Nociones sobre Álgebras de Boole

Fco. M. García Olmedo
Universidad de Granada
España

3 de febrero de 2019

Resumen

Contiene un resumen de los conceptos y resultados fundamentales sobre álgebras de Boole. Se añade una explicación del Algoritmo de Quine y McCluskey.

Índice

Índice de figuras

Este capítulo introduce el sistema algebraico llamado *retículo* . Desarrollamos las propiedades de los retículos y presentamos varios ejemplos de retículos (por ejemplo, el *retículo de las particiones*). Cuando son reforzados con postulados adicionales, los retículos se convierten en *álgebras de Boole*, estructuras algebraicas de importancia mayor para los científicos de la computación. Se derivan las propiedades de los subsistemas y los homomorfismos de las álgebras de Boole y se desmuestra que cada álgebra de Boole finita es isomorfa a cierta álgebra de conjuntos (y, por tanto, el cardinal de toda álgebra de Boole finita es una potencia de 2). Se demuestra también que cada álgebra de Boole de cardinalidad 2^r es isomorfa al producto directo de r álgebras de Boole de cardinal 2. El capítulo concluye con una discusión de las *funciones booleanas* y sus formas normales.

El concepto de retículo es importante en muchos aspectos de la teoría de máquinas de estados finitos. Las álgebras de Boole tienen un significado especial por su aplicabilidad directa a la teoría de conmutación y diseño lógico —como demostramos en posteriores secciones.

1. Conjuntos Ordenados

Definición 1.1. Un *conjunto ordenado* es cualquier estructura algebraica $\langle A, \leq \rangle$ cumpliendo:

1. A es un conjunto no vacío
2. $\leq$ es una relación binaria en A tal que:

a) para todo $a \in A$, $a \leq a$ (*reflexividad*)

b) para todo $a, b \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$ (*antisimetría*)

c) para todo $a, b, c \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$ (*transitividad*).

Si $\langle A, \leq \rangle$ es un conjunto ordenado, entonces $\leq$ recibe el nombre de *orden* sobre A. $\langle A, \leq \rangle$ es un *conjunto totalmente ordenado* , y en ese caso $\leq$ es un *orden total* si para todo $a, b \in A$, $a \leq b$ o $b \leq a$. A veces escribimos $a < b$ (resp. $a > b$) para indicar que $a \leq b$ (resp. $a \geq b$), pero $a \neq b$.

Ejemplo 1.1. El ejemplo más familiar de orden total es el orden "menor o igual" sobre los enteros.

Ejemplo 1.2. Supongamos que tenemos dos conjuntos ordenados $\langle A_1, \leq_1 \rangle$ y $\langle A_2, \leq_2 \rangle$. Sea $\langle A_1 \times A_2, \leq \rangle$, donde $\langle a, b \rangle \leq \langle c, d \rangle$ sii, por definición, $a \leq_1 c$ y $b \leq_2 d$. Es fácil demostrar que $\langle A_1 \times A_2, \leq \rangle$ es un conjunto ordenado. $\leq$ es denominado *orden producto* sobre $A_1 \times A_2$. Sin embargo, sobre el producto $A_1 \times A_2$ el orden producto no es el más famoso, pues hay otro denominado *orden lexicográfico*, $\preceq$, que ha sido utilizado tanto o más incluso. El orden lexicográfico sobre $A_1 \times A_2$ se define como sigue:

$$\langle a_1, a_2 \rangle \preceq \langle b_1, b_2 \rangle \text{ sii, por def., } a_1 <_1 b_1 \text{ o } (a_1 = b_1 \text{ y } a_2 \leq_2 b_2)$$

Por supuesto que estas definiciones pueden ser generalizadas en el modo obvio a cualquier producto finito de conjuntos: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, con $n \geq 2$.

Observación 1.1. Para representar gráficamente los conjuntos ordenados finitos $\langle A, \leq \rangle$ se suele recurrir a su *diagrama de orden* o *diagrama de Hasse*. Para ello se disponen los elementos de A como etiquetas de puntos, de forma que:

- cada vértice etiquetado con a aparece debajo de cualquier otro vértice etiquetado con b tal que $a \leq b$ y $a \neq b$.
- aparece un eje del vértice etiquetado con a al vértice etiquetado con b, para todo b tal que: $a \neq b$, $a \leq b$, y no existe c distinto de ambos cumpliendo $a \leq c$ y $c \leq a$.
- no hay otros vértices ni otros ejes aparte de los mencionados.

Así pues, $a \leq b$ sii $a = b$ o se puede alcanzar el vértice a desde el b vía un camino descendente.

Ejemplo 1.3.

1. El conjunto $\mathcal{P}(U)$ de partes de conjunto U, también llamado conjunto potencia $\mathbf{2}^U$ sobre el conjunto universo U, dotado de la inclusión $\subseteq$ es un conjunto ordenado, el conjunto ordenado $\langle \mathcal{P}(U), \subseteq \rangle$. El diagrama de orden de $\langle \mathcal{P}(U), \subseteq \rangle$, donde $U = \{a, b, c, d\}$, aparece en la Figura 1.
2. El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales junto a la relación $|$, donde $i|j$ sii i es un divisor de j, es un conjunto ordenado. La Figura 2 muestra esta misma relación sobre el conjunto $J = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 36, 60\}$ y así $\langle J, | \rangle$ es también un conjunto ordenado.

Definición 1.2. Sea $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto ordenado, S un subconjunto no vacío de A y $a \in A$. a es una *cota inferior* (resp. *cota superior*) de S si para todo $x \in S$, $a \leq x$ (resp. $x \leq a$). *mayorante* (resp. *minorante*) es sinónimo de cota superior (resp. cota inferior). a es *mínimo* (resp. *máximo*) de S si:

1. $a \in S$ y
2. a es cota inferior (resp. superior) de S

en tal caso abreviamos escribiendo $a = \min S$ (resp. $a = \max S$). a es *ínfimo* (resp. *supremo*) de S si:

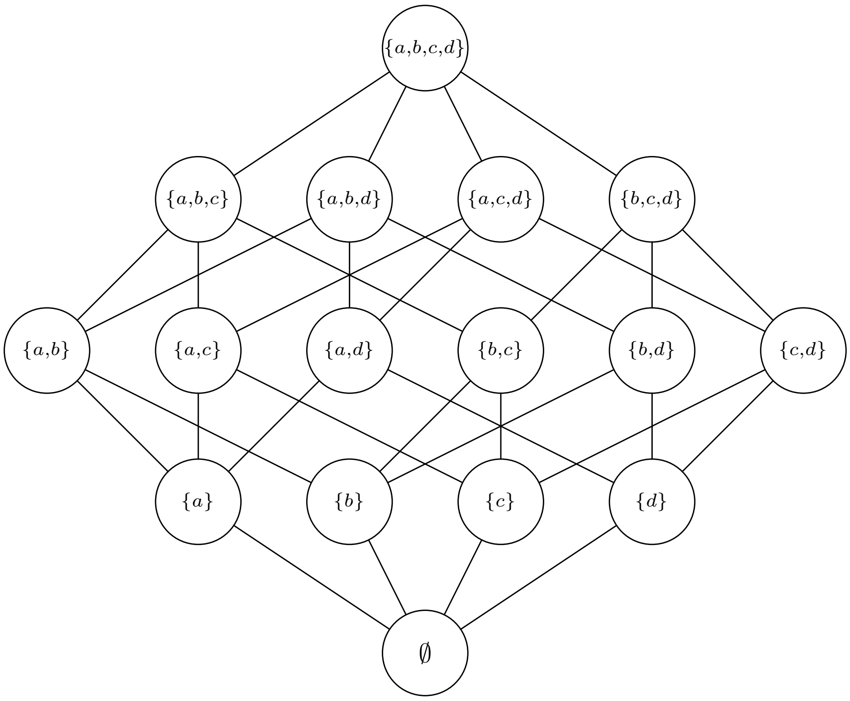


Figura 1: Diagrama de orden para el conjunto ordenado $\mathcal{P}(U)$.

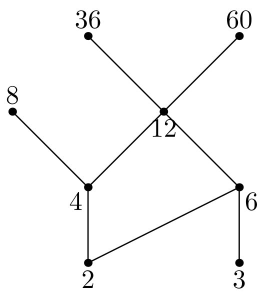


Figura 2: Diagrama de orden para el conjunto $\{2, 3, 4, 6, 8, 12, 36, 60\}$ ordenado por $|$.

1. a es cota inferior (resp. superior) de S y

2. para toda cota inferior (resp. superior) de S, a', se cumple $a' \leq a$ (resp. $a \leq a'$).

en tal caso abreviamos escribiendo $a = \inf S$ (resp. $a = \sup S$). $a \in S$ es *maximal* (resp. *minimal*) en S si para todo $x \in S$, $x \geq a$ (resp. $x \leq a$) implica $x = a$.

Ejemplo 1.4. En este ejemplo, sea $J = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 36, 60\}$ y $U = \{a, b, c, d\}$.

1. En el caso $\langle J, |\rangle$, las cotas superiores de $\{2, 3\}$ son exactamente los elementos del conjunto $\{6, 12, 36, 60\}$ y 4 no es cota superior (¿por qué?). La cotas inferiores de $\{8, 12\}$ son exactamente los elementos del conjunto $\{4, 2\}$ y las de $\{8, 4\}$ son exactamente los elementos del conjunto $\{4, 2\}$.

2. En el caso $\langle J, |\rangle$, $S = \{12, 36, 60\}$ tiene mínimo, el elemento 12, pero no tiene máximo. $S = \{2, 3, 6\}$ tiene máximo, el elemento 6, pero no tiene mínimo. $S = \{2, 3\}$ no tiene ni máximo ni mínimo, de hecho S no tiene cotas inferiores.

3. En el caso $\langle J, |\rangle$, $\inf \{4, 6\} = 2$ $\sup \{4, 6\} = 12$. Obsérvese que el conjunto de cotas superiores de $\{4, 6\}$ es $M = \{12, 36, 60\}$ y que $\min M = 12$. Por otra parte el conjunto de contas inferiores de $\{4, 6\}$ es $m = \{2\}$ y que el máximo de m es 2.

4. En el caso $\langle \mathcal{P}(U), \subseteq\rangle$ es fácil comprobar que el ínfimo de $\inf \{\{a, c\}, \{b, c, d\}\} = \{c\}$ y que $\sup \{\{a, c\}, \{b, c, d\}\} = \{a, b, c, d\}$. Si se observa con atención se verá que cada par de elementos de este poset tiene un supremo y un ínfimo. $\varnothing$ (resp. $\{a, b, c, d\}$) es un mínimo (resp. máximo) de $\mathcal{P}(U)$ ordenado por $\subseteq$.

5. En el caso $\langle J, |\rangle$ y tomando $S = \{2, 3, 6\}$, 2 y 3 son minimales y 6 es maximal. Si $S = \{2, 3\}$, entonces 2 y 3 son maximales y minimales a la vez.

Lema 1.1. *Sea $\langle A, \leq\rangle$ un conjunto ordenado y S un subconjunto no vacío de A. Si existe* $\inf S$ *(resp.* $\sup S$*), éste es el máximo (resp. mínimo) de las cotas inferiores (resp. superiores).*

Demostración. Es evidente a partir de las definiciones de ínfimo y supremo dadas en la Definición 1.2. □

Teorema 1.2. *Sea $\langle A, \leq\rangle$ un conjunto ordenado y S un subconjunto no vacío de A. Si S tiene mínimo (resp. máximo) éste es único.*

Demostración. Supongamos que $a, b \in A$ son ambos elementos mínimo (resp. máximo) de S. Entonces: $a, b \in S$, $a \leq b$ y $b \leq a$; por antisimetría se tendrá entonces $a = b$. □

Corolario 1.3. *Sea $\langle A, \leq\rangle$ un conjunto ordenado y S un subconjunto no vacío de A. Si existe* $\inf S$ *(resp.* $\sup S$*), entonces éste es único.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 1.1 y el Teorema 1.2 y de las definiciones. □

Definición 1.3. Sea $\langle A, \leq\rangle$ un conjunto ordenado. $\langle A, \leq\rangle$ es un *conjunto bien ordenado*, y en tal caso $\leq$ es un *buen orden*, si para todo subconjunto no vacío S de A existe $a_s \in A$ tal que a_s es mínimo de S.

Observación 1.2. Es obvio que todo conjunto bien ordenado es totalmente ordenado.

Ejemplo 1.5. El ejemplo más familiar de buen orden es el orden “menor o igual” sobre los naturales.

2. Retículos

Definición 2.1. Un *retículo* es un álgebra $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ de tipo $\langle 2, 2 \rangle$ cumpliendo para todo $a, b, c \in A$:

R.1) $a \vee b = b \vee a$

R.2) $a \wedge b = b \wedge a$

R.3) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$

R.4) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$

R.5) $a \vee a = a$

R.6) $a \wedge a = a$

R.7) $a \vee (a \wedge b) = a$

R.8) $a \wedge (a \vee b) = a$

A las igualdades R.1 y R.2 (resp. R.3 y R.4, R.5 y R.6, R.7 y R.8) se les llama *leyes de commutatividad* (resp. *de asociatividad*, *de idempotencia*, *de absorción*).

Ejemplo 2.1. Si X es un conjunto entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$ es un retículo.

Teorema 2.1 (de dualidad para retículos). *Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ un álgebra de tipo $\langle 2, 2 \rangle$. Si $\mathbf{A}$ es un retículo entonces $\langle A, \wedge, \vee, \rangle$ es un retículo.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del hecho de que en la Definición 2.1 para propiedades definitorias están dadas por pares, obteniéndose una propiedad de la otra intercambiando entre sí los papeles de $\wedge$ y $\vee$. □

Lema 2.2. *Sea $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ un retículo. Para todo $a, b \in A$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $a \wedge b = a$
2. $a \vee b = b$

Demostración. Supongamos que $a, b \in A$ y que $a \wedge b = a$. Entonces:

$$\begin{aligned} a \vee b &= (a \wedge b) \vee b && \text{por hipótesis} \\ &= b \vee (b \wedge a) && \text{por R.2 y R.1} \\ &= b && \text{R.7} \end{aligned}$$

La implicación recíproca está demostrada con ésta por dualidad. □

Teorema 2.3. *Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ un retículo. Existe una relación de orden $\leq$ sobre A tal que para todo $a, b \in A$:*

1. $a \wedge b = \inf\ \{a, b\}$
2. $a \vee b = \sup\ \{a, b\}$

Demostración. Definamos sobre A la relación binaria:

$$a \leq b \text{ si, y sólo si, } a \wedge b = a \tag{1}$$

Demostremos en primer lugar que $\leq$, así definida, es una relación de orden. Es *reflexiva* porque según R.6 vale para todo $a \in A$ la igualdad $a \wedge a = a$. Es *antisimétrica*, porque si $a, b \in A$ y se cumple $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces:

$$\begin{aligned} a &= a \wedge b && \text{por hipótesis} \\ &= b \wedge a && \text{por R.2} \\ &= b && \text{por hipótesis.} \end{aligned}$$

Es *transitiva* porque para todo $a, b, c \in A$, si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces:

$$\begin{aligned} a \wedge c &= (a \wedge b) \wedge c && \text{por hipótesis} \\ &= a \wedge (b \wedge c) && \text{por R.4} \\ &= a \wedge b && \text{por hipótesis} \\ &= a && \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

Sean $a, b \in A$,

$$\begin{aligned} (a \wedge b) \wedge a &= a \wedge (b \wedge a) && \text{por R.4} \\ &= a \wedge (a \wedge b) && \text{por R.2} \\ &= (a \wedge a) \wedge b && \text{por R.4} \\ &= a \wedge b && \text{por R.6} \end{aligned}$$

de donde $a \wedge b \leq a$. De forma similar se demuestra que $a \wedge b \leq b$. Supongamos que $c \in A$ y cumple $c \leq a$ y $c \leq b$. Entonces

$$\begin{aligned} c \wedge (a \wedge b) &= (c \wedge a) \wedge b && \text{por R.4} \\ &= c \wedge b && \text{por hipótesis} \\ &= c && \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

por lo que $c \leq a \wedge b$. En definitiva se ha demostrado que para todo $a, b \in A$,

$$a \wedge b = \inf \{a, b\} \tag{2}$$

según $\leq$. Por otra parte, según R.8, $a \wedge (a \vee b) = a$ y

$$\begin{aligned} b \wedge (a \vee b) &= b \wedge (b \vee a) && \text{por R.1} \\ &= b && \text{por R.8} \end{aligned}$$

luego $a \leq a \vee b$ y $b \leq a \vee b$. Además, si $c \in A$ cumple $a \leq c$ y $b \leq c$ entonces

$$\begin{aligned} (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) && \text{por R.3} \\ &= a \vee c && \text{por el Lema 2.2} \\ &= c && \text{por el Lema 2.2} \end{aligned}$$

y por el Lema 2.2, $a \vee b \leq c$. En definitiva, tenemos que $a \vee b = \sup \{a, b\}$. □

Ejercicio 2.1. Sea $\langle A, \leq \rangle$ un conjunto ordenado tal que para todo $a, b \in A$ existe $\inf \{a, b\}$ y $\sup \{a, b\}$. En tal caso definimos dos operaciones binarias en A, representadas respectivamente por $\vee$ y $\wedge$, de la siguiente manera:

1. $a \wedge b = \inf \{a, b\}$
2. $a \vee b = \sup \{a, b\}$

Demostrar que:

1. Para todo $a, b \in a$, $a_1 \vee a_2 = a_1$ sii $a_2 \leq a_1$ sii $a_1 \wedge a_2 = a_2$.
2. $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo.
3. para todo $a, b \in A$, $a \wedge b = a$ sii $a \leq b$.

Hecho este ejercicio conocemos una definición alternativa, y equivalente, a la de retículo dada por nosotros.

Ejemplo 2.2. $\langle J, | \rangle$, donde $J = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 36, 60\}$, es un conjunto ordenado (Ejemplo 1.3(2) y Figura 2); pero no es retículo (¿por qué?).

3. Retículos Distributivos

Definición 3.1. Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ un retículo. $\mathbf{A}$ es *distributivo* si cumple para todo $a, b, c \in A$:

1. $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
2. $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

Ejemplo 3.1.

1. Si X es un conjunto entonces $\langle \mathcal{P}(X), \cup, \cap \rangle$ es un retículo distributivo.
2. El Diamante (Figura 3(a)) y el Pentágono (Figura 3(b)) son retículos, pero ninguno de los dos son distributivos.

Definición 3.2. Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ un retículo, $S \subseteq A$ y $S \neq \varnothing$. $\mathbf{S} = \langle S, \vee, \wedge \rangle$ es un subretículo de $\mathbf{A}$ si para todo $a, b \in S$, $a \vee b, a \wedge b \in S$.

Teorema 3.1. *Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ un retículo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *$\mathbf{A}$ es distributivo.*
2. *Ni el Diamante ni el Pentágono son subretículos de $\mathbf{A}$.*

Demostración. Supongamos que $\mathbf{A}$ es distributivo. Para el Diamante (Figura 3(a)):

$$\begin{aligned} a_1 \wedge (a_2 \vee a_3) &= a_1 \wedge a_4 \\ &= a_1 \\ &\neq a_0 \\ &= (a_1 \wedge a_2) \vee (a_1 \wedge a_3) \end{aligned}$$

en cuanto al Pentágono (Figura 3(b)):

$$\begin{aligned} b_2 \wedge (b_1 \vee b_3) &= b_2 \wedge b_4 \\ &= b_2 \\ &\neq b_1 \\ &= (b_2 \wedge b_1) \vee (b_2 \wedge b_3) \end{aligned}$$

Luego si contuviera como subretículo al Diamante o al Pentágono, no podría ser distributivo. Recíprocamente, supongamos primeramente que existiera $\{a,b,c\} \subseteq A$ tal que $a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ y $c < a$. Hagamos

$$\begin{aligned} b_0 &= a \wedge b \\ b_1 &= c \vee (a \wedge b) \\ b_2 &= a \wedge (b \vee c) \\ b_3 &= b \\ b_4 &= b \vee c \end{aligned}$$

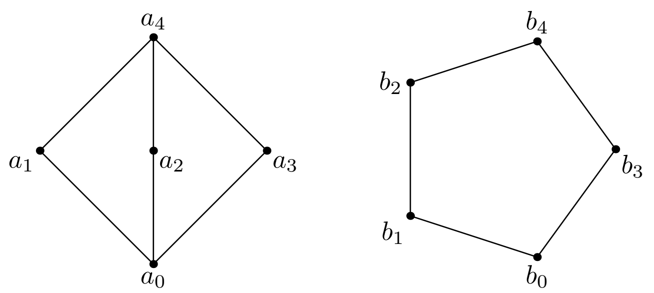
Entonces $S = \{b_0, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ es un conjunto con 5 elementos cerrado para $\vee$ y $\wedge$; por lo que forma un subretículo de $\mathbf{A}$ isomorfo al representado en la Figura 3(b). Por tanto, podemos suponer que:

$$\text{Para todo } x,y,z \in A, \text{ si } z < x \text{ entonces } x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{3}$$

Pero como $\mathbf{A}$ no es distributivo, debe existir $p,q,r \in A$ tal que $p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. Sea:

$$\begin{aligned} a_1 &= (q \wedge r) \vee (p \wedge (q \vee r)) \\ a_2 &= (r \wedge p) \vee (q \wedge (r \vee p)) \\ a_3 &= (p \wedge q) \vee (r \wedge (p \vee q)) \\ a_0 &= (p \wedge q) \vee (q \wedge r) \vee (r \wedge p) \\ a_4 &= (p \vee q) \wedge (q \vee r) \wedge (r \vee p) \end{aligned}$$

Se puede comprobar, usando (3), que a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4 son distintos dos a dos y por consiguiente determinan un subretículo de $\mathbf{A}$ isomorfo al de la Figura 3(a). $\square$



(a) Diamante (b) Pentágono

Figura 3: Diagrama de Hasse del Diamante y el Pentágono.

