# Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

17 de marzo de 2020

En esta clase, empezamos el Tema 4:

## 1. Tema 4: Grupos cocientes. Teoremas de isomorfía.

**Definición 1.1.** *Sea $G$ un grupo. Un subgrupo $N \leq G$ se dice* **normal** *si*

$$aN = Na, \quad \text{para todo } a \in G.$$

*Esto es, si las clases laterales por la izquierda módulo $N$ coinciden con las clases laterales por la derecha módulo $N$.*

*Usaremos la notación*

$$N \trianglelefteq G$$

*para indicar que $N$ es un subgrupo normal de $G$.*

Veamos algunos ejemplos

*Ejemplo* 1.2.

1. Es claro que si $G$ es un grupo abeliano entonces todo subgrupo suyo es normal.
2. Para cualquier grupo $G$, los subgrupos impropios $\{1\}$ y $G$ son normales.
3. Sea $G = S_3$, entonces $A_3 \trianglelefteq S_3$. En efecto, puesto que $[S_3 : A_3] = 2$, hay dos clases laterales a izquierda y dos clases laterales a derecha que son

   $$S_3/A_3 = \{A_3, (1\ 2)A_3\} \text{ y } A_3/S_3 = \{A_3, A_3(1\ 2)\}$$

   teniéndose que

   $$(1\ 2)A_3 = \{(1\ 2), (1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3), (1\ 2)(1\ 3\ 2) = (1\ 3)\}$$

   y

   $$A_3(1\ 2) = \{(1\ 2), (1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3), (1\ 3\ 2)(1\ 2) = (2\ 3)\}.$$

   Consecuentemente $(1\ 2)A_3 = A_3(1\ 2)$ y $A_3$ es normal.
4. Sea $G = S_3$ y $H = \langle(1\ 2)\rangle = \{id, (1\ 2)\}$. Puesto que

   $$(1\ 2\ 3)H = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2\ 3)(1\ 2) = (1\ 3)\}$$

   mientras que

   $$H(1\ 2\ 3) = \{(1\ 2\ 3), (1\ 2)(1\ 2\ 3) = (2\ 3)\},$$

   se tiene que $(1\ 2\ 3)H \neq H(1\ 2\ 3)$ y entonces $H$ no es un subgrupo normal de $S_3$.

Nos ocupamos a continuación de establecer un criterio útil para determinar la normalidad de un subgrupo.

**Definición 1.3.** *Sea $G$ un grupo y $H \leq G$ un subgrupo suyo. Para cada elemento $a \in G$ el conjunto*

$$aHa^{-1} = \{axa^{-1}/x \in H\}$$

*es un subgrupo de $G$ (hacer como ejercicio) que llamaremos* **conjugado** *de $H$ por el elemento $a$.*

Tenemos entonces:

**Proposición 1.4.** *Sea $G$ un grupo y $N \leq G$ un subgrupo suyo. Son equivalentes los siguientes enunciados:*

*(1) $N \trianglelefteq G$,*

*(2) $aNa^{-1} = N$ para todo $a \in G$,*

*(3) $aNa^{-1} \leq N$ para todo $a \in G$.*

*Demostración.* (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $a \in G$, como $N \trianglelefteq G$, entonces $aNa^{-1} = Naa^{-1} = N$, y se tiene (2).

(2) $\Rightarrow$ (3) es evidente.

(3) $\Rightarrow$ (1) Sea $a \in G$ y $x \in aN$, entonces $\exists n \in N$ tal que $x = an$. Multiplicando por $a^{-1}$ será $xa^{-1} = ana^{-1} \in aNa^{-1} \leq N$ y entonces, $\exists n' \in N$ tal que $xa^{-1} = n' \Rightarrow x = n'a \in Na$. Consecuentemente $aN \subseteq Na$.

Recíprocamente, sea $y \in Na$, entonces $\exists m \in N$ tal que $y = ma$. Multiplicando por $a^{-1}$ será $a^{-1}y = a^{-1}ma \in a^{-1}Na = a^{-1}N(a^{-1})^{-1} \leq N$ y entonces, $\exists m' \in N$ tal que $a^{-1}y = m' \Rightarrow y = am' \in aN$. Consecuentemente $Na \subseteq aN$. Y de la doble inclusión se tiene que $aN = Na$, para todo $a \in N$. $\square$

Así pues un <u>un subgrupo es normal si coincide con todos sus conjugado</u>, o equivalentemente, <u>un subgrupo es normal si contiene a todos sus conjugados</u>.

Veamos un par de ejemplos mas de subgrupos normales haciendo uso de la proposición anterior

*Ejemplo* 1.5.
1. Sea $f : G \to G'$ un homomorfismo de grupos. Entonces $Ker(f) = \{x \in G/f(x) = 1\}$ es un subgrupo normal de $G$.

   En efecto, sea $a \in G$ y $x \in Ker(f)$, entonces $f(axa^{-1}) = f(a)f(x)f(a)^{-1} = f(a)1f(a)^{-1} = 1$. Por tanto $aKer(f)a^{-1} \leq Ker(f)$, para todo $a \in G$ y se tiene el resultado.

