计算物理 作业报告7

PB16000647 羊达明

题目:

对于球面上均匀分布的随机坐标点，给出它们在 (x,y) 平面上投影的几率分布函数。并由此验证Marsaglia抽样方法确为球面上均匀分布的随机抽样。

理论分析:

xy平面投影的分布函数

设球面上均匀分布的随机坐标点在 $x-y$ 平面上投影的分布函数为 $g(x,y)$，则有:

$$p(\theta,\phi)sin\theta d\theta d\phi = g(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}\right| d\theta d\phi$$

由

$$\begin{cases} x = sin\theta cos\phi \\ y = sin\theta sin\phi \end{cases}$$

可得

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)}\right| = sin\theta cos\theta$$

需要注意的是此处 $p(\theta,\phi)=\frac{1}{2\pi}$，最后得到:

$$g(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

Marsaglia抽样方法

三维球面的Marsaglia抽样方法如下：

1. 随机抽样均匀分布的随机数 $u,v\in[-1,1]$
2. $r^2=u^2+v^2$，若 $r^2>1$ 则重新抽样直至小于等于1
3. $x=2u\sqrt{1-r^2}, y=2v\sqrt{1-r^2}, z=1-2r^2$

在xy平面上，同上面的过程同样有：

$$Cp(u,v)dudv = g(x,y)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

同时满足归一化条件:

$$\int\int g(x,y)dxdy = 1$$

也可以得到

$$g(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-(x^2+y^2)}}$$

模拟验证:

使用第六题的程序。由分布函数可以看出越靠近中心，密度越小。同时角向也应该是均匀的。

对于Marsaglia抽样，可以设计模拟抽样后观察是否具有相同结果。

程序使用说明：

编程环境：**Ubuntu(zsh) / gcc / Python**

- `sample.c` 第六题的程序，给出球面均匀分布的直接抽样
- `sample` sample.c使用gcc编译结果(Linux下可执行文件)
- `marsaglia.c` 给出marsaglia抽样方法的随机点
- `marsaglia` marsaglia.c使用gcc编译结果
- `plot.py` 3d图，其中颜色代表x轴方向坐标
- `plot_2d.py` 2d图，是投影到x-y平面结果

在终端中执行以下命令执行sample：

```
$ ./sample > test_10000
# 输出文件标号对应sample.c中随机数总数

$ python plot.py 10000
$ python plot_2d.py 10000
```

得到以下文件：

- test_10000
- 3d_10000.png
- 2dxy_10000.png

在终端中执行以下命令执行marsaglia：

```
$ ./marsaglia > test_10000
# 输出文件标号对应sample.c中随机数总数

$ python plot.py 10000
$ python plot_2d.py 10000
```

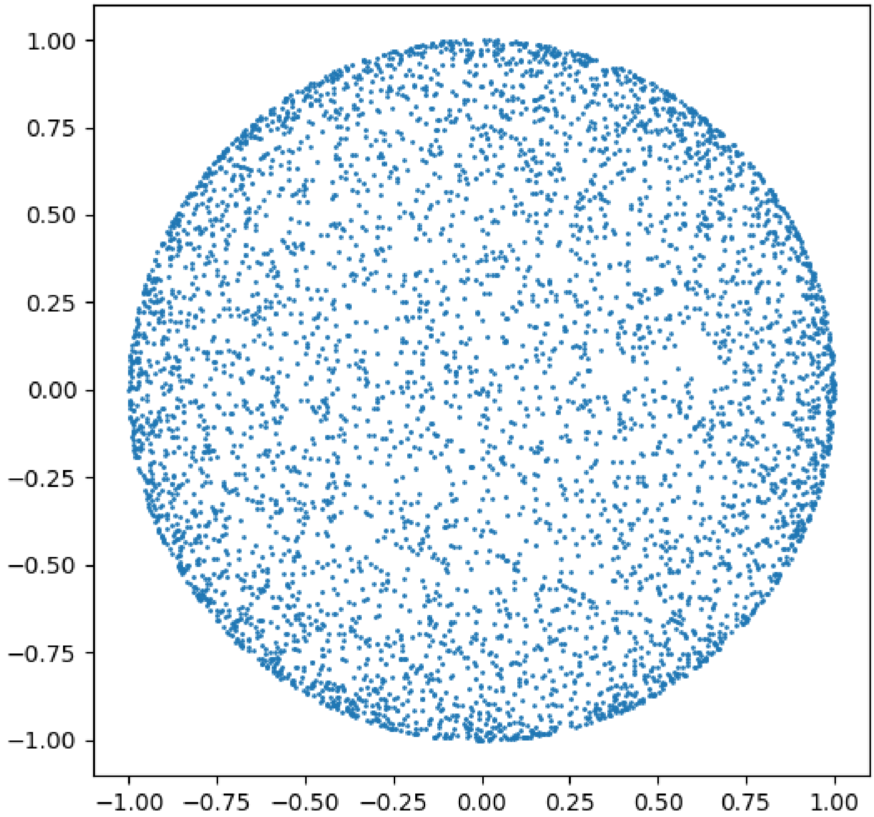
得到以下文件：

- test_10000
- 3d_10000.png
- 2dxy_10000.png

结果:

