Paradigmas de Programación

Introducción a la materia

1er cuatrimestre de 2024

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Presentación de la materia

Repaso

Introducción a la programación funcional

Docentes (turno noche)

Profesor

- Pablo Barenbaum

Jefes de trabajos prácticos

- Daniel Grimaldi
- Daniela Marottoli
- Gabriela Steren

Ayudantes de segunda

- Damián Huaier
- Lucas Di Salvo
- Lautaro Bagnasco Muguillo
- Catalina Juarros

Días y horarios de cursada

- Martes de 17:00 a 22:00 — generalmente práctica
- Viernes de 17:00 a 22:00 — generalmente teórica

Días y horarios de cursada

- Martes de 17:00 a 22:00 — generalmente práctica
- Viernes de 17:00 a 22:00 — generalmente teórica

En general:

- Consultas de 17:00 a 17:30.
- Consultas desde el final de la clase hasta las 22:00.

Modalidad de evaluación

Parciales

- Primer parcial — martes 13 de mayo
- Segundo parcial — martes 1 de julio
- Recuperatorio del primer parcial — martes 15 de julio
- Recuperatorio del segundo parcial — martes 22 de julio

Trabajos prácticos

- TP 1 (con su recuperatorio)
- TP 2 (con su recuperatorio)

Los TPs son en **grupos de 4 integrantes**.

Examen final
(Con posibilidad de promoción).

Materiales

Todo el material de la materia va a estar disponible en el campus:
`https://campus.exactas.uba.ar/course/view.php?id=159`

- Diapositivas de las clases
- Guías de ejercicios
- Apuntes
- Enunciados de los trabajos prácticos
- Calendario
- ...

Revisen la sección "**útil**".

Vías de comunicación

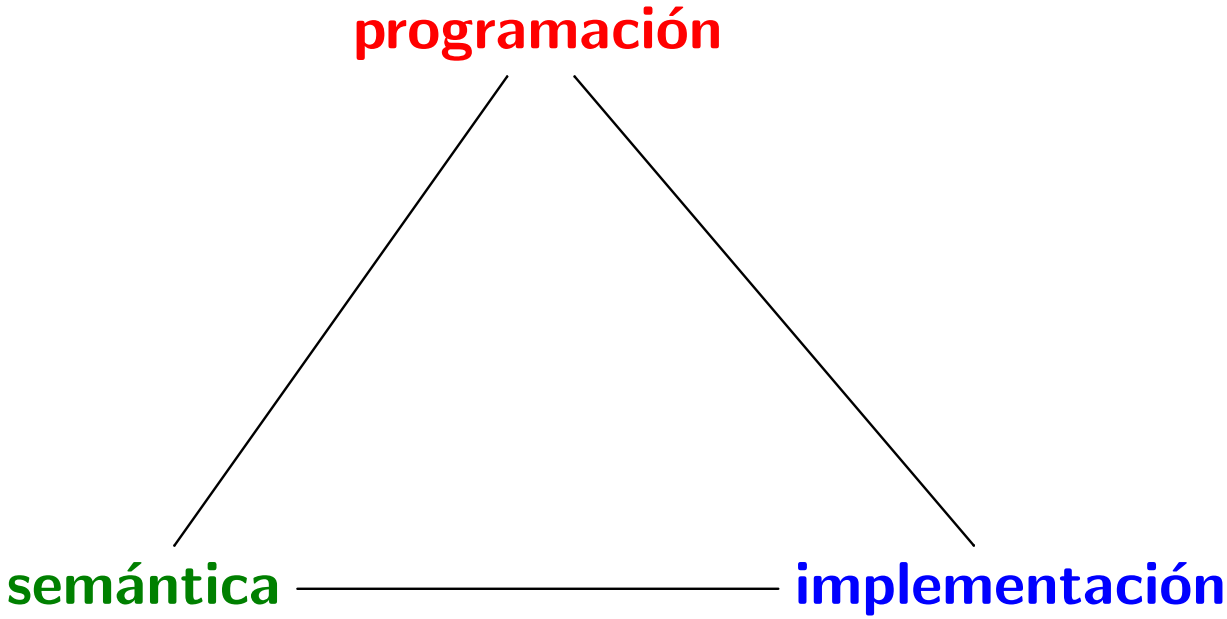
Docentes → alumnxs
Avisos a través del campus.

Alumnxs → docentes
Lista de correo: `plp-docentes@dc.uba.ar`
(para consultas administrativas)

Discusión entre estudiantes fuera del horario de la materia
Servidor de Discord: `https://tinyurl.com/plpdiscord`
(con eventual participación de docentes)

Contenidos

Tres aspectos de los **lenguajes de programación**:



Cronograma

Programación funcional	2 semanas
Razonamiento ecuacional	1 semana
Lógica proposicional	1 semana
Cálculo-λ	2 semanas
(Repaso / consultas)	
Primer parcial	
Unificación e inferencia de tipos	1 semana
Lógica de primer orden	1 semana
Resolución	1 semana
Programación lógica	1,5 semanas
Programación orientada a objetos	1 semana
(Repaso / consultas)	
Segundo parcial	

Algunos contenidos **extra** que daremos en las teóricas

En algunas clases les daremos algunas recomendaciones para poder sacar el máximo provecho de la materia. Por ejemplo:

Algunos contenidos **extra** que daremos en las teóricas

En algunas clases les daremos algunas recomendaciones para poder sacar el máximo provecho de la materia. Por ejemplo:

- ¿Cómo trabajo en grupo para los TPs?

Algunos contenidos **extra** que daremos en las teóricas

En algunas clases les daremos algunas recomendaciones para poder sacar el máximo provecho de la materia. Por ejemplo:

- ¿Cómo trabajo en grupo para los TPs?
- ¿Cómo me conviene abordar las guías de ejercicios?

Algunos contenidos **extra** que daremos en las teóricas

En algunas clases les daremos algunas recomendaciones para poder sacar el máximo provecho de la materia. Por ejemplo:

- ¿Cómo trabajo en grupo para los TPs?
- ¿Cómo me conviene abordar las guías de ejercicios?
- ¿Cómo me preparo para los parciales?

Algunos contenidos **extra** que daremos en las teóricas

En algunas clases les daremos algunas recomendaciones para poder sacar el máximo provecho de la materia. Por ejemplo:

- ¿Cómo trabajo en grupo para los TPs?
- ¿Cómo me conviene abordar las guías de ejercicios?
- ¿Cómo me preparo para los parciales?
- ¿Qué hago si tengo que reentregar un TP?

Algunos contenidos **extra** que daremos en las teóricas

En algunas clases les daremos algunas recomendaciones para poder sacar el máximo provecho de la materia. Por ejemplo:

- ¿Cómo trabajo en grupo para los TPs?
- ¿Cómo me conviene abordar las guías de ejercicios?
- ¿Cómo me preparo para los parciales?
- ¿Qué hago si tengo que reentregar un TP?
- ¿Qué hago si tengo que recuperar un parcial?

Algunos contenidos **extra** que daremos en las teóricas

En algunas clases les daremos algunas recomendaciones para poder sacar el máximo provecho de la materia. Por ejemplo:

- ¿Cómo trabajo en grupo para los TPs?
- ¿Cómo me conviene abordar las guías de ejercicios?
- ¿Cómo me preparo para los parciales?
- ¿Qué hago si tengo que reentregar un TP?
- ¿Qué hago si tengo que recuperar un parcial?
- ¿Qué hago con herramientas de IA basadas en modelos de lenguaje?

Motivación: **programación**

Los lenguajes de programación tienen distintas **características**.

- Etiquetado dinámico vs. tipado estático.
- Administración manual vs. automática de memoria.
- Funciones de primer orden vs. funciones de orden superior.
- Mutabilidad vs. inmutabilidad.
- Alcance dinámico vs. estático.
- Resolución de nombres temprana vs. tardía.
- Inferencia de tipos.
- Determinismo vs. no determinismo.
- Pasaje de parámetros por copia o por referencia.
- Evaluación estricta (por valor) o diferida (por necesidad).
- Tipos de datos inductivos, co-inductivos, GADTs, familias dependientes.
- *Pattern matching*, unificación.
- Polimorfismo paramétrico.
- Subclasificación, polimorfismo de subtipos, herencia simple vs. múltiple.
- Estructuras de control no local.
- ...

