4.3. Aplicaciones

Consideraremos a continuación los determminantes desde un punto de vista práctico. Para simplificar la notación, dada una matriz cuadrada $A \in M_n(K)$ escribiremos $|A|$ en lugar de $\det A$ (el símbolo $|\cdot|$ no debe confundirse aquí con "valor absoluto"). Como un repaso de algunas propiedades, sabemos:

1. De la definición de $|A|$ a partir de permutaciones, se tiene $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, y:

   $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

   (regla de Sarrus).

2. $|A^t| = |A|$ (consecuencia de reordenar las permutaciones en la definición de $|A|$).

   En consecuencia, las propiedades de los determinantes enunciadas por filas se mantienen para columnas (y viceversa). Llamaremos *línea* a cualquier fila o columna de A.

3. a) Si una línea de A se multiplica por el escalar a entonces el determinante de la matriz resultante también queda multiplicado por a. En particular: $|aA| = a^n|A|$.

   b) Si cada uno de los elementos a_k de una línea se expresa como la suma de dos escalares $a_k = b_k + c_k$ entonces $|A|$ es igual a la suma de dos determinantes, uno de ellos con cada escalar a_k reemmplazado por el primer escalar de la suma, b_k, y el otro con el segundo, c_k.

4. Si se intercambian dos líneas del mismo tipo (filas o columnas) de A, el determinante de la matriz resultante cambia de signo.

5. (Consecuencia de 3a y 4.) Si dos líneas paralelas de $|A|$ son proporcionales (en particular, si son iguales o si una de ellas es nula) entonces $|A| = 0$.

6. (Consecuencia de 3b y 5.) Si una línea de A se puede expresar como combinación lineal del resto de líneas del mismo tipo (filas o columnas), entonces $|A| = 0$.

   Si a una línea de A se le suma una combinación lineal del resto de líneas del mismo tipo (filas o columnas), entonces el valor del determinate no cambia.

7. Si C es otra matriz cuadrada de orden n, entonces $|A \cdot C| = |A| \cdot |C|$. En particular, $|A \cdot C| = |C \cdot A|$.

4.3.1. Desarrollo del determinante por los adjuntos de una línea. Regla de Chio

Dada la matriz $A = (a_{ij})$ llamaremos:

- *Menor complementario* del elemento (i, j): determinante α_{ij} de la matriz que se obtiene suprimiendo la fila i-ésima y la columna j-ésima de la matriz A.

- *Adjunto* del elemento (i, j): escalar $\Delta_{ij} := (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$.

Proposición 4.41. *Para cada $i_0, j_0 \in \{i, \dots n\}$ se verifican*

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j}\Delta_{i_0 j} = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_0}\Delta_{i j_0}$$

(desarrollo de $|A|$ por los adjuntos de la fila i_0-ésima y columna j_0-ésima, respectivamente).

Demostración. Consideremos primero el caso $i_0 = 1$. Si $S[j] := \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = j\}$ se tiene:

$$\begin{aligned} |A| = &\ \textstyle\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{[\sigma]}\, a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)} \\ = &\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\left(\sum_{\sigma\in S[j]}(-1)^{[\sigma]}\, a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}\right) \\ = &\ \textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{1j}\left(\sum_{\sigma\in S[j]}(-1)^{[\sigma]-(j-1)}\, a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}\right) \\ = &\ \textstyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}a_{1j}\alpha_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(-1)^{j+1}\alpha_{1j} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\Delta_{1j}, \end{aligned}$$

donde en la primera línea de la fórmula se usa la definición de $|A|$ $(= |A^t|)$ y en las otras:

- Segunda línea: se agrupan los términos de la primera según el valor de $j = \sigma(1)$
- Tercera línea: se multiplica y divide por $(-1)^{j-1}$.
- Cuarta línea. Para la primera igualdad se usa la expresión del menor complementario:

  $\alpha_{1j} = \sum_{\sigma\in S[j]}(-1)^{[\sigma]-(j-1)}\, a_{2\sigma(2)}\dots a_{n\sigma(n)}$

  De hecho, en cada sumando los valores $\sigma(2), \dots, \sigma(n)$ pueden verse como una permutación del conjunto $A = \{1, \dots, j-1, j+1, \dots, n\}$ (véase la nota a pie de página 2) cuyo número de inversiones se calcula descontando a $[\sigma]$ las $j-1$ inversiones correspondientes a $\sigma(1) = j$.