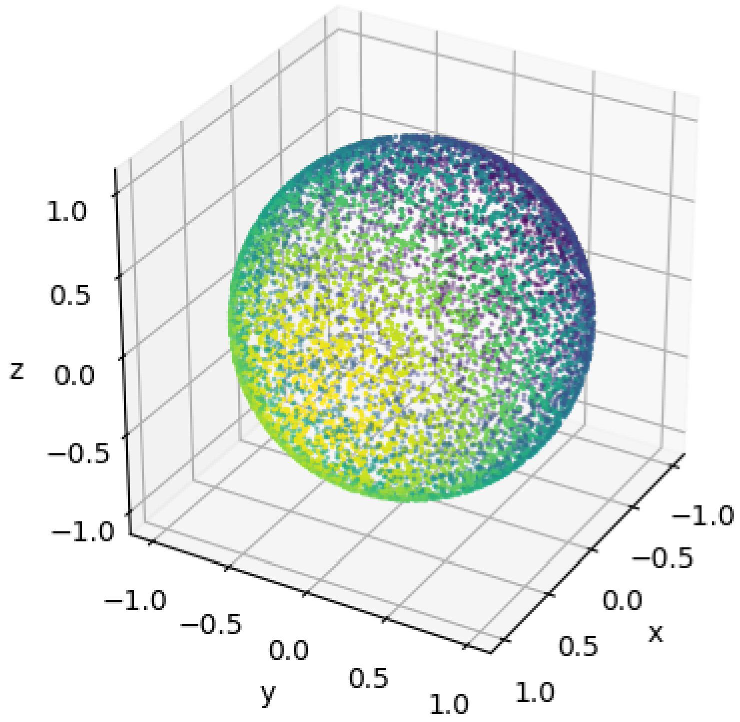
直接抽样的二维投影

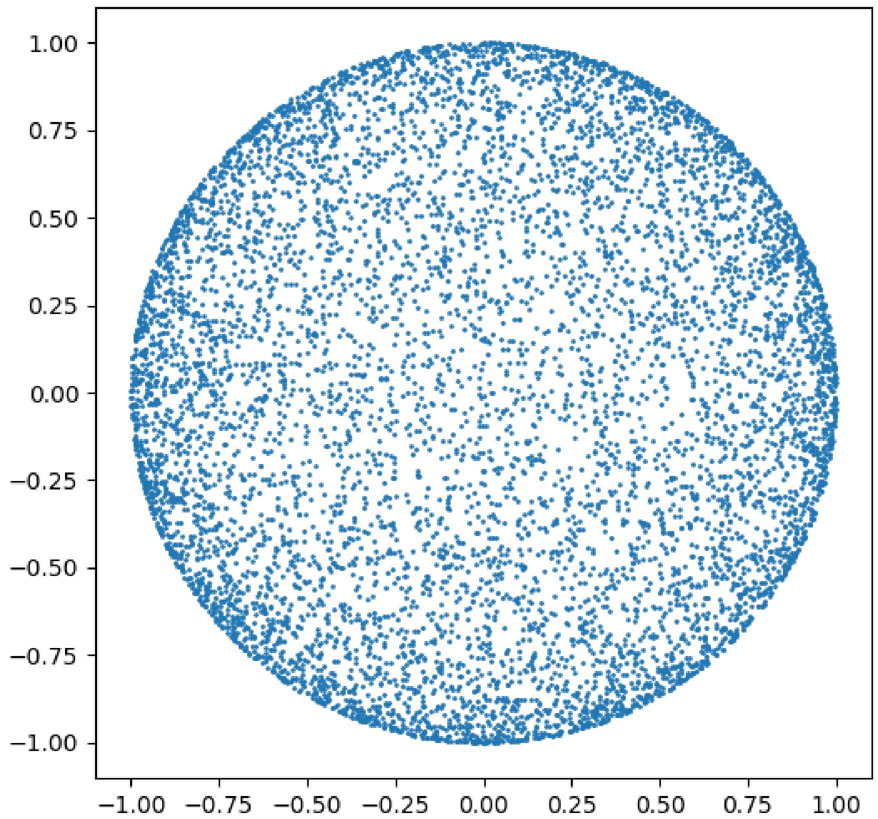
$N=5000$:



Marsaglia抽样

$N = 10000$:


1.0
0.5
z
0.0
−0.5
−1.0
−1.0
−0.5
0.0
y
0.5
1.0
−1.0
−0.5
0.0
x
0.5
1.0


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.00 −0.75 −0.50 −0.25 0.00 0.25 0.50 0.75 1.00

可以看到计算得到的图片满足理论推导出的分布的特征。