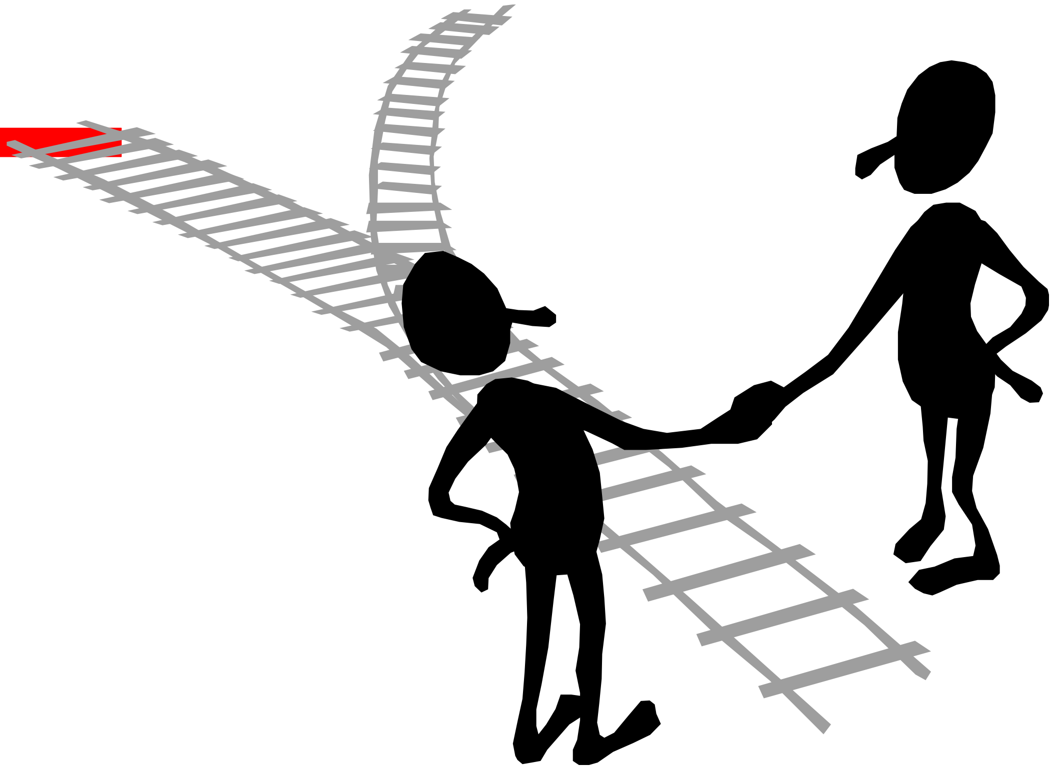
Algorítmica

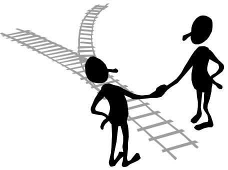
Capítulo 2: Algoritmos Divide y Vencerás

Tema 4: Método General DV

- **El método general**
- **Determinación del umbral**

Divide y Vencerás



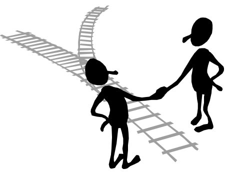


Divide y Vencerás

- **Dividir** el problema (P) en varios subproblemas (P_i)
- **Vencer** los subproblemas (resolverlos)
- **Combinar** las soluciones (S_i) de los subproblemas para obtener la solución (S) del problema inicial

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & \{P_i , i \in I\} \arrow[d] \\
S \arrow[u] & \{S_i , i \in I\} \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

- Este enfoque, sobre todo cuando se utiliza recursivamente, a menudo proporciona soluciones eficientes para problemas en los que los subproblemas son **versiones reducidas** y **resolubles** del problema original.
- Las ecuaciones recurrentes serán naturales en este método



Recordatorio de recurrencias

- Calcular el orden de $T(n)$ si n es potencia de 2 y

$$T(n) = 3T(n/2) + dn \text{ (d es constante, } n \geq 1).$$

- Obtenemos sucesivamente,

$$T(2^k) = 3T(2^{k-1}) + d2^k$$

$$t_k = 3t_{k-1} + d2^k$$

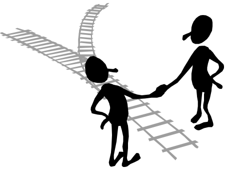
- Ecuación característica: $(x-3)(x-2) = 0$, y así,

$$t_k = c_1 3^k + c_2 2^k$$

$$T(n) = c_1 3^{\lg n} + c_2 n$$

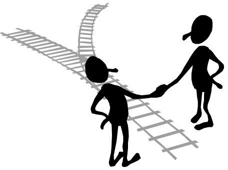
- y como $a^{\lg b} = b^{\lg a}$,

$$\mathbf{T(n) = c_1 n^{\lg 3} + c_2 n}$$



Divide y Vencerás

- La eficacia de la técnica DV dependerá de varios factores
- Se trata de un proceso complejo que requiere muchas comprobaciones:
  - No sabemos si el problema P podrá descomponerse.
  - Los P_i tendrán la misma naturaleza entre ellos y con P; han de ser razonablemente pequeños en número; no pueden ser muy numerosos; cada P_i debe ser más sencillo de resolver que P.
  - Hay que esperar que tenga sentido integrar las S_i para obtener la solución final S.
  - Debemos esperar que S se corresponda con la solución del problema P.
- Aplicando este procedimiento debemos obtener un algoritmo que sea mejor que otro algoritmo que resuelva P sin esta técnica en peor tiempo.



