Polinomios

Raices Multiples:

sea f un polinomio cualquiera

$f \in \mathbb{K}[\mathbb{X}] \; tiene \; raices \; multiples \Leftrightarrow \exists \alpha : f(\alpha) = 0 \wedge f'(\alpha) = 0$

Multiplicidad

- $f'(x) = 0 \Longrightarrow mult(x, f) = 2 \Leftrightarrow f''(x) \neq 0$
- $f''(x) = 0 \Longrightarrow mult(x, f) = 3 \Leftrightarrow f'''(x) \neq 0$

En general :

- $f^m(x) = 0 \Longrightarrow mult(x, f) = m + 1 \Leftrightarrow f^{m+1}(x) \neq 0$

MCD de Polinomios:

sean f, g polinomios cualquieras

$f, g \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$

- $(f : g) = d \Rightarrow d|f \wedge d|g$
- $(f : f^{'}) = d \Rightarrow d|f^{'} \wedge d|f \Leftrightarrow d^2|f$
- $(f : f^{''}) = d \Rightarrow d|f^{''} \wedge d|f \Leftrightarrow d^3|f$

En general :

- $(f : f^n) = d \Rightarrow d|f^n \wedge d|f \Leftrightarrow d^{n+1}|f$

Raices y MCD

sean f, g polinomios cualquiera

$f, g \in \mathbb{K}[\mathbb{X}]$

- $si \; \exists \alpha \in \mathbb{K} : f(\alpha) = 0 \wedge g(\alpha) = 0$
  $\Rightarrow (f : g)(\alpha) = 0$
  $\Rightarrow (x - \alpha)|(f : g)$

Raices en$\mathbb{Q}[\mathbb{X}]$:

sea f un polinomio cualquiera

$f \in \mathbb{Q} \; con \; a, b, c \in \mathbb{Z}:$

- $f(a + b\sqrt{c}) = 0 \Rightarrow f(a - b\sqrt{c}) = 0$
- $(x - a + b\sqrt{c})|f \Rightarrow (x - a - b\sqrt{c})|f$

Teorema de Gauss:

$si \; \exists \alpha \in \mathbb{Z} : f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha \in \{\frac{div(ci)}{div(cp)}\}$

Raice en$\mathbb{C}[\mathbb{X}]$:

sea f un polinomio cualquiera y un numero complejo z

$f \in \mathbb{C} \; con \;\; coeficientes \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$:

- $f(z) = 0 \rightarrow f(\bar{z}) = 0$
- $(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - 2Re(z)x + |z|^2$

Raices de la unidad:

sea w_k una **raiz n-esima** de la unidad:

- $w_k = e^{\frac{2k\pi}{n}} \;\;,\;\; k \in \{1, 2, ...n - 1\}$

sea $w \in G_n \Rightarrow w^n = 1$

- $w^k = w^{r_n(k)}, k \in \mathbb{Z}$

nota: observar que w_k es lo mismo que w^k y que si $w \in G_n$ entonces es una raiz n-esima de unidad!

Polinomios en $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[\mathbb{X}]$

Polinomios cuadraticos:

sea p un polinomio cualquiera talque $p \in \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[\mathbb{X}]$

$p = ax^2 + bx + c$ es **reducible** en $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[\mathbb{X}]$

$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \Delta \geq 0$

que es lo mismo que decir que el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ es un **cuadrado** en $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[\mathbb{X}]$

Factorizacion de polinomios

sea $p \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[\mathbb{X}]$

$p = x^4 - 1$ y $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[\mathbb{X}] = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

$busco \;\; \bar{k} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[\mathbb{X}] \Rightarrow p(\bar{k}) = \bar{0}$

$p(\bar{0}) = \bar{0}^4 - 1 = \bar{4} \neq \bar{0}$
$p(\bar{1}) = \bar{1}^4 - 1 = \bar{0}$
$p(\bar{2}) = \bar{2}^4 - 1 = \bar{0}$
$p(\bar{3}) = \bar{3}^4 - 1 = \bar{0}$
$p(\bar{4}) = \bar{4}^4 - 1 = \bar{0}$

$\Rightarrow p = (x - \bar{1})(x - \bar{2})(x - \bar{3})(x - \bar{4})$

En general en $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}[\mathbb{X}]$:

sea f un polinomio cualquiera

- $busco \;\; \bar{a} \Rightarrow p(\bar{a}) = \bar{0}$ con $a \in \{\bar{0}, .., \overline{k - 1}\}$

$\Rightarrow f = (x - \bar{a_0})(x - \bar{a_1})...(x - \bar{a_n})$