Tema 3

Aplicaciones lineales

En este tema, nuestro objetivo será el de estudiar aplicaciones entre distintos espacios vectoriales (sobre el mismo cuerpo) que "preserven" o "respeten" las operaciones propias de cada espacio. Estas aplicaciones, a las que llamaremos *lineales*, conllevan un *rango*, que se relacionará con el de las matrices. También permiten introducir el concepto *isomorfismo de e.v.* el cual, en el caso finitamente generado, hace resaltar la importancia de los e.v. $K^n(K)$. Interpretaremos las matrices $m \times n$ a partir de aplicaciones lineales entre espacios $K^n(K)$, $K^m(K)$, lo que nos permitirá entender mejor tanto las propiedades de las matrices como las de las aplicaciones lineales. Finalmente, ganaremos en abstracción introduciendo el concepto de *espacio dual*. Entre otras aplicaciones, este concepto permite dar una interpretación geométrica de la trasposición de una matriz y sus propiedades. En adelante, siempre consideraremos dos e.v. $V(K)$, $V'(K)$ construidos sobre el mismo cuerpo conmutativo K.

3.1. El concepto de aplicación lineal

3.1.1. Definición y primeras propiedades

Definición 3.1. *Dados dos e.v., $V(K), V'(K)$, una aplicación $f : V \to V'$ se dice que es* lineal *u* homomorfismo de espacios vectoriales *si verifica las siguientes dos propiedades:*

(i) Es un homomorfismo de grupos, entre $(V,+)$ y $(V',+)$, esto es:
  $f(u+v) = f(u) + f(v)$, $\forall u,v \in V$.

(ii) $f(a \cdot v) = a \cdot v$, $\forall u \in V$, $\forall a \in K$.

Nota 3.2. El nombre de *homomorfismo de grupos* para la primera propiedad es general para aplicaciones entre dos grupos cualesquiera. De hecho, las propiedades que obtengamos para las aplicaciones lineales y que no dependan del producto por escalares, resultan válidas también para cualquier homomorfismo de grupos.

Podemos resumir las dos condiciones anteriores en una única:

Proposición 3.3. *Una aplicación $f : V \to V'$ es lineal si y sólo si verifica:*

$$f(a \cdot u + b \cdot v) = a \cdot f(u) + b \cdot f(v) \qquad \forall u,v \in V, \quad \forall a,b \in K.$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Aplicando primero (i) y después (ii):

$$f(a\cdot u+b\cdot v)=f(a\cdot u)+f(b\cdot v)=a\cdot f(u)+b\cdot f(v)$$

($\Leftarrow$) Aplicando la condición expresada:

$$\begin{aligned} f(u+v) = &\quad f(1\cdot u+1\cdot v)=1\cdot f(u)+1\cdot f(v)=f(u)+f(v) \\ f(a\cdot v) = &\quad f(a\cdot v+0\cdot\vec{0})=a\cdot v+0\cdot f(\vec{0})=a\cdot v \end{aligned}$$

donde 0 y $\vec{0}$ son, resp., el escalar nulo de K y el vector nulo de V. ∎

Algunas propiedades simples de las aplicaciones lineales son las siguientes:

Proposición 3.4. *Sea $f:V\to V'$ una aplicación lineal. Se verifica:*

1. $f(0)=0$ *(esto es, $f(\vec{0})=\vec{0}'$ donde $\vec{0}$ y $\vec{0}'$ son, resp. los vectores nulos de V y V').*
2. $f(-v)=-f(v)$, $\forall v\in V$.
3. $f(\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot u_i)=\sum_{i=1}^{k}a_i\cdot f(u_i)$, $\forall u_i\in V$, $\forall a_i\in K$, $\forall i\in\{1,\dots,k\}$.
4. *Si $S\subset V$ entonces*[1] $f(L(S))=L(f(S))$.
5. *Si U es un s.v. de V, entonces $f(U)$ es un s.v. de V'. En particular, Im(f) es un s.v. de V'.*
6. *Si U' es un s.v. de V' entonces*[2] $f^{-1}(U')$ *es un s.v. de V.*

Demostración. 1. Claramente, $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)$, donde en la última igualdad se usa la propiedad (i) de las aplicaciones lineales. El resultado se sigue sumando $-f(0)$ a ambos miembros.