Lema 3.2. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ *un retículo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *para todo* $x,y,z \in A$, $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$
2. *para todo* $x,y,z \in A$, *si* $z \leq x$ *entonces* $(x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z)$

Demostración. Si $z \leq x$ entonces $z = x \wedge z$; así pues la implicación se deduce de la identidad. Recíprocamente, supongamos que la segunda afirmación vale. Como $x \wedge z \leq x$ tenemos $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z))$. □

Definición 3.3. Un retículo $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ es *modular* si para todo $x, y, z \in A$ se cumple:

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee (x \wedge z)) \tag{4}$$

Teorema 3.3. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ *un retículo. Entonces:*

1. $\mathbf{A}$ *es modular sii el Pentágono no es un subretículo suyo.*
2. *Si* $\mathbf{A}$ *es modular, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
   a) $\mathbf{A}$ *es distributivo*
   b) *el Diamante no es un subretículo de* $\mathbf{A}$

Lema 3.4. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ *un retículo distributivo y* $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s \in A$. *Entonces:*

$$(\bigwedge_{i=1}^{r} a_i) \vee (\bigwedge_{j=1}^{s} b_j) = \bigwedge_{i=1}^{r} (\bigwedge_{j=1}^{s} (a_i \vee b_j)) \tag{5}$$

$$(\bigvee_{i=1}^{r} a_i) \wedge (\bigvee_{j=1}^{s} b_j) = \bigvee_{i=1}^{r} (\bigvee_{j=1}^{s} (a_i \wedge b_j)) \tag{6}$$

Teorema 3.5. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge \rangle$ *un retículo distributivo y* $a_1, a_2, a_3 \in A$. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $a_1 \vee a_2 = a_1 \vee a_3$ *y* $a_1 \wedge a_2 = a_1 \wedge a_3$
2. $a_2 = a_3$

Demostración. Supongamos que $a_1 \vee a_2 = a_1 \vee a_3$ y $a_1 \wedge a_2 = a_1 \wedge a_3$. Entonces:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_2 \vee (a_2 \wedge a_1) \\
&= a_2 \vee (a_3 \wedge a_1) \\
&= (a_2 \vee a_3) \wedge (a_2 \vee a_1) \\
&= (a_3 \vee a_2) \wedge (a_3 \vee a_1) \\
&= a_3 \vee (a_2 \wedge a_1) \\
&= a_3 \vee (a_3 \wedge a_1) \\
&= a_3
\end{aligned}$$

□

4. Retículos Complementados

Definición 4.1. Sea $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, 1, 0 \rangle$ un álgebra de tipo $\langle 2, 2, 0, 0 \rangle$. $\mathbf{A}$ es un *retículo complementado* si:

1. $\langle A, \vee, \wedge \rangle$ es un retículo
2. 1 es máximo de $\mathbf{A}$ y 0 mínimo, según el orden derivado de las operaciones del retículo.

3. para todo $a \in A$ existe $\bar{a} \in A$ tal que

$$a \vee \bar{a} = 1 \qquad a \wedge \bar{a} = 0 \tag{7}$$

Lema 4.1. *Si* $\langle A, \vee, \wedge, 1, 0\rangle$ *es un retículo complementado, también lo es* $\langle A, \wedge, \vee, 0, 1\rangle$.

Teorema 4.2. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, 1, 0\rangle$ *un retículo complementado y distributivo. Para todo* $a \in A$ *no hay más que un elemento con las propiedades de* $\bar{a}$ *dadas en (7).*

Teorema 4.3. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, 1, 0\rangle$ *un retículo complementado y distributivo. Para todo* $a \in A$,

$$\bar{\bar{a}} = a$$

Teorema 4.4. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, 1, 0\rangle$ *un retículo complementado y distributivo. Para todo* $a, c \in A$,

$$\overline{a \vee c} = \bar{a} \wedge \bar{c} \text{ y } \overline{a \wedge c} = \bar{a} \vee \bar{c}$$

Teorema 4.5. *Sea* $\mathbf{A} = \langle A, \vee, \wedge, 1, 0\rangle$ *un retículo complementado. Para todo* $a, c \in A$ *son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $a \leq c$
2. $a \wedge \bar{c} = 0$
3. $\bar{a} \vee c = 1$

5. Álgebra de Boole

La siguiente definición es debida a Huntington en 1904 y tiene la propiedad de que ningún postulado incluido en ella es consecuencia de otros.

Definición 5.1. Un *álgebra de Boole* es un álgebra $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ de tipo $\langle 2, 2, 1, 0, 0\rangle$ cumpliendo para todo $a, b, c \in B$:

B.1) $a + b = b + a$

B.2) $a \cdot b = b \cdot a$

B.3) $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

B.4) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

B.5) $a \cdot \bar{a} = 0$

B.6) $a + \bar{a} = 1$

B.7) $a + 0 = a$

B.8) $a \cdot 1 = a$

El álgebra de Boole $\mathbf{B}$ se denomina trivial cuando $0 = 1$.

Observación 5.1. En este tratado:

1. Consideraremos excluida de nuestras consideraciones el álgebra de Boole trivial.

2. Representaremos la operación $\cdot$ por la simple yuxtaposición de los elementos operados con ella.

Para establecer la consistencia de los postulados de la Definición 5.1 debidos a *Huntington*, es necesario ofrecer al menos un ejemplo de estructura en la que se cumplan. Nosotros ofrecemos varios de interés de sugerente valor.

Ejemplo 5.1. Son álgebras de Boole (como ejercicio, comprobarlo) las siguientes estructuras:

1. El álgebra $\mathbf{B_2} = \langle B_2, +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1 \rangle$ donde:

   - $B_2 = \{0, 1\}$
   - las operaciones: $+$, $\cdot$ y $\bar{\ }$ son las dadas por las tablas:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

$+$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

2. Sea U un conjunto —no vacío, si se desea un ejemplo de álgebra de Boole no trivial– y sea $\mathbf{2}^U$ el álgebra $\langle \mathcal{P}(U), \cup, \cap, ', \varnothing, U \rangle$. En la figura 6 se muestra el ejemplo de $\mathbf{2}^{\{0,1,2\}}$, que tiene un universo de 8 elementos. Así:

   - $\mathbf{2}^{\varnothing}$, tiene un universo de 1 elemento (¿por qué?).
   - $\mathbf{2}^{\{0,1\}}$, tiene un universo de $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\{0,1\})) = 4$ elementos.
   - $\mathbf{2}^{\{0,1,2,3\}}$, tiene un universo de $\mathrm{card}(\mathcal{P}(\{0,1,2,3\})) = 16$ elementos.

   y constatamos de esta forma la facilidad para generar álgebras de Boole finitas con cardinal igual a una potencia de 2.

3. Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole y n un número natural. Se denomina *función booleana* o *función de conmutación* de n variables sobre $\mathbf{B}$ a cualquier función $f\colon B^n \longrightarrow B$. Hay dos ejemplos de funciones de conmutación para cualquier número de variables: la constantemente igual a 0 (representada como 0) y la constantemente igual a 1 (representada por 1). Sean f, g funciones de conmutación de n variables sobre el álgebra de Boole $\mathbf{B}$; definimos las siguientes operaciones:

   - $(f+g)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n) + g(x_1,\ldots,x_n)$, para todo $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in B^n$.
   - $(f\cdot g)(x_1,\ldots,x_n) = f(x_1,\ldots,x_n)\cdot g(x_1,\ldots,x_n)$, para todo $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in B^n$.
   - $\bar{f}(x_1,\ldots,x_n) = \overline{f(x_1,\ldots,x_n)}$, para todo $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in B^n$.

   Si $F(\mathbf{B}, n)$ es el conjunto de aplicaciones $f\colon B^n \longrightarrow B$, el álgebra $\langle F(\mathbf{B},n), +, \cdot, \bar{\ }, 0, 1\rangle$ es un álgebra de Boole que representamos por el símbolo $\mathbf{F(B,n)}$. Por ejemplo, si $n = 2$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B_2}$ en la Figura 4 recogemos las $16 (= 2^4 = \mathrm{card}(B_2^{B_2\times B_2}))$ funciones de conmutación de 2 variables. y la representación

			$\cdot$		x_1		x_2	$\oplus$	$+$	$\downarrow$	$\equiv$	$\bar{x}_2$		$\bar{x}_1$	$\supset$	$\uparrow$	
x_1	x_2	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Figura 4: Funciones de conmutación de 2 variables.

   de $\mathbf{F(B_2, 2)}$ es dada en la figura 5.

4. Sea m un número natural no nulo y

- $D(m) = \{i \in \omega : i|m\}$
- para cualesquiera $m, n \in B$ sea:
  - $m + n = [m, n]$,
  - $m \cdot n = (m, n)$,
  - $\bar{n} = 30/n$,
  - 0 el elemento $1 \in D(m)$
  - 1 el elemento $m \in D(m)$

Para ciertos números naturales no nulos m, $\mathbf{D}(m)$ es un álgegra de Boole. Por ejemplo, para $m = 30$ se tiene $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ y el álgebra $\mathbf{D(30)} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 1, 30\rangle$ es un álgebra de Boole. En general, $\mathbf{D(m)}$ es álgebra de Boole sii $m = 1$ (álgebra trivial) o si existe un número natural k_m tal que: $m = \prod_{i=0}^{k_m} p_i$; para todo $0 \leq i \leq k_m$, p_i es primo y $p_i \neq p_j$, siempre que $0 \leq i < j \leq k_m$; éste es el caso de $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, mostrado en la figura 6.

5. Sin embargo $D(20) = \{n \in \omega : n|30\}$, es decir, $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ no es un álgebra de Boole entre otras porque no existe $x \in D(20)$ tal que $2 \cdot x = (2, x) = 1$ y $2 + x = [2, x] = 20$.

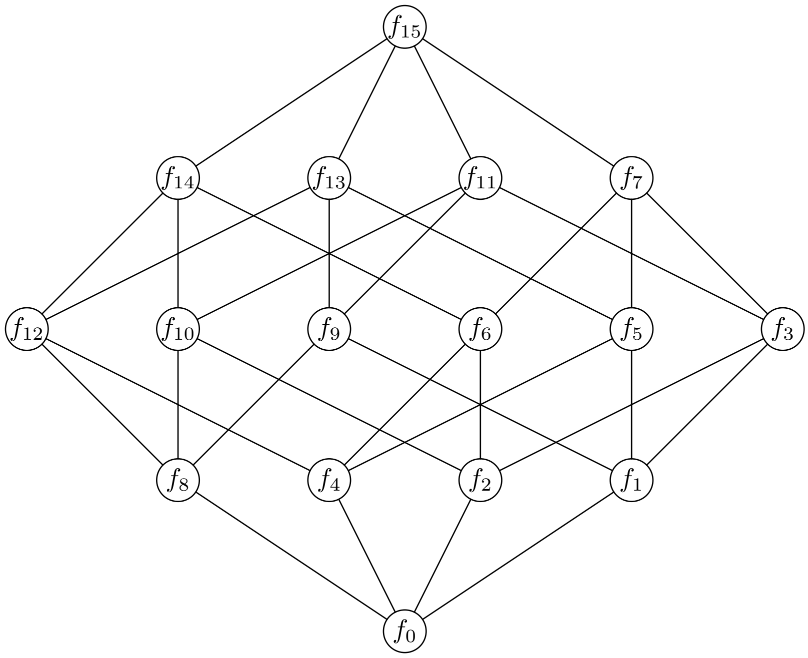


Figura 5: Álgebras de Boole $\mathbf{F(B_2, 2)}$.

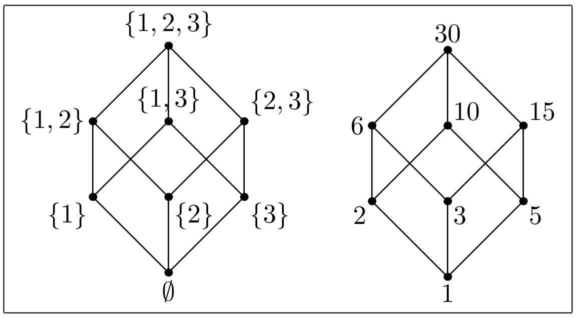


Figura 6: Álgebras de Boole de 8 elementos.

Además de la consistencia, es necesario considerar la cuestión de la independencia de los postulados. Por independencia se entiende que ninguno de los postulados se puede demostrar a partir de los otros. Los postulados que se presentan aquí son, de hecho, independientes. Sin embargo, una demostración de ello sería prolija y no es esencial para este estudio. No es necesario que se principie con un conjunto independiente de postulados. De hecho, algunos autores ahorran esfuerzos incluyendo como postulados ciertos teoremas que se desarrollarán más tarde. No obstante, prevalece la opinión de que la demostración de estos teoremas constituye la mejor introducción posible para el manejo del álgebra del Boole.

6. Teoremas Fundamentales del Álgebra de Boole

Observe que los postulados de Huntington se presentan en pares. Si se los examina cuidadosamente, se observa que en cada caso un postulado de un par se puede obtener a partir del otro intercambiando 0 y 1 junto con $+$ y $\cdot$. Cada teorema que se pueda demostrar mediante el álgebra de Boole tiene un dual o equivalente, que es también cierto. En otras palabras, cada paso de la demostración de un teorema se puede reemplazar por su dual, dando con ello una demostración del dual del teorema. En cierto sentido, esto duplica la capacidad para demostrar los teoremas. Cuando hayamos demostrado un teorema diremos que es cierto su dual por *dualidad.* La validez de lo dicho reside en el siguiente teorema

Teorema 6.1 (*de dualidad*)**.** *Si* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *es un álgebra de Boole entonces* $\mathbf{B}^d = \langle B, \cdot, +, ^{-}, 1, 0\rangle$ *es un álgebra de Boole.*

Demostración. Es evidente tras constatar que los axiomas de álgebra de Boole están dados en parejas, intercambiando los papeles de $+$ y $\cdot$ (resp. 1 y 0) entre una pareja y otra. □

Lema 6.2. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Los elementos* 0 *y* 1 *son únicos.*

Demostración. Si además de 0 existiera otro elemento, digamos 0_1, con sus propiedades axiomáticas, entonces se tendría:

$$\begin{aligned} 0_1 &= 0 + 0_1 && \text{por B.7} \\ &= 0_1 + 0 && \text{por B.1} \\ &= 0 && \text{por B.7} \end{aligned}$$

El resto de la demostración es por dualidad. □

Lema 6.3. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para cada elemento* $a \in B$*,* $a + a = a$ *y* $a \cdot a = a$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned} a + a &= (a + a) \cdot 1 && \text{por B.8} \\ &= (a + a)(a + \bar{a}) && \text{por B.6} \\ &= a + a\bar{a} && \text{por B.3} \\ &= a + 0 && \text{por B.5} \\ &= a && \text{por B.7} \\ aa &= a && \text{por dualidad} \end{aligned}$$

□

Lema 6.4. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para cada* $a \in B$*,* $a + 1 = 1$ *y* $a \cdot 0 = 0$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
a + 1 &= 1 \cdot (a + 1) && \text{por B.8}\\
&= (a + \bar{a})(a + 1) && \text{por B.5}\\
&= a + \bar{a} \cdot 1 && \text{por B.3}\\
&= a + \bar{a} && \text{por B.8}\\
&= 1 && \text{por B.6}\\
a \cdot 0 &= 0 && \text{por dualidad}
\end{aligned}$$

□

Lema 6.5. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Si* $2 \leq \mathrm{Car}(B)$ *entonces* $1 \neq 0$ *y* $\bar{1} = 0$.

Demostración. Sea a un elemento cualquiera de B. Se tiene:

$$\begin{aligned}
a \cdot 1 &= a\\
a \cdot 0 &= 0
\end{aligned}$$

Si suponemos que $1 = 0$ tendremos entonces que para todo $a \in B$, $a = 0$. Sin embargo estamos suponiendo que B tiene al menos 2 elementos. Esta contradicción solamente se puede salvar llegando a la conclusión de que $1 \neq 0$. Para la segunda aseveración tengamos en cuenta:

$$\begin{aligned}
\bar{1} &= \bar{1} \cdot 1 && \text{por B.8}\\
&= 0 && \text{por B.5}
\end{aligned}$$

□

Lema 6.6. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b \in B$, $a + ab = a$ *y* $a(a + b) = a$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
a + ab &= a \cdot 1 + ab && \text{por B.8}\\
&= a(1 + b) && \text{por B.4}\\
&= a \cdot 1 && \text{por Lema 6.4}\\
&= a && \text{por B.8}\\
a(a + b) &= a && \text{por dualidad}
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.7. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b \in B$, $ab + \bar{a}b = b = (a + b)(\bar{a} + b)$.

Demostración. Basta considerar:

$$\begin{aligned}
ab + \bar{a}b &= ba + b\bar{a} && \text{por B.2}\\
&= b(a + \bar{a}) && \text{por B.4}\\
&= b \cdot 1 && \text{por B.6}\\
&= b && \text{por B.8}\\
(a + b)(\bar{a} + b) &= b && \text{por dualidad}
\end{aligned}$$

□

Lema 6.8. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Sea* $a \in B$ *y supongamos que existe* $\tilde{a}$ *tal que* $a\tilde{a} = 0$ *y* $a + \tilde{a} = 1$*, entonces* $\tilde{a} = \bar{a}$*.*

Demostración. En los supuestos del enunciado:

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= 1 \cdot \tilde{a} && \text{por B.8}\\
&= (a + \bar{a})\tilde{a} && \text{por B.5}\\
&= a\tilde{a} + \bar{a}\tilde{a} && \text{por B.4}\\
&= 0 + \bar{a}\tilde{a} && \text{por hipótesis}\\
&= a\bar{a} + \bar{a}\tilde{a} && \text{por B.5}\\
&= (a + \tilde{a})\bar{a} && \text{por B.4}\\
&= 1 \cdot \bar{a} && \text{por hipótesis}\\
&= \bar{a} && \text{por B.8}
\end{aligned}$$

□

Lema 6.9. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a \in B$*,* $\bar{\bar{a}} = a$*.*

Demostración. Sea $a \in B$ y consideremos $\bar{a}$. Por B.1, B.2, B.5 y B.6 se tiene que $\bar{a}a = 0$ y $\bar{a} + a = 1$. Por el Lema 6.8, debe darse $a = \bar{\bar{a}}$. □

Lema 6.10. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b, c \in B$*,* $a((a + b) + c) = a = ((a + b) + c)a$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
a((a + b) + c) &= a(a + b) + ac && \text{por B.4}\\
&= a + ac && \text{por Lema 6.6}\\
&= a && \text{por Lema 6.6}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a &= a((a + b) + c) && \text{por fase anterior}\\
&= ((a + b) + c)a && \text{por B.2}
\end{aligned}$$

□

Observación 6.1. El lector reconocerá el Teorema 6.11 como las *leyes asociativas* de + y ·. Algunos autores incluyen estas leyes entre los postulados del álgebra de Boole; aunque, como se ve en la demostración del teorema, esto es absolutamente innecesario, una redundancia.

Teorema 6.11. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b, c \in B$*,* $(a+b)+c = a+(b+c)$ *y* $(ab)c = a(bc)$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
(a+b)+c &= (a(a+(b+c))+b)+c && \text{por Lema 6.6}\\
&= (a(a+(b+c))+b(a+(b+c)))+c && \text{por Lema 6.10}\\
&= (a+b)(a+(b+c))+c && \text{por B.4}\\
&= (a+b)(a+(b+c))+c(a+(b+c)) && \text{por Lema 6.10}\\
&= ((a+b)+c)(a+(b+c)) && \text{por B.4}\\
&= ((a+b)+c)a+((a+b)+c)(b+c) && \text{por B.4}\\
&= a+((a+b)+c)(b+c) && \text{por Lema 6.10}\\
&= a+(((a+b)+c)b+((a+b)+c)c) && \text{por B.4}\\
&= a+(b+((a+b)+c)c) && \text{por Lema 6.10}\\
&= a+(b+c) && \text{por B.2 y Lema 6.6}\\
(ab)c &= a(bc) && \text{por dualidad}
\end{aligned}$$

□

Observación 6.2. Ahora que se han establecido las leyes de asociatividad, algunas expresiones pueden ser aliviadas de paréntesis como sigue:

$$(a+b)+c = a+b+c \tag{8}$$

$$(a\cdot b)\cdot c = abc \tag{9}$$

Teorema 6.12. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b \in B$*,* $a + \bar{a}b = a + b$ *y* $a(\bar{a}+b) = ab$*.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
a+\bar{a}b &= (a+\bar{a})(a+b) && \text{por B.3}\\
&= 1\cdot(a+b) && \text{por B.6}\\
&= a+b && \text{por B.8}\\
a(\bar{a}+b) &= ab && \text{por dualidad}
\end{aligned}$$

□

Observación 6.3. El Teorema 6.13 expresa las conocidas como *leyes de De Morgan*, que expresan el complemento de una suma (resp. producto) en función de los sumandos (resp. factores), mejor en función del complemento de los sumandos (resp. factores).

