3.3. Expresión matricial de una aplicación lineal

Sabemos que, dada una matriz $A \in M_{m\times n}(K)$, se puede definir la aplicación lineal $f_A : K^n \to K^m$ sin más que multiplicar por A las n-úplas del dominio, consideradas como columnas (véase ejemplo 3.6(ii)). Teniendo en cuenta que, usualmente, consideramos los elementos de K^n y K^m como filas, mientras que escritos por columnas representan las coordenadas en la base usual $\mathcal{B}_u^n$ de K^n y $\mathcal{B}_u^m$ de K^m, podemos expresar f_A como sigue:

$$f_A : K^n \to K^m, \qquad (f_A(x))_{\mathcal{B}_u^m} = A \cdot x_{\mathcal{B}_u^n}. \tag{3.1}$$

Nuestro objetivo será mostrar cómo, aunque en espacios vectoriales arbitrarios no existe ninguna base preferida (a la que podamos llamar usual o canónica), cualquier aplicación lineal se puede representar de esta forma, una vez escogidas bases del dominio y codominio. A lo largo de toda esta sección V y V' serán siempre espacios vectoriales de dimensiones $n,m \in \mathbb{N}$, respectivamente.

3.3.1. Matriz asociada a una aplicación lineal

Definición 3.28. *Sea $f : V \to V'$ lineal y sean $\mathcal{B} = (v_1,\dots,v_n)$ y $\mathcal{B}' = (v'_1,\dots,v'_m)$ bases de V y V', resp. La* matriz de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ *es la matriz en $M_{m\times n}(K)$, la cual, denotaremos $M(f,\mathcal{B},\mathcal{B}')$ o, preferentemente, $M(f,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$, cuya columna j-ésima contiene las coordenadas del vector $f(v_j)$ respecto de $\mathcal{B}'$, para todo $j \in \{1,\dots,n\}$. Lo simbolizamos así:*

$$M(f,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \big(f(v_1)_{\mathcal{B}'}\,|\,f(v_2)_{\mathcal{B}'}\,|\,\dots\,|\,f(v_n)_{\mathcal{B}'}\big).$$

Con esta definición, como anunciamos, podemos generalizar la expresión vista para f_A.

Proposición 3.29 (Ecuaciones de f en $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$)**.** *En las condiciones anteriores, se tiene:*

$$f(v)_{\mathcal{B}'} = M(f,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Llamaremos a la igualdad anterior expresión matricial de f en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

Demostración. Tomemos escalares (a_{ij}) de modo que:

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v'_i.$$

De esta forma, la j-ésima columna de $M(f,\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ contiene exactamente a los escalares a_{ij} con $i = 1,\dots,n$. Escribamos ahora un vector genérico $v \in V$ como combinación lineal de de $\mathcal{B}$:

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j$$

es decir, $v_{\mathcal{B}}$ contiene a los escalares x_i con $i = 1,\dots,n$. Buscamos calcular las coordenadas $(x'_1,\dots,x'_m)^t$ de $f(v)$ en $\mathcal{B}'$. Teniendo encuenta las dos últimas fórmulas y usando la linealidad de f, se tiene:

$$\begin{aligned} f(v) &= f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot v'_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot a_{ij} \cdot v'_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j\right) \cdot v'_i. \end{aligned}$$

Obsérvese que las coordenadas buscadas x'_i verifican

$$f(v) = \sum_{i=1}^{m} x'_i \cdot v'_i$$

y, por la unicidad de estas coordenadas, se pueden igualar los coeficientes de cada v'_i obteniéndose:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$$

esto es, la expresión buscada $f(v)_{\mathcal{B}'} = (a_{ij}) \cdot v_{\mathcal{B}}$. ∎

Observación 3.30. Dada una matriz $A \in M_{m\times n}$, la aplicación lineal asociada $f_A : K^n \to K^m$ verifica:

$$A = M(f_A, \mathcal{B}_u^m \leftarrow \mathcal{B}_u^n).$$

De hecho, la fórmula (3.1) es la expresión matricial de f_A en $\mathcal{B}_u^n$ y $\mathcal{B}_u^m$. Más aún, toda aplicación lineal $f : K^n \to K^m$ es del tipo f_A, donde A se calcula simplemente como $A = M(f, \mathcal{B}_u^m \leftarrow \mathcal{B}_u^n)$.

El siguiente resultado puede verse como una generalización del caso K^n, K^m a cualesquiera e.v.

Corolario 3.31. *Sea $A \in M_{m\times n}(K)$, y $V(K), V(K')$ e.v. de dimensiones n, m resp. Fijadas bases $\mathcal{B}$ de V y $\mathcal{B}'$ de V' existe una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$.*

Demostración. Es una aplicación inmediata del teorema 3.8 (compruébese como ejercicio). ∎

Observación 3.32. Un caso particular de aplicación lineal es la identidad $I_V : V \to V$. Claramente, $M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B})$ es igual a la matriz identidad I_n para cualquier base $\mathcal{B}$. Sin embargo, si tomamos dos bases distintas se tiene:

$$M(I_V, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \big((v_1)_{\mathcal{B}'} \,|\, (v_2)_{\mathcal{B}'} \,|\, \dots \,|\, (v_n)_{\mathcal{B}'}\big) = M(I, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}),$$

esto es, las matrices de cambio de base pueden verse como casos particulares de las matrices de aplicaciones lineales.

El siguiente resultado muestra una primera propiedad de compatibilidad de las operaciones definidas entre matrices y entre aplicaciones lineales.

