Mustafa YAĞCI, *yagcimustafa@yahoo.com*

Geometrik Kombinasyon

Her farklı iki noktanın bir doğru belirttiğini biliyoruz. Peki hangi doğruyu belirtiyorlardı? O iki noktadan geçen doğruyu. Peki her farklı 3 nokta kaç doğru belirtir? 2 nokta 1 doğru belirtiyorsa, 3 nokta 1,5 doğru belirtir demeyin de diğer her cevaba kendimi alıştırabilirim. ☺

Uzatmayayım, bu sorunun cevabı yoktur, çünkü soru düzgün bir soru değil! 3 farklı nokta doğrusalsa tek bir doğruyu belirtirler ama doğrusal değillerse 3 farklı doğruyu belirtirler. Demek ki belirttikleri doğru sayısı noktaların konumuna göre değişiyor. Eğer konumlarını belirtmeden bir soru sormak istiyorsak, en az ya da en çok kaç tane geçer filan diye sormalıyız veya sormalılar. En az olduğu durum tabii ki hepsinin doğrusal olmasıyla mümkündür, veya izin varsa hepsini çakışık alırız hiçbir doğru belirtmezler. En çok olması da herhangi üçünün doğrusal olmamasıyla mümkündür. İki farklı nokta, belirttiğimiz üzere ne yaparsanız yapın, her zaman doğrusal olur. Benzer şekilde her doğrusal olmayan 3 nokta da bir üçgen, ayrıca bu üçgenin üstünde bulunduğu bir düzlem ve bu üçgenin çevrel çemberi olan bir çember belirtir. Üçü doğrusal olmayan dört farklı nokta da dörtgen belirtir.

Örnek. 9 *nokta en az kaç doğru belirtir?*

A) 0 B) 1 C) 9 D) 36 E) 72

Çözüm: Tabii ki 0! (0 faktöryel değil, bildiğin 0). Çünkü 9 nokta da çakışık olursa herhangi bir doğruyu belirtmezler. Ama soruda eğer farklı 9 nokta deseydi, hepsinin doğrusal olduğunu farz ederek cevaba 1 derdik.

Doğru cevap: A.

Örnek. 9 *farklı nokta en çok kaç doğru belirtir?*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 72

Çözüm: Böyle sorularda noktaların mümkün olduğunca çok doğru belirtmesi için noktaların herhangi üçünün doğrusal olmadığını düşünmeliyiz. Biz bu herhangi üçü doğrusal olmayan noktalara bundan böyle *çembersel* veya *dağınık* diyeceğiz. O halde çembersel olan 9 noktanın herhangi ikisi her zaman farklı bir doğru belirtir. Bu da $C(9, 2) = 36$ tane doğru demektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 9 *farklı nokta en çok kaç üçgen belirtir?*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 84

Çözüm: En çok üçgen için, 9 noktayı yine çemberselmiş gibi düşüneceğiz. Çembersel olan 9 noktanın herhangi üçü her zaman bir üçgen belirtir. Bu da $C(9, 3) = 84$ tane üçgen demektir.

Doğru cevap: E.

Örnek. 9 *farklı nokta en çok kaç dörtgen belirtir?*

A) 45 B) 84 C) 96 D) 126 E) 154

Çözüm: En çok dörtgen için 9 noktayı yine çemberselmiş gibi düşüneceğiz. Çembersel olan 9 noktanın herhangi dördü her zaman bir dörtgen belirtir. Bu da $C(9, 4) = 126$ tane dörtgen demektir.

Doğru cevap: D.

Örnek. 5'*i doğrusal*, 4'*ü çembersel* 9 *farklı nokta en çok kaç doğru belirtir?*

A) 9 B) 18 C) 27 D) 36 E) 72

Çözüm: İki farklı yoldan çözeceğiz.

Birinci yol. Doğrusal olan 5 nokta tek bir doğru belirtir. Çembersel olan 4 nokta da $C(4, 2) = 6$ doğru belirtir. Bir de doğrusal noktaların birinden ve çembersel noktaların birinden geçen doğrular var. Bunlar da $C(5, 1)\cdot C(4, 1) = 20$ tanedir. Bunu da hesaba kattık mı, işlem tamam!

$$1 + 6 + 20 = 27.$$

İkinci yol. Tüm noktaların dağınık olduğunu düşünün bir an. $C(9, 2) = 36$ doğru olurdu. Doğrusal olan 5 nokta da dağınık olsaydı $C(5, 2) = 10$ tane doğru oluştururdu ama sadece 1 tane oluşturuyorlar. 9 tane doğru kaybolmuş yani: $36 - 9 = 27$.

Doğru cevap: C.

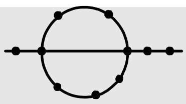
Örnek. *5'i doğrusal, 4'ü çembersel olan 9 farklı nokta en çok kaç üçgen belirtir?*

A) 74 B) 84 C) 96 D) 126 E) 154

Çözüm: Yine iki yol vereceğiz.
Birinci yol. Doğrusal olan 5 nokta hiçbir üçgen belirtmez. Çembersel olan 4 nokta da $C(4, 3) = 4$ üçgen belirtir. Ayrıca doğrusal 5 noktanın 2'sinden ve çembersel 4 noktanın 1'inden geçen doğrularla, ki bunlar $C(5, 2)\cdot C(4, 1) = 10\cdot 4 = 40$ tanedir, doğrusal 5 noktanın 1'inden ve çembersel 4 noktanın 2'sinden geçen doğruları da sayacağız, ki bunlar da $C(5, 1)\cdot C(4, 2) = 5\cdot 6 = 30$ tanedir. O halde $4 + 40 + 30 = 74$.
İkinci yol. Tüm noktaların dağınık olduğunu düşünün. $C(9, 3) = 84$ üçgen oluşurdu. Doğrusal 5 nokta $C(5, 3) = 10$ üçgen belirtmeliyken hiç belirtmiyor. $84 - 10 = 74$.

Doğru cevap: A.

Örnek. *Yan şekilde verilen 10 nokta en çok kaç doğru belirtir?*



A) 5 B) 35 C) 36 D) 60 E) 72

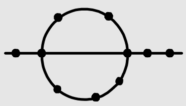
Çözüm: Önce 10 noktanın hepsinin dağınık olduğunu düşünün, yani herhangi üç tanesi doğrusal olmasın. Öyle olsalardı $C(10, 2) = 45$ tane doğru belirtirlerdi. Öyle bir durumda l doğrusu üzerindeki beş nokta da $C(5, 2) = 10$ tane doğru belirteceklerdi ama maalesef sadece 1 tane doğru belirtiyorlar. Yani 9 tane eksiğimiz var. Bu yüzden cevap

$$45 - 10 + 1 = 45 - 9 = 36$$

olmalıdır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yan şekilde verilen 10 nokta en çok kaç üçgen belirtir?*



A) 120 B) 110 C) 105 D) 90 E) 72

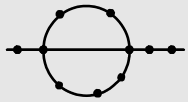
Çözüm: Önce 10 noktanın hepsinin dağınık olduğunu düşünün, yani herhangi üç tanesi doğrusal olmasın. Öyle olsalardı $C(10, 3) = 120$ tane üçgen belirtirlerdi. Öyle bir durumda l doğrusu üzerindeki beş nokta da $C(5, 3) = 10$ tane üçgen belirteceklerdi ama maalesef sadece 1 tane bile belirtmiyorlar. Yani 10 tane eksiğimiz var. Bu yüzden cevap

$$120 - 10 = 110$$

olmalıdır.

