2 LÍMITE FUNCIONAL

2.1 DEFINICIÓN

2.1.1 Acumulación

Definición 2.1.1. Sea A un conjunto de números reales. Diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un *punto de acumulación* si existe una sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

1) $a_n \in A$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
2) $a_n \neq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y
3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Usaremos A' para denotar al conjunto de los puntos de acumulación de A.

Ejemplos 2.1.2. 1) $\mathbb{N}' = \emptyset$.

2) Si $F \subset \mathbb{R}$ es un conjunto finito, entonces $F' = \emptyset$.
3) Si I es un intervalo, I' es el correspondiente intervalo cerrado. Por ejemplo, $]0,1[' = [0,1]$.
4) $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.
5) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}' = \{0\}$.

Proposición 2.1.3. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *y sea* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) α *es un punto de acumulación de* A*.*
2) $(]\alpha - r, \alpha + r[\setminus\{\alpha\}) \cap A \neq \emptyset$*, para cualquier* $r > 0$*.*

Demostración. 1)⇒2) Supongamos que α es un punto de acumulación y sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A con límite α y $a_n \neq \alpha$. Dado $r > 0$, aplicamos la definición de convergencia para dicho número positivo: existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - \alpha| < r$ si $n \geqslant n_0$. En particular,

$$a_{n_0} \in (]\alpha - r, \alpha + r[\setminus\{\alpha\}) \cap A,$$

por lo que la intersección es no vacía como queríamos.

2)⇒1) Dado $n \in \mathbb{N}$, tomemos $r = 1/n$. Por hipótesis, existe

$$a_n \in (]\alpha - r, \alpha + r[\setminus\{\alpha\}) \cap A.$$

En particular, se cumple que $|a_n - \alpha| < \frac{1}{n}$, con lo que la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y su límite es α. Tal como lo hemos elegido, $a_n \in A$ y $a_n \neq \alpha$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ como queríamos. □

Definición 2.1.4. Sea A un conjunto de números reales. Un punto $a \in A$ diremos que es un *punto aislado* si no es un punto de acumulación o, lo que es lo mismo, si existe $r > 0$ tal que $]a - r, a + r[\cap A = \{a\}$.

Proposición 2.1.5. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $a \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) *a es un punto aislado de A.*
2) *Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos de A convergente a a, entonces existe un número natural n_0 tal que $a_n = a$ para cualquier $n \geqslant n_0$.*

2.1.2 Límite funcional

Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) publicó en 1821 su "Cours d'Analyse" que sentó las bases para lo actualmente entendemos como forma rigurosa de presentar las matemáticas. Su definición de límite: *"Cuando los valores sucesivos atribuidos a una variable particular se aproximan indefinidamente a un valor fijo de forma que al final difieren por tan poco como deseemos, este valor fijo se llama límite de todas los anteriores valores"*, no es la que actualmente usamos que se debe a Karl Weierstraß (1815–1897)

Definición 2.1.6. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y sea $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Diremos que la función f tiene *límite* L en el punto α si para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, distintos de α, que tienda a α se cumple que $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a L.

En ese caso, escribiremos $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$.

Observación 2.1.7.

1) El valor de la función en α, si es que está en el dominio, no juega ningún papel en el cálculo del límite.
2) No tiene sentido, ni interés, el estudio del límite funcional en los puntos aislados.
3) El límite, caso de existir, es único.
4) ¿Cómo podemos escribir que una función no tiene límite en un punto?
   a) El límite de una función f en α *no* vale L si existe una sucesión $\{a_n\}$ convergente a a tal que $\{f(a_n)\}$ no converge a L.
   b) La función f no tiene límite en α si existe una sucesión $\{a_n\}$ convergente a a tal que $\{f(a_n)\}$ no converge.

   Un caso particular en el que esto ocurre es cuando existen dos sucesiones, $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, convergentes a a tales que $\{f(x_n)\}$ y $\{f(y_n)\}$ tienen límites distintos. En efecto, la sucesión $a_n = x_n$ si n es par y $a_n = y_n$ si n es impar verifica que $f(a_n)$ no tiene límite.
5) En la definición de límite no es necesario suponer que las sucesiones $\{f(a_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienen todas el mismo límite. Es suficiente que sean convergentes (Ejercicio 2.3).