Proposición 3.33. *Sean $V(K), V'(K), V''(K)$ e.v. y $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}''$, resp., bases ordenadas de cada uno.*
(i) Si $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ son lineales entonces:

$$M(g \circ f, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) = M(g, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}).$$

(ii) f es un isomorfismo si y sólo si $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ es regular. En este caso

$$M(f^{-1}, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^{-1}$$

Demostración. Para (i), la demostración es análoga a la del cambio de base estudiada en el tema anterior. Sea v cualquier vector de V. Por la proposición 3.29:

$$g(f(v))_{\mathcal{B}''} = M(I, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot f(v)_{\mathcal{B}'} \qquad f(v)_{\mathcal{B}'} = M(I, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Sustituyendo la segunda igualdad en la primera, y usando la asociatividad del producto de matrices:

$$g(f(v))v_{\mathcal{B}''} = \big(M(g, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\big) \cdot v_{\mathcal{B}}.$$

Por otra parte, también sabemos:

$$(g \circ f(v))_{\mathcal{B}''} = M(g \circ f, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot v_{\mathcal{B}}$$

Restando las dos igualdades anteriores se tiene entonces:

$$\big(M(g \circ f, \mathcal{B}'' \leftarrow \mathcal{B}) - M(g, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\big) \cdot v_{\mathcal{B}} = 0_{n\times 1}.$$

Por ser esta igualdad válida para todo v, la expresión que multipica a v_B debe ser la matriz nula.

Para (ii), si f es un isomorfismo, basta aplicar la parte (i) y luego la observación 3.32 para obtener:

$$M(f^{-1}, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}) = I_n,$$

Recíprocamente, si $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ es regular, la única aplicación lineal $h : V \to V'$ tal que $M(h, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})^{-1}$ (recuérdese el corolario 3.31), verifica:

$$M(h, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = I_n = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}),$$
$$M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(h, \mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}') = I_n = M(I_{V'}, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}')$$

de donde $h \circ f = I_V, f \circ h = I_{V'}$, esto es, f es biyectiva y h es la inversa de f. ∎

Corolario 3.34. *Sea $f : V \to V'$ lineal, $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ dos bases de V y $\mathcal{B}', \bar{\mathcal{B}}'$ dos bases de V'. Entonces:*

$$M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = M(I_{V'}, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \mathcal{B}') \cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$$

Demostración. Trivialmente, $f = I_{V'} \circ f \circ I_V$ y por la proposición 3.33(i) el miembro derecho es $M(I_{V'} \circ f \circ I_V, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$. ∎

3.3.2. Rango y matrices equivalentes

El corolario 3.34 permite ver la relación entre la matriz de una misma apliación lineal cuando se cambian las bases. A onctinuación, estudiaremos con detalle lo que tienen en común todas esas bases. El siguiente ejercicio permite comprobar una primera relación con las transformaciones elementales.

Ejercicio 3.35. *Sea $f : V \to V'$ lineal, $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ dos bases de V y $\mathcal{B}', \bar{\mathcal{B}}'$ dos bases de V', $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \ldots, v'_m)$. Calcular la relación entre $M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$ y $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ en cada caso:*

1. *(Transformaciones elementales por columnas.) $\bar{\mathcal{B}}' = \mathcal{B}'$ y $\bar{\mathcal{B}}$ se obtiene de $\mathcal{B}$, para $1 \le i < j \le n$:*

   1.- Cambiando de orden los elementos v_i y v_j.

   2.- Cambiando v_1 por $a \cdot v_i$, siendo $a \neq 0$ ($a \in \mathbb{K}$).

   3.- Cambiando v_i por $a \cdot v_i + v_j$, siendo $a \in \mathbb{K}$.

2. *(Transformaciones elementales por filas.)* $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B}$ *y* $\bar{\mathcal{B}}'$ *se obtiene de* $\mathcal{B}'$*, para* $1 \leq i < j \leq m$*:*

   1.- Cambiando de orden los elementos v'_i *y* v'_j*.*

   2.- Cambiando v'_1 *por* $a^{-1} \cdot v'_i$*, siendo* $a \neq 0$ *(*$a \in \mathbb{K}$*).*

   3.- Cambiando v'_i *por* $v'_i - a \cdot v_j$*, siendo* $a \in \mathbb{K}$*.*

Proposición 3.36. *El rango de una aplicación lineal* $f : V \to V'$ *coincide con el de su matriz* $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$ *en cualesquiera bases* $\mathcal{B}$ *de* V *y* $\mathcal{B}'$ *de* V'*.*

Demostración. Si $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}, \mathcal{B}' = \{v'_1, \ldots, v'_m\}$ entonces el rango de f es la dimensión de $L\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\} \subset V'$. Como sabemos que la aplicación $b_{\mathcal{B}'} : K^m \to V', (x_1, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{i=1}^m x_i v'_i$ es un isomorfismo, esa dimensión coincide con la de $L\{b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_1)), \ldots, b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_n))\} \subset K^m$. El resultado se concluye entonces porque cada $b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_i))$ es precisamente la columna i-ésima de $M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$. ∎

Como consecuencia de la demostración del teorema del rango, se tiene entonces:

Proposición 3.37. *Sea* $f : V \to V'$ *lineal. Entonces existen bases* $\mathcal{B}$ *de* V *y* $\mathcal{B}'$ *de* V' *tales que:*

$$M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ \hline O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right),$$

donde $r \in \{0, 1, \ldots, \mathrm{Min}\{m, n\}\}$ *es el rango de* f *(por lo que está unívocamente determinado).*

Demostración. Procediendo como en la demostración del teorema del rango, tómese una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots v_n\}$ donde ahora son los últimos $n - r$ vectores los que forman una base del núcleo (en aquel teorema se pusieron en las primeras posiciones). Sabemos entonces que $\{f(v_1), \ldots, f(v_r)\}$ es un conjunto l. i., por lo que se puede ampliar hasta una base $\mathcal{B}' = \{f(v_1), \ldots, f(v_r), v'_{r+1}, \ldots, v'_m\}$ de todo V'. Es inmediato entonces comprobar que la matriz de f en estas bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ es de la forma requerida. ∎

Observación 3.38. Obsérvese que, si tomamos otras dos bases, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V y V' resp., por la fórmula del cambio de base para aplicaciones lineales (corolario 3.34), se tiene

$$M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = Q^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r \times (n-r)} \\ \hline O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{array} \right) \cdot P$$

donde las matrices P y Q son de cambio de base y, por tanto, regulares. Concretamente, $P = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) \in Gl(n, K)$. y $Q = M(I_{V'}, \mathcal{B}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}') \in Gl(m, K)$

Esta relación entre matrices y aplicaciones lineales, motiva los siguientes conceptos.