Doğru cevap: B.

Örnek. *Yan şekildeki 10 nokta, sadece iki köşesi çember üzerinde olan kaç farklı üçgen belirtir?*



A) 120 B) 66 C) 63 D) 60 E) 40

Çözüm: Çember üzerindeki 7 noktadan 2'sini seçelim. Bunu $C(7, 2) = 21$ kadar farklı şekilde yapabiliriz. Şimdi üçüncü köşeyi seçeceğiz. Üçüncü köşe çember üzerinde olamayacağından geri kalan 3 noktadan birini seçeceğiz. Bunu da $C(3, 1) = 3$ kadar değişik şekilde yapabiliriz. O halde bahsi geçen 63 tane üçgen vardır. Fakat cevap 63 değil! Çünkü ya çember üzerinden seçtiğimiz 2 noktanın 2'si de aynı zamanda doğrunun da üstünde olan noktalarsa? O iki noktayla, dışarıdaki 3 noktanın oluşturduğunu zannederek saydığımız 3 üçgeni toplamdan çıkarmalıyız. O halde cevap $63 - 3 = 60$ olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. 5 *doğru en çok kaç farklı noktada kesişebilir?*

A) 5 B) 10 C) 20 D) 25 E) 125

Çözüm: Kesim noktalarının çok olması istendiğinden mümkün olduğunca doğruları birbirlerine paralel almayacağız. Ayrıca ikiden fazla doğrunun tek bir noktada kesiştiğini de düşünmeyeceğiz. Velhasıl, bir kesim noktası için farklı iki doğru lazım. O halde $C(5, 2) = 10$ tane kesim noktası olur.

Doğru cevap: B.

Örnek. 5 *çember en çok kaç farklı noktada kesişebilir?*

A) 5 B) 10 C) 20 D) 60 E) 125

Çözüm: Kesim noktalarının mümkün olduğunca çok olması istendiğinden, çemberlerin herhangi iki kesim noktasının çakışmadığını düşüneceğiz. İki çember en çok 2 farklı noktada kesişir. O halde $C(5, 2) = 10$ tane farklı iki çember seçilebileceğinden $10\cdot 2 = 20$ kesim noktası olur.

Doğru cevap: C.

Örnek. 5 *üçgen en çok kaç farklı noktada kesişebilir?*

A) 5 B) 10 C) 20 D) 60 E) 125

Çözüm: Kesim noktalarının mümkün olduğunca çok olması istendiğinden, üçgenlerin herhangi iki kesim noktasının çakışmadığını düşüneceğiz. İki üçgen en çok 6 farklı noktada kesişir. O halde $C(5, 2) = 10$ tane farklı iki üçgen seçilebileceğinden $10\cdot 6 = 60$ kesim noktası olur.

Doğru cevap: D.

Örnek. 5 *doğrunun kesim noktası en çok kaç üçgen belirtebilir?*

A) 20 B) 40 C) 60 D) 100 E) 120

Çözüm: Doğruların herhangi ikisinin birbirlerine paralel olmadıklarını düşünelim ki, kesim noktası fazla çıksın. Böyle bir durumda 5 doğrunun herhangi ikisi bir kesim noktası belirteceğinden $C(5, 2) = 10$ farklı kesim noktası vardır. Şimdi soru, 10 *nokta en çok kaç üçgen belirtebilir* sorusuna döndü gibimize geliyor ama tam öyle değil. Çünkü sistemdeki her doğru diğer dört doğruyla da kesişmekte olduğundan her doğrunun üzerinde 4 tane nokta var. Bu noktalar doğrusal olduğundan bazı üçgenler belirecekleri yerde belirmiyorlar. Bu 5 doğru üzerindeki 4'er noktanın belirtmedikleri üçgenleri toplam üçgen sayısından çıkartarak sonuca ulaşacağız.

$$\binom{10}{3} - 5 \cdot \binom{4}{3} = 120 - 5 \cdot 4 = 100 .$$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Düzlemde* 6 *doğru ve farklı yarıçaplarda* 4 *çember veriliyor. Bu* 6 *doğru ile* 4 *çember en çok kaç kesim noktası oluşturabilir?*

A) 48 B) 60 C) 75 D) 80 E) 100

Çözüm: En çok kesim noktası elde edebilmek amacıyla doğruların hiçbirinin herhangi bir çembere teğet olmadığını düşünmeliyiz, her biri bir çemberi 2 farklı noktada kessin. O halde $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ kesim noktası buradan gelir. Diğer yandan 6 doğru kendi arasında $C(6, 2) = 15$ tane kesim noktası oluşturur. Bir de çemberler kendi arasında $2 \cdot C(4, 2) = 12$ kesim noktası oluştururlar. O halde en çok $48 + 15 + 12 = 75$ kesim noktası oluşabilir.

Doğru cevap: C.

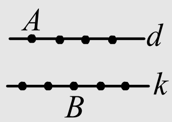
Örnek. *Başlangıç noktaları aynı bir P noktası olan ve herhangi ikisi doğrusal olmayan* 6 *tane ışın veriliyor. Bu ışınlardan köşesi P'de olan kaç tane açı oluşur?*

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 30

Çözüm: Köşesi P'de olan herhangi 2 ışın bir açı oluşturacağından $C(6,2) = 15$ tane açı oluşur.

Doğru cevap: D.

