Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

25 de marzo de 2020

1. Tema 4: Grupos cocientes. Teoremas de isomorfía.

En esta clase terminaremos el Tema 4 del programa

Recordemos que el último día introducíamos el producto directo de una familia de grupos y veíamos algunas propiedades, particularmente en el caso de que los grupos sean finitos.

Nos ocupamos ahora de lo que llamaremos el producto directo interno de subgrupos de un grupo dado. Empezaremos con el caso de 2 subgrupos y posteriormente lo generalizaremos a un numero finito arbitrario de subgrupos.

Sea G un grupo y sean $H_1, H_2 \in Sub(G)$ dos subgrupos de G.

Consideramos el producto directo $H_1 \times H_2$. Como H_1, H_2 son subgrupos de G, podemos definir la aplicación:

$$\Phi : H_1 \times H_2 \longrightarrow G \text{ definida por } \Phi(h_1, h_2) := h_1 h_2. \tag{1.1}$$

Se tiene entonces el siguiente resultado

Proposición 1.1.

$$\Phi : H_1 \times H_2 \to G \textit{ es un isomorfismo } \iff \begin{cases} (1)\, H_1 \trianglelefteq G \textit{ y } H_2 \trianglelefteq G \\ (2)\, H_1 H_2 = G \\ (3)\, H_1 \cap H_2 = \{1\} \end{cases}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que Φ es un isomorfismo. Entonces es epimorfismo con lo que $H_1 H_2 = Img(\Phi) = G$. Veamos ahora que la intersección es trivial: Sea $x \in H_1 \cap H_2$ entonces $(x, 1) \in H_1 \times H_2$ y $(1, x) \in H_1 \times H_2$. Como

$$\Phi(x, 1) = x = \Phi(1, x),$$

utilizando que Φ es monomorfismo, será

$$(x, 1) = (1, x) \Rightarrow x = 1.$$

Consecuentemente $H_1 \cap H_2 = \{1\}$.

Finalmente, veamos la normalidad de los subgrupos. Para ello haremos uso del siguiente hecho que os propongo como ejercicio:

Ejercicio. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos y $N \trianglelefteq G$ un subgrupo normal de G. Entonces $f_*(N)$ es un subgrupo normal de $Img(f)$.

Pues bien, puesto que $H_1 \times \{1\}$ es un subgrupo normal de $H_1 \times H_2$ (pues $H_1 \times \{1\} = Img(j_1)$ y como vimos en la clase anterior es un subgrupo normal) entonces, por el ejercicio propuesto, $H_1 = \Phi_*(H_1 \times \{1\})$ es un subgrupo normal de $Img(\Phi) = G$ (donde en esta última igualdad usamos de nuevo que Φ es un epimorfismo). De forma análoga se demuestra que $H_2 \trianglelefteq G$ y se tiene demostrada la implicación hacia la derecha.

$\Longleftarrow$) En primer lugar veamos que con las hipotesis que tenemos, los elementos de H_1 conmutan con los elementos de H_2: Sea $h_1 \in H_1$ y $h_2 \in H_2$ y consideremos el elemento $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}$ Tenemos:

Como $H_2 \trianglelefteq G$ entonces $h_1 H_2 h_1^{-1} = H_2$, con lo que $h_1 h_2 h_1^{-1} \in H_2$ y entonces $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = (h_1 h_2 h_1^{-1}) h_2^{-1} \in H_2$ (pues es producto de dos elementos de H_2).

Análogamente, Como $H_1 \trianglelefteq G$ entonces $h_2 H_1 h_2^{-1} = H_1$, con lo que $h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} \in H_1$ y entonces $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = h_1 (h_2 h_1^{-1} h_2^{-1}) \in H_1$ (pues es producto de dos elementos de H_1).

Concluimos entonces que $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$ con lo que $h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = 1$ esto es

$$h_1 h_2 = h_2 h_1 \text{ para todo } h_1 \in H_1, h_2 \in H_2 \tag{1.2}$$

.

Haciendo uso de este hecho, veamos que Φ es un homomorfismo: Sean $(h_1, h_2), (k_1, k_2) \in H_1 \times H_2$ dos elementos cualesquiera. entonces

$$\Phi((h_1, h_2)(k_1, k_2)) = \Phi(h_1 k_1, h_2 k_2) = h_1 k_1 h_2 k_2 \overset{(1,2)}{=} h_1 h_2 k_1 k_2 = \Phi(h_1, h_2)\Phi(k_1, k_2)$$

es decir, Φ es un homomorfismo.

Puesto que $Img(\Phi) = H_1 H_2 = G$ entonces Φ es un epimorfismo.

Finalmente, sea $(h_1, h_2) \in Ker(\Phi)$, entonces $\Phi(h_1, h_2) = h_1 h_2 = 1$ lo que nos dice que $h_1 = h_2^{-1} \in H_1 \cap H_2 = \{1\}$. Esto es $h_1 = 1 = h_2$ y por tanto $Ker(\Phi) = \{(1, 1)\}$ lo que implica que Φ es también monomorfismo.