2. Para demostrar que $f(-v)$ es el opuesto de $f(v)$, operamos ambos elementos y comprobamos que se obtiene el vector cero de V': $f(v)+f(-v)=f(v+(-v))=f(0)=0$ (la primera igualdad por la propiedad (i), la segunda por ser $-v$ el opuesto de v, y la tercera por el punto 1 anterior).

3. Inmediato por inducción sobre el número de sumandos.

4. Si S es un conjunto finito, $S=\{u_1,\dots,u_m\}$, el punto 3 anterior afirma que la imagen de cualquier elemento en $L(S)$ es una combinación lineal de $f(S)=\{f(u_1),\dots,f(u_m)\}$, y viceversa, lo que prueba la doble inclusión. Si S es infinito, el problema se reduce al caso finito, porque en las combinaciones lineales de S y $L(S)$ sólo interviene un conjunto finito de vectores.

5. Sean $u',w'\in f(U)$, por lo que existen $u,w\in U$ tales que $f(u)=u',f(w)=w'$, y sean $a,b\in K$. La pertenencia de $au'+bw'$ a $f(U)$ se deriva de la linealidad de f:

$$au'+bw'=af(u)+bf(w)=f(au+bw)\in f(U)$$

(la pertenencia de $au+bw$ a U, consecuencia de que U sea un s.v. y $u,w\in U$). Para la última afirmación, basta con aplicar la primera a $f(V)=\mathrm{Im}(f)$.

[1] Abusando de la notación, para cada $C\subset V$ denotamos por $f(C)$ a lo que, rigurosamante, es $f_*(C):=\{f(v):v\in C\}$ (recuérdese que $f_*:\mathcal{P}(V)\to\mathcal{P}(V')$ era la aplicación imagen directa entre los conjuntos de las partes de V y V').

[2] Abusando de la notación, para cada $C'\subset V'$ denotamos por $f^{-1}(C')$ a $f^*(C'):=\{v\in V:f(v)\in C'\}\subset V$ (recuérdese que $f^*:\mathcal{P}(V')\to\mathcal{P}(V)$ era la aplicación imagen recíproca). Remarquemos que f no tiene por qué ser biyectiva, esto es, f^{-1} no denota la aplicación inversa aquí.

6. Sean $u,w \in f^{-1}(U')$, por lo que existen $u',w' \in U'$ tales que $f(u) = u', f(w) = w'$, y sean $a,b \in K$. Usando la linealidad de f,

$$f(au+bw) = af(u)+bf(w) = au'+bw' \in U'$$

(la pertenencia de $au'+bw'$ a U', consecuencia de que U' es un s.v. y $u',w' \in U'$). Por tanto, $au+bw \in f^{-1}(U')$, como se quería demostrar. ∎

Nota 3.5. Los puntos 1 y 2 de la proposición anterior se han demostrado usando solamente la propiedad (i) de las aplicaciones lineales. Por esto, resultan válidas para cualquier homomorfismo de grupos (véase la nota 3.2 anterior). No obstante, ambos puntos se pueden demostrar también usando sólo la propiedad (ii) (hágase como ejercicio).

Como ejemplos sencillos y generales de aplicaciones lineales se tienen:

1. La aplicación identidad $I_V : V \to V$, $I_V(v) := v$, para todo $v \in V$ (que también denotaremos simplemente I), es claramente lineal en cualquier e.v. $V(K)$. Es de remarcar que las estructuras de e.v. que soporta V en el dominio y el codominio de I_V se entiende que son la misma.

2. La aplicación nula $f_0 : V \to V'$, $f_0(v) := 0$ para todo $v \in V$, (que también denotaremos simplemente 0) es claramente lineal para todo par de e.v., $V(K)$ y $V'(K)$.