Örnek. *A noktasıyla birlikte* 4 *noktası olan bir d doğrusu ile B noktası ile birlikte* 5 *noktası bulunan d'ye paralel bir k doğrusu veriliyor.*
Bu şekildeki 9 *nokta;*



i. *Kaç farklı doğru belirtir?*

Aynı doğru üstünde olmayan iki noktaya ihtiyacımız var:

$$C(4, 1) \cdot C(5, 1) = 4 \cdot 5 = 20.$$

Bunlara bir de d ve k doğrularını eklersek cevap 22 olur.

ii. *Kaç farklı üçgen belirtir?*

Üçü aynı doğru üstünde olmayan 3 noktaya ihtiyacımız var. O halde 2'si d'den 1'i k'den ve 1'i d'den 2'si k'den olmak üzere 3 nokta seçelim:

$$C(4, 2) \cdot C(5, 1) + C(4, 1) \cdot C(5, 2) = 6 \cdot 5 + 4 \cdot 10 = 70.$$

iii. *Kaç farklı yamuk belirtir?*

2'si d'den ve 2'si k'den 4 noktaya ihtiyaç var:

$$C(4, 2) \cdot C(5, 2) = 6 \cdot 10 = 60.$$

iv. *A'dan geçen kaç doğru belirtir?*

Doğru mecburen A'dan geçecekse diğer noktası mecburen k doğrusu üstünde olacak. Bir de d doğrusunun kendisi var:

$$C(5, 1) + 1 = 5 + 1 = 6.$$

v. *A'dan geçen ama B'den geçmeyen kaç doğru belirtir?*

k doğrusu üzerindeki 5 noktadan adı B olan birini yasakladılar ama diğer 4'üne hala izin var, bir de d doğrusunun kendisi var:

$$C(4, 1) + 1 = 4 + 1 = 5.$$

vi. *Bir köşesi A olan kaç üçgen belirtir?*

Ya diğer 2 noktayı k'den ya da 1'ini d'den (ama A noktası dışındakilerden), 1'ini k'den seçeceğiz. Diğer iki noktayı da d'den seçersek, doğrusal olacaklarından üçgen elde edilemez:

$$C(5, 2) + C(3, 1) \cdot C(5, 1) = 10 + 3 \cdot 5 = 25.$$

vii. *A ve B köşelerine sahip kaç üçgen belirtir?*

Üçüncü noktayı hangi doğrudan seçersek seçelim, ama A ve B dışındaki noktalar olmak zorunda, her zaman üçgen oluşur (kalan 7 taneden biri yani):

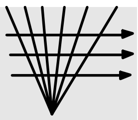
$$C(3, 1) + C(4, 1) = 3 + 4 = 7.$$

viii. *Bir köşesi B olan ama A diye bir köşesi olmayan kaç yamuk belirtir?*

Bize k üzerinde B'den farklı bir nokta ve d üzerinde A'dan farklı 2 nokta lazım:

$$C(4, 1) \cdot C(3, 2) = 4 \cdot 3 = 12.$$

Örnek. *Şekilde paralel olan üç doğru ile bu doğruları kesen 6 noktadaş doğru görülmektedir. Bu 9 doğru bu konumlarıyla kaç farklı üçgen belirtirler?*



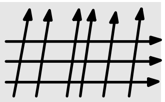
A) 15 B) 18 C) 40 D) 45 E) 60

Çözüm: Bir üçgen elde edilebilmek için tek noktada kesişen doğrulardan herhangi ikisi ve birbirlerine paralel olan doğrulardan herhangi 1'ine ihtiyacımız var. O halde bu seçimi kaç farklı şekilde yapabileceğimizi bulmalıyız.

$C(6, 2) \cdot C(3, 1) = 15 \cdot 3 = 45.$

Doğru cevap: D.

Örnek. *Yatay olan 3 doğru ve dikey olan 6 doğru birbirlerine paralel olduğuna göre şekilde kaç farklı paralelkenar vardır?*



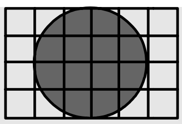
A) 15 B) 18 C) 40 D) 45 E) 60

Çözüm: Bir paralelkenar oluşturmak için, bize yataylardan herhangi ikisi ve dikeylerden herhangi ikisi lazım. O halde bu seçimi kaç farklı şekilde yapabileceğimizi bulmalıyız. Ben buldum:

$C(3, 2) \cdot C(6, 2) = 3 \cdot 15 = 45.$

Doğru cevap: E.

Örnek. *Şekilde taralı dairenin herhangi bir parçasını kapsayan kaç farklı dikdörtgen vardır?*



A) 150 B) 160 C) 170 D) 190 E) 200

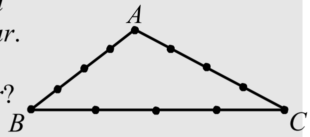
Çözüm: Bu soruda da tersten gitmek daha faydalıdır. Tüm dikdörtgen sayısından taralı dairenin herhangi bir parçasını kapsamayan dikdörtgenlerin sayısını çıkartacağız. Toplam $C(7, 2) \cdot C(5, 2) = 210$ farklı dikdörtgen vardır. En sol ve en sağ sütunlardaki karelerin oluşturdukları dikdörtgenler taralı bölgenin herhangi bir parçasını kapsamıyorlar. Bakalım sol sütunda öyle kaç dikdörtgen var? $C(2, 2) \cdot C(5, 2) = 10$ tane varmış, 10 tane de sağda vardır. O halde cevap

$210 - 10 - 10 = 190$

tane olmalıdır.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Şekildeki ABC üçgeni üzerinde 12 farklı nokta vardır. Bu noktaları köşe kabul eden kaç değişik dörtgen çizilebilir?*

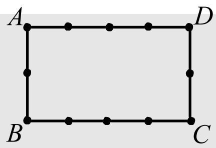


A) 40 B) 60 C) 120 D) 180 E) 270

Çözüm: Böyle sorularda tersten gitmek daha avantajlıdır. Önce 12 nokta çembersel olsalardı kaç değişik dörtgen olurdu, onu bulalım. $C(12, 4) = 495$ tane dörtgen çizilebilirdi. Şimdi AB kenarı üzerindeki 5 noktaya odaklanalım. Bu beş nokta doğrusal olsalardı $C(5, 4) = 5$ tane dörtgen oluştururdu ama bu durumda oldukları için oluşturamıyorlar. Ayrıca bu 5 tanenin 3'ü ve diğer 7 tanenin 1'i de $C(5, 3) \cdot C(7, 1) = 70$ tane dörtgen oluşturabilirlerdi, fakat bunu da oluşturamıyorlar. Aynı durumlar BC ve CA kenarlarına odaklanıldığında oluşacağından $495 - 3 \cdot 5 - 3 \cdot 70 = 270$ farklı dörtgen çizmek mümkündür.

Doğru cevap: E.

Örnek. *Şekildeki dikdörtgenin üzerinde bulunan 12 noktayı köşe kabul eden en fazla kaç tane üçgen çizilebilir?*

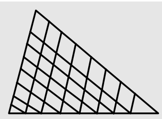


A) 90 B) 108 C) 110 D) 112 E) 198

Çözüm: Yine tersten gideceğiz. 12 nokta dağınık olsaydı $C(12, 3) = 220$ farklı üçgen çizmek mümkün olurdu. AD ve BC kenarları üzerindeki 5'er nokta doğrusal olmasalardı $C(5, 3) = 10$'ar tane, AB ve CD kenarları üzerindeki 3'er nokta da doğrusal olmasalardı $C(3, 3) = 1$'er tane üçgen oluştururlardı. O halde bu durumdaki çizilebilecek üçgen sayısı $220 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 1 = 198$'dir.