Definición 3.39. *Sean* $A, C \in M_{m \times n}(K)$*:*

(i) El núcleo de la matriz A*, denotado* $\mathrm{Nuc}(A)$*, es:*

$$\mathrm{Nuc}(A) = \{x \in M_{n \times 1} \, | A \cdot x = 0\},$$

que coincide con el núcleo de la aplicación $f_A : K^n \to K^m$ *(tomando sus elementos por columnas).*

(ii) A *y* C *son* equivalentes *si existen e.v.* V, V'*, bases* $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}$ *de* V*,* $\mathcal{B}', \bar{\mathcal{B}}'$ *de* V' *y una aplicación lineal* $f : V \to V'$ *tales que:*

$$A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}), \qquad C = M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}).$$

Proposición 3.40. *Sean $A, C \in M_{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones equivalen:*

1. *A y C son equivalentes.*
2. *A y C tienen el mismo rango*[6].
3. *A y C son equivalentes a una misma matriz $m \times n$ del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$ (necesariamente, con r unívocamente determinado).*
4. *Existen matrices regulares $P \in Gl(n,K)$ y $Q \in Gl(m,K)$ tales que*[7] *$C = Q^{-1}\cdot A\cdot P$.*
5. *Escogidos dos e.v. V, V' de dimensiones n, m, resp. y una base $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ en cada uno de ellos, resp., y construida la única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que*
$$A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}),$$
se pueden hallar dos nuevas bases $\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{B}}'$ en V, V', resp. tales que
$$C = M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}).$$
En particular, puede escogerse $V = K^n$, $V' = K^m$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u^m$.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$). Ambas matrices sirven para la expresión matricial de una misma aplicación lineal f y sabemos entonces (proposición 3.36): rango(A) = rango(f) = rango (C).

($2 \Rightarrow 3$) Consideramos las aplicaciones lineales asociadas $f_A, f_C : K^n \to K^m$. Por la proposición 3.37 sabemos que A y C son equivalentes a matrices del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_{r_A} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, $\left(\begin{array}{c|c} I_{r_C} & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, resp. El resultado se sigue de r_A = rango (A) = rango $(C) = r_C$.

($3 \Rightarrow 4$) Por la observación 3.38 existen matrices regulares $P_A, P_C \in Gl(n,K)$ y $Q_A, Q_C \in Gl(m,K)$ tales que:
$$A = Q_A^{-1}\cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)\cdot P_A, \qquad C = Q_C^{-1}\cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)\cdot P_C$$
de donde
$$Q_A\cdot A\cdot P_A^{-1} = Q_C\cdot C\cdot P_C^{-1}, \qquad \text{y, por tanto,} \qquad C = (Q_C^{-1}\cdot Q_A)\cdot A\cdot (P_A^{-1}\cdot P_C)$$
por lo que basta con tomar $P = P_A^{-1}\cdot P_C \in Gl(n,K)$ y $Q = Q_A^{-1}\cdot Q_C \in Gl(m,K)$.

($4 \Rightarrow 5$) Dado $A = M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})$, construiremos las nuevas bases requeridas a partir de P y Q. Sean $\bar{\mathcal{B}}$ y $\bar{\mathcal{B}}'$ las únicas bases en V y V' que verifican respectivamente: $P = M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}), Q = M(I_{V'}, \mathcal{B}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}}')$. Se tiene entonces:
$$C = Q^{-1}\cdot A\cdot P = M(I_{V'}, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \mathcal{B}')\cdot M(f, \mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B})\cdot M(I_V, \mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = M(f, \bar{\mathcal{B}}' \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$$
(la primera igualdad por hipótesis y la última por el cambio de bases para aplicaciones lineales).

($5 \Rightarrow 1$) Trivial de la definicón de matrices equivalentes. ∎

[6] Así, dos matrices serán equivalentes si y sólo si tienen el mismo rango, el mismo número de filas y el mismo número de columnas (la igualdad para filas y columnas estaba ya supuesta).

[7] Obviamente, la propiedad es cierta escribiendo Q en lugar de Q^{-1}. No obstante, escogemos Q^{-1} por conveniencia, de modo que en la observación 3.38 P y Q representen cambios de bases "con barra" $\bar{\mathcal{B}}, \bar{\mathcal{B}}'$ a "sin barra" $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ (su utilidad será manifiesta cuando se estudien las matrices semejantes).

Ejercicio 3.41. *Compruébese que cada una de las siguientes propiedades caracteriza que las matrices A y C sean equivalentes:*

(i) Las aplicaciones lineales asociadas $f_A, f_C : K^n \to K^m$ tienen el mismo rango.

(ii) C puede obtenerse a través de transformaciones elementales por filas y columnas de A (véase el ejercicio 3.35)[8].

Como consecuencia inmediata de la proposición 3.40 anterior (p.ej., su punto 2):

Corolario 3.42. *La relación binaria "ser equivalente a" en el conjunto de todas las matrices $M_{m\times n}$ es una relación de equivalencia.*

Finalmente, demos una interpretación de los SEL.

