Algebra II (Doble grado Informática-Matemáticas)

30 de marzo de 2020

1. Tema 4: Grupos cocientes. Teoremas de isomorfía.

Como os decía en la última clase, dedicaremos esta clase a hacer algunos ejercicios de la Relación 4 relativos al producto directo.

Ejercicio. (Ejercicio 21. Relación 3) Demostrar que los grupos S_3, C_{p^n} (con p primo) y $\mathbb{Z}$ no son producto directo internos de subgrupos propios.

Resolución. Recordemos que un grupo G es producto directo interno de subgrupos $H_1, \ldots, H_m$, $m \geq 2$ si
(1) $H_i \trianglelefteq G$ para todo $i = 1, 2, \ldots m$
(2) $H_1 \ldots H_m = G$
(3) $(H_1 \ldots H_{i-1}) \cap H_i = \{1\}$ para todo $i = 2, \ldots, m-1$.

- S_3

  Los subgrupos propios de S_3 son A_3, que como sabemos es un subgrupo normal de S_3, y los cíclicos de orden 2: $\langle (i\ j) \rangle$, $1 \leq i < j \leq 3$. Éstos últimos no son subgrupos normales de S_3 pues, por ejemplo, $(1\ 3)\langle(1\ 2)\rangle(1\ 3)^{-1} \neq \langle(1\ 2)\rangle$ pues

  $$(1\ 3)\langle(1\ 2)\rangle(1\ 3)^{-1} = (2\ 3) \notin \langle(1\ 2)\rangle = \{id, (1\ 2)\}.$$

  De igual forma podéis ver que los otros dos subgrupos cíclicos de orden 2 no son normales

  Así pues no existen 2 o mas de 2 subgrupos propios de S_3 que verifiquen la condición (1).

- $C_{p^n} = \langle x / x^{p^n} = 1 \rangle$, p un número primo.

  Como vimos en el Ejercicio 28 de la Relación 2, hecho en la clase del 16 de marzo, los subgrupos propios de C_{p^n} son los cíclicos $C_{p^k} = \langle x^{p^{n-k}} \rangle$ de orden p^k, con $1 \leq k \leq n-1$, teniéndose que

  $$C_p \leq C_{p^2} \leq \cdots \leq C_{p^{n-1}}. \tag{1.1}$$

  Entonces en este caso tanto la condición (2) como la condición (3) no se verifican para cualquier familia finita de subgrupos propios de C_{p^n} (no así la (1) pues como este grupo es abeliano, entonces todos sus subgrupos son normales).

En efecto, para ello no hay más que tener en cuenta el siguiente hecho (demostradlo vosotros!!)

"Si $H, K \in Sub(G)$ son subgrupos de un grupo G tales que $H \leq K$ entonces $HK = K$"

Entonces si $H_1, \dots, H_n$ son subgrupos propios de C_{p^n}. Por (1.1), estos subgrupos están en cadena. Supongamos, sin perdida de generalidad, que

$$H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq H_m$$

entonces

$$H_1 \dots H_m = H_m \neq G \text{ pues } H_m \text{ es un subgrupo propio de } G,$$

y por tanto no se verifica (2). Análogamente

$$H_1 \dots H_{i-1} \cap H_i = H_{i-1} \cap H_i = H_{i-1} \neq \{1\}$$

pues $H_{i-1} \leq H_i$ y H_{i-1} es un subgrupo propio de G,

- $\mathbb{Z}$

  Para este caso, os recuerdo que en el curso pasado visteis que los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $n\mathbb{Z}$ (el subgrupo de los múltiplos de n) con $n \geq 0$. Por otro lado, también visteis que dados dos subgrupos $n\mathbb{Z}, m\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$ se tiene que

$$(n\mathbb{Z}) + (m\mathbb{Z}) = \mathrm{m.c.d.}(n,m)\mathbb{Z}; \text{ y } n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = \mathrm{m.c.m.}(n,m)\mathbb{Z}.$$

  Entonces si $H_i = n_i\mathbb{Z}$, $i = 1, \dots m$ son subgrupos propios de $\mathbb{Z}$ (esto es $n_i \geq 2$ para todo i), será

$$\begin{aligned}(H_1 + \cdots + H_{i-1}) \cap H_i = & \\ & \mathrm{m.c.d.}(n_1, \dots, n_{i-1})\mathbb{Z} \cap n_i\mathbb{Z} = \\ & \mathrm{m.c.m.}(\mathrm{m.c.d.}(n_1, \dots, n_{i-1}), n_i)\mathbb{Z} \neq \{0\}\end{aligned}$$

  y entonces no se verifica (3)

  Como en el caso anterior, la condición (1) sí se tiene pues $\mathbb{Z}$ es abeliano y entonces todo subgrupo suyo es normal. Mientras que la condición (2) se verifica si $\mathrm{m.c.d.}(n_1, \dots, n_m) = 1$.

