

Софийски университет "Св. Климент Охридски" гр.София

|  |
| --- |
| Документция |
| Към проект по "Фрактали" |
|  |
| "Триъгълник на Сиерпински" |
| Изготвил:  Димитър Наумов Дишев, ФН:71371, ИС: 3 курс |

**1. Фрактали**

Фракталът е геометричен обект, който е радикално „начупен“. Терминът фрактал (от латинското fractus, счупен) е въведен през1975 от Беноа Манделброт, за да привлече вниманието към тези обекти. В много отношения те се отличават от обикновените „гладки“ обекти в традиционната геометрия. Това е и съвсем лесно забележимо.

Най-често фракталът се генерира (например на компютърен екран) от повтаряща се схема, обикновено рекурсивен илиитерационен процес. Това му придава множество интересни характеристики, най-важните от които са самоподобността и безкрайната подробност независимо от увеличението. Фракталите обединяват структура и неправилност.

Различни видове фрактали са първоначално изучавани като математически обекти и терминът „фрактал“ е получил различни точни дефиниции. Фракталната геометрия е клон от математиката, който изучава фракталите и особеното им поведение. Тя намира приложение в науката, техниката и компютърното изкуство.

Корените на теорията за фракталите могат да се проследят до опитите за измерване на периметъра (или площта, или обема) на фрактали в случаи, в които традиционният анализ е неприложим. Традиционните математически методи „се приближават“, с цел да опростят локалната картина. Съществуването на фракталите показва неприложимостта на този подход при появата не неограничено количество все по-дребни подробности.

**2. История**

Обекти, които днес се наричат фрактали, са открити и изследвани дълго преди появата на самата дума. През 1872 Карл Вайерщрас открива пример за функция с неинтуитивното свойство да е непрекъсната навсякъде без да е диференцируема никъде (Функция на Вайерщрас). Графиката на тази функция в наши дни би била наречена фрактал. През 1904 Хелге фон Кох, недоволен от твърде абстрактната и аналитична дефиниция на Вайерщрас, дава по-геометрично определение на подобна функция, която днес се нарича снежинка на Кох.

През 1960-те Беноа Манделброт започва да изследва самоподобността в публикации като Колко дълго е крайбрежието на Британия? Статистическа самоподобност и дробна размерност. Приемайки силно визуален подход, Манделброт установява връзките между клонове на математиката, несвързвани дотогава. През 1975 той въвежда думата фрактал, за да опише самоподобните обекти, които нямат ясна размерност.

Прилагането на компютърна визуализация към фракталната геометрия дава силен визуален аргумент за връзките на фракталната геометрия с далеч по-широки области на математиката и науката, отколкото се е смятало преди това, особено в областта на нелинейната динамика, теорията на хаоса и комплексните системи.

**3. Дефиниции**

Специфичните характеристики на фракталите, макар и интуитивно разбираеми, са извънредно трудни за прецизно математическо дефиниране. Проблемите с дефинирането на фракталите включват:

1) няма точно значение на „прекалено неравномерен“

2) няма единствено определение на „размерност“

3) има много начини, по които един обект може да бъде самоподобен

4) не всеки фрактал е дефиниран рекурсивно

Следните дефиниции на фрактал са предлагани, но всяка от тях си има недостатъци:

1) Обект, който е самоподобен в някакъв смисъл (включително нелинейната самоподобност и статистическата самоподобност) — това е проста интуитивна дефиниция, но е много трудно да се прецизира математически. Тя също включва и обектите на традиционната евклидова геометрия, които по принцип не се считат за фрактали.

2) Обект с не-цяла хаусдорфова размерност — но това изключва някои обекти, които по принцип се считат за фрактали, като кривата на Пеано и границата на множеството на Манделброт.

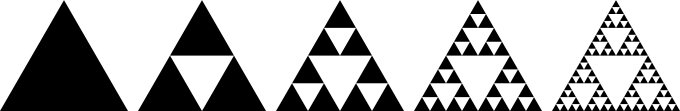
3) Множество с хаусдорфова размерност, която строго надхвърля неговата топологична размерност — това е най-широко възприетата математическа дефиниция, но изисква известна математическа подготовка, за да бъде разбрана.

**4. Триъгълник на Сиерпински**

Триъгълникът на Сиерпински е фрактал, наименуван на полския математик Вацлав Сиерпински, който го описва през 1915г. Подобни модели се забелязват още през тринадесети век: Мозайката на Космати в катедралата на Анагани, Италия и други места като Римската Базилика на Санта Мария в Космедин.

Оригинално проектиран като крива, това е един от основните примери за себеподобна структура, т.е. това е математически генериран модел, който може да се репродуцира при увеличение или намаляване.