   La aplicación nula puede verse como un caso particular de aplicación constante. Concretamente, sea $v'_0 \in V'$ un vector fijo y definamos la aplicación constante igual a v'_0 como $f_{v'_0} : V \to V'$, $f_{v'_0}(v) := v'_0$, para todo $v \in V$. Claramente, de entre todas la aplicaciones constantes de V a V' la aplicación nula es la única lineal (¿por qué?).

3. La homotecia de razón $\lambda \in K \setminus \{0,1\}$, dada por $H_\lambda : V \to V$, $H_\lambda(v) = \lambda v, \forall v \in V$, es claramente lineal (compruébese, ¿qué pasaría si K no fuera conmutativo?).

4. Si $U \subset V$ es un s.v. de $V(K)$, la aplicación inclusión $i : U \to V$, $i(u) = u$ para todo $u \in U$, es claramente lineal.

5. Generalizando el ejemplo anterior, si $f : V \to V'$ es lineal y $U \subset V$ es un s.v., la restricción de f a U, $f|_U : U \to V$ es una aplicación lineal.

   El ejemplo anterior es el caso particular del presente cuando f es I_V y, por tanto $i = (I_V)|_U$.

Ejemplo 3.6. [Aplicaciones lineales y K^n] (i) Se considera en $K^n(K)$ la $i-$ésima proyección $p_i : K^n \to K$ definida por $p_i((x_1,\dots,x_n)) = x_i$, para todo $(x_1,\dots,x_n) \in K^n$. Claramente, esta aplicación es lineal.

(ii) Sea $A \in M_{m\times n}(K)$. Considerando los elementos de K^n y K^m como columnas, la aplicación $f_A : K^n \to K^m$ dada por $f_A(x) = A \cdot x$, también es claramente lineal. Como veremos a lo largo del tema, toda aplicación lineal de K^n en K^m se puede escribir de este modo.

(iii) Fijemos n vectores $\{v_1,\dots,v_n\}$ de $V(K)$. La aplicación $f : K^n \to V$, dada por $f((x_1,\dots,x_n)) = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ es lineal (generalizaremos este ejemplo en el teorema 3.8).

Ejercicio 3.7. *Sea $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ el conjunto de todas las apicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y U el conjunto de todas las aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que son derivables en todo punto (que es un s.v. de $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Demostrar que la aplicación* Der: $U \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$*, que a cada función h le hace corresponder su función derivada h' (esto es, $h \mapsto h'$), es lineal.*

3.1.2. Construcción de aplicaciones lineales extendiendo por linealidad

Veremos a continuación que toda aplicación lineal queda determinada cuando se prescriben las imágenes de los vectores de una base, y construiremos explícitamente la aplicación.

Teorema 3.8. *Sea $V(K)$ un espacio vectorial de dimensión $n \in \mathbb{N}$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base suya. Sea $(w'_1, \ldots, w'_n)$ una n-upla de vectores de $V'(K)$. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ que verifica $f(v_i) = w'_i$ para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demostración. Para demostrar la existencia de f, construyámosla explícitamente mediante el siguiente procedimiento. Como cada $v \in V$ se escribe como $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ para ciertos escalares a_i (las coordenadas de v en B) unívocamente determinados, podemos definir sin ambigüedad una aplicación $f : V \to V'$ como:

$$f(v) = \sum_{i=1}^n a_i w'_i.$$

Claramente, $f(v_i) = w'_i$, pues $(v_i)_B = (0, \ldots 0, 1, 0, \ldots, 0)$, donde el 1 aparece en la posición i-ésima. Para demostrar que f es lineal, si tomamos un segundo vector genérico $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ y dos escalares cualesquiera $a, b \in K$ se tiene, sin más que usar las propiedades de los sumatorios:

$$av + bw = a \sum_{i=1}^n a_i v_i + b \sum_{i=1}^n b_i v_i = \sum_{i=1}^n (aa_i + bb_i) v_i,$$