Corolario 3.43. *Sea $A \in M_{m\times n}(K), b \in M_{m\times 1}(K)$:*

- *El SEL $Ax = b$ es compatible si y sólo si $b \in Im(f_A)$.*
- *En este caso, el conjunto de soluciones se escribe a partir de cualquier solución particular x_0 del sistema como x_0+ Nuc $(f_A) := \{x_0 + y \,|\, y \in \mathrm{Nuc}(f_A)\}$.*
- *La dimensión de* Nuc (f_A) *coincide con $n-$ $dim(Imf_A)$*
- *Cuando el SEL sea compatible, será también determinado si y sólo si f_A es inyectiva.*

3.3.3. Estructura de espacio vectorial

Dados los e.v. $V(K), V'(K)$ (no necesariamente finitamente generados) consideremos el conjunto de todas las aplicaciones lineales de V en V':

$$\mathrm{Lin}(V,V') := \{f : V \to V' \,|\, f \text{ es lineal}\}.$$

Usando la estructura de e.v. en V', podemos definir unas operaciones suma y producto por escalares en $\mathrm{Lin}(V,V')$:

$$\begin{array}{rlll} + : \mathrm{Lin}(V,V') \times \mathrm{Lin}(V,V') \to \mathrm{Lin}(V,V'), & (f,g) \mapsto f+g & \text{donde} & (f+g)(v) := \; f(v)+g(v), \\ \cdot : K \times \mathrm{Lin}(V,V') \to \mathrm{Lin}(V,V'), & (a,g) \mapsto a\cdot f & \text{donde} & (a\cdot f)(v) := \; a\cdot f(v), \end{array}$$

para todo $v \in V$, $a \in K$. No obstante, antes se debe comprobar que las aplicaciones así definidas son lineales.

Lema 3.44. *Las definiciones anteriores son consistentes, esto es, $f+g \in \mathrm{Lin}(V,V')$, $a\cdot f \in \mathrm{Lin}(V,V')$, para todo $f,g \in \mathrm{Lin}(V,V')$ y todo $a \in K$.*

Demostración. Para la suma (el producto por escalares queda como ejercicio):

$$\begin{aligned} (f+g)(av+vw) = &\; f(av+bw)+g(av+bw) = (af(v)+bf(w))+(ag(v)+bg(w)) \\ = &\; a(f(v)+g(v))+b(f(v)+g(w)) = a\cdot(f+g)(v)+b\cdot(f+g)(w) \end{aligned}$$

para todo $v,w \in V$, $a,b \in K$, donde en la primera línea se usa primero la definición de la suma en $\mathrm{Lin}(V,V')$ y después la linealidad de f y g, y en la segunda se agrupan términos operando en V' y se vuelve a aplicar la definición de suma en $\mathrm{Lin}(V,V')$. ∎

[8]Para un estudio más detallado de las transformaciones elementales puede verse el libro de L. Merino y E. Santos.

Proposición 3.45. *Con estas operaciones,* $(\mathrm{Lin}(V,V'),+\cdot K)$ *es un espacio vectorial (al cual denotaremos simplemente* $\mathrm{Lin}(V,V')$*).*

Demostración. Queda como ejercicio, que puede comprobarse de al mneos dos maneras distintas: (a) demostrando directamente todas las propiedades de e.v., o (b) puesto que se sabe del tema anterior que el conjunto $F(X,V')$ de todas las aplicaciones de X en V' tiene una estructura natural de e.v., comprobando que $\mathrm{Lin}(V,V')$ es un subespacio vectorial de $F(X,V')$ para $X=V$. ∎

En el caso finitamente generado, hay una relación natural entre estas operaciones de $\mathrm{Lin}(V,V')$ y las de $M_{m\times n}(K)$.

Proposición 3.46. *Sean V,V' e.v. sobre K de dimensiones $n,m\in\mathbb{N}$ con bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, resp. Entonces:*

$$M(f+g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})=M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})+M(g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}),\qquad M(a\cdot f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})=a\cdot M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$$

para todo $f,g\in\mathrm{Lin}(V,V')$, $a\in K$.

Demostración. Sean $\mathcal{B}=\{v_1,\dots,v_n\}$ y $\mathcal{B}'=\{v_1',\dots,v_m'\}$, y sea $b_{\mathcal{B}'}^{-1}:V'\to K^m$ la aplicación que a cada $v'\in V'$ le hace corresponder sus coordenadas en $\mathcal{B}'$. La expresión para la suma se deduce de que la columna j-ésima de $M(f+g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$ está formada por:

$$((f+g)(v_j))_{\mathcal{B}'}=b_{\mathcal{B}'}^{-1}((f+g)(v_j))=b_{\mathcal{B}'}^{-1}(f(v_j))+b_{\mathcal{B}'}^{-1}(g(v_j)),$$

que es la suma de las columnas j-ésimas de $M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$ y $M(g,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})$. Para el producto por escalares, razónese análogamente. ∎

La relación entre las estructuras de e.v. de matrices y aplicaciones lineales queda entonces resumida en el siguiente resultado.

Teorema 3.47. *Sean V,V' e.v. sobre K de dim. $n,m\in\mathbb{N}$. Fijadas bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ de V,V' resp., la aplicación $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ definida por:*

$$F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}:\mathrm{Lin}(V,V')\to M_{m\times n},\qquad f\mapsto M(f,\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B}),$$

es un isomorfismo de e.v. En consecuencia, $dim_k\mathrm{Lin}(V,V')=m.n$, y una base de $\mathrm{Lin}(V,V')$ es:

$$B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}:=\left\{f_{ij}\in\mathrm{Lin}(V,V'):M(f_{ij},\mathcal{B}'\leftarrow\mathcal{B})=E_{ij},\ \forall i\in\{1,\dots,m\},\forall j\in\{1,\dots,n\}\right\}$$

donde $E_{ij}\in M_{m\times n}$ es la matriz que tiene todos sus elementos nulos excepto un 1 en la posición (i,j) (esto es, $(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$).

