Posibles Integrales Ordinaria 2021

Daniel Monjas Miguélez

June 16, 2021

1 Ejercicio 4. (Relación 14)

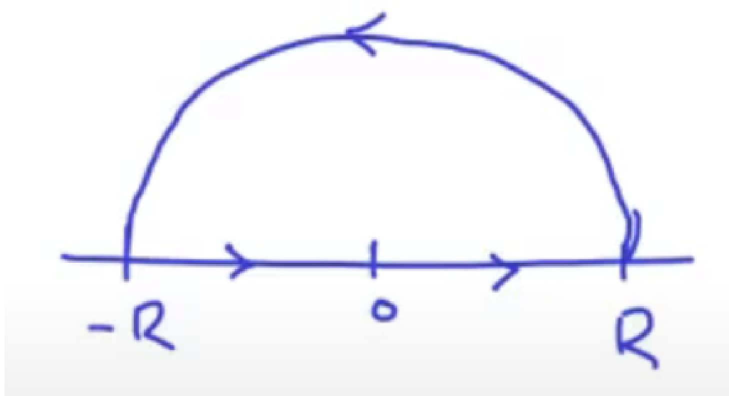
Probar que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$$

Fijándonos en el denominador, se puede ver que tiene raíces complejas múltiples, que son $\pm ia$ simples, y $\pm ib$ dobles.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$$

La tarea ahora será encontrar un ciclo de manera que este contenga nuestro segmento $[-R, R]$. Hay que encontrar que la otra parte del ciclo nos de una integral muy pequeña, por ejemplo podemos tomar la semicircunferencia que parte de R y termina en R.



Habrá que rodear alguna de las singularidades de nuestra función.

Consideramos la función $f : \Omega \backslash A \longrightarrow \mathbb{C}$, dada por $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$, donde $\Omega = \mathbb{C}$. Para poder aplicar el teorema de los residuos, el ciclo que construyamos debe ser nul-homólogo con respecto a Ω, luego como $\mathbb{C}$ es homológicamente conexo tenemos una de las condiciones. Y $A = \{\pm ia, \pm ib\}$, supuesto $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A)$.

Por otro lado, cuando R creza es claro que nuestra circunferencia rodeará las singularidades. Supongamos que $a \neq b$ y tomamos $R \in \mathbb{R}^+$, con $R > max\{a, b\}$, para que así nuestra semicircunferencia contenga a ia y a ib. Consideramos el ciclo $\Gamma_R = \sigma_R + \gamma_R$

$$\begin{array}{cc} \sigma_R : [-R, R] \longrightarrow \mathbb{C} & \quad \gamma_R : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{C} \\ \sigma_R(x) = x & \quad \gamma_R(x) = Re^{ix} \end{array}$$

Γ_R es un ciclo en $\Omega\backslash A = \mathbb{C}\backslash\{\pm ia, \pm ib\}$. Entonces tenemos que $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash A)$, Γ_R es nul-homólogo con respecto a $\Omega = \mathbb{C}$ y como A es finita $A' = \emptyset$, que son todas las hipótesis del teorema de los residuos, luego lo aplicamos el mismo $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \inf_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{a\in A} Ind(a)_{\Gamma_R} Res(f(z), a) =$$
$$= 2\pi i(Ind_{\Gamma_R}(ia)Res(f(z), ia) + Ind_{\Gamma_R}(ib)Res(f(z), ib)) =$$
$$= 2\pi i(Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib))$$

Por como hemos elegido el ciclo, sabemos que $Ind_{\Gamma_R}(ia) = 1 = Ind_{\Gamma_R}(ib)$, lo que nos permite obtener una expresión que no depende de R. Claramente f las singularidades en ia y en ib son polos de orden 1.

$$\int_{\sigma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib)) \quad \forall R > max\{a, b\}$$

Entonces,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\sigma_R} \frac{dz}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} + \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib))$$

Intuitivamente sabemos que la segunda de las integrales es exactamente 0, y se comprobará ahora. Veamos que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$.

