Conjuntos, aplicaciones y cuerpos

Cuestiones para pensar

Conjuntos

1. ¿Puede un conjunto tener sólo dos subconjuntos? ¿Y sólo uno?

2. ¿Hay alguna condición natural que puedan tener dos conjuntos A y B de modo que si comprobamos $A \subset B$ se tenga $A = B$?

3. ¿Puede ocurrir $A \cup B = A \cap B$?

4. Sean $A, B \in \mathcal{P}(X)$. ¿Se deduce algo si $A \cup B = \emptyset$? ¿Y si $A \cap B = X$?

5. Para $x \in X$ explica la diferencia entre $x, \{x\}, (x, x)$.

6. Si R es una relación binaria simétrica y transitiva en el conjunto X, justificar que se verifica:

si $x, y \in X$ verifican xRy entonces xRx (así como yRy).

¿Implica esto que R tenga que ser además reflexiva? ¿Puedes construir un ejemplo de relación binaria simétrica y transitiva pero no reflexiva?

7. Encuentra, si es posible, ejemplos de relaciones binarias:

(a) simétrica y no antisimétrica,

(b) no aimétrica y antisimétrica,

(c) simétrica y antisimétrica a la vez.

8. Sea X un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en él:

(a) ¿Puede ser alguna clase de equivalencia el conjunto vacío? ¿Puede ser todo X?

(b) ¿Pueden dos clases de equivalencia distintas $[x], [y]$ verificar $[x] \cap [y] \neq \emptyset$?

(c) ¿Tiene sentido decir $(X/\sim) \subset X$? ¿y $X \subset (X/\sim)$?

9. ¿Es toda partición de un conjunto X el conjunto cociente para alguna clase de equivalencia?

10. Sea X un conjunto y $\sim$ una relación de equivalencia en él:

(a) Si X es finito (resp. infinito) ¿debe ser $X/\sim$ finito (resp. infinito)?

(b) Si X es finito ¿existe alguna relación de equivalencia en la que su número de elementos coincida con el de $X/\sim$?

Aplicaciones

1. Da ejemplos de pares de aplicaciones $f : X \longrightarrow Y$, $g : A \longrightarrow Y$ en las que A sea un subconjunto propio de X, de manera que se cumpla que $g(a) = f(a)$, para todo $a \in A$.

2. Encuentra un ejemplo de una aplicación que sea inyectiva (resp. suprayectiva) y no sea suprayectiva (resp. no sea inyectiva). Encuentra también una aplicación que no sea ni inyectiva ni suprayectiva.

3. Da un ejemplo de dos aplicaciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que $g \circ f \neq f \circ g$.

4. Si tenemos una aplicación inyectiva y una aplicación biyectiva que se pueden componer ¿tiene que ser la aplicación composición también inyectiva?

5. ¿Quien es la aplicación inversa de la inversa de una aplicación biyectiva?

6. Encuentra un contraejemplo para probar que la siguiente afirmación es falsa: *si la inversa de una aplicación biyectiva es ella misma entonces esa aplicación es la identidad.*

7. Si X e Y son dos conjuntos finitos y el número de elementos de X es menor que el número de elementos de Y, ¿podemos construir una aplicación inyectiva de X en Y?

8. Se sabe que una aplicación $f : X \longrightarrow X$ cumple $f \circ f = f$, ¿tiene que ser biyectiva? Caso de que f sea biyectiva, ¿qué podemos decir de ella?

9. Se sabe que una aplicación $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es biyectiva y su inversa cumple $f^{-1}(x, y) = (-y, x)$, ¿Se puede saber explícitamente quien es $f(x, y)$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

10. Explíquese con precisión dónde está el fallo del siguiente razonamiento. *Claramente, las siguientes igualdades son ciertas:*

$$1-3=4-6, \qquad 1-3+\left(\frac{3}{2}\right)^2=4-6+\left(\frac{3}{2}\right)^2,$$

$$1^2-2\cdot 1\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=2^2-2\cdot 2\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

Usando la igualdad notable del cuadrado de una diferencia, la última igualdad se reescribe:

$$\left(1-\frac{3}{2}\right)^2=\left(2-\frac{3}{2}\right)^2$$

Por lo que extrayendo raíces en ambos miembros y simplificando el sumando $-3/2$ *se obtiene ¡* $1=2$ *!*

11. Compruébese que la composición de dos aplicaciones inyectivas (resp. suprayectivas, biyectivas) es inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva).

Cuerpos

1. Encuentra un ejemplo de un grupo que no sea conmutativo y un ejemplo de un anillo que no sea un cuerpo.

2. ¿Puede ocurrir en un cuerpo K que $a\cdot b=0$, siendo $a\neq 0\neq b$?

3. Explíquese con precisión dónde está el fallo del siguiente razonamiento.
Sean $a,b\in\mathbb{R}$ *y supongamos* $a=b$*. Se tiene entonces:*

$$a^2=a.b, \qquad a^2-b^2=a.b-b^2, \qquad (a+b)(a-b)=b.(a-b)$$

Simplificando entonces por $(a-b)$ *se tiene* $a+b=b$ *y como* a *era igual a* b *se sigue* $2.a=1.a$*. En particular, ¡* $2=1$ *!*