Motivación: **programación**

Distintas características permiten abordar un mismo problema de distintas maneras.

$$\begin{array}{rr} & \text{CMXXIV} \\ + & \text{MCXLI} \\ \hline \end{array}$$

Motivación: **programación**

Distintas características permiten abordar un mismo problema de distintas maneras.

CMXXIV	924
+ MCXLI	+ 1141

Motivación: **programación**

Distintas características permiten abordar un mismo problema de distintas maneras.

$$\begin{array}{rr} & \text{CMXXIV} \\ + & \text{MCXLI} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 924 \\ + & 1141 \\ \hline \end{array}$$

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$$

Motivación: **programación**

Distintas características permiten abordar un mismo problema de distintas maneras.

$$\begin{array}{rr} & \text{CMXXIV} \\ + & \text{MCXLI} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 924 \\ + & 1141 \\ \hline \end{array}$$

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\} \qquad C = \{(r \sin\theta, r \cos\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Motivación: **programación**

Distintas características permiten abordar un mismo problema de distintas maneras.

$$\begin{array}{rr} & \text{CMXXIV} \\ + & \text{MCXLI} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 924 \\ + & 1141 \\ \hline \end{array}$$

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\} \qquad C = \{(r \sin\theta, r \cos\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

```
r := 1
while n > 0 {
  r := r * n
  n := n - 1
}
```

Motivación: **programación**

Distintas características permiten abordar un mismo problema de distintas maneras.

$$\begin{array}{rr} & \text{CMXXIV} \\ + & \text{MCXLI} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{rr} & 924 \\ + & 1141 \\ \hline \end{array}$$

$$C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\} \qquad C = \{(r \sin\theta, r \cos\theta) \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

```
r := 1
while n > 0 {
  r := r * n
  n := n - 1
}
```

```
foldl (*) 1 [1..n]
```

Motivación: **semántica**

Dependemos del *software* en aplicaciones críticas.

- Telecomunicaciones.
- Procesos industriales.
- Reactores nucleares.
- Equipamiento médico.
- Previsión meteorológica.
- Aeronáutica.
- Vehículos autónomos.
- Transacciones monetarias.
- Análisis de datos en ciencia o toma de decisiones.
- ...

Las fallas cuestan recursos monetarios y vidas humanas.

Motivación: **semántica**

¿Podemos confiar en que un programa hace lo que queremos?

Motivación: **semántica**

¿Podemos confiar en que un programa hace lo que queremos?
¿Y si el programa está escrito por el enemigo?

Motivación: **semántica**

¿Podemos confiar en que un programa hace lo que queremos?
¿Y si el programa está escrito por el enemigo?
¿Y si el programa está escrito por una IA?

Motivación: **semántica**

¿Podemos confiar en que un programa hace lo que queremos?
¿Y si el programa está escrito por el enemigo?
¿Y si el programa está escrito por una IA?

Objetivo

- Probar teoremas sobre el comportamiento de los programas.
- ¿Cómo darle significado matemático a los programas?

Motivación: **semántica**

¿Podemos confiar en que un programa hace lo que queremos?
¿Y si el programa está escrito por el enemigo?
¿Y si el programa está escrito por una IA?

Objetivo

- Probar teoremas sobre el comportamiento de los programas.
- ¿Cómo darle significado matemático a los programas?
- En AED vimos una manera de hacerlo (triplas de Hoare).
- En PLP veremos otras maneras de dar semántica.

Motivación: **implementación**

Una computadora física ejecuta programas escritos en un lenguaje.
(El "código máquina").

Motivación: **implementación**

Una computadora física ejecuta programas escritos en un lenguaje.
(El "código máquina").

¿Cómo es capaz de ejecutar programas escritos en otros lenguajes?

Motivación: **implementación**

Una computadora física ejecuta programas escritos en un lenguaje.
(El "código máquina").

¿Cómo es capaz de ejecutar programas escritos en otros lenguajes?

- Interpretación (o evaluación).
- Chequeo e inferencia de tipos.
- Compilación (traducción de un lenguaje a otro).

Bibliografía (no exhaustiva)

Lógica proposicional y de primer orden

Logic and Structure

D. van Dalen.

Semántica y fundamentos de la implementación

Introduction to the Theory of Programming Languages

J.-J. Lévy, G. Dowek. Springer, 2010.

Types and Programming Languages

B. Pierce. The MIT Press, 2002.

Programación funcional

Thinking functionally with Haskell

R. Bird. Cambridge University Press, 2015.

Programación lógica

Logic Programming with Prolog

M. Bramer. Springer-Verlag, 2013.

Programación orientada a objetos

Smalltalk-80 the Language and its Implementation

A. Goldberg, D. Robson. Addison-Wesley, 1983.

Presentación de la materia

Repaso

Introducción a la programación funcional

Repaso de Haskell

Definir las siguientes funciones:

- `factorial :: Int -> Int`
  dado un entero $n \geq 0$, devuelve $n!$.

Repaso de Haskell

Definir las siguientes funciones:

- `factorial :: Int -> Int`
  dado un entero $n \geq 0$, devuelve $n!$.
- `sumaN :: Int -> [Int] -> [Int]`
  dado un entero k y una lista xs, devuelve la lista que resulta de sumarle k a cada elemento de xs.

Repaso de Haskell

Definir las siguientes funciones:

- `factorial :: Int -> Int`
  dado un entero $n \geq 0$, devuelve $n!$.
- `sumaN :: Int -> [Int] -> [Int]`
  dado un entero k y una lista xs, devuelve la lista que resulta de sumarle k a cada elemento de xs.
- `aparece :: Int -> [Int] -> Bool`
  dado un elemento x y una lista xs, devuelve un booleano que indica si x aparece en xs.

Repaso de Haskell

Definir las siguientes funciones:

- `factorial :: Int -> Int`
  dado un entero $n \geq 0$, devuelve $n!$.
- `sumaN :: Int -> [Int] -> [Int]`
  dado un entero k y una lista xs, devuelve la lista que resulta de sumarle k a cada elemento de xs.
- `aparece :: Int -> [Int] -> Bool`
  dado un elemento x y una lista xs, devuelve un booleano que indica si x aparece en xs.
  Más en general:

```
aparece :: Eq a => a -> [a] -> Bool
```

Repaso de Haskell

Definir las siguientes funciones:

- `factorial :: Int -> Int`
  dado un entero $n \geq 0$, devuelve $n!$.
- `sumaN :: Int -> [Int] -> [Int]`
  dado un entero k y una lista xs, devuelve la lista que resulta de sumarle k a cada elemento de xs.
- `aparece :: Int -> [Int] -> Bool`
  dado un elemento x y una lista xs, devuelve un booleano que indica si x aparece en xs.
  Más en general:
  ```
  aparece :: Eq a => a -> [a] -> Bool
  ```
- `ordenar :: [Int] -> [Int]`
  dada una lista, devuelve su permutación ordenada.

Repaso de Haskell

Definir las siguientes funciones:

- `factorial :: Int -> Int`
  dado un entero $n \geq 0$, devuelve $n!$.
- `sumaN :: Int -> [Int] -> [Int]`
  dado un entero k y una lista xs, devuelve la lista que resulta de sumarle k a cada elemento de xs.
- `aparece :: Int -> [Int] -> Bool`
  dado un elemento x y una lista xs, devuelve un booleano que indica si x aparece en xs.
  Más en general:
  ```
  aparece :: Eq a => a -> [a] -> Bool
  ```
- `ordenar :: [Int] -> [Int]`
  dada una lista, devuelve su permutación ordenada.
  Más en general:
  ```
  ordenar :: Ord a => a -> [a]
  ```

Repaso de Haskell

Definamos en Haskell las siguientes funciones:

- Dado el siguiente tipo de datos:

  ```
  data Direccion = Norte | Este | Sur | Oeste
  ```

  definir la función

  ```
  opuesta :: Direccion -> Direccion
  ```

  que dada una dirección d, devuelve la dirección opuesta a d.