Si $z \in \gamma_R^* \Rightarrow |z| = R$, y así acotamos la integral.

$$|\int_{\gamma_R} f(z)dz| \leq l(\gamma_R)\frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)^2} = \frac{\pi R}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)^2} \quad \overset{R\to\infty}{\longrightarrow 0}$$
$$|f(z)| = \frac{dz}{|z^2+a^2||z^2+b^2|^2} \leq \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)^2}$$
$$|z^2+a^2| \geq |z^2| - a^2 = R^2 - a^2 > 0$$
$$|z^2+b^2| \geq R^2 - b^2 > 0$$

$\Rightarrow \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$. Volviendo a la igualdad 1 tenemos la igualdad. Basta con calcular los residuos para obtener lo que nos piden.

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{(z-ia)(z+ia)(z-ib)^2(z+ib)^2}$$

donde vemos que f tiene un polo de orden 1 en ia y un polo de orden 2 en ib. Vamos a calcular el residuo

$$\lim_{z\to ia}(z-ia)f(z) = \lim_{z\to ia}\frac{1}{(z+ia)(z^2+b^2)} = \frac{1}{2ia(b^2-a^2)^2}$$

Por otro lado f tiene un polo de orden 2 en ib

$$\lim_{z\to ib}\frac{\partial}{\partial z}((z-ib)^2 f(z)) = \lim_{z\to ib}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{(z^2+a^2)(z+ib)^2}) =$$

$$= lim_{z\to ib} - \frac{2z(z+ib)^2+2(z^2+a^2)(z+ib)}{(z^2+a^2)^2(z+ib)^4} =$$

$$= lim_{z\to ib} - \frac{2z(z+ib)+2(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)^2(z+ib)^3} = -\frac{2ib(2ib)+2((ib)^2+a^2)}{((ib)^2+a^2)^2(2ib)^3} =$$

$$= \frac{4b^2+2b^2-2a^2}{-(-b^2+a^2)^2 8ib^3}$$

Sustituyendo lo anterior en la fórmula de arriba tenemos

$$2\pi i(Res(f(z),ia)+Res(f(z),ib)) = 2\pi i\left[\frac{1}{2ia(b^2-a^2)^2}+\frac{4b^2+2b^2-2a^2}{-(-b^2+a^2)^2 8ib^3}\right] =$$

$$= \pi\left[\frac{1}{a(b^2-a^2)^2}-\frac{3b^2-a^2}{(-b^2+a^2)^2 2b^3}\right] = \pi\left[\frac{2b^3-3b^2a+a^3}{2b^3a(b^2-a^2)^2}\right] = \frac{\pi(a+2b)(b-a)^2}{2b^3a(b-a)^2(b+a)^2} =$$

$$= \frac{\pi(a+2b)}{2b^3a(b+a)^2}$$

2 Ejercicio 7. Relacion 14

Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{cos(tx)}{(x^2+a^2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(tx)}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)e^{-at}$$

En primer lugar es claro que el denominador de la función a integrar tiene raíces complejas dobles $\pm ia$.

Sea $f : \Omega\backslash A \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}$$

, se tiene que $\Omega = \mathbb{C}$, $A = \{\pm ia\}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\mathbb{C})$.

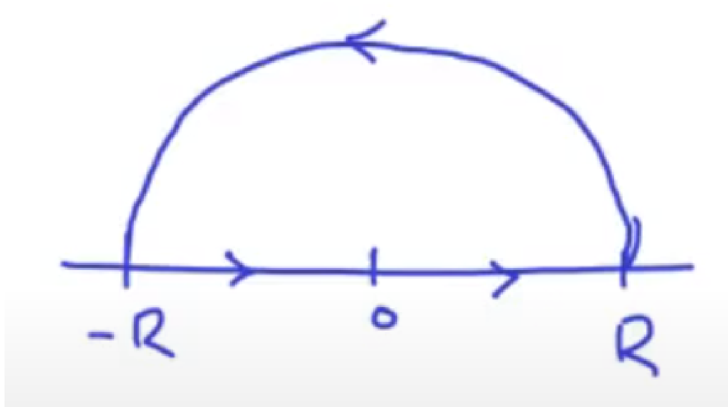
Además, ya es claro que $A' \cap \Omega = \emptyset$. También se tiene que como $\Omega = \mathbb{C}$ es homológicamente conexo entonces todo Γ ciclo en $\Omega\backslash A$ será nul-homólogo en Ω. Usando lo anterior defino el ciclo $\Gamma_R = \sigma_R + \gamma_R$, donde

