SEGUROS DE SALUD TRAS LA PANDEMIA: MEDIR LA TRANSFORMACIÓN

David Moriña, Amanda Fernández-Fontelo y Montserrat Guillén

Junio 2022

Universitat de Barcelona

Departament d'Econometria, Estadística i Economia Aplicada

UNIVERSITAT DE BARCELONA

SEGUROS DE SALUD TRAS LA PANDEMIA: MEDIR LA TRANSFORMACIÓN

David Moriña, Amanda Fernández-Fontelo y Montserrat Guillén

Universitat de Barcelona
Departament d'Economia, Estadística i Economia Aplicada
Avinguda Diagonal 690-696
08034 Barcelona
https://www.ub.edu/portal/web/economia-empresa

Junio 2022

Resumen

Los seguros de salud constituyen uno de los ramos del seguro con mayor penetración en el mercado español y lo mismo ocurre en muchos de los países desarrollados. Su siniestralidad ha sufrido el impacto de la pandemia de Covid-19 en 2020 y 2021, especialmente en lo que se refiere a consultas y actos médicos que podían ser pospuestos. Las restricciones de movilidad supusieron un declive en la utilización del seguro por parte de los asegurados y una transformación de la interacción entre pacientes y sanitarios con una mayor utilización de la consulta telefónica. Este proyecto pretende estudiar cómo determinar si, (i) por el efecto de posponer visitas o (ii) por las secuelas de haber sufrido el virus (Covid persistente o efectos secundarios), va a producirse un exceso de siniestralidad y en su caso, cuándo se producirá. En este primer informe se describe la propuesta metodológica que se plantea para dar respuesta a las cuestiones de investigación que se abordarán en este proyecto.

Índice

Índice de figuras

Índice de cuadros

1. Introducción

Las consecuencias derivadas de la pandemia provocada por el virus SARS-CoV-2 han afectado de manera contundente en muchos ámbitos de la actividad humana. Además de las consecuencias directas en relación con las defunciones provocadas por la enfermedad Covid-19 y la saturación de los sistemas de salud en numerosos países (incluyendo España y países de su entorno), en el año 2020 se ha detectado una disminución en el uso de los servicios del Sistema Público de Salud y de los servicios asociados a los seguros de salud privados. Los seguros de salud constituyen uno de los ramos del seguro con mayor penetración en el mercado español, con más de 12 millones de asegurados, más del 25 % de la población posee este tipo de cobertura y supera el 35 % en algunas zonas ([7]) y lo mismo ocurre en muchos de los países desarrollados. Su siniestralidad ha sufrido el impacto en 2020 y 2021, especialmente en lo que se refiere a consultas y actos médicos que podían ser pospuestos. Las restricciones de movilidad supusieron un declive en la utilización del seguro por parte de los asegurados y una transformación de la interacción entre pacientes y sanitarios con una mayor utilización de la consulta telefónica. La pregunta es saber si, bien por el efecto de posponer visitas o bien por las secuelas de haber sufrido el virus (Covid persistente o efectos secundarios), va a producirse un exceso de siniestralidad en 2022 y los años sucesivos. Ya existen evidencias de una menor frecuencia de utilización de servicios de Salud en el Sistema Público en 2020, especialmente en lo relativo a cáncer ([1]), y se han impulsado protocolos para revertir esta situación en 2021 ([5]). Sin embargo, es difícil determinar si la mayor frecuencia de siniestralidad que se observará será igual o superior a la infra-siniestralidad que se observó durante la pandemia. Para analizarlo en el Proyecto se está usando la metodología estadística de la infra-representación de casos como base de partida ([2, 3]) y se extiende la misma al contexto de la sobre-representación. El planteamiento es determinar cómo es posible ver si el efecto rebote (i) se produce uniformemente o sólo para determinadas coberturas del seguro de salud, (ii) se da de forma homogénea o en función de características del asegurado o bien (iii) en qué momento del tiempo se recupera el nivel de utilización de prestaciones que se venía observando antes del incio de la pandemia. Van a realizarse muchos análisis sobre consecuencias en el gasto de salud a nivel del sistema público, pero las implicaciones para los seguros privados de salud también van a ser de interés. Sobre todo, es de esperar que, para monitorizar los efectos de la pandemia en los próximos años, se deban utilizar este tipo de aproximaciones, ya que no podrán compararse directamente grupos de población con características sociodemográficas diferentes, ni impactos en utilización de servicios de salud en general, ni prestaciones y coberturas diferentes. Entre las implicaciones podría hablarse también de una adecuación en la forma de aproximar la tarificación en este ramo, previendo rebotes de siniestralidad que aún no están siendo observados. Este Proyecto permitirá cuantificar el impacto de la pandemia en los seguros de salud, y cómo evaluarlo, estimando el grado de infra-uso que se dio en 2020 principalmente y usando técnicas avanzadas de ciencia de datos desarrolladas recientemente, así como nuevos métodos e innovaciones encaminadas a valorar el sobre-uso, con la finalidad de crear un sistema de seguimiento de la siniestralidad que detecte el cambio en la dinámica de utilización del seguro médico en particular y de cualquier otro ramo, en general. Aunque el Proyecto se centre en el desarrollo de la metodología y pueda ilustrarse mediante datos simulados o inspirados en el sistema público, se ensayará también en dados agregados y por lo tanto anonimizados, de cartera salud. Es razonable pensar que los resultados y conclusiones pueden ser generalizables a otros ramos y que sirvan para valorar posibles desigualdades entre países o regiones.

