Tema 4

Determinantes

En este capítulo desarrollaremos el concepto, propiedades y aplicaciones de los determinantes. Para ello partimos de un estudio previo del grupo de permutaciones, que tiene interés independiente.

Salvo mención explícita de lo contrario, en este capítulo $V(K)$ será un e.v. de dimensión $n \in \mathbb{N}$ sobre un cuerpo K de característica distinta de 2.

4.1. El grupo de permutaciones

Seguimos aquí como referencias el libro de M. Castellet e I. Llerena "Álgebra Lineal y Geometría" Ed. Reverté, Barcelona, 2000) y el de Ángel Primo Martínez "Matemáticas. Curso de Orientación Universitaria", Reverté SM, 1987.[1]

Conceptos básicos

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = \{1, \ldots, n\}$. Una *permutación* de A es cualquier aplicación biyectiva $\sigma : A \to A$; denotaremos S_n al conjunto de todas las permutaciones de[2] A. Como se explicó en el tema de preliminares, la composición de dos aplicaciones biyectivas es biyectiva y el conjunto de todas las aplicaciones biyectivas de un conjunto en sí mismo tiene estructura de grupo con la composición; así:

Proposición 4.1. $(S_n, \circ)$ *tiene estructura de grupo, al que se llamará* grupo de las permutaciones (de n elementos) *(y se simplificará la notación denotándolo solamente S_n).*

En el contexto de permutaciones, a la composición se le suele llamar *producto*, y se denota:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Ejemplo 4.2. Son permutaciones en S_3:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

[1] Desarrollos más extensos en Álgebra pueden consultarse en los libros de S. Mc Lane y G. Birkhoff, N. Jacobson ó J.K. Goldhaber y G. Ehrlich.

[2] La definición y todo el desarrollo se puede generalizar trivialmente a cualquier conjunto A con n elementos (se escribe entonces S_A o $\mathrm{Biy}(A)$); es conveniente usar S_n por tener una notación notación más simple.

Ejercicio 4.3. *(1) Constrúyanse explícitamente todos los elementos de S_1, S_2 y S_3.*

(2) Demuéstrese por inducción que el cardinal (número de elementos) de S_n es $n! := 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

(3) Compruébese que S_n es conmutativo si y sólo si $n \leq 2$.

Un elemento $j \in \{1, \dots, n\}$ se llamará *fijo* por la permutación $j \in S_n$ si $\sigma(j) = j$, y *no fijo* en caso contrario. Si j no es fijo, podemos construir la sucesión:

$$j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots \sigma^r(j)...$$

(donde $\sigma^2 := \sigma \circ \sigma$ y $\sigma^r := \sigma \circ \sigma^{r-1}$). Dado que $A = \{1, \dots, n\}$ es finito, en algún momento $\sigma^k(j)$ coincidirá con los anteriores. Para el primer valor r en el que esto ocurre el valor de $\sigma^r(j)$ debe ser precisamente igual a j. En efecto, si $\sigma^r(j) = \sigma^h(j)$ y $r > h \geq 1$ entonces, componiendo $r - h$ veces con la inversa σ^{-1} se tiene $\sigma^{r-h}(j) = j$ (esto es, j ya habría salido antes). Sean pues

$$j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots \sigma^{r-1}(j) \quad \text{distintos con } \sigma^r(j) = j.$$

Diremos que $\sigma \in S_n$ es un *ciclo de orden r* si deja fijos todos sus elementos, salvo r de ellos que se pueden escribir como en la sucesión anterior. Esto es, un ciclo es una permutación tal que sus elementos no fijos se reordenan de manera circular:

$$j \to \sigma(j) \to \sigma^2(j) \cdots \to \sigma^{r-1}(j) \to j.$$

Como notación simplificada para ciclos, se escribe la r-úpla

$$\sigma = (j, \sigma(j), \sigma^2(j), \dots \sigma^{r-1}(j))$$

(obsérvese que en esta notación no aparece explícitamente el valor n de S_n; en cuslquier caso n no puede ser menor que ninguno de los elementos de la r-úpla). A un ciclo de orden 2 se le llama *trasposición*. Una trasposición (j,k), $1 \leq j < k \leq n$ se dice *de índices contiguos* cuando $k = j+1$. A un ciclo de orden n (en S_n) se le llama *permutación cíclica*.

Ejemplo 4.4. En S_5 haciendo corresponder $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 1$ se tiene la permutación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{esto es} \qquad (1,2,4,3,5) \in S_5$$

es un ciclo de orden 5 (o permutación cíclica). Análogamente $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ proporciona:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \text{esto es} \qquad (1,2,3,4) \in S_5,$$

que es un ciclo de orden 4.

