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, los datos
$(1, 1), (2, 2), (0, -0.8), (-1, 1), (-2, -1.1)$.

$$S := \mathrm{lin}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -0.8 \\ 1 \\ -1.1 \end{bmatrix}$$

$$\dim(S) = 3$$

$$P_S(\mathbf{y}) = a \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$a = 0.1, \quad b = 0.62, \quad c = 0.22 \rightsquigarrow f(x) = 0.1x^2 + 0.62x + 0.22$$



V.1.3. Aproximación por mínimos cuadrados general: caso continuo

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ producto escalar usual en $\mathbb{R}^N \rightsquigarrow$ norma euclídea $\| \cdot \|_2$, ángulos

Generalización natural a espacios vectoriales arbitrarios

Definición

Dado un espacio vectorial (real) E, diremos que una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ es un *producto escalar* en E siempre que

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ y
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ con "$=$" $\Leftrightarrow \; x = 0$,

cualesquiera sean $x, y, z \in E$ y $\lambda \in \mathbb{R}$.

También decimos que E es un *espacio euclídeo* con producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o que el par $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un *espacio euclídeo*

Ejemplos

Productos escalares usuales

- $E = \mathbb{R}^N$,

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^N \;\Rightarrow\; \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

- $E = \mathbb{R}^{M \times N}$,

$$\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{M \times N} \;\Rightarrow\; \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle := \mathrm{traza}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$$

- $E = C([a, b])$,

$$f, g \in C([a, b]) \;\Rightarrow\; \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$$

- $E = C^k([a, b])$, $k \in \mathbb{N}$,

$$f, g \in C^k([a, b]) \;\Rightarrow\; \langle f, g \rangle := \sum_{j=0}^{k} \int_a^b f^{(j)}(x) g^{(j)}(x) dx$$

Consecuencia inmediata de la definición de producto escalar

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclídeo, $x \in E$, $N, M \geq 1$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \mu_1, \ldots, \mu_M \in \mathbb{R}$ y $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M \in E$, entonces

- $\langle x, 0\rangle = 0$
- $\left\langle \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{M} \mu_j y_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \lambda_i \mu_j \langle x_i, y_j\rangle$

Consecuencia casi inmediata de la definición de producto escalar

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclídeo, *norma (euclídea inducida)*

$$x \in E \ \Rightarrow \ \|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Relación de ejercicios (desigualdad de Cauchy–Schwarz)

Ejemplos

Normas (euclídeas inducidas) usuales

- $E = \mathbb{R}^N$,

$$\mathbf{x} \in \mathbf{R}^N \;\Rightarrow\; \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}$$

- $E = \mathbb{R}^{M\times N}$,

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M\times N} \;\Rightarrow\; \|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathrm{traza}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}^2}$$

  (norma de Frobenius, Tema I)

- $E = C([a,b])$,

$$f \in C([a,b]) \;\Rightarrow\; \|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

- $E = C^k([a,b]),\ k \in \mathbb{N}$,

$$f \in C^k([a,b]) \ \Rightarrow \ \|f\| = \sqrt{\sum_{j=0}^{k} \int_a^b f^{(j)}(x)^2 dx}$$

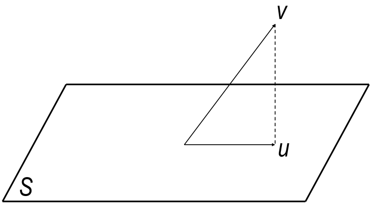
Aplicación III del principio del mínimo: mejor aproximación en un espacio euclídeo arbitrario

$(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ espacio euclídeo, $x, y \in E$ (Tema I), norma inducida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$

$$\mathrm{dist}(x, y) = \|x - y\|$$

$v \in E$, S subespacio finito dimensional vectorial de E, $\{a_1, \ldots, a_N\}$ base de S

¿Existe un vector $u \in S$ más próximo a v?



$$¿\text{existe } u \in S: \ w \in S \ \Rightarrow \ \|u - v\| \leq \|w - v\|?$$

$$\Updownarrow$$

$$¿\text{existe } u \in S: \ w \in S \ \Rightarrow \ \|u - v\|^2 \leq \|w - v\|^2?$$

$$\Updownarrow$$

$$¿\text{existe } u \in S: \ w \in S \ \Rightarrow \ \langle u - v, u - v \rangle \leq \langle w - v, w - v \rangle?$$

$$u = \sum_{i=1}^{N} x_i a_i, \quad w = \sum_{i=1}^{N} y_i a_i$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N:$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ \left\langle \sum_{i=1}^{N} x_i a_i - v, \sum_{i=1}^{N} x_i a_i - v \right\rangle \leq \left\langle \sum_{i=1}^{N} y_i a_i - v, \sum_{i=1}^{N} y_i a_i - v \right\rangle?$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N :$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \;\Rightarrow\; \left\langle \sum_{i=1}^N x_i a_i - v, \sum_{j=1}^N x_j a_j - v \right\rangle \leq \left\langle \sum_{i=1}^N y_i a_i - v, \sum_{j=1}^N y_j a_j - v \right\rangle ?$$

$$\Updownarrow$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N :$$

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \langle a_i, a_j \rangle - 2 \sum_{i=1}^N x_i \langle a_i, v \rangle \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N y_i y_j \langle a_i, a_j \rangle - 2 \sum_{i=1}^N y_i \langle a_i, v \rangle ?$$