Se estima que en el año 2020 las prestaciones totales rendidas por los seguros de salud han totalizado 6.300 millones de euros, de los cuales 6.200 millones se corresponden a las prestaciones de servicios médicos. En 2019, se estima que las prestaciones totales rendidas por este tipo de seguros han totalizado 6.600 millones de euros, de los cuales 6.500 millones se corresponden a las prestaciones de servicios médicos.

2. Series temporales clásicas

Una serie temporal es una secuencia de N observaciones, ordenadas cronológicamente, sobre una o diversas características ([6]). Un proceso estocástico es una secuencia de variables aleatorias, ordenadas y equidistantes cronológicamente, referidas a una (proceso escalar) o varias (proceso vectorial) características de una unidad observable.

Al trabajar con un proceso estocástico es conveniente identificar si se trata de un proceso estacionario o no, es decir, si las propiedades estadísticas de cualquier secuencia finita del mismo son similares para cualquier segmentación. Esto implica que todas las variables aleatorias que componen el proceso están idénticamente distribuidas, independientemente del momento de tiempo en el cual han sido generadas. En este caso se considera que las propiedades son constantes a lo largo del tiempo y esto facilita la obtención de predicciones, ya que permite usar los valores constantes de la media para obtener observaciones futuras y generar intervalos de predicción. Por otro lado, si no se cumple esta condición el proceso estocástico es no estacionario. Las propiedades estadísticas de un proceso no estacionario son más complejas, pero se puede intentar modelar partiendo de una transformación sencilla (por ejemplo siguiendo la metodología de Box-Cox) con el objetivo de definir su estructura probabilística completa a partir de una única realización finita del mismo proceso.

Según el teorema de Wold, cualquier proceso estocástico (y_t) se piede representar como la suma de un proceso de ruido blanco (ϵ_t) y uno puramente determinista (z_t):

$$y_t = z_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \cdot \epsilon_{t-j} \tag{1}$$

La parte no determinista se puede escribir como el resultado de una transformación lineal del procéso de ruido blanco (proceso estocástico constante con esperanza cero y sin correlación estadística). Con base en esta definición, podemos encontrar 3 tipos diferentes de series temporales: Processos autoregresivos (AR), procesos de media móvil (MA) y mixtos (ARMA), las principales propiedades de los cuáles se detallan en las próximas secciones.

2.1. Procesos autoregresivos

Los procesos autoregresivos (AR) pueden describirse mediante la ecuación

$$y_t = \mu + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \cdot y_{t-i} + \epsilon_t, \tag{2}$$

donde ϵ_t sigue una distribución normal con media 0 y varianza σ^2 y ϕ_i son parámetros fijados. Como puede observarse de la expresión anterior, en un proceso con estructura AR la observación a tiempo t depende de los $t - p$ valores anteriores y de un ruido blanco ϵ_t. Las principales propiedades de este tipo de modelos son las siguientes:

- Son invertibles
- El operador de retardo (lag) es estable si sus raíces están fuera del círculo unidad
- Es estacionario si y solo si es invertible y estable
- $E[y_t] = \mu$
- $Var[y_t] = E[y_t - \mu]^2 = \gamma_0$
- Autocovarianza: $\gamma_k = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] = \phi^k \cdot \gamma_0$; donde $k = 1, 2, \ldots$
- Función de autocorrelación simple (FAS): $\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \phi^k$
- Función de autocorrelación parcial (FAP): $\alpha_k = \frac{\rho_k - \rho_{k-1}^2}{1 - \rho_{k-1}^2}$

2.2. Procesos de media móvil

Los procesos de media móvil (MA) pueden describirse mediante la siguiente ecuación:

$$y_t = \mu + \epsilon_t + \sum_{j=1}^{q} -\theta_j \cdot \epsilon_{t-j} \tag{3}$$

En este caso, la observación a tiempo t es una media ponderada de un proceso de ruido blanco ϵ_t y un retraso de q periodos. Estos procesos satisfacen las siguientes propiedades:

- Son estacionarios
- $E[y_t] = \mu$
- $Var[y_t] = E[y_t - \mu]^2 = \sigma^2(1 + \sum_{i=1}^{q} \theta_q)$

2.3. Procesos ARMA (AutoRegressive Moving Average)

Los procesos autoregresivos y de media móvil pueden combinarse en un tipo de procesos más complejos (ARMA), que pueden expresarse de la forma siguiente:

$$y_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i \cdot y_{t-i} + \epsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \cdot \epsilon_{t-j} \tag{4}$$

Estos procesos combinan las propiedades de los procesos autoregresivos y los procesos de media móvil, y resultan más flexibles para modelar series temporales que presentan estructuras complejas.

3. Series temporales discretas

La mayor parte de la bibliografía especializada y los paquetes de software estadístico más usados tratan las series temporales clásicas como las introducidas anteriormente, donde esencialmente las observaciones $x(t_i)$ son variables aleatorias continuas con una distribución normal. En cambio, a menudo las observaciones de una serie temporal son discretas o incluso categóricas, y en estos casos los modelos de series temporales clásicos pueden fallar o proporcionar estimaciones sesgadas e ineficaces. Una de las famílias de modelos más usadas en este contexto son los modelos INAR (INteger-valued AutoRegressive), una extensión de los modelos autoregresivos clásicos definidos anteriormente. En este caso, el modelo se define por la siguiente ecuación:

$$X_t = p_1 \circ X_{t-1} + \ldots + p_k \circ X_{t-k}, \tag{5}$$

donde $p_1, \ldots, p_k$ son parámetros fijos, el proceso es estacionario y W_t y X_{t-1} son independientes para todo t. Las innovaciones W_t son independientes e idénticamente distribuidas, normalmente con una distribución de Poisson, aunque pueden considerarse otras distribuciones discretas para las innovaciones.

El operador $\circ$ de la ecuación anterior, que sustituye al producto usual en la definición de los modelos autoregresivos clásicos se llama *p-thinning*, *binomial subsampling* o *binomial thinning*, definido por

$$p \circ X_t = \sum_{i=1}^{X_t} Y_i, \tag{6}$$

donde Y_i son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución de Bernoulli con probabilidad de éxito p. Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, queda claro que la distribución de $p \circ X_t$ es Binomial con parámetros X_t y p. Un buen resumen de esta familia de modelos y otras alternativas para el análisis de series temporales discretas se pueden encontrar en [4].

4. Nuevo modelo propuesto

Sea X_n un proceso latente con estructura INAR(1) definida por: $X_n = \alpha \circ X_{n-1} + Z_n$, donde $\mathrm{E}(X_n) = \mu_X$ y $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma_X^2$ representan la esperanza y la varianza de X_n, respectivamente. Asumamos, por ahora, que $Z_n \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$. En cualquier caso, otras estructuras más apropiadas para el proceso latente pueden incorporarse dependiendo de la aplicación potencial (por ejemplo, puede generarse un proceso subyacente sobredisperso mediante innovaciones con distribución de Hermite de segundo orden, o procesos sin correlación temporal mediante modelos de Poisson o Hermite de segundo orden). Sea Y_n un proceso observado y potencialmente sobre o infrareportado tal que:

$$Y_n = \begin{cases} X_n & 1-\omega \\ \theta \Diamond X_n & \omega, \end{cases} \tag{7}$$

donde $\theta \Diamond X_n$ es el operador *fattering-thinning* en el sentido que:

$$\theta \Diamond X_n | X_n = x_n = \sum_{j=1}^{x_n} W_j, \tag{8}$$

donde $\theta = (\phi_1, \phi_2)$ y W_j son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas definidas por la siguiente función de masa de probabilidad (pmf):

$$\mathbb{P}(W_j = k | \phi_1, \phi_2) = \begin{cases} 1-\phi_1-\phi_2 & \text{if } k = 0 \\ \phi_1 & \text{if } k = 1 \\ \phi_2 & \text{if } k = 2 \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{9}$$