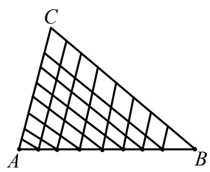
Doğru cevap: E.

Örnek. *Yandaki şekilde kaç farklı üçgen vardır?*



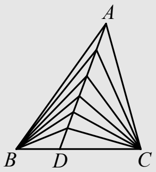
A) 30 B) 35 C) 36 D) 40 E) 42

Çözüm: En büyük üçgene ABC diyelim. Şekle dikkat edilecek olursa, üçgenlerin hepsinin bir kenarının AB doğrusu üzerinde olduğunu anlarız. AB üzerinde 9 farklı nokta olduğundan $C(9, 2) = 36$ tane farklı nokta ikilisi bulunur. 36 nokta ikilisinin belirttiği 36 doğru parçasının tamamı 36 farklı üçgene aittir. Demek ki şekilde 36 farklı üçgen mevcuttur.



Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki ABC üçgeninde B, D ve C noktaları doğrusaldır. Buna göre şekilde kaç farklı üçgen mevcuttur?*



A) 16 B) 24 C) 48 D) 50 E) 52

Çözüm: İki farklı yoldan çözelim.

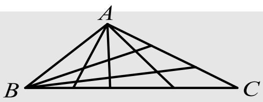
Birinci yol. B'den çıkan ışınların herhangi ikisiyle AD doğrusu farklı birer üçgen belirtir. Aynı durum C'den çıkan ışınlar için de geçerlidir. Bir de tabanı BC olup, tepesi $[AD[$ üstünde olan üçgenler de mevcuttur. Şimdi saymaya geçelim: $\binom{7}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{1}=48$.

İkinci yol. Şekildeki 9 nokta çembersel olsaydı $C(9, 3) = 84$ üçgen oluşturdu. Bu 9 noktadan AD üzerindeki 7 nokta da o durumda $C(7, 3) = 35$ tane üçgen oluşturacakları ama maalesef hiç oluşturmuyorlar. Benzer şekilde B, D, C doğrusal noktaları da 1 üçgeni oluşturacağı yerde oluşturmuyorlar. Anlayacağınız 35 + 1 = 36 tane kayıp var. Bunu 84'ten çıkartalım, cevabı bulalım:

$$\binom{9}{3}-\left[\binom{7}{3}+\binom{3}{3}\right]=84-[35+1]=48.$$

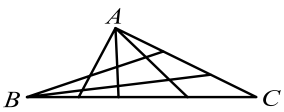
Doğru cevap: C.

Örnek. *Yandaki şekilde kaç üçgen vardır?*

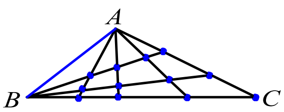


A) 46 B) 44 C) 42 D) 40 E) 30

Çözüm: AB kenarı A'dan çıkan bir doğru gibi de düşünülebilir, B'den çıkan bir doğru gibi de. Biz karışıklığa mahal vermemek için, ikisine de dahil etmeyelim. AB kenarını önce bir silelim.



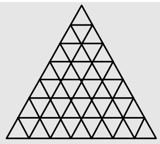
Bir köşesi A olan üçgenleri sayalım. A'dan çıkan ışınlardan iki tanesiyle B'den çıkan bir ışını düşüneceğiz. $C(4, 2)\cdot C(3, 1) = 18$ tane böyle üçgen vardır. Şimdi bir köşesi B olan üçgenleri sayalım. B'den çıkan iki ışınla A'dan çıkan dört ışını düşüneceğiz. $C(3, 2)\cdot C(4, 1) = 12$ tane de böyle üçgen vardır. Etti 30 ve bu 30 üçgenin hiçbir kenarı AB değil. Şimdi bunlara bir kenarı AB olan üçgenleri de ekleyeceğiz olacak bitecek.



A ve B noktaları dışındaki tüm kesişim noktaları AB tabanına tepe oluşturabilir. A'dan çıkan 4 ışınla, B'den çıkan 3 ışın $C(4, 1)\cdot C(3, 1) = 4\cdot 3 = 12$ kesim noktası oluşturduğundan toplam olarak 30 + 12 = 42 üçgen vardır.

Doğru cevap: C.

Örnek. *Yukardaki şekilde kaç tane üçgen vardır?*



A) 118 B) 120 C) 130 D) 140 E) 200

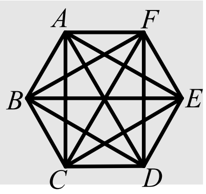
Çözüm: Üçgenlerin hepsini eşkenar kabul etmemiz çözümü etkilemeyecektir. Diğer yandan tüm üçgenlerin Δ veya ∇ şeklinde iki gruba ayrılabileceğini de fark edelim. Bir kenar uzunluğu x birim olup, tepe noktası yukarda olan üçgenleri xY, bir kenar uzunluğu x birim olup tepe noktası aşağıda olan üçgenleri de xA ile gösterelim.

1Y üçgenlerinin adedi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7
2Y üçgenlerinin adedi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
3Y üçgenlerinin adedi = 1 + 2 + 3 + 4 + 5
4Y üçgenlerinin adedi = 1 + 2 + 3 + 4
5Y üçgenlerinin adedi = 1 + 2 + 3
6Y üçgenlerinin adedi = 1 + 2
7Y üçgenlerinin adedi = 1
3A üçgenlerinin adedi = 1 + 2
2A üçgenleri adedinin = 1 + 2 + 3 + 4
1A üçgenleri adedinin = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6

Geriye sadece bu toplamları toplamak kaldı. Ben topladım, 118 çıkıyor.

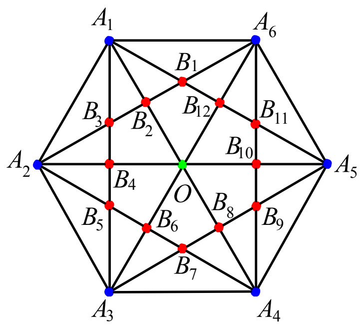
Doğru cevap: A.

Örnek. *Bir düzgün altıgenin tüm köşegenleri çizildiğinde ortaya çıkan şekilde kaç farklı üçgen mevcuttur?*



A) 100 B) 102 C) 104 D) 110 E) 114

Çözüm: Bu tarz sorularda, ayrık nokta grupları belirlemek daha avantajlıdır.



Bu niyetle altıgenin köşelerini A_1, A_2, …, A_6, köşegenlerin altıgen içindeki kesim noktalarını B_1, B_2, …, B_{12}, altıgenin merkezini de O diye adlandıralım.