Ejemplo 4.5. Las permutaciones de σ y τ del ejemplo 4.2 son ciclos:

$$\sigma = (1,3,2) \in S_3, \qquad \tau = (2,3) \in S_3,$$

siendo además τ una trasposición. Es fácil comprobar que las seis permutaciones de S_3 son ciclos (admitiendo la identidad como el ciclo trivial de orden 1). Claramente, esto no ocurre en S_n si $n \geq 4$.

Se dice que dos ciclos $\sigma, \sigma' \in S_n$ son *disjuntos* cuando ningún $j \in \{1, \ldots, n\}$ es, a la vez, un elemento no fijo para σ y σ' (esto es, los elementos no fijos de σ son fijos para σ' y viceversa). Claramente, dos ciclos disjuntos conmutan (es decir, $\sigma \circ \sigma' = \sigma' \circ \sigma$). En adelante, al usar la notación para ciclos, omitiremos el símbolo de composición siempre que no haya lugar a confusión.

Ejemplo 4.6. Los ciclos $\sigma = (1,2), \sigma = (3,4) \in S_4$ son disjuntos. Se tiene:

$$\sigma \circ \sigma' = (1,2)(3,4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (3,4)(1,2) = \sigma' \circ \sigma$$

Proposición 4.7. *(1) Toda permutación $\sigma \in S_n$ se puede expresar como producto (composición) de ciclos disjuntos dos a dos.*

(2) Todo ciclo de orden r se puede expresar como producto de $r-1$ trasposiciones.

(3) Toda trasposición $(j, j+h)$, $1 \leq j < j+h \leq n$ se puede expresar como producto de $2h-1$ trasposiciones de índices contiguos.

Demostración. (1) Si σ no es la identidad, se toma un elemento no fijo, j_1, y se genera el ciclo

$$\sigma_1 := (j_1, \sigma(j_1), \sigma^2(j_1), \ldots, \sigma^{r_1-1}(j_1))$$

(donde $\sigma^{r_1}(j_1) = j_1$ y todos los elementos anteriores son distintos). Si $\sigma = \sigma_1$ se obtiene el resultado; en caso contrario existirá un elemento j_2 que es fijo para σ_1 y no fijo para σ, y que generará análogamente un ciclo

$$\sigma_2 := (j_2, \sigma(j_2), \sigma^2(j_2), \ldots . \sigma^{r_2-1}(j_2)).$$

Este segundo ciclo, necesariamente, es disjunto de σ_1, pues si $\sigma^{k_1}(j_1) = \sigma^{k_k}(j_2)$ entonces $\sigma^{k_1-k_2}(j_1) = j_2$ (y j_2 no sería fijo para σ_1).

Procediendo inductivamente, una vez obtenidos m ciclos disjuntos $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, si todo elemento no fijo j de σ es también no fijo para alguno de los ciclos, entonces $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m$ (pues j sólo puede ser no fijo para uno de los ciclos σ_{m_j} y, por construcción, $\sigma_{m_j}(j) = \sigma(j)$). En caso contrario, se puede construir un nuevo ciclo disjunto σ_{m+1}, hasta agotar todos los elementos no fijos de σ en un número finito de pasos.

(2) Basta con comprobar (inductivamente):

$$(j_1, j_2, \ldots, j_{r-1}, j_r) = (j_1, j_2)(j_2, j_3) \ldots (j_{r-2}, j_{r-1})(j_{r-1}, j_r).$$

(3) Basta con comprobar (inductivamente):

$$(j, j+h) = \underbrace{(j, j+1)(j+1, j+2) \ldots (j+h-2, j+h-1)}\underbrace{(j+h, j+h-1) \ldots (j+2, j+1)(j+1, j)}.$$

Obsérvese que el producto de las h trasposiciones de índices contiguos a la derecha hace "avanzar" h posiciones al elemento j (hasta "adelantar" a $j+h$) y, a continuación, el de las $h-1$ trasposiciones a la izquierda hace "retroceder" al elemento $j+h$ (hasta ocupar la posición j-ésima). ∎

Ejemplo 4.8. Como casos particulares:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 4 & 8 & 5 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,3,4,8)(2,6,7) = (2,6,7)(1,3,4,8)$
- $(1,3,4,8) = (1,3)(3,4)(4,8)$
- $(2,6) = (2,3)(3,4)(4,5)\ (6,5)(5,4)(4,3)(3,2).$

4.1.1. Paridad y signo

La permutación identidad I y, por tanto, cualquier otra, se puede expresar de muchas maneras como producto de trasposiciones. Nuestro objetivo es comprobar que la *paridad* del número p de trasposiciones (esto es, el carácter par o impar de p) es la misma en todas esas expresiones.