Es importante remarcar que cuando $\phi_2 = 1$, el proceso no estaría ni sobre ni infrareportado; es decir, el proceso observado coincide con el proceso real. También es importante observar que una versión más restringida de (8) resulta cuando $W_j \sim \mathrm{Bernoulli}(2, \phi)$. Aunque la distribución mostrada en (9) es la elección mas directa que permite obtener sobrereporte, otras distribuciones sin soporte compacto pueden considerarse, por ejemplo Poisson, Geometrica, etc.
El operador en (8) sigue una distribución Hermite de segundo orden con parámetros $\mu_X\phi_1$ y $\mu_X\phi_2$, como puede verse tomando la función generatriz de probabilidades (pgf), es decir:

$$G_X(s) = \mathrm{e}^{\mu_X(s-1)}, \tag{10}$$

$$G_W(s) = (1-\phi_1-\phi_2) + \phi_1 s + \phi_2 s^2, \tag{11}$$

$$G_X\left(G_W(s)\right) = \mathrm{e}^{\mu_X\left((1-\phi_1-\phi_2)+\phi_1 s+\phi_2 s^2-1\right)} = \mathrm{e}^{\mu_X\left(\phi_1(s-1)+\phi_2(s^2-1)\right)}, \tag{12}$$

que es la función generatriz de probabilidades de una distribución de Hermite de segundo orden con parámetros $\mu_X\phi_1$ y $\mu_X\phi_2$. La esperanza y la varianza de este operador son respectivamente: $\mathrm{E} = (\theta \Diamond X_n) = \mu_X\left(\phi_1 + 2\phi_2\right)$ y $\mathrm{Var} = (\theta \Diamond X_n) = \mu_X\left(\phi_1 + 4\phi_2\right)$.

4.1. Propiedades del modelo

La distribución marginal del proceso observado Y_n es la mixtura siguiente de una distribución de Poisson y una Hermite:

$$Y_n = \begin{cases} \text{Poisson}(\mu_X) & 1-\omega, \\ \text{Hermite}\left(\mu_X\phi_1, \mu_X\phi_2\right) & \omega. \end{cases} \tag{13}$$

En cualquier caso, cuando las innovaciones del proceso latente INAR(1) son Hermite de segundo orden, la distribución en (13) es una mixtura de dos componentes con distribución de Hermite de segundo orden. Distribuciones marginales más sencillas para el proceso observado Y_n se obtienen cuando el proceso oculto X_n sigue un modelo clásico de Poisson, o incluso un modelo Hermite de segundo orden.
La esperanza y la varianza de este proceso observado Y_n son:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_n) &= (1-\omega)\mu_X + \omega\mu_X\left(\phi_2 + 2(1-\phi_1-\phi_2)\right) = \mu_X(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)\right)). \\ \mathrm{E}(Y_n^2) &= (1-\omega)(\sigma_X^2+\mu_X^2) + \omega\left(\mu_X(4(1-\phi_1)-3\phi_2) + \mu_X^2(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\right) \\ &= \mu_X\left(1-\omega\left(1-(4(1-\phi_1)-\phi_2)\right)\right) + \mu_X^2\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\right)\right), \end{aligned}$$

ya que $\mu_X = \sigma_X^2$, y

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_n) &= \mu_X\left(1-\omega\left(1-\left(4\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)\right) + \mu_X^2\left(1-\omega\left(1-\left(2\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)^2\right)\right) \\ &\quad - \mu_X^2\left(1-\omega\left(1-\left(2\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)\right)^2 \\ &= \mu_X\left(1-\omega\left(1-\left(4\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)\right) + \mu_X^2\omega(1-\omega)\left(1-\left(2\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)^2. \end{aligned}$$

Sea $\mathbf{1}_n$ un indicador del estado de sobre o infrareporte en el sentido que $\mathbf{1}_n \sim$ Bernoulli(ω). Asumimos que los estados de sobre o infrareporte son independientes en el tiempo.

La función de autocovarianza de Y_n se puede calcular de la manera siguiente:

$$\mathrm{Cov}\left(Y_n, Y_{n+k}\right) = \mathrm{E}\left(Y_n, Y_{n+k}\right) - \mathrm{E}(Y_n)\mathrm{E}(Y_{n+1}). \tag{14}$$

Supongamos que $\mathbf{1}_n \sim$ Bernoulli(ω) independientemente de X_n. Adicionalmente, asumimos que los estados de sobre o infrareporte son independientes. Por tanto:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(Y_n, Y_{n+k}\right) &= \mathrm{E}\left(X_n(1-\mathbf{1}_n), X_{n+k}(1-\mathbf{1}_{n+k})\right) + \mathrm{E}\left(X_n(1-\mathbf{1}_n), \theta\Diamond X_{n+k}\mathbf{1}_{n+k}\right) \\ &\quad + \mathrm{E}\left(\theta\Diamond X_n\mathbf{1}_n, X_{n+k}(1-\mathbf{1}_{n+k})\right) + \mathrm{E}\left(\theta\Diamond X_n\mathbf{1}_n, \theta\Diamond X_{n+k}\mathbf{1}_{n+k}\right), \end{aligned} \tag{15}$$

donde

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}\left(X_n(1-\mathbf{1}_n), X_{n+k}(1-\mathbf{1}_{n+k})\right) = (1-\omega)^2\mathrm{E}(X_n, X_{n+k}), \\ &\mathrm{E}\left(X_n(1-\mathbf{1}_n), \theta\Diamond X_{n+k}\mathbf{1}_{n+k}\right) = (1-\omega)\omega(2(1-\phi_1)-\phi_2)\mathrm{E}(X_n, X_{n+k}), \\ &\mathrm{E}\left(\theta\Diamond X_n\mathbf{1}_n, \theta\Diamond X_{n+k}\mathbf{1}_{n+k}\right) = \omega^2(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\mathrm{E}(X_n, X_{n+k}). \end{aligned}$$

