Sucesiones de números reales. Sucesiones monótonas

Universidad de Granada
Departamento de Análisis Matemático

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Dada una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra).

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Dada una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra).

La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión.

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Dada una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra).

La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son iguales cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n = y_n$.

Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de números reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

Dada una sucesión $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra “x” nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra).

La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. El número x_n se llama *término n-ésimo* de la sucesión.

Dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son iguales cuando para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $x_n = y_n$.

No hay que confundir la sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación, con su *conjunto imagen*, que es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números x_n, el cual se representa por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ **converge a un número real** x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ **converge a un número real** x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$.

Se dice también que el número x es **límite** de la sucesión $\{x_n\}$ y se escribe $\lim_{n\to\infty}\{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Teniendo en cuenta que

$$|x_n - x| < \varepsilon \Longleftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Longleftrightarrow x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

resulta que $\{x_n\}$ converge a x si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en el intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

Teniendo en cuenta que

$$|x_n - x| < \varepsilon \Longleftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Longleftrightarrow x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

resulta que $\{x_n\}$ converge a x si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en el intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

También podemos reformular la definición dada considerando para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto de números naturales $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\}$. Tenemos entonces que:

$$\boxed{\lim\{x_n\} = x \iff \left[\forall \varepsilon > 0 \ \text{ el conjunto } A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\} \text{ es finito } \right]} \tag{1}$$

Teniendo en cuenta que

$$|x_n - x| < \varepsilon \Longleftrightarrow x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon \Longleftrightarrow x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$$

resulta que $\{x_n\}$ converge a x si dado cualquier número $\varepsilon > 0$ se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en el intervalo $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$.

También podemos reformular la definición dada considerando para cada $\varepsilon > 0$ el conjunto de números naturales $A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\}$. Tenemos entonces que:

$$\boxed{\lim\{x_n\} = x \iff \left[\forall \varepsilon > 0 \ \text{ el conjunto } A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \geqslant \varepsilon\} \text{ es finito } \right]} \tag{1}$$

Esta forma de expresar la convergencia puede ser útil para probar que una sucesión dada, $\{x_n\}$ no converge a x. Para ello basta encontrar un número $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto A_ε sea infinito.

La sucesión $\{1/n\}$ *es convergente a cero.*

La sucesión $\{1/n\}$ *es convergente a cero.*

Dado un número real $x \in]-1, 1[$*, se verifica que la sucesión de las potencias de* x*,* $\{x^n\}$*, converge a cero.*

La sucesión $\{1/n\}$ *es convergente a cero.*

Dado un número real $x \in]-1,1[$, *se verifica que la sucesión de las potencias de* x, $\{x^n\}$, *converge a cero.*

La sucesión $\{(-1)^n\}$ *no es convergente.*

La sucesión $\{1/n\}$ *es convergente a cero.*

Dado un número real $x \in]-1,1[$*, se verifica que la sucesión de las potencias de* x*,* $\{x^n\}$*, converge a cero.*

La sucesión $\{(-1)^n\}$ *no es convergente.*

Una sucesión convergente tiene un único límite.

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que el conjunto de números naturales $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ es infinito. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que el conjunto de números naturales $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ es infinito. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Principio de las sucesiones encajadas Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ es convergente y $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que el conjunto de números naturales $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ es infinito. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Principio de las sucesiones encajadas Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ es convergente y $\lim\{y_n\} = \alpha$.

La sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ *es convergente a 1.*

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que el conjunto de números naturales $A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant y_n\}$ es infinito. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Principio de las sucesiones encajadas Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ es convergente y $\lim\{y_n\} = \alpha$.

La sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$ es convergente a 1.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones cuyos términos son iguales a partir de uno en adelante, es decir, hay un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ es $x_n = y_n$. Entonces $\{x_n\}$ converge si, y sólo si, $\{y_n\}$ converge en cuyo caso las dos sucesiones tienen igual límite.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Acotada si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Acotada si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- Estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.
- **Estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o decreciente.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:
- **Mayorada o acotada superiormente** si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Minorada o acotada inferiormente** si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Acotada** si su conjunto imagen está acotado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Creciente** si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente creciente** si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Decreciente** si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Estrictamente decreciente** si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- **Monótona** si es creciente o decreciente.
- **Estrictamente monótona** si es estrictamente creciente o decreciente.

Toda sucesión convergente está acotada.

Toda sucesión convergente está acotada.

La sucesión $\{H_n\}$ *definida por* $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*, no es convergente.*

Toda sucesión convergente está acotada.

La sucesión $\{H_n\}$ *definida por* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *no es convergente.*

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

Toda sucesión convergente está acotada.

La sucesión $\{H_n\}$ *definida por* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *no es convergente.*

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$ donde $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además se verifica que $x_n < \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a β.

Toda sucesión convergente está acotada.

La sucesión $\{H_n\}$ *definida por* $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, *no es convergente.*

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$ donde $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además se verifica que $x_n < \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a β.

ii) decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$ donde $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además se verifica que $\alpha < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a α.

Toda sucesión convergente está acotada.

La sucesión $\{H_n\}$ *definida por* $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*, no es convergente.*

Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$ donde $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además se verifica que $x_n < \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a β.

ii) decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$ donde $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además se verifica que $\alpha < x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o bien que todos los términos a partir de uno en adelante son iguales a α.

La sucesión $\{x_n\}$ *definida por* $x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$*, es convergente.*

Si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente a partir de uno de sus términos, es decir, si hay un número m_0 tal que $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \geqslant m_0$ – tales sucesiones se llaman **eventualmente crecientes** – entonces si dicha sucesión está mayorada, es convergente y $\lim\{x_n\} = \sup\{x_n : n \geqslant m_0\}$.

Si una sucesión $\{x_n\}$ es creciente a partir de uno de sus términos, es decir, si hay un número m_0 tal que $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \geqslant m_0$ – tales sucesiones se llaman **eventualmente crecientes** – entonces si dicha sucesión está mayorada, es convergente y $\lim\{x_n\} = \sup\{x_n : n \geqslant m_0\}$.

Una observación correspondiente puede hacerse para sucesiones que son decrecientes a partir de uno de sus términos; tales sucesiones se llaman **eventualmente decrecientes**.

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n+y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_ny_n\}$.

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.

Supongamos $\lim\{x_n\} = x$ y $\lim\{y_n\} = y$. Entonces se verifica $\lim\{x_n + y_n\} = x + y$, $\lim\{x_n y_n\} = xy$. Si además suponemos que $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y también que $y \neq 0$, entonces $\lim\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} = \dfrac{x}{y}$.