Lema 4.9. *La permutación identidad I no se puede expresar como producto de un número impar de trasposiciones.*

Demostración. Consideremos el siguiente producto

$$P := \Pi_{1\leq i<j\leq n}(j-i)$$

donde $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ (obsérvese $P \neq 0$). Dada una permutación, $\sigma \in S_n$ definimos:

$$\sigma P := \Pi_{1\leq i<j\leq n}(\sigma(j)-\sigma(i)).$$

La demostración del lema se basa en el siguiente aserto, aparentemente anecdótico, que se comprobará aparte por discusión de casos:

Aserto. Si σ es una trasposición entonces $\sigma P = -P$.

Supongamos entonces que I se escribe como una composicón

$$I = \tau_s \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1$$

donde las τ_i son s trasposiciones. Por la definición de σP es claro que $IP = P$; sin embargo, aplicando el aserto sucesivamente a cada una de las s trasposiciones se tiene:

$$P = (-1)^s P.$$

Y, como $P \neq 0$, necesariamente, s es par. □

Discusión del aserto. Sea $\sigma = (h,k), h < k$ y comprobemos $\sigma P = -P$. Por conveniencia del lector, el razonamiento general se irá ilustrando con el caso $n = 5$, $\sigma = (2,4)$. Así, $P = P_5$ es:

$$P_5 = (2-1)(3-1)(4-1)(5-1)(3-2)(4-2)(5-2)(4-3)(5-3)(5-4).$$

Veamos el efecto de $\sigma = (h,k)$ sobre cada factor $(j-i)$ con $1 \leq i < j \leq n$:

- *Ningún efecto.* Si $i \neq h,k$, $j \neq h,k$ entonces $(j-i) = (\sigma(j)-\sigma(i))$.

  Para P_5, $\sigma = (2,4)$: los factores $(3-1),(5-1),(5-3)$ quedan inalterados.

- *Cambio de orden en la expresión de P dos factores* (no afecta a P). Ocurre en dos subcasos:

  - Para cada $i < h$, cuando $j = h$ y cuando $j = k$: cambian de orden $(h-i)$, $(k-i)$.
    Para P_5, $\sigma = (2,4)$: cambian de orden $(2-1)$ y $(4-1)$.
  - Para cada $j > k$, cuando $i = h$ y cuando $i = k$: cambian de orden $(j-h)$, $(j-k)$.
    Para P_5, $\sigma = (2,4)$: cambian de orden $(5-2)$ y $(5-4)$.

- *Cambio de signo y de orden de dos factores* (no afecta a P). Para cada l tal que $h < l < k$ el factor con $i = h, j = l$ y el factor con $i = l, j = k$ (esto es, $(l-h)$ y $(k-l)$) se cambian el uno por otro, cambian además de signo.

  Para P_5, $\sigma = (2,4)$: se cambia $(3-2)$ por $(3-4)$, y $(4-3)$ por $(2-3)$.

- *Cambio de signo de un único factor* (y, por tanto, del signo de todo P). Para $i = h, j = k$ se cambia el factor $(k-h)$ por $(h-k)$.

  Para P_5, $\sigma = (2,4)$: se cambia $(4-2)$ por $(2-4)$.

En resumen, sólo en el último de los casos se produce un cambio de signo que afecte a P. ∎

Teorema 4.10. *Si σ se expresa como composición de p trasposiciones y de q trasposiciones,*

$$\sigma = \tau_p \circ \tau_{p-1} \circ \cdots \circ \tau_2 \circ \tau_1, \qquad \sigma = \rho_q \circ \rho_{q-1} \circ \cdots \circ \rho_2 \circ \rho_1,$$

entonces p y q tienen la misma paridad.

Demostración. Para toda trasposition τ se tiene $\tau \circ \tau = I$, esto es, $\tau^{-1} = \tau$. Por tanto, usando la primera expresión de σ se tiene $\sigma^{-1} = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{p-1} \circ \tau_p$. En consecuencia:

$$I = \sigma^{-1} \circ \sigma = (\tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_{p-1} \circ \tau_p) \circ (\rho_q \circ \rho_{q-1} \circ \cdots \circ \rho_2 \circ \rho_1).$$

Esto es, I es producto de $p+q$ trasposiciones y basta usar que, por el lema, $p+q$ es par. ∎

Este teorema asegura la consistencia de la siguiente definición.