Siguiendo los cálculos,

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(Y_n, Y_{n+k}\right) &= (1-\omega)^2\mathrm{E}(X_n, X_{n+k}) + 2(1-\omega)\omega(2(1-\phi_1)-\phi_2)\mathrm{E}(X_n, X_{n+k}) \\
&\quad + \omega^2(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\mathrm{E}(X_n, X_{n+k}) \\
&= \mathrm{E}(X_n, X_{n+k})\left((1-\omega)^2 + 2(1-\omega)\omega(2(1-\phi_1)-\phi_2) + \omega^2(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\right) \\
&= \mathrm{E}(X_n, X_{n+k})\left((1-\omega) + \omega(2(1-\phi_1)-\phi_2)\right)^2 \\
&= \mathrm{E}(X_n, X_{n+k})(1-\omega(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)))^2.
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\left(Y_n, Y_{n+k}\right) &= (\sigma_X^2\alpha^k + \mu_X^2)(1-\omega(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)))^2 - \\
&\quad - \mu_X^2(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2\right)))^2 \\
&= \mu_X\alpha^k(1-\omega(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)))^2
\end{aligned}$$

donde $\mathrm{E}(X_n) = \mu_X = \sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X_n) =$ y $\mathrm{E}(X_n, X_{n+k}) = (\sigma_X^2\alpha^k + \mu_X^2)$.

La función de autocorrelación (ACF) del proceso observado se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cor}\left(Y_n, Y_{n+k}\right) &= \frac{\alpha^k(1-\omega(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)))^2}{\left(1-\omega\left(1-\left(4\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)\right) + \mu_X\omega(1-\omega)\left(1-\left(2\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)^2} = \\
&= \alpha^k \mathrm{c}(\alpha, \lambda, \omega, \phi_1, \phi_2).
\end{aligned}$$

Los cálculos anteriores pueden extenderse al caso en el cual los estados de sobre o infrareporte tienen correlación, usando una cadena de Markov de dos estados. Sea R_n este nuevo modelo, que asume sobre o infrareporte y una estructura de dependencia entre estos estados de sobre o infrareporte. Como resultado, la esperanza y la varianza de este nuevo proceso, esto es, $\mathrm{E}(R_n)$ y $\mathrm{Var}(R_n)$ se mantienen de la manera presentada anteriormente. Esto es consecuencia del hecho que la distribución marginal de R_n es la misma que la de Y_n, esto es, una mixtura de una distribución de Poisson y una distribución de Hermite de segundo orden (13).

Sin embargo, esto no es cierto para las funciones de autocovarianza y autocorrelación de R_n, que son más complejas. En este sentido, la covarianza del proceso R_n se puede calcular como se describe a continuación.

Recordemos que $\mathbf{1}_n$ es un indicador del estado de sobre o infrareporte el sentido que $\mathbf{1}_n \sim \mathrm{Bernoulli}(\omega)$. Supongamos ahora que existe una estructura de dependencia entre estos estados que puede ser representada por una cadena de Markov binaria. Como se muestra en [3], la probabilidad de transición $\mathbf{P}$ es:

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{cc} 1-p_{01} & p_{01} \\ p_{01}\frac{1-\omega}{\omega} & 1-p_{01}\frac{1-\omega}{\omega} \end{array}\right].$$

Como se demuestra en [3], la matriz de transición $\mathbf{P}^k$ puede escribirse en términos de p_{01}^k. Vale la pena también mencionar que el parámetro p_{01} puede escribirse en términos del segundo valor propio de $\mathbf{P}$, esto es, $p_{01} = \omega(1-\lambda_2)$, donde λ_2 es el segundo valor propio de $\mathbf{P}$.

