Tarea 1: Estadística para Astrónomos.

Dusán Tubín Arenas

April 1, 2016

1 Preguntas cortas.

1.1

La diferencia entre eventos disjuntos y eventos independientes es que el para el primero, si A y B son eventos disjuntos estos no pueden ocurrir simultaneamente, es decir, si ocurre A no puede ocurrir B y vice versa. Mientras que para eventos independientes C y D la probabilidad de que ocurra C no afecta la probabilidad de que ocurra B, es decir, estos eventos pueden superponerse y no afectarse entre si.
Tambien podemos verlo de esta forma, si A y B son disjuntos, entonces $A \cap B = \phi$, lo que implica que $P(A \cap B) = P(\phi) = 0.$. Por otro lado para eventos independientes vemos que$P(A \cap B) = P(A) * P(B)$, de esta forma $P(A) * P(B) \neq 0$ si sabemos que ambos eventos ocurren.
Un ejemplo astronómico de un evento independiente es la deteccion de ondas gravitacionales bajo la interacción de dos agujeros negros y la captura de una caida de un objeto proveniente del cinturon de asteroides en la gravedad de Jupiter. La probabilidad de estos dos sucesos no afecta la del otro.Mientras que un evento disjunto puede ser la probabilidad de que una estrella en su fase final se combierta en una estrella de neutrones o un agujero negro dada la masa critica de esta estrella. Si esta estrella se combierte en un agujero negro no podrá ser una estrella de neutrones y vice versa.

1.2

Partamos de que $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$, esto se da ya que el complemento de A y el complemento de B cubren todo el espacio menos su interseccion, así, de esta forma podemos tomar el complemento de la interseccion y ambos cubriran la misma region.Luego si calculamos la probabilidad de estas regiones tenemos que $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$. Este ultimo termino podemos escribirlo como $P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B)$, luego por propiedades, tenemos que lo anterior es igual a $1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$ pero como A y B son independientes el termino $P(A \cap B) = P(A) * P(B)$ quedandonos asi $1 - P(A) - P(B) + P(A) * P(B)$. Si factorizamos por $P(B)$ tenemos que $1 - P(A) - P(B) * (1 - P(A))$ finalmente factorizamos por $1 - P(A)$ y nos queda $(1 - P(A)) * (1 - P(B))$ lo que finalmente nos dice que $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) * P(B^c)$ demostrando que son eventos independientes.

2 Estudianto encuestas.

2.1

Como podemos ver existen dos tipos de respuestas posibles, éxito con probabilidad de r y fracaso con probabilidad 1-r. Nosotros queremos estudiar la distribucion de X la cual representa la cantidad de veces que la gente escoge la primera respuesta, es decir, quedarse. Tambien podemos ver que existe un total de 33 personas que votaron (n=33), de este grupo de gente, 18 eligen quedarse y las otras 15 prefieren cambiar de elección. De esta forma podemos decir que X=18. Con todas estas caracteristicas podemos decir que $X \sim Binomial(n, r)$, donde n es la cantidad de intentos y r la probabilidad de éxito. Los parametros observables de la distribucion en este caso son el número de encuestados y el numero de personas que eligio la primera respuesta, es decir, n=33 y X=18. Así, para esta encuesta tenemos que:

$$P(X = 18) = \binom{33}{18} r^{18}(1-r)^{15}$$

2.2

Si fijamos que $r = 0.5$ podemos calcular cuan probable es observar X=18. De esta forma tenemos que:

$$P(X = 18|r = 0.5) = \binom{33}{18} 0.5^{18}(0.5)^{15} = 0.120741$$

Por lo tanto la probabilidad de encontrar X=18 con una probabilidad de exito de 0.5 es de 12.0741%
Si ahora realizamos un proceso que simule mil veces la votación y estudiamos la cantidad de veces que X=18 vemos que los valores obtenidos son por ejemplo: 12.7% - 11.3 % - 11.9% etc. Para hacer esto más exacto, con el código se creó una funcion que guarde en una lista las probabilidades obtenidas por cada iteracion y con esto se calculó un promedio de probabilidades el cual fue de 12.16% $\pm$ 9.8. Gracias a esto podemos ver que los resultados de las iteraciones son consistentes con la probabilidad que teniamos al hacer $r = 0.5$ la cual era de 12.07%