Ejemplo 2.1.8.

1) $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$. Demuéstralo.
2) La función $f(x) = 1/x$, para $x \neq 0$ no tiene límite en 0. ¿Por qué?

Ejemplo 2.1.9. La *función de Dirichlet*, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

Usando la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ se demuestra que no tiene límite en ningún punto.

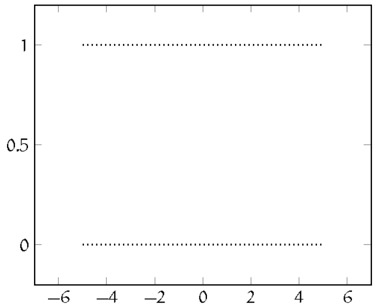
La función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

sólo tiene límite en 0.

Figura 4: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859) fue un matemático alemán de la primera mitad del siglo XIX. Entre otras muchas cosas, a él se le atribuye la idea moderna de función.

Teorema 2.1.10 (Caracterización de la existencia de límite)**.** *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, sea $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*



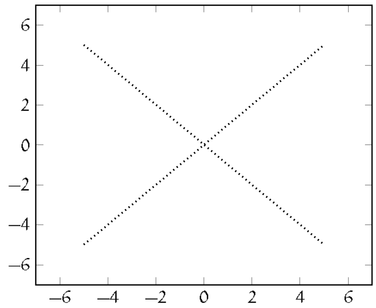


Figura 5: Una función que no tiene límite en ningún punto y una que sólo lo tiene en un único punto

1) $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$.

2) *Para toda sucesión* monótona $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de elementos de* A *distintos de* α *que tienda a* α *se cumple que* $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ *tiende a* L.

3) *Para cada* $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *tal que si* $0 < |x-\alpha| < \delta$*, se tiene que* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Demostración. La implicación 1)⇒2) es evidente.

2)⇒3) Por reducción al absurdo, supongamos que 3) no se cumple: existe $\varepsilon_0 > 0$ de forma que para cada $\delta > 0$ se puede encontrar $x \in A$ tal que $0 < |x-\alpha| < \delta$ y $|f(x) - L| \geqslant \varepsilon_0$. Aplicamos esto tomando $\delta = 1/n$ con n natural y encontramos una sucesión $\{a_n\}$ de elementos de A tales que $0 < |a_n - \alpha| < 1/n$ y $|f(a_n) - L| \geqslant \varepsilon_0$. Cualquier parcial monótona de $\{a_n\}$ verifica que converge a α y que su imagen no converge a L lo que es una contradicción.

3)⇒1) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de elementos de A convergente a α con $a_n \neq \alpha$ para cualquier natural n. Para comprobar que $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$, fijamos $\varepsilon > 0$. Entonces existe un natural n_0 tal que si $n \geqslant n_0$ se cumple que $|a_n - \alpha| < \delta$. Como consecuencia $|f(a_n) - L| < \varepsilon$ si $n \geqslant n_0$. □

2.2 CARÁCTER LOCAL

Al igual que con la continuidad, la existencia de límite de una función sólo depende del comportamiento de dicha función en un entorno (cualquiera) del punto donde estamos calculando dicho límite.

Dada una función $f\colon A \to \mathbb{R}$, $\alpha \in A'$ y $r > 0$, denotemos por f_r a la función f restringida al conjunto $A \cap]\alpha - r, \alpha + r[$.

Proposición 2.2.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función y sea* $\alpha \in A'$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\lim_{x\to\alpha} f(x) = L$.

2) *Para cualquier* $r > 0$*, se cumple que* $\lim_{x\to\alpha} f_r(x) = L$.

3) *Para algún* $r > 0$*, se cumple que* $\lim_{x\to\alpha} f_r(x) = L$.

Demostración. FALTA □

2.3 LÍMITES LATERALES

Sea A un conjunto de números reales y α un número real. Si denotamos

$$A_\alpha^- = \{a \in A : a < \alpha\}$$
$$A_\alpha^+ = \{a \in A : a > \alpha\}$$

Es inmediato comprobar que $A' = (A_\alpha^-)' \cup (A_\alpha^+)'$.

Definición 2.3.1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y $\alpha \in A'$.