Teorema 6.13. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, c \in B$*,* $\overline{a+c} = \bar{a}\bar{c}$ *y* $\overline{ac} = \bar{a}+\bar{c}$

Demostración. Por una parte se tiene:

$$\begin{aligned}
(a+b)+\bar{a}\bar{b} &= ((a+b)+\bar{a})((a+b)+\bar{b}) && \text{por B.3}\\
&= (\bar{a}+(a+b))(\bar{b}+(b+a)) && \text{por B.1}\\
&= 1\cdot 1 && \text{por Teorema 6.11 y Lema 6.4}\\
&= 1 && \text{por B.8}
\end{aligned}$$

y por otra:

$$\begin{aligned}
(a+b)(\bar{a}\bar{b}) &= a(\bar{a}\bar{b})+b(\bar{a}\bar{b}) && \text{por B.2 y B.4}\\
&= 0+0 && \text{por Teorema 6.11, B.5 y Lema 6.4}\\
&= 0 && \text{por B.7}
\end{aligned}$$

Por el Lema 6.8, $(a+b) = \overline{(\bar{a}\bar{b})}$ y por el Lema 6.9 se tiene

$$\overline{a+b} = \bar{a}\bar{b}. \tag{10}$$

La segunda parte del teorema es cierta por dualidad; pero por motivos pedagógicos daremos una demostración directa por otro camino:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{a}+\bar{b}} &= \bar{\bar{a}}\bar{\bar{b}} && \text{por } 10 \\ &= ab && \text{por Lema 6.9} \end{aligned}$$

y por Lema 6.9,

$$\overline{ab} = \bar{a}+\bar{b}$$

□

Teorema 6.14. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b, c \in B$*,* $ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c$ *y* $(a+b)(\bar{a}+c)(b+c) = (a+b)(\bar{a}+c)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} ab + \bar{a}c + bc &= ab + \bar{a}c + bc(a+\bar{a}) && \text{por B.6 y B.8} \\ &= ab + abc + \bar{a}c + \bar{a}bc && \text{por B.4} \\ &= ab(1+c) + \bar{a}c(1+b) && \text{por B.4 y B.8} \\ &= ab + \bar{a}c && \text{por Lema 6.4 y B.8} \\ (a+b)(\bar{a}+c)(b+c) &= (a+b)(\bar{a}+c) && \text{por dualidad} \end{aligned}$$

□

Ejercicio 6.1. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Para todo $a, b \in B$, definimos a^b por la siguiente igualdad:

$$a^b = ab + \bar{a}\bar{b}$$

Demuestre que para todo $a, b \in B$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $a^b = 1$
2. $a = b$

Solución. Sean $a, b \in B$ cualesquiera. Supongamos en primer lugar que $a^b = 1$; entonces:

$$\begin{aligned} a &= a1 \\ &= aa^b \\ &= a(ab + \bar{a}\bar{b}) \\ &= aab + a\bar{a}\bar{b} \\ &= ab + 0\bar{b} \\ &= ab + 0 \\ &= abb + \bar{a}\bar{b}b \\ &= (ab + \bar{a}\bar{b})b \\ &= a^b b \\ &= 1b \\ &= b \end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $a = b$; entonces:

$$\begin{aligned} a^b &= a^a \\ &= aa + \bar{a}\bar{a} \\ &= a + \bar{a} \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 6.2. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$ un álgebra de Boole. Demuestre que para todo $a, b, c \in B$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $a + b = a + c$ y $ab = ac$
2. $b = c$

Solución. Sean $a, b, c \in B$. Supongamos en primer lugar que $a + b = a + c$ y $ab = ac$; entonces:

$$\begin{aligned} b &= b + ab \\ &= b + ac \\ &= (b + a)(b + c) \\ &= (a + b)(b + c) \\ &= (a + c)(b + c) \\ &= ab + c \\ &= ac + c \\ &= c \end{aligned}$$

Para el resultado recíproco, si $b = c$ sumamos (resp. multiplicamos) a en ambos miembros y la igualdad se matiene siendo $a + b = a + c$ (resp. $ab = ac$). □

7. Representación Atómica de las Álgebras de Boole Finitas

Definición 7.1. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$ un álgebra de Boole y $a \in B$. a es un *átomo* si, y sólo si, por definición:

1. $a \neq 0$
2. para todo $x \in B$, $xa = a$ ó $xa = 0$

El conjunto de los átomos del álgebra de Boole $\mathbf{B}$ será representado por $\mathrm{Atm}(\mathbf{B})$. El elemento c de $\mathbf{B}$ es un *coátomo* sii, por def., es un átomo de $\mathbf{B}^d$.

Ejemplo 7.1.

1. En el álgebra de Boole $\mathbf{B_2}$, 1 es un átomo, su único átomo.
2. En el álgebra de Boole $\mathbf{2}^{\{1,2,3\}}$, $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{3\}$ son átomos. De hecho éstos son sus únicos elementos cumplido la condición de ser átomo.
3. En el álgebra de Boole de los divisores de 30 los únicos elementos cumpliendo la condición de ser átomo son: 2, 3 y 5.

Observación 7.1. El concepto de átomo tal y como ha sido expresado en la Definición 7.1 puede ser entendido desde otro punto de vista. Se trata realmente de una definición equivalente en términos de la relación de orden que subyace bajo la definición axiomática de álgebra de Boole. En la Definición 7.2 damos a conocer esa relación, en el Lema 7.1 expresamos una definición equivalente, en el Lema 7.2 demostramos que efectivamente la relación es de orden y, finalmente, en el Lema 7.3 damos la caracterización del concepto de átomo por medio del orden.

Definición 7.2. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Definimos en B la relación binaria $\leq$ como sigue:

$$a \leq b \text{ sii, por definición, } ab = a$$

Ejemplo 7.2. Volveremos al Ejemplo 3, su Figura 4 y Figura 5. Para cualesquiera funciones $f, g \in F(\mathbf{B_2}, 2)$,

$$\begin{aligned} f = fg &\text{ sii para todo } a, b \in B_2,\ f(a,b) = f(a,b)g(a,b) \\ &\text{ sii para todo } a, b \in B_2,\ f(a,b) \leq g(a,b) \end{aligned}$$

Así pues, si f (resp. g) estuviese respresentada por la upla $\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$ (resp. $\langle y_0, y_1, y_2, y_3\rangle$), entonces $f \leq g$ sii para todo $i \in 4$, $x_i \leq y_i$. Sentado esto, supongamos que f está representada por una upla $\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$ tal que $\sum_{i=0}^{3} x_1 = 1$, es decir, tiene un único 1 en su (única) representación. Si g está representada por una upla $\langle y_0, y_1, y_2, y_3\rangle$ y cumple

$$\langle 0, 0, 0, 0\rangle \leq \langle y_0, y_1, y_2, y_3\rangle \leq \langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$$

donde entre los x_i exactamente uno vale 1, digamos x_k, y el resto 0. Entonces para todo $0 \leq i \leq 3$, $y_i = \delta_{ik}$, o sea, $g = 0$ o $g = f$ y f es átomo. Recíprocamente, es fácil constatar (ejercicio) que si f está representada por una upla $\langle x_0, x_1, x_2, x_3\rangle$ tal que $1 < \sum_{i=0}^{3} x_1$, entonces siendo $f \neq 0$ existe g tal que $0 < g < f$ y f no es átomo. En definitiva, los átomos de $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$ son exactamente f_1, f_2, f_4 y f_8.

Lema 7.1. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. Para todo* $a, b \in B$*, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $a + b = b$
2. $ab = a$

Demostración. Sean $a, b \in B$. Supongamos que $a + b = b$, entonces:

$$\begin{aligned} ab &= a(a + b) && \text{por hipótesis} \\ &= a && \text{por Lema 6.6} \end{aligned}$$

Recíprocamente, si suponemos que $ab = a$ entonces:

$$\begin{aligned} a + b &= ab + b && \text{por hipótesis} \\ &= b + ba && \text{por B.1 y B.2} \\ &= b && \text{por Lema 6.6} \end{aligned}$$

□

Lema 7.2. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole. La relación* $\leq$ *es una relación de orden.*

Demostración. Sean $a, b, c \in B$. En virtud del Lema 6.3, $aa = a$, luego según $a \leq a$ (reflexividad). Supongamos que $a \leq b$ y $b \leq a$; por lo primero tenemos $ab = a$ y por lo segundo tenemos $ba = b$; por B.2 concluimos que $a = b$ (simetría). Supongamos, finalmente, que $a \leq b$ y $b \leq c$, es decir, que $ab = a$ y $bc = b$; entonces:

$$\begin{aligned} ac &= (ab)c && \text{por hipótesis} \\ &= a(bc) && \text{por Teorema 6.11} \\ &= ab && \text{por hipótesis} \\ &= a && \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

es decir, $a \leq c$ (transitividad). □

Lema 7.3. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$ *un álgebra de Boole y* $a \in B$ *tal que* $a \neq 0$. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. a *es un átomo.*
2. *para todo* $x \in B$, *si* $0 \leq x \leq a$ *entonces* $x = 0$ *ó* $x = a$.

Demostración. Supongamos que a es átomo, que $x \leq a$ y que $x \neq 0$; entonces $xa = x$. Por ser a átomo, ha de cumplirse $xa = 0$ o $xa = a$, pero lo primero es imposible puesto que estamos suponiendo $x \neq 0$ luego ha de darse lo segundo. Por tanto, $x = xa = a$. Recíprocamente, supongamos lo segundo y que $x \in B$; por Lema 6.6, $a + ax = a$ y por Lema 7.1, $xa \leq a$. Según la hipótesis, esto significa que $xa = 0$ o $xa = a$. Como la hipótesis general es que $a \neq 0$, lo anterior significa que a es átomo. □

Teorema 7.4. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$ *un álgebra de Boole finita. Para todo* $x \in B$ *tal que* $x \neq 0$ *existe* $a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ *tal que* $a \leq x$.

Demostración. Por reducción al absurdo supongamos que el resultado no es cierto; de donde existe $x_0 \in B$ tal que no existe ningún átomo a de $\mathbf{B}$ tal que $a \leq x$. Será posible encontrar $x_1 \in B$ tal que $0 < x_1 < x_0$ y, en general para todo natural i, encontraremos $x_{i+1} \in B$ tal que $0 < x_{i+1} < x_i < \cdots < x_1 < x_0$. La sucesión $\{x_i\}_i$ es una sucesión estrictamente decreciente de elementos no nulos de B, cuya existencia contradice la finitud de B. Esta situación sólo puede ser evitada estableciendo que para todo $x \in B$ tal que $x \neq 0$ debe existir $a \in B$ tal que $a \leq x$ y que impida el proceso anterior, es decir, $a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$. □

Teorema 7.5. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$ *un álgebra de Boole finita. Para todo* $a_1, a_2 \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$, *si* $a_1 a_2 \neq 0$ *entonces* $a_1 = a_2$.

Demostración. Por la definición de átomo (Definicion 7.1), $a_2 a_1 = a_1$ o $a_2 a_1 = 0$. Como lo segundo está excluido por hipótesis, tenemos que $a_2 a_1 = a_1$ y, simétricamente, que $a_2 a_1 = a_2$; por tanto, $a_1 = a_2$. □

Lema 7.6. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1 \rangle$ *un álgebra de Boole. Si* $a, b, c \in B$ *son tales que* $ac = a$ *y* $bc = b$, *entonces* $(a + b)c = a + b$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (a + b)c &= ac + bc && \text{por B.2 y B.4} \\ &= a + b && \text{por hipótesis} \end{aligned}$$

□

Lema 7.7. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole y* $a, b \in B$*. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. $ab = a$
2. $a\bar{b} = 0$
3. $\bar{a} + b = 1$

Demostración. Supongamos que $ab = a$. Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
a\bar{b} &= (ab)\bar{b} && \text{por hipótesis}\\
&= a(b\bar{b}) && \text{por Teorema 6.11}\\
&= a \cdot 0 && \text{por B.5}\\
&= 0 && \text{por Lema 6.4}
\end{aligned}
$$

Supongamos que $a\bar{b} = 0$. Entonces tenemos:

$$
\begin{aligned}
1 &= \bar{0} && \text{por Lema 6.5 y Lema 6.9}\\
&= \overline{a\bar{b}} && \text{por hipótesis}\\
&= \bar{a} + \bar{\bar{b}} && \text{por Teorema 6.13}\\
&= \bar{a} + b && \text{por Lema 6.9}
\end{aligned}
$$

Finalmente, supongamos que $\bar{a} + b = 1$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
a &= a \cdot 1 && \text{por B.8}\\
&= a \cdot (\bar{a} + b) && \text{por hipótesis}\\
&= a\bar{a} + ab && \text{por B.4}\\
&= 0 + ab && \text{por B.5}\\
&= ab && \text{por B.7}
\end{aligned}
$$

□

Teorema 7.8. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole finita y* $x \in B$ *tal que* $x \neq 0$*. Si* $\{a_1, \dots, a_k\} = \{a : a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ *y* $a \leq x\}$*, entonces* $x = a_1 + \cdots + a_k$*.*

Demostración. Sea $y = a_1 + \cdots + a_k$. Por Lema 7.6, $yx = y$. Así pues, lo que resta es demostrar que $xy = x$, o mejor, según el Lema 7.7, que $x\bar{y} = 0$. Por reducción al absurdo, supongamos que $x\bar{y} \neq 0$; por el Teorema 7.4, existe un átomo a tal que $a \leq x\bar{y}$. Por elLema 6.6, tenemos $x\bar{y} \leq x$ y $x\bar{y} \leq \bar{y}$, lo que por transitividad implica que $a \leq x$ y $a \leq \bar{y}$. Como $a \leq x$ existirá algún a_i tal que $a = a_i$ y, por tanto, por el Lema 6.6, $a \leq a_1 + \cdots + a_k = y$. Así tenemos que $a \leq y$ y $a \leq \bar{y}$; por el Lema 7.7

$$ay = a = a\bar{y} = 0$$

o sea, $a = 0$ lo cual es una contradicción. Por tanto, la hipótesis $x\bar{y} \neq 0$ debe ser falsa. □

Teorema 7.9. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole finita y* $a, a_1, \dots, a_k \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$*. Si* $x = a_1 + \cdots + a_k$ *y* $a \leq x$ *entonces existe* $1 \leq i \leq k$ *tal que* $a = a_i$*.*

Demostración. Supongamos que $a \leq x$, es decir $ax = a$. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 &\neq a && \text{por ser} a \text{ átomo} \\ &= a(a_1 + \cdots + a_k) && \text{por ser } a = ax \\ &= aa_1 + \cdots + aa_k && \text{por B.4} \end{aligned}$$

luego, existe $1 \leq i \leq k$ tal que $aa_i \neq 0$. Por el Teorema 7.5, $a = a_i$. □

Ejercicio 7.1. Exprese cada elemento de $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$ en función de las operaciones del álgebra de Boole de ariedad no nula.

Solución. Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= xy \\ f_2(x,y) &= x\overline{y} \\ f_4(x,y) &= \overline{x}y \\ f_8(x,y) &= \overline{x}\,\overline{y} \end{aligned}$$

y ahora:

$$\begin{aligned} f_0(x,y) &= f_1(x,y)f_2(x,y) = (xy)(x\overline{y}) = xy\overline{y} \\ f_{12}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y = \overline{x}(\overline{y}+y) = \overline{x} \\ f_{10}(x,y) &= f_8(x,y) + f_2(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + x\overline{y} = (\overline{x}+x)\overline{y} = \overline{y} \\ f_9(x,y) &= f_8(x,y) + f_1(x,y) = \overline{x}\,\overline{y} + xy \\ f_6(x,y) &= f_4(x,y) + f_2(x,y) = \overline{x}y + x\overline{y} \\ f_5(x,y) &= f_4(x,y) + f_1(x,y) = \overline{x}y + xy = (\overline{x}+x)y = y \\ f_3(x,y) &= f_2(x,y) + f_1(x,y) = x\overline{y} + xy = x(\overline{y}+y) = x \\ f_{14}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) + f_2(x,y) = f_{12}(x,y) + f_2(x,y) = \overline{x} + x\overline{y} = \overline{x} + \overline{y} \\ f_{13}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) + f_1(x,y) = f_{12}(x,y) + f_1(x,y) = \overline{x} + xy = \overline{x} + y \\ f_{11}(x,y) &= f_8(x,y) + f_2(x,y) + f_1(x,y) = f_{10}(x,y) + f_1(x,y) = \overline{y} + xy = x + \overline{y} \\ f_7(x,y) &= f_4(x,y) + f_2(x,y) + f_1(x,y) = f_6(x,y) + f_1(x,y) = x\overline{y} + y = x + y \\ f_{15}(x,y) &= f_8(x,y) + f_4(x,y) + f_2(x,y) + f_1(x,y) = 1 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 7.2. Demuestre que cualquiera de los siguientes conjuntos bastan para generar todas las funciones de $\mathbf{F}(\mathbf{B_2}, \mathbf{2})$:

1. $\{+, \bar{}\}$
2. $\{\cdot, \bar{}\}$

Solución.

1. Basta tener en cuenta el Ejercicio 7.1 y que $xy = \overline{(\overline{x} + \overline{y})}$.
2. Basta tener en cuenta el Ejercicio 7.1 y que $x + y = \overline{(\overline{x}\,\overline{y})}$.

□

Teorema 7.10. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole finita.* $\mathbf{B}$ *es isomorfa a* $\mathbf{2}^{\mathrm{Atm}(\mathbf{B})}$*, es decir, es isomorfa al álgebra*

$$\langle \mathcal{P}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B})), \cup, \cap, ', \varnothing, \mathrm{Atm}(\mathbf{B})\rangle$$

Demostración. Consideremos la función:

$$h: B \longrightarrow \mathcal{P}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B}))$$

definida por

$$h(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{, si } x = 0 \\ \{a: a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B}), a \leq x\} & \text{, si } x \neq 0 \end{cases}$$

En virtud de los teoremas 7.8 y 7.9 sabemos, y es fácil comprobar, que h es una biyección. Lo que resta es demostrar que "respeta" las operaciones de $\mathbf{B}$. En primer lugar, es claro en virtud de B.8 que

$$h(1) = M \tag{11}$$

y, en virtud del Lema 6.4 y la Definición 7.1, que

$$h(0) = \varnothing \tag{12}$$

Consideremos ahora $x_1, x_2 \in B$, no nulos, y sea:

$$h(x_1) = M_1 = \{a_{11}, \ldots, a_{1k_1}\}$$
$$h(x_2) = M_2 = \{a_{21}, \ldots, a_{2k_2}\}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{11} + \cdots + a_{1k_1} \\ x_2 &= a_{21} + \cdots + a_{2k_2} \\ x_1 + x_2 &= a_{11} + \cdots + a_{1k_1} + a_{21} + \cdots + a_{2k_2} \end{aligned}$$

y así

$$h(x_1 + x_2) = M_1 \cup M_2 \tag{13}$$

Seguidamente, usando la propiedad distributiva (B.4), es legítimo escribir:

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= (a_{11} + \cdots + a_{1k_1})(a_{21} + \cdots + a_{2k_2}) \\ &= \sum_{i=1}^{k_1} \sum_{j=1}^{k_2} a_{1i} a_{2j} \end{aligned}$$

Por el Teorema 7.5,

$$a_{1i} a_{2j} = \begin{cases} 0 & \text{, si } a_{1i} \neq a_{2j} \\ a_{1i} & \text{, si } a_{1i} = a_{2j}. \end{cases}$$

Consecuentemente

$$h(x_1 x_2) = M_1 \cap M_2 \tag{14}$$

Seguidamente supongamos que $x_2 = \bar{x}_1$. Entonces:

$$\begin{aligned} M_1 \cup M_2 &= h(x_1 + x_2) && \text{por (13)} \\ &= h(x_1 + \bar{x}_1) && \text{por la hipótesis} \\ &= h(1) && \text{por B.6} \\ &= M && \text{por (11)} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
M_1 \cap M_2 &= h(x_1 x_2) && \text{por (14)}\\
&= h(x_1 \bar{x}_1) && \text{por la hipótesis}\\
&= h(0) && \text{por B.5}\\
&= \varnothing && \text{por (12)}
\end{aligned}$$

En consecuencia, $M_2 = M \setminus M_1$ y

$$h(\bar{x}_1) = M \setminus M_1 \tag{15}$$

Supongamos ahora que $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$. Para fijar ideas sea $x_1 = 0$ (el caso $x_2 = 0$ se analiza de forma análoga); entonces:

$$\begin{aligned}
h(0 + x_2) &= h(x_2) && \text{por B.7}\\
&= M_2 && \text{por la definición de } h\\
&= \varnothing \cup M_2 && \text{por B.7}\\
&= h(0) + h(x_2) && \text{por (12)} \qquad (16)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
h(0 \cdot x_2) &= h(0) && \text{por el Lema 6.4}\\
&= \varnothing && \text{por (12)}\\
&= \varnothing \cap M_2 && \text{por el Lema 6.4}\\
&= h(0) \cap h(x_2) && \text{por (12)} \qquad (17)
\end{aligned}$$

En virtud de las ecuaciones: (11), (12), (13), (14), (15), (16) y (17), h es un isomorfismo entre $\langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ y el álgebra de Boole $\langle \mathcal{P}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B})), \cup, \cap, ', \varnothing, \mathrm{Atm}(\mathbf{B})\rangle$. □

Corolario 7.11. *Sea* $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ *un álgebra de Boole finita. Son ciertas las siguientes afirmaciones:*

1. $\mathrm{Car}(B) = 2^{\mathrm{Car}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B}))}$.
2. *Si* $\mathbf{A}$ *es un álgebra de Boole y* $\mathrm{Car}(A) = \mathrm{Car}(B)$*, entonces* $\mathbf{A}$ *es isomorfa a* $\mathbf{B}$.

Demostración. Por el Teorema 7.10 sabemos que el álgebra de Boole finita $\mathbf{B}$ es isomorfa al álgebra de Boole $\langle \mathcal{P}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B})), \cup, \cap, ', \varnothing, \mathrm{Atm}(\mathbf{B})\rangle$. En particular se tiene de ello que B y $\mathcal{P}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B}))$ son biyectivos, luego $\mathrm{Car}(B) = 2^{\mathrm{Car}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B}))}$ y tenemos la demostración de la afirmación 1). Si $\mathbf{A}$ es un álgebra de Boole tal que $\mathrm{Car}(A) = \mathrm{Car}(B)$, entonces $2^{\mathrm{Car}(\mathrm{Atm}(\mathbf{A}))} = 2^{\mathrm{Car}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B}))}$ por lo que $\mathrm{Car}(\mathrm{Atm}(\mathbf{A})) = \mathrm{Car}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B}))$. Por tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &\cong \langle \mathcal{P}(\mathrm{Atm}(\mathbf{A})), \cup, \cap, ', \varnothing, \mathrm{Atm}(\mathbf{A})\rangle\\
&\cong \langle \mathcal{P}(\mathrm{Atm}(\mathbf{B})), \cup, \cap, ', \varnothing, \mathrm{Atm}(\mathbf{B})\rangle\\
&\cong \mathbf{B}
\end{aligned}$$

y ésta es la demostración de la afirmación 2). □

8. Expresiones Booleanas

Definición 8.1. Un *lenguaje booleano* consta de los siguientes símbolos:

- los *símbolos de variable* que representamos con las últimas letras del alfabeto latino, subindicándolas si fuese preciso: x, y, z, x_1, x_2, x_3,... etc.
- símbolos booleanos: $\oplus$, $\odot$, $\ominus$, $\top$ y $\bot$
- símbolos auxiliares:) y (

y llamamos *expresión boleana* a cada sucesión finita no vacía de símbolos del lenguaje booleano.

Un ejemplo de expresión es la siguiente sucesión $x\ominus\oplus y)zx\odot$ y otro es $((x\oplus y)\odot(\ominus z))$. El lector reconocerá que el segundo ejemplo posee "una coherencia" o "equilibrio" que no parece tener el primero. En lo que sigue distinguiremos entre expresiones para definir las llamadas "expresiones booleanas".