Divide y Vencerás, justificación

- Supongamos un problema P, de tamaño n, que sabemos puede resolverse con un algoritmo (básico) A

$$t_A(n) \leq cn^2.$$

- Dividimos P en 3 subproblemas de tamaños n/2, siendo cada uno de ellos del mismo tipo que A, y consumiendo un tiempo lineal la combinación de sus soluciones: $t(n) \leq dn$
- Tenemos un nuevo algoritmo B, Divide y Vencerás, que consumirá un tiempo

$$t_B(n) = 3\,t_A(n/2) + t(n) \leq 3\,t_A(n/2) + dn \leq$$

$$\leq (3c/4)\,n^2 + dn.$$

- B tiene un tiempo de ejecución mejor que el algoritmo A, ya que disminuye la constante oculta

Divide y Vencerás, justificación

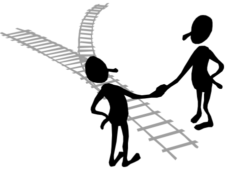
- Pero si cada subproblema se resuelve de nuevo con Divide y Vencerás, podemos hacer un tercer algoritmo C recursivo que tendría un tiempo:

$$t_C(n) = 3\, t_C(n/2) + t(n)$$

- de forma que:

$$t_C(n) = \begin{cases} t_A(n) & \text{si } n \leq n_0 \\ 3\, t_C(n/2) + t(n) & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

$$\mathbf{t_C = c_1\, n^{lg3} + c_2\, n}$$



Divide y Vencerás, justificación

- Pero si cada subproblema se resuelve de nuevo con Divide y Vencerás, podemos hacer un tercer algoritmo C recursivo que tendría un tiempo:

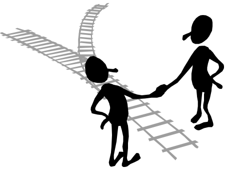
$$t_C(n) = 3\, t_C(n/2) + t(n)$$

- de forma que:

$t_C(n) = t_A(n)$ si $n \leq n_0$

$= 3\, t_C(n/2) + t(n)$ si $n \geq n_0$.

- $t_C(n)$ es mejor en eficiencia que los algoritmos A y B.
- El dividir el problema P en una serie de subproblemas, no significa que dichos subproblemas sean disjuntos. La división de P es exhaustiva pero no excluyente.
- Al valor n_0 se le denomina umbral y es fundamental para que funcione bien la técnica



Algoritmo Divide y Vencerás

Funcion DV(P)

Si P es suficientemente pequeño o simple entonces devolver basico (P).

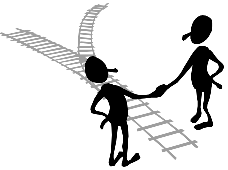
Descomponer P en subcasos P(1), P(2), ..., P(k) mas pequeños

para i = 1 hasta k hacer S(i) = DV(P(i))

recombinar las S(i) en S (solucion de P)

Devolver (S)

- Cuando k = 1 DV se llama simplificación.
- No hay ninguna regla para hallar k, sólo basándose en la experiencia sabemos que los DV con pocos subproblemas de tamaños parecidos entre ellos funcionan mejor.
- En función del valor del umbral n_0, obtendremos mejores o peores resultados. Su determinación es clave.

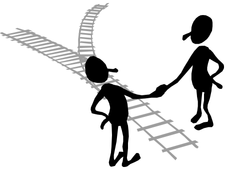


Análisis de algoritmos DV

- Cuando un algoritmo contiene una llamada recursiva a si mismo, generalmente su tiempo de ejecución puede describirse por una rec urrencia que da el tiempo de ejecución para un caso de tamaño n en función de inputs de menor tamaño.
- En el caso de DV nos encontraremos recurrencias como:

$$T(n) = \begin{cases} t(n) & \text{si } n \leq c \\ aT(n/b) + D(n) + C(n) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- donde a es el numero de subproblemas, n/b el tamaño de estos, D(n) el tiempo de dividir el problema en los sub-problemas y C(n) el tiempo de combinacion de las soluciones de los subproblemas



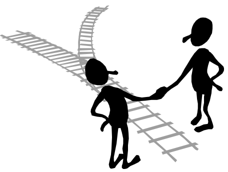
Ejemplo: Las Torres de Hanoi

- Problema: Mover los n discos del tubo A al B usando el tubo C como tubo intermedio temporal
- Enfoque Divide y Vencerás:
  - Dos subproblemas de tamaño n-1:

