Geometría III

Daniel Morgas Miguelez
2º DGIIM

Relación 3:

1.) Sean $S\subset\mathbb{R}^N$ una hipercuádrica y $L\subset\mathbb{R}^N$ una recta afín. Demostrar que $L\cap S$ es uno de los siguientes casos: o bien vacío, o bien un punto, o bien dos puntos, o bien $L\cap S=L$.

Sea $f:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ una isometría afín tal que (un giro)

$f(L)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^N : x_2=\dots=x_n=0\}$

Como f es una isometría afín se tiene que f es una biyección y por tanto

$f(S)=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^N : xMx^t+2xa^t+b=0\}$, con $a=(a_1,\dots,a_n)$ y $x=(x_1,\dots,x_n)$

Sea $f(L)\cap f(S)$ $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^N$ verifica que $y\in f(L)\cap f(S)$ si y solo si

$y_2=\dots=y_n=0 \Rightarrow m_{11}y_1^2+2a_1y_1+b=0$

$\Rightarrow y_1=\dfrac{-2a_1y_1\pm\sqrt{4-4bm_{11}}}{2m_{11}}$ | si $4bm_{11}>0$ y $4bm_{11}=4\Rightarrow$ $\sqrt{4-4bm_{11}}=0\Rightarrow y_1=-\dfrac{1}{m_{11}}$ con $m_{11}\neq 0$

Luego $f(L)\cap f(S)=\{(-\frac{1}{m_{11}},\dots,y_n)=f(p)\}\Rightarrow L\cap S=\{p\}$

si $4bm_{11}>0$, $4bm_{11}<4$ y $m_{11}\neq 0\Rightarrow y_1=\begin{cases}\dfrac{-2a_1y_1+\sqrt{4-4bm_{11}}}{2m_{11}}\\[2ex] \dfrac{-2a_1y_1-\sqrt{4-4bm_{11}}}{2m_{11}}\end{cases}$

Luego $\left(\dfrac{-2a_1y_1+\sqrt{4-4bm_{11}}}{2m_{11}},\dots,y_n\right)=p$ y $\left(\dfrac{-2a_1y_1-\sqrt{4-4bm_{11}}}{2m_{11}},\dots,x_n\right)=q$

Luego $f(L)\cap f(S)=\{f(p),f(q)\}\Rightarrow L\cap S=\{p,q\}$

si $4bm_{11}>0$, $4bm_{11}>4$ y $m_{11}=0\Rightarrow$ no existe raíz en $\mathbb{R}$

Luego $f(L)\cap f(S)=\emptyset\Rightarrow L\cap S=\emptyset$

si $m_{11}=0\Rightarrow 2a_1y_1+b=0$

si $a_1\neq 0\Rightarrow y_1=\dfrac{-b}{2a_1}\Rightarrow f(S)\cap f(L)=\{(\frac{-b}{2a_1},0,\dots,0)=f(p)\}\Rightarrow S\cap L=\{p\}$

si $a_1=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow$ si $b\neq 0$ $f(L)\cap f(S)=\emptyset \Rightarrow L\cap S=\emptyset$

si $b=0 \Rightarrow f(L)\cap f(S)=f(L) \Rightarrow L\cap S=L$

2) Probar que, por cada punto del hiperboloide $x^2+y^2-z^2-1=0$ pasa al menos una recta.

Defino la recta $S=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}\lambda$ con $\lambda\in\mathbb{R}$.

Sea $(x\ y\ z)\in H=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2-z^2-1=0\}$ /

$x=a+t_1\lambda$, $y=b+t_2\lambda$, $z=c+t_3\lambda$

$\Rightarrow (a+t_1\lambda)^2+(b+t_2\lambda)^2-(c+t_3\lambda)^2-1=0$

$\Rightarrow (a^2+2at_1\lambda+t_1^2\lambda^2)+(b^2+2bt_2\lambda+t_2^2\lambda^2)-(c^2+2ct_3\lambda+t_3^2\lambda^2)-1=0$