1) Diremos que f tiene límite L por la derecha en α si $\alpha \in (A_\alpha^+)'$ y

$$\lim_{x \to \alpha} f_{|A_\alpha^+}(x) = L.$$

Usaremos la notación $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = L$.

2) De forma análoga se define $\lim_{x\to\alpha^-} f(x) = L$.

Proposición 2.3.2. *Una función tiene límite en un punto si, y sólo si, existen todos los límites laterales que tengan sentido y coinciden.*

2.4 RELACIÓN ENTRE LÍMITE Y CONTINUIDAD

Teorema 2.4.1. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *y sea* $a \in A$.

1) *Si* $a \in A'$, f *es continua en* a *si, y sólo si,* $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

2) *Si* a *es un punto aislado,* f *es continua en* a.

Demostración. FALTA □

Corolario 2.4.2. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *y* $\alpha \in A' \setminus A$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) f *tiene límite en* α.

2) *Existe una función* $g\colon A \cup \{\alpha\} \to \mathbb{R}$ *continua en* α *tal que* $g_{|A} = f$.

2.4.1 Tipos de discontinuidades

Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A \cap A'$. Si la función no es continua en a, ¿cuáles son las posibles razones? En vista del teorema anterior, la función no es continua si el valor del límite no coincide con el valor de la función en a o si el límite no existe. El primer tipo de discontinuidad corresponde al primer caso; la no existencia de límite corresponde a los siguientes.

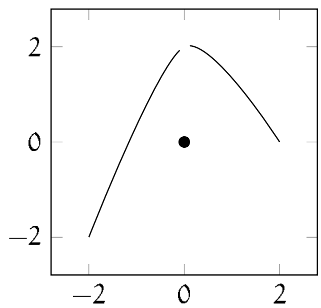


Figura 6: Discontinuidad evitable

1) Una función tiene una discontinuidad *evitable* en a si tiene límite en a, pero no es $f(a)$. Decimos que la discontinuidad es evitable por que si definimos una nueva función $\tilde{f}$ como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq a, \\ \lim\limits_{x\to a} f(x), & \text{si } x = a, \end{cases}$$

obtenemos una función que es continua en a.

2) La función tiene una discontinuidad *de salto* en a si existen los límites laterales, pero no coinciden. El salto puede ser finito o infinito. Por ejemplo, la función $f\colon [-2,2] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x-1, & \text{si } 0 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

tiene una discontinuidad de salto. La límites laterales en cero valen 1 y -1. El salto es, por tanto, finito. En cambio, el salto de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

es infinito.

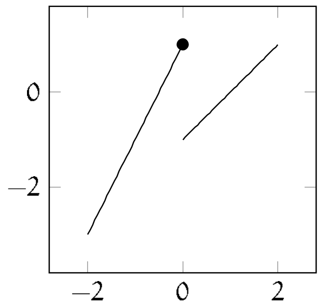


Figura 7: Discontinuidad de salto

3) Si el motivo por el que no existe el límite es otro, decimos que la función tienen una discontinuidad *esencial*. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

no tiene límite en el origen.

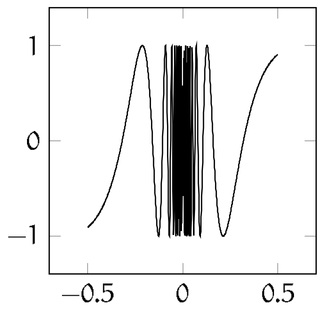


Figura 8: Discontinuidad esencial

2.5 LÍMITES E INFINITO

2.5.1 Límites infinitos

Definición 2.5.1. Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in A'$. Diremos que f tiene límite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en α si para toda sucesión $\{a_n\}$ que tienda a α de puntos de A, distintos de α, se cumple que $\{f(a_n)\}$ tiende a $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Proposición 2.5.2. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función y sea $\alpha \in A'$. Son equivalentes:*

1) $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$.

2) *Dado $M \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < |x - \alpha| < \delta$, entonces $f(x) > M$.*

Definición 2.5.3. La recta $x = \alpha$ es una *asíntota vertical* de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ si alguno de los límites laterales de f en α vale $+\infty$ o $-\infty$.