Demostración. La linealidad de $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ es el contenido de la proposición 3.46 anterior, y su biyectividad ya se conocía (corolario 3.31). El resto es inmediato de que el conjunto de las matrices E_{ij} forma una base de $M_{m\times n}(K)$ y, por tanto, el conjunto de sus preimágenes por $F_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ es una base de $\mathrm{Lin}(V,V')$. ∎

3.3.4. Anillo de endomorfismos y matrices semejantes

Recordemos que los endomorfismos son un caso especial de aplicaciones lineales $f : V \to V'$ en los que el dominio coincide con el codominio, $V = V'$. Denotaremos $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Lin}(V,V)$, y todos los resultados vistos a lo largo de esta anterior resultan aplicables ahora. No obstante, se tiene ahora que la composición de dos endomorfismos siempre tiene sentido y es un nuevo endomorfismo, por lo que se puede definir la ley de composición interna en $\mathrm{End}(V)$:

$$\circ : \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V) \qquad (f,h) \mapsto f \circ h$$

Esto es similar al caso de las matrices cuadradas $M_n(K)$, para las cuales el producto proporcionaba una ley de composición interna. Recuérdese además que $M_n(K)$ gozaba de una estructura de anillo unitario con la suma y producto (de la cual carecían las matrices no cuadradas).

Proposición 3.48. $(\mathrm{End}(V), \circ, +)$ *es un anillo unitario (al cual llamaremos* anillo $\mathrm{End}(V)$*).*
$(\mathrm{End}(V), +, \cdot K)$ *es un espacio vectorial (al que denotaremos simplemente* $\mathrm{End}(V)$*).*

Demostración. Se puede comprobar fácilmente que se verifican todas las propiedades de anillo, siendo la aplicación identidad I_V su elemento unitario. La segunda afirmación es un caso particular de la estructura de e.v. de $\mathrm{Lin}(V,V')$. ∎

En el caso finitamente generado, cuando se estudian las matrices asociadas a endomorfismos se tiene una posibilidad nueva: escoger la misma base $\mathcal{B}$ en el dominio y codominio. Denotaremos:

$$M(f,\mathcal{B}) := M(f,\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}).$$

Se tiene entonces como una consecuencia inmediata del teorema 3.47:

Corolario 3.49. *Sea $V(K)$ un e.v. de dim. $n \in \mathbb{N}$. Fijada una base $\mathcal{B}$ de V la aplicación:*

$$F_{\mathcal{B}} : \mathrm{End}(V) \to M_n, \qquad f \mapsto M(f,\mathcal{B}'),$$

es un isomorfismo de e.v. En consecuencia, $\dim_k \mathrm{Lin}(V,V') = n^2$, y una base de $\mathrm{End}(V)$ *es:*

$$B_{\mathcal{B}} := \left\{ f_{ij} \in \mathrm{End}(V) : M(f_{ij},\mathcal{B}) = E_{ij},\ \forall i,j \in \{1,\dots,n\} \right\}.$$

Observación 3.50. De la aplicación $F_{\mathcal{B}}$ se puede decir también que es un isomorfismo de anillos unitarios, al ser una aplicación biyectiva entre dos anillos unitarios que verifica:

$$F_{\mathcal{B}}(f \circ h) = F_{\mathcal{B}}(f) \cdot F_{\mathcal{B}}(h), \qquad F_{\mathcal{B}}(f+h) = F_{\mathcal{B}}(f) + F_{\mathcal{B}}(h), \qquad F_{\mathcal{B}}(I_V) = I_n, \qquad \forall f,h \in \mathrm{End}(V),$$

esto es, $F_{\mathcal{B}}$ "preserva" (o "respeta") las estructuras de anillos unitarios de su dominio y codominio. [9]

La elección $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ sugiere el siguiente refinamiento de la relación "ser equivalente a" entre matrices.

[9] También podemos justificar ahora que si dos matrices cuadradas satisfacen $A \cdot C = I_n$ entonces A y C son regulares y $C \cdot A = I_n$, esto es, $C = A^{-1}$. De hecho, tomando, por ejemplo $V = K^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u$ los endomorfismos f,h determinados por A y C resp. verifican $f \circ h = I_V$ por lo que h es biyectivo (en caso contrario, se llega a un absurdo aplicando la composición a un $v \in \mathrm{Nuc}(h) \setminus \{0\}$) y f es biyectivo (al absurdo se llegaría ahora tomando $v \in \mathrm{Nuc}(f) \setminus \{0\}$ y aplicando la composición a $h^{-1}(v)$). En consecuencia, existe la inversa h^{-1} que se puede componer a la derecha de ambos miembros en $f \circ h = I_V$, obteniéndose $f = h^{-1}$. Por tanto, A y C son regulares y $A = M(f,B) = M(h^{-1},B) = M(h,B)^{-1} = C^{-1}$. Demostraciones distintas se obtendrán más adelante, usando determinantes.

Definición 3.51. *Dos matrices cuadradas $A,C \in M_n(K)$ son* semejantes *cuando existe un e.v. $V(K)$, dos bases $\mathcal{B},\bar{\mathcal{B}}$ y un endomorfismo $f \in \mathrm{End}(V)$ que verifican:*

$$A = M(f,B) \qquad y \qquad C = M(f,\bar{\mathcal{B}}).$$

Razonando como en la proposición 3.40 se tiene ahora:

Proposición 3.52. *Sean $A,C \in M_n$. Equivalen:*

1. *A y C son semejantes.*
2. *Existe una matriz regular $P \in Gl(n,K)$ tal que $C = P^{-1} \cdot A \cdot P$.*
3. *Escogidos cualquier e.v. $V(K)$ de dimensión n, y una base $\mathcal{B}$ de V, y construido el único endomorfismo $f : V \to V$ tal que*
$$A = M(f,\mathcal{B}),$$
se puede hallar una nueva base $\bar{\mathcal{B}}$ en V tal que
$$C = M(f,\bar{\mathcal{B}}).$$
En particular, puede escogerse $V = K^n$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_u$.