Definición 8.2. Definimos las *expresiones booleanas bien formadas* o *fórmulas booleanas* como sigue:

- todo símbolo de variable es expresión booleana,
- $\top$ y $\bot$ son expresiones booleanas,
- las expresiones: $(a\oplus b)$, $(a\odot b)$ y $(\ominus a)$ son expresiones booleanas, siempre que a y b sean expresiones booleanas
- y convenimos en que no hay otras expresiones booleanas distintas a las antes mencionadas.

A veces escribimos la expresión booleana a como $a(x_1,\dots,x_k)$ para indicar que los símbolos de variable que aparecen en a están entre los símbolos $x_1,\dots,x_k$ y no es necesario que todas ellos ocurran en a. Llamamos *literal* a los elementos del conjunto

$$X\cup\{(\ominus x): x\in X\}$$

donde X representa al conjunto de símbolos de variable.

Observación 8.1. Con la intención de abreviar, y en función de las definiciones definiciones 8.4 y 8.5, a veces escribiremos la expresión booleana $(a\oplus b)$ (resp. $(a\odot b)$, $(\ominus a)$, $\top$, $\bot$) como $a+b$ (resp. $a\cdot b$, $\bar{a}$, $\top$, $\bot$) y volveremos a la notación rigurosa siempre que la situación lo precise.

Definición 8.3. Dadas expresiones booleanas a y b, $a\equiv b$ es la abreviatura de "a y b tienen la misma escritura".

Definición 8.4. Dada un álgebra de Boole $\mathbf{B}$, una expresión booleana $a(x_1,\dots,x_k)$ y un elemento $\langle e_1,\dots,e_k\rangle\in B^k$, $a(e_1,\dots,e_k)$ se define de la siguiente forma:

$$a(e_1,\dots,e_k)=\begin{cases} e_i & \text{, si } 1\le i\le k \text{ y } a\equiv x_i\\ b(e_1,\dots,e_k)+c(e_1,\dots,e_k) & \text{, si } a\equiv(b\oplus c)\\ b(e_1,\dots,e_k)\cdot c(e_1,\dots,e_k) & \text{, si } a\equiv(b\odot c)\\ \overline{b(e_1,\dots,e_k)} & \text{, si } a\equiv(\ominus b)\\ 0 & \text{, si } a\equiv\bot\\ 1 & \text{, si } a\equiv\top \end{cases}$$

Ejemplo 8.1. Consideremos las expresión booleana:

$$\begin{aligned}
m_1(x,y,z) &\equiv \bar{x}\bar{y}z\\
e_1(x,y,z) &\equiv \bar{x}\bar{y}\\
h_1(x,y,z) &\equiv \bar{x}\\
k_1(x,y,z) &\equiv \bar{y}\\
g_1(x,y,z) &\equiv z\\
m_2(x,y,z) &\equiv \bar{x}y\bar{z}\\
m_4(x,y,z) &\equiv x\bar{y}\bar{z}\\
m_7(x,y,z) &\equiv xyz\\
s(x,y,z) &\equiv \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xyz\\
a(x,y,z) &\equiv yz + xz + xy
\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
s(0,0,1) &= m_1(0,0,1) + m_2(0,0,1) + m_4(0,0,1) + m_7(0,0,1)\\
&= (e_1(0,0,1)\cdot g_1(0,0,1)) + m_2(0,0,1) + m_4(0,0,1) + m_7(0,0,1)\\
&= (h_1(0,0,1)\cdot k_1(0,0,1)\cdot g_1(0,0,1)) + m_2(0,0,1) + m_4(0,0,1) + m_7(0,0,1)\\
&= (\overline{x(0,0,1)}\cdot\overline{y(0,0,1)}\cdot z(0,0,1)) + m_2(0,0,1) + m_4(0,0,1) + m_7(0,0,1)\\
&= (\bar{0}\cdot\bar{0}\cdot 1) + m_2(0,0,1) + m_4(0,0,1) + m_7(0,0,1)\\
&= (1\cdot 1\cdot 1) + m_2(0,0,1) + m_4(0,0,1) + m_7(0,0,1)\\
&= 1 + m_2(0,0,1) + m_4(0,0,1) + m_7(0,0,1)\\
&= 1
\end{aligned}$$

y los siguientes ejemplos:

x	y	z	$s(x,y,z)$	$a(x,y,z)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Definición 8.5. Dada un álgebra de Boole $\mathbf{B}$ y una expresión booleana $a(x_1,\dots,x_k)$, definimos la función booleana $f_a\colon B^k \longrightarrow B$ como sigue:

$$f_a(e_1,\dots,e_k) = a(e_1,\dots,e_k)$$

Diremos que las expresiones booleanas $a(x_1,\dots,x_k)$ y $b(x_1,\dots,x_k)$ son *iguales* (o *equivalentes*), en símbolos $a(x_1,\dots,x_k) = b(x_1,\dots,x_k)$ o simplemente $a = b$, sii, por def., $\mathbf{B} = \mathbf{B_2}$ y $f_a = f_b$.

Observación 8.2. En un abuso de notación, si el contexto ayuda a evitar el error, está permitido confundir $f_a(x_1,\dots,x_k)$ con $a(x_1,\dots,x_k)$, lo que en el fondo es "confundir" función con expresión.

Ejemplo 8.2. Si $s(x,y,z)$ y $a(x,y,z)$ son los dados en el ejemplo 8.1, sabemos que $s(x,y,z) \neq a(x,y,z)$. Sin embargo, si $e_1(x,y) \equiv x + xy$ y $e_2(x,y) = x$, entonces es fácil comprobar que $e_1 = e_2$. En efecto:

x	y	$e_1(x,y)$	$e_2(x,y)$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	1	1
1	1	1	1

Ejemplo 8.3. Dadas expresiones booleanas a y b, puede ocurrir que $a \not\equiv b$ y sin embargo $a = b$. Por ejemplo, sea $a \equiv (\ominus(x_1 \oplus x_2))$ y $b \equiv ((\ominus x_1) \odot (\ominus x_2))$.

Teorema 8.1. *La igualdad, =, entre expresiones boolenas tiene las propiedades que recogen las tablas de la Figura 7 y la Figura 8.*

leyes conmutativas	1. $x + y = y + z$	1'. $xy = yx$
leyes asociativas	2. $x + (y + z) = (x + y) + z$	2'. $x(yz) = (xy)z$
leyes distributivas	3. $x(y + z) = xy + xz$	3'. $x + yz = (x + y)(x + z)$
leyes de identidad	4. $x + 0 = x = 0 + x$	4'. $x1 = x = 1x$
leyes del complemento	5. $x + \bar{x} = 1$	5'. $x\bar{x} = 0$

Figura 7: Propiedades básicas de la igualdad entre expresiones.

leyes de involución	1. y 1'. $\bar{\bar{x}} = x$	
leyes de idempotencia	2. $x + x = x$	2'. $xx = x$
leyes de anulación	3. $x + 1 = 1$	3'. $x0 = 0$
leyes de absorción	4. $x + xy = x$	4'. $x(x + y) = x$
leyes de De Morgan	5. $\overline{x + y} = \bar{x}\bar{y}$	5'. $\overline{xy} = \bar{x} + \bar{y}$
leyes de simplificación	6. $xy + \bar{x}y = y$	6'. $(x + y)(\bar{x} + y) = y$

Figura 8: Propiedades adicionales de la igualdad entre expresiones.

9. Circuitos Combinacionales

Los equipos digitales actuales están compuestos de cajas llamadas *circuitos combinacionales*, también llamadas *circuitos de conmutación* o *lógicos*. Las circuitos combinacionales, en su apariencia de cajas negras, tienen un número fijo de entradas y de salidas. Cada entrada, igual que cada salida, solamente puede aceptar/entregar valores escogidos en el conjunto $\{0, 1\}$, de ahí que a veces se diga: *circuitos combinacionales binarios*.

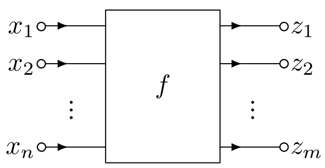


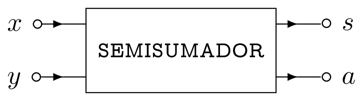
Figura 9: Circuito combinacional realización de $f\colon B_2^n \longrightarrow B_2^m$.

Ejemplo 9.1.

1. La Figura 11(a) es la representación de la *puerta* OR (gráfica y tabular) que siempre entrega salida 1 excepto cuando ambas entradas son iguales a 0. Las figuras 11(b) y 11(c) describen respectivamente las *puertas* AND y NOT, tabular y gráficamente.

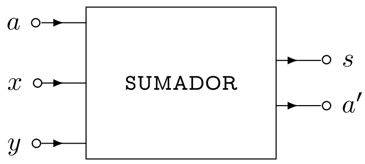
2. La Figura 10(a) es la representación del circuito combinacional llamada *semisumador binario* cuyo propósito es sumar dos dígitos binarios. Los dos dígitos son aportados como entradas x e y, generándose la suma s y un dígito de acarreo a. Todo ello de acuerdo con las siguientes reglas binarias: $0 + 0 = 0$ con acarreo 0, $1 + 0 = 1 = 0 + 1$ con acarreo 0 y $1 + 1 = 0$ con acarreo 1.

3. La Figura 10(b) muestra la representación esquemática y la tabla de un circuito combinacional llamado *sumador binario*, cuyo propósito es sumar dos enteros de cualquier magnitud expresados en binario. Empieza por los dígitos menos significativos de cada entero tomados como x e y; en el



x	y	s	a
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

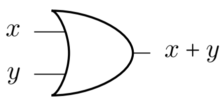
(a) SEMISUMADOR



a	x	y	s	a’
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

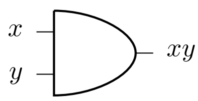
(b) SUMADOR

Figura 10: semisumador binario y sumador binario.



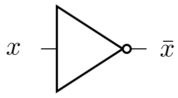
x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

(a) OR



x	y	xy
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

(b) AND



x	$\bar{x}$
0	1
1	0

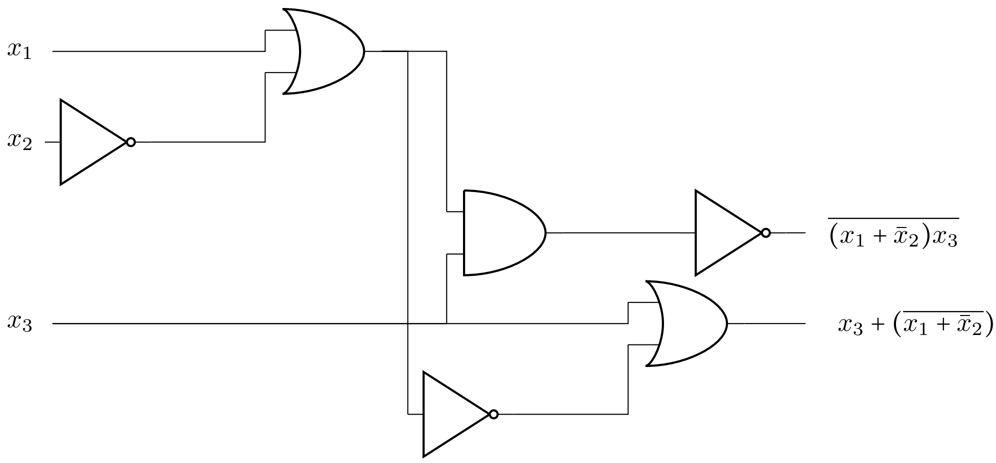
(c) NOT

Figura 11: Puertas lógicas: OR, AND y NOT con sus respectivas tablas.

$f\colon B_2^3 \longrightarrow B_2^2$
$f(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2)$, donde:
$z_1 = x_3 + (\overline{x_1 + \bar{x}_2})$
$z_2 = \overline{(x_1 + \bar{x}_2)x_3}$

x_1	x_2	x_3	z_1	z_2
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	0

(a) Ejemplo de func. booleana, con las expresiones de sus dos componentes y tabla



(b) Ejemplo de circuito combinacional que la realiza

Figura 12: Una función booleana y un circuito combinacional que la realiza.

paso $t = 0$ el acarreo es 0. En el paso t el acarreo es el generado en el paso $t - 1$. La salida s es la suma de x, y y a; la salida a' es el acarreo de esta suma. Por tanto, a' en el paso t es a en el paso $t + 1$.

Existen unas reglas precisas que organizan la combinación de circuitos combinacionales en circuitos más complejos.

Está claro que existe una relación entre circuitos combinacionales y funciones booleanas sobre $\mathbf{B_2}$. Podemos esquematizarla como sigue:

1. Supongamos que recibimos un circuito combinacional con su aspecto típico de "cucaracha" y podemos conocer, sin ambigüedad, cuales son las "patas" de entrada y salida. Determinar una función booleana de la que dicho circuito es realización física, resulta como consecuencia de aplicar todas las posibilidades de entrada de corriente y hacer lectura de las salidas en cada aplicación–prueba. Esto es, en realidad, construir la tabla de la función que buscamos y, en cierto modo, "tenerla". Por cierto, que la mencionada función boolena, puesta en relación de esa manera con el circuito combinacional, es denominada *función de transmisión* de dicho circuito combinacional.
2. El caso inverso es contar con una función de transmisión dada por su tabla, y necesitar construir un circuito combinacional que la realice físicamente.

El primer paso es medianamente fructífero tal cual se ha planteado, mientras que el segundo queda en suspenso pues ¿cómo disponer las puertas lógicas para obtener el circuito combinacional buscado? Es aquí donde interviene necesariamente el álgebra.

En efecto, tanto si tenemos el circuito combinacional y obtenemos la función como si, sencillamente, tenemos la función; para poder copiar/realizar el circuito combinacional es preciso conocer una expresión boolena que represente a la función. Cuando se tiene la expresión es obligado dar dos pasos:

1. Construir una "forma normal canónica" de dicha expresión.
2. Buscar la forma más económica de representar dicha expresión, lo cual nos servirá para diseñar el circuito combinacional que la respresenta.

Con el fin de completar el análisis deberíamos demostrar que, para plasmar en un circuito combinacional cada función basta con las puertas: OR, AND y NOT; más aún deberíamos dar ejemplos varios de conjuntos suficientes de puertas y caracterizaciones de conjuntos de puertas que son suficientes. El objeto de los siguientes apartados es la realización óptima del anterior plan de trabajo.

10. Formas Normales de Expresiones Booleanas

Definición 10.1. Dada un álgebra de Boole $\mathbf{B}$, una *función de conmutación* de n variables $x_1, \ldots, x_n$ es cualquier función $f\colon B^n \longrightarrow B$. Un *mintérmino* (de dimensión n) es cualquier función de conmutación $m(x_1, \ldots, x_n) = z_1 \cdots z_n$, donde para todo $1 \le i \le n$, $z_i = x_i$ o $z_i = \bar{x}_i$. El concepto de *maxtérmino* es el dual del del mintérmino y lo representamos por $M(x_1, \ldots, x_n)$. Una función de conmutación en las variables $x_1, \ldots, x_n$ está expresada en *forma normal disyuntiva* —o también como *suma canónica de productos*— si está expresada como una suma de mintérminos $m_i(x_1, \ldots, x_n)$. El concepto de *forma normal conjuntiva* o *producto canónico de sumas*, es el concepto dual de forma normal disyuntiva. Para abreviar haremos *minterm* (resp. *maxterm*) sinónimo de *mintérmino* (resp. *maxtérmino*).

Teorema 10.1. *Toda función de conmutación de n variables puede ser expresada en forma normal disyuntiva y en forma normal conjuntiva.*

Algoritmo 10.1 (formas normales sobre tabla)**.** Dada una función de transmisión $f\colon B_2^n \longrightarrow B_2$ por su tabla, podemos determinar su forma normal disyuntiva (resp. forma normal conjuntiva) de la siguiente forma:

1. Si la columna etiquetada con $f(x_1,\dots,x_n)$ no contiene ningún 1 (resp. 0) entonces la forma normal disyuntiva (resp. forma normal conjuntiva) de f es $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ (resp. $f(x_1,\dots,x_n) = 1$). En otro caso:

2. Si la columna $f(x_1,\dots,x_n)$ contiene 1 en exactamente las filas: $\langle \delta_{k_1 1},\dots,\delta_{k_1 n}\rangle,\dots,\langle \delta_{k_m 1},\dots,\delta_{k_m n}\rangle$ entonces la forma normal disyuntiva de f viene dada por:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{m}(\prod_{j=1}^{n} x_{k_i j})$$

   donde para todo $1 \le i \le m$ y para todo $1 \le j \le n$:

$$x_{k_i j} = \begin{cases} \bar{x}_j, \text{ si } \delta_{k_i j} = 0 \\ x_j, \text{ si } \delta_{k_i j} = 1 \end{cases}$$

3. Si la columna $f(x_1,\dots,x_n)$ contiene 0 en exactamente las filas: $\langle \delta_{k_1 1},\dots,\delta_{k_1 n}\rangle,\dots,\langle \delta_{k_m 1},\dots,\delta_{k_m n}\rangle$ entonces la forma normal conjuntiva de f viene dada por:

$$f(x_1,\dots,x_n) = \prod_{i=1}^{m}(\sum_{j=1}^{n} x_{k_i j})$$

   donde para todo $1 \le i \le m$ y para todo $1 \le j \le n$:

$$x_{k_i j} = \begin{cases} x_j, \text{ si } \delta_{k_i j} = 0 \\ \bar{x}_j, \text{ si } \delta_{k_i j} = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 10.1. Consideremos la función $s\colon B_2^3 \longrightarrow B_2$ que constituye la primera componente del sumador en la Figura 10(b). En la columna s de la tabla aparece el 1, concretamente en las filas: 001, 010, 100 y 111. Por tanto, según el Algoritmo 10.1,

$$s(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$$

Por otra parte, en la columna a' aparece el valor 0, concretamente en las filas: 000, 011, 101 y 110. Por lo que, según el Algoritmo 10.1,

$$a'(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3)(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3)$$

Algoritmo 10.2 (formas normales sobre expresiones)**.** Supongamos que nos es dada una función de transmisión $f\colon B_2^n \longrightarrow B_2$ por una expresión booleana $a(x_1,\dots,x)$, es decir $f = f_a$, y que queremos expresarla en forma normal disyuntiva (resp. forma normal conjuntiva). Entonces:

1. Usamos las leyes de las tablas que aparecen en la Figura 7 y la Figura 8 para expresar f como 0 (resp. 1) o como una suma (resp. un producto) de productos (resp. sumas) de la forma $z_{i_1}\cdots z_{i_k}$ (resp. $z_{i_1}+\cdots+z_{i_k}$), donde $i_1<\cdots<i_k$ y para cada $1\le j\le k$, existe x_j tal que $z_{i_j}\equiv x_j$ o $z_{i_j}\equiv \bar{x}_j$. Si $f(x_1,\dots,x_n) = 0$ (resp. $f(x_1,\dots,x_n) = 1$), está en la forma deseada. En otro caso:

2. Si cada producto (resp. suma) es un minterm (resp. maxterm), entonces $f(x_1,\dots,x_n)$ está en la forma deseada. En otro caso:

3. De la expresión acabada de obtener, seleccionar un producto (resp. suma) de la forma $z_{i_1}\cdots z_{i_k}$ (resp. $z_{i_1}+\cdots+z_{i_k}$) tal que $k < n$ y tal que para cierto h, ni x_{i_h} ni $\bar{x}_{i_h}$ aparece en él (resp. ella); reemplazarlo por:

$$z_{i_1}\cdots z_{i_k}x_{i_h} + z_{i_1}\cdots z_{i_k}\bar{x}_{i_h}$$

(resp. reemplazarla por:

$$(z_{i_1} + \cdots + z_{i_k} + x_{i_h})(z_{i_1} + \cdots + z_{i_k} + \bar{x}_{i_h})$$

) lo cual es lícito en virtud de la leyes de conmutatividad, distributividad y del complemento.[1] Seguidamente reordenamos los factores (resp. sumandos) en los nuevos sumandos (resp. factores) por sus subíndice de menor a mayor y suprimimos los productos (resp. sumandos) duplicados. Seguidamente volvemos al paso 2.

Ejemplo 10.2. Supongamos que tenemos la función

$$f(x_1, x_2, x_3) = \overline{(x_1 + \bar{x}_2)x_3}$$

Según el Algoritmo 10.2 tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{(x_1 + \bar{x}_2)x_3} \\
&= \overline{(x_1 + \bar{x}_2)} + \bar{x}_3 \\
&= (\bar{x}_1 x_2) + \bar{x}_3 \\
&= (\bar{x}_1 x_2) \cdot 1 + \bar{x}_3 \\
&= (\bar{x}_1 x_2) \cdot (x_3 + \bar{x}_3) + \bar{x}_3 \\
&= \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \\
&= \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 x_2 + \bar{x}_3 \bar{x}_2 \\
&= \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 x_2 x_1 + \bar{x}_3 x_2 \bar{x}_1 + \bar{x}_3 \bar{x}_2 x_1 + \bar{x}_3 \bar{x}_2 \bar{x}_1 \\
&= \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \\
&= \bar{x}_1 x_2 x_3 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 x_2 \bar{x}_3 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3
\end{aligned}$$

Y según la segunda versión del Algoritmo 10.2, tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{(x_1 + \bar{x}_2)x_3} \\
&= \overline{x_1 x_3 + \bar{x}_2 x_3} \\
&= \overline{(x_1 x_3)}\ \overline{(\bar{x}_2 x_3)} \\
&= (\bar{x}_1 + \bar{x}_3)(x_2 + \bar{x}_3) \\
&= (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \\
&= (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(x_1 + x_2 + \bar{x}_3)
\end{aligned}$$

Por supuesto que cuando se tiene cualquiera de las dos formas normales anteriores, la tabla se puede construir facilmente por simple inspección. Cuando tengamos una función expresada por una expresión booleana, es en general altamente ineficiente llegar a su forma normal construyendo previamente la tabla y pasando por ella. La razón es que necesitamos unas pocas filas de la misma, pero para saber cuáles son, necesitamos hacer todas las filas; y puede que sean muchas más las despreciadas que las aprovechadas. Además el trabajo de hacer la tabla crece exponencialmente con el número de variables.

Teorema 10.2. *La función Ξ que a cada expresión booleana $a(x_1, \ldots, x_k)$ le asocia la función de transmisión $f_a\colon B_2^k \longrightarrow B_2$ es una función sobreyectiva no inyectiva entre expresiones y funciones de transmisión.*

[1] Aquí se usa esencialmente las propiedades $y(x + \bar{x}) = y$ e $y + (x\bar{x}) = y$ (cfr. fig. 7).