2.3

Como sabemos, el Teorema de Bayes se define como:

$$P(r|X) = \frac{P(X|r) * P(r)}{\sum_{i=1}^{n} P(X|r) * P(r)}$$

Esto nos entrega la PDF $P(r|X)$ la cual nos entrega la probabilidad condicional de encontrar un r dado X=18. Los terminos $P(r)$ los hacemos igual a uno ya que estos terminos son las probabilidades a priori, las cuales representan una probabilidad con la que se parte un experimento para que luego este arroje nueva informacion con respecto a esta probabilidad, de esta forma la hacemos igual a uno para ver que el calculo se simplifique y así podamos ver como varía nuestra medición.
A continuación se muestra el gráfico obtenido para la PDF anterior.

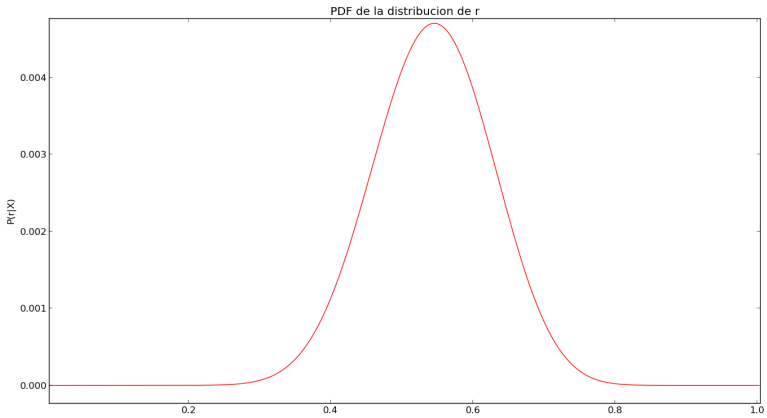

Figure 1: Gráfico de la PDF vs r.

En el gráfico podemos ver que el máximo de la función se encuentra en $r = 0.545$, esto nos indica que la PDF se encuentra centrada en este valor y por lo tanto existe una media de las mediciones de r dado X=18. Si ocupamos un integrador numérico de Python podemos corroborar que esto integra 1.

Tambien podemos calcular la CDF la que tiene la siguiente forma:

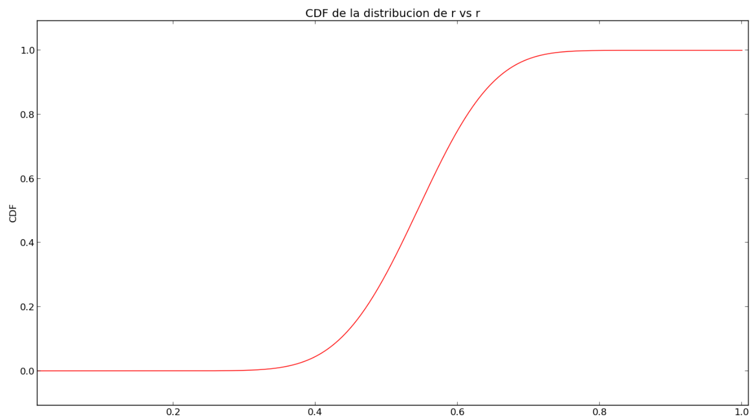

Figure 2: Gráfico de la CDF vs r.

En el gráfico podemos ver que la CDF tiende a 1 y esto es debido a que es la suma de las probabilidades menores a r.

2.4

Ocupando el integrador de python, calcularemos $P(r < 0.5)$ y $P(r > 0.5)$ obteniendo así :

- $P(r < 0.5)$= 0.297664762937
- $P(r > 0.5)$=0.698254865786

Esto nos dice que mientras menor sea r existen menos probabilidades de quedarse con la primera opcion y acertar, mientras que si r es mas grande que 0.5 las posibilidades de acertar quedandonos con la decision es más grande.