

└ Sistemas deductivos

Paradigmas de Lenguajes de Programación

Departamento de Ciencias de la Computación
Universidad de Buenos Aires

15 de abril de 2025

Vamos a ver

- ✦✦ Sistemas deductivos
- ✦✦ Deducción natural
- ✦✦ Lógica intuicionista vs clásica
- ✦✦ Demo de weakening por inducción en la derivación

Lógica proposicional

Sintaxis

$$\tau ::= P \mid \perp \mid \neg\tau \mid \tau \wedge \tau \mid \tau \vee \tau \mid \tau \Rightarrow \tau$$

Valuaciones

Una valuación es una función $v : \mathcal{V} \rightarrow \{V, F\}$.

Una valuación v satisface una proposición τ (y decimos que $v \models \tau$) cuando:

$v \models P$	sii	$v(P) = V$
$v \models \neg\tau$	sii	$v \not\models \tau$
$v \models \tau \vee \sigma$	sii	$v \models \tau$ o $v \models \sigma$
$v \models \tau \wedge \sigma$	sii	$v \models \tau$ y $v \models \sigma$
$v \models \tau \Rightarrow \sigma$	sii	$v \not\models \tau$ o $v \models \sigma$

Lógica proposicional

Valuaciones

Una valuación v satisface una proposición τ (y decimos que $v \models \tau$) cuando:

$v \models P$	sii	$v(P) = V$
$v \models \neg \tau$	sii	$v \not\models \tau$
$v \models \tau \vee \sigma$	sii	$v \models \tau$ o $v \models \sigma$
$v \models \tau \wedge \sigma$	sii	$v \models \tau$ y $v \models \sigma$
$v \models \tau \Rightarrow \sigma$	sii	$v \not\models \tau$ o $v \models \sigma$

Equivalencia de fórmulas

τ es lógicamente equivalente a σ cuando $v \models \tau$ sii $v \models \sigma$ para toda valuación v .

Ejercicio de la guía:

Mostrar que cualquier fórmula de la lógica proposicional que utilice los conectivos \neg (negación), \wedge (conjunción), \vee (disyunción), \Rightarrow (implicación) puede reescribirse a otra fórmula equivalente que usa sólo los conectivos \neg y \vee .

Sistemas deductivos

✨ Definidos por un **conjunto de reglas**

✨ Las reglas son de la forma:

$$\frac{\text{Premisa}_1 \quad \text{Premisa}_2 \quad \dots \quad \text{Premisa}_n}{\text{Conclusión}} \quad \text{Nombre de la regla}$$

✨ Un caso particular: $n = 0$

$$\frac{}{\text{Conclusión}} \quad \text{Nombre de la regla}$$

✨ Por ejemplo,¹

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{}{\vdash \text{🧀}} \text{ Queso,} \quad \frac{}{\vdash \text{📦}} \text{ Caja,} \quad \frac{}{\vdash \text{🐭}} \text{ Ratón,} \\ \frac{\vdash \text{🧀} \quad \vdash \text{📦}}{\vdash \text{📦🧀}} \text{ Trampa}_i, \quad \frac{\vdash \text{🐭} \quad \vdash \text{📦🧀}}{\vdash \text{📦🐭🧀}} \text{ Trampa}_e, \quad \frac{\vdash \text{🐭} \quad \vdash \text{🧀}}{\vdash \text{🐭🧀}} \text{ Comequeso} \end{array} \right\}$$

¹Ningún animal fue dañado durante la producción de este sistema deductivo.

Un sistema deductivo: deducción natural

Secuentes:

$$\text{Fórmula}_1, \dots, \text{Fórmula}_n \vdash \text{Fórmula}_{n+1}$$

Por ejemplo...

$$P, Q \vdash P \wedge Q$$

Una regla de deducción

$$\frac{\text{Premisa}_1 \quad \text{Premisa}_2 \quad \dots \quad \text{Premisa}_n}{\text{Conclusión}} \quad \text{Nombre de la regla}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i \quad \frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau} \text{ax}$$

intuitivamente se puede pensar que expresa:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Premisa}_1 \\ \text{Premisa}_2 \\ \vdots \\ \text{Premisa}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Conclusión}$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma \vdash \tau \\ \Gamma \vdash \sigma \end{array} \right\} \Rightarrow \Gamma \vdash \tau \wedge \sigma$$

$$\text{True} \Rightarrow \Gamma, \tau \vdash \tau$$

La demostración de un seciente es un árbol formado por reglas de deducción:

$$\frac{\frac{}{P, Q \vdash P} \text{ax} \quad \frac{}{P, Q \vdash Q} \text{ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q} \wedge_i$$