Observación 10.1. Dada una función boolena f, el Teorema 10.2 nos invita realmente a seleccionar una entre todas las expresiones booleanas que por Ξ se aplican en f. La selección debe ser hecha con cuidado pues esa expresión booleana puede servir para producir un circuito, con las consiguientes necesidades de producción y de abaratamiento de la misma.

La notación binaria para los minterm se alcanza sustituyendo cada variable no complementada (literal positivo) por 1 y por 0 las complementadas. De esta manera se obtiene un número expresado en binario que representa unívocamente al minterm. Este número es normalmente convertido en decimal; con él designamos al minterm. Cuando se tiene la forma normal disyuntiva de una expresión booleana, es decir está expresada como suma de minterm, la expresión se representa por el símbolo $\sum$ seguido de la enumeración entre paréntesis y separados por comas de los minterm expresados en decimal y en el orden natural.

A esta representación de una función de conmutación le llamaremos *representación normal disyuntiva decimal* y tendrá la apariencia

$$\sum(n_0, \dots, n_k)$$

Alguno autores prefieren escribir $\sum m(n_0, \dots, n_k)$. La *representación normal conjuntiva decimal* se define por dualidad y es respresentada mediante

$$\prod(n_0, \dots, n_k)$$

o en analogía a lo anterior $\prod M(n_0, \dots, n_k)$.

Ejemplo 10.3. Sea cualquier expresión booleana que expresada en forma normal disyuntiva tiene la forma:

$$x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

Los equivalentes binarios de los minterm en el orden dado son: 101, 100, 011, 001 y 000. Los equivalentes decimales son: 5, 4, 3, 1, 0. Así, la notación alternativa para la expresión booleana dada es $\sum(0,1,3,4,5)$. Por otro lado, si la expresión se indica como

$$f(a,b,c,d) = \sum(0,2,6,7,8,9,13,15),$$

los equivalentes binarios apra los números decimales dados se escriben como números de cuatro dígitos, ya que f es una expresión de cuatro variables. En este ejemplo resulta: 0000, 0010, 0110, 0111, 1000, 1001, 1101 y 1111. Los minterm correspondientes a estos números en binario son: $\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, $\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$, $\bar{a}bc\bar{d}$, $\bar{a}bcd$, $a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, $a\bar{b}\bar{c}d$, $ab\bar{c}d$ y $abcd$. De esta forma, la expresión booleana dada es:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}bcd + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + ab\bar{c}d + abcd$$

11. Mapas de Karnaugh

Supongamos que hemos analizado un dispositivo y que como resultado hemos obtenido diversas funciones de conmutación. Si el interés lo merece y hemos pensado reproducir el dispositivo, máxime si es en una tirada medianamente extensa, es necesario obtimizar el empleo de puertas lógicas. Las razones para ello no son sólo económicas sino también de tamaño y consumo, sin perjuicio de que puedan ser sumadas otras.

Definición 11.1. Una expresión boolena de suma de productos (resp. producto de sumas), se considera la *expresión mínima* sii, por def.:

1. No existe otra expresión equivalente que incluya menos productos (resp. sumas).

2. No hay otra expresión equivalente que conste del mismo número de productos (resp. sumas), pero con un menor número de literales.

Un caso práctico podría ser el que sigue. Supongamos que conocemos una función de conmutación $a(x_1, x_2, x_3)$ por $f_a\colon B_2^3 \longrightarrow B_2$ que tiene la siguiente descripción:

x_1	x_2	x_3	$f_a(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Ahora es fácil componer su expresión en forma canónica disyuntiva (como suma de minterm), dicha expresión es:

$$f_a(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3$$

La tentativa inicial es simplificar con arrojo y a ojo. Veamos:

$$\begin{aligned}
f_a(x_1, x_2, x_3) &= \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2\bar{x}_3 \\
&= \bar{x}_1x_2(x_3 + \bar{x}_3) + x_1\bar{x}_3(x_2 + \bar{x}_2) + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 && \text{por B.4} \\
&= \bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 && \text{por B.6 y B.8} \\
&= \bar{x}_1x_2 + (x_1 + \bar{x}_1\bar{x}_2)\bar{x}_3 && \text{por B.4} \\
&= \bar{x}_1x_2 + (x_1 + \bar{x}_2)\bar{x}_3 && \text{por el Teorema 6.12} \\
&= \bar{x}_1x_2 + (\overline{\bar{x}_1x_2})\bar{x}_3 && \text{por el Teorema 6.13 y el Lema 6.9} \\
&= \bar{x}_1x_2 + \bar{x}_3 && \text{por el Teorema 6.12}
\end{aligned}$$

Esta última expresión parece irreducible, y lo es, pero lo que no parece viable es pensar en repetir siempre este trabajo, toda vez que las funciones serán más y más complejas.

La iniciativa inmediata ha sido la de emplear algún método gráfico que facilite el hallazgo de vías de simplificación. Concretamente en este caso podemos pensar en lo representado en la figura: que invita a

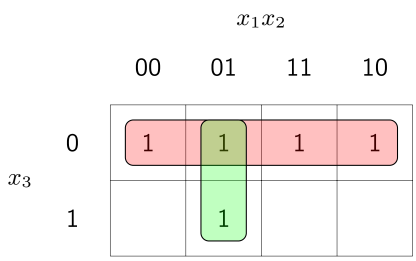


Figura 13: Esquema gráfico de simplificación.

agrupar todos los términos en el fondo rosa y lo que ellos tiene de común es $\bar{x}_3$ y los términos que tienen fondo en verde, que lo que tienen en común es $\bar{x}_1x_2$. Así es resultado total será la suma de los resultados parciales, es decir, $\bar{x}_1x_2 + \bar{x}_3$.

El esquema recogido en la figura 13 es un ejemplo de lo conocido como mapa de Karnaugh.

El método del *mapa de Karnaugh* es un método gráfico para simplificar expresiones booleanas que implican seis o menos variables expresadas en la forma de suma de productos y que representan circuitos combinacionales. La simplificación requiere la identificación de términos en la expresión que pueden combinarse. Los términos que es posible combinar se encuentran fácilmente a partir de mapas de Karnaugh.

Un mapa de Karnaugh (*mapa K*) es un diagrama que consiste en cuadrados. Si la expresión booleana contiene n variables, el mapa K conrrespondiente tendrá 2^n cuadrados, cada uno de los cuales representa un minterm. Se coloca un 1 en el cuadrado que representa un minterm si éste se encuentra presente en la expresión dada; se pone un 0 (o nada) en caso contrario. La expresión booleana simplificada que representa la salida se obtiene entonces al combinar o al agrupar cuadrados adyacentes que contienen el número 1.

Los cuadrados adyacentes respresentan minterm que difieren sólo por un literal. Para identificar celdas (cuadrados) adyacentes en el mapa K con el fin de realizar el agrupamiento, deben tenerse en cuenta los siguientes puntos:

1. El número de celdas en un grupo debe ser una potencia de 2, esto es, 2, 4, 8, 16, etc.
2. Una celda que contenga un 1 puede incluirse en cualquier número de grupos.
3. Para minimizar la expresión al grado máximo posible, deben preferirse los grupos más grandes que puedan formarse. Es decir, no debe considerarse un grupo de dos celdas siempre que estas celdas pueden incluirse en algún grupo de cuatro celdas, etc.
4. Existen celdas adyacentes no sólo dentro del interior del mapa K, sino también en los extremos de cada columna y de cada renglón; es decir, la celda superior en cualquier columna es adyacente a la celda inferior en la misma columna. La celda más a la izquierda en cualquier renglón es adyacente a la celda más a la derecha en ese renglón.[2]

Los mapas de Karnaugh para 2 (resp. 3, 4) variables se indican el la figura 14(b) (resp. figura 14(c), figura 14(e)).

Al minimizar las expresiones booleanas mediante el método de los mapas K, conviene estar familiarizado con patrones de celdas adyacentes y grupos de números 1, que se encerrarán mediante lazos. Todos los patrones básicos son indicados seguidamente en las figuras: 15, 16, 17, 18 y 19.

El procedimiento para la minimización de expresiones booleanas utilizando mapas K puede ser sintetizado como sigue:

1. Un mapa K se construye colocando primero números 1 en aquellos cuadrados correspondientes a los minterm presente en la expresión y números 0 en los restantes.
2. Todos aquellos 1 que no pueden combinarse con cualesquiera otros 1 se identifican y se enlazan.
3. Todos aquellos 1 que se combinan en un lazo de dos pero no forman parte de un lazo de cuatro, se enlazan.
4. Todos aquellos 1 que se combinan en un lazo de cuatro pero no forman parte de un lazo de ocho, se enlazan.
5. Un lazo de 2 (resp. 4, 8) eliminará de la expresión booleana simplificada 1 (resp. 2, 3).
6. El proceso se interrumpe cuando se han cubierto así todos los 1.

[2]Esto significa que el cuadrado que representa el mapa K ha sido representado plano, pero en realidad, al efecto de la adyacencia, debe ser considerado una superifice tórica.

		x_2	
		0	1
x_1	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 x_2$
	1	$x_1\bar{x}_2$	$x_1 x_2$

(a) Mapa K para dos variables

		x_1	
		0	1
x_2	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2$	$x_1\bar{x}_2$
	1	$\bar{x}_1 x_2$	$x_1 x_2$

(b) Mapa K para dos variables

		x_2x_3			
		00	01	11	10
x_1	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$
	1	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$

(c) Mapa K para tres variables

		x_1x_2			
		00	01	11	10
x_3	0	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$
	1	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$

(d) Mapa K para tres variables

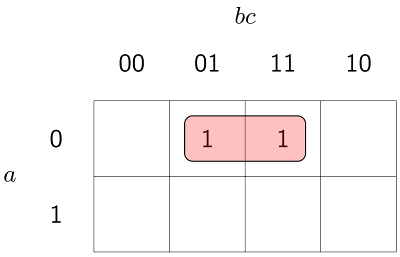
		cd			
		00	01	11	10
ab	00	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$
	01	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$\bar{a}bcd$	$\bar{a}bc\bar{d}$
	11	$ab\bar{c}\bar{d}$	$ab\bar{c}d$	$abcd$	$abc\bar{d}$
	10	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}d$	$a\bar{b}cd$	$a\bar{b}c\bar{d}$

(e) Mapa K para cuatro variables

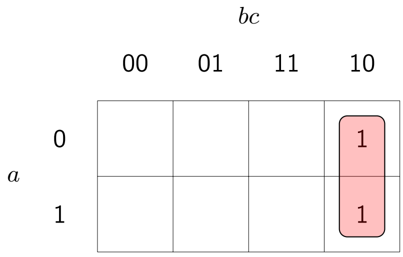
		ab			
		00	01	11	10
cd	00	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}$	$\bar{a}b\bar{c}\bar{d}$	$ab\bar{c}\bar{d}$	$a\bar{b}\bar{c}\bar{d}$
	01	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$ab\bar{c}d$	$a\bar{b}\bar{c}d$
	11	$\bar{a}\bar{b}cd$	$\bar{a}bcd$	$abcd$	$a\bar{b}cd$
	10	$\bar{a}\bar{b}c\bar{d}$	$\bar{a}bc\bar{d}$	$abc\bar{d}$	$a\bar{b}c\bar{d}$

(f) Mapa K para cuatro variables

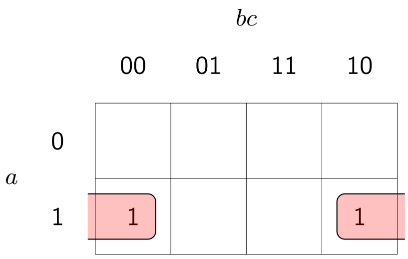
Figura 14: Mapas K para distintas variables



(a)

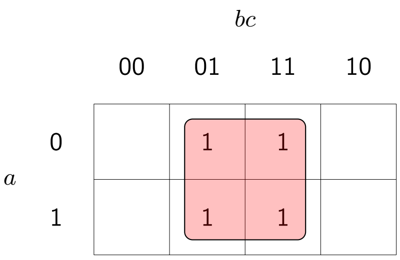


(b)

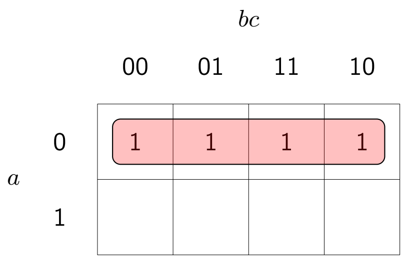


(c)

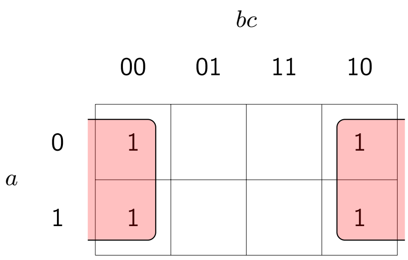
Figura 15: Todas las formas posibles de lazos simples de dos celdas para tres variables.



(a)



(b)



(c)

Figura 16: Todas las formas posibles de lazos simples de cuatro celdas para tres variables.

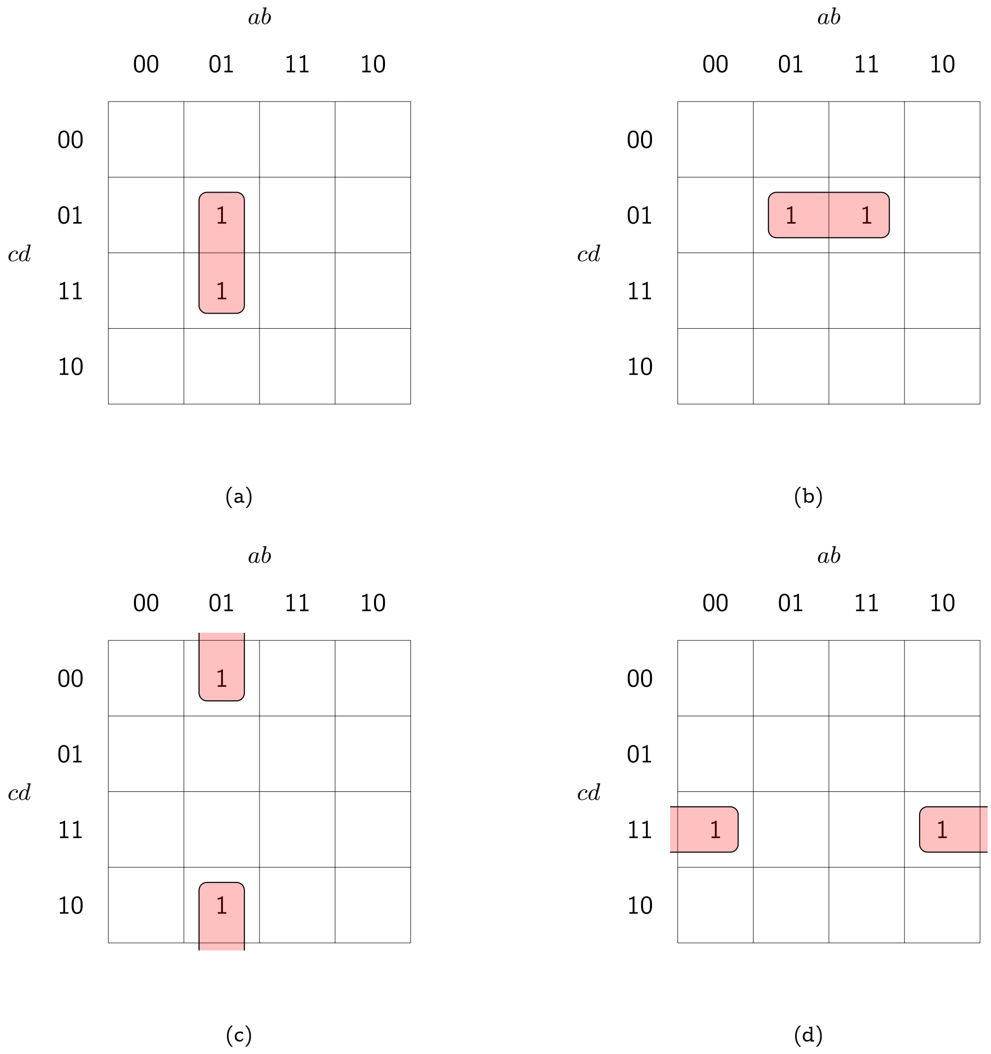


Figura 17: Todas las formas posibles de lazos simples de dos celdas para cuatro variables.

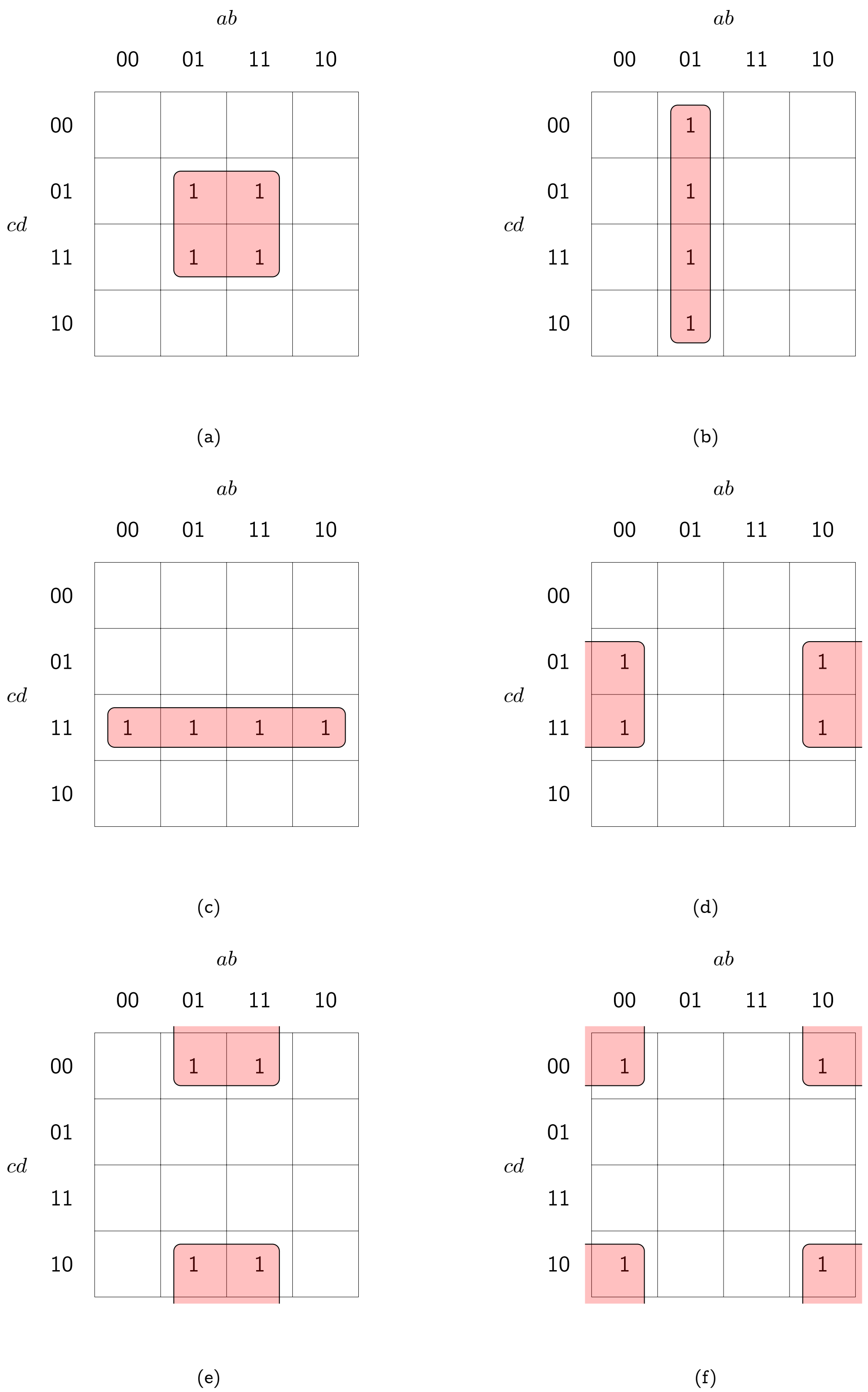


Figura 18: Todas las formas posibles de lazos simples de cuatro celdas para cuatro variables.

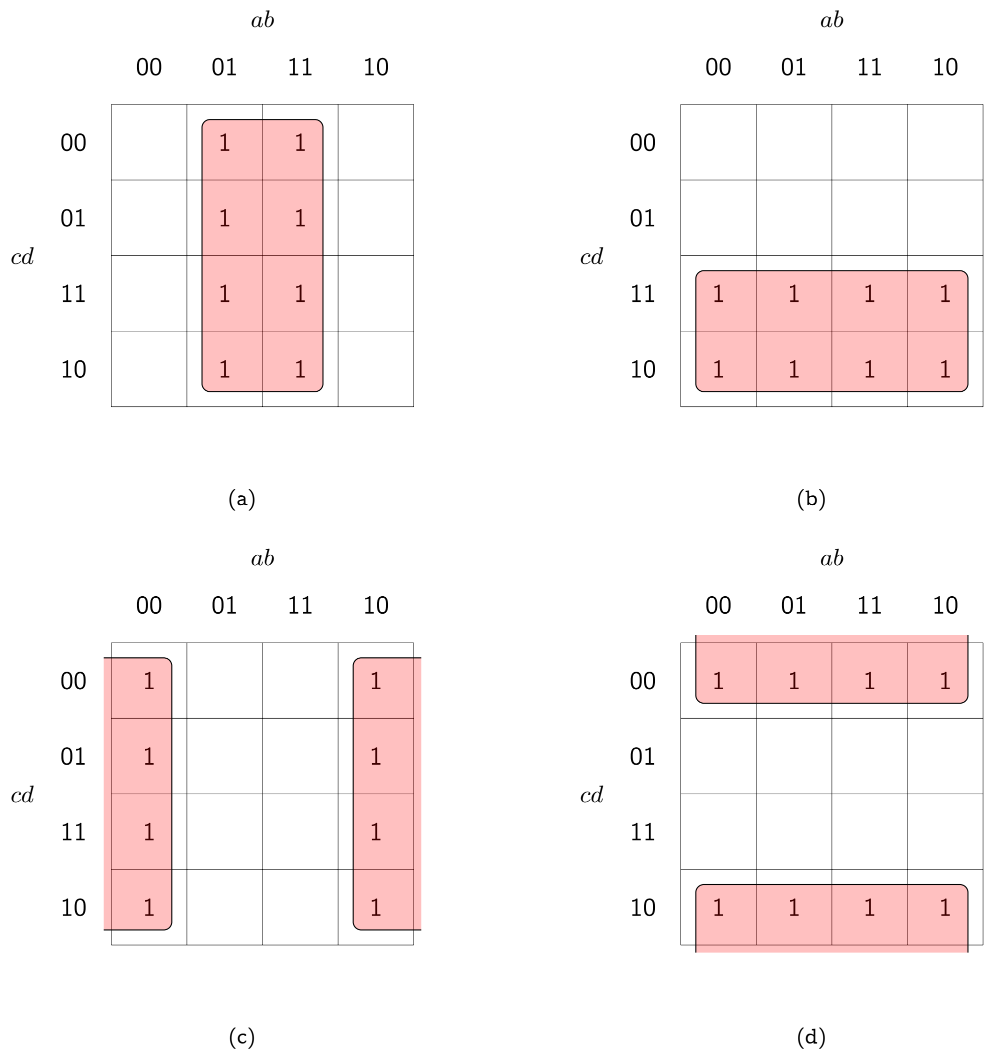


Figura 19: Todas las formas posibles de lazos simples de ocho celdas para cuatro variables.