  En la segunda igualdad se usa $(-1)^{j-1} = (-1)^{j+1}$ y en la última la definición de adjunto.

Para el caso $i_0 > 1$, haciendo $i_0 - 1$ trasposiciones de índices contiguos de filas para llevar la i_0-ésima hasta la primera posición, se llega a una nueva matriz A_0 cuyo determinante es $|A_0| = (-1)^{i_0-1}|A|$. Los menores complementarios de la primera fila de A_0 son iguales a los menores complementarios de la fila i_0-ésima de A. Sin embargo, los adjuntos de A_0 difieren en el factor $(-1)^{i_0-1}$. Por eso, desarrollando $|A_0|$ por los adjuntos adjuntos de su primera línea (usando el caso resuelto anteriormente) y multiplicando la expresión por $(-1)^{i_0-1}$, se obtiene precisamente el desarrollo del determinante de A por los adjuntos de su fila i_0-ésima.

Finalmente el caso del desarrollo por la columna j_0-ésima se reduce al del desarrollo por filas sin más que trasponer la matriz y usar que los menores complementarios del elemento (i, j) de la matriz A y (j, i) de la matriz A^t coinciden (por la propiedad 2 del principio de esta sección). ∎

Usando el desarrollo por adjuntos, el cálculo de un determinante de orden n se reduce al de n determinantes de orden $n-1$. En principio, esto permite reducir el cálculo de un determinante de orden $n > 3$ al caso $n = 3$, el cual resulta computable por la regla de Sarrus. Sin embargo, este procedimiento no sería nada eficiente: se necesitaría calcular $n!/3! = n!/6$ determinantes de orden 3. Empero, las otras propiedades de los determinantes permiten simplificar esos cálculos.

Explicamos a continuación la llamada *regla de Chio* para el cálculo de determinantes de orden superior. Esencialmente, esta regla consiste en conseguir que todos los elementos de una línea del determinante de A sean nulos excepto uno de ellos, al cual llamaremos *elemento base* o *pivote*, que se podrá tomar como 1. Así, el desarrollo por los adjuntos de esa línea asegura que $|A|$ coincide con el adjunto del elemento base. Explícitamente:

1. Se escoge una línea que contenga un 1 o un -1 y el mayor número posible ceros. En el caso de que ningún elemento sea 1 ó -1, se puede escoger uno de los elementos no nulos[9] a de la línea (escogida de entre las de más ceros), y dividir todos los elementos de esa línea por a; esto hace que que el determinante quede dividido por a. lo que se tendrá en cuenta multiplicando por ese escalar el resultado.[10]

2. Una vez escogido el elemento base, se consigue que el resto de los elementos de su línea, fila o columna, sean nulos multiplicando sucesivamente la columna o fila del elemento base por un escalar apropiado y restándolo (o sumándolo) a las otras líneas paralelas.