$\lambda^2\cdot(t_1^2+t_2^2-t_3^2)+\lambda\cdot(2at_1+2bt_2-2ct_3)+a^2+b^2-c^2-1=0$

$$\lambda=\frac{-2at_1-2bt_2+2ct_3\pm\sqrt{(2at_1+2bt_2-2ct_3)^2-(t_1^2+t_2^2-t_3^2)\cdot(a^2+b^2-c^2-1)\cdot 4}}{2\cdot(t_1^2+t_2^2-t_3^2)}$$

si $a=1$, $b=1$ y $c=1 \Rightarrow$

$$\lambda=\frac{-2t_1-2t_2+2t_3\pm\sqrt{(2t_1+2t_2-2t_3)^2}}{2\cdot(t_1^2+t_2^2-t_3^2)}=\frac{-2t_1-2t_2+2t_3\pm(2t_1+2t_2-2t_3)}{2\cdot(t_1^2+t_2^2-t_3^2)}$$

si $t_1^2+t_2^2-t_3^2\neq 0 \Rightarrow \lambda=\begin{cases}0\\ \dfrac{-4t_1-4t_2+4t_3}{2\cdot(t_1^2+t_2^2-t_3^2)}\end{cases}$

luego si $S=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}\lambda$ con $t_1^2+t_2^2-t_3^2\neq 0 \Rightarrow \forall(x,y,z)\in H=x^2+y^2-z^2-1=0$

existe una recta de la forma anterior que pasa por dicho punto.

Daniel Monjas Miguelez
2ºDGIIM.

4.) ¿Contiene alguna recta el paraboloide hiperbólico $x^2-y^2-2z=0$?

Veamos que si contiene rectas.

Sea $S=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}\lambda=\begin{pmatrix} a+\lambda t_1 \\ b+\lambda t_2 \\ c+\lambda t_3 \end{pmatrix}$

Veamos que si $x=a+\lambda t_1$, $y=b+\lambda t_2$ y $z=c+\lambda t_3$

no se verifica lo siguiente $\forall\lambda\in\mathbb{R}$

$$(a+\lambda t_1)^2-(b+\lambda t_2)^2-2\cdot(c+\lambda t_3)=0$$

$$a^2+2a\lambda t_1+\lambda^2 t_1^2-b^2-2b\lambda t_2-\lambda^2 t_2^2-2c-2\lambda t_3=0$$

$$\Rightarrow \lambda^2\cdot(t_1^2-t_2^2)+\lambda(2at_1-2bt_2-2t_3)+a^2-b^2-2c=0$$

para que esto sea 0 independientemente de cual λ se tiene que dar que

$t_1^2=t_2^2$

$2at_1-2bt_2=2t_3$

$a^2-b^2-2c=0$

$t_1=t_2 \Rightarrow t_1\cdot(2a-2b)=2t_3 \Rightarrow t_3=t_1\cdot(a-b)$

luego sea $t_1=1 \Rightarrow t_2=1 \Rightarrow t_3=a-b \Rightarrow t_3=0$

si $a=1$ $b=1$ y $c=0$

Luego la recta $S=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda^2\cdot(1^2-1^2)+\lambda\cdot(2-2-0)+1-1-0=0$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, luego todo punto de S está en H, luego $S\subset H=x^2-y^2-2z=0$

Luego si contiene rectas

Daniel Monjas Miguélez
2º DGIIM

6.) Clasificar afínmente la hipercuádrica de $\mathbb{R}^4$ de ecuación

$$2x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_1 - 2x_2 + 2x_4 + 1 = 0$$

$$(1\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \cdot M_{R_0}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = (1\ x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

luego $M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculando su determinante se tiene que ambas tiene determinante distinto de 0, luego

Rango $(M_{R_0}(H)) = 5$ y Rango $(N_{R_0}(H)) = 4$, luego $R_H = r_H + 1$

Calculamos el polinomio característico de $N_{R_0}(H)$:

$$\det(N_{R_0}(H) - \lambda I_4) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \lambda^4 - \lambda^3 - 6\lambda^2 + 3\lambda + 2 = P(x)$$

Usando Descartes $P(x)$ tiene a lo sumo 2 raíces positivas y $P(-x)$ tiene a lo sumo dos raíces positivas. A lo sumo $P(x)$ tiene dos raíces positivas y dos negativas

sea $\hat{P}(x)$ el polinomio característico de $M_{R_0}(H)$, y $\hat{t}$ = nº de raíces positivas y $\hat{S}$ = número de raíces negativas de $\hat{P}(x)$. Por la teoría de la actividad 4, tenemos que $\hat{t} = t+1 = 3$ y $\hat{S} = S = 2$ luego $S_H = 1$ y $s_H = 0$ y por la tabla tenemos que

H es equivalente a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ que es la representación de la hipercuádrica

$1 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$ en R_0

luego existe R en $\mathbb{R}^4$ distinto de R_0, en el que H viene representado por es matriz

Daniel Marijas Miguélez
2° DGIIM

7.) Clasificar afínmente las siguientes cónicas:

