TEMA 5. Ejemplos de distribuciones multidimensionales

Contenidos

- Distribución Multinomial
- Distribución Normal Bidimensional

Distribución Multinomial

La distribución Multinomial k-dimensional con parámetros n y $p_1, \ldots p_k$, indica el número de veces que aparecen k sucesos excluyentes y no exhaustivos, con probabilidades $p_1, \ldots p_k$, en n repeticiones independientes de un experimento. Es decir, $(X_1, \ldots, X_k) \sim M_k(n; p_1, \ldots, p_k)$, si y sólo si su función masa de probabilidad k-dimensional viene dada por:

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1! \cdots x_k!(n - \sum_{i=1}^k x_i)!} p_1^{x_1} \cdots p_k^{x_k} \left(1 - \sum_{i=1}^k p_i\right)^{n - \sum_{i=1}^k x_i},$$

donde $n \in \mathbb{N}$, $0 < p_i < 1$, $i = 1, \ldots, k$, $\sum_{i=1}^k p_i < 1$, $x_i \in \{0, \ldots, n\}$, y $\sum_{i=1}^k x_i \leq n$.

Distribuciones Marginales

Sea $(X_1, \ldots, X_k) \sim M_k(n; p_1, \ldots, p_k)$, para cualquier subvector $(X_{i_1}, \ldots X_{i_l})$, con $i_1, \ldots, i_l \in \{1, \ldots, k\}$, siendo $i_m \neq i_p$, $m \neq p$, $m, p = 1, \ldots, l$,

$$(X_{i_1}, \ldots X_{i_l}) \sim M_l(n; p_1, \ldots, p_l), \quad l \in \{1, \ldots, k-1\}.$$

En particular, para las marginales unidimensionales se cumple,

$$X_i \sim B(n, p_i), \quad i = 1, \ldots, k.$$

Distribuciones Condicionadas

Las distribuciones condicionadas de una multinomial siguen tambin una distribución multinomial. Más concretamente, sea $(X_1, \ldots, X_k) \sim M_k(n; p_1, \ldots, p_k)$,

$$(X_1, \ldots, X_l / X_{l+1} = x_{l+1}, \ldots, X_k = x_k) \sim M_l \left(n - \sum_{i=l+1}^{k} x_i; \frac{p_1}{1 - \sum_{i=l+1}^{k} p_i}, \ldots, \frac{p_l}{1 - \sum_{i=l+1}^{k} p_i} \right).$$

En particular,

$$X_i / X_j = x_j \sim B\left(n - x_j, \frac{p_i}{1 - p_j} \right), \quad i, j = 1, \ldots, k;\ i \neq j.$$

Regresión y Correlación. Caso bidimensional

La curva (recta) de regresión de X_i / X_j, viene dada por

$$x_i = \frac{np_i}{1 - p_j} - \frac{p_i}{1 - p_j} x_j.$$

Las razones de correlación, que coinciden con el coeficiente de determinación vienen dadas por:

$$\eta_{X_i/X_j} = \eta_{X_j/X_i} = \rho^2_{X_i X_j} = \frac{p_i p_j}{(1 - p_i)(1 - p_j)}, \quad i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

El coeficiente de correlación lineal viene dado por

$$\rho_{X_i X_j} = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1 - p_i)(1 - p_j)}}, \quad i \neq j,\ i, j \in \{1, \ldots, k\}.$$

Función Genetratriz de Momentos

$$\begin{aligned} M_{X_1, \ldots, X_k}(t_1, \ldots, t_k) &= E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{k} t_i X_i \right) \right] \\ &= \left(p_1 e^{t_1} + \cdots + p_k e^{t_k} + \left(1 - \sum_{i=1}^{k} p_i \right) \right)^n,\ t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Reproductividad Sean $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_p$, variables aleatorias independientes k-dimensionales, con distribución multinomial con parámetros n_i, $i = 1, \ldots, p$, y $p_1, \ldots, p_k$. Se tiene entonces

$$\sum_{i=1}^{p} \mathbf{X}_i \sim M_k \left(\sum_{i=1}^{p} n_i; p_1, \ldots, p_k \right).$$

Distribución normal bidimensional

Se dice que (X_1, X_2) se distribuye según una normal bidimensional con vector de medias $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$ y con matriz de varianzas-covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{pmatrix},$$

si su función de densidad de probabilidad viene dada por:

$$\begin{aligned} & f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \left[\det(\Sigma)\right]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right) \\ & = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\ & \times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right) \\ & \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{1}$$

donde σ_i^2 es la varianza de X_i, $i = 1, 2$, y ρ es el coeficiente de correlación lineal de X e Y.