Por tanto:

$$f(av + bw) = \sum_{i=1}^n (aa_i + bb_i) w'_i = a \sum_{i=1}^n a_i w'_i + b \sum_{i=1}^n b_i w'_i = af(v) + bf(w),$$

la primera y tercera igualdades por la definición de f, y la segunda por las propiedades de los sumatorios, con lo que se prueba la linealidad. Para comprobar la unicidad de f, obsérvese que si $\bar{f}$ fuera otra aplicación lineal que satisfaciera las mismas propiedades se tendría:

$$\bar{f}(v) = \bar{f}(\sum_{i=1}^n a_i v_i) = \sum_{i=1}^n a_i \bar{f}(v_i) = \sum_{i=1}^n a_i w'_i = f(v)$$

(la segunda y tercera igualdades por las condiciones impuestas a $\bar{f}$, y la tercera por la definición de f), lo que concluye el resultado. ∎

Observación 3.9. (1) No se impone ninguna restricción sobre los vectores w'_i (por ejemplo, podrían ser todos iguales). No obstante, es inmediato de la construcción que la familia $\{w'_1, \ldots, w'_n\}$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$. Además, veremos a lo largo del tema que esta familia es linealmente independiente (resp. un sistema de generadores, una base) en V' si y sólo si f es inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva)

(2) Al procedimiento constructivo de f en el teorema 3.8 se le llama *extensión por linealidad* (de los valores de f sobre la base B).

(3) En este teorema se ha supuesto que $V(K)$ es finitamente generado. No obstante, si se elimina esta restrición y se fijan una base (posiblemente infinita) B y una aplicación $B \to V'$, $v_i \mapsto w'_i$, entonces el mismo procedimiento de extensión por linealidad demuestra la existencia de una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $f(v_i) = w'_i$ para todo $v_i \in B$. Obsérvese que en ningún caso se ha supuesto que $V'(K)$ sea finitamente generado.

(4) Del teorema se concluye que dos aplicaciones lineales son iguales si coinciden en *alguna* base.

3.1.3. Tipos de aplicaciones lineales. Isomorfismos

El siguiente resultado proporciona un modo de construir aplicaciones lineales a partir de otras, y será usado en la discusión de los tipos de aplicaciones lineales.

Proposición 3.10. *Sean V,V',V'' tres e.v. sobre el mismo cuerpo K, y sean $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ aplicaciones lineales.*
(1) La composición $g \circ f : V \to V''$ es una aplicación lineal.
(2) Si f es biyectiva entonces la aplicación inversa $f^{-1} : V' \to V$ es lineal.

Demostración. (1) Para todo $v,w \in V$, $a,b \in K$:

$$g\circ f(av+bw) = g(f(av+bw)) = g(af(v)+bf(w)) = ag(f(v))+bg(f(w)) = a(g\circ f)(v)+b(g\circ f)(w)$$

(la linealidad de f y de g se usan, resp., en la segunda y tercera igualdades), como se quería.

(2) Para comprobar $f^{-1}(av'+bw') = af^{-1}(v')+bf^{-1}(w'), \forall v',w' \in V', a,b \in K$, basta con demostrar que las imágenes por f de ambos miembros de esta igualdad coinciden (la inyectividad de f implica entonces que son iguales), esto es:

$$f(af^{-1}(v')+bf^{-1}(w')) = af(f^{-1}(v'))+bf(f^{-1}(w')) = av'+bw' = f(f^{-1}(av'+bw'))$$

(la primera igualdad por la linealidad de f), como se quería. ∎

Definición 3.11. *Diremos que una aplicación lineal $f : V \to V'$ es un:*
- monomorfismo *si f es inyectiva*
- epimorfismo *si f es suprayectiva (esto es, sobre, exhaustiva).*
- isomorfismo *si f es biyectiva*

En el caso $V = V'$ diremos que f es un endomorfismo. *Si f es un endomorfismo biyectivo diremos que es un* automorfismo *(del e.v. $V(K)$).*

Corolario 3.12. *La composición de dos monomorfismos (resp. epimorfismos, isomorfismos) es un monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo).*

Demostración. Por la proposición 3.10(1) se sabe que la composición de aplicaciones lineales es lineal, y por las propiedades de las aplicaciones entre conjuntos que la composición de dos aplicaciones inyectivas (resp. suprayectivas, biyectivas) es inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva). ∎