Конструкция

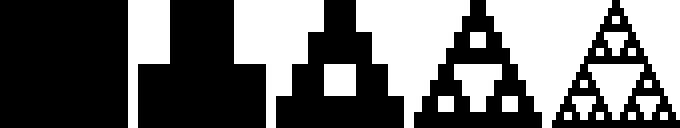


1) Започва се с някакъв триъгълник в равнина(всеки затворен регион от равнината имащ граници ще свърши работа). Каноничният триъгълник на Сиерпински използва равностранен триъгълник с основа успоредна на абсцисата.

2) Ширината и дължината на триъгълника се смаляват на половина, правят се три копия и се слагат така, че всеки триъгълник да докосва с два от ръбовете си другите два триъгълника, както е показано на втората картинка. Да се обърне внимание да мястото оставено между трите нови триъгълника- те заемат само ¾ от досегашната площ. (Празните пространства са важна част от триъгълникът на Сиерпински).

3) Повтаря се стъпка 2 с всички по – малки триъгълници(картина 3 и тн.)

Този безкраен процес не зависи от началната форма на триъгълника, просто е по – ясно по този начин. Първите няколко стъпки, например, от квадрат също водят до получаването на триъгълник на Сиерпински. Майкъл Барнсли е използвал изображение на риба, за да илюстрира това в неговия „V-variable fractals and superfractals“.

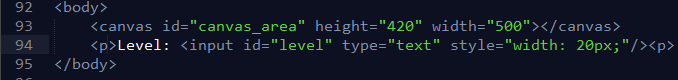


Реалния фрактал е това което ще се получи селд изпълнението на безкраен брой итерации. По формално се изразява като условия от функции на близки групи точки. Ако е разширението с коефициент ½ за точката „а“, то тогва триъгълника на Сиерпински с ъгли „a“, „b“, „c“ е фиксираната трансформация на групата U U .

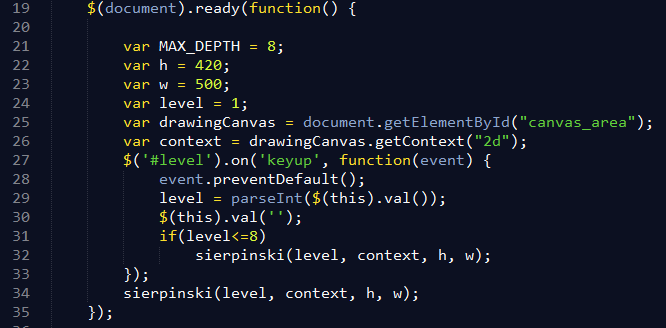
Триъгълникът на Сиерпински има Хаусдорфово измерение log(3)/log(2) ≈ 1.585, което следва от факта, че е обединение от три копия на себе си, всяко от които е мащабирано с ½. Площа на триъгълника на Сиерпински е 0. Площа оставаща след всяка итерация е ¾ от площа на предната итерация, и безброй итерация ще дадат резултат от 0.

**5.Имплементация**

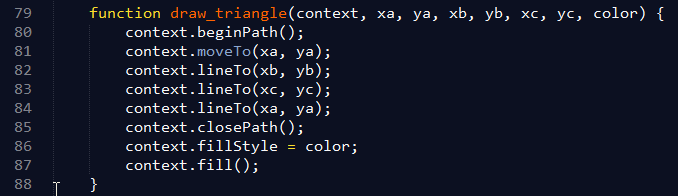
За имплементацията е използван скриптовия език JavaScript и HTML5, резултата може да бъде видян във всеки съвременен интернет браузър. В следващите редове ще бъдат обяснени по-подробно части от кода. Освен представения код на приложението, то може да бъде видяно на следния адрес **http://jsfiddle.net/HEWkZ/6/** , където освен целия код може да бъде видян и резултата от изпълнението му.



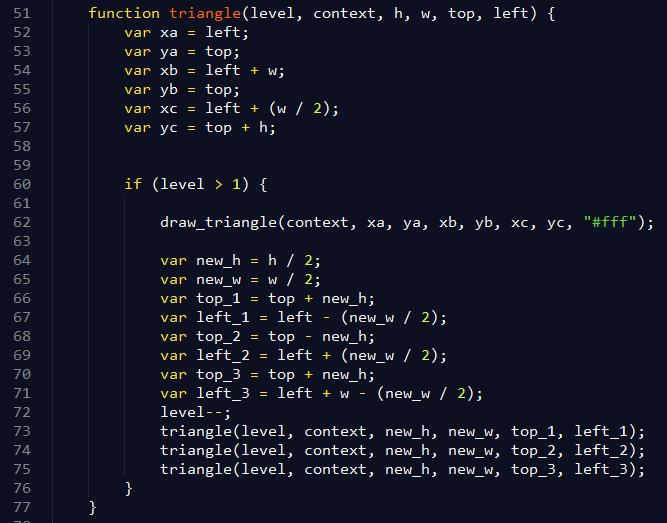
HTML5 canvas елемент който ще садържа графиката, той прави рисуването посредством JavaScript по лесно. Също така един input елемент в който потрвбителя ще може да въвежда число от 0 до 8, то ще бъде използвано за изчертаване на фрактала в съответната дълбочина.