Repaso de Haskell

Definamos en Haskell las siguientes funciones:

- Dado el siguiente tipo de datos:

  ```
  data Direccion = Norte | Este | Sur | Oeste
  ```

  definir la función

  ```
  opuesta :: Direccion -> Direccion
  ```

  que dada una dirección d, devuelve la dirección opuesta a d.

- Dados los siguientes tipos de datos:

  ```
  data Maybe a = Nothing | Just a
  data AB a = Nil | Bin (AB a) a (AB a)
  ```

  definir la función

  ```
  buscar :: Eq a => a -> AB (a, b) -> Maybe b
  ```

  que dada una clave k y un árbol binario de pares clave/valor, devuelve el valor asociado a la clave k en caso de que exista.

  Se asume que no hay claves repetidas.
  No se asume ningún otro invariante sobre el árbol.

Presentación de la materia

Repaso

Introducción a la programación funcional

Programación funcional

Un problema central en computación es el de procesar información:

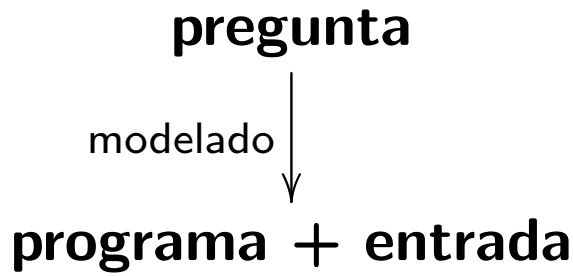
Programación funcional

Un problema central en computación es el de procesar información:

pregunta

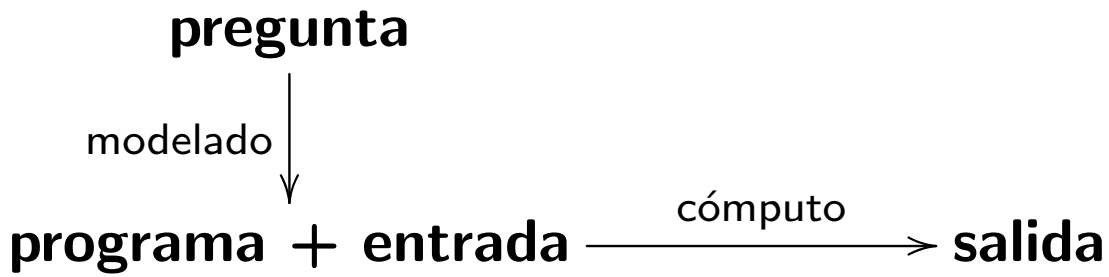
Programación funcional

Un problema central en computación es el de procesar información:



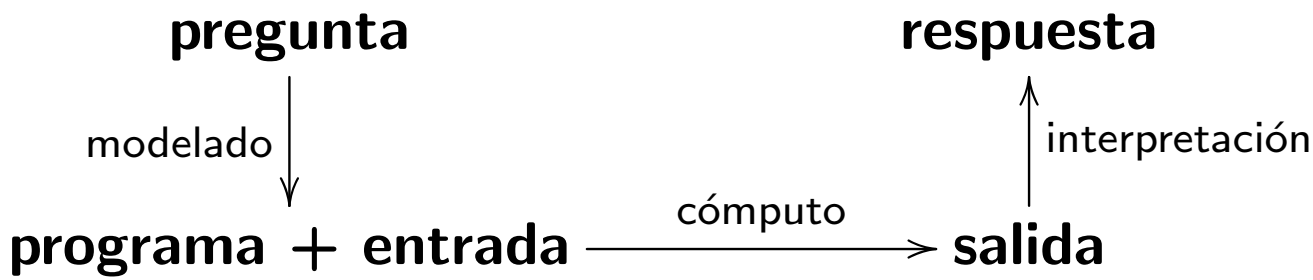
Programación funcional

Un problema central en computación es el de procesar información:



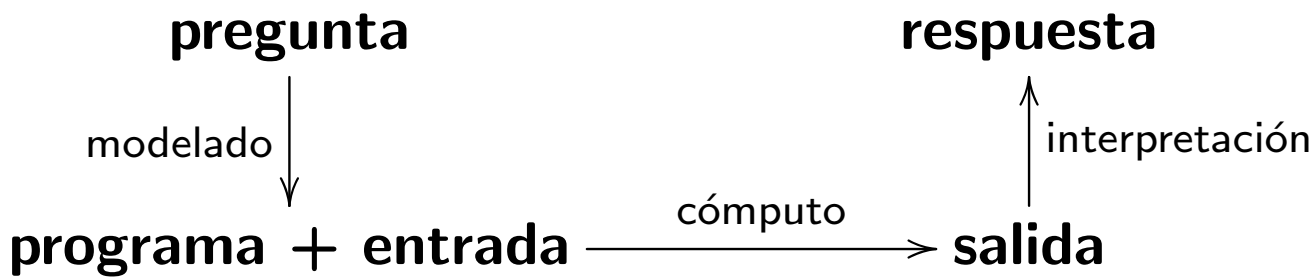
Programación funcional

Un problema central en computación es el de procesar información:



Programación funcional

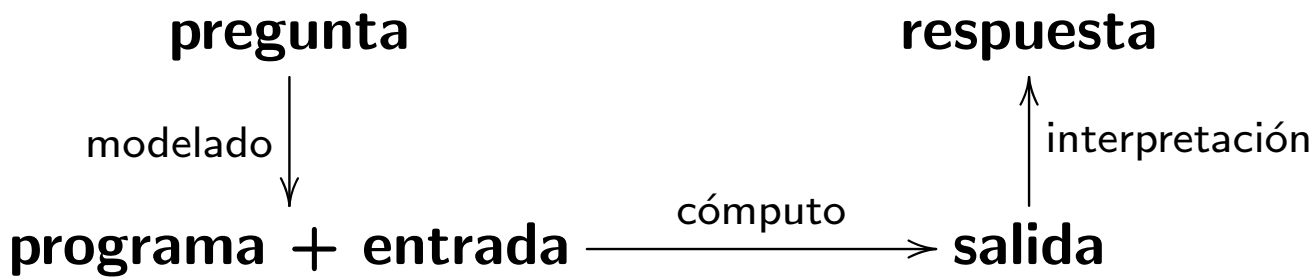
Un problema central en computación es el de procesar información:



La programación funcional consiste en definir funciones y aplicarlas para procesar información.

Programación funcional

Un problema central en computación es el de procesar información:



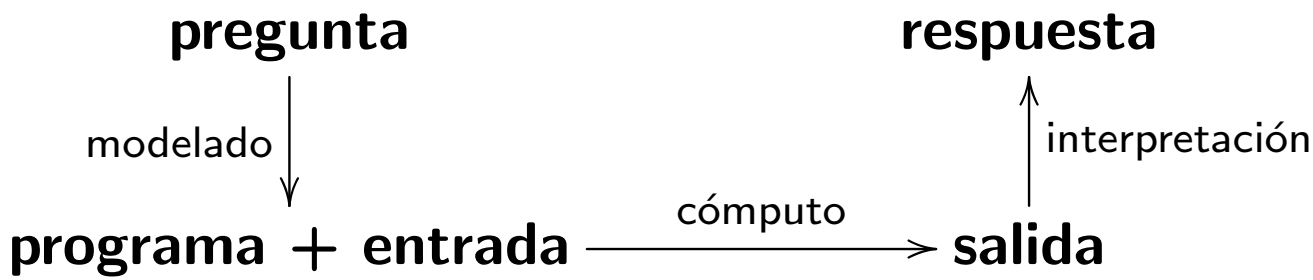
La programación funcional consiste en definir funciones y aplicarlas para procesar información.

Las "funciones" son verdaderamente funciones (parciales):

- Aplicar una función no tiene efectos secundarios.
- A una misma entrada corresponde siempre la misma salida.
- Las estructuras de datos son inmutables.

Programación funcional

Un problema central en computación es el de procesar información:



La programación funcional consiste en definir funciones y aplicarlas para procesar información.