Definición 3.13. *Se dice que $V(K)$ es isomorfo a $V'(K)$ si existe un isomorfismo de e.v. de V a V' (esto es, con dominio V y codominio V').*

Proposición 3.14. *La relación "ser isomorfo a" en la clase de todos los e.v., es una relación de equivalencia, esto es, verifica las propiedades:*
(i) Reflexiva: todo e.v. es isomorfo a sí mismo.
(ii) Simétrica: si $V(K)$ es isomorfo a $V'(K)$ entonces $V'(K)$ es isomorfo a $V(K)$.
(iii) Transitiva: si $V(K)$ es isomorfo a $V'(K)$ y $V'(K)$ es isomorfo a $V''(K)$ entonces $V'(K)$ es isomorfo a $V(K)$

Demostración. (i) Inmediato de que la aplicación identidad es un isomorfismo.

(ii) Inmediato de que (por lo proposición 3.10(2)), si $f : V \to V'$ es un isomorfismo entonces $f^{-1} : V' \to V$ es un isomorfismo.

(iii) Inmediato de que la composición de dos isomorfismos es un isomorfismo. ∎

El próximo resultado muestra que en la clase de equivalencia de cada e.v. finitamente generado existe un e.v. del tipo $K^n(K)$.

Proposición 3.15. *Sea $V(K)$ un e.v. de dimensión $n \in N$ y sea $B = (v_1, \ldots, v_n)$ una base. La aplicación:*

$$b_B : K^n \to V, \qquad b_B(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{i=1}^{n} x_i v_i, \qquad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$$

es un isomorfismo de e.v.

Demostración. Es inmediato comprobar que b_B es lineal. La inversa de esta aplicación es la que asigna a cada vector sus coordenadas en la base B. Por tanto, la inyectividad es consecuencia de la unicidad de las coordenadas en la base (la indepencia lineal de B) y la suprayectividad de que tales coordenadas existan (B es un sistema de generadores). La linealidad se puede comprobar como ejercicio (véase el ejemplo 3.6(iii)). ∎

Observación 3.16. Del hecho de que b_B es lineal y biyectiva se deduce que b_B^{-1} es lineal también (proposición 3.10(2)). No obstante, es fácil de deducir directamente la linealidad de la aplicación que a cada vector de un e.v. le hace corresponder sus coordenadas en B (de hecho, esta propiedad se usó implícitamente en el tema anterior al aplicar matrices).

3.2. Núcleo, imagen y rango

3.2.1. Propiedades del núcleo paralelas a las de la imagen

Definición 3.17. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal. El* núcleo *de f se define como el subconjunto:*

$$\mathrm{Nuc}(f) = f^{-1}(\{0\}) = \{v \in V : f(v) = 0\}.$$

Sabemos de la proposición 3.4(5) que $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de V' y, (como en cualquier aplicación, sea lineal o no) f es suprayectiva si y sólo si $\mathrm{Im}(f) = V'$. Veamos a continuación resultados para el núcleo con cierto paralelismo a los de la imagen.

Proposición 3.18. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal:*

(i) $\mathrm{Nuc}(f)$ *es un subespacio vectorial de V.*

(ii) f es inyectiva si y sólo si $\mathrm{Nuc}(f) = \{0\}$.

Demostración. (i) Consecuencia inmediata de la proposición 3.4(6) (aplicada a $U' = \{0\}$).