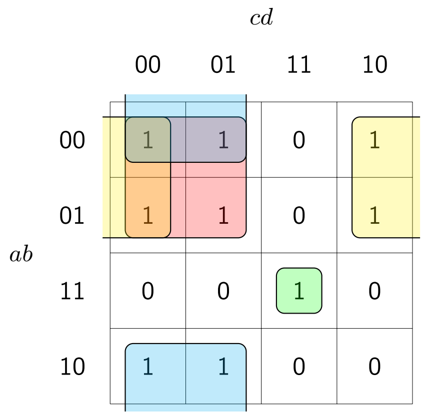
7. La expresión simplificada es la suma de todos los términos que corresponden a los diversos lazos.

Ejemplo 11.1. Minimice la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}\bar{d} + a\bar{b}\bar{c}d + abcd$$

mediante el método de los mapas K.

Solución. Los minterm dados en $f(a,b,c,d)$ corresponden a los números binarios: 0000, 0001, 0010, 0100, 0101, 0110, 1000, 1001 y 1111. El mapa K correspondiente se obtiene poniendo 1 en las celdas correspondientes a estos números y 0 en las restantes:



donde aparece el número mínimo de lazos que contienen cada uno el número máximos de números 1. Los términos correspondientes a los tres lazos de cuatro celdas son $\bar{a}\bar{c}$ (obtenida descifrando los dígitos comunes en 0000, 0001, 0100 y 0101), $\bar{a}\bar{d}$ y $\bar{b}\bar{c}$. El único 1 encerrado en círculo corresponde a $abcd$. Así pues, la respuesta es:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c} + abcd$$

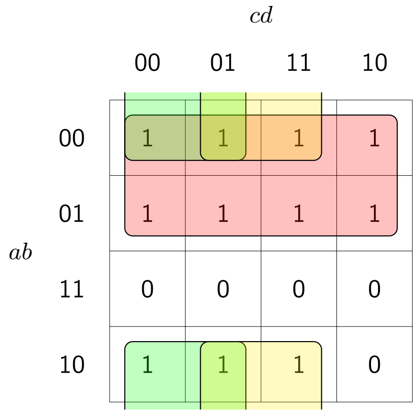
□

Ejemplo 11.2. Minimice la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,11)$$

mediante el método de los mapas K.

Solución. A la función f le corresponde el siguiente mapa K



En donde aparecen tres lazos:

- el formado por las posiciones 0, 1, 8 y 9; aporta $\bar{b}\bar{c}$.
- el formado por las posiciones del 1 al 7; aporta $\bar{a}$.
- el formado por las posiciones 1, 3, 9 y 11; aporta $\bar{b}d$.

Así pues, la respuesta es:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a} + \bar{b}\bar{c} + \bar{b}d$$

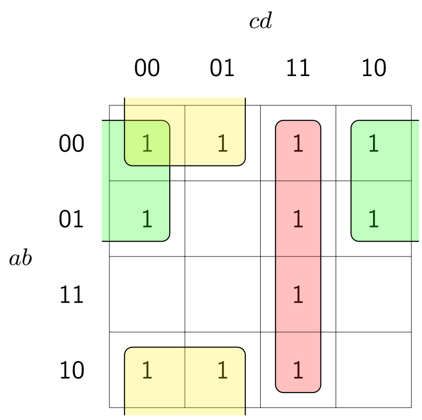
□

Ejemplo 11.3. Minimice la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15)$$

mediante el método de los mapas K.

Solución. A la función f le corresponde el siguiente mapa K



En donde aparecen tres lazos:

- el formado por las posiciones 3, 7, 11 y 15; aporta cd.
- el formado por las posiciones 0, 1, 8 y 9; aporta $\bar{b}\bar{c}$.
- el formado por las posiciones 0, 2, 4 y 6; aporta $\bar{a}\bar{d}$.

Así pues, la respuesta es:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{d} + \bar{b}\bar{c} + cd$$

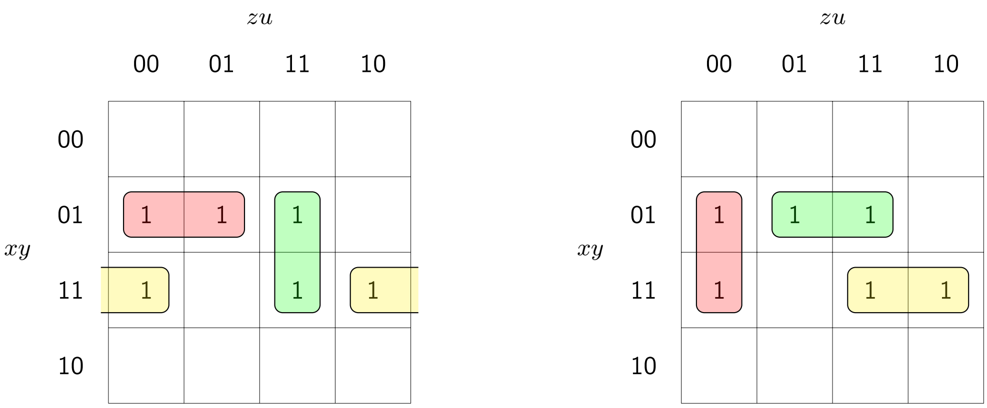
□

Ejemplo 11.4. Minimice la función de conmutación:

$$f(x,y,z,u) = \sum m(4,5,7,12,14,15)$$

Solución. Mediante mapas K, este problema tendría cualesquiera de las dos soluciones de la Figura 20.

□



(a) $\bar{x}y\bar{z} + xy\bar{u} + yzu$

(b) $y\bar{z}\bar{u} + \bar{x}yu + xyz$

Figura 20: Mapas K para distintas variables

Ejemplo 11.5. Encuentre el producto de sumas mínimo que exprese la función:

$$f(a,b,c,d) = \prod M(1,3,5,7,8,10,11,12,14)$$

Solución. Expresados en binario, los números detallados en la definición de f son: 0001, 0011, 0101, 0111, 1000, 1010, 1011, 1100 y 1110. Estos números representan a los maxterm en la siguiente relación:

0001	a+b+c+d’	0011	a+b+c’+d’	0101	a+b’+c+d’
0111	a+b’+c’+d’	1000	a’+b+c+d	1010	a’+b+c’+d
1011	a’+b+c’+d’	1100	a’+b’+c+d	1110	a’+b’+c’+d

Trasladado esto a un mapa K se obtiene el siguiente:

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	1	0	0	1
11	0	1	1	0
10	0	1	0	0

donde se ha hecho constar el número mínimo de lazos que contienen cada uno el número máximo de dígitos 0. Ahora:

- El lazo en color amarillo corresponde a $a = 0$ y $d = 1$ y en consecuencia representa $(a + d')$.
- El lazo en color verde corresponde a $a = 1$ y $d = 0$, lo que representa a $(a' + d)$.
- El lazo en color rosa corresponde a $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$, lo que consecuentemente representa a $(a' + b + c')$.

Por consiguiente, el producto de sumas mínimo de f es:

$$f(a,b,c,d) = (a + d')(a' + d)(a' + b + c')$$

□

Para simplificar una función de cinco variables mediante un mapa de Karnaugh necesitamos representar los 32 posibles mintem, de forma que cada uno tenga cinco adyacentes. Para ello dibujaremos dos cuadrículas con 16 celdas, imaginando que una está superpuesta sobre la otra. De esta forma las celdas adyacentes a cada cuadrícula son las que tiene a izquierda, derecha, arriba, abajo y encima o debajo. Si los símbolos de variable de la variable son a, b, c, d y e, elegimos una de ellas (normalmente a o e). Supongamos que hemos elegido a; entonces en una cuadrícula representamos los minterm que tiene $a = 0$, es decir los que van del 0 al 15, y en otra los que tienen $a = 1$, es decir los que van del 16 al 31. Si hubiéramos elegido e, tendríamos por una parte los minterm pares y por otra los impares. Una vez hecha esta elección se procede igual que antes, pero teniendo en cuenta que cada celda es adyacente, además de a las cuatro que tenía en una retícula para el caso de cuatro variables, a la que está en la segunda retícula en la posición equivalente.

Ejemplo 11.6. Minimice la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d,e) = \sum m(0,1,4,5,7,8,11,13,14,15,21,23,24,29,30,31)$$

mediante el método de los mapas K.

Solución. El mapa que correponde a los valores de $abcde$ igual a la expresión binaria de los número relacionados en el enunciado[3] es el siguiente:

[3]Por ejemplo, 8 da $abcde = 01000$ que corresponde a la esquina inferior derecha en la primera cuadrícula y 24 da 11000 que corresponde a la misma pero en la segunda

$bc \backslash de$	00	01	11	10
00	1	1	0	0
01	1	1	1	0
11	0	1	1	1
10	1	0	1	0

a= 0

$bc \backslash de$	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	1
10	1	0	0	0

a= 1

A la vista de este mapa K la minimización de f tiene la siguiente expresión:

$$f(a,b,c,d,e) = \bar{a}\bar{b}\bar{d} + \bar{a}bde + bcd + ce + b\bar{c}\bar{d}\bar{e}$$

□

Ejemplo 11.7. Considere la función booleana descrita por la tabla de la Figura 21 y dé una expresión

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Figura 21: Tabla de la función f del Ejemplo 11.7.

minimal como suma de productos y como producto de sumas.

Solución. La función f dada es:

$$\sum m(0,1,3,4,5,7,12,13,15)$$

que llevamos a un mapa K, donde efectuamos las agrupaciones óptimas de 1's según se expresa:

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

que permite dar la expresión mínima:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{c} + \bar{a}d + b\bar{c} + bd$$

Pero también tiene f la expresión:

$$\prod M(2,6,8,9,10,11,14)$$

que llevamos a un mapa K, donde efectuamos las agrupaciones óptimas de 0's según se expresa:

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	0
11	1	1	1	0
10	0	0	0	0

que permite dar la expresión mínima:

$$f(a,b,c,d) = (\bar{a} + b)(\bar{c} + d)$$

Así pues, la solución de menor costo es ésta última, al emplear 3 puertas frente a las 5 que necesitaría la solución como suma de productos. □

Ejemplo 11.8. Encuentre la expresión mínima como suma de productos de la función:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(6,7,10,11,12,14,15) + \sum d(0,3,13)$$

Solución. Llevamos los datos de la función a un mapa K, donde efectuamos las agrupaciones óptimas de 1's considerando los términos "no importa", según se expresa:

ab \ cd	00	01	11	10
00	-	0	-	0
01	0	0	1	1
11	1	-	1	1
10	0	0	1	1

que permite dar la expresión mínima:

$$f(a,b,c,d) = ab + bc + ac$$

□

Ejercicio 11.1. Encuentre la expresión mínima como suma de productos de la función:

$$f(a,b,c,d,e,f) = \sum m(2,3,6,7,10,14,18,19,22,23,27,37,42,43,45,46)$$

Solución. Llevamos los datos de la función a un mapa K. Teniendo en cuenta que son consideradas adjuntas las caras que figuran adjuntas en la representación plana, efectuamos las agrupaciones óptimas de 1's considerando los términos "no importa", según se expresa:

cd \ ef	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	1
10	0	0	0	1

ab= 00

cd \ ef	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	0

ab= 01

cd \ ef	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	1	0	0
11	0	1	0	1
10	0	0	1	1

ab= 10

cd \ ef	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	0	0
11	0	0	0	0
10	0	0	0	0

ab= 11

que permite dar la expresión mínima:

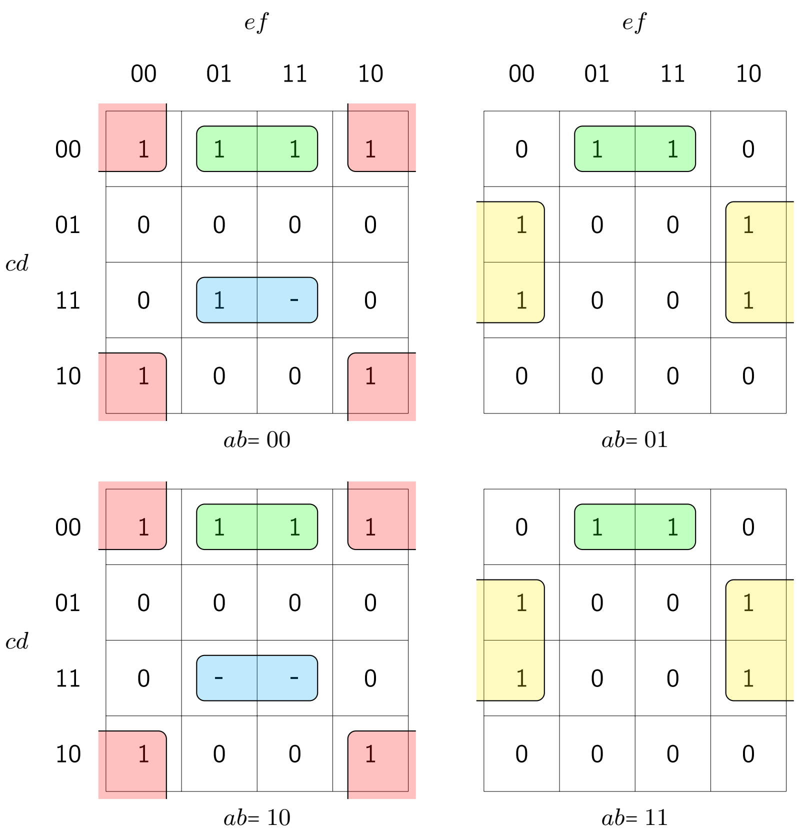
$$f(a,b,c,d,e,f) = a'bd'ef + ab'de'f + ab'cd'e + b'cef' + a'c'e$$

□

Ejemplo 11.9. Encuentre la expresión mínima como suma de productos de la función:

$$f(a,b,c,d,e,f) = \sum m(0,1,2,3,8,10,13,17,19,20,22,28,30,32,33,34,35,40,42,49,51,52,54,60,62) \\ + \sum d(15,45,47)$$

Solución. Llevamos los datos de la función a un mapa K, donde efectuamos las agrupaciones óptimas de 1's considerando los términos "no importa", según se expresa:



que permite dar la expresión mínima:

$$f(a,b,c,d,e,f) = b'cdf + b'd'f' + c'd'f + bdf'$$

□

Observación 11.1. Un conjunto de dos minterm lógicamente adyacentes elimina una variable; un conjunto de cuatro elimina dos variables; un conjunto de ocho elimina tres variables; etc. La forma de comprobar si un conjunto es, en realidad, lógicamente adyacente es determinar si quedan suficientes variables constantes en todo el conjunto. En un mapa de n variables un par de minterm es adyacente si, y sólo si, $n-1$ variables permanecen constantes sobre el par; un conjunto de cuatro minterm es adyacente si $n-2$ varaibles permanecen constantes; un conjunto de ocho minterm es adyacente si $n-3$ variables permanecen constantes en el conjunto; etc.

Hasta ahora hemos tratado con funciones de comuntación de n variables y hemos pasado por alto las funciones:

$$f\colon B^n \longrightarrow B^m$$

donde n y m son cualesquiera números naturales no nulos. Así pues m podría ser mayor que uno. Cuando m es superior a 1 en realidad f es un vector de dimensión m, cada una de sus entradas igual a una función booleana (de una única salida) y n variables. El Ejemplo 13.1 ejemplifica lo dicho.

12. Algoritmo de Quine–McCluskey

Introducción

La presentación que damos aquí del *Algoritmo de Quine-McCluskey* es la decimal clásica. Es un algoritmo exacto que para una función booleana dada, encuentra una implementación de mínimo costo entre las expresadas como suma de productos. El bosquejo que ofrecemos introduce el método y lo aplica a varios ejemplos, pudiendo encontrar en ellos parte de las explicaciones.

El Algoritmo

El algoritmo de Quine-McCluskey se funda en cuatro paso:

1. Generación de los implicantes primos.
2. Construcción de la tabla de implicantes primos.
3. Reducción de la tabla de implicantes primos:
   a) Apartado de los implicantes primos esenciales.
   b) Derterminación de columnas dominantes.
   c) Determinación de filas dominantes.
4. Resolución de la tabla de implicantes primos.

En el Paso 1 generamos los implicantes primos por medio de la iteración de un procedimiento, que explicaremos en los ejemplos. En el Paso 2 construimos la tabla de los implicantes primos, donde las filas de la tabla son los implicantes primos de la función y las columnas. Las columnas están determinadas por los mintérminos en los que la función dada se evalúa como 1, los llamados minterm activos (*ON-set minterms*). El objetivo del método es cubrir todas las columnas usando el número mínimo de implicantes primos. En particular, "mínimo costo" en este bosquejo significa menor número de implicantes primos (es decir, puertas AND) en la solución final. No obstante el algoritmo ha sido extendido hasta considerar medidas de costo más complejas, tales como minimización del número total de de puertas de entrada, optimización del consumo, etc.

La reducción del Paso 3 tiene como fin reducir el tamaño de la tabla. Este paso tiene tres etapas **que son iteradas hasta que no es posible una reducción más de la tabla**. En ese momento, la tabla reducida es vacía[4] o no vacía. Si la tabla reducida es vacía, los implicantes primos esenciales que hemos apartado aportan una solución de mínimo costo entre las expresadas como suma de productos. No obstante, si

[4] Una tabla queda vacía cuando, y sólo cuando, han sido suprimidas todas sus columnas, pudiendo quedar eventualmente alguna fila.

la tabla reducida es no vacía, puede ser resuelta (Paso 4) por medio del *algoritmo de Petrick* o por el *algoritmo de ramificación*. En este bosquejo ilustramos el algoritmo de Petrick y dejamos al lector interesado el algoritmo de ramificación, que puede estudiar en el libro de McCluskey de 1965.

La Dominación en las Filas

			0	4	5	11	13	15
*	{0,4}	0_00	○	○				
	{4,5}	010_		○	○			
	{5,13}	_101			○		○	
*	{11,15}	1_11				○		○
	{13,15}	11_1					○	○

(a) implicantes primos esenciales

			5	13
	{4,5}	010_	○	
**	{5,13}	_101	○	○
	{13,15}	11_1		○

(b) implicantes primos secundarios

Figura 22: Tabla ilustrando la dominación por filas

Para entender la **dominación de filas** considere la tabla de implicantes primos de la Figura 22 que corresponde al mapa K de la Figura 23. En la tabla de la Figura 22(a) hay 5 implicantes primos listados en las filas y 6 minterm activos listados en las columnas; cada uno de los implicantes cubre 2 minterm activos. Marcamos con * las filas {0,4} (correspondiente a $\bar{a}\bar{c}\bar{d}$ y patrón 0_00) y {11,15} (correspondiente a acd y patrón 1_11) por ser (implicantes primos) esenciales y las borramos. Cada columna tocada por estos implicantes primos esenciales es también borrada al estar ya cubierta. Llegados a este punto (cfr. Figura 22(b)) el implicante primo {5,13}, de patrón _101, cubre los restantes dos minterms activos (5 y 13). No obstante, el implicante primo {4,5} (de patrón 010_) cubre sólo uno de ellos (el 5), al igual que hace el implicante {13,15} (de patrón 11_1) con 13. Por consiguiente podemos usar {5,13} (de patrón _101) en lugar de cualquiera de ellos: {4,5} y {13,15}, puesto que es sólo uno y cubre los mismos minterms que los tres juntos. Esto es, la **fila {5,13} domina** a las filas {4,5} y {13,15}. Los **implicantes primos dominados** pueden ser **tachados sin ser conservados** y **sólo quedar** el implicante primo **dominante** {5,13}.

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

(a) implicantes primos

ab \ cd	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	0
11	0	1	1	0
10	0	0	1	0

(b) implicantes primos optimizado

Figura 23: Mapas K ilustrando la dominación por filas

La Dominación en las Columnas

Para entender la **dominación de columnas** considere la tabla de implicantes primos de la Figura 24 que corresponde al mapa K de la Figura 25. Hay 4 implicantes primos: {1,2,3} (que corresponde con $\bar{a}\bar{b}$ y patrón 00__), {1,5} (que corresponde con $\bar{a}\bar{c}d$ y patrón 0_01), {1,3,5,7} (que corresponde con $\bar{a}d$ y patrón 0__1) y {2,3,7} (que corresponde con $\bar{a}c$ y patrón 0_1_). Ninguna de estas filas corresponde con un implicante primo esencial. Debemos elegir un subconjunto mínimo de estos implicantes para poder cubrir los 5 minterms activos. Los 4 implicantes primos figuran como fila y los 5 minterms activos, como columnas. Obsérvese que la columna 3 está incluida tres de los implicantes primos: {1,2,3}, {1,3,5,7} y {2,3,7}. La columna 2 está cubierta por dos de estas tres filas: {1,2,3} y {2,3,7}, y la columna del 7 está también cubierta por otras dos de estas tres filas: {1,3,5,7} y {2,3,7}. En este caso, cualquier implicante primo que incluya al minterm activo 2 incluirá al 3. De forma similar, cualquier implicante primo que incluya al minterm activo 7 incluirá al 3. Así pues, podemos ignorar el objetivo de cubrir al 3 si mantenemos como objetivo —como es el caso— cubrir al 2 o al 7. Para comprender esto, observe que la columna del minterm activo 3 es una **columna dominante** de la columna del 2 y que la columna del minterm activo 3 es una **columna dominante** de la columna del 7; cubrir al 2 y al 7 será pasando por el 3. En este caso, la columna del 3 puede ser ignorada, y eliminada, sin necesidad de tenerla en cuanta en modo alguno. En virtud de lo dicho, podemos **eliminar toda columna dominante** y la situación es la complementaria de la que atañe a las filas dominantes.