$i, j, k\in\{1, 2, …, 6\}$ ve $m, n, p\in\{1, 2, …, 12\}$ olmak üzere

$A_iA_jA_k$ üçgenlerinin adedi: $\binom{6}{3} = 20$,

$A_iA_jB_m$ üçgenlerinin adedi: $12 \cdot 4 = 48$,

$A_iB_mB_n$ üçgenlerinin adedi: $3 \cdot 6 = 18$,

$B_mB_nB_p$ üçgenlerinin adedi: 0,

OA_iA_j üçgenlerinin adedi: $\binom{6}{2} - 3 = 12$,

OA_iB_m üçgenlerinin adedi: $\binom{6}{1} \cdot 2 = 12$,

OB_mB_n üçgenlerinin adedi: 0

olduğundan

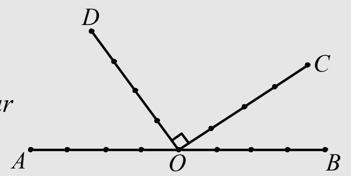
$$20 + 48 + 18 + 12 + 12 = 110$$

olarak bulunur.

Doğru cevap: D.

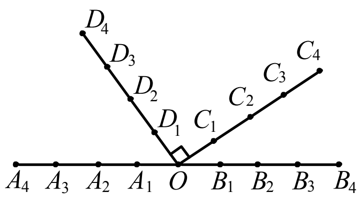
Serdar Akyüz hocamızın çok güzel bir sorusuyla örneklerimize devam edelim.

Örnek. *Şekilde A, O, B noktaları doğrusal olup $DO \perp OC$ veriliyor. Ardışık doğrusal noktalar arasındaki uzaklıklar eşit olduğuna göre şekildeki gibi sabitlenmiş 17 nokta kaç dik üçgen belirtir?*

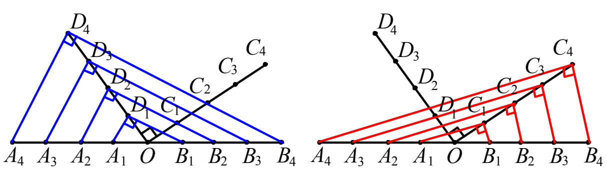


A) 8 B) 16 C) 20 D) 24 E) 28

Çözüm: Noktaları şekildeki gibi adlandıralım.



i ve $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ olmak üzere, ilk göze çarpan dik üçgenler D_iOC_j üçgenleridir. 4 farklı D ve 4 farklı C noktası olduğundan 16 farklı D_iOC_j üçgeni çizilebilir.



Bu kadar ayan beyan görülmeyen dik üçgenler de mevcuttur. Muhteşem üçlü gereği $A_iD_iB_i$ ve $A_jC_jB_j$ üçgenleri de diktir. i ve j değişkenleri 4'er farklı değer alabildiğinden 4 farklı $A_iD_iB_i$ üçgeni ve 4 farklı $A_jC_jB_j$ üçgeni vardır. Sonuç olarak bu 17 nokta 16 + 4 + 4 = 24 farklı üçgen belirtir.

Doğru cevap: D.

Örnek. *Bir üçgenin herhangi iki köşesine ait n'şer kesen, üçgeni kaç parçaya ayırır?*

A) n B) $n + 1$ C) $(n + 1)^2$ D) 2^n E) n^2

Çözüm: Önce herhangi bir köşeye ait n tane keseni çizelim. Üçgen $n + 1$ üçgenciğe ayrılır. Sonra diğer bir köşeden çizilen ilk kesen bu $n + 1$ tane parçayı $2\cdot(n + 1)$ parça yapar, ikinci kesen $3\cdot(n + 1)$ parça yapar, … , n'ninci kesen bundan dolayı $(n + 1)\cdot(n + 1) = (n + 1)^2$ parçaya ayırmış olur. Eğer üçüncü köşeden de n tane kesen çizilseydi ve 2'den fazla kesen tek noktada kesişmeseydi, üçgen

$$(n + 1)^2 + n\cdot(2n + 1)$$

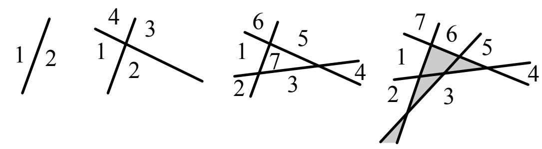
parçaya ayrılırdı. Bunu da siz kanıtlayın…

Doğru cevap: C.

Örnek. *Herhangi ikisi paralel olmayan ve üçü tek noktada kesişmeyen n tane doğru, üzerinde bulundukları düzlemi kaç bölgeye ayırır?*

A) n B) $n + 1$ C) $(n + 1)^2$ D) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ E) $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$

Çözüm: Önce tek 1 doğru kaç bölgeye ayırıyor ona bakalım, sonra ikinci doğruyu çizelim, şimdi bakalım, sonra üçüncüyü…



Görülen o ki;

1 doğru 2 bölgeye ayırıyor,
2 doğru 4 bölgeye ayırıyor,
3 doğru 7 bölgeye ayırıyor,
4 doğru 11 bölgeye ayırıyor …

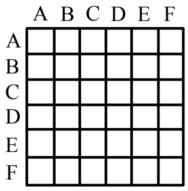
Dikkat ettiyseniz, bölge sayısı önce 2 arttı, sonra 3, sonra 4. O halde ikinci dereceden bir ilişki var doğru ile bölge sayıları arasında. Sabit artsaydı birinci dereceden derdik. 2, 4, 7, 11, … sayılarının özelliği birer eksiklerinin yani 1, 3, 6, 10, … sayılarının 1'den başlayan sayma sayılarının toplamlarının sonucu olduğudur.

O halde n doğru düzlemi $\dfrac{n(n+1)}{2} + 1$ bölgeye ayırır.

Doğru cevap: E.

Bulmaca Tablosundaki Kare Sayısı

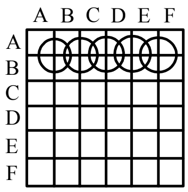
Önce satır sayısıyla sütun sayısı aynı olan bir bulmaca tablosunda sayalım. Sonra kullandığımız tekniği her türlü tablo için genelleştireceğiz. Örnek olarak 6×6 boyutunda bir tablo çizelim.



Kare sayısını hesaplamak, dikdörtgen sayısını hesaplamaya göre biraz çetrefillidir ama kolaydır. Bir kenarı 1 birim olan kareleri, 2 birim olanları ayrı, … 6 birim olanı ayrı ayrı hesaplamak lazımdır. Hesaplayalım:

Bir kenarı 1 birim olan kareler rahatlıkla görüleceği üzere 6·6 = 36 tanedir.