   Por ejemplo, si el elemento base es el $(1,1)$ y se escoge como línea su fila, se multiplicará sucesivamente su columna por $a_{12},\dots,a_{1n}$ y se restará a las siguientes columnas:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22}-a_{12}a_{21} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}-a_{12}a_{n1} & \cdots & a_{nn}-a_{1n}a_{n1} \end{vmatrix}$$

3. $|A|$ es entonces el adjunto del elemento base o su opuesto, según el elemento base fuera 1 ó -1:

$$|A| = 1\cdot\Delta_{11} + 0\cdot\Delta_{12} + \cdots + 0\cdot\Delta_{1n} = \Delta_{11}.$$

Ejemplo 4.42. Calculemos el siguiente determinante usando la regla de Chio:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Los pasos son entonces: (1) tomamos como elemento base el $(3,1)$ (pues es un 1 y su columna tiene el mayor número de ceros), y desarrollaremos por los adjuntos de su columna, (2) para conseguir que en la columna del elemento base los otros elementos sean 0, multiplicamos la tercera fila por 5 y 4 y se la restamos a, respectivamente, la primera y la segunda, y (3) el determinante se reduce entonces al adjunto del elemento $(3,1)$ de la nueva matriz. Esto es:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -8 & -2 \\ 0 & -1 & -7 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Este último determinante ya es resoluble por la regla de Sarrus. No obstante, puede ser más sencillo seguir aplicando la regla de Chio, tomando ahora como base el elemento $(2,1)$ y desarrollando por los adjuntos de su columna:

$$\begin{vmatrix} -2 & -8 & -2 \\ -1 & -7 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 & 4 \\ -1 & -7 & -3 \\ 0 & -12 & -3 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -12 & -3 \end{vmatrix} = 30.$$

[9] Por supuesto, si todos los elementos de la línea son 0, el determinante también es 0, y no se debe hacer nada.

[10] En ocasiones, también se puede obtener un 1 multiplicando una línea por un escalar y sumándosela a otra. En otras ocasiones se puede simplemente reajustar el siguiente paso con facilidad.

4.3.2. Matriz inversa

Recordemos que se sabe del teorema 4.39 que una matriz cuadrada es regular (en el sentido de que tiene inversa) si y sólo si su determinante es distinto de 0. El siguiente resultado, en particular, proporciona un modo de construir la matriz inversa (independiente del de Gauss-Jordan).

Proposición 4.43. *Dada $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ una matriz cuadrada, y sea $\Delta \in M_n(K)$ la matriz cuyo elemento (i, j) es le adjunto del elemento (i, j) de A, para todo $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Se verifica:*

1. $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\Delta_{kj} = \delta_{ij}|A|$, *para todo* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.
2. $A \cdot \Delta^t = \Delta^t \cdot A = |A| I_n$.
3. *Si A es regular entonces:*
$$A^{-1} = \frac{\Delta^t}{|A|}.$$

Demostración. 1. En el caso $i = j$, el resultado se obtiene porque el primer miembro no es más que el desarrollo de $|A|$ por los adjuntos de su fila i-ésima, mientras que el segundo miembro lo es por los de su columna j-ésima. En el caso $i \neq j$ el primer miembro se anula (y análogamente el segundo) porque es igual al desarrollo por adjuntos de una matriz con dos filas repetidas; concretamente, la matriz que se obtiene reemplazando en A su fila j-ésima por su fila i-ésima (nótese que el adjunto del elemento (j, k) es el mismo para esas dos matrices).

2. Obsérvese que al calcular el elemento (i, j) del primer miembro (y análogamente del segundo):
$$(A \cdot \Delta^t)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\Delta^t)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{jk} = \delta_{ij}|A|,$$
la última igualdad por el apartado anterior.

3. Como A admite inversa, basta con multiplicar por $A^{-1}/|A|$ a la izquierda de ambos miembros de la igualdad anterior: $A \cdot \Delta^t = |A| \cdot I_n$. ∎

Ejemplo 4.44. Calculemos la inversa de la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculamos en primer lugar su determinante (el cual debe resultar distinto de 0)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -8.$$
Computamos a continuación la matriz de sus adjuntos:
$$\Delta = \begin{pmatrix} 14 & -12 & -2 \\ -6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
Para calcular la inversa, basta con trasponer y dividir por el determinante:
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \Delta^t = \frac{1}{(-8)} \cdot \begin{pmatrix} 14 & -6 & -2 \\ -12 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/4 & 3/4 & 1/4 \\ 3/2 & -1/2 & 0 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