1. $2x^2 - y^2 + 2x - 2y - 1 = 0.$

$$(1 \ x \ y)\, M_{R_0}(H) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (1 \ x \ y) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Luego $M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Claramente $r_H = 2$ y $R_H = 3$, luego $R_H = r_H + 1$

$$\det(N_{R_0}(H) - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-1-\lambda) = P(\lambda)$$

luego luego $P(\lambda)$ tiene una raíz positiva y una negativa ($t=1$ y $s=1$)

Sea $\hat{P}(\lambda)$ el polinomio característico de $M_{R_0}(H)$

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (-1-\lambda)^2\cdot(2-\lambda) - 2 + \lambda + 1 + \lambda = (1+2\lambda+\lambda^2)\cdot(2-\lambda) - 2 + \lambda + 1 + \lambda =$$
$$= 2 + 4\lambda + \cancel{2\lambda^2} - \cancel{\lambda} - \cancel{2\lambda^2} - \lambda^3 - 2 + \cancel{\lambda} + 1 + \lambda = -\lambda^3 + 5\lambda + 1$$

luego $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo una raíz positiva y $P(-\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda + 1$ tiene a lo sumo dos raíces positivas. Como $\hat{P}(x)$ tiene que descomponer en $\mathbb{R}$ $\hat{t} = 1$, $\hat{s} = 2$ y $t = 1$, $s = 1$

luego $s_H = 0$ y $S_H = -1 \Rightarrow |S_H| = 1$ luego H es equivalente a

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ que es la representación de $x^2 - y^2 + 1 = 0.$ en R_0. Luego existe R tal que H viene representado por esa matriz en R, H es una hipérbola

2. ~~xx~~ $x^2-4xy+y^2-3x+4y-1=0$

Daniel Morujas Miguelez
2º DGIIM

$$(1\ \ x\ \ y)\, M_{R_0}(H)\cdot\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=(1\ \ x\ \ y)\begin{pmatrix}-1 & -\frac{3}{2} & 2\\ -\frac{3}{2} & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

luego $M_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{3}{2} & 2\\ -\frac{3}{2} & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

y con un simple cálculo tenemos que $r_H=2$ y $R_H=3$

Calculamos sus polinomios característicos.

$$P(\lambda)=\det(N_{R_0}(H)-\lambda I_d)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -2\\ -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^2+4=1-2\lambda+\lambda^2-4=\lambda^2-2\lambda-3$$

luego por Descartes $P(\lambda)$ tiene a lo sumo 1 raíces positivas como $P(\lambda)$ ha de descomponer en ~~ℝ~~ $\mathbb{R}$

$$\lambda=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}3\\-1\end{cases} \text{ luego } \begin{matrix}t=1\\ s=1\end{matrix}$$

$$\hat{P}(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & -\frac{3}{2} & 2\\ -\frac{3}{2} & 1-\lambda & -2\\ 2 & -2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3+\lambda^2+\frac{45}{4}\lambda+\frac{35}{4}$$

luego por Descartes $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo 1 raíz positiva y $\hat{P}(-\lambda)=\lambda^3+\lambda^2-\frac{45}{4}\lambda+\frac{35}{4}$ tiene a lo sumo dos raíces positivas. Como $\hat{P}(\lambda)$ debe descomponer en $\mathbb{R}$ se toma $\hat{t}=1$, $\hat{s}=2$

luego

$$S_H=-1\Rightarrow|S_H|=1 \quad \text{y} \quad S_H=0$$

luego H es equivalente a $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ es decir equivalente a $1+x^2-y^2=0$, que es una hipérbola. Luego existe R sistema de referencia distinto de R_0, en el que H viene representado por esa matriz

Daniel Morjas Migoelera
2º DGIIM

3. $2x^2+xy+y^2-x+y=0$

$$(1 \quad x \quad y)\, M_{R_0}(H)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = (1 \quad x \quad y)\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

luego $M_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$

de donde se deduce que $r_H=2$ y $R_H=3$

Ahora calculamos los polinomios característicos

$$P(\lambda)=\det(N_{R_0}(H)-\lambda I_d)=\begin{vmatrix}2-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\cdot(1-\lambda)-\frac{1}{4}=2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4}=\lambda^2-3\lambda+\frac{7}{4}$$

luego a lo sumo $P(\lambda)$ tiene dos raíces positivas.

$$\hat{P}(\lambda)=\det(M_{R_0}(H)-\lambda I_d)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3+3\lambda^2-\frac{5}{4}\lambda-1$$

A lo sumo $\hat{P}(\lambda)$ tiene dos raíces positivas y $P(-\lambda)=\lambda^3+3\lambda^2+\frac{5}{4}\lambda-1$ tiene a lo sumo 1 raíz positiva. Como $\hat{P}(\lambda)$ tiene que descomponer en $\mathbb{R}$ tenemos que

$\hat{t}=2$, $\hat{s}=1$ y $t=2$, $s=0$

luego $S_H=1$ y $s_H=2$ luego H es equivalente a la cónica que en R_0 viene representad por $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, es decir, a $x^2+y^2-1=0$ (elipse). Luego existe R sistema de referencia distinto de R_0 donde ~~la matriz~~ H viene representada por esa matriz.