Así pues Φ es un isomorfismo, como queríamos demostrar. $\square$

El resultado anterior se puede generalizar al caso de que se tengan mas de dos subgrupos. Esto es

Proposición 1.2. *Sea G un grupo y sean $H_1, H_2, \ldots H_n \in Sub(G)$ subgrupos de G, con $n \geq 2$. Consideremos la aplicación*

$$\Phi : H_1 \times \cdots \times H_n \longrightarrow G \textit{ definida por } \Phi(h_1, \ldots, h_n) := h_1 h_2 \ldots h_n.$$

Entonces

$$\Phi \textit{ es un isomorfismo } \Longleftrightarrow \begin{cases} (1)\, H_i \trianglelefteq G \textit{ para todo } \; i = 1, 2, \ldots n \\ (2)\, H_1 \ldots H_n = G \\ (3)\, (H_1 \ldots H_{i-1}) \cap H_i = \{1\} \textit{ para todo } i = 2, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Demostración. $\Longrightarrow$) Supongamos que Φ es un isomorfismo. Entonces es epimorfismo con lo que $H_1 H_2 \ldots H_n = Img(\Phi) = G$ y se tiene (2) Veamos (3): Sea $x \in (H_1 \ldots H_{i-1}) \cap H_i$ entonces $x = x_1 \ldots x_{i-1}$ con $x_1 \in H_1, \ldots, x_{i-1} \in H_{i-1}$ con lo que $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, \ldots, 1) \in H_1 \times \cdots \times H_n$ y $(1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1)) \in H_1 \times \cdots \times H_n$. Como

$$\Phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, \ldots, 1) = x = \Phi(1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1),$$

utilizando que Φ es monomorfismo, será

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, \ldots, 1) = (1, \ldots, 1, x, 1, \ldots, 1) \Rightarrow x = 1.$$

Consecuentemente $(H_1 \ldots H_{i-1}) \cap H_i = \{1\}$.

Finalmente, veamos (1). Puesto que $\{1\} \times \cdots \times H_i \times \cdots \times \{1\}$ es un subgrupo normal de $H_1 \times \cdots \times H_n$ (pues no es otro que $Img(j_i)$) entonces, por el ejercicio propuesto en la demostración de la proposición anterior, $H_i = \Phi_*(\{1\} \times \cdots \times H_i \times \cdots \times \{1\})$ es un subgrupo normal de $Img(\Phi) = G$, y se tiene (1).

$\Longleftarrow$) En primer lugar veamos que con las hipotesis que tenemos, los elementos de H_i conmutan con los elementos de H_j, para $i \neq j$: Sea $h_i \in H_i$ y $h_j \in H_j$ y supongamos $i < j$. Consideremos el elemento $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1}$ Tenemos:

Como $H_j \trianglelefteq G$ entonces $h_i H_j h_i^{-1} = H_j$, con lo que $h_i h_j h_i^{-1} \in H_j$ y entonces $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1} = (h_i h_j h_i^{-1}) h_j^{-1} \in H_j$ (pues es producto de dos elementos de H_j).

Análogamente, Como $H_i \trianglelefteq G$ entonces $h_j H_i h_j^{-1} = H_i$, con lo que $h_j h_i^{-1} h_j^{-1} \in H_i$ y entonces $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1} = h_i (h_j h_i^{-1} h_k^{-1}) \in H_i$ (pues es producto de dos elementos de H_1). Como $H_i \leq (H_1 \ldots H_{j-1})$, pues $i < j$, entonces $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1} \in (H_1 \ldots H_{j-1})$.

Concluimos entonces que $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1} \in (H_1 \ldots H_{j-1}) \cap H_j = \{1\}$ con lo que $h_i h_j h_i^{-1} h_j^{-1} = 1$ esto es

$$h_i h_j = h_j h_i \text{ para todo } h_i \in H_i, h_j \in H_j \text{ y para todo } i \neq j. \tag{1.3}$$

.

Haciendo uso de este hecho, veamos que Φ es un homomorfismo:

Sean $(h_1, \ldots, h_n), (k_1, \ldots, k_n) \in H_1 \times \cdots \times H_n$ dos elementos cualesquiera. entonces

$$\begin{aligned}
\Phi((h_1, \ldots, h_n)(k_1, \ldots, k_n)) = & \\
& \Phi(h_1 k_1, \ldots, h_n k_n) = \\
& h_1 k_1 \ldots h_n k_n = \\
& \stackrel{(1,3)}{=} h_1 \ldots h_n k_1 \ldots k_n = \Phi(h_1, \ldots, h_n)\Phi(k_1, \ldots, k_n)
\end{aligned}$$

es decir, Φ es un homomorfismo.

Puesto que $Img(\Phi) = H_1 \ldots H_n = G$ entonces Φ es un epimorfismo.

Finalmente, sea $(h_1, \ldots, h_n) \in Ker(\Phi)$, entonces $\Phi(h_1, \ldots, h_n) = h_1 \ldots h_n = 1$ lo que nos dice que $h_1 \ldots h_{n-1} = h_n^{-1} \in (H_1 \ldots H_{n-1}) \cap H_n = \{1\}$. Esto es $h_n = 1$ y $h_1 \ldots h_{n-1} = 1$. Entonces por una obvia inducción tendremos que $h_i = 1$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Por tanto $Ker(\Phi) = \{(1, \ldots, 1)\}$ lo que implica que Φ es también monomorfismo.

Así pues Φ es un isomorfismo, como queríamos demostrar. $\square$

Definición 1.3. *Sea G un grupo y $H_1, H_2, \ldots, H_n$ subgrupos de G verificando las condiciones* (1), (2) *y* (3) *de la Proposición 1.2. Diremos entonces que G es* **producto directo interno** *de los sugrupos $\{H_1\}_{i=1}^n$*

Observación 1.4. Sean $G_1, \ldots, G_n$ grupos arbitrarios (no necesariamente subgrupos de ningún grupo). Su producto directo $\prod_{i=1}^n G_i$ es también llamdo por algunos autores, producto directo **externo**.

En la primera hora de la clase del lunes próximo haremos algunos ejercicios de la relación 3 sobre el producto directo