Las "funciones" son verdaderamente funciones (parciales):

- Aplicar una función no tiene efectos secundarios.
- A una misma entrada corresponde siempre la misma salida.
- Las estructuras de datos son inmutables.

Las funciones son datos como cualquier otro:

- Se pueden pasar como parámetros.
- Se pueden devolver como resultados.
- Pueden formar parte de estructuras de datos.
  (Ej. árbol binario en cuyos nodos hay funciones).

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
longitud [10, 20, 30]
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
          longitud [10, 20, 30]
      ≡   longitud (10 : (20 : (30 : [])))
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
          longitud [10, 20, 30]
≡         longitud (10 : (20 : (30 : [])))
=         1 + longitud (20 : (30 : []))
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
          longitud [10, 20, 30]
≡         longitud (10 : (20 : (30 : [])))
=         1 + longitud (20 : (30 : []))
=         1 + (1 + (longitud (30 : [])))
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
    longitud [10, 20, 30]
≡   longitud (10 : (20 : (30 : [])))
=   1 + longitud (20 : (30 : []))
=   1 + (1 + (longitud (30 : [])))
=   1 + (1 + (1 + longitud []))
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
    longitud [10, 20, 30]
≡   longitud (10 : (20 : (30 : [])))
=   1 + longitud (20 : (30 : []))
=   1 + (1 + (longitud (30 : [])))
=   1 + (1 + (1 + longitud []))
=   1 + (1 + (1 + 0))
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
    longitud [10, 20, 30]
≡   longitud (10 : (20 : (30 : [])))
=   1 + longitud (20 : (30 : []))
=   1 + (1 + (longitud (30 : [])))
=   1 + (1 + (1 + longitud []))
=   1 + (1 + (1 + 0))
=   1 + (1 + 1)
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
    longitud [10, 20, 30]
≡   longitud (10 : (20 : (30 : [])))
=   1 + longitud (20 : (30 : []))
=   1 + (1 + (longitud (30 : [])))
=   1 + (1 + (1 + longitud []))
=   1 + (1 + (1 + 0))
=   1 + (1 + 1)
=   1 + 2
```

Programación funcional

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones:

Ejemplo

```
longitud []       = 0
longitud (x : xs) = 1 + longitud xs
```

```
    longitud [10, 20, 30]
≡   longitud (10 : (20 : (30 : [])))
=   1 + longitud (20 : (30 : []))
=   1 + (1 + (longitud (30 : [])))
=   1 + (1 + (1 + longitud []))
=   1 + (1 + (1 + 0))
=   1 + (1 + 1)
=   1 + 2
=   3
```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos.

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

```
True  False  []  (:)  0  1  2  ...
```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

   ```
   True  False  []  (:)  0  1  2  ...
   ```

2. Una **variable**:

   ```
   longitud  ordenar  x  xs  (+)  (*)  ...
   ```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

   ```
   True  False  []  (:)  0  1  2  ...
   ```

2. Una **variable**:

   ```
   longitud  ordenar  x  xs  (+)  (*)  ...
   ```

3. La **aplicación** de una expresión a otra:

   ```
   ordenar lista
   ```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

   ```
   True  False  []  (:)  0  1  2  ...
   ```

2. Una **variable**:

   ```
   longitud  ordenar  x  xs  (+)  (*)  ...
   ```

3. La **aplicación** de una expresión a otra:

   ```
   ordenar lista
   not True
   ```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

   ```
   True  False  []  (:)  0  1  2  ...
   ```

2. Una **variable**:

   ```
   longitud  ordenar  x  xs  (+)  (*)  ...
   ```

3. La **aplicación** de una expresión a otra:

   ```
   ordenar lista
   not True
   not (not True)
   ```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

   ```
   True  False  []  (:)  0  1  2  ...
   ```

2. Una **variable**:

   ```
   longitud  ordenar  x  xs  (+)  (*)  ...
   ```

3. La **aplicación** de una expresión a otra:

   ```
   ordenar lista
   not True
   not (not True)
   (+) 1
   ```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

   ```
   True  False  []  (:)  0  1  2  ...
   ```

2. Una **variable**:

   ```
   longitud  ordenar  x  xs  (+)  (*)  ...
   ```

3. La **aplicación** de una expresión a otra:

   ```
   ordenar lista
   not True
   not (not True)
   (+) 1
   ((+) 1) (alCuadrado 5)
   ```

Expresiones

Las **expresiones** son secuencias de símbolos que sirven para representar datos, funciones y funciones aplicadas a los datos. (Recordemos: las funciones también son datos).

Una expresión puede ser:

1. Un **constructor**:

   ```
   True  False  []  (:)  0  1  2  ...
   ```

2. Una **variable**:

   ```
   longitud  ordenar  x  xs  (+)  (*)  ...
   ```

3. La **aplicación** de una expresión a otra:

   ```
   ordenar lista
   not True
   not (not True)
   (+) 1
   ((+) 1) (alCuadrado 5)
   ```

4. También hay expresiones de otras formas, como veremos. Las tres de arriba son las fundamentales.

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y   ≡  (f x) y   ≢  f (x y)
```

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y       ≡  (f x) y          ≢  f (x y)
f a b c d   ≡  (((f a) b) c) d
```

Ejemplo

```
[1, 2]
```

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y       ≡  (f x) y          ≢  f (x y)
f a b c d   ≡  (((f a) b) c) d
```

Ejemplo

```
    [1, 2]
≡   1 : [2]
```

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y       ≡  (f x) y          ≢  f (x y)
f a b c d   ≡  (((f a) b) c) d
```

Ejemplo

```
    [1, 2]
≡   1 : [2]
≡   (:) 1 [2]
```

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y       ≡  (f x) y          ≢  f (x y)
f a b c d   ≡  (((f a) b) c) d
```

Ejemplo

```
    [1, 2]
≡   1 : [2]
≡   (:) 1 [2]
≡   ((:) 1) [2]
```

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y       ≡  (f x) y          ≢  f (x y)
f a b c d   ≡  (((f a) b) c) d
```

Ejemplo

```
    [1, 2]
≡   1 : [2]
≡   (:) 1 [2]
≡   ((:) 1) [2]
≡   ((:) 1) (2 : [])
```

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y       ≡  (f x) y          ≢  f (x y)
f a b c d   ≡  (((f a) b) c) d
```

Ejemplo

```
    [1, 2]
≡   1 : [2]
≡   (:) 1 [2]
≡   ((:) 1) [2]
≡   ((:) 1) (2 : [])
≡   ((:) 1) ((:) 2 [])
```

Expresiones

Convenimos en que la aplicación es **asociativa a izquierda**:

```
f x y       ≡  (f x) y          ≢  f (x y)
f a b c d   ≡  (((f a) b) c) d
```

Ejemplo

```
    [1, 2]
≡   1 : [2]
≡   (:) 1 [2]
≡   ((:) 1) [2]
≡   ((:) 1) (2 : [])
≡   ((:) 1) ((:) 2 [])
≡   ((:) 1) (((:) 2) [])
```

Expresiones

Ejemplo

```
sumarUno = (+) 1
```

```
                    sumarUno (sumarUno 5)
```

Expresiones

Ejemplo

```
sumarUno = (+) 1
```

```
                    sumarUno (sumarUno 5)
                =   ((+) 1) (sumarUno 5)
```

Expresiones

Ejemplo

```
sumarUno = (+) 1
```

```
                  sumarUno (sumarUno 5)
              =   ((+) 1) (sumarUno 5)
              ≡   1 + sumarUno 5
```

Expresiones

Ejemplo

```
sumarUno = (+) 1
```

```
                  sumarUno (sumarUno 5)
              =   ((+) 1) (sumarUno 5)
              ≡   1 + sumarUno 5
              =   1 + ((+) 1) 5
```

Expresiones

Ejemplo

```
sumarUno = (+) 1
```

```
                    sumarUno (sumarUno 5)
                =   ((+) 1) (sumarUno 5)
                ≡   1 + sumarUno 5
                =   1 + ((+) 1) 5
                ≡   1 + (1 + 5)
```

Expresiones

Ejemplo

```
sumarUno = (+) 1
```

```
                    sumarUno (sumarUno 5)
                =   ((+) 1) (sumarUno 5)
                ≡   1 + sumarUno 5
                =   1 + ((+) 1) 5
                ≡   1 + (1 + 5)
                =   1 + 6
```

Expresiones

Ejemplo

```
sumarUno = (+) 1
```

```
                  sumarUno (sumarUno 5)
              =   ((+) 1) (sumarUno 5)
              ≡   1 + sumarUno 5
              =   1 + ((+) 1) 5
              ≡   1 + (1 + 5)
              =   1 + 6
              =   7
```

Tipos

Hay secuencias de símbolos que no son expresiones bien formadas.