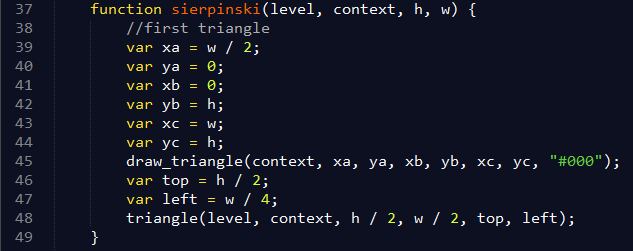
Това е кода който се изпълнява при зареждането на страницата и който използвайки помощните методи чертае графиката. Задаваме няколко константи като размер на триъгълника и ниво, първоначално чертаем фрактала във 1вата си стъпка. Имаме и метод, който взима числото въведено от потребителя, ако то е по-малко или равно от 8 използваме него ако не е, то фрактала ще остане в последната си валидна форма.



Основен метод, който начертава тригълник в canvas елемента по зададени координати и цвят.



Рекурсивен метод, който пресмята координатите на частта която трябва да отрежем от последното ниво на фрактала за да получим следващото, като параметри получаваме новата височина и ширина на триъгълника , както и top в което пазим височината на която се намира основата на новия триъгълник и left което представлява x координатата на началото на основата или отместването на триъгълника. Така като знаем от top на каква височина се намира основата лесно можем да пресметнем двете точки който правят основата на тръгълника който трябва да се отреже.



Метод който премсмята и чертае първия равностранен триъгълник и след това извиква рекурсивния метод с размерите на триъгълника който трябва да се отреже за да се получи следващото ниво, естествено ако нивото е 1 то метода triangle няма да свръши нищо.

**6. Пълен код на приложението**

<html>

<head>

<script src="//ajax.googleapis.com/ajax/libs/jquery/1.11.1/jquery.min.js"></script>

<style type="text/css">

canvas {

padding-left: 0;

padding-right: 0;

margin-left: auto;

margin-right: auto;

display: block;

width: 500px;

}

p {

text-align:center;

}

</style>

<script type="text/javascript">

$(document).ready(function() {

var MAX\_DEPTH = 8;

var h = 420;

var w = 500;

var level = 1;

var drawingCanvas = document.getElementById("canvas\_area");

var context = drawingCanvas.getContext("2d");

$('#level').on('keyup', function(event) {

event.preventDefault();

level = parseInt($(this).val());

$(this).val('');

if(level<=8)

sierpinski(level, context, h, w);

});

sierpinski(level, context, h, w);

});

function sierpinski(level, context, h, w) {

//first triangle

var xa = w / 2;

var ya = 0;

var xb = 0;

var yb = h;

var xc = w;

var yc = h;

draw\_triangle(context, xa, ya, xb, yb, xc, yc, "#000");

var top = h / 2;

var left = w / 4;

triangle(level, context, h / 2, w / 2, top, left);

}

function triangle(level, context, h, w, top, left) {

var xa = left;

var ya = top;

var xb = left + w;

var yb = top;

var xc = left + (w / 2);

var yc = top + h;

if (level > 1) {

draw\_triangle(context, xa, ya, xb, yb, xc, yc, "#fff");

var new\_h = h / 2;

var new\_w = w / 2;

var top\_1 = top + new\_h;

var left\_1 = left - (new\_w / 2);

var top\_2 = top - new\_h;

var left\_2 = left + (new\_w / 2);

var top\_3 = top + new\_h;

var left\_3 = left + w - (new\_w / 2);

level--;

triangle(level, context, new\_h, new\_w, top\_1, left\_1);

triangle(level, context, new\_h, new\_w, top\_2, left\_2);

triangle(level, context, new\_h, new\_w, top\_3, left\_3);

}

}

function draw\_triangle(context, xa, ya, xb, yb, xc, yc, color) {

context.beginPath();

context.moveTo(xa, ya);

context.lineTo(xb, yb);

context.lineTo(xc, yc);

context.lineTo(xa, ya);

context.closePath();

context.fillStyle = color;

context.fill();

}

</script>

</head>

<body>

<canvas id="canvas\_area" height="420" width="500"></canvas>

<p>Level: <input id="level" type="text" style="width: 20px;"/><p>

</body>

</html>

**7.Източници**

<http://en.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle>

<http://bg.wikipedia.org/wiki/%D0%A4%D1%80%D0%B0%D0%BA%D1%82%D0%B0%D0%BB>

**8. Съдържание**

1.Фрактали ............................................................................................................ 2

2.История .............................................................................................................. 2

3.Дефиниции......................................................................................................... 3

4.Триъгълник на Сиерпински............................................................................... 4

5.Имплементация с JavaScript.............................................................................. 6

6.Пълен код на приложението............................................................................ 9

7.Източници.......................................................................................................... 11

8.Съдържание...................................................................................................... 11