Daniel Morejas Miguélez

2.)

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Veamos que f es un movimiento rígido

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\sqrt{\frac{3}{8}} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $\vec{f}$ es una isometría lineal $\Rightarrow$ f es un movimiento rígido.

$$\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{9}{32} + \frac{3}{32} + \frac{3}{32} + \frac{9}{32} - \frac{1}{32} + \frac{9}{32} = $$
$$= 1$$

luego f es un movimiento rígido directo, veamos si tiene puntos fijos

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{3}{8}}\,y + \sqrt{\frac{3}{8}}\,z = x \\ &-\sqrt{\frac{3}{8}}\,x + \frac{3}{4}y - \frac{1}{4}z + \frac{1}{\sqrt{2}} = y \\ &-\sqrt{\frac{3}{8}}\,x - \frac{1}{4}y + \frac{3}{4}z - \frac{1}{\sqrt{2}} = z \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &x = 2\sqrt{\frac{3}{8}}\,y + 2\sqrt{\frac{3}{8}}\,z \\ &\cancel{-\frac{6}{8}y} - \frac{6}{8}z + \cancel{\frac{3}{4}y} - \frac{1}{4}z + \frac{1}{\sqrt{2}} = y \\ &\Rightarrow y = -z + \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -\frac{6}{8}y - \frac{6}{\cancel{8}}z - \frac{1}{4}y + \frac{3}{\cancel{4}}z - \frac{1}{\sqrt{2}} = z \Rightarrow$$

$$-y - \frac{1}{\sqrt{2}} = z \Rightarrow \cancel{z} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \cancel{z} \Rightarrow -\frac{2}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{imposible}$$

Luego $P_f = \emptyset$

Como $M(\vec{f}, B)$ con B base canónica, se verifica que $\vec{f} = Id \Rightarrow$ f es un movimiento helicoidal.

Tomamos un punto arbitrario $p = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ y $R = \{(0,0,0), B = \{(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1)\}\}$

las coordenadas de $f(p)$ en R son $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

Como sabemos para algún sistema de referencia euclídea la expresión matricial de f en dicho sistema Euclídeo es:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} c \\ d \\ e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ es semejante se mantiene la traza luego

$$1 + 2\cos\theta = 2 \Rightarrow 2\cos\theta = 1 \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Daniel Monjas Miguélez

~~Ahora buscamos puntos fijos de la aplicación giro~~

El vector de traslación sabemos pertenece $Ker(\vec{f}' - Id_V)$

$$Ker(\vec{f}' - Id_V) = \left\{ (x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{8}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\sqrt{\frac{3}{8}} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= L(\{(0,-1,1)\})$$

$\vec{S} = L(\{(0,-1,1)\})$ y sabemos que $v \in L(\{(0,-1,1)\})$ donde v es el vector de traslación.

Sea $S = \left\{ (x\ y\ z) \in \mathbb{R}^3 : \overrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \in \vec{S} \right\}$, pues ~~si~~ entonces

significa que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ pertenecen a la recta sobre la que gira.

$$\Rightarrow S = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + L\left(\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}\right)$$ pues $\overrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ claramente

pertenece a S, es más, de aquí se obtiene que el vector de traslación es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$