Supongamos que los procesos $\mathbf{1}_n$ y R_n son mutuamente independientes. De forma similar a las expresiones (14) y (15), tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left(X_n(1-\mathbf{1}_n), X_{n+k}(1-\mathbf{1}_n)\right) &= \mathrm{E}\left(X_n, X_{n+k}\right)\mathrm{P}(\mathbf{1}_n = 0, \mathbf{1}_{n+k} = 0) = \mathrm{E}\left(X_n, X_{n+k}\right)(1-\omega)(1-\omega(1-\lambda_2^k)),\\
\mathrm{E}\left(X_n(1-\mathbf{1}_n), \theta\Diamond X_{n+k}\mathbf{1}_n\right) &= \mathrm{E}\left(X_n, X_{n+k}\right)(2(1-\phi_1)-\phi_2)\mathrm{P}(\mathbf{1}_n = 0, \mathbf{1}_{n+k} = 1)\\
&= \mathrm{E}\left(X_n, X_{n+k}\right)(2(1-\phi_1)-\phi_2)\omega(1-\omega)(1-\lambda_2^k),\\
\mathrm{E}\left(\theta\Diamond X_n\mathbf{1}_n, \theta\Diamond X_{n+k}\mathbf{1}_n\right) &= \mathrm{E}\left(X_n, X_{n+k}\right)(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\mathrm{P}(X_n = 1, X_{n+k} = 1)\\
&= \mathrm{E}\left(X_n, X_{n+k}\right)(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\omega(1-(1-\omega)(1-\lambda_2^k)).
\end{aligned}$$

De los cálculos anteriores:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}(R_n, R_{n+k}) = \mathrm{E}(X_n, X_{n+k})\left(\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\right)\right) - \omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2(1-\lambda_2^k)\right)\\
&= (\alpha^k\sigma_X^2 + \mu_X^2)\left(\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\right)\right) - \omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2(1-\lambda_2^k)\right)^2,
\end{aligned}$$

y la función de autocovarianza toma la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(R_n, R_{n+k}) = \mathrm{E}(R_n, R_{n+k}) - \mathrm{E}(R_n)\mathrm{E}(R_{n+k}) =\\
&= (\alpha^k\sigma_X^2 + \mu_X^2)\left(\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)^2\right)\right) - \omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2(1-\lambda_2^k)\right)\\
&- \mu_X^2\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)\right)\right)^2 =\\
&= (\alpha^k\sigma_X^2 + \mu_X^2)\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)\right)\right)^2 + (\alpha^k\sigma_X^2 + \mu_X^2)\left(\lambda_2^k\omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2\right)\\
&- \mu_X^2\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)\right)\right)^2 =\\
&= \alpha^k\sigma_X^2\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)\right)\right)^2 + \mu_X^2\lambda_2^k\omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2 +\\
&+ \sigma_X^2(\alpha\lambda)^k\omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2.
\end{aligned}$$

Finalmente, la función de autocorrelación se puede escribir de la forma siguiente:

$$\mathrm{Cor}(R_n, R_{n+k}) = \frac{\alpha^k\left(1-\omega\left(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2)\right)\right)^2 + \mu_X\lambda_2^k\omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2 + (\alpha\lambda)^k\omega(1-\omega)(1-(2(1-\phi_1)-\phi_2))^2}{\left(1-\omega\left(1-\left(4\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)\right) + \mu_X\omega(1-\omega)\left(1-\left(2\left(1-\phi_1\right)-\phi_2\right)\right)^2} \tag{16}$$

4.2. Estimación de parámetros

En este apartado nos centraremos en la descripción de dos métodos para estimar los parámetros de los modelos descritos en la sección anterior.

4.2.1. Método basado en la función de verosimilitud

Los parámetros del modelo se pueden estimar usando la función de verosimilitud. Para hacerlo, se puede usar el algoritmo *forward*, ya que el cálculo directo de la verosimilitud no es posible de forma analítica. Más detalles sobre los cálculo de esta expresión de la función de verosimilitud basados en el algoritmo *forward* se pueden encontrar en Fernández-Fontelo *et al.* (2016, 2019). En el escenario considerado en este trabajo, las probabilidades *forward* se pueden calcular usando la siguiente expresión:

$$\gamma_n\left(\boldsymbol{y}_{1:n}, x_n\right) = \sum_{x_{n-1}} \mathrm{P}\left(Y_n = y_n | X_n = x_n\right) \mathrm{P}\left(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}\right) \gamma_{n-1}\Big(\boldsymbol{y}_{1:n-1}, x_{n-1}\Big) \tag{17}$$

donde las probabilidades de emisión toman la siguiente expresión:

$$\mathrm{P}(Y_n = y_n | X_n = x_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y_n < x_n < \frac{y_n}{2}, \\ (1-\omega) + \omega \frac{x_n!}{n_0! n_1! n_2!}(1-\phi_1-\phi_2)^{n_0}\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2} & \text{if} \quad y_n = x_n, \\ \omega \frac{x_n!}{n_0! n_1! n_2!}(1-\phi_1-\phi_2)^{n_0}\phi_1^{n_1}\phi_2^{n_2} & \text{if} \quad \frac{y_n}{2} \leq x_n < y_n, \\ 1 & \text{if} \quad y_n = 0, \end{cases} \tag{18}$$