4.3.3. Cálculo del rango de una matriz $m \times n$

Dada una matriz cualquiera $A \in M_{m\times n}(K)$, se llama *submatriz* de A a cualquier matriz que se obtenga suprimiendo k filas y l columnas de A, donde $k \in \{0,1,\dots m\}$, $l \in \{0,1,\dots,n\}$. Llamaremos *menor de orden* h de A, donde $h \in \{1,\dots,\ \mathrm{Min}\{m,n\}\}$), al determinante de cualquier submatriz cuadrada $h \times h$ de A (obtenida suprimiendo $m-h$ filas y $n-h$ columnas).

Proposición 4.45. *El rango r de la matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ es igual al mayor orden h de los menores de A distintos de 0.*

Demostración. Para $r \geq h$, basta con darse cuenta de que las h columnas (o filas) de un menor distinto de 0 tienen que ser linealmente independientes y, por tanto, las correspondientes h lineas de la matriz A también son independientes.

Para la desigualdad $r \leq h$, obsérvese que A contiene r columnas independientes, las cuales forman una submatriz $S \in M_{m\times r}$. Ahora bien el rango de S (por columnas) coincide con su rango por filas (esto es, con el rango de S^t) y, por tanto, r filas de S son independientes. Estas r filas forman una submatriz cuadrada C de S y, por tanto, también de A y verifican $|C| \neq 0$ al ser independientes sus líneas. ∎

Definición 4.46. *A los menores de A distintos de 0 de mayor orden (esto es, de orden igual al rango r de A) se les llamará* menores principales.

El rango de A se reduce entonces a encontrar un menor principal. Aunque a menudo esto se pueda hacer con simple inspección, debe desarrollarse un método sistemático. Obsérvese que si, por ejemplo, se ha obtenido un menor de orden $h < \mathrm{Min}\{m,n\}$, no resultaría nada eficiente tener que calcular todos los menores de orden $h+1$ para poder demostrar que el rango de A es h. Explicamos a continuación un método apropiado, ilustrándolo con el cálculo del rango de la matriz:

$$A_0 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Se suprimen todas las líneas que sean nulas, o proporcionales a otra (o que se aprecie fácilmente que se pueden escribir como combinación lineal del resto).

   En nuestro ejemplo se puede suprimir la última columna (por ser nula) y la cuarta fila (por ser proporcional a la segunda). El problema se reduce entonces a calcular el rango de[11]:

   $$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Escogemos un elemento de la matriz dada A que sea distinto de 0 (con lo que podemos asegurar que el rango es al menos 1). A continuación, *orlamos* ese menor, esto es, formamos un menor de orden superior en una unidad, añadiéndole una nueva fila y columna de la matriz dada A.

[11] No obstante, el lector puede comprobar que el procedimiento sigue siendo válido sin suprimir la cuarta fila, aunque resulte más lento.

Si uno de esos menores es no nulo, podemos asegurar que el rango es al menos 2, y repetir sucesivamente el proceso.

En el ejemplo, primero escogemos el elemento el -5 (elemento $(1,1)$) que es distinto de 0, y a continuación lo orlamos con los elementos de las segundas fila y columna para obtener:
$$\begin{vmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3,$$
también distinto de 0, por lo que el rango es al menos 2. Obsérvese que se anula el siguiente menor que se obtiene orlando de la manera más sencilla:
$$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

3. En el caso de que tengamos un menor C no nulo de orden h y, al orlarlo, se obtenga uno nulo, podemos escoger como sigue los menores de orden $h+1$, con el objetivo de detectar si una línea de la matriz original depende de las líneas seleccionadas por C. Fijemos la fila f con la que orlamos C (fijando la columna sería análogo) y consideremos la submatriz S que se obtiene con todas las filas seleccionadas por C y la fila f. En S, orlemos C con f y cada una de las columnas de S. Si uno de esos menores es 0, podemos asegurar que la columna de S con que se orla C es combinación lineal de las columnas de S seleccionadas por C. En consecuencia, si todos esos menores son 0, el rango (por columnas) de S será h. Como este rango es igual al rango por filas de S, la fila f será combinación de las filas de A que contienen a las de C, por lo que la podemos suprimir.