$$\begin{array}{cc} \sigma_R : [-R,R] \longrightarrow \mathbb{C} & \gamma_R : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \\ \sigma_R(z) = z & \gamma_R(z) = Re^{iz} \end{array}$$

, que gráficamente es

Entonces se cumplen todas las hipótesis del teorema de residuos, y tenemos pues que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{\sigma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i(Ind_{\Gamma_R}(ia)Res(f(z),ia)+Ind_{\Gamma_R}(-ia)Res(f(z),-ia))$$



Pero los índices son claramente 1 por la elección del ciclo. Por otro lado veamos que la integral sobre la semicircunferencia se anula si $R \to \infty$.

En efecto,

$$|\int_{\gamma_R} f(z)| \leq \pi R \frac{1}{(R^2-a^2)^2} \quad \begin{matrix} R \to \infty \\ \longrightarrow 0 \end{matrix}$$

$$|\frac{e^{itz}}{(z^2+a^2)^2}| \leq \frac{1}{(R^2-a^2)^2}$$

$$|e^{itz}| = e^{-tIm(z)} \leq 1$$

$$|z^2+a^2| \geq |z^2| - a^2 \geq R^2 - a^2 > 0$$

Luego calculemos ahora los residuos. Como son dobles

$$\lim_{z \to ia} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{itz}(z-ia)^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2} \right) = \lim_{z \to ia} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{itz}}{(z+ia)^2} \right) =$$

$$= \lim_{z \to ia} \left(\frac{ite^{izt}(z+ia)^2 - e^{itz}2(z+ia)}{(z+ia)^4} \right) = \frac{e^{-at}(2at+2)}{8ia^3}$$

Sustituyendo en la fórmula del teorema de residuos

$$2\pi i(\frac{e^{-at}(2at+2)}{8ia^3}) = \pi(\frac{e^{-at}(at+1)}{2a^3})$$

Ahora tomando límite en la fórmula de los residuos nos queda que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(tz)dz}{(z^2+a^2)^2} = \pi(\frac{e^{-at}(at+1)}{2a^3})$$

, pues la parte derecha de la fórmula de los residuos no depende de R, y la parte imaginaria de la integral de $f(z)$, se obvia, pues debe ser 0, pues la parte de los residuos es completamente real

3 Ejercicio 14. Relación 4

Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}}$$

Fijamos $R > 0$ y consideramos la función

$$f : \mathbb{C} \backslash A \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}}$$

$$e^z + e^{-z} = 0 \Leftrightarrow e^{2z} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2z} = -1 \Leftrightarrow 2z \in Log(-1) = ln|-1| + iArg(-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2z \in i(\pi + 2\pi\mathbb{Z}) \Leftrightarrow z \in i(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$$

, luego $A = i(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, y $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash A)$. Fijándonos en que $A' = \emptyset$ aunque sea infinito y que $\Gamma_R = [-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$ es un ciclo en $\mathbb{C} \backslash A$ nulhomologo respecto a $\mathbb{C}$, pues $\mathbb{C}$ es homológicamente conexo. Luego podemos aplicar el teorema de los residos, de forma que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi Ind_{\Gamma_R}(\frac{i\pi}{2})Res(f(z), \frac{i\pi}{2})$$

, donde es claro que ese índice es 1, pues sólo se da una vuelta en el rectángulo alrededor del punto. Por otro lado es claro que se verifica que

$$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = \int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{[R,R+\pi i]} f(z)dz + \int_{[R+\pi i,-R+\pi i]} f(z)dz + \int_{[-R+\pi i,-R]} f(z)dz$$