Bir kenarı 2 birim olan karelerse şöyle hesaplanır:



Önce sadece en üstteki iki satırla yani AB satırıyla başlayalım. AB satırında yuvarlakla gösterilmiş 5 tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır. E böyle AB, BC, CD, DE, EF olmak üzere 5 farklı ikili satır olduğundan

5·5 = 25 tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır.

Bu işlemlere aynı şekilde devam edilirse, bir kenarı 3 birim olan kare sayısının 4·4 = 16, bir kenarı 4 birim olan kare sayısının 3·3 = 9, bir kenarı 5 birim olan kare sayısının 2·2 = 4 ve son olarak bir kenarı 6 birim olan kare sayısının da 1·1 = 1 olduğu görülür. O halde toplam kare sayısı

$$T = 6\cdot 6 + 5\cdot 5 + 4\cdot 4 + 3\cdot 3 + 2\cdot 2 + 1\cdot 1$$
$$= \sum_{i=1}^{6}\left(i^2\right) = \frac{6\cdot 7\cdot 13}{6} = 91$$

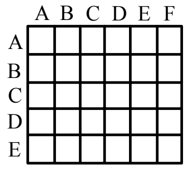
olarak bulunur.

Eğer bulmaca tablosu 6×6 boyutunda değil de $n\times n$ boyutunda olursa toplam kare sayısı

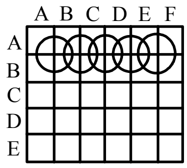
$$\sum_{i=1}^{n}\left(i^2\right) = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

formülüyle hesaplanabilir. Üstteki problemi nasıl çözdüysek, aynısını kullanarak kanıtlayabilirsiniz.

Eğer satır sayısıyla sütun sayısı farklıysa ne yapacağımızı da anlatalım: Örnek olarak, 5 satır ve 6 sütundan oluşan bir bulmaca tablosu çizelim.



Bir kenarı 1 birim olan kareler rahatlıkla görüleceği üzere 6·5 = 30 tanedir.



Bir kenarı 2 birim olan karelerse şöyle hesaplanır:

Önce sadece en üstteki iki satırla yani AB satırıyla başlayalım. AB satırında yuvarlakla gösterilmiş 5 tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır. E böyle AB, BC, CD, DE olmak üzere 4 farklı ikili satır olduğundan 5·4 = 20 tane bir kenarı 2 birim olan kare vardır.

Bu işlemlere aynı şekilde devam edilirse, bir kenarı 3 birim olan kare sayısının 4·3 = 12, bir kenarı 4 birim olan kare sayısının 3·2 = 6 ve son olarak bir kenarı 5 birim olan kare sayısının 2·1 = 2 tane olduğu görülür. O halde toplam kare sayısı

$$T = 6\cdot 5 + 5\cdot 4 + 4\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 1$$
$$= \sum_{i=1}^{5}\left((i+1)\cdot i\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{5}\left(i^2 + i\right)$$
$$= \frac{5\cdot 6\cdot 11}{6} + \frac{5\cdot 6}{2} = 70$$

olarak bulunur.

Eğer bulmaca tablosu 6×5 boyutunda değil de $m\times n$ boyutunda olursa ($m > n$) toplam kare sayısı

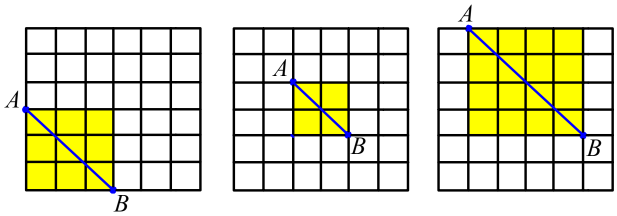
$$T = \sum_{i=0}^{n}\left((m-i)\cdot(n-i)\right)$$

formülüyle hesaplanabilir. Üstteki problemi nasıl çözdüysek, aynısını kullanarak kanıtlayabilirsiniz.

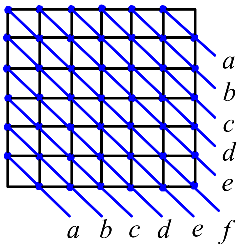
Aslında hepsinin suyunu sıkınca şu kalıyor:

Önce tablo boyutunu yazın, $m\cdot n$ şeklinde. Daha sonra hem m'yi hem n'yi 1'er azalatarak çarpmaya devam edin, taa ki biri 0 olana kadar. Sonra o çarpımları toplayın!

TMOZ grubundan Yasin Temizkan hocam, bu tip sorular için alternatif bir çözüm önermiş. Bizim önerimiz yukarda anlatılanlardır ama farklı bir bakış açısı olması maksadıyla veriyoruz.



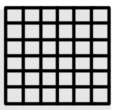
Yukardaki şekillerden de görüldüğü üzere köşegeni [AB] olan tek kare vardır. Yani her yatay [AB] doğru parçası bir kareyi simgelemektedir. O halde problemi kaç değişik [AB] çizilebileceği üzerine kuracağız.



a, b, c, d, e, f doğrularının üstünde sırasıyla 2, 3, 4, 5, 6, 7 nokta olduğundan bu doğrular üzerindeki herhangi iki tane nokta, değişik bir [AB] belirtecektir. Yalnız a, b, c, d, e doğrularından ikişer tane olduğundan, onları 2'yle çarpacağız. O halde tablodaki kare sayısı

$$2\left[\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}\right]+\binom{7}{2}=91.$$

Örnek. 36 *birim kareden oluşturulmuş yandaki karedeki dikdörtgen sayısı kare sayısından kaç fazladır?*



A) 150 B) 180 C) 220 D) 440 E) 350

Çözüm: Önce kaç dikdörtgen olduğunu bulalım. 7 dikey ve 7 yatay doğru olduğundan, dikdörtgen sayısı

$$C(7, 2)\cdot C(7, 2) = 21\cdot 21 = 441,$$

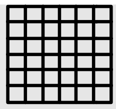
kare sayısı da

$$\sum_{i=1}^{6}\left(i^2\right)=\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6}=91$$

olduğundan cevap 441 – 91 = 350 olmalıdır.

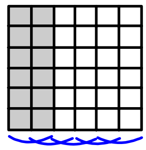
Doğru cevap: E.

Örnek. 36 *birim kareden oluşturulmuş yandaki karedeki alanı 12 br2 olan kaç farklı dikdörtgen vardır?*

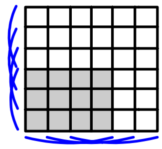


A) 12 B) 24 C) 34 D) 36 E) 48

Çözüm: Eğer bir dikdörtgenin alanı 12 br^2 ise bu dikdörtgenin ebadı ya 2x6 ya da 3x4 olmalıdır. Önce ebadı 2x6 olan dikdörtgenleri sayalım. Sağ şekilden de görüldüğü üzere dikey olarak 5 tane, yatay olarak da 5 tane olmak üzere toplam 10 tane böyle dikdörtgen vardır.