Ejemplo

```
1,,2      )f x(
```

Tipos

Hay secuencias de símbolos que no son expresiones bien formadas.

Ejemplo

```
1,,2      )f x(
```

Hay expresiones que están bien formadas pero no tienen sentido.

Ejemplo

```
True + 1
```

Tipos

Hay secuencias de símbolos que no son expresiones bien formadas.

Ejemplo

```
1,,2      )f x(
```

Hay expresiones que están bien formadas pero no tienen sentido.

Ejemplo

```
True + 1
0 1
```

Tipos

Hay secuencias de símbolos que no son expresiones bien formadas.

Ejemplo

```
1,,2      )f x(
```

Hay expresiones que están bien formadas pero no tienen sentido.

Ejemplo

```
True + 1
0 1
[[], (+)]
```

Tipos

Un **tipo** es una especificación del invariante de un dato o de una función.

Ejemplo

```
99          :: Int
```

Tipos

Un **tipo** es una especificación del invariante de un dato o de una función.

Ejemplo

```
99          :: Int
not         :: Bool -> Bool
```

Tipos

Un **tipo** es una especificación del invariante de un dato o de una función.

Ejemplo

```
99          :: Int
not         :: Bool -> Bool
not True    :: Bool
```

Tipos

Un **tipo** es una especificación del invariante de un dato o de una función.

Ejemplo

```
99          :: Int
not         :: Bool -> Bool
not True    :: Bool
(+)         :: Int -> (Int -> Int)
```

Tipos

Un **tipo** es una especificación del invariante de un dato o de una función.

Ejemplo

```
99          :: Int
not         :: Bool -> Bool
not True    :: Bool
(+)         :: Int -> (Int -> Int)
(+) 1       :: Int -> Int
```

Tipos

Un **tipo** es una especificación del invariante de un dato o de una función.

Ejemplo

```
99          :: Int
not         :: Bool -> Bool
not True    :: Bool
(+)         :: Int -> (Int -> Int)
(+) 1       :: Int -> Int
((+) 1) 2   :: Int
```

Tipos

Un **tipo** es una especificación del invariante de un dato o de una función.

Ejemplo

```
99          :: Int
not         :: Bool -> Bool
not True    :: Bool
(+)         :: Int -> (Int -> Int)
(+) 1       :: Int -> Int
((+) 1) 2   :: Int
```

El tipo de una función expresa un **contrato**.

Condiciones de tipado

Para que un programa esté **bien tipado**:

1. Todas las expresiones deben tener tipo.

Condiciones de tipado

Para que un programa esté **bien tipado**:

1. Todas las expresiones deben tener tipo.
2. Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo.

Condiciones de tipado

Para que un programa esté **bien tipado**:

1. Todas las expresiones deben tener tipo.
2. Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo.
3. Los dos lados de una ecuación deben tener el mismo tipo.

Condiciones de tipado

Para que un programa esté **bien tipado**:

1. Todas las expresiones deben tener tipo.
2. Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo.
3. Los dos lados de una ecuación deben tener el mismo tipo.
4. El argumento de una función debe tener el tipo del dominio.

Condiciones de tipado

Para que un programa esté **bien tipado**:

1. Todas las expresiones deben tener tipo.
2. Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo.
3. Los dos lados de una ecuación deben tener el mismo tipo.
4. El argumento de una función debe tener el tipo del dominio.
5. El resultado de una función debe tener el tipo del codominio.

Condiciones de tipado

Para que un programa esté **bien tipado**:

1. Todas las expresiones deben tener tipo.
2. Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo.
3. Los dos lados de una ecuación deben tener el mismo tipo.
4. El argumento de una función debe tener el tipo del dominio.
5. El resultado de una función debe tener el tipo del codominio.

$$\frac{\texttt{f :: a -> b} \qquad \texttt{x :: a}}{\texttt{f x :: b}}$$

Condiciones de tipado

Para que un programa esté **bien tipado**:

1. Todas las expresiones deben tener tipo.
2. Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo.
3. Los dos lados de una ecuación deben tener el mismo tipo.
4. El argumento de una función debe tener el tipo del dominio.
5. El resultado de una función debe tener el tipo del codominio.

$$\frac{\texttt{f :: a -> b} \qquad \texttt{x :: a}}{\texttt{f x :: b}}$$

Sólo tienen sentido los programas bien tipados.

No es necesario escribir explícitamente los tipos. (Inferencia).

Tipos

Convenimos en que "->" es **asociativo a derecha**:

```
a -> b -> c        ≡  a -> (b -> c)    ≢  (a -> b) -> c
```

Tipos

Convenimos en que "->" es **asociativo a derecha**:

```
a -> b -> c       ≡  a -> (b -> c)   ≢  (a -> b) -> c
a -> b -> c -> d  ≡  a -> (b -> (c -> d))
```

Tipos

Convenimos en que "->" es **asociativo a derecha**:

```
a -> b -> c       ≡  a -> (b -> c)   ≢  (a -> b) -> c
a -> b -> c -> d  ≡  a -> (b -> (c -> d))
```

Ejemplo

```
suma4 :: Int -> Int -> Int -> Int -> Int
suma4 a b c d = a + b + c + d
```

Tipos

Convenimos en que "->" es **asociativo a derecha**:

```
a -> b -> c       ≡  a -> (b -> c)   ≢  (a -> b) -> c
a -> b -> c -> d  ≡  a -> (b -> (c -> d))
```

Ejemplo

```
suma4 :: Int -> Int -> Int -> Int -> Int
suma4 a b c d = a + b + c + d
```

Se puede pensar así:

```
suma4 :: Int -> (Int -> (Int -> (Int -> Int)))
(((suma4 a) b) c) d = a + b + c + d
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.

Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::
[]   ::
(:)  ::
fst  ::
snd  ::
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.

Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::
(:)  ::
fst  ::
snd  ::
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.

Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::
fst  ::
snd  ::
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.

Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::  a -> [a] -> [a]
fst  ::
snd  ::
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.

Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::  a -> [a] -> [a]
fst  ::  (a, b) -> a
snd  ::  (a, b) -> b
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.
Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::  a -> [a] -> [a]
fst  ::  (a, b) -> a
snd  ::  (a, b) -> b
```

Ejemplo

```
flip f x y = f y x
```

¿Qué tipo tiene `flip`?

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.
Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::  a -> [a] -> [a]
fst  ::  (a, b) -> a
snd  ::  (a, b) -> b
```

Ejemplo

```
flip f x y = f y x
```

¿Qué tipo tiene `flip`?

```
flip (:) [2, 3] 1
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.

Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::  a -> [a] -> [a]
fst  ::  (a, b) -> a
snd  ::  (a, b) -> b
```

Ejemplo

```
flip f x y = f y x
```

¿Qué tipo tiene `flip`?

```
    flip (:) [2, 3] 1
=   (:) 1 [2, 3]
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.
Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::  a -> [a] -> [a]
fst  ::  (a, b) -> a
snd  ::  (a, b) -> b
```

Ejemplo

```
flip f x y = f y x
```

¿Qué tipo tiene `flip`?

