Doble Grado en Informática y Matemáticas

Ejercicios de Cálculo I – Relación 3 - Racionales e irracionales. Principio de Inducción (para hacer en clase)

1. Indica de forma razonada si los siguientes números son racionales o irracionales:

   a) La suma o el producto de un número irracional con un número racional distinto de cero.

   b) La suma o el producto de dos números irracionales.

   c) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$.

2. Sean $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ con $c^2+d^2>0$ y $x\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. ¿Qué condiciones deben cumplir a,b,c,d para que el número $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ sea racional?

3. Sea $x\in\mathbb{R}$. Prueba que $\sup\{r\in\mathbb{Q}: r<x\}=x=\inf\{s\in\mathbb{Q}: x<s\}$. ¿Permanece válido este resultado si se sustituye $\mathbb{Q}$ por un conjunto denso en $\mathbb{R}$?

4. Sea $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función monótona y supongamos que $\varphi(z)=z$ para todo $z\in\mathbb{Q}$. Prueba que para todo $x\in\mathbb{R}$ es $\varphi(x)=x$.

   Sugerencia: la suposición de que $\varphi(x)\neq x$ para algún $x\in\mathbb{R}$ lleva a una contradicción.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función no idénticamente nula verificando, para todos x,y en $\mathbb{R}$ que $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (f es aditiva) y $f(x\,y)=f(x)f(y)$ (f es multiplicativa). Prueba que $f(x)=x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

   Sugerencia: la existencia en $\mathbb{R}^+$ de la raíz cuadrada permite probar que f es monótona.

6. Prueba, usando el principio de inducción, que para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifican las siguientes relaciones.

   a) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   b) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   c) $\sqrt{n}\leqslant 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\leqslant 2\sqrt{n}$

   d) $\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\geqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$

7. Prueba que para todo número natural $n\in\mathbb{N}$ se verifica que n^5-n es divisible por 5.

8. Prueba que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos es múltiplo de 9.

9. Prueba que todo número natural $n\geqslant 8$ puede escribirse en la forma $n=3p+5q$ donde $p,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

10. Prueba que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

    Sugerencia. Si a,b,c son las longitudes de los lados de un triángulo y $p=(a+b+c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área del triángulo viene dada por $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

11. Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, donde $a>0,\ b>0$.