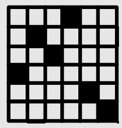


Şimdi de ebadı 3x4 olanları sayalım. En alt 3 satırda böyle 3 tane dikdörtgen olup 1 satır 1 satır yukarı çıkarsak yatay pozisyonda 12 tane böyle dikdörtgen sayarız. 12 tane de dikey var. Etti 24 tane. Ebadı 2x6 olan 10 taneyle birlikte toplam 34 tane dikdörtgen vardır.



Doğru cevap: C.

Örnek. 36 *birimkareden oluşturulmuş yandaki bulmaca tablosunun 6 karesi, her satır ve sütunda sadece 1 tane kare boyalı olacak şekilde kaç farklı şekilde boyanabilir?*



A) 36 B) 100 C) 120 D) 360 E) 720

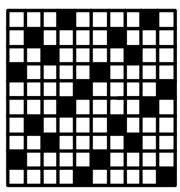
Çözüm: İlk sütundan başlayalım. İlk sütundaki 6 kareyi de boyayabiliriz. Herhangi birini boyadıktan sonra ikinci sütun için 5 seçenek kalır. Üçüncü sütun için 4, dördüncü sütun için 3, beşinci sütun için 2 ve son sütun için 1 seçeneğimiz olduğundan toplam 6·5·4·3·2·1 = 6! = 720 farklı şekilde boyama gerçekleştirilebilir.

Doğru cevap: E.

Meraklısına Bir Soru. Bir önceki soruyu yazdıktan sonra, bulmaca karesini biraz büyüteyim, bir de öyle çözeyim dedim. Sonra da kare büyüse de teknik değişmiyor ki, bari her satır ve sütundaki boyanacak kare sayısını ikiye çıkarayım dedim. Demez olaydım!

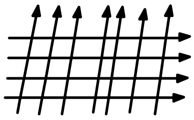
Ben problemin altından kalkamadım, belki siz bir şeyler bulabilirsiniz.

100 birimkareden oluşturulmuş yandaki bulmaca tablosunun 20 karesi, her satır ve sütunda sadece 2 tane kare boyalı olacak biçimde kaç farklı şekilde boyanabilir?



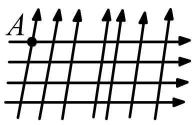
CEVAPLI TEST 1

1.
Yandaki şekilde yatay olan 4 doğru ve dikey olan 7 doğru birbirlerine paralel olduğuna göre şekilde kaç farklı paralelkenar var?



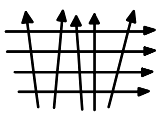
A) 56 B) 102 C) 108 D) 126 E) 168

2.
Yan şekilde yatay olan 4 doğru ve dikey olan 7doğru birbirlerine paraleldir.
Buna göre şekilde bir köşesi A olan kaç farklı paralelkenar var?



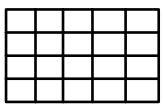
A) 18 B) 20 C) 24 D) 30 E) 36

3.
Yatay olan 4 doğru birbirlerine paralel olup 5 farklı doğru bunları şekildeki gibi kesmektedir.
Şekilde kaç farklı yamuk vardır?



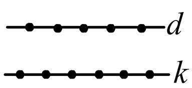
A) 56 B) 60 C) 64 D) 72 E) 90

4.
Yandaki şekil 20 küçük dikdörtgenden oluşmuştur.
Şekilde kaç farklı dikdörtgen var?



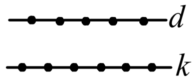
A) 20 B) 40 C) 60 D) 90 E) 150

5.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel bir *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta en çok kaç doğru belirtir?



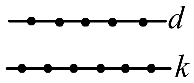
A) 2 B) 30 C) 31 D) 32 E) 60

6.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel olan *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta kaç üçgen belirtir?



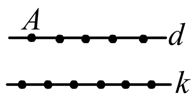
A) 90 B) 105 C) 120 D) 135 E) 165

7.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel olan *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta kaç dörtgen belirtir?



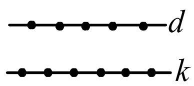
A) 150 B) 160 C) 165 D) 180 E) 210

8.
A noktası başka 4 noktayla birlikte *d* doğrusunun üstündedir. Bu doğruya paralel bir *k* doğrusu da 6 ayrı noktaya sahiptir.
Bu 11 nokta, kaç farklı bir köşesi *A* olan üçgen belirtir?



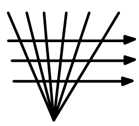
A) 24 B) 39 C) 40 D) 64 E) 65

9.
Beşi *d* doğrusunun, altısı da *d*'ye paralel olan *k* doğrusunun üzerinde bulunan 11 farklı nokta en çok kaç değişik doğru parçası belirtir?



A) 30 B) 35 C) 45 D) 48 E) 55

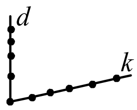
10.
Şekilde paralel olan üç doğru ile bu doğruları kesen 6 noktadaş doğru görülmektedir.
Bu 9 doğru bu konumlarıyla kaç farklı üçgen belirtirler?



A) 30 B) 35 C) 40 D) 45 E) 50

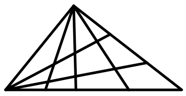
CEVAPLI TEST 2

1.
Birer noktaları ortak d ve k doğruları şekildeki gibi 10 nokta taşımaktadırlar.
Köşeleri bu noktalar olan kaç farklı üçgen çizilebilir?



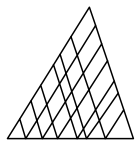
A) 60 B) 70 C) 80 D) 90 E) 100

2.
Bir üçgende bir köşeye ait 2, bir başka köşeye ait 3 kesen çizilirse, oluşacak yandaki şekilde kaç farklı üçgen mevcuttur?



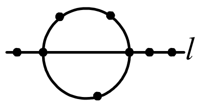
A) 52 B) 44 C) 42 D) 40 E) 38

3.
Yandaki şekilde kaç farklı üçgen vardır?



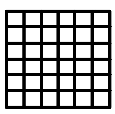
A) 21 B) 28 C) 32 D) 36 E) 42

4.
İki noktaları ortak bir çember ile bir l doğrusu verilmiştir.
Üzerlerindeki bu 8 nokta kaç farklı üçgen belirtir?



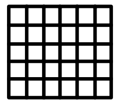
A) 46 B) 48 C) 50 D) 52 E) 56

5.
36 birim kareden oluşturulmuş yandaki karede kaç farklı kare vardır?



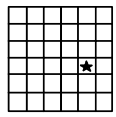
A) 73 B) 82 C) 91 D) 100 E) 109

6.
30 birimkareden oluşturulmuş yandaki dikdörtgende kaç farklı kare mevcuttur?