   En nuestro ejemplo nos fijamos ahora en la submatriz
   $$S = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$
   y observamos:
   $$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
   En consecuencia, el rango de S es dos (cada una de sus dos últimas columnas se escribe como combinación lineal de las dos primeras). Por tanto, su rango por filas también es dos, y la tercera fila de S se tiene que poder expresar como combinación lineal de las dos primeras. Suprimimos esta fila de la matriz y el problema se reduce al cálculo del rango de:
   $$A_2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Orlando de nuevo, se obtiene:
   $$\begin{vmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$
   (esto es, la tercera columna de A_2 es combinación lineal de las dos primeras) y
   $$\begin{vmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Esta última desigualdad nos proporciona un menor principal de A_2 y, por tanto, de A_0. En consecuencia, el rango de A_0 es 3.

4.3.4. Eliminación de parámetros: ecuaciones implícitas y anuladores

El procedimiento de cálculo del rango de una matriz proporciona un método sistemático para los problemas siguientes, que resultan esencialmente equivalentes. Sea $V(K)$ un e.v. finitamente generado y U un subsepacio vectorial suyo:

1. Dada una base de $B_U = (u_1,\dots,u_k)$, de cuyos elementos se conocen sus coordenadas en una base $B = (v_1,\dots,v_n)$ de $V(K)$ calcular unas ecuaciones implícitas para U en la base B.

   Procedimiento. Se escribe la matriz $A = ((u_1)_B|\dots|(u_k)_B)$ y se halla un menor principal (que tendrá orden k, al ser B_U linealmente independiente). Se impone entonces que tenga rango k la matriz $(x|A)$, donde la columna añadida $x := (x_1,\dots x_n)^t$ representa las n incógnitas (para las ecuaciones implícitas). Para conseguir esto, se orla el menor principal con los elementos de la columna añadida, y se impone que los $n-k$ menores así obtenidos sean iguales a 0 (generándose así las $n-k$ ecuaciones implícitas, necesariamente independientes, buscadas).

2. Dada unas ecuaciones paramétricas de U en la base B, calcular unas ecuaciones implícitas de U en esa base.

   Procedimiento. Sabemos que, si $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ son los parámetros, podemos obtener una base de U mediante k elecciones independientes de ellos (canónicamente $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0,\dots,\lambda_{k-1} = 0, \lambda_k = 0),\dots,(\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0,\dots,\lambda_{k-1} = 0, \lambda_k = 1)$, lo que reduce el problema al caso anterior.

3. Calcular el anulador de U, cuando U está determinado bien por ecuaciones paramétricas, bien por implícitas.

   Procedimiento. En el caso de que U esté determinado por implícitas, el resultado es inmediato porque cada una de las $n-k$ ecuaciones implícitas calcula el núcleo de una forma lineal, digamos, ϕ^i. Entonces, $\{\phi^1,\dots,\phi^{n-k}\}$ es una base de $\mathrm{an}(U)$. Si U está determinado por paramétricas, basta entonces con calcular sus ecuaciones implícitas (usando el caso anterior).