```
    flip (:) [2, 3] 1
=   (:) 1 [2, 3]
≡   1 : [2, 3]
```

Polimorfismo

Hay expresiones que tienen más de un tipo.
Usamos *variables de tipo* `a`, `b`, `c` para denotar tipos desconocidos:

```
id   ::  a -> a
[]   ::  [a]
(:)  ::  a -> [a] -> [a]
fst  ::  (a, b) -> a
snd  ::  (a, b) -> b
```

Ejemplo

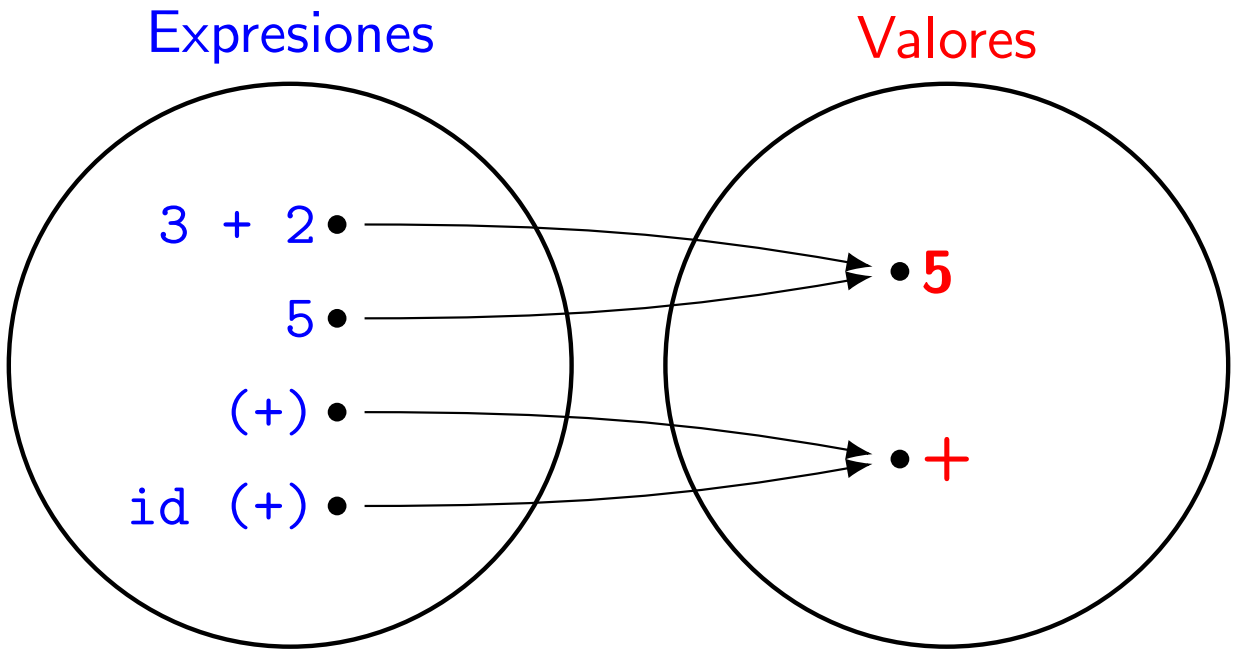
```
flip f x y = f y x
```

¿Qué tipo tiene `flip`?

```
    flip (:) [2, 3] 1
=   (:) 1 [2, 3]
≡   1 : [2, 3]
=   [1, 2, 3]
```

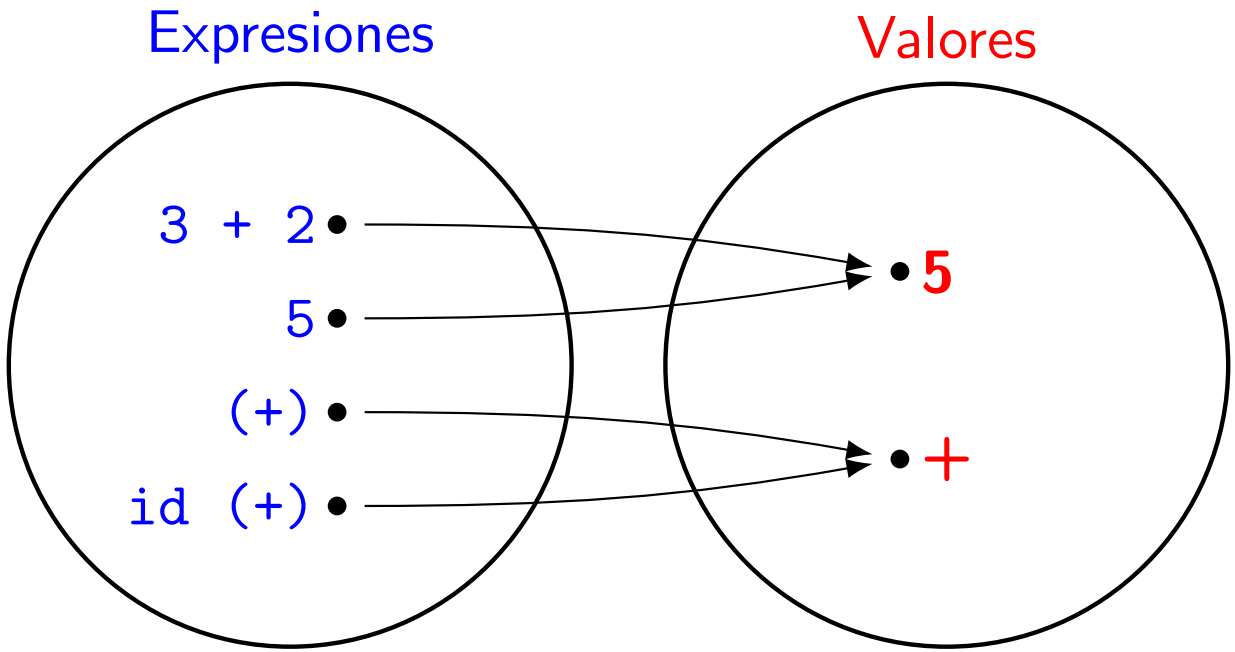
Modelo de cómputo

Dada una expresión, se computa su *valor* usando las ecuaciones:



Modelo de cómputo

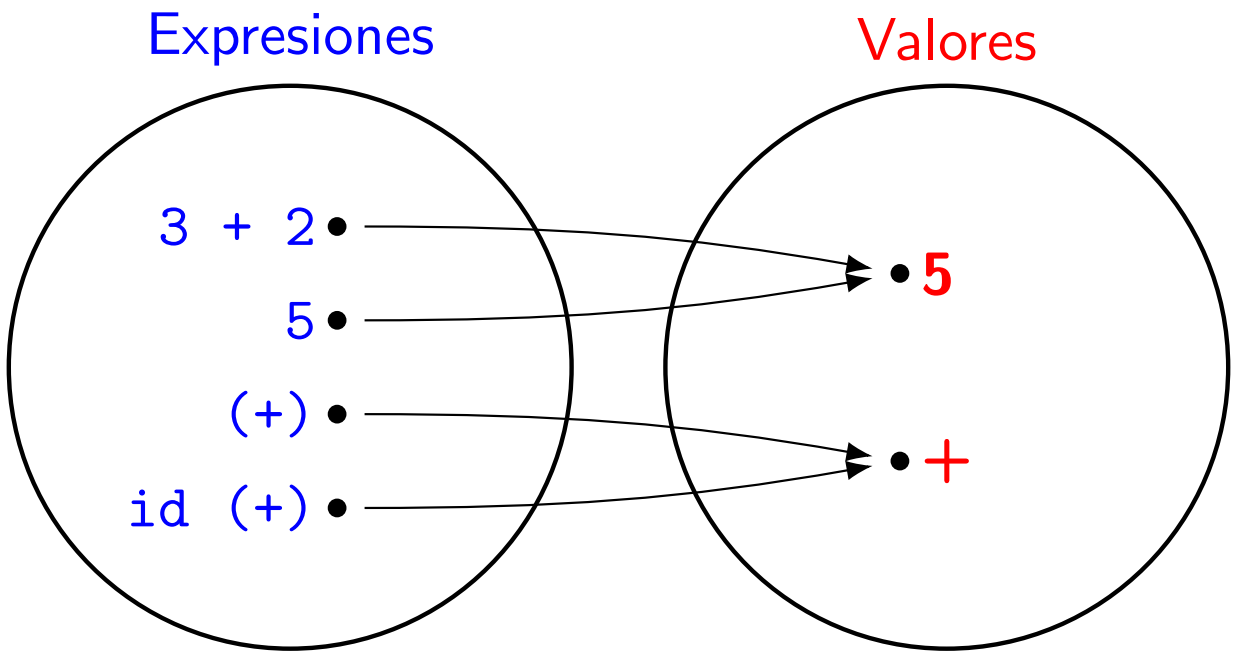
Dada una expresión, se computa su *valor* usando las ecuaciones:



Hay expresiones bien tipadas que no tienen valor. Ej.: `1 / 0`.

Modelo de cómputo

Dada una expresión, se computa su *valor* usando las ecuaciones:



Hay expresiones bien tipadas que no tienen valor. Ej.: `1 / 0`.
Decimos que dichas expresiones se indefinen o que tienen valor $\bot$.

Modelo de cómputo

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones.

Modelo de cómputo

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones.
Más precisamente, por un conjunto de **ecuaciones orientadas**.

Modelo de cómputo

Un programa funcional está dado por un conjunto de ecuaciones.
Más precisamente, por un conjunto de **ecuaciones orientadas**.

Una ecuación `e1 = e2` se interpreta desde dos puntos de vista:

1. **Punto de vista denotacional.**
   Declara que `e1` y `e2` tienen el mismo significado.
2. **Punto de vista operacional.**
   Computar el valor de `e1` se reduce a computar el valor de `e2`.

Modelo de cómputo

El lado *izquierdo* de una ecuación no es una expresión arbitraria.

Modelo de cómputo

El lado *izquierdo* de una ecuación no es una expresión arbitraria. Debe ser una función aplicada a **patrones**.

Modelo de cómputo

El lado *izquierdo* de una ecuación no es una expresión arbitraria. Debe ser una función aplicada a **patrones**.

Un patrón puede ser:

1. Una variable.
2. Un comodín _.
3. Un constructor aplicado a patrones.

El lado izquierdo no debe contener variables repetidas.

Modelo de cómputo

El lado *izquierdo* de una ecuación no es una expresión arbitraria. Debe ser una función aplicada a **patrones**.

Un patrón puede ser:

1. Una variable.
2. Un comodín _.
3. Un constructor aplicado a patrones.

El lado izquierdo no debe contener variables repetidas.

Ejemplo

¿Cuáles ecuaciones están sintácticamente bien formadas?