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_N \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_2, a_N \rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle a_N, a_1 \rangle & \langle a_N, a_2 \rangle & \cdots & \langle a_N, a_N \rangle \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} \langle a_1, v \rangle \\ \langle a_2, v \rangle \\ \vdots \\ \langle a_N, v \rangle \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \;\Rightarrow\; \left\langle \sum_{i=1}^N x_i a_i, \sum_{j=1}^N y_j a_j \right\rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}, \quad \left\langle \sum_{i=1}^N x_i a_i, v \right\rangle = \mathbf{b}^T \mathbf{x}$$

$$¿\text{existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N \ \Rightarrow \ \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x} \leq \frac{1}{2}\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}^T\mathbf{y}?$$

Principio del mínimo (**A** simétrica y definida positiva, Ejercicio)

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

Respuesta afirmativa

Solución

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ecuaciones normales

$u = \sum_{i=1}^{N} x_i a_i$ *mejor aproximación* de **v** en S en el sentido de los mínimos cuadrados (discretos, si $\dim(E) < \infty$, continuos en caso contrario), si no hay lugar a ambigüedad, mejor aproximación

Ejercicio

Demuestra que la matriz **A** anterior de simétrica y definida positiva.

Ejercicio

Relaciona las ecuaciones normales anteriores con las obtenidas en dimensión finita ($E = \mathbb{R}^M$)

Ejemplo

$$E := C([-1,1]), \quad \text{(producto escalar usual)}$$

$$f(x) := |x|, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$S := \mathbb{P}_4$$

¿Mejor aproximación de f en S (mínimos cuadrados)?

base

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

Ecuaciones normales

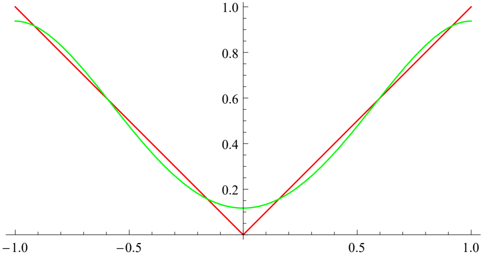
$$\mathbf{A} = \left[\int_{-1}^{1} x^i x^j dx\right]_{i,j=0,1,2,3,4} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \left[\int_{-1}^{1} x^i |x| dx\right]_{i=0,1,2,3,4} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{x} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{15}{128} \\ 0 \\ \frac{105}{64} \\ 0 \\ -\frac{105}{128} \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \frac{15}{128} + \frac{105}{64}x^2 - \frac{105}{128}x^4 \in \mathbb{P}_4$$

mejor aproximación de f en S



Ejemplo

$$E := C([0, 2\pi]), (\text{producto escalar usual})$$

$$f(x) := \frac{x}{1.5}, \quad (0 \le x \le 2\pi)$$

$$S := \mathrm{lin}\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\}$$

¿Mejor aproximación de f en S (mínimos cuadrados)?

base

$$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x\} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7\}$$

Ecuaciones normales: ventaja $\rightsquigarrow$ base ortogonal

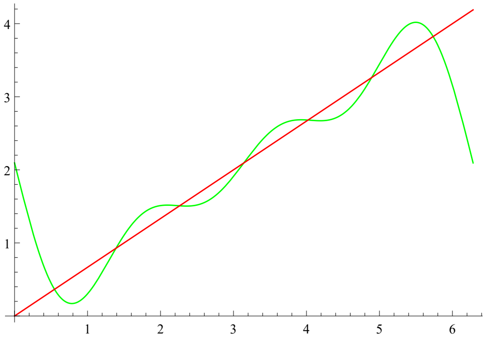
$$\mathbf{A} = \left[\int_0^{2\pi} \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx\right]_{i,j=1,\ldots,7} = \begin{bmatrix} 2\pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \left[\int_0^{2\pi} \varphi_i(x)\frac{x}{1.5}dx\right]_{i=1,\ldots,7} = \begin{bmatrix} \frac{4\pi^2}{3} \\ 0 \\ -\frac{4\pi}{3} \\ 0 \\ -\frac{2\pi}{3} \\ 0 \\ -\frac{4\pi}{9} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \dfrac{2\pi}{3} \\ 0 \\ -\dfrac{4}{3} \\ 0 \\ -\dfrac{2}{3} \\ 0 \\ -\dfrac{4}{9} \end{bmatrix}$$

$$u(x) = \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3}\sin x - \frac{2}{3}\sin 2x - \frac{4}{9}\sin 3x \in S$$

mejor aproximación de f en S


1
2
3
4
5
6
1
2
3
4

Interpretación geométrica de la mejor aproximación en el sentido de los mínimos cuadrados