siendo n_0, n_1 y n_2 el número de 0, 1 y 2, respectivamente, en una secuencia de longitud x_n (por ejemplo, $\{W_1 = w_1, W_2 = w_2, \ldots W_{x_n} = w_{x_n}\}$) con la restricción $\sum_{i=1}^{x_n} w_i = y_n$. Dado el valor observado de y_n y un potencial valor de x_n, el número de posibles secuencias de 0, 1 y 2 manteniendo las condiciones anteriormente mencionadas es probablemente mayor que uno. En este caso, la suma de cada posible secuencia será la probabilidad de emisión de $Y_n = y_n | X_n = x_n$. Cabe observar que en el caso en que $W_i \sim \text{Binomial}(2, \phi)$, las probabilidades de emisión son como siguen:

$$\mathrm{P}(Y_n = y_n | X_n = x_n) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad y_n < x_n < \frac{y_n}{2}, \\ (1-\omega) + \omega \binom{2x_n}{y_n}\phi^{y_n}(1-\phi)^{2x_n - y_n} & \text{if} \quad y_n = x_n, \\ \omega \binom{2x_n}{y_n}\phi^{y_n}(1-\phi)^{2x_n - y_n} & \text{if} \quad \frac{y_n}{2} \leq x_n < y_n, \\ 1 & \text{if} \quad y_n = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Las probabilidades de transición son las mismas que las descritas para escenarios de infrauso, ya que el proceso subyacente sigue el mismo modelo. Sin embargo, otras estructuras interesantes para el proceso subyacente pueden considerarse, como un proceso INAR(1) con innovaciones con distribución de Hermite de segundo orden o incluso un modelo sin correlaciones temporales (por ejemplo modelos de Poisson o de Hermite de segundo orden, etc).

Finalmente, la función de verosimilitud del proceso $\{Y_n\}$ puede calcularse recursivamente de la forma siguiente:

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{Y}_{1:N} = \boldsymbol{y}_{1:N}) = \mathrm{P}\left(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots, Y_N = y_N\right) = \sum_{x_N = \frac{y_N}{2}}^{y_N} \gamma_N\left(\boldsymbol{y}_{1:N}, x_N\right), \tag{20}$$

tomando $\mathrm{P}(X_1 = x_1) = \text{Poisson}(\frac{\lambda}{1-\alpha})$, o Hermite() en el caso en el que las innovaciones del proceso INAR(1) siguen una distribución de Hermite de segundo orden.

5. Series temporales con el operador *fattering-thinning*

Supongamos una versión del modelo INAR(1) con la estructura siguiente:

$$X_n = \theta \Diamond X_{n-1} + Z_n \tag{21}$$

dónde $X_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$, y $\theta \Diamond X_{n-1}$ es el operador *fattering-thinning* (8) y (9). Tomando la función generatriz de probabilidades de X_n (10) y $\theta \Diamond X_{n-1}$ (12), la función generatriz de probabilidades de Z_n tiene la expresión siguiente:

$$\mathrm{G}_Z(s) = \frac{\mathrm{e}^{\lambda(s-1)}}{\mathrm{e}^{\lambda(\phi_2(s-1)+(1-\phi_1-\phi_2)(s^2-1))}} = \mathrm{e}^{\lambda\left((1-\phi_2)(s-1)+(\phi_1+\phi_2-1)(s^2-1)\right)}. \tag{22}$$

La expresión (22) recuerda a la función generatriz de probabilidades de una distribución Hermite de segundo orden. Sin embargo, según Kemp y Kemp (1965), ambos parámetros de una distribución Hermite de segundo orden deben ser positivos. En este caso, $\phi_1 + \phi_2 - 1 < 0$ y, por tanto, la expresión (22) no es una función generatriz de probabilidades. Esto significa que la distribución marginal del proceso (21) no puede ser Poisson.

Por otro lado, supongamos ahora que $X_n \sim \text{Hermite}(a_1, a_2)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathrm{G}_X(\mathrm{G}_W(s)) &= \mathrm{e}^{a_1\left(\phi_1+\phi_2 s+(1-\phi_1-\phi_2)s^2-1\right)+a_2\left(\left(\phi_1+\phi_2 s+(1-\phi_1-\phi_2)s^2\right)^2-1\right)} \\ &= \mathrm{e}^{\left(a_1(\phi_1^2-1)+a_2(\phi_1^2-1)\right)+(a_1\phi_2+2\phi_1\phi_2)s+\left(a_1(1-\phi_1-\phi_2)+a_2(2\phi_1(1-\phi_1-\phi_2)+\phi_2^2)\right)s^2} \\ &\quad \mathrm{e}^{2a_2\phi_2(1-\phi_1-\phi_2)s^3+a_2(1-(\phi_1+\phi_2))^2 s^4},\end{aligned}$$