(ii) Observemos en primer lugar que, por la proposición 3.4(1), siempre $0 \in \mathrm{Nuc}(f)$. Si suponemos que f es inyectiva, no puede existir otro vector $v \neq 0$ en $\mathrm{Nuc}(f)$, pues violaría la inyectividad ($f(0) = f(v)$, $0 \neq v$). Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Nuc}(f) = \{0\}$. Si $f(v) = f(w)$ para ciertos $u, w \in V$ entonces $f(v - w) = f(v) - f(w) = 0$. Esto es, $v - w \in \mathrm{Nuc}(f) = \{0\}$ y $v = w$, como se quería. ∎

Definición 3.19. *Sea* $f : V \to V'$*. Llamaremos* nulidad *de* f *a la dimensión de* $\mathrm{Nuc}(f)$*, y* rango *de* f *a la dimensión de* $\mathrm{Im}(f)$*, y los denotaremos,* $n(f)$ *y* $r(f)$*, resp.*

Corolario 3.20. *Si* $f : V \to V'$ *es lineal entonces* $r(f) \leq dim_K V$*. Más aún, si* U *es un s.v. de* V *entonces* $dim(f(U)) \leq dim(U)$*.*

Demostración. Para la primera afirmación úsese la observación 3.9(1), y para la segunda aplíquese la primera a $f|_U$. ∎

3.2.2. Caracterizaciones y existencia de monomorfismos y epimorfismos

Caracterizamos a continuación la inyectividad y suprayectividad mediante los conceptos de independencia lineal y sistema de generadores.

Teorema 3.21. *Para cualquier* $f : V \to V'$ *lineal:*

1. *Equivalen:*
   - a) f *es un monomorfismo.*
   - b) *Si* $S \subset V$ *es linealmente independiente entonces* $f(S)$ *es l.i.*
   - c) *Existe una base* B *de* V *tal que* $f(B)$ *es l.i.*
2. *Equivalen:*
   - a) f *es un epimorfismo.*
   - b) *Para todo sistema de generadores* $S \subset V$*, se tiene que* $f(S)$ *es un s.d.g. de* V'*.*
   - c) *Existe un sistema de generadores* $S \subset V$*, tal que* $f(S)$ *es un s.d.g. de* V'*.*
3. *Equivalen:*
   - a) f *es un isomorfismo.*
   - b) *Para toda base* $B \subset V$*, se tiene que* $f(B)$ *es una base de* V'*.*
   - c) *Existe una base* $B \subset V$*, tal que* $f(B)$ *es una base de* V'*.*

Demostración. En cada punto demostraremos cíclicamente a)$\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

1. a) $\Rightarrow$ b). Sea $\{w'_1, \ldots, w'_m\} \subset f(S)$, donde $w'_i = f(w_i)$ para todo $i = 1, \ldots, m$ y $\{w_1, \ldots, w_n\} \subset S$. Tomemos una combinación lineal igualada a 0,

$$0 = a_1 w'_1 + \cdots + a_n w'_m = a_1 f(w_1) + \cdots + a_n f(w_m) = f(a_1 w_1 + \cdots + a_n w_m).$$

Como $f(0) = 0$ y f es inyectiva se sigue $a_1 w_1 + \cdots + a_n w_m = 0$, y por ser S l.i. todos los escalares son nulos, como se quería. b) $\Rightarrow$ c) Inmediato, supuesto que se sabe de la existencia de alguna base B en V. Esto se demostró en el caso finitamente generado, y ya se comentó allí que esto era cierto en todo espacio vectorial. c) $\Rightarrow$ a) Supongamos que f no es inyectiva, y sea entonces $u \in \mathrm{Nuc}(f) \setminus \{0\}$. Escribiendo u como combinación lineal de B, $u = a_1 v_1 \cdots + a_n v_n$, con $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset B$ y, necesariamete, no todos los escalares $a_1, \ldots, a_n \in K$ nulos, se tiene

$$0 = f(u) = f(a_1 v_1 \cdots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$$

en contradicción con la independencia lineal de $f(B)$.

2. a)$\Rightarrow$ b) Sea $v' \in V'$. Por la suprayectividad, existe $v \in V$ tal que $f(v) = v'$. Por ser S un sistema de generadores, existen $w_1, \ldots, w_m \in S$ y escalares $a_1, \ldots, a_m \in K$ tales que $v = a_1w_1 + \cdots + a_mw_m$. Por tanto:

$$v' = f(v) = f(a_1w_1 + \cdots + a_mw_m) = a_1f(w_1) + \cdots + a_mf(w_m) \in L(f(S)),$$

como se quería. b) $\Rightarrow$ c) Tomando $S = V$ se sigue trivialmente. c) $\Rightarrow$ a) Como f es lineal, $\mathrm{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de V', luego $L(f(S)) \subset \mathrm{Im}(f)$ y, por ser $f(S)$ un s.d.g., $\mathrm{Im}(f) = V'$.