Demostración. ($1 \Rightarrow 2$). Particularizando la fórmula del cambio de base para aplicaciones lineales:

$$M(f,\bar{\mathcal{B}}) = M(I_V,\bar{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(f,\mathcal{B}) \cdot M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$$

En nuestro caso, por hipótesis, $C = M(f,\bar{\mathcal{B}})$ y $A = M(f,\mathcal{B})$, por lo que basta tomar $P = M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$.

($2 \Rightarrow 3$) Dado $A = M(f,\mathcal{B})$, construiremos la nueva base requerida a partir de P. Sea $\bar{\mathcal{B}}$ la única base en V que verifica: $P = M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}})$. Se tiene entonces:

$$C = P^{-1} \cdot A \cdot P = M(I_V,\bar{\mathcal{B}} \leftarrow \mathcal{B}) \cdot M(f,\mathcal{B}) \cdot M(I_V,\mathcal{B} \leftarrow \bar{\mathcal{B}}) = M(f,\bar{\mathcal{B}})$$

(la primera igualdad por hipótesis y la última por el cambio de bases para aplicaciones lineales).

($3 \Rightarrow 1$) Trivial de la definición de matrices semejantes. ∎

Resulta fácil de comprobar ahora (p. ej, úsese el punto 2 de la proposición anterior):

Corolario 3.53. *La relación binaria "ser semejante a" en $M_n(K)$ es una relación de equivalencia.*

A diferencia del caso de matrices equivalentes, caracterizadas por el rango, no existe una caracterización sencilla de cuándo dos matrices son semejantes. Una condición necesaria la prporciona el siguiente resultado.

Proposición 3.54. *Sean $A,C \in M_n(K)$ dos matrices semejantes. Entonces sus trazas coinciden.*

Demostración. Recordemos primero que si $X,Y \in M_n(K)$ entonces $\mathrm{tr}(X \cdot Y) = \mathrm{tr}(Y \cdot X)$. Usando que $C = P^{-1} \cdot A \cdot P$ se tiene:

$$\mathrm{tr}(C) = \mathrm{tr}\left(P^{-1} \cdot (A \cdot P)\right) = \mathrm{tr}\left((A \cdot P) \cdot P^{-1}\right) = \mathrm{tr}\left(A \cdot (P \cdot P^{-1})\right) = \mathrm{tr}(A)$$

donde se usa la asociatividad del producto y la propiedad anterior de la traza con $X = P^{-1}$, $Y = AP$. ∎

Este resultado tiene la importante consecuencia de que permite dar una definición consistente para la traza de cualquier endomorfismo de un e.v. finitamente generado.

Definición 3.55. *Sea $V(K)$ finitamente generado y $f \in \mathrm{End}(V)$. La* traza *de f se define como la traza de la matriz $M(f,B)$, para cualquier base B de $V(K)$.*

El siguiente ejercicio ilustra la gran diferencia que existe en que dos matrices cuadradas sean semejantes o equivalentes; concretamente, lo muy restrictivo que supone para una matriz el ser semejante a una del tipo $\left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$.

Ejercicio 3.56. *(1) Sea $h \in \mathrm{End}(V)$ que verifica $h \circ h = h$. Demostrar:*
(a) $V = Im(h) \oplus Nuc(h)$ (sea o no V finitamente generado).
(b) Si $dim_K V = n \in \mathbb{N}$, existe una base $\mathcal{B}$ tal que

$$M(h,\mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right)$$

donde r es el rango de P. Por tanto, en cualquier otra base $\bar{\mathcal{B}}$:

$$M(h,\bar{\mathcal{B}}) = P^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c|c} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ \hline O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{array}\right) \cdot P,$$

para alguna matriz regular $P \in Gl(n,\mathbb{R})$.
(2) Recíprocamente, si h es un endomorfismo cuya matriz en alguna base $\bar{\mathcal{B}}$ satisface la igualdad anterior, entonces h verifica $h \circ h = h$.
(3) Como conclusión para dimensión $n \in \mathbb{N}$, un endomorfismo h verifica $h \circ h$ si y sólo existe alguna base tal que la ecuación en coordenadas de h para esa base es

$$x_1' = x_1, \ldots\ldots, x_r' = x_r, \quad x_{r+1}' = 0, \ldots\ldots, x_n' = 0.$$

A estos endomorfismos se les llama proyectores.

3.4. Espacios cocientes y teorema de isomorfía

Hemos visto que las soluciones de un SEL compatible $A \cdot x = b$ se pueden escribir como un conjunto del tipo x_0+ Nucf_A : $\{x_0 + y | y \in \mathrm{Nuc}(f_A)\}$ (corolario 3.42). Este conjunto puede entenderse como un "subespacio (no vectorial) paralelo" a Nucf_A que pasa por x_0.

Veremos ahora que, en general, dado un e.v. $V(K)$ y un subespacio vectorial suyo U, tiene sentido considerar un nuevo espacio vectorial, que denotaremos V/U, cuyos elementos se escriben de modo natural mediante expresiones del tipo $v + U$ (esto es, son los "subespacios paralelos" a U). Como una aplicación de estos espacios vectoriales, veremos un teorema de isomorfía para aplicaciones lineales, que extiende al teorema del rango.

3.4.1. Espacios vectoriales cocientes

Sea $V(K)$ un e.v. y $U \subset V$ un s.v. Definimos la siguiente relación binaria $\sim$ en V:

$$v \sim w \iff v - w \in U$$

Proposición 3.57. *(1) La relación binaria $\sim$ es de equivalencia.*

(2) Para cada $v \in V$, su clase de equivalencia $[v]$ viene dada por $[v] = \{v+u : u \in U\}$ por lo que la denotaremos $v+U$, esto es:

$$v+U := \{v+u \mid u \in U\}.$$

Asimismo, al conjunto cociente $V/\sim$ formado por todas las clases anteriores, lo denotaremos V/U.