    (1) Mover los n-1 discos mas pequeños de A a C

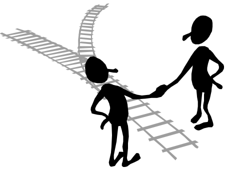
    (*) Mover el nº disco mas pequeño de A a B es fácil

    (2) Mover los n-1 discos mas pequeños de C a B
  - El movimiento de los n-1 discos mas pequeños se hace con la aplicación recursiva del método



Determinación del umbral

- Es difícil hablar del umbral n_0 si no tratamos con implementaciones, ya que gracias a ellas conocemos las constantes ocultas que nos permitirán afinar el cálculo de dicho valor.
- El umbral no es único, pero si lo es en cada implementación.
- De partida no hay restricciones sobre el valor que puede tomar n_0, por tanto variará entre cero e infinito
  - Un umbral de valor infinito supone no aplicar nunca DV de forma efectiva, porque estariamos resolviendo con el algoritmo básico siempre.
  - Si $n_0 = 1$, entonces estaríamos en el caso opuesto, ya que el algoritmo básico sólo actúa una vez, y se aplica la recursividad continuamente

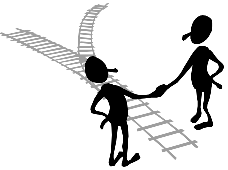


Determinación del umbral

- Supongamos el algoritmo anterior, en el que

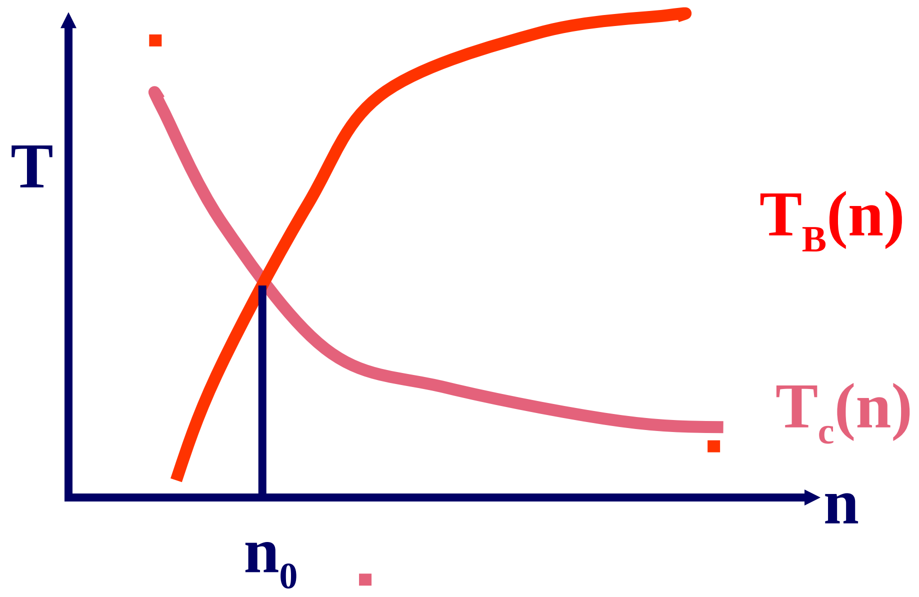
$$t_C(n) = t_A(n) \qquad \text{si } n \leq n_0$$
$$= 3\, t_C(n/2) + t(n) \qquad \text{si } n \geq n_0$$

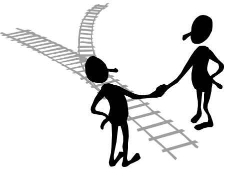
- Una implementación concreta $t_A(n) = n^2$ y $t(n) = 16n$ (ms), y un caso de tamaño $n = 1024$.
- Las dos posibilidades extremas nos llevan a
  - Si $n_0 = 1$, $t_C(n) = 32$ m y 34sg
  - Si $n_0 = \infty$, $t_C(n) = 17$ m y 40 sg
- Si puede haber tan grandes diferencias, ¿como podremos determinar el valor óptimo del umbral?
- Dos métodos: Experimental y Teórico



Determinación del umbral

- **Método experimental**
- Implementamos el algoritmo básico y el algoritmo DV
- Resolvemos para distintos valores de n con ambos algoritmos
- Hay que esperar que conforme n aumente, el tiempo del algoritmo básico vaya aumentando asintóticamente, y el del DV disminuyendo.





Determinación del umbral

- **Método teórico**
- La idea del enfoque experimental se traduce teoricamente a lo siguiente

$t_C(n) = t_A(n) \qquad \text{si } n \leq n_0$

$\qquad = 3\, t_C(n/2) + t(n) \qquad \text{si } n \geq n_0$

- Cuando coinciden los tiempos de los dos algoritmos

$$t_A(n) = 3\, t_A(n/2) + t(n);\ t_C(n) = t_A(n) \text{ y } n = n_0$$

- Para una implementación concreta (por ejemplo, la anterior, $t_A(n) = n^2$ y $t(n) = 16n$ (ms) y $n = 1024$)

$$n^2 = \tfrac{3}{4}\, n^2 + 16\, n \rightarrow n = \tfrac{3}{4}\, n + 16$$

$$\mathbf{n_0 = 64}$$