que es la función generatriz de probabilidades de una distribución Hermite de cuarto orden con parámetros $b_1 = a_1\phi_2 + 2\phi_1\phi_2$, $b_2 = a_1(1-\phi_1-\phi_2) + a_2(2\phi_1(1-\phi_1-\phi_2) + \phi_2^2)$, $b_3 = 2a_2\phi_2(1-\phi_1-\phi_2)$ y $b_4 = a_2(1-(\phi_1+\phi_2))^2$. Recordando que $\mathrm{G}_Z(s) = \mathrm{G}_X(s)/\mathrm{G}_X(\mathrm{G}_W(s))$, la distribución marginal de X_n no puede ser una Hermite de segundo ni de cuarto orden ya que el parámetro de s^4 es $-a_2(1-(\phi_1+\phi_2))^2 < 0$, y debería ser positivo para ser la pgf de una distribución de Hermite de cuarto orden.

Otras distribuciones alternativas para X_n como la binomial, binomial negativa y geométrica se han considerado. Sin embargo, ninguna de ellas produce una función generatriz de probabilidad adecuada, ni por tanto, una distribución conocida para las innovaciones del proceso descrito en (21).

Desde otro punto de vista, sea $Z_n \sim \text{Poisson}(\lambda)$. Entonces, la distribución de X_n se puede expresar como

$$\frac{G_X(s)}{G_X(\phi_1 + \phi_2 s + (1-\phi_1-\phi_2)s^2)} = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)}. \tag{23}$$

No obstante, cualquier función generatriz de probabilidad conocida satisface esta igualdad. Esto significa que, cuando las innovaciones siguen una distribución de Poisson, la distribución marginal del modelo (21) es desconocida.

De la misma manera, cuando $Z_n \sim \text{Hermite}(a_1, a_2)$, la distribución marginal de X_n es desconocida ya que no existe ninguna función generatriz de probabilidad conocida que satisfaga la igualdad siguiente:

$$\frac{G_X(s)}{G_X(\phi_1 + \phi_2 s + (1 - \phi_1 - \phi_2)s^2)} = \mathrm{e}^{a_1(s-1)+a_2(s^2-1)}. \tag{24}$$

6. Futuros desarrollos previstos

El rendimiento del modelo descrito se valorará mediante un estudio de simulación exhaustivo, con el objetivo de comprobar que los métodos de estimación propuestos son capaces de recuperar los valores de los parámetros usados en cada situación simulada.

Adicionalmente, se han identificado 65 actos médicos (con un total de 1,581,271 usuarios atendidos en 2021) de entre todos los servicios asociados a una póliza de salud básica para los cuales el cambio de tendencia desde el infrauso provocado por las restricciones tomadas por el gobierno español y los gobiernos autonómicos en 2020 para combatir la Covid-19 hasta el sobreuso esperado en 2021, derivado también de las consecuencias directas e indirectas de la pandemia. Para cada uno de estos actos médicos, se dispondrá de los campos siguientes en el horizonte temporal 2019-2021:

- Identificador del paciente
- Fecha del siniestro / acto
- Especialidad realizadora
- Especialidad acto
- Grupo del acto
- Servicio concertado realizador
- Provincia del SS.CC. realizador
- Sexo
- Edad
- Número de póliza
- Fecha inicio / finalización póliza

Además, para poder contextualizar en cada caso, se dispondrá del número de pólizas vigentes en cada mes del periodo considerado.

Referencias

[1] A. E. C. el Cáncer, "El número de pacientes de cáncer nuevos bajó un 21 % durante el confinamiento," 2020.

[2] A. Fernández-Fontelo, A. Cabaña, P. Puig, and D. Moriña, "Under-reported data analysis with INAR-hidden Markov chains," *Statistics in Medicine*, vol. 35, no. 26, pp. 4875–4890, 2016.

[3] A. Fernández-Fontelo, A. Cabaña, H. Joe, P. Puig, and D. Moriña, "Untangling serially dependent underreported count data for gender-based violence," *Statistics in Medicine*, vol. 38, no. 22, pp. 4404–4422, 2019.

[4] E. McKenzie, *Ch. 16. Discrete variate time series*, vol. 21. 2003.

[5] Ministerio de Sanidad, "Acuerdo del Consejo Interterritorial del Sistema Nacional de Salud de 24 de febrero de 2021 sobre la pandemia de la COVID-19 y la prevención y el control del cáncer," 2021.

[6] D. Peña, "Análisis de series temporales," 2005.

[7] UNESPA, "Informe Estamos Seguros," p. 290, 2020.