Relación de Ejercicios del Tema V

Métodos Numéricos I – Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Universidad de Granada – Curso 2018/2019

En la resolución de los ejercicios que consideres conveniente puedes hacer uso de *Maxima*.

1. Comprueba que la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ como

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3) + 7x_1 - x_2 + x_3,$$

alcanza su valor mínimo en un único punto y calcúlalos.

2. Halla la proyección ortogonal del vector $\mathbf{b} = (1, 2, -1, 3.4)$ sobre el subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^4$ dado por

$$S := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \; x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \; 2x_1 - x_3 + 5.4x_4 = 0 \right\}.$$

3. Considera los datos

$$(1, 2), (2.17, 2), (1, 3.7), (3, 1/2), (0.56, -1) \in \mathbb{R}^2.$$

Determina las curvas de ecuaciones $y = mx + n$, $y = ax^2 + bx + c$ e $y = \alpha\sqrt{x} + \beta$ que mejor los aproximan, en el sentido de los mínimos cuadrados. Dibuja simultáneamente los puntos con cada curva.

4. Sea $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio euclídeo (real). Demuestra la conocida como *desigualdad de Cauchy–Schwarz*, i.e.,

$$x, y \in E \;\Rightarrow\; \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

(Idea: si $\langle y, y \rangle = 0$ no hay nada que probar, y en caso contrario solo hay que usar que

$$0 \leq \left\langle x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y, x - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} y \right\rangle).$$

Concluye que la aplicación $\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada $x \in E$ como

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

es una norma en E.

5. Calcula la proyección ortogonal de la función $f \in C([0,\pi])$,

$$f(x) = x + 2x^2, \quad (x \in [0,\pi])$$

sobre el subespacio S de $C([0,\pi])$

$$S = \mathrm{lin}\{x, \cos x, 1, e^{x/\pi}\}.$$

6. Sea $P = \{0 = x_0 < x_1 = 0.3 < x_2 = 0.9 < x_3 = 1.1 < x_4 = 1.5\}$ y sea $f : [0, 1.5] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función continua

$$f(x) = x^2, \quad (0 \leq x \leq 1.5).$$

Determina la mejor aproximación de f en el subespacio vectorial $\mathbb{S}_1^0(P)$ de $C([0, 1.5])$.