```
sumaPrimeros (x : y : z : _) = x + y + z
predecesor (n + 1) = n
iguales x x = True
```

Modelo de cómputo

Evaluar una expresión consiste en:

1. Buscar la subexpresión más externa que coincida con el lado izquierdo de una ecuación.
2. Reemplazar la subexpresión que coincide con el lado izquierdo de la ecuación por la expresión correspondiente al lado derecho.
3. Continuar evaluando la expresión resultante.

Modelo de cómputo

Evaluar una expresión consiste en:

1. Buscar la subexpresión más externa que coincida con el lado izquierdo de una ecuación.
2. Reemplazar la subexpresión que coincide con el lado izquierdo de la ecuación por la expresión correspondiente al lado derecho.
3. Continuar evaluando la expresión resultante.

La evaluación se detiene cuando se da uno de los siguientes casos:

1. La expresión es un constructor o un constructor aplicado.

   `True` `(:) 1` `[1, 2, 3]`

2. La expresión es una función *parcialmente* aplicada.

   `(+)` `(+) 5`

3. Se alcanza un *estado de error*.
   Un estado de error es una expresión que no coincide con las ecuaciones que definen a la función aplicada.

Modelo de cómputo

Ejemplo: resultado — constructor

```
tail :: [a] -> [a]
tail (_ : xs) = xs
```

```
tail (tail [1, 2, 3])
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: resultado — constructor

```
tail :: [a] -> [a]
tail (_ : xs) = xs
```

```
tail (tail [1, 2, 3]) ⇝ tail [2, 3]
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: resultado — constructor

```
tail :: [a] -> [a]
tail (_ : xs) = xs
```

```
tail (tail [1, 2, 3]) ⇝ tail [2, 3] ⇝ [3]
```

Ejemplo: resultado — función parcialmente aplicada

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

```
const (const 1) 2
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: resultado — constructor

```
tail :: [a] -> [a]
tail (_ : xs) = xs
```

```
tail (tail [1, 2, 3]) ⇝ tail [2, 3] ⇝ [3]
```

Ejemplo: resultado — función parcialmente aplicada

```
const :: a -> b -> a
const x y = x
```

```
const (const 1) 2 ⇝ const 1
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: indefinición — error

```
head :: [a] -> a
head (x : _) = x
```

```
head (head [[], [1], [1, 1]])
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: indefinición — error

```
head :: [a] -> a
head (x : _) = x
```

```
head (head [[], [1], [1, 1]])  ⇝  head []
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: indefinición — error

```
head :: [a] -> a
head (x : _) = x
```

```
head (head [[], [1], [1, 1]])  ⇝  head []
                               ⇝  ⊥
```

Ejemplo: indefinición — no terminación

```
loop :: Int -> a
loop n = loop (n + 1)
```

```
loop 0
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: indefinición — error

```
head :: [a] -> a
head (x : _) = x
```

```
head (head [[], [1], [1, 1]]) ⇝ head []
                              ⇝ ⊥
```

Ejemplo: indefinición — no terminación

```
loop :: Int -> a
loop n = loop (n + 1)
```

```
loop 0 ⇝ loop (1 + 0)
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: indefinición — error

```
head :: [a] -> a
head (x : _) = x
```

```
head (head [[], [1], [1, 1]]) ⇝ head []
                              ⇝ ⊥
```

Ejemplo: indefinición — no terminación

```
loop :: Int -> a
loop n = loop (n + 1)
```

```
loop 0 ⇝ loop (1 + 0)
       ⇝ loop (1 + (1 + 0))
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: indefinición — error

```
head :: [a] -> a
head (x : _) = x
```

```
head (head [[], [1], [1, 1]]) ⇝ head []
                              ⇝ ⊥
```

Ejemplo: indefinición — no terminación

```
loop :: Int -> a
loop n = loop (n + 1)
```

```
loop 0 ⇝ loop (1 + 0)
       ⇝ loop (1 + (1 + 0))
       ⇝ loop (1 + (1 + (1 + 0)))
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: indefinición — error

```
head :: [a] -> a
head (x : _) = x
```

```
head (head [[], [1], [1, 1]]) ⇝ head []
                              ⇝ ⊥
```

Ejemplo: indefinición — no terminación

```
loop :: Int -> a
loop n = loop (n + 1)
```

```
loop 0 ⇝ loop (1 + 0)
       ⇝ loop (1 + (1 + 0))
       ⇝ loop (1 + (1 + (1 + 0)))
       ...
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: evaluación no estricta

```
indefinido :: Int
indefinido = indefinido
```

```
head (tail [indefinido, 1, indefinido])
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: evaluación no estricta

```
indefinido :: Int
indefinido = indefinido
```

```
        head (tail [indefinido, 1, indefinido])
⇝       head [1, indefinido]
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: evaluación no estricta

```
indefinido :: Int
indefinido = indefinido
```

```
        head (tail [indefinido, 1, indefinido])
⇝       head [1, indefinido]
⇝       1
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
desde 0
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
    desde 0
⇝   0 : desde 1
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
    desde 0
⇝   0 : desde 1
⇝   0 : (1 : desde 2)
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
    desde 0
⇝   0 : desde 1
⇝   0 : (1 : desde 2)
⇝   0 : (1 : (2 : desde 3))  ⇝  ...
```

```
head (tail (desde 0))
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
    desde 0
⇝   0 : desde 1
⇝   0 : (1 : desde 2)
⇝   0 : (1 : (2 : desde 3))  ⇝  ...
```

```
    head (tail (desde 0))
⇝   head (tail (0 : desde 1))
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
    desde 0
⇝   0 : desde 1
⇝   0 : (1 : desde 2)
⇝   0 : (1 : (2 : desde 3))  ⇝  ...
```

```
    head (tail (desde 0))
⇝   head (tail (0 : desde 1))
⇝   head (desde 1)
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
    desde 0
⇝   0 : desde 1
⇝   0 : (1 : desde 2)
⇝   0 : (1 : (2 : desde 3))  ⇝  ...
```

```
    head (tail (desde 0))
⇝   head (tail (0 : desde 1))
⇝   head (desde 1)
⇝   head (1 : desde 2)
```

Modelo de cómputo

Ejemplo: listas infinitas

```
desde :: Int -> [Int]
desde n = n : desde (n + 1)
```

```
    desde 0
⇝   0 : desde 1
⇝   0 : (1 : desde 2)
⇝   0 : (1 : (2 : desde 3))   ⇝   ...
```

```
    head (tail (desde 0))
⇝   head (tail (0 : desde 1))
⇝   head (desde 1)
⇝   head (1 : desde 2)
⇝   1
```

Modelo de cómputo

Nota. En Haskell, el orden de las ecuaciones es relevante.
Si hay varias ecuaciones que coinciden se usa siempre la primera.