Similarmente la columna del minterm activo 1 domina a la del 5. Por tanto, la columna del 1 puede ser ignorada y eliminada, pues tenemos la garantía de que el 1 será cubierto, pues cualquier implicante primo que cubra al 5 también cubrirá al 1.

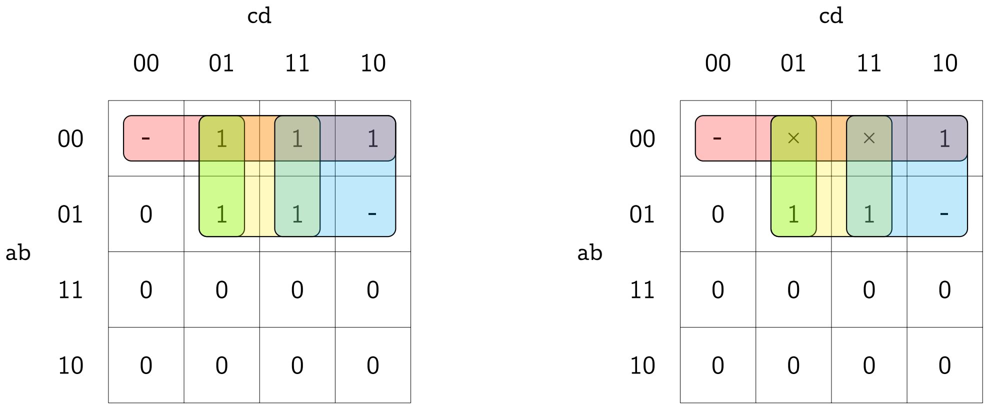
		1	2	3	5	7
{1,2,3}	00__	∘	∘	∘		
{1,5}	0_01	∘			∘	
{1,3,5,7}	0__1	∘		∘	∘	∘
{2,3,7}	0_1_		∘	∘		∘

(a) implicantes primos con el 3

		1	2	5	7
{1,2,3}	00__	∘	∘		
{1,5}	0_01	∘		∘	
{1,3,5,7}	0__1	∘		∘	∘
{2,3,7}	0_1_		∘		∘

(b) implicantes primos sin el 3

Figura 24: Tabla ilustrando la dominación por filas



(a) implicantes primos (b) implicantes primos optimizado

Figura 25: Mapas K ilustrando la dominación por filas

Ejemplos

Ejemplo 12.1. Encuentre una expresión minimal para la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,3,6,7,8,9,10,13)$$

que venga expresada como suma de productos.

Solución.

1. **Generación de los implicantes primos**; para este ejemplo el proceso está codificado en las tablas de la Figura 26. En la tabla de la Figura 26(a) colocamos en una columna, como implicantes primos del nivel 0, los minterm clasificados por el número de dígitos 1 en su única expresión decimal. Para obtener la siguiente generación de implicantes primos, la del nivel 1, comparamos cada implicante primo de nivel 0 en un grupo cualquiera con los del grupo siguiente que son mayores que él. Anotamos una pareja, formando un conjunto, siempre que la diferencia de sus patrones radique en una única posicion (la diferencia de los minterm es de la forma 2^n) y hacemos una marca en los minterm usados. El patrón del nuevo implicante anotado es el de los bits comunes y un guión bajo en la posición del bit de diferencia, “unificando” la diferencia. El resultado de este proceso figura en la tabla de la Figura 26(b). La siguiente generación de implicantes primos, la generación 2, se

nº 1’s	implicante-0	patrón
0	0	0000✓
1	2	0010✓
	8	1000✓
2	3	0011✓
	6	0110✓
	9	1001✓
	10	1010✓
3	7	0111✓
	13	1101✓

(a) minterm por nº de 1’s

implicante-1	patrón
{0,2}	00_0✓
{0,8}	_000✓
{2,3}	001_✓
{2,6}	0_10✓
{2,10}	_010✓
{8,9}	100_*
{8,10}	10_0✓
{3,7}	0_11✓
{6,7}	011_✓
{9,13}	1_01*

(b) implicantes primos 1

implicante-2	patrón
{0,2,8,10}	_0_0*
{2,3,6,7}	0_1_*

(c) implicantes primos 2

Figura 26: Generación de los implicantes primos

obtiene de la 1 como ésta se obtuvo de la cero. Comparamos cada implicante primo en un grupo cualquiera con los implicantes primos del grupo siguiente que tengan el guión bajo en idéntica posición. Anotamos una pareja, haciendo la unión de los conjuntos de minterm que los representan, si la diferencia entre los patrones es de un único bit. El patrón resultante es lo común a los patrones de ambos implicantes, pero con un guión bajo unificando a y en la posición de la única diferencia. Hacemos una marca en los implicantes del nivel anterior que hayan sido usados. Observe que, al considerar a los implicantes como conjuntos, no escribimos dos con el mismo número de elementos e idéntico patrón. El resultado de este proceso figura en la tabla de la Figura 26(c). No ha lugar a generar un nivel 3, pues no hay comparación posible, de la forma especificada, entre los implicantes primos del nivel 2. La generación de implicantes primos ha concluido cuando estando en un nivel, no hay posibilidad de obtener una siguiente generación.

2. **Construcción de la tabla de implicantes primos**; para este ejemplo es la tabla de la Figura 27. Al estudiarla encontramos que al objeto de cubrir todos los minterms activos son implicantes primos esenciales: {0,2,8,10} por ser el único que cubre al 0, {2,3,6,7} por ser el único que cubre p.e. al 3 y {9,13} por ser el único que cubre al 13. Los anotamos con un asterisco, los apartamos a la vez que suprimimos su fila y suprimimos las columnas cubiertas por ellos. El estado intermedio

antes de la supresión es el que aparece en la Figura 28 Al hacer las supresiones referidas, la tabla queda vacía al no quedar columna alguna de minterm, por lo que el proceso ha terminado y hay que pasar a la resolución.

3. **Resolución de la tabla de implicantes primos**; los implicantes primos esenciales han bastado para cubrir todos y cada uno de los minterm activos. La transcripción de cada implicante es según la tabla:

implicante	patrón	producto
{0,2,8,10}	_0_0	$\bar{b}\bar{d}$
{2,3,6,7}	0_1_	$\bar{a}c$
{9,13}	1_01	$a\bar{c}d$

Por lo que:

$$f(a,b,c,d) = \bar{a}c + \bar{b}\bar{d} + a\bar{c}d$$

es la expresión pedida y es la única posible.

□

Ejemplo 12.2. Encuentre una expresión minimal para la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,5,6,7,8,10,12,13,14,15)$$

que venga expresada como suma de productos.

Solución.

1. **Generación de implicantes primos**; son obtenidos al seguir el proceso esbozado en la parte correspondiente del Ejemplo 12.1. La tabla de la Figura 29 recoge la marcha del proceso y los resultados. Los implicantes primos son los marcados con un asterisco (hemos evitado repeticiones).

2. **Construcción de la tabla de implicantes primos**; es la que aparece en la Figura 30, donde además hemos marcado con un asterisco los implicantes primos esenciales y los minterm activos que cubren.

		0	2	3	6	7	8	9	10	13
{0,2,8,10}	_0_0	○	○				○		○	
{2,3,6,7}	0_1_		○	○	○	○				
{8,9}	100_						○	○		
{9,13}	1_01							○		○

Figura 27: Tabla de implicantes primos.

			0	2	3	6	7	8	9	10	13
*	{0,2,8,10}	_0_0	○	○				○		○	
*	{2,3,6,7}	0_1_		○	○	○	○				
	{8,9}	100_						○	○		
*	{9,13}	1_01							○		○
			○	○	○	○	○	○	○	○	○

Figura 28: Selección de implicantes primos esenciales.

columna 1		
0	0000	✓
2	0010	✓
8	1000	✓
5	0101	✓
6	0110	✓
10	1010	✓
12	1100	✓
7	0111	✓
13	1101	✓
14	1110	✓
15	1111	✓

columna 2		
{0,2}	00_0	✓
{0,8}	_000	✓
{2,6}	0_10	✓
{2,10}	_010	✓
{8,10}	10_0	✓
{8,12}	1_00	✓
{5,7}	01_1	✓
{5,13}	_101	✓
{6,7}	011_	✓
{6,14}	_110	✓
{10,14}	1_10	✓
{12,13}	110_	✓
{12,14}	11_0	✓
{7,15}	_111	✓
{13,15}	11_1	✓
{14,15}	111_	✓

columna 3		
{0,2,8,10}	_0_0	*
{0,8,2,10}	_0_0	
{2,6,10,14}	__10	*
{2,10,6,14}	__10	
{8,10,12,14}	1__0	*
{8,12,10,14}	1__0	
{5,7,13,15}	_1_1	*
{5,13,7,15}	_1_1	
{6,7,14,15}	_11_	*
{6,14,7,15}	_11_	
{12,13,14,15}	11__	*
{12,14,13,15}	11__	

Figura 29: Generación de implicantes primos

			0	2	5	6	7	8	10	12	13	14	15
*	{0,2,8,10}	_0_0	○	○				○	○				
	{2,6,10,14}	__10		○		○			○			○	
	{8,10,12,14}	1__0						○	○	○		○	
*	{5,7,13,15}	_1_1			○		○				○		○
	{6,7,14,15}	_11_				○	○					○	○
	{12,13,14,15}	11__								○	○	○	○
			○	○	○		○	○	○		○		○

Figura 30: Tabla de implicantes primos

		6	12	14
{2,6,10,14}	__10	○		○
{8,10,12,14}	1__0		○	○
{6,7,14,15}	_11_	○		○
{12,13,14,15}	11__		○	○

(a) tabla bruta

		6	12
{2,6,10,14}	__10	○	
{8,10,12,14}	1__0		○
{6,7,14,15}	_11_	○	
{12,13,14,15}	11__		○

(b) tabla sin la columna dominante

Figura 31: Tabla de implicantes primos sin los esenciales.

3. **Reducción de la tabla de implicantes primos**; suprimimos los implicantes primos esenciales y las columnas que quedan cubiertas por ellos. Resulta entonces la tabla de la Figura 31(a) en la que detectamos una **columna dominante**, la del 14, que pasamos a eliminar y entonces queda la tabla de la Figura 31(b). En la misma apreciamos dos parejas de filas cuya componentes se dominan mutuamente. Elegimos en cada pareja una de las componentes y suprimimos de la tabla la otra. Esto queda reflejado en la tabla de la Figura 32(a). Marcamos como implicantes primos esenciales secundarios los elegidos y los retiramos junto a las columnas que cubren. Esto deja la tabla vacía y permite resolver.

			6	12
**	{2,6,10,14}	_ _10	∘	
**	{8,10,12,14}	1_ _0		∘
			∘	∘

(a) primera alternativa

			6	12
**	{2,6,10,14}	_ _10	∘	
**	{12,13,14,15}	11_ _		∘
			∘	∘

(b) segunda alternativa

			6	12
**	{6,7,14,15}	_11_	∘	
**	{8,10,12,14}	1_ _0		∘
			∘	∘

(c) tercera alternativa

			6	12
**	{6,7,14,15}	_11_	∘	
**	{12,13,14,15}	11_ _		∘
			∘	∘

(d) cuarta alternativa

Figura 32: Tabla de implicantes primos esenciales secundarios.

4. **Resolución de la tabla de implicantes primos**; la resolución admite cuatro posibilidades, como refleja el contenido de la Figura 32. Las soluciones son:

   - $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + bd + c\bar{d} + a\bar{d}$
   - $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + bd + c\bar{d} + ab$
   - $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + bd + bc + a\bar{d}$
   - $f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + bd + bc + ab$

□

Ejemplo 12.3. Encuentre una expresión minimal para la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(0,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13)$$

que venga expresada como suma de productos.

Solución.

1. **Generación de implicantes primos**; la tabla de la Figura 33 recoge la marcha del proceso y los resultados.

2. **Construcción de la tabla de implicantes primos**; es la que aparece en la Figura 34, donde además hemos marcado con un asterisco los implicantes primos esenciales y los minterm activos que cubren.

3. **Reducción de la tabla de implicantes primos**; por inspección de la tabla de implicantes primos de la Figura 34, no encontramos implicantes primos esenciales y sí encontramos la siguiente relación de dominación entre columnas:

columna 1		
0	0000	✓
2	0010	✓
4	0100	✓
8	1000	✓
3	0011	✓
5	0101	✓
6	0110	✓
9	1001	✓
10	1010	✓
12	1100	✓
7	0111	✓
11	1011	✓
13	1101	✓

columna 2		
{0,2}	00_0	✓
{0,4}	0_00	✓
{0,8}	_000	✓
{2,3}	001_	✓
{2,6}	0_10	✓
{2,10}	_010	✓
{4,5}	010_	✓
{4,6}	01_0	✓
{4,12}	_100	✓
{8,9}	100_	✓
{8,10}	10_0	✓
{8,12}	1_00	✓
{3,7}	0_11	✓
{3,11}	_011	✓
{5,7}	01_1	✓
{5,13}	_101	✓
{6,7}	011_	✓
{9,11}	10_1	✓
{9,13}	1_01	✓
{10,11}	101_	✓
{12,13}	110_	✓

columna 3		
{0,2,4,6}	0__0	*
{0,2,8,10}	_0_0	*
{0,4,2,6}	0__0	
{0,4,8,12}	__00	*
{0,8,2,10}	_0_0	
{0,8,4,12}	__00	
{2,3,6,7}	0_1_	*
{2,3,10,11}	_01_	*
{2,6,3,7}	0_1_	
{4,5,6,7}	01__	*
{4,5,12,13}	_10_	*
{4,6,5,7}	01__	
{4,12,5,13}	_10_	
{8,9,10,11}	10__	*
{8,9,12,13}	1_0_	*
{8,10,9,11}	10__	
{8,12,9,13}	1_0_	

Figura 33: Generación de implicantes primos

		0	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
{0,2,4,6}	0__0	○	○		○		○							
{0,2,8,10}	_0_0	○	○						○		○			
{0,4,8,12}	__00	○			○				○				○	
{2,3,6,7}	0_1_		○	○			○	○						
{2,3,10,11}	_01_		○	○							○	○		
{4,5,6,7}	01__				○	○	○	○						
{4,5,12,13}	_10_				○	○							○	○
{8,9,10,11}	10__								○	○	○	○		
{8,9,12,13}	1_0_								○	○			○	○

Figura 34: Tabla de implicantes primos

columna	domina a col.
2	3
4	5
6	7
8	9
10	11
12	13

Así que eliminamos las columnas dominadoras de la tabla obteniendo la tabla de la Figura 35(a)

			0	3	5	7	9	11	13
*	{0,2,4,6}	0__0	∘						
	{0,2,8,10}	_0_0	∘						
	{0,4,8,12}	__00	∘						
	{2,3,6,7}	0_1_		∘		∘			
	{2,3,10,11}	_01_		∘				∘	
	{4,5,6,7}	01__			∘	∘			
	{4,5,12,13}	_10_			∘				∘
	{8,9,10,11}	10__					∘	∘	
	{8,9,12,13}	1_0_					∘		∘
			∘						

(a) tabla bruta con elección de i. primos

			3	5	7	9	11	13
p_1	{2,3,6,7}	0_1_	∘		∘			
p_2	{2,3,10,11}	_01_	∘				∘	
p_3	{4,5,6,7}	01__		∘	∘			
p_4	{4,5,12,13}	_10_		∘				∘
p_5	{8,9,10,11}	10__				∘	∘	
p_6	{8,9,12,13}	1_0_				∘		∘

(b) tabla sin fila dominante y m. cubiertos

Figura 35: Tabla de implicantes primos.

Por inspección de la tabla de implicantes primos de la Figura 35(a), encontramos la siguiente relación de dominación entre filas:

fila	domina a	representa a
{0,2,4,6}	{0,2,8,10}	$\bar{b}\bar{d}$
{0,2,4,6}	{0,4,8,12}	$\bar{c}\bar{d}$

sin embargo esta dominación no es estricta, por lo que al elegir {0,2,4,6} (con el patrón 0__0, que representa a $\bar{a}\bar{d}$) como implicante primo esencial, ese papel podría haberlo desempeñado cualquiera de los implicantes primos: {0,2,8,10} (con el patrón _0_0, que representa a $\bar{b}\bar{d}$) y {0,4,8,12} (con el patrón __00, que representa a $\bar{c}\bar{d}$); guardamos el implicante primo esencial y sus posibles sustitutos para conformar las opciones. Queda la tabla de la Figura 35(b) en la que: no aparecen implicantes primos esenciales ni columnas dominantes ni filas dominadas. Así pues es necesario resolver la tabla.

4. **Resolución de la tabla de implicantes primos**; se puede llevar a cabo por el método de bifurcación o por el algoritmo de Petrick. Nosotros usaremos este último. Encontramos la situación de la siguiente tabla:

para cubrir a	basta usar
3	p_1 ó p_2
5	p_3 ó p_4
7	p_1 ó p_3
9	p_5 ó p_6
11	p_2 ó p_5
13	p_4 ó p_6

lo que nos lleva a formular la frase P del metalenguaje que expresa el modo de cubrir la totalidad de los los minterms como una expresión booleana según:

$$(P_1 + P_2)(P_3 + P_4)(P_1 + P_3)(P_5 + P_6)(P_2 + P_5)(P_4 + P_6)$$

que debemos transformar en suma de productos:

$$
\begin{aligned}
P &= (P_1+P_2)(P_3+P_4)(P_1+P_3)(P_5+P_6)(P_2+P_5)(P_4+P_6) \\
&= (P_1+P_2P_3)(P_4+P_3P_6)(P_5+P_2P_6) \\
&= (P_1+P_2P_3)(P_4+P_3P_6)P_5+(P_1+P_2P_3)(P_4+P_3P_6)P_2P_6 \\
&= (P_1+P_2P_3)P_4P_5+(P_1+P_2P_3)P_3P_5P_6 \\
&+ (P_1+P_2P_3)P_4P_2P_6+(P_1+P_2P_3)P_3P_2P_6 \\
&= P_1P_4P_5+P_2P_3P_4P_5+P_1P_3P_5P_6+P_2P_3P_5P_6 \\
&+ P_1P_2P_4P_6+P_2P_3P_4P_6+P_1P_2P_3P_6+P_2P_3P_6
\end{aligned}
$$

donde para simplificar hemos usado $(x+y)(x+z)=x+yz$ (ley distributiva, cfr. la tabla de la Figura 7) y $x+xy=x$ (ley de absorción, cfr. la tabla de la Figura 8). Por tanto, para dar la expresión mínima que buscamos nos basaremos en:

pseudónimo	implicante	patrón	representa
e_1	{0,2,4,6}	0_ _0	$\bar{a}\bar{d}$
e_2	{0,2,8,10}	_0_0	$\bar{b}\bar{d}$
e_3	{0,4,8,12}	_ _00	$\bar{c}\bar{d}$
p_1	{2,3,6,7}	0_1_	$\bar{a}c$
p_2	{2,3,10,11}	_01_	$\bar{b}c$
p_3	{4,5,6,7}	01_ _	$\bar{a}b$
p_4	{4,5,12,13}	_10_	$b\bar{c}$
p_5	{8,9,10,11}	10_ _	$a\bar{b}$
p_6	{8,9,12,13}	1_0_	$a\bar{c}$

y será cualquiera de las siguientes 6 opciones:

implicantes				$f(a,b,c,d)$
e_1	p_1	p_4	p_5	$\bar{a}\bar{d}+\bar{a}c+b\bar{c}+a\bar{b}$
e_1	p_2	p_3	p_6	$\bar{a}\bar{d}+\bar{b}c+\bar{a}b+a\bar{c}$
e_2	p_1	p_4	p_5	$\bar{b}\bar{d}+\bar{a}c+b\bar{c}+a\bar{b}$
e_2	p_2	p_3	p_6	$\bar{b}\bar{d}+\bar{b}c+\bar{a}b+a\bar{c}$
e_3	p_1	p_4	p_5	$\bar{c}\bar{d}+\bar{a}c+b\bar{c}+a\bar{b}$
e_3	p_2	p_3	p_6	$\bar{c}\bar{d}+\bar{b}c+\bar{a}b+a\bar{c}$

□

Ejemplo 12.4. Encuentre una expresión minimal para la función de conmutación con minterm “no importa” (los 1, 10 y 15):

$$f(a,b,c,d)=\sum m(2,3,7,9,11,13)+\sum d(1,10,15)$$

que venga expresada como suma de productos.

Solución.

1. **Generación de implicantes primos**; los términos no importa son incluidos en la generación de implicantes primos. En este caso la tabla de la Figura 33 recoge la marcha del proceso y los resultados.
2. **Construcción de la tabla de implicantes primos**; los minterm “no importa” son omitidos al construir la tabla de implicantes primos, pues no es necesario cubrirlos. La tabla de implicantes primos es la de la Figura 37(a).

3. **Reducción de la tabla de implicantes primos**; al marcar los implicantes primos esenciales en la tabla de la Figura 37(a), quedan cubiertos todos los minterm activos. Si se retiran los implicantes primos esenciales y lo que cubren, la tabla queda vacía como muestra la Figura 37(b) por lo que puede ser resuelta.