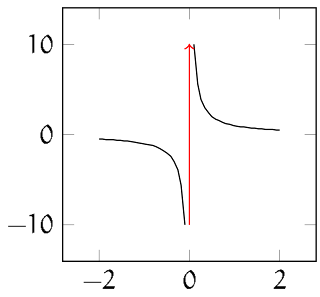


Figura 9: Una asíntota vertical

2.5.2 Límites en infinito

Definición 2.5.4. 1) Sea A un conjunto de números reales no acotado superiormente. Diremos que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ tiene límite L en $+\infty$ si para toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A que diverge positivamente se cumple que $\{f(x_n)\}$ tiende a L. En ese caso, escribiremos

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L.$$

2) Si A es un conjunto que no está acotado inferiormente, se define de forma análoga el límite en $-\infty$ de una función $f\colon A \to \mathbb{R}$.

Definición 2.5.5. La recta $y = L$ es una *asíntota horizontal* de la función $f\colon A \to \mathbb{R}$ si alguno de los límites de f en $\pm\infty$ vale L.

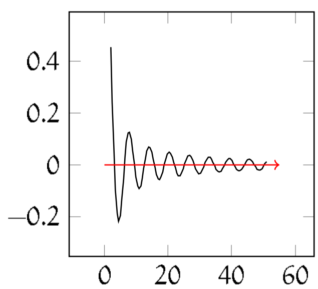


Figura 10: Una asíntota horizontal

Ejemplo 2.5.6. 1) El límite de la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \operatorname{sen}(x)/x$ en $+\infty$ es cero.

2) Ninguna función periódica, salvo las constantes, tiene límite en $+\infty$. En efecto, sea f una función periódica no constante. Esto quiere decir que

   a) existen x_0 y x_1 tales que $f(x_0) \neq f(x_1)$, y

   b) existe $T > 0$ tal que $f(x) = f(x+T)$ para cualquier x.

   Es evidente que las sucesiones $\{x_0 + nT\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{x_1 + nT\}_{n\in\mathbb{N}}$ tienden a $+\infty$, pero

$$\lim_{n\to\infty} f(x_0 + nT) = f(x_0) \neq f(x_1) = \lim_{n\to\infty} f(x_1 + nT).$$

   Por tanto, f no tiene límite en $+\infty$.

Proposición 2.5.7. *Sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$ *una función definida en un conjunto* A *no acotado superiormente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.

2) *Dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que si* $x > M$ *y* $x \in A$, *entonces* $|f(x) - L| < \varepsilon$.

De forma similar se puede definir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ o las versiones equivalentes con $-\infty$.

Cambios de variable

Es posible intercambiar cero e infinito en el cálculo de límites, ya sea el resultado o el lugar donde se estudia el límite, mediante un cambio de variable.

Proposición 2.5.8. *Sea* $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *y sea* $f\colon A \to \mathbb{R}$. *Entonces*

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = +\infty \iff \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Proposición 2.5.9. *Sea* $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. *Entonces*

1) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = L \iff \lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$, *y*

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = L \iff \lim_{x\to-\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = L$.

2.6 ÁLGEBRA DE LÍMITES

Suma

Proposición 2.6.1. *Sean* $f, g\colon A \subset\to \mathbb{R}$ *dos funciones y sea* $\alpha \in A'$.

1) *Si ambas funciones tienen límite en* α,

$$\lim_{x\to\alpha} (f+g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x).$$

2) *Supongamos que* f *tiene límite en* α *y que existe un número positivo* δ *tal que la función* g *está acotada inferiormente en el conjunto* $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\cap A$. *Entonces*

$$\lim_{x\to\alpha} (f+g)(x) = +\infty.$$

Demostración. Las demostraciones de está sección son consecuencia directa de la versión análoga para sucesiones. Por ejemplo, si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión con límite α y $x_n \neq \alpha$, entonces

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}(f(x_n)+g(x_n)) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x),\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\lim_{x\to\alpha}(f+g)(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) + \lim_{x\to\alpha} g(x). \qquad \square$$

Producto

Proposición 2.6.2. *Sean* $f, g\colon A \subset\to \mathbb{R}$ *dos funciones y sea* $\alpha \in A'$.