Se considera, en primer lugar, el cálculo de las distribuciones marginales y condicionadas. Ambas distribuciones son normales. En el caso de las marginales, se tiene que

$$X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \quad X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2).$$

Para las condicionadas se obtienen las siguientes distribuciones normales:

$$\begin{aligned} X_1/X_2 = x_2 &\sim \mathcal{N}\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2), \sigma_1^2(1-\rho^2)\right) \\ X_2/X_1 = x_1 &\sim \mathcal{N}\left(\mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x_1-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)\right) \end{aligned}$$

Regresión y correlación

- La curva de regresión, recta de regresión de X_i/X_j, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, viene dada por la media de las distribuciones normales condicionada, anteriormente especificadas. Más concretamente, viene dada por

  $$\mu_i + \rho\frac{\sigma_i}{\sigma_j}(x_j - \mu_j), \quad i, j = 1, 2, \ i \neq j.$$

- Las razones de correlación coinciden con el coeficiente de determinación ρ^2, ya que las curvas de regresión coinciden con las rectas de regresión.

- El E.C.M. asociado a la curva de regresión de X_i sobre X_j viene dado por $\sigma_i^2(1-\rho^2)$, $i=1,2$, para cada $j=1,2$, con $i \neq j$.

Función generatriz de momentos

Para $\mathbf{t}=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) &= M_{X_1,X_2}(\mathbf{t}) = E\left[\exp\left(\langle \mathbf{t},\mathbf{X}\rangle\right)\right] \\
&= \exp\left(\langle \boldsymbol{\mu},\mathbf{t}\rangle + \frac{\mathbf{t}\Sigma\mathbf{t}^T}{2}\right), \\
&= \exp\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{t_1^2\sigma_1^2 + t_2^2\sigma_2^2 + 2t_1t_2\rho\sigma_1\sigma_2}{2}\right).
\end{aligned}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
&M_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = E\left[\exp\left(\langle \mathbf{t},\mathbf{X}\rangle\right)\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t_1x_1 + t_2x_2\right) f_{X_1/X_2=x_2}(x_1/x_2) f_{X_2}(x_2)dx_1dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t_2x_2\right) f_{X_2}(x_2)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t_1x_1\right) f_{X_1/X_2=x_2}dx_1\right]dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t_2x_2\right) M_{X_1/X_2=x_2} f_{X_2}(x_2)dx_2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(t_2x_2\right)\exp\left(t_1\left(\mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right) + \frac{t_1^2\sigma_1^2(1-\rho^2)}{2}\right) f_{X_2}(x_2)dx_2 \\
&= \exp\left(t_1\left(\mu_1 - \rho t_1\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2\right) + \frac{t_1^2\sigma_1^2(1-\rho^2)}{2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(t_2x_2 + t_1\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}x_2\right) f_{X_2}(x_2)dx_2 \\
&= \exp\left(t_1\left(\mu_1 - \rho t_1\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2\right) + \frac{t_1^2\sigma_1^2(1-\rho^2)}{2}\right) M_{X_2}\left(t_2 + t_1\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right) \\
&= \exp\left(t_1\left(\mu_1 - \rho t_1\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\mu_2\right) + \frac{t_1^2\sigma_1^2(1-\rho^2)}{2}\right) \\
&\times \exp\left(\left(t_2 + t_1\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\mu_2 + \frac{\left(t_2 + t_1\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\sigma_2^2}{2}\right) \\
&\exp\left(t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \frac{t_1\sigma_1^2 + t_2\sigma_2^2 + 2t_1t_2\rho\sigma_1\sigma_2}{2}\right), \quad t_1,t_2\in\mathbb{R}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

En la derivación de (2), se ha aplicado la definición de la densidad de probabilidad marginal de $X_1/X_2=x_2$, en términos de la conjunta y condicionada, es decir,

$$f_{X_1/X_2=x_2}(x_1) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \Rightarrow f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1/X_2=x_2}(x_1) f_{X_2}(x_2). \tag{3}$$

La ecuación (3) se puede verificar directamente a partir de la expresión de la densidad de probabilidad conjunta de la normal bidimensional. Más concretamente se obtiene, operando en el argumento de la exponencial que define $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$ como sigue:

$$\begin{aligned}
&f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right]\right) \\
&\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \\
&\times \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + (\rho^2+1-\rho^2)\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right] - 2\rho\left(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)\right) \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right) \\
&\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x_1-\mu_1-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(x_2-\mu_2)\right]^2\right)
\end{aligned}$$

Normalidad de combinaciones lineales de las componentes. Sea $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$. Se considera $\mathbf{A}_{2\times q}$ una matriz de rango máximo q, con $q = 1, 2$. Se tiene entonces

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{A}_{2\times q} \sim \mathcal{N}_q\left(\boldsymbol{\mu}\mathbf{A}, \mathbf{A}^T\Sigma\mathbf{A}\right).$$