3. Inmediato de las correspondientes implicaciones en los puntos 1 y 2. ∎

Como consecuencia, se obtiene el siguiente resultado que complementa al teorema 3.8.

Corolario 3.22. *Sea $f : V \to V'$ lineal, y sea B una base de V.*

1. *$f(B)$ es linealmente independiente si y sólo si f es inyectiva. En este caso, $dim_K V \leq dim_K V'$.*

2. *$f(B)$ es un sistema de generadores si y sólo si f es suprayectiva. En este caso, $dim_K V \geq dim_K V'$.*

3. *$f(B)$ es una base si y sólo si f es biyectiva. En este caso, $dim_K V = dim_K V'$.*

Demostración. Las únicas afirmaciones que no están contenidas en el teorema 3.21 son las referentes a las dimensiones. En el caso de que V tenga dimensión[3] $n \in \mathbb{N}$, la primera (resp. segunda, tercera) afirmación se deduce de que $f(B)$ es un subconjunto linealmente independiente (resp. un sistema de generadores, una base) de V con n elementos. En el caso de que V no sea finitamente generado entonces las expresiones $\dim_K V \leq \dim_K V'$ y $\dim_K V = \dim_K V'$ de los casos 1 y 3, resp., deben entenderse simplemente como que V' no es finitamente generado (lo que resulta obvio, pues $f(B)$ es infinito y linealmente independiente), mientras que la expresión $\dim_K V \geq \dim_K V'$ del punto 2 no implica ninguna restricción sobre si V' es finitamente generado o no[4]. ∎

El teorema 3.8 también se puede combinar con los resultados anteriores para concluir que las restricciones sobre las dimensiones en el corolario 3.22, las cuales eran necesarias para la existencia de un monorfismo o un epimorfismo, también son suficientes para su existencia. Por simplicidad, nos restringiremos a dimensión finita, aunque el resultado es cierto sin esta restricción.

Corolario 3.23. *Sean $V(K)$ y $V'(K)$ e.v. de dimensiones $n, m \in \mathbb{N}$, resp.*

1. *Existe un monomorfismo de V a V' si y sólo si $n \leq m$.*

2. *Existe un epimorfismo de V a V' si y sólo si $n \geq m$.*

3. *Existe un isomorfismo de V a V' si y sólo si $n = m$.*

[3]Si $V = \{0\}$ las afirmaciones siguen teniendo sentido tomando $B = \emptyset$ y $L(\emptyset) = 0$, como se explicó en el tema anterior.

[4]No obstante, las desigualdades entre las dimensiones en el caso de que V no sea finitamente generado también pueden interpretarse en el sentido más fuerte de que el cardinal de la base B es mayor, menor o igual que el de cualquier base de V'. Aunque bajo esta interpretación los resultados siguen siendo ciertos, su demostración excede nuestros objetivos.

Demostración. Las implicaciones hacia la derecha en los puntos 1, 2 y 3 están contenidas en el corolario 3.22 anterior. Para las implicaciones hacia la izquierda, sean B y B' bases de V y V', resp. Si $n \leq m$ (resp. $n \geq m$, $n = m$) existe una aplicación inyectiva (resp. suprayectiva, biyectiva) de B a B'. Extendiendo esta aplicación por linealidad (teorema 3.8) se obtiene una aplicación lineal de V a V' que es un monomorfismo (resp. epimorfismo, isomorfismo) por el corolario 3.22. ∎

Aunque inmediata, insistimos en la siguiente importante consecuencia.