Ejercicio. (Ejercicio 22. Relación 3) En cada uno de los siguientes casos, decidir si el grupo G es o no producto directointerno de los subgrupos H y K.

1. $G = \mathbb{R}^\times$, $H = \{\pm 1\}$, $K = \{x \in \mathbb{R} |\, x > 0\}$.
2. $G = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{R})\}$, $H = \{\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{R})\}$, $K = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in GL_2(\mathbb{R})\}$.
3. $G = \mathbb{C}^\times$, $H = \{z \in \mathbb{C} |\, |z| = 1\}$, $K = \{x \in \mathbb{R} |\, x > 0\}$.

Resolución. En el primer caso es fácil ver que en efecto H y K verifican las condiciones $(1), (2)$ y (3) señaladas en el ejercicio anterior (hacedlo!!).

En el segundo caso, se tiene que H no es un subgrupo normal de G pues, por ejemplo $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) H \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \neq H$ ya que

$$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right) \notin H.$$

Por tanto no se verifica (1) y G no es producto directo interno de H y K.

Finalmente en el tercer caso, veamos que $\mathbb{C}^{\times}$ es producto directo interno de los subgrupos H y K propuestos:

Puesto que G es abeliano, entonces todo subgrupo suyo es normal y por tanto se tiene (1). También es claro que $H \cap K = \{1\}$ y se tiene (3). Finalmente para ver (2), recordemos que todo número complejo no nulo $a + bi$ se expresa como

$$a + bi = r(cos\theta + i\, sen\theta)$$

siendo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ (raíz cuadrada positiva) y θ, el argumento, determinado por $cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y $sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Entonces como $r \in K$ y $cos\theta + i\, sen\theta \in H$, resulta que

$$\mathbb{C}^{\times} = KH$$

y se tiene (2).

Ejercicio. (Ejercicio 25. Relación 3)

Sean H, K, L y M grupos tales que $H \times K \cong L \times M$. ¿Se verifica necesariamente que $H \cong L$ y $K \cong M$?

Resolución. La respuesta es que no pues por ejemplo sean $H = C_2$, $K = C_{15}$, $L = C_6$ y $M = C_5$.

Según vimos el Corolario 1.3 de la clase de del 24 de marzo, si m. c. d.$(n, m) = 1$ entonces $C_n \times C_m \cong C_{nm}$, con lo que

$$H \times K = C_2 \times C_{15} \cong C_{30} \cong C_6 \times C_5 = L \times M,$$

y claramente $H \ncong L$ y $K \ncong M$..

Ejercicio. (Ejercicio 27. Relación 3)

Sean H, K dos grupos y sean $H_1 \lhd H$, $K_1 \lhd K$. Demostrar que $H_1 \times K_1 \lhd H \times K$ y que

$$\frac{H \times K}{H_1 \times K_1} \cong \frac{H}{H_1} \times \frac{K}{k_1}.$$

Resolución. Consideremos la aplicación

$$f : H \times K \to H/H_1 \times K/K_1 \text{ definida por } f(x, y) = (xH_1, yK_1).$$

Entonces se fácil ver (hacedlo!!)

1.- f es un epimorfismo (esto es homomorfismo sobreyectivo) de grupos.

2.- $Ker(f) = H_1 \times K_1$

Entonces, $H_1 \times K_1 \lhd H \times K$ y por el primer teorema de isomorfía se tiene el isomorfismo pedido.

Ejercicio. (Ejercicio 28. Relación 3) Sean $H, K \lhd G$ tales que $H \cap K = 1$. Demostrar que G es isomorfo a un subgrupo de $G/H \times G/K$.