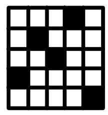
A) 91 B) 85 C) 78 D) 75 E) 70

7.
36 birimkareden oluşturulmuş yandaki karede, içinde yıldız işareti bulunmayan kaç değişik kare vardır?



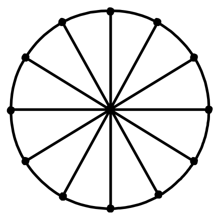
A) 69 B) 70 C) 71 D) 72 E) 73

8.
25 birimkareden oluşturulmuş yandaki karenin 5 farklı birim karesi her satır ve sütunda sadece 1 tane boyalı birim kare olacak şekilde kaç farklı şekilde boyanabilir?



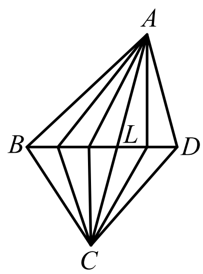
A) 210 B) 150 C) 120 D) 108 E) 90

9.
Yandaki şekilde kaç farklı daire dilimi vardır?



A) 45 B) 66 C) 75 D) 90 E) 132

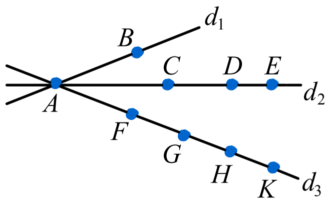
10.
Yandaki şekilde
***A*, *L*, *C* doğrudaş**
***B*, *L*, *D* doğrudaş**
olduğuna göre şekilde kaç farklı üçgen vardır?



A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

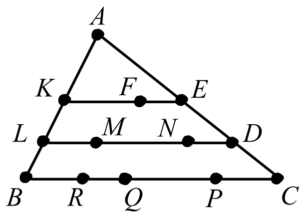
CEVAPLI TEST 3

1.
Farklı doğrular üzerinden alınan herhangi iki nokta doğrusal olmadığına göre şekilde verilen 9 noktadan herhangi üçünü köşe kabul eden kaç farklı üçgen çizilebilir?



A) 56 B) 64 C) 68 D) 70 E) 76

2.
Şekilde verilmiş olan noktaları köşe kabul eden en çok kaç farklı üçgen çizilebilir?



A) 167 B) 184 C) 196 D) 263 E) 286

3.
12 kenarlı bir çokgenin kaç köşegeni vardır?

A) 54 B) 60 C) 74 D) 72 E) 144

4.
Yirmi kenarlı bir çokgenin belli bir köşesinden kaç farklı köşegen çizilebilir?

A) 20 B) 19 C) 18 D) 17 E) 16

5.
Yirmi kenarlı bir çokgenin toplam kaç köşegeni vardır?

A) 170 B) 160 C) 150 D) 140 E) 130

6.
6 doğru en az kaç tane kesim noktası oluşturur?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 15 E) 20

7.
6 doğru en fazla kaç tane kesim noktası oluşturur?

A) 0 B) 1 C) 6 D) 15 E) 20

8.
Bir üçgenin herhangi iki köşesine ait 7'şer kesen, üçgeni kaç parçaya ayırır?

A) 25 B) 36 C) 49 D) 64 E) 81

9.
Herhangi ikisi paralel olmayan ve üçü tek noktada kesişmeyen 5 tane doğru, üzerinde bulundukları düzlemi kaç bölgeye ayırır?

A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) 21

10.
***n* tane nokta en çok 20 tane üçgen belirtiyorsa, en çok kaç tane beşgen belirtebilir?**

A) 5 B) 6 C) 12 D) 15 E) 21

CEVAPLI TEST 4

1.
***n* tane üçgen en çok kaç kesişim noktası oluşturabilir?**

A) $\binom{n}{2}$ B) $2\cdot\binom{n}{2}$ C) $3\cdot\binom{n}{2}$ D) $4\cdot\binom{n}{2}$ E) $6\cdot\binom{n}{2}$

2.
***n* tane çember en çok kesim noktası oluşturabilir?**

A) $\binom{n}{2}$ B) $2\cdot\binom{n}{2}$ C) $3\cdot\binom{n}{2}$ D) $4\cdot\binom{n}{2}$ E) $6\cdot\binom{n}{2}$

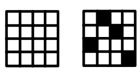
3.
***n* tane kare en çok kaç kesim noktası oluşturabilir?**

A) $\binom{n}{2}$ B) $2\cdot\binom{n}{2}$ C) $4\cdot\binom{n}{2}$ D) $6\cdot\binom{n}{2}$ E) $8\cdot\binom{n}{2}$

4.
Herhangi ikisi paralel olmayan 11 doğrunun 4'ü bir noktada, başka 3 noktası da ayrı bir noktada kesişmektedirler.
Bu doğrular en çok kaç kesim noktası oluştururlar?

A) 46 B) 47 C) 48 D) 49 E) 50

5. ÖSS 2000
16 küçük kareden oluşan I. şeklin her satır ve her sütununda bir ve yalnız bir küçük kare karalanarak II. şekildeki gibi desenler elde edilmektedir.

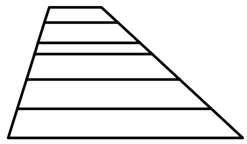


I.Şekil II.Şekil

Bu kurala göre, <u>en çok</u> kaç farklı desen elde edilebilir?

A) 16 B) 20 C) 24 D) 32 E) 36

6.
Yandaki yamuk içine çizilen doğru parçaları tabanlara paraleldir.



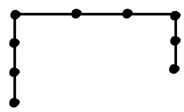
Buna göre şekilde kaç farklı yamuk vardır?

A) 10 B) 15 C) 21 D) 28 E) 36

7.
Bir doğru bir çemberi iki noktada kesiyor. Doğrunun çemberi kestiği noktalar A ve B, çemberin üzerindeki diğer farklı 3 nokta C, D ve E, doğrunun üzerindeki diğer farklı 2 nokta ise F ve G'dir.
Buna göre bu noktalar kaç tane üçgen belirtir?

A) 36 B) 35 C) 33 D) 31 E) 28

8.
Yan şekilde işaretlenmiş 9 nokta kaç farklı üçgen belirtir?



A) 75 B) 76 C) 79 D) 80 E) 84

9.
14 tane farklı patlıcan közlenecektir. Ancak her iki patlıcan bir şişe takılacaktır.
Buna göre kaç farklı şişleme işlemi yapılabilir?

A) $14!\cdot 2!$ B) $14!$ C) $\frac{14!}{2!}$ D) $\binom{14}{2}$ E) 14

10.
8 çemberin kesişmeleri sonucunda oluşabilecek en çok nokta sayısı en az nokta sayısından ne kadar fazladır?

A) 28 B) 27 C) 13 D) 7 E) Sonsuz