1) *Si ambas funciones tienen límite en* α,

$$\lim_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x) = \left(\lim_{x\to\alpha} f(x)\right)\cdot\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right).$$

2) *Si* f *tiene límite cero en* α *y la función* g *está acotada en un entorno de* α, *entonces*

$$\lim_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x) = 0.$$

3) *Supongamos que* f *tiene límite* $+\infty$ *en* α *y que existe* $\delta > 0$ *tal que la función* g *está acotada inferiormente por un número positivo en el conjunto* $]\alpha-\delta, \alpha+\delta[\cap A$. *Entonces*

$$\lim_{x\to\alpha}(f\cdot g)(x) = +\infty.$$

Corolario 2.6.3. *Sean* $f, g\colon A \subset\to \mathbb{R}$ *dos funciones y sea* $\alpha \in A'$. *Supongamos que* $\lim_{x\to\alpha} g(x) \neq 0$, *entonces*

$$\lim_{x\to\alpha}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to\alpha} f(x)}{\lim_{x\to\alpha} g(x)}.$$

Ejemplo 2.6.4. Para calcular el límite de un cociente de polinomios en $+\infty$ tenemos que dividir por x^n, donde n es el grado del denominador.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{3x^2-x+4} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{3}.$$

Orden

Proposición 2.6.5 (Relación con el orden)**.** *Sean* $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ *y sea* $\alpha \in A'$. *Supongamos que* $f(x) \leqslant g(x)$ *para todo* $x \in A$. *Entonces* $\lim_{x\to\alpha} f(x) \leqslant \lim_{x\to\alpha} g(x)$.

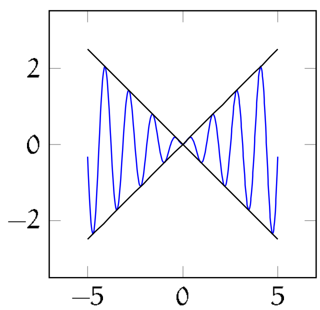


Figura 11: En Italia, la regla del sandwich o, como algunos dicen, el teorema del emparedado, es conocido informalmente como el teorema de los dos carabineros (dos carabineros conduciendo a un prisionero entre ellos).

Corolario 2.6.6 (Regla del sandwich)**.** *Sean* $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ *y sea* $\alpha \in A'$. *Supongamos que* $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ *para todo* $x \in A$. *Si además se cumple que*

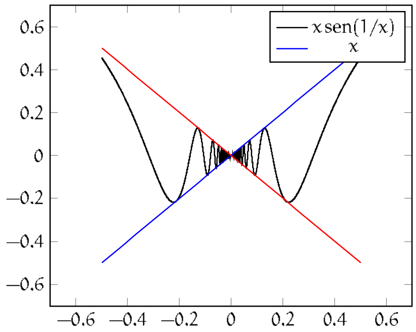
$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x),$$

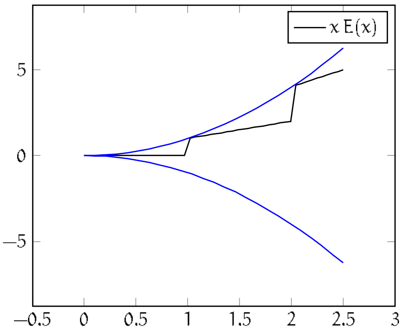
entonces $\lim_{x\to\alpha} g(x) = \lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} h(x)$.

Ejemplo 2.6.7. Consideremos las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0,\\ 0, & \text{si } x = 0,\end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} xE(x), & \text{si } x > 0,\\ 0, & \text{si } x = 0.\end{cases}$$

Es sencillo comprobar que $-x \leqslant f(x) \leqslant x$ y que $-x^2 \leqslant xE(x) \leqslant x^2$. Tomando límites en dichas desigualdades se obtiene que ambas funciones tienen límite cero en cero y, por tanto, son continuas.





2.7 ALGUNOS LÍMITES INTERESANTES

Proposición 2.7.1 (Escala de infinitos). *Si* $b > 0$ *y* $a > 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b^x}{x^x} = 0.$$

Podemos usar que las funciones exponencial y logaritmo son continuas e inversas una de la otra para resolver límites de la forma $\lim f(x)^{g(x)}$. En otras palabras, si f es una función positiva

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = L \iff \lim_{x\to\alpha} \log\left(f(x)\right) = \log(L).$$

Usando esto y la escala de infinitos es inmediato comprobar lo siguiente.