Demostración. (1) Propiedad reflexiva: como $v-v=0 \in U$, se tiene $v \sim v$, para todo $v \in V$.

Propiedad simétrica: si $v \sim w$ entonces $v-w=u \in U$ y, al ser U un s.v., $w-v=-u \in U$, esto es, $w \sim v$.

Propiedad transitiva: si $v \sim v'$ y $v' \sim v''$ entonces $v-v'=u \in U$ y $v'-v''=u' \in U$ por lo que $v-v''=(v-v')+(v'-v'')=u+u' \in U$ (la pertenencia a U por ser un s.v.) esto es, $v \sim v''$.

(2) Para demostrar $[v] \subset \{v+u : u \in U\}$, obsérvese que si $v' \in [v]$ entonces $v'-v=u \in U$ por lo que $v'=v+u$ para un $u \in U$. Para la inclusión contraria, como $(v+u)-v=u \in U$ las clases de $v+u$ y v coinciden, esto es, $v+u \in [v]$. ∎

Nos podemos preguntar si V/U hereda una estructura de e.v. a partir de la de V, pues parece natural definir:

$$\begin{array}{rrcl} +: & V/U \times V/U & \to & V/U \\ & (v+U, w+U) & \mapsto & (v+w)+U \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} \cdot: & K \times V/U & \to & V/U \\ & (a, v+U) & \mapsto & (a\cdot v)+U \end{array} \tag{3.2}$$

No obstante, esta definición presenta la dificultad de que se lleva a cabo escogiendo los representantes v y w de cada clase, y podríamos preguntarnos qué ocurriría si tomáramos otros representantes $v' \in v+U$, $w' \in w+U$, esto es, si la clase de $v'+w'$ y $a\cdot v'$ serían las mismas clases que definen $v+w$ y $a\cdot v$, resp. El siguiente lema proporciona una respuesta afirmativa.

Lema 3.58. *Supongamos que v, v', w, w' satisfacen $v+U = v'+U$, $w+U = w'+U$. Entonces:*

$$(v+w)+U = (v'+w')+U \qquad y \qquad (a\cdot v)+U = (a\cdot v')+U,$$

esto es, las operaciones $+$ y $\cdot$ están consistentemente definidas por las expresiones en (3.2).

Demostración. Por hipótesis, $v-v'=u_v \in U, w-w'=u_w \in U$. Por tanto,

$$(v+w)-(v'+w') = (v-v')+(w-w') = u_v+u_w \in U, \qquad a\cdot v - a\cdot v' = a\cdot(v-v') = a\cdot u_v \in U,$$

esto es, $v'+w' \in (v+w)+U$ y también $a\cdot v' \in (a\cdot v)+U$, como se quería. ∎

Proposición 3.59. *Con las operaciones definidas en* (3.2)*, $(V/U, +\cdot K)$ es un espacio vectorial, al cual llamaremos* espacio cociente *de V sobre U, y denotaremos simplemente V/U.*

Demostración. Es una computación directa aplicando las definiciones de las operaciones y las propiedades de e.v. de $V(K)$. Lo demostramos para una de ellas y el resto queda como ejercicio.

Propiedad distributiva del producto por escalares respecto a la suma de vectores:

$$\begin{aligned} a\cdot((v+U)+(w+U)) = &\ a\cdot((v+w)+U) = (a\cdot(v+w))+U = ((a\cdot v)+(a\cdot w))+U \\ = &\ ((a\cdot v)+U)+((a\cdot w)+U) = a\cdot(v+U)+a\cdot(w+U) \end{aligned}$$

donde en las igualdades de la primera línea se usan, por orden, la definición de la suma en V/U, la del producto por escalares en V/U y la propiedad distributiva del producto por escalares en V, mientras que en la segunda se usan la definición de la suma en V/U y la del producto por escalares en V/U. ∎

3.4.2. Base y dimensión de V/U

Como en toda relación de equivalencia, la proyección natural

$$\pi : V \mapsto V/U, \qquad v \mapsto v+U$$

es una aplicación suprayectiva. No obstante, en nuestro caso podemos decir más.

Proposición 3.60. *La proyección π es un epimorfismo de e.v. En consecuencia, la imagen por π de cualquier sistema de generadores de V es un s.d.g. de V/U.*

Demostración. Basta con demostrar que π es lineal, puesto que sabemos es suprayectiva y que la última afirmación se cumple para todos los epimorfismos. Con este fin, para todo $v,w \in U$, y $a,b \in K$:

$$\pi(av+bw) = (av+bw)+U = (av+U)+(bw+U) = a\cdot(v+U)+b\cdot(w+U) = a\pi(v)+b\pi(w),$$

la primera y última igualdades por la definición de π, la segunda por la de la suma en V/U y la tercera por la del producto por escalares en V/U. ∎

El siguiente resultado nos permite computar de manera práctica la dimensión de V/U y una base suya, a partir de elementos de V.

Teorema 3.61. *Sea V un e.v. finitamente generado y $U \subset V$ un subespacio vectorial. Si W es un subespacio complementario de U (esto es, $V = U \oplus W$) y $B_W = \{w_1,\dots,w_k\}$ es una base de W entonces*

$$\pi(B_W) = \{w_1+U,\dots,w_k+U\}$$

es una base de V/U. Por tanto, $dim_K(V/U) = dim_K V - dim_K U$.