2. Sea $G = S_4$. Veamos que

   $$K = \{id, \alpha_1 = (1\ 2)(3\ 4), \alpha_2 = (1\ 3)(2\ 4), \alpha_3 = (1\ 4)(2\ 3)\}$$

   es un subgrupo normal de $S_4$. En efecto, sea $\sigma \in S_4$, entonces $\sigma id\sigma^{-1} = id \in K$, mientras que

   $$\sigma\alpha_1\sigma^{-1} = (\sigma(1\ 2)\sigma^{-1})(\sigma(3\ 4)\sigma^{-1}) = (\sigma(1)\,\sigma(2))(\sigma(3)\,\sigma(4))$$

   donde en la segunda igualdad hemos usado el hecho de que $\sigma(x_1\,x_2\ldots x_r)\sigma^{-1} = (\sigma(x_1)\,\sigma(x_2)\ldots\sigma(x_r))$. Entonces, puesto que $\sigma$ es biyectiva, $\sigma\alpha_1\sigma^{-1} \in K$. De la misma forma se demuestra que $\sigma\alpha_i\sigma^{-1} \in K$, para $i = 2, 3$. Consecuentemente $\sigma K\sigma^{-1} \leq K$, para todo $\sigma \in S_4$ y $K$ es normal en $S_4$.

Cuando conocemos un conjunto de generadores de un subgrupo, la condición de normalidad la podemos reducir a dicho conjunto en el sentido que se indica en la siguiente proposición:

**Proposición 1.6.** *Sea $G$ un grupo y $X \subseteq G$ un subconjunto no vacío. Sea $N = \langle X \rangle$. Entonces*

$$N \trianglelefteq G \;\Leftrightarrow\; axa^{-1} \in N \text{ para todo } x \in X \text{ y para todo } a \in G.$$

*Demostración.* La implicación hacia la derecha es clara.

Veamos la implicación hacia la izquierda: Para cualquier elemento $a \in G$ consideremos la aplicación

$$\varphi_a : G \to G, \text{ defnda por } \varphi_a(x) = axa^{-1}.$$

Es fácil ver que $\varphi_a$ es un homomorfismo de grupos (ejercicio) y entonces

$$aNa^{-1} = (\varphi_a)_*(N) = (\varphi_a)_*(\langle X \rangle) = \langle (\varphi_a)_*(X) \rangle = \langle aXa^{-1} \rangle \leq N$$

y se tiene el resultado. □

Como aplicación del resultado anterior veamos el siguiente

*Ejemplo* 1.7. Para cada $n \geq 2$, $A_n \trianglelefteq S_n$.

Veamos en primer lugar que $A_n$ **está generado por el conjunto de los ciclos de longitud** 3. En efecto, puesto que todo elemento de $A_n$ (de las permutaciones pares) se expresa como producto de un número par de trasposiciones, basta observar que el producto de 2 trasposiciones distintas se expresa como producto de ciclos de longitud 3:

$(x\ y)(z\ t) = (x\ y\ z)(y\ z\ t)$ si las dos trasposiciones son disjuntas,

$(x\ y)(y\ z) = (x\ y\ z)$ si las dos trasposiciones tienen un elemento en común.

Veamos entonces que $A_n$ es un subgrupo normal: Sea $\alpha \in S_n$ y $(x\ y\ z)$ un ciclo de longitud 3. Entonces $\alpha(x\ y\ z)\alpha^{-1} = (\alpha(x)\,\alpha(y)\alpha(z))$ es de nuevo un ciclo de longitud 3 y, por tanto, un elemento de $A_n$. Haciendo uso de la proposición anterior, deducimos la normalidad de $A_n$ en $S_n$.

Podemos también deducir la normalidad del grupo alternado desde el siguiente

**Ejercicio.** Ejercicio 3 Relación 3. Demostrar que todo subgrupo de índice 2 es normal.

*Resolución.* En efecto sea $N$ un subgrupo de un grupo $G$ tal que $[G : N] = 2$. Habrá entonces exactamente dos clases laterales por la izqda módulo $N$, una será $N$ y otra será $aN$ con $a \notin N$. Análogamente habrá exactamente dos clases laterales por la derecha módulo $N$ una será $N$ y, puesto que $a \notin N$, la otra será $Na$. Puesto que $G = N \cup aN = N \cup Na$ y ambas uniones son disjuntas, entonces $aN = Na$ y se tiene la normalidad.

Como aplicación directa de este ejercicio tenemos:

*Ejemplo* 1.8. Para cada $n \geq 3$ el subgrupo $C_n = \langle r \rangle = \{1, r, r^2, \ldots, r^{n-1}\}$ del grupo diédrico $D_n$ es normal

También haciendo uso del ejercicio anterior podemos describir ya el retículo de subgrupos del grupo alternado $A_4$:

**Ejercicio.** Ejercicio 4. Relación 3. Describir el retículo de subgrupos de $A_4$.

*Resolución.* Recordemos que

$A_4 = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2), (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\}$.