$(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espacio euclídeo, $v \in E$, S subespacio vectorial finito dimensional de E, $\{a_1, \ldots, a_N\}$ base de S

Ecuaciones normales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\Updownarrow$$

$$i = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{N} x_j \langle a_i, a_j \rangle = \langle a_i, v \rangle$$

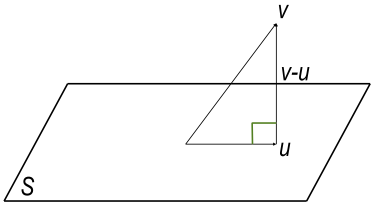
$$\Updownarrow$$

$$i = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle a_i, v - \sum_{j=1}^{N} x_j a_j \right\rangle = 0$$

$$i = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle a_i, v - \sum_{j=1}^{N} x_j a_j \right\rangle = 0$$

- Geométricamente $v - \sum_{j=1}^{N} x_j a_j$ es perpendicular a los vectores de la base de S, equivalentemente a todos los de S $(v - \sum_{j=1}^{N} x_j a_j \in S^{\perp}) \rightsquigarrow u = \sum_{j=1}^{N} x_j a_j$ *proyección ortogonal* de v sobre S

$$P_S(v) = u$$



- Cálculo equivalente de las coordenadas $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ de la proyección ortogonal $u = \sum_{j=1}^{N} x_j a_j$ en la base $\{a_1, \ldots, a_N\}$

$$i = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle a_i, v - \sum_{j=1}^{N} x_j a_j \right\rangle = 0$$

Ejercicio

Demuestra que si un vector de un espacio euclídeo $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es ortogonal a los de una base de un subespacio vectorial S de E, entonces lo es a todos los vectores de S.

Ejemplo

Volvemos a

$$E := C([-1,1]), \quad \text{(producto escalar usual)}$$

$$f(x) := |x|, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$S := \mathbb{P}_4$$

¿Proyección ortogonal de f sobre S, $P_S(f)$?

base

$$\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$$

Sistema

$$\left|\begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=0}^{4}\int_{-1}^{1}(x_{j+1}x^j-|x|)dx=0\\
\displaystyle\sum_{j=0}^{4}\int_{-1}^{1}(x_{j+1}x^j-|x|)xdx=0\\
\displaystyle\sum_{j=0}^{4}\int_{-1}^{1}(x_{j+1}x^j-|x|)x^2dx=0\\
\displaystyle\sum_{j=0}^{4}\int_{-1}^{1}(x_{j+1}x^j-|x|)x^3dx=0\\
\displaystyle\sum_{j=0}^{4}\int_{-1}^{1}(x_{j+1}x^j-|x|)x^4dx=0
\end{array}\right.$$

$$\mathbf{x}=\left[\frac{15}{128},0,\frac{105}{64},0,-\frac{105}{128}\right]^T \Rightarrow u(x)=\frac{15}{128}+\frac{105}{64}x^2-\frac{105}{128}x^4\in\mathbb{P}_4$$

mejor aproximación de f en S

- Idea geométrica $\left|\begin{array}{l}\text{mejor aproximación} \\ \text{proyección ortogonal}\end{array}\right.$

- Cálculo explícito $\left|\begin{array}{l}\text{ecuaciones normales } \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ i = 1, \ldots, N \;\Rightarrow\; \left\langle a_i, v - \displaystyle\sum_{j=1}^{N} x_j a_j \right\rangle = 0\end{array}\right.$

Hemos deducido:

Teorema de la mejor aproximación

Sean $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo, S un subespacio vectorial finito dimensional con base

$$\{a_1, \ldots, a_N\}$$

y sea $v \in E$. Entonces existe un único vector $u \in S$ (mejor aproximación de v en S, proyección ortogonal de v sobre S) de forma que

$$\|u - v\| = \min\{\|w - v\| : \ w \in S\}.$$

De hecho, las coordenadas $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ del vector u en la base $\{a_1, \ldots, a_N\}$ vienen caracterizadas por las ecuaciones normales

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

donde

$$\mathbf{A} := [\langle a_i, a_j \rangle]_{i,j=1}^N \in \mathbb{R}^{N \times N} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} := [\langle a_i, v \rangle]_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N$$

i.e.,

$$i = 1, \ldots, N \ \Rightarrow \ \left\langle a_i, v - \sum_{j=1}^N x_j a_j \right\rangle = 0.$$

V.2. Aproximación uniforme

El estudio del Teorema de Weierstrass, así como su implementación en el ordenador, se llevará a cabo en la Práctica 5.

V.3. Bibliografía

1. K. Atkinson, W. Ham, *Theoretical Numerical Analysis. A Functional Analysis Framework*, Third Edition, Texts in Applied Mathematics **39**, Springer, Dordrecht, 2009.
2. W. Gautschi, *Numerical Analysis*, Second Edition, Springer, New York, 2012.
3. A. Quarteroni, R. Sacco, F. Saleri, *Numerical Mathematics*, Second Edition, Texts in Applied Mathematics **37** Springer–Verlag, Berlin, 2007.