Corolario 3.24. *Sean $V(K)$ y $V'(K)$ dos e.v..*
- *V y V' son isomorfos si y sólo si tienen igual dimensión.*
- *Si $V(K)$ es f.g. entonces es isomorfo o bien a $K^n(K)$, para un único $n \in \mathbb{N}$, o bien[5] a $\{0\}$.*
- *Si $f : V \to V'$ es un isomorfismo y U un s.v. de V, entonces $dim_K U = dim_K(f(U))$*

Demostración. Las dos primeras afirmaciones son inmediatas del punto 3 del corolario anterior. Para la tercera, como $f(U)$ es un s.v. de V' (proposición 3.4(5)), basta con observar que la aplicación $U \to f(U)$, $v \mapsto f(v)$ (obtenida restringiendo el dominio y codominio de f) es un isomorfismo. ∎

Observación 3.25. Esencialmente, este corolario reduce el estudio de los e.v. finitamente generados al caso de $K^n(K)$. De hecho, implícitamente se usa la última afirmación cuando, dada una base $\mathcal{B}$, para calcular la dimensión de un s.v. de V, se toma un s.d.g. finito y se calcula el rango de la matriz obtenida con sus coordenadas.

3.2.3. Teorema del rango

Demostraremos a continuación una importante relación entre el núcleo y la imagen de una aplicación lineal o, con más precisión, entre su nulidad $n(f)$ y rango $r(f)$ (definición 3.19).

Teorema 3.26. *Sea $f : V \to V'$ lineal tal que $dim_K V = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Entonces,*

$$dim_K V = dim_K(\mathrm{Nuc}(f)) + dim_K(Im(f)), \qquad \textit{esto es,} \qquad n = n(f) + r(f).$$

Demostración. Tomemos una base $B_{\mathrm{Nuc}f}\{v_1, \ldots, v_{n(f)}\}$ de $\mathrm{Nuc}(f)$ y ampliémosla a una base de $V(K)$, $B = \{v_1, \ldots, v_{n(f)}, v_{n(f)+1}, \ldots, v_n\}$. Sabemos que $f(B)$ es un sistema de generadores de $\mathrm{Im}(f)$ (vease la observación 3.9(1)) y, puesto que los vectores v_i con $i \leq n(f)$ se aplican en 0, el conjunto $\{f(v_{n(f)+1}), \ldots, f(v_n)\}$ es también un s.d.g de $\mathrm{Im}f$. Como este conjunto tiene $n - n_f$ vectores, basta con comprobar que es linealmente independiente (pues se obtiene entonces el resultado $r(f) = n - n(f)$). Tomemos por tanto una combinación lineal suya igualada a 0:

$$0 = a_{n(f)+1} f(v_{n(f)+1}) + \cdots + a_n f(v_n) = f(a_{n(f)+1} v_{n(f)+1} + \cdots + a_n v_n),$$

la última igualdad aplicando la linealidad de f. La formula anterior implica que $a_{n(f)+1} v_{n(f)+1} + \cdots + a_n v_n \in \mathrm{Nuc}(f)$ y, por tanto, este vector se puede escribir como combinación lineal de los elementos de $B_{\mathrm{Nuc}f}$. Esto es, para ciertos escalares $a_1, \ldots, a_{n(f)}$ se tiene:

$$a_{n(f)+1} v_{n(f)+1} + \cdots + a_n v_n = a_1 v_1 + \cdots + a_{n(f)} v_{n(f)}.$$

[5] La disyuntiva de casos se evita definiendo $K^0 := \{0\}$.

Pasando los términos del segundo miembro al primero, se tiene una combinación de la base B igualada a 0. Por tanto, todos los coeficientes de la combinación deben ser nulos y, en particular, $a_{n(f)+1} = \cdots = a_n = 0$, como se quería demostrar. ∎

Como una aplicación de este teorema se tiene:

Corolario 3.27. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre espacios finitamente generados de igual dimensión. Equivalen:*
(i) f es biyectiva,
(ii) f es inyectiva, y
(iii) f es suprayectiva.

Demostración. Sea n la dimensión común. De la igualdad $n = n(f) + r(f)$ se deduce: f es inyectiva (esto es, $n(f) = 0$), si y sólo si $r(f) = n$ (esto es, f es suprayectiva). ∎