Ejemplo 4.47. Consideremos en $\mathbb{R}^3$ el subespacio U de ecuaciones paramétricas en la base usual:

$$\begin{array}{rcrr} x_1 & = & \lambda_1 & +2\lambda_2 \\ x_2 & = & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ x_3 & = & -\lambda_1 & +2\lambda_2, \end{array}$$

y construyamos las implícitas en esa misma base. Tomando las elecciones canónicas de los parámetros, encontramos una base B_U de U, que proporciona la matriz A de coordenadas en la base usual:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y construimos entonces} \qquad (x|A) = \begin{pmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 1 & -1 \\ x_3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La submatriz formada por las dos primeras filas y columnas de A nos proporciona un menor principal de A. Orlando este menor en $(x|A)$ (de la única manera posible) se tiene la (única) ecuación implícita que define U:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & 1 & 2 \\ x_2 & 1 & -1 \\ x_3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

(obsérvese que el determinante se computa con facilidad desarrollando por los adjuntos de la columna de las incógnitas). Es también de señalar que la forma lineal determinada por la ecuación,

$$\phi(x_1,x_2,x_3) = x_1 - 4x_2 - 3x_3 \qquad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

es una base del anulador de U.

Ejemplo 4.48. Sea considera en U el siguiente subespacio vectorial generado por cuatro parámetros, de los que *no* se presupone que sean independientes:

$$\begin{array}{rclllll} x_1 & = & -\lambda_1 & +2\lambda_2 & +3\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ x_2 & = & \lambda_1 & -2\lambda_2 & +\lambda_3 & +2\lambda_4 \\ x_3 & = & 2\lambda_1 & -4\lambda_2 & -\lambda_3 & +\lambda_4 \\ x_4 & = & 2\lambda_1 & -4\lambda_2 & +3\lambda_3 & +5\lambda_4 \end{array}$$

Nuestro objetivo será calcular unas ecuaciones implícitas para U (en la base usual). No obstante, como no se presupone que los parámetros sean independientes, comprobaremos en primer lugar el rango de la matriz obtenida mediante las elecciones canónicas de los parámetros (las cuales ahora sólo proporcionarán un sistema de generadores de U), esto es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Claramente, la segunda columna es proporcional a la primera[12]. Suprimiendo ésta, tomamos como menor no nulo $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Orlándolo, vemos que el rango es dos, puesto que:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad y \qquad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

En consecuencia, sólo los parámetros λ_1, λ_3 son independientes (en el sentido de que las correspondientes columnas primera y tercera de la matriz (4.4) son independientes, y la segunda y cuarta se pueden calcular como combinación linea de ellas). Para calcular las ecuaciones implícitas requeridas debemos asegurar que el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} x_1 & -1 & 3 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 2 & -1 \\ x_4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

es dos. Orlando el menor principal antes escogido, se obtienen las ecuaciones implítas:

$$0 = \begin{vmatrix} x_1 & -1 & 3 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3x_1 + 5x_2 - 4x_3, \qquad 0 = \begin{vmatrix} x_1 & -1 & 3 \\ x_2 & 1 & 1 \\ x_4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x_1 + 9x_2 - 4x_4.$$

Es de señalar que una base de $\mathrm{an}(U)$ son las formas lineales $\{\phi, \psi\}$ definidas por:

$$\phi(x_1,x_2,x_3,x_4) = -3x_1 + 5x_2 - 4x_3, \quad \psi(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + 9x_2 - 4x_4 \qquad \forall (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

[12] El lector puede ejercitarse en el cálculo del rango sin tener en cuenta este hecho.

4.3.5. Sistemas de ecuaciones lineales y regla de Cramer

Apliquemos a continuación los resultados previos a los SEL, empezando con los de Cramer.

Proposición 4.49. (Regla de Cramer.) *Dado un sistema de ecuaciones de Cramer,*

$$A\cdot x=b \qquad \textit{donde} \quad x=\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \in M_n(K), |A|\neq 0,$$

su única solución $x=A^{-1}b$ se expresa:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & b_2 & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}}{|A|},\quad \cdots \quad x_n=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n\end{vmatrix}}{|A|}$$

(obsérvese que en el numerador de la incógnita x_j, se reemplaza la columna j-ésima de la matriz A por la columna de términos independientes).