Deducción natural

Reglas básicas

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma} \wedge_i \qquad \frac{}{\Gamma, \tau \vdash \tau} \text{ax} \\
 \frac{\Gamma, \tau \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma} \Rightarrow_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \tau} \wedge_{e1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \wedge \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \wedge_{e2} \\
 \frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma} \vee_{i2} \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e \\
 \frac{\Gamma, \tau \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \tau} \neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \vee \sigma \quad \Gamma, \tau \vdash \rho \quad \Gamma, \sigma \vdash \rho}{\Gamma \vdash \rho} \vee_e \\
 \frac{\Gamma \vdash \tau \quad \Gamma \vdash \neg \tau}{\Gamma \vdash \perp} \neg_e \\
 \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau} \perp_e
 \end{array}$$

Lógica intuicionista (LJ)

Lógica clásica (LK)

$$\frac{\Gamma \vdash \neg \neg \tau}{\Gamma \vdash \tau} \neg \neg_e$$

Deducción natural

Reglas derivadas

Reglas intuicionistas

$$\frac{\Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \neg\neg\tau} \neg\neg_i \qquad \frac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash \neg\sigma}{\Gamma \vdash \neg\tau} \text{MT}$$

Reglas clásicas

$$\frac{\Gamma, \neg\tau \vdash \perp}{\Gamma \vdash \tau} \text{PBC} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \tau \vee \neg\tau} \text{LEM}$$

- ✨ Veamos que las reglas $\neg\neg_e$, PBC y LEM son equivalentes.
- ✨ Todas las reglas derivadas, incluyendo las que hayan probado en la guía de ejercicios, pueden usarse para resolver otros ejercicios y los parciales.

Deducción natural en lógica intuicionista

Ejercicio de la guía

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario:

✧✧ Reducción al absurdo: $(P \Rightarrow \perp) \Rightarrow \neg P$

✧✧ Introducción de la doble negación: $P \Rightarrow \neg\neg P$

✧✧ Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg P \Rightarrow \neg P$

✧✧ de Morgan (II): $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

Para la dirección \Rightarrow es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

✧✧ Conmutatividad (\vee): $(P \vee Q) \Rightarrow (Q \vee P)$

Deducción natural

Ejercicio de la guía

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash \sigma$ para cada una de las siguientes fórmulas.

Para estas fórmulas es imprescindible **usar lógica clásica**:

✨ Absurdo clásico: $(\neg P \Rightarrow \perp) \Rightarrow P$

✨ Ley de Peirce: $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

✨ Análisis de casos: $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$

Debilitamiento o weakening

Ejercicio de la guía

Probar la siguiente propiedad:

Si $\Gamma \vdash \sigma$ es válido entonces $\Gamma, \tau \vdash \sigma$ es válido.

Pista: utilizar inducción estructural sobre la derivación o inducción global sobre su tamaño.

✨ Por ejemplo,

$$\frac{\frac{\overline{P, Q \vdash P} \text{ ax} \quad \overline{P, Q \vdash Q} \text{ ax}}{P, Q \vdash P \wedge Q} \wedge_i}{P, Q \vdash (P \wedge Q) \vee R} \vee_{i_1} \rightsquigarrow \frac{\frac{\overline{P, Q, S \vdash P} \text{ ax} \quad \overline{P, Q, S \vdash Q} \text{ ax}}{P, Q, S \vdash P \wedge Q} \wedge_i}{P, Q, S \vdash (P \wedge Q) \vee R} \vee_{i_1}$$

✨ Para usar esta propiedad como regla en otras derivaciones:

$$\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma, \tau \vdash \sigma} W$$

Deducción natural

Último ejercicio

Demostrar en deducción natural que vale $\vdash (\rho \vee \tau) \wedge (\sigma \vee \tau) \Rightarrow \tau \vee (\rho \wedge \sigma)$.

¿Preguntas?

