4.) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en P_2

Demuestra que dados dos cuadrilátero $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ en P_2,

$\exists!$ homografía $f: P^2 \to P^2$ tal que

$$f(p_i) = q_i \quad , \; i = 1, 2, 3, 4.$$

Tomando $X = \{p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee p_4\} \Rightarrow \hat{X} = L(\{\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \vec{p_4}\})$, como

estamos en $\mathbb{R}^3$ ~~se tiene que~~ por ser P^2 tenemos que

$\dim \hat{X} \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$ y analogamente para $\{q_1, q_2, q_3, q_4\}$

e $\hat{Y} = L(\{\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}, \vec{q_4}\})$

Suprimiendo el vector linealmente independiente defino

$B_{\hat{X}} = \{\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}\}$ y $B_{\hat{Y}} = \{\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}\}$

Como $\exists \hat{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\hat{f}(\vec{p_1}) = \lambda \vec{q_1}$, $\hat{f}(\vec{p_2}) = \mu \vec{q_2}$ y $\hat{f}(\vec{p_3}) = \gamma \vec{q_3}$

siendo $\hat{f}$ única, y biyectiva por llevar una base en una base. De aquí

tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "\pi^*"] \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $\hat{f} \circ \pi = \pi \circ f$

Como $\pi(\vec{p_i}) = p_i$ y $\pi(\vec{q_i}) = q_i$ $\forall i \in \{1,2,3\}$ por ser inyectiva,
$\hat{f} \circ \pi = \pi \circ \hat{f}$
entonces obtenemos que $\hat{f}$ es biyectiva $\Rightarrow$ por $\hat{f} \circ \pi = \pi \circ f$ tenemos que
f es biyectiva, es decir es una homografía.

Además f es única al imponer $f(p_4) = q_4 \Rightarrow$ El factor ~~proporcional~~ de proporcionalidad es único y f es única.

Sea $f: \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ tal que $f(p_i) = q_i$, $i = 1,2,3,4$.

$p_1 = (1:1:0)$, $p_2 = (1:-1:0)$, $p_3 = (1:0:1)$ $p_4 = (1:0:-1)$

$q_1 = (1:1:0)$, $q_2 = (1:-1:0)$, $q_3 = (0:1:1)$ $q_4 = (0:1:-1)$.

Formamos los conjuntos X e Y del apartado anterior $\Rightarrow$

$X = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y $\hat{X} = L(\{\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}, \vec{p_4}\})$, análogo para Y. Ahora defino $B_X = \{\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}\}$ y $B_Y = \{\vec{q_1}, \vec{q_2}, \vec{q_3}\}$

$$\left.\begin{aligned} \hat{f}(1,1,0) &= \lambda(1,1,0) \\ \hat{f}(1,-1,0) &= \mu(1,-1,0) \\ \hat{f}(1,0,-1) &= \gamma(0,1,1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(\hat{f}, B, B) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -\mu & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

$$M(Id, B, B_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M(\hat{f}, B_0) = M(\hat{f}, B, B_0) \cdot M(Id, B_0, B) = \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -\mu & \gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} \\ \frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2}+\gamma \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$ Impongo $f(p_4) = q_4$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} \\ \frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} & \frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2} & -\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2} \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2}+\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2} \\ \frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2}+\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2} \\ -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda+\mu=0 \\ \lambda-\mu=1 \\ -\gamma=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \quad \mu = -\frac{1}{2} \quad \gamma = 1$$

y finalmente tenemos la expresión matricial $\Rightarrow$ $\cancel{M(f, B_0, B_0)}$

$$M(f, B_0) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$