Proposición 2.7.2.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1.$$

Corolario 2.7.3.

$$\lim_{x\to0^+} x^x = 1.$$

En el caso particular de que la base tienda a uno, además de lo anterior, también podemos usar el siguiente resultado.

Proposición 2.7.4.

$$\lim_{x\to0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Corolario 2.7.5 (Regla del número **e**). *Si* $\lim_{x\to\alpha} f(x) = 1$, *entonces*

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)^{g(x)} = e^L, +\infty, 0 \iff \lim_{x\to\alpha} g(x)\left(f(x)-1\right) = L, +\infty, -\infty.$$

Ejemplo 2.7.6. Vamos a usar el corolario 2.7.5 para calcular el límite

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x+1}.$$

Para ello calculamos

$$\lim_{x\to+\infty} (x+1)\cdot\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}-1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x-1}{x^2+2} = 0.$$

Por tanto, $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{x+1} = e^0 = 1.$

Ejemplo 2.7.7. Esta regla para el cálculo de límites se puede usar en los dos sentidos. Por ejemplo, para calcular $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right)$, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[x]{a}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} \left(a^{1/x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} a = a.$$

Por tanto, $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt[x]{a}-1\right) = \log(a).$

2.8 DISCONTINUIDADES DE LAS FUNCIONES MONÓTONAS

Lema 2.8.1. *Sea* $g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ *una función creciente. Entonces existe* $\lim_{x\to b} f(x)$ *si, y sólo si,* f *está acotada superiormente. En ese caso,*

$$\lim_{x\to b} g(x) = \sup\{g(x) : x \in]a,b[\}.$$

Demostración. Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente a b, dado $x \in]a,b[$, existe n tal que $x \leqslant x_n$ y, por lo tanto, $g(x) \leqslant g(x_n)$ con lo que

$$\sup\{g(x) : x \in]a,b[\} = \sup\{g(x_n) : n \in \mathbb{N}\}.$$

En particular, si f no está acotada superiormente, la sucesión $\{f(x_n)\}$ no es convergente.

En segundo lugar, si g está mayorada, el conjunto $\{g(x) : x \in]a,b[\}$ tiene supremo. Sea $L = \sup\{g(x) : x \in]a,b[\}$ y fijemos $\varepsilon > 0$. Por la caracterización del supremo, existe $x_0 \in]a,b[$ tal que

$$L - \varepsilon < g(x_0) \leqslant L.$$

Sea $\delta = b - x_0$. Si $x \in]a,b[$ y $|x-b| < \delta$, entonces $x_0 < x < b$ y, usando que g es creciente, se tiene que

$$L - \varepsilon < g(x_0) \leqslant g(x) \leqslant L,$$

con lo que $\lim_{x\to b} g(x) = L$. □

Teorema 2.8.2. *Sea* I *un intervalo y* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *una función creciente. Entonces* f *tiene límites laterales en todo punto de* $\mathring{I}$*. Además*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x > a\}$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < a\}.$$

En particular, las posibles discontinuidades de f *en* $\mathring{I}$ *son discontinuidades de salto.*

Demostración. Basta aplicar el lema 2.8.1. □

Teorema 2.8.3. *El conjunto de los puntos de discontinuidad de una función monótona es numerable.*

Demostración. Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función creciente. Por el teorema 2.8.2 sabemos que los puntos de discontinuidad de f son $\{a \in I : I_a \neq \emptyset\}$, donde

$$I_a = \left] \lim_{x\to a^-} f(x), \lim_{x\to a^+} f(x) \right[.$$

Además, si $a \neq b$, entonces $I_a \cap I_b = \emptyset$. Si en cada intervalo $I_a \neq \emptyset$ elegimos $r_a \in I_a \cap \mathbb{Q}$, la aplicación $a \mapsto r_a$ es una aplicación inyectiva del conjunto de puntos de discontinuidad en $\mathbb{Q}$ y, por tanto, el conjunto de puntos de discontinuidad es numerable. □

2.9 EJERCICIOS

Ejercicio 2.1. Sea $A \subset \mathbb{R}$ y sea $\alpha \in A'$.