Apellidos: .... Grupo: ...

Nombre: .... nif: .... nº hojas: .

LMD

Grado en Ingeniería Informática

21 de marzo de 2018

1. Demuestre por inducción que para todo número natural n

$$\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solución. La demostración es por inducción sobre n. En el *caso base* sea $n = 0$; por una parte $\sum_{i=0}^{0} i^2 = 0$ y por otra $\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6} = 0$. Supongamos ahora que $0 \leq n$ y que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (*hip. de inducción*). En el paso de inducción demostraremos que:

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} i^2 &= \left(\sum_{i=0}^{n+1} i^2\right) + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

□

2. Resuelva la recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0$$

y los problemas:

a) $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2$ $(n \geq 2)$, $u_0 = 7$ y $u_1 = 19$.

b) $u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2$ $(n \geq 3)$, $u_1 = 7$ y $u_2 = 19$.

Solución. Consideremos en primer lugar la relación de recurrencia:

$$u_{n+2} + 4u_n = 0$$

cuya ecuación característica es $0 = x^2 + 4 = (x - 2i)(x + 2i)$. Al tener dos raíces complejas y conjugadas $\lambda_1 = 2i$ y $\lambda_1 = -2i$ la solución general es:

$$\begin{aligned}
x_n &= b_1(2i)^n + b_2(-2i)^n \\
&= 2^n(b_1 i^n + b_2(-i)^n) \\
&= 2^n(b_1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})^n + b_2(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2})^n) \\
&= 2^n(b_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}) + b_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2})) \\
&= 2^n(b_1(\cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}) + b_2(\cos\frac{n\pi}{2} - i\sin\frac{n\pi}{2})) \\
&= 2^n((b_1 + b_2)\cos\frac{n\pi}{2} + i(b_1 - b_2)\sin\frac{n\pi}{2}) \\
&= 2^n(c_1\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\sin\frac{n\pi}{2})
\end{aligned}$$

Consideremos en primer lugar el problema:

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2 \ (n \geq 2), \ u_0 = 7, \ u_1 = 19$$

La relación de recurrencia tiene por ecuación característica: $0 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. Así pues las soluciones homogénea y particular tienen los siguientes patrones:

$$\begin{aligned}
x_n^{(h)} &= (c_0 + c_1 n)(1)^n = c_0 + c_1 n \\
x_n^{(p)} &= c_2 2^n + n^2 c_3(1)^n = c_2 2^n + c_3 n^2
\end{aligned}$$

Como equivalentemente tenemos:

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2^{n+2} + 2 \ (n \geq 0)$$

entonces:

$$\begin{aligned}
2^{n+2} + 2 &= c_2 2^{n+2} + c_3(n+2)^2 - 2(c_2 2^{n+1} + c_3(n+1)^2) + c_2 2^n + c_3 n^2 \\
&= 4c_2 2^n + c_3(n^2 + 4n + 4) - 2(2c_2 2^n + c_3(n^2 + 2n + 1)) + c_2 2^n + c_3 n^2 \\
&= 4c_2 2^n + c_3 n^2 + 4c_3 n + 4c_3 - 4c_2 2^n - 2c_3 n^2 - 4c_3 n - 2c_3 + c_2 2^n + c_3 n^2 \\
&= c_2 2^n + 2c_3
\end{aligned}$$

Así pues, tenemos $4 \cdot 2^n + 2 = c_2 2^n + 2c_3$ de donde basta con que $c_2 = 4$ y $c_3 = 1$. Por tanto:

$$x_n = c_0 + c_1 n + 2^{n+2} + n^2$$

Pero como:

$$\begin{aligned} 7 = x_0 = c_0 + 4 & \quad \Rightarrow \quad c_0 = 7 - 4 = 3 \\ 19 = x_1 = 3 + c_1 \cdot 1 + 2^{1+2} + 1^2 = c_1 + 12 & \quad \Rightarrow \quad c_1 = 19 - 12 = 7 \end{aligned}$$

y en definitiva la solución general es:

$$x_n = 3 + 7n + n^2 + 2^{n+2}$$

El problema:

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + 2^n + 2 \ (n \geq 2), \ u_1 = 7, \ u_2 = 19$$

tiene la misma solución particular, siendo la general:

$$x_n = c_0 + c_1 n + 2^{n+2} + n^2$$

Pero como:

$$\begin{aligned} 7 = x_1 = c_0 + c_1 \cdot 1 + 2^{1+2} + 1^2 = c_0 + c_1 + 9 & \quad \Rightarrow \quad c_0 + c_1 = 7 - 9 = -2 \\ 19 = x_2 = c_0 + c_1 \cdot 2 + 2^{2+2} + 2^2 = c_0 + 2c_1 + 20 & \quad \Rightarrow \quad c_0 + 2c_1 = 19 - 20 = -1 \end{aligned}$$

de donde deducimos que $c_0 = -3$ y $c_1 = 1$. y en definitiva la solución general es:

$$x_n = -3 + n + n^2 + 2^{n+2}$$

$\square$