Daniel Morejas Miguel
2º DGIIM

4.) $-x^2-xy-y^2-x-y-1=0$

$$(1\ x\ y)\,M_{R_0}(H)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=(1\ x\ y)\cdot\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

donde $M_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$

luego $\hat{R}_H=3$ y $R_H=2$

Ahora calculamos los polinomios característicos.

$$P(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)^2-\frac{1}{4}=1+2\lambda+\lambda^2-\frac{1}{4}=\lambda^2+2\lambda+\frac{3}{4}$$

luego por descartes $P(\lambda)$ tiene 0 raíces positivas y 2 negativas

$$\lambda=\frac{-2\pm\sqrt{4-3}}{2}=\begin{cases}-\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$\hat{P}(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3-3\lambda^2-\frac{9}{4}\lambda-\frac{1}{2}$$ luego $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo

0 raíces positivas y 3 negativas. Como $\hat{P}(\lambda)$ tiene que descomponer en $\mathbb{R}$ tenemos

$\hat{t}=0$, $\hat{s}=3$ y $t=0$ $\hat{s}=2 \Rightarrow |\hat{S}_H|=3$ y $|S_H|=2$

Luego H es equivalente a la cónica que en R_0 viene representada por

$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $x^2+y^2+1=0$ (vacío). Luego existe R distinto de R_0 donde H viene representada por esa matriz

Daniel Monjas Miguélez
2º DGIIM

5. $-x^2-xy-y^2-x-y+1=0$

$$(1\ x\ y)\cdot M_{R_0}(H)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix} = (1\ x\ y)\cdot\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

Luego $M_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}-1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$

Luego $r_H=2$ y $R_H=3$

Calculo el polinomio característico

$P(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1-\lambda\end{pmatrix}=(-1-\lambda)^2-\frac{1}{4}=\lambda^2+2\lambda+\frac{3}{4}$, por el apartado anterior tiene dos raíces negativas

$\hat{P}(\lambda)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -1-\lambda & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -1-\lambda\end{pmatrix}=-\lambda^3-\lambda^2+\frac{7}{4}\lambda+1$, tiene a lo sumo una raíz positiva y dos negativas, como $\hat{P}(\lambda)$ tiene que descomponer en $\mathbb{R}$ tenemos que

$t=0$, $s=2$ y $\hat{t}=1$ $\hat{s}=2 \Rightarrow |s_H|=2$ y $|S_H|=1$

Luego H es equivalente a la cónica que en R_0 viene representada por,

$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, es decir, a la elipse $x^2+y^2-1=0$. Luego existe R distinto de R_0 tal que H viene representada por esa matriz en R.

Daniel Morujas Miguelez
2º DGIIM

8).

1. $2x^2 - y^2 + z^2 + 2xz - 2yz + 2x - 2y + 1 = 0$

$$(1\ x\ y\ z)\, M_{R_0}(H) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1\ x\ y\ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego $M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

donde $R_H = 3$ y $\hat{R}_H = 4$

Calculo los polinomios característicos

$P(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda - 3$

$\hat{P}(\lambda) = \lambda^4 - 3\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda - 4$

donde $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo 3 raíces positivas y 1 raíz negativa y $P(\lambda)$ tiene a lo suma dos raíces positivas y una negativa. Como $\hat{P}(\lambda)$ y $P(\lambda)$ tienen que descomponerse en $\mathbb{R}$ tenemos

$t = 2 \quad s = 1 \quad$ y $\quad \hat{t} = 3 \quad \hat{s} = 1$

luego $S_H = 2$ y $\hat{S}_H = 1$ por tanto H es equivalente a una cuádrica que en R_0 viene representada por por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

, es decir, equivalente al hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$.