Ejemplo

```
esCorta (_ : _ : _) = False
esCorta _           = True
```

```
esCorta []
```

Modelo de cómputo

Nota. En Haskell, el orden de las ecuaciones es relevante.
Si hay varias ecuaciones que coinciden se usa siempre la primera.

Ejemplo

```
esCorta (_ : _ : _) = False
esCorta _           = True
```

`esCorta []` $\rightsquigarrow$ `True`

Modelo de cómputo

Nota. En Haskell, el orden de las ecuaciones es relevante.
Si hay varias ecuaciones que coinciden se usa siempre la primera.

Ejemplo

```
esCorta (_ : _ : _) = False
esCorta _           = True
```

```
esCorta []    ⇝  True
esCorta [1]
```

Modelo de cómputo

Nota. En Haskell, el orden de las ecuaciones es relevante.
Si hay varias ecuaciones que coinciden se usa siempre la primera.

Ejemplo

```
esCorta (_ : _ : _) = False
esCorta _           = True
```

```
esCorta []    ⇝ True
esCorta [1]   ⇝ True
```

Modelo de cómputo

Nota. En Haskell, el orden de las ecuaciones es relevante.
Si hay varias ecuaciones que coinciden se usa siempre la primera.

Ejemplo

```
esCorta (_ : _ : _) = False
esCorta _           = True
```

```
esCorta []      ⇝  True
esCorta [1]     ⇝  True
esCorta [1, 2]
```

Modelo de cómputo

Nota. En Haskell, el orden de las ecuaciones es relevante.
Si hay varias ecuaciones que coinciden se usa siempre la primera.

Ejemplo

```
esCorta (_ : _ : _) = False
esCorta _           = True
```

```
esCorta []      ⇝  True
esCorta [1]     ⇝  True
esCorta [1, 2]  ⇝  False
```

Funciones de orden superior

Definamos la composición de funciones ("`g . f`").

Funciones de orden superior

Definamos la composición de funciones ("`g . f`").

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
(g . f) x = g (f x)
```

Funciones de orden superior

Definamos la composición de funciones ("`g . f`").

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
(g . f) x = g (f x)
```

Otra forma de definirla (usando la notación "lambda"):

```
(.) :: (b -> c) -> (a -> b) -> a -> c
g . f = \ x -> g (f x)
```

Funciones de orden superior

¿Qué tienen en común las siguientes funciones?

```
dobleL :: [Float] -> [Float]
dobleL []       = []
dobleL (x : xs) = x * 2 : dobleL xs
```

Funciones de orden superior

¿Qué tienen en común las siguientes funciones?

```
dobleL :: [Float] -> [Float]
dobleL []       = []
dobleL (x : xs) = x * 2 : dobleL xs

esParL :: [Int] -> [Bool]
esParL []       = []
esParL (x : xs) = x `mod` 2 == 0 : esParL xs
```

Funciones de orden superior

¿Qué tienen en común las siguientes funciones?

```
dobleL :: [Float] -> [Float]
dobleL []       = []
dobleL (x : xs) = x * 2 : dobleL xs

esParL :: [Int] -> [Bool]
esParL []       = []
esParL (x : xs) = x `mod` 2 == 0 : esParL xs

longitudL :: [[a]] -> [Int]
longitudL []       = []
longitudL (x : xs) = length x : longitudL xs
```

Funciones de orden superior

¿Qué tienen en común las siguientes funciones?

```
dobleL :: [Float] -> [Float]
dobleL []       = []
dobleL (x : xs) = x * 2 : dobleL xs

esParL :: [Int] -> [Bool]
esParL []       = []
esParL (x : xs) = x `mod` 2 == 0 : esParL xs

longitudL :: [[a]] -> [Int]
longitudL []       = []
longitudL (x : xs) = length x : longitudL xs
```

Todas ellas siguen el esquema:

```
g []       = []
g (x : xs) = f x : g xs
```

Funciones de orden superior

¿Cómo se puede abstraer el esquema?

Funciones de orden superior

¿Cómo se puede abstraer el esquema?

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f []       = []
map f (x : xs) = f x : map f xs
```

Funciones de orden superior

¿Cómo se puede abstraer el esquema?

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f []       = []
map f (x : xs) = f x : map f xs

dobleL    xs = map (\ x -> x * 2) xs
esParL    xs = map (\ x -> x `mod` 2 == 0) xs
longitudL xs = map length xs
```

Funciones de orden superior

¿Cómo se puede abstraer el esquema?

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
map f []       = []
map f (x : xs) = f x : map f xs

dobleL    xs = map (\ x -> x * 2) xs
esParL    xs = map (\ x -> x `mod` 2 == 0) xs
longitudL xs = map length xs
```

Otra manera:

```
dobleL    = map (* 2)
esParL    = map ((== 0) . (`mod` 2))
longitudL = map length
```

Funciones de orden superior

¿Qué relación hay entre las siguientes funciones?

```
negativos :: [Int] -> [Int]
negativos []       = []
negativos (x : xs) = if x < 0
                     then x : negativos xs
                     else negativos xs

noVacias :: [[a]] -> [[a]]
noVacias []       = []
noVacias (x : xs) = if not (null x)
                    then x : noVacias xs
                    else noVacias xs
```

Funciones de orden superior

¿Qué relación hay entre las siguientes funciones?

```
negativos :: [Int] -> [Int]
negativos []       = []
negativos (x : xs) = if x < 0
                     then x : negativos xs
                     else negativos xs

noVacias :: [[a]] -> [[a]]
noVacias []       = []
noVacias (x : xs) = if not (null x)
                    then x : noVacias xs
                    else noVacias xs
```

Ambas siguen el esquema:

```
g []       = []
g (x : xs) = if p x
             then x : g xs
             else g xs
```

Funciones de orden superior

¿Cómo se puede abstraer el esquema?

Funciones de orden superior

¿Cómo se puede abstraer el esquema?

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p []       = []
filter p (x : xs) = if p x
                    then x : filter p xs
                    else filter p xs
```

Funciones de orden superior

¿Cómo se puede abstraer el esquema?

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
filter p []       = []
filter p (x : xs) = if p x
                    then x : filter p xs
                    else filter p xs

negativos = filter (< 0)
noVacias  = filter (not . null)
```

Ejercicio

```
merge     :: (a -> a -> Bool) -> [a] -> [a] -> [a]
mergesort :: (a -> a -> Bool) -> [a] -> [a]
```

El primer parámetro es una función que determina una relación de orden total entre los elementos de tipo a.

¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ¿ ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Lectura recomendada

Capítulo 4 del libro de Bird.

Richard Bird. *Thinking functionally with Haskell*.
Cambridge University Press, 2015.

Comentarios: tipos

Ojo. Dijimos:

> "Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo."

Comentarios: tipos

Ojo. Dijimos:

> "Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo."

¿Está bien tipado el siguiente programa?

```
sucesor :: Int -> Int
sucesor x = x + 1

opuesto :: Bool -> Bool
opuesto x = not x
```

Comentarios: tipos

Ojo. Dijimos:

> "Cada variable se debe usar siempre con un mismo tipo."

¿Está bien tipado el siguiente programa?

```
sucesor :: Int -> Int
sucesor x = x + 1

opuesto :: Bool -> Bool
opuesto x = not x
```

Sí. Hay dos "x" con distinto tipo pero son variables distintas.
El programa se podría reescribir así:

```
sucesor x = x + 1
opuesto y = not y
```