4. **Resolución de la tabla de implicantes primos**; la expresión mínima que buscamos para la función es:

$$f(a,b,c,d) = \bar{b}c + cd + ad$$

□

13. Ejemplos

Ejercicio 13.1. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^-, 0, 1\rangle$ un álgebra de Boole. Demuestre que para todo $x, y \in B$ son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $x \leq y$
2. $x + y = y$
3. $x \rightarrow y = 1$

columna 1			columna 2			columna 3		
1	0001	✓	{1,3}	00_1	✓	{1,3,9,11}	_0_1	*
2	0010	✓	{1,9}	_001	✓	{2,3,10,11}	_01_	*
3	0011	✓	{2,3}	001_	✓	{3,7,11,15}	__11	*
9	1001	✓	{2,10}	_010	✓	{9,11,13,15}	1__1	*
10	1010	✓	{3,7}	0_11	✓			
7	0111	✓	{3,11}	_011	✓			
11	1011	✓	{9,11}	10_1	✓			
13	1101	✓	{9,13}	1_01	✓			
15	1111	✓	{10,11}	101_	✓			
			{7,15}	_111	✓			
			{11,15}	1_11	✓			
			{13,15}	11_1	✓			

Figura 36: Generación de implicantes primos

		2	3	7	9	11	13
{1,3,9,11}	_0_1		○		○	○	
{2,3,10,11}	_01_	○	○			○	
{3,7,11,15}	__11		○	○		○	
{9,11,13,15}	1__1				○	○	○

(a) tabla bruta con elección de i. primos

			2	3	7	9	11	13
	{1,3,9,11}	_0_1		○		○	○	
*	{2,3,10,11}	_01_	○	○			○	
*	{3,7,11,15}	__11		○	○		○	
*	{9,11,13,15}	1__1				○	○	○
			○	○	○	○	○	○

(b) elec. de impl. pr. esenciales y lo que cubren

Figura 37: Tabla de implicantes primos.

Solución. Sean $x, y \in B$ cualesquiera y supongamos que $x \leq y$, es decir, que $xy = x$. Entonces:

$$\begin{aligned} x + y &= xy + y \\ &= y + yx \\ &= y \end{aligned}$$

Supongamos ahora que $x + y = y$; entonces:

$$\begin{aligned} x \to y &= x \to (x + y) \\ &= x \to (x' \to y) \\ &= x' + x + y \\ &= 1 + y \\ &= 1 \end{aligned}$$

Finalmente, supongamos que $x \to y = 1$; entonces:

$$\begin{aligned} x &= x1 \\ &= x(x \to y) \\ &= x(x' + y) \\ &= xx' + xy \\ &= 0 + xy \\ &= xy \end{aligned}$$

□

Observación 13.1. En el ambiente del Ejercicio 13.1, supongamos que $xy = 1$; entonces:

$$\begin{aligned} x \to y &= xy \to y \\ &= x \to (y \to y) \\ &= x \to 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejercicio 13.2. Sea $\mathbf{B} = \langle B, +, \cdot, ^{-}, 0, 1 \rangle$ un álgebra de Boole. Demuestre que para todo $x, y \in B$, si $x \uparrow y = 0$ entonces $x = 1 = y$

Demostración. Sean $x, y \in B$ tales que $x \uparrow y = 0$, o sea, $0 = (xy)'$. Esto es equivalente a que $xy = 1$, es decir, $x = 1 = y$. □

Ejercicio 13.3. Sea n un número natural y sean $f, g, k, h \colon B_2^n \longrightarrow B_2$. Considere la función:

$$h(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \begin{cases} f(x_0, \ldots, x_{n-1}), & \text{si } k(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 1 \\ g(x_0, \ldots, x_{n-1}), & \text{si } k(x_0, \ldots, x_{n-1}) = 0 \end{cases}$$

y demuestre que

$$h = kf + \bar{k}g \tag{18}$$

Seguidamente considere el caso particular de $n = 4$, $f, g, h \colon B_2^4 \longrightarrow B_2$ definidas por: $f(x, y, z, t) = x \uparrow z$, $f(x, y, z, t) = \bar{z}$ y h según lo siguiente

$$h(x, y, z, t) = \begin{cases} f(x, y, z), & \text{si } \bar{x} \leq \bar{t} \\ g(y, z, t), & \text{si } x < t \end{cases}$$

Aplique (18) a este caso para obtener:

$$h(x, y, z, t) = (t \to x)(x \uparrow z) + \bar{z} \tag{19}$$

Solución. Supongamos que para $\langle x_0,\ldots,x_{n-1}\rangle \in B_2^n$, se tiene $k(x_0,\ldots,x_{n-1}) = 1$; entonces

$$\begin{aligned} h(x_0,\ldots,x_{n-1}) &= k(x_0,\ldots,x_{n-1})f(x_0,\ldots,x_{n-1}) + \bar{k}(x_0,\ldots,x_{n-1})g(x_0,\ldots,x_{n-1}) \\ &= 1f(x_0,\ldots,x_{n-1}) + 0g(x_0,\ldots,x_{n-1}) \\ &= f(x_0,\ldots,x_{n-1}) \end{aligned}$$

y si $k(x_0,\ldots,x_{n-1}) = 0$ se tiene análoga e evidentemente que $h(x_0,\ldots,x_{n-1}) = g(x_0,\ldots,x_{n-1})$. Por otra parte, $\bar{x} \le \bar{t}$ es equivalente a $t \le x$ y, según el Ejercicio 13.1, esto equivalente a $t \to x = 1$; por tanto, aquí $k(x,y,z,t) = t \to x$. La particularización de (18) es:

$$(t \to x)(x \uparrow z) + \bar{z}$$

pues: si $t \to x = 0$ entonces $(t \to x)(x \uparrow z) + \bar{z} = \bar{z}$ y si $t \to x = 1$, caben dos casos:

- $x \uparrow z = 1$; entonces

$$\begin{aligned} (t \to x)(x \uparrow z) + \bar{z} &= 1 + \bar{z} \\ &= 1 \\ &= x \uparrow z \end{aligned}$$

- $x \uparrow z = 0$; entonces (cfr. Ejercicio 13.2) $\bar{z} = 0$, luego:

$$\begin{aligned} (t \to x)(x \uparrow z) + \bar{z} &= 0 + \bar{z} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \\ &= x \uparrow z \end{aligned}$$

de lo que deducimos que si $t \to x = 1$ entonces $(t \to x)(x \uparrow z) + \bar{z} = x \uparrow z$. □

Ejemplo 13.1. El dígito a 7 segmentos se forma iluminando en la pantalla los segmentos apropiados según explica esquemáticamente la Figura 38 y así puede mostrar los números decimales del 0 al 9. El dígito queda construido por iluminación de hasta los segmentos: a,b,c,d,e,f y g, que se activan o desactivan mediante un circuito digital dependiendo del número que ha de ser mostrado; por ejemplo, el dígito 3 requiera la activación de exáctamente los segmentos: a,b,c,d y g. Para mostrar el dígito 7 quedarán desactivados exactamente los segmentos: d, e, f y g.

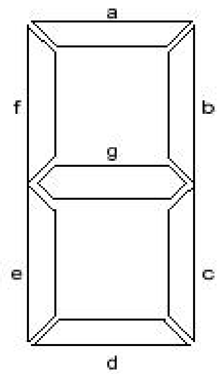
El circuito que activa los segmentos adecuados para mostrar uno cualquiera de los dígitos se conoce como *Decodificador BCD a 7 segmentos*; su entrada es un número BCD de 4-bit entre 0 y 9. Cada una de las 7 salidas del circuito conectan con los siete segmentos.

Para implementar el circuito decodificador de cuatro entradas $(n = 4)$ y siete salidas $(m = 7)$ debemos hacer una tabla para cada segmento, representando su estado para combinación de entradas. Así pues debemos determinar siete expresiones, una por cada segmento, antes de implementar el circuito.

Puesto que los números representados por una entrada de 4 bits son 16, la tabla de cada función tendrá 16 entradas combinacionales. No obstante las seis últimas combinaciones son "no-importa", ya que ninguna de ellas ocurre al ser las entradas de números BCD de 4 bits. Los estados no-importa ayudarán sin embargo a simplificar las expresiones booleanas para los siete segmentos. Según lo que explican la: Figura 39, Figura 40 y 41, la función booleana $D_{BCD7}(a,b,c,d)$ que codifica el *Decodificador BCD a 7 segmentos* es la siguiente:

$$\begin{aligned} D_{BCD7}(a,b,c,d) = \langle & a + c + bd + \bar{b}\bar{d}, \\ & \bar{b} + \bar{c}\bar{d} + cd, \\ & b + \bar{c} + d, \\ & a + \bar{b}\bar{d} + \bar{b}c + c\bar{d} + b\bar{c}d, \\ & \bar{b}\bar{d} + c\bar{d}, \\ & a + b\bar{c} + b\bar{d} + \bar{c}\bar{d}, \\ & a + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d}\rangle \end{aligned}$$

donde las entradas de la 7-upla que representa a $D_{BCD7}(a,b,c,d)$ corresponden a los segmentos en el orden de la plabra abcdefg.



(a) dígito a 7 segmentos

Dígito	Segmentos
0	a,b,c,d,e,f
1	b,c
2	a,b,d,e,g
3	a,b,c,d,g
4	b,c,f,g
5	a,c,d,f,g
6	a,c,d,e,f,g
7	a,b,c
8	a,b,c,d,e,f,g
9	a,b,c,d,f,g

(b) segmentos activos por cada dígito

Figura 38: Dígitos a 7 segmentos y su formación activándolos.

Ejercicio 13.4. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ álgebras de Boole finitas y $\langle a,b\rangle \in A \times B$. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

1. $\langle a,b\rangle \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$
2. $(a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ y $b = 0)$ ó $(a = 0$ y $b \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B}))$

Demostración. Para demostrar que la afirmación 1) implica a la 2), demostremos la implicación contrarrecíproca. Con el fin de articular el razonamiento abreviemos por:

- α la expresión "$a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$"
- β la expresión "$b = 0$"
- φ la expresión "$a = 0$" y
- ψ la expresión "$b \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$".

La negación de la afirmación 2) responde a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \neg((\alpha \wedge \beta) \vee (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\varphi \wedge \psi) \\ &= (\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ &= (\neg\alpha \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \vee (\neg\beta \wedge (\neg\varphi \vee \neg\psi)) \\ &= (\neg\alpha \wedge \neg\varphi) \vee (\neg\alpha \wedge \neg\psi) \vee (\neg\beta \wedge \neg\varphi) \vee (\neg\beta \wedge \neg\psi) \end{aligned}$$

Input				Output
a	b	c	d	segmento a
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(a) Codif. segmento a

Input				Output
a	b	c	d	segmento b
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(b) Codif. segmento b

Input				Output
a	b	c	d	segmento c
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(c) Codif. segmento c

Input				Output
a	b	c	d	segmento d
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(d) Codif. segmento d

Input				Output
a	b	c	d	segmento e
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(e) Codif. segmento e

Input				Output
a	b	c	d	segmento f
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(f) Codif. segmento f

Figura 39: Codificación por segmentos de su activación del a al f.

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	1	1
11	x	x	x	x
10	1	1	x	x

(a) Mapa K segmento a: $a + c + bd + \bar{b}\bar{d}$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1	0	1	0
11	x	x	x	x
10	1	1	x	x

(b) Mapa K segmento b: $\bar{b} + \bar{c}\bar{d} + cd$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	1	1
11	x	x	x	x
10	1	1	x	x

(c) Mapa K segmento c: $b + \bar{c} + d$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	1	0	1
11	x	x	x	x
10	1	1	x	x

(d) Mapa K segmento d: $a + \bar{b}\bar{d} + \bar{b}c + c\bar{d} + b\bar{c}d$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	1	0	0	1
01	0	0	0	1
11	x	x	x	x
10	1	0	x	x

(e) Mapa K segmento e: $\bar{b}\bar{d} + c\bar{d}$

$ab \backslash cd$	00	01	11	10
00	1	0	0	0
01	1	1	0	1
11	x	x	x	x
10	1	1	x	x

(f) Mapa K segmento f: $a + b\bar{c} + b\bar{d} + \bar{c}\bar{d}$

Figura 40: Mapas K para las funciones de codificación de la activación de los segmentos a a f

Recordamos ahora que para cualquier conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\xi, \zeta\}$ se cumple:

$$\mathrm{Con}(\Gamma, \xi \vee \zeta) = \mathrm{Con}(\Gamma, \xi) \cap \mathrm{Con}(\Gamma, \zeta)$$

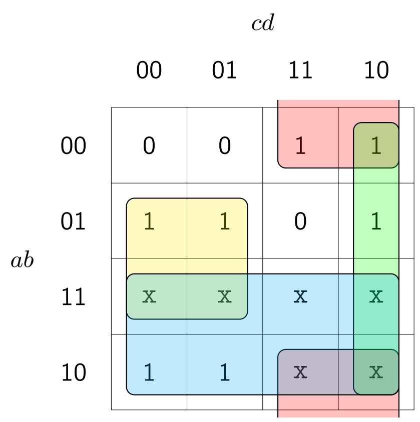
Por lo que, supuesto lo opuesto de la afirmación 2), bastará con concluir que $\langle a, b \rangle \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ en cada uno de los casos que hemos llegado a distinguir. En definitiva, el razonamiento es por casos según los siguientes (en realidad tres):

- $a \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ y $a \neq 0$ (por $\neg\alpha \wedge \neg\varphi$); si $a \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ entonces existe $x \in A$ tal que $0 < x < a$. Así pues $\langle 0, 0 \rangle < \langle x, b \rangle < \langle a, b \rangle$ y así $\langle a, b \rangle$ no es átomo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- $b \neq 0$ y $a \neq 0$ (por $\neg\beta \wedge \neg\varphi$); en este caso se tiene que $\langle 0, 0 \rangle < \langle a, 0 \rangle < \langle a, b \rangle$ y así $\langle a, b \rangle$ no es átomo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- $b \neq 0$ y $b \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ (por $\neg\beta \wedge \neg\psi$); si $b \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ entonces existe $y \in B$ tal que $0 < y < b$. Así pues $\langle 0, 0 \rangle < \langle a, y \rangle < \langle a, b \rangle$ y así $\langle a, b \rangle$ no es átomo de $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$.
- $a \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ y $b \notin \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$ (por $\neg\alpha \wedge \neg\psi$); éste es un caso específico de los anteriormente tratados, a menos que alguno de los elementos, a ó b, sea igual a 0. Si $a = 0 = b$ concluimos que $\langle a, b \rangle$ no es un átomo debido a que para serlo es condición necesaria la no nulidad. Si $a \neq 0$ pero $b = 0$, tomaremos $x \in A$ tal que $0 < x < a$ y entonces $\langle 0, 0 \rangle < \langle x, 0 \rangle < \langle a, b \rangle$ con lo que $\langle a, b \rangle$ no puede ser átomo. Si el caso es $a = 0$ pero $b \neq 0$, un razonamiento análogo nos lleva a que $\langle a, b \rangle$ no puede ser átomo.

Recíprocamente, supongamos que se cumple lo que afirma 2) y demostremos, como conclusión, lo que afirma 1). Supongamos, pues, que $a \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A})$ y que $b = 0$. Si $\langle x, y \rangle \in A \times B$ y $\langle 0, 0 \rangle \leq \langle x, y \rangle \leq \langle a, 0 \rangle$; pero al ser a átomo se cumple $x = 0$ ó $x = a$ por lo que en realidad se tiene que $\langle 0, 0 \rangle = \langle x, y \rangle$ o $\langle x, y \rangle = \langle a, b \rangle$ y de ello que $\langle a, b \rangle \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Si se da que $a = 0$ y $b \in \mathrm{Atm}(\mathbf{B})$, un razonamiento análogo conduce a que también $\langle a, b \rangle \in \mathrm{Atm}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$. Así pues se tiene demostrada la afirmación 1). $\square$

Input				Output
a	b	c	d	segmento g
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	x
1	0	1	1	x
1	1	0	0	x
1	1	0	1	x
1	1	1	0	x
1	1	1	1	x

(a) Codif. segmento g



(b) Mapa K segmento g: $a + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d}$

Figura 41: Codificación de activación del segmento g y mapa K correspondiente.

14. Ejercicios

1. Sean m y n números naturales no nulos tales que $\mathbf{D(m)}$ y $\mathbf{D(n)}$ son álgebras de Boole no triviales. Demuestre que son equivalentes las siguientes afirmaciones:

   a) $\mathbf{D(mn)}$ es un álgebra de Boole y es isomorfa a $\mathbf{D(m)} \times \mathbf{D(n)}$

   b) $(m,n) = 1$

2. Para cualquier álgebra de Boole $\mathbf{B}$ y para todo $a,b,c \in B$ se cumple:

   a) $a \leq a + b$

   b) $ab \leq a$

   c) $a + b \leq c$ siempre que $a \leq c$ y $b \leq c$.

3. Calcule el número natural n sabiendo que: $\mathbf{D(n)}$ es un álgebra de Boole, que 42 y 66 son elementos de $\mathbf{D(n)}$ y que 42 es un coátomo. Encuentre todos los elemtos de $D(n)$ tal que $42 \wedge \bar{x} = 6$.

4. Demuestre que cualquiera de los siguientes conjuntos bastan para generar todas las funciones de $\mathbf{F(B_2, 2)}$:

   a) $\{\supset, ^{-}\}$

   b) $\{\supset, 0\}$

   c) $\{\uparrow\}$ ($\uparrow$ es conocida como *barra de Sheffer* y representada muy comunmente como $|$, en notación polaca Dxy)

   d) $\{\downarrow\}$ ($\downarrow$ es conocida como *flecha de Peirce* o *daga de Quine* y representada también como $\dagger$, en notación polaca Xxy)

5. Sea $\mathbf{B}$ un álgebra de Boole. Demuestre que para cualesquiera $a,b,c \in B$, $b = c$ siempre que $a+b = a+c$ y $ab = ac$.

6. Sean a y b números naturales menores o iguales que 3, sea $(xy)_2$ la expresión binaria de a y sea $(zt)_2$ la expresión binaria de b. Definimos la función booleana $f \colon B_2^4 \longrightarrow B_2$ siguiente:

$$f(x,y,z,t) = \begin{cases} 1 & \text{, si } a \leq b \\ 0 & \text{, si } a > b \end{cases}$$

   Encuentre una expresión booleana para la función f y seguidamente encuentre una expresión lo más reducida posible de f como suma de productos de literales.

7. Sea $f \colon B_2^4 \longrightarrow B_2$ la función booleana definida como:

$$f(x,y,z,t) = \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t} + \bar{x}y(\bar{z}+\bar{t}) + (x \oplus y)\bar{z}\bar{t} + x \downarrow (\bar{y}+\bar{z}) + xy\bar{z}$$

   Entonces:

   a) Encuentre la expresión de f como suma de minterm.

   b) Calcule una expresión de f que siendo suma de productos sea también minimal con esa forma.

   c) Calcule una expresión de f que siendo producto de sumas sea también minimal con esa forma.

8. Sean $f, g \colon B_2^3 \longrightarrow B_2$ las funciones booleanas definidas como:

$$f(x,y,z) = (x \uparrow y) \uparrow z \qquad g(x,y,z) = (x \downarrow y) \downarrow z$$

   Entonces:

   a) Calcule las respectivas formas canónicas normales disyuntivas (sumas de minterm).

b) Dé para cada una de las funciones una expresión minimal como sumas de productos.

c) Demuestre que $g \leq f$.

d) Calcule una expresión minimal como producto de sumas de:

$$h(x,y,z,t) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{, si } t = 0 \\ g(x,y,z) & \text{, si } t = 1 \end{cases}$$

9. Minimice la función de conmutación $f(a,b,c,d) = \prod M(0,1,2,3,4,6,15)$.

10. Minimice la función de conmutación $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15)$ mediante el algoritmo de Quine-McCluskey y el de los mapas K.

11. Minimice la función de conmutación $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,3,4,6,7,8,9,11,15)$ mediante el método de Quine-McCluskey.

12. Minimice la función $f(a,b,c,d,e) = \sum m(0,1,3,8,9,13,14,15,16,17,19,24,25,27,31)$ mediante el método de Quine-McCluskey.

13. En una organización toma las decisiones un comité formado por tres personas. Para ello, cada individuo vota sí o no a cada propuesta formulada. Una propuesta prospera si recibe al menos dos de los tres votos. Diseñar un circuito que determine cuando prospera una propuesta.

14. Para la función $f(x,y,z) = xy + xz + yz$, dar su forma normal disyuntiva calculada por dos métodos distintos. (Respuesta: $xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$)

15. Minimice la función $f(x,y,z) = xyz + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z}$ mediante el método de Quine-McCluskey.

16. Diseñe un circuito con una entrada binaria de cuatro bits, digamos $\langle a,b,c,d \rangle$, siendo a el dígito más significativo, que produzca salida lógica alta sii detecta un número primo en la entrada.

17. Diseñe un circuito con una entrada binaria de cinco bits, digamos $\langle a,b,c,d,e \rangle$, siendo a el dígito más significativo, que produzca salida lógica alta sii detecta un número primo en la entrada.

18. Compare el circuito que resulta del Ejercicio 15 con el obtenido en el Ejercicio 13. ¿Qué relación hay entre ambos?

19. Algunas veces, las instalaciones eléctricas se controlan mediante más de un interruptor. Los circuitos tienen que ser diseñados de modo que al accionar cualquier interruptor de la instalación la luz se encienda si está apagada y se apague si está encendida. Diseñar circuitos que modelen esta situación para los casos de dos y tres interruptores.

20. Considere la función booleana:

$$f(a,b,c,d) = \prod M(3,5,7,8,10,11,12,13)$$

y dé todas las expresiones minimales como producto de sumas y como suma de productos.

21. Encuentre una expresión minimal como suma de productos de las siguientes funciones:

a) $f(a,b,c) = \sum m(0,1,2,4,5)$

b) $f(a,b,c) = \sum m(2,3,4,6)$

c) $f(a,b,c,d) = \sum m(0,6,8,11,14,15)$

d) $f(a,b,c,d) = \sum m(1,3,5,6,7,8,9,10,11,13,15)$

e) $f(a,b,c,d) = \sum m(1,2,3,4,10,12) + \sum d(8,9,11)$

f) $f(a,b,c,d,e) = \sum m(1,5,6,8,12,24,26,27) + \sum d(13,22,28)$

22. Encuentre una expresión minimal como producto de sumas de la función:

$$f(a,b,c,d) = \prod M(0,1,3,6,7,8,9,13,15)$$

y compárela con la expresión mínima como suma de productos.

23. Encuentre dos expresiones minimales de la función de conmutación:

$$f(a,b,c,d) = \sum m(4,5,7,12,14,15)$$

expresadas como suma de productos.

24. Encuentre la expresión del *Decodificador BCD a 7 segmentos* según la explicación del mismo esbozada en en Ejemplo 13.1.

Índice alfabético