Demostración. Resulta inmediato de la forma explícita de la matriz inversa,

$$a=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{|A|}\Delta^t\cdot b=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \Delta_{i1}b_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n \Delta_{in}b_i\end{pmatrix},$$

sin más que tener en cuenta que cada expresión $\sum_{i=1}^n \Delta_{ij}b_i=\sum_{i=1}^n b_i\Delta_{ij}$ no es más que el desarrollo por los adjuntos de la columna j-ésima en el numerador de la expresión de cada x_j. ∎

Ejemplo 4.50. Discutiremos y resolveremos el SEL

$$\left.\begin{array}{rl} 2x_1-x_2+x_3 & =3\\ 2x_2-x_3 & =1\\ -x_1+x_2\quad & =1\end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=3.$$

En consecuencia, éste es un sistema compatible y determinado, cuya solución se puede obtener por la regla de Cramer:

$$x_1=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

$$x_2=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=2$$

$$x_3 = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

En el caso de un SEL arbitrario,

$$A \cdot x = b, \qquad A \in M_{m\times n},$$

recordemos que resulta compatible si y sólo si coinciden los rango r de la matriz A del sistema coincide con la ampliada $(A|b)$. Supuesto que esto sucede, podemos tomar un menor principal de A (que será también principal para $(A|b)$ y suprimir las filas de ambas matrices que no coincidan con las filas de ese menor (pues se corresponderán con ecuaciones linealmente dependientes de las no suprimidas). Las columnas del menor principal se corresponden entonces con las r incógnitas principales del sistema, y las otras con las secundarias, que se podrán tomar como parámetros $\lambda_1, \dots \lambda_{n-r}$. Suponiendo que esas incógintas principales son las r primeras (o renombrando las incógnitas para que así ocurra) el SEL original resulta equivalente a:

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1(r+1)}\lambda_1 \cdots - a_{1(r+(n-r)=n))}\lambda_{n-r} \\ \cdots \\ a_{r1}x_1 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r(r+1)}\lambda_1 \cdots - a_{r(r+(n-r)=n)}\lambda_{n-r} \end{array}$$

Para cada valor de los parámetros, este sistema es de Cramer, por lo que puede usarse directamente la regla de Cramer para solucionarlo:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - a_{1(r+1)}\lambda_1 \cdots - a_{1n}\lambda_{n-r} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_r - a_{r(r+1)}\lambda_1 \cdots - a_{rn}\lambda_{n-r} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}, \dots$$

$$\dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 - a_{1(r+1)}\lambda_1 \cdots - a_{1n}\lambda_{n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & b_r - a_{r(r+1)}\lambda_1 \cdots - a_{rn}\lambda_{n-r} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 4.51. Discutiremos y resolveremos el SEL

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 & = 0 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + 5x_4 & = 2 \end{array}\right\},$$

cuya matriz ampliada es:

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 5 & 2 \end{array}\right).$$

Para calcular el rango de la matriz del sistema, se considera el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(\neq 0)$. El rango es, por tanto, al menos 2. Orlando este menor, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto, el menor escogido es un menor principal de la matriz del sistema, cuyo rango es 2. Para la matriz ampliada, orlamos el menor principal usando la columna de términos independientes. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

el rango de la matriz ampliada también es dos, y el sistema resulta ser compatible e indeterminado. Para resolverlo, teniendo en cuenta el menor principal escogido, se suprime la tercera fila y se escogen x_1, x_2 como incógnitas principales. Así, las otras dos se toman como parámetros,

$$x_3 = \lambda_1 \qquad x_4 = \lambda_2,$$

y el sistema se reescribe:

$$\left.\begin{array}{rl} x_1 + x_2 & = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ -x_1 + x_2 & = \lambda_1 - \lambda_2 \end{array}\right\}.$$

Su solución usando la regla de Cramer es entonces:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 - \lambda_1 - \lambda_2 & 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \lambda_1,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \\ -1 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} - \lambda_2.$$