Resolución. Consideramos la aplicación

$$f : G \to G/H \times G/K \text{ definida por } f(x) = (xH, xK).$$

Entonces se fácil ver (hacedlo!!)

1.- f es un homomorfismo de grupos.

2.- $Ker(f) = H \cap K$

Entonces como $H \cap K = 1$, por el primer teorema de isomorfía será $G \cong Img(g)$ y como $Img(g)$ es un subgrupo de codominio, se tiene lo pedido.

Ejercicio. (Ejercicio 30. Relación 3) Demostrar que si G es un grupo que es producto directo interno de subgrupos H y K, y $N \trianglelefteq G$ tal que $N \cap H = \{1\} = N \cap K$, entonces N es abeliano.

Resolución. Por ser G producto directo interno de H y K, entonces ambos subgrupos son normales y además $G = HK$.

Veamos primero que los elementos de N conmutan con los de H y con los de K: En efecto, sean $n \in N$ y $h \in H$ y consideremos el elemento $nhn^{-1}h^{-1}$. Como N y H son subgrupos normales de G entonces

$$nhn^{-1}h^{-1} \in N \cap H = \{1\} \Longrightarrow nh = hn, \ \forall n \in N, \ \forall k \in K.$$

De forma análoga se tiene que $nk = kn$ para todo $n \in N$ y $k \in K$

Sean pues $n_1, n_2 \in N$, como $N \leq G = HK$, expresamos n_2 como $n_2 = hk$, con $h \in H$ y $k \in K$. Entonces

$$n_1 n_2 = n_1 hk = hn_1 k = hkn_1 = n_2 n_1,$$

y N es abeliano, como queríamos demostrar.

Ejercicio. (Ejercicio 31. Relación 3) Sea G un grupo finito que sea producto directo interno de dos subgrupos H y K tales que $mcd(|H|, |K|) = 1$. Demostrar que para todo subgrupo $N \leq G$ verifica que $N \cong (N \cap H) \times (N \cap K)$.

Resolución. Puesto que G es producto directo interno de H y K entonces verifican las condiciones $(1), (2)$ y (3) recordadas anteriormente, esto es (1) H, K son subgrupos normales de G, (2) $HK = G$ y (3) $H \cap K = \{1\}$.

Veamos que N es producto directo interno de $N \cap H$ y $N \cap K$, lo que implica $N \cong (N \cap H) \times (N \cap K)$:

En efecto, hemos de ver que se verifican las correspondientes condiciones $(1), (2)$ y (3) para los subgrupos $N \cap H$ y $N \cap K$ de N. Puesto que H, K son subgrupos normales de G, por el tercer teorema de isomorfía, serán $N \cap H, N \cap K$ subgrupos normales de N y se tiene (1). Como

$$(N \cap H) \cap (N \cap K) = N \cap (H \cap K) = N \cap \{1\} = \{1\},$$

se tiene (3).

Finalmente veamos (2), esto es $N = (N \cap H)(N \cap K)$:

Supongamos que $|H| = m$ y $|K| = n$. Como por hipótesis $\mathrm{m.\,c.\,d.}(m, n) = 1$, existirán $r, s \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = mr + ns$.

Sea $x \in N$, como $N \leq G = HK$, existirán $h \in H$ y $k \in K$ tal que $x = hk$. Como $ord(h) \mid |H| = m$ entonces $h^{mr} = 1$, análogamente como $ord(k) \mid |K| = n$ entonces $k^{ns} = 1$, entonces

$$\begin{cases} h = h^{mr+ns} = h^{ns} = h^{ns}k^{ns} \overset{(*)}{=} (hk)^{ns} = x^{ns} \in N \Rightarrow h \in N \cap H \\ k = k^{mr+ns} = k^{mr} = h^{mr}k^{mr} \overset{(*)}{=} (hk)^{mr} = x^{mr} \in N \Rightarrow k \in N \cap K \end{cases}$$

($*$) Aquí hemos utilizado que $hk = kh$ para todo $h \in H$ y $k \in K$ lo cual es consecuencia de que H, K son subgrupos normales de G y $H \cap K = \{1\}$.

Así pues $x = hk$ con $h \in N \cap H$ y $k \in N \cap K$ y por tanto $N = (N \cap H)(N \cap K)$, lo que acaba el ejercicio.