Definición 4.11. *Una permutación σ se llama* par *si se puede escribir como producto de un número par de trasposiciones, e* impar *si como producto de un número impar de trasposiciones.*

Proposición 4.12. *La* aplicación signo *(o signatura) sig definida por:*

$$sig : S_n \to \{+1,-1\}, \qquad sig(\sigma) = \begin{cases} +1 & si\ \sigma\ es\ par \\ -1 & si\ \sigma\ es\ impar, \end{cases}$$

verifica las siguientes propiedades:

(i) $sig(\sigma \circ \tau) = sig(\sigma) \cdot sig(\tau)$ (esto es, sig es un homorfismo de grupos cuando se considera su codominio con la multiplicación usual).

(ii) $sig(I) = 1$, $sig\ (\sigma^{-1}) = sig(\sigma)$.

(iii) Si σ en un ciclo de orden r, entonces $sig(\sigma) = (-1)^{r-1}$.

Demostración. (i) Inmediato de que si σ y τ se expresan como producto de p y q trasposiciones, entonces $\sigma \circ \tau$ se expresa como producto de $p+q$ trasposiciones.

(ii) Innmediato (y también deducible de cáracter de homomorfismo de grupos de sig).

(iii) Úsese la prop. 4.7 (2). ∎

Ejercicio 4.13. *Demuéstrese que en cada grupo S_n con $n \geq 2$ el número de permutaciones pares es igual al de las impares.*

4.1.2. Número de inversiones

Describimos a continuación una forma sistemática de calcular la signatura de una permutación.

Definición 4.14. *Dada $\sigma \in S_n$, diremos que dos elementos $i < j$ de A presentan un* permanencia *si* $\sigma(i) < \sigma(j)$ *y una* inversión *si* $\sigma(i) > \sigma(j)$. *El* número de inversiones de σ *es el número total de inversiones obtenidos con todos los pares (i, j) tales que $1 \leq i < j \leq n$, y se denotará* $[\sigma]$.

Así, para calcular $[\sigma]$ basta con contar el número de total de alteraciones del orden natural en la segunda fila de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$.

Ejemplo 4.15. Para calcular el número de inversiones de

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

basta con contar para cada elemento k de la segunda fila ($k = \sigma(i)$) cuántos elementos l ($l = \sigma(j)$) menores que k (esto es, $\sigma(i) > \sigma(j)$) aparecen a su derecha (de modo que $i < j$) y sumar. En concreto:
Para $k = 5$: cero.
Para $k = 4$: dos (2 y 1)
Para $k = 3$: dos (2 y 1)
Para $k = 2$: uno (el 1)
Para $k = 1$: cero (necesariamente)
Por tanto, $[\sigma] = 0 + 2 + 2 + 1 + 0 = 5$.

Proposición 4.16. *Toda permutación $\sigma \in S_n$ se puede expresar como producto de $[\sigma]$ trasposiciones. Por tanto, sig$(\sigma) = (-1)^{[\sigma]}$.*

Demostración. Razonando por inducción sobre n, el resultado es trivial para $n = 1$, y supongámoslo válido para $n-1$. Sea i tal que $\sigma(i) = n$, por lo que que i presenta inversiones con $j = i+1, \ldots, n$. Compongamos σ con las correspondientes $n-i$ trasposiciones, obteniendo

$$\tilde{\sigma} := ((\sigma(n), \sigma(i))(\sigma(n-1), \sigma(i)) \ldots (\sigma(i+2), \sigma(i))(\sigma(i+1), \sigma(i))) \circ \sigma \tag{4.1}$$

Como $\sigma(i) = n$, se tiene $[\tilde{\sigma}] = [\sigma] - (n-i)$ y también $\tilde{\sigma}(n) = n$. Esta última igualdad permite usar la hipótesis de inducción y expresar $\tilde{\sigma}$ como producto de $[\tilde{\sigma}]$ trasposiciones. Sustituyendo esta expresión en (4.1) y despejando se obtiene una expresión de σ como producto de $[\tilde{\sigma}] + (n-i) = [\sigma]$ trasposiciones. La última afirmación es inmediata de la definición de la aplicación sig. ∎

Ejemplo 4.17. Usando el procedimiento de la demostración anterior, expresemos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ como composición de $[\sigma] = 3$ trasposiciones. Observemos primero $\sigma(1) = 3$ y

$$\tilde{\sigma} = (3,1)(3,2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene entonces $\tilde{\sigma}(3) = 3$ y $[\tilde{\sigma}] = 3 - 2 = 1$. Repitiendo el proceso para $\tilde{\sigma}$ se tiene:

$$I = (2,1)(3,1)(3,2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{esto es,} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (3,2)(3,1)(2,1).$$

Es de remarcar que $[\sigma]$ no es el mínimo número de trasposiciones necesario para expresar σ. De hecho, en nuestro ejemplo σ era directamente una trasposición ($\sigma = (1,3)$).