Esto significa que existe R distinto de R_0 donde H viene representada por esa matriz

Daniel Monjas Miguélez
2° DGIIM

2. $x^2+y^2+z^2-4xy-3x+4y+z-1=0$

$$(1\ x\ y\ z)\, M_{R_0}(H) \begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = (1\ x\ y\ z)\cdot \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

donde $M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

donde $R_H = 4$ y $r_H = 3$

Calculo los polinomios característicos,

$\hat{P}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 - \frac{9}{2}\lambda^2 + 5\lambda + \frac{7}{2}$
$P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3$

luego $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo dos raíces positivas y dos raíces negativas, y $P(\lambda)$ tiene a lo sumo dos raíces positivas y una negativa. Como $\hat{P}(\lambda)$ y $P(\lambda)$ tienen que descomponer en $\mathbb{R}$ tenemos que

$\hat{t} = 2,\ \hat{s} = 2,\ t = 2$ y $s = 1$

de aquí se infiere $S_H = 0$ y $s_H = 1$,

luego H es equivalente a la cuádrica representada en R_0 por,

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, es decir, equivalente a un hiperboloide de 1 hoja.

Esto significa que existe un R distinto de R_0 donde H está representada por esa matriz

Daniel Monjas Miguélez
2° DGIIM

3. $2x^2+y^2-z^2+1=0$

$$(1\ x\ y\ z)M_{R_0}(H)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=(1\ x\ y\ z)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

donde $M_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

luego $\hat{R}_H=4$ y $R_H=3$

Calculamos los polinomios característicos,

$$\hat{P}(\lambda)=\lambda^4-3\lambda^3+\lambda^2+3\lambda-2$$
$$P(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$$

por Descartes $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo 3 raíces positivas y una negativa.

Por otra parte $P(\lambda)$ tiene a lo sumo 2 raíces positivas y 1 negativa.

Como $P(\lambda)$ y $\hat{P}(\lambda)$ tienen que descomponer en $\mathbb{R}$ se deduce que,

$\hat{t}=3, \hat{s}=1$ y $t=2$, $s=1$

de aquí se infiere que $\hat{S}_H=2$ y $S_H=1$,

luego H es equivalente a la cuádrica representada en R_0 por

$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$, es decir, al hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2-z^2+1=0$

Esto significa que existe R distinto a R_0 donde H esté representada por dicha matriz.

4. $2x^2+y^2-z^2-2z=0$

Daniel Manjas Miguélez
2° DGIIM

$$(1\ x\ y\ z)\cdot M_{R_0}(H)\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}=(1\ x\ y\ z)\cdot\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix}$$

donde $M_{R_0}(H)=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$ y $N_{R_0}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

de donde se obtiene que $\hat{R}_H=4$ $\quad R_H=3$

Ahora calculo los polinomios característicos;

$$\left.\begin{array}{l}\hat{P}(\lambda)=\lambda^4-2\lambda^3-2\lambda^2+5\lambda-2\\ P(\lambda)=-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2\end{array}\right\}$$

por Descartes se obtiene que $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo 3 raíces positivas y 1 negativa.

Por otro lado en el apartado anterior vimos que $P(\lambda)$ tiene a lo sumo 2 raíces positivas y 1 negativa

Como $\hat{P}(\lambda)$, $P(\lambda)$ tienen que descomponer en $\mathbb{R}$ tenemos que,

$\hat{t}=3$, $\hat{s}=1$, $t=2$ y $s=1$

luego se infiere que $\hat{S}_H=2$ y $S_H=1$, por lo tanto,

H es equivalente a la cuádrica representada en R_0 por

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},$$ es decir, equivalente al hiperboloide de dos hojas $x^2+y^2-z^2+1=0$

Esto significa que existe R distinto de R_0 tal que H está representada por esa matriz

Daniel Morijas Miguelez
2º DGIIM

5. $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+x+y+z+1=0$

$$(1\ x\ y\ z)\, M_{R_0}(H) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (1\ x\ y\ z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

luego $M_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ y $N_{R_0}(H) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

de donde se obtiene $r_H = 3$ y $R_H = 4$

Ahora calculo los polinomios característicos.

$$\left.\begin{array}{l} \hat{P}(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + \frac{9}{2}\lambda^2 - 2\lambda + \frac{5}{16} \\ P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - \frac{9}{4}\lambda + \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

por Descartes $\hat{P}(\lambda)$ tiene a lo sumo 4 raíces positivas.

Por otro lado $P(\lambda)$ tiene a lo sumo 3 raíces positivas, luego como $\hat{P}(\lambda)$ y $P(\lambda)$ tienen que descomponer en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\hat{t} = 4,\ \hat{s} = 0,\ t = 3 \text{ y } s = 0$$

por tanto $S_H = 4$ y $s_H = 3$ de donde se obtiene que H es equivalente a una cuádrica que en R_0 está representada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ es decir, al vacío } x^2+y^2+z^2=0$$

Esto significa que existe R distinto de R_0 tal que H viene representada por esa matriz en R

Escaneado con CamScanner