Demostración. Si ampliamos B_W hasta una base $B = \{w_1,\dots,w_k,u_1,\dots,u_m\}$ de V, donde $B_U = \{u_1,\dots,u_m\}$ es una base de U. Sabemos por la proposición anterior que $\pi(B)$ es un s.d.g. de V/U y, como $u_1+U,\dots,u_m+U$ son todos iguales a la clase del 0, se pueden suprimir del s.d.g. sin que pierda esta característica, esto es, $\pi(B_W)$ es un s.d.g. de V/U. Para comprobar su independencia lineal, sean $a_1,\dots,a_k \in K$ tales que:

$$0+U = a_1(w_1+U)+\cdots+a_k(w_k+U) = (a_1w_1+\cdots+a_kw_k)+U.$$

Esto quiere decir que $a_1w_1+\cdots+a_kw_k \in U$, por lo que se puede escribir como combinación lineal de la base B_U. Por tanto, existirán escalares $b_1,\dots,b_m \in K$ tales que:

$$a_1w_1+\cdots+a_kw_k+b_1u_1+\cdots+b_ku_m = 0.$$

Como $B = B_W \cup B_U$ es una base, todos los coeficientes de esta combinación lineal son 0; en particular, $a_1 = \cdots = a_k = 0$, como se quería. ∎

Observación 3.62. Es fácil comprobar que el teorema anterior es válido incluso en dimensión infinita, en el sentido de que para cualquier suplementario W de U y cualquier base B_W de W su proyección $\pi(B_W)$ es una base de V/U. Como consecuencia, si U es finitamente generado pero V no lo es, entonces V/U tampoco es finitamente generado.

Observación 3.63. El teorema anterior permite construir explícitamente una base de V/U:

Paso 1: Se construye una base $B_U = \{u_1, \ldots, u_m\}$ de U.

Paso 2: Se amplía B_U hasta una base $B = \{u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ de V.

Paso 3: El conjunto $\{v_{m+1} + U, \ldots, v_n + U\}$ es una base de V/U.

Ejercicio 3.64. Se considera en $M_2(K)$ el subespacio U formado por las matrices de traza nula.

(a) Calcular una base $\mathcal{B}$ de $M_2(K)/U$.

(b) Si $\mathcal{B}_0$ es la base usual de $M_2(K)$ y $\pi : M_2(K) \to M_2(K)/U$ la proyección canónica, calcular las coordenadas de cada uno de los elementos de $\pi(\mathcal{B}_0)$ en la base $\mathcal{B}$ obtenida en el punto anterior.

3.4.3. Teorema de isomorfía

Recordemos que toda aplicación $f : X \to Y$ entre dos conjuntos admitía una descomposición canónica $f = i \circ b \circ p$. Para ello, se establece la relación de equivalencia en X: $x \sim x'$ si y sólo si $f(x) = f(x')$ y se define:

- $p : X \to X/\sim$ es la proyección canónica en el espacio cociente, que resulta ser suprayectiva.
- $b : (X/\sim) \to \mathrm{Im}(f)$, dada por $b([x]) = f(x)$, para todo $x \in X$ está consistentemente definida por cómo se estableció $\sim$, y resulta ser biyectiva.
- $i : \mathrm{Im}(f) \to Y$ es la inclusión natural, que resulta ser inyectiva.

Nuestro objetivo es comprobar que, si X, Y son espacios vectoriales $X = V(K)$, $Y = V'(K)$ y f es lineal, entonces la relación $\sim$ coincide con la que define el espacio cociente de V sobre $\mathrm{Nuc}(f)$, de modo que $V/\mathrm{Nuc}(f)$ resulta ser isomorfo a $\mathrm{Im}(f)$.

Teorema 3.65. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal, y sea $\sim$ la relación de equivalencia en V dada por $v \sim w$ si y sólo si $f(v) = f(w)$. Entonces*

$$v \sim w \Leftrightarrow v - w \in \mathrm{Nuc}(f), \qquad \textit{esto es}, \qquad [v] = v + \mathrm{Nuc}(f), \tag{3.3}$$

y se verifica $f = i \circ b \circ p$ donde:

(i) $p : V \to V/Nuc(f)$ es un epimorfismo de e.v.

(ii) $b : V/Nuc(f) \to Im(f)$ es un isomorfismo de e.v.

(iii) $i : Im(f)) \to V'$ es un monomorfismo de e.v.

Demostración. Para demostrar (3.3):

$$v \sim w \Leftrightarrow f(v) = f(w) \Leftrightarrow f(v - w) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathrm{Nuc}(f),$$

donde en la segunda equivalencia se usa la linealidad de f.

La descomposición $f = i \circ b \circ p$ (incluyendo la consistencia de la definición de b) se sabe que ocurre para cada aplicación, sea lineal o no. No obstante, la linealidad de f asegura que también lo son tanto la inclusión i como la proyección p (esta última por la proposición 3.60). Basta por tanto con demostrar la linealidad de b, para lo cual:

$$\begin{aligned} b((a \cdot (v + \mathrm{Nuc}(f)) + c \cdot (w + \mathrm{Nuc}(f))) &= b((av + cw) + \mathrm{Nuc}(f)) = f(av + cw) = af(v) + cf(w) \\ &= a \cdot b(v + \mathrm{Nuc}(f)) + c \cdot b(w + \mathrm{Nuc}(f)) \end{aligned}$$

para todo $v + \mathrm{Nuc}(f), w + \mathrm{Nuc}(f) \in V/\mathrm{Nuc}(f)$, y todo $a, c \in K$, donde se ha usado sucesivamente la definición de las operaciones en V/U, la definición de b, la linealidad de f y de nuevo la definición de b. ∎

Observación 3.66. Por el punto (ii) se tiene que $V/\mathrm{Nuc}(f)$ es isomorfo a $\mathrm{Im}(f)$. Puesto que, en dimensión finita para V, sabemos (teorema 3.61) que la dimensión del primero es $\dim_K(V/\mathrm{Nuc}(f)) = \dim_K V - \dim\,_K \mathrm{Nuc}(f)$, se reobtiene ahora la fórmula del rango: $\dim_K V = \dim_K \mathrm{Nuc}(f) + \dim_K \mathrm{Im}(f)$.