Puesto que $|A_4| = 12$, los subgrupos propios de $A_4$ tendrán orden $2, 3, 4$ ó 6. Los de orden 2 serán cíclicos generados por elementos de orden 2 y entonces

$$C_2 = \langle(1\ 2)(3\ 4)\rangle, C_2' = \langle(1\ 3)(2\ 4)\rangle,\ y\ C_2'' = \langle(1\ 4)(2\ 3)\rangle.$$

Los de orden 3 serán cíclicos generados por elementos de orden 3 y entonces

$$\begin{aligned} C_3 &= \langle(1\ 2\ 3)\rangle = \{id, (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\} = \langle(1\ 3\ 2)\rangle, \\ C_3' &= \langle(1\ 2\ 4)\rangle = \{id, (1\ 2\ 4), (1\ 4\ 2)\} = \langle(1\ 4\ 2)\rangle, \\ C_3'' &= \langle(1\ 3\ 4)\rangle = \{id, (1\ 3\ 4), (1\ 4\ 3)\} = \langle(1\ 4\ 3)\rangle, \\ C_3''' &= \langle(2\ 3\ 4)\rangle = \{id, (2\ 3\ 4), (2\ 4\ 3)\} = \langle(2\ 4\ 3)\rangle, \end{aligned}$$

Los de orden 4 serán ó cíclicos o tipo Klein. Como en $A_4$ no hay elementos de orden 4 entonces no tiene subgrupos de orden 4 que sean cíclicos. Sí hay un subgrupo de orden 4 tipo Klein que es

$$K = \{id, (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}.$$

Finalmente veamos que $A_6$ no tiene subgrupos de orden 6:

En efecto, supongamos que existe $N \leq A_4$ con $|N| = 6$ entonces $[A_4 : N] = 12$ y, por el ejercicio anterior, $N \trianglelefteq A_4$. Puesto que $N$ tiene 6 elementos entonces contiene al menos a un ciclo de longitud 3. Sea $(x_1\, x_2\, x_3) \in N$, entonces también contendrá a su inverso, esto es $(x_1\, x_3\, x_2) \in N$. Como $N \trianglelefteq A_4$ entonces para $\alpha = (x_1\, x_2)(x_3\, x_4)$, tendremos que

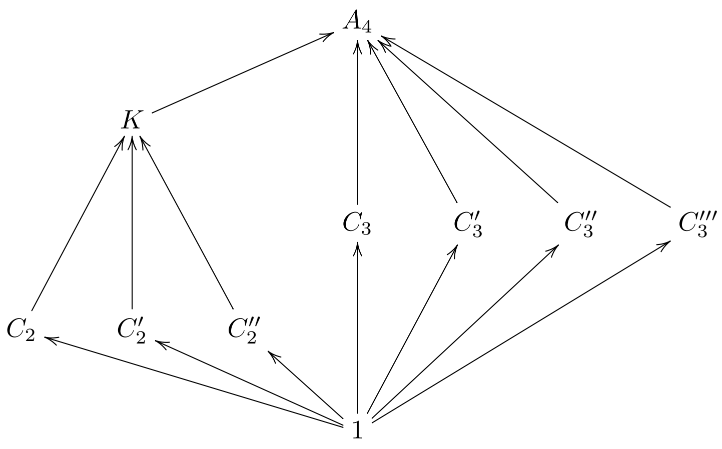
$$\alpha(x_1\, x_2\, x_3)\alpha^{-1} = (x_1\, x_4\, x_2) \in N,$$

y entonces $(x_1\, x_4\, x_2) \in N$ y también contendrá a su inverso, es decir $(x_1\, x_2\, x_4) \in N$. De nuevo, como $N \trianglelefteq A_4$ entonces para $\beta = (x_1\, x_3)(x_2\, x_4)$, tendremos que

$$\beta(x_1\, x_2\, x_3)\beta^{-1} = (x_2\, x_4\, x_3) \in N,$$

y entonces $(x_2\, x_4\, x_3) \in N$ y también contendrá a su inverso, es decir $(x_3\, x_3\, x_4) \in N$. Como todo subgrupo contiene al uno del grupo, vemos ya que tal subgrupo no puede existir ya que estaría obligado a tener mas de 6 elementos.

Así pues, el retículo de subgrupos de $A_4$ tiene el siguiente grafo:



Finalmente, los subgrupos normales de $A_4$ son los impropios, esto es $A_4$ y 1 y dentro de los propios únicamente es normal el subgrupo $K$ (vease Ejemplo 1.5). No son normales los cíclicos de orden 2 ni tampoco los cíclicos de orden 3, pues por ejemplo considerando $\alpha = (1\ 4)(2\ 3)$, $\alpha C_3 \alpha^{-1} \not\leq C_3$ pues $\alpha(1\,2\,3)\alpha^{-1} = (4\ 3\ 2) \notin C_3$. De la misma forma se observa para los otros subgrupos cíclicos.