

Vyjadrenie úlohy ako problému s ohraničeniami

Táto kapitola zahŕňa definíciu premenných, ich domén, a definíciu ohraničení nad doménami, ktoré presne formulujú problém stabilného párovania medzi množinami mužov a žien.

1. Definícia premenných a ich domén

- **Množiny:**

V úlohe pracujeme s dvoma množinami: množinou mužov a množinou žien. Počet mužov a žien je daný v podmienkach úlohy:

- **Muži:** $M = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{12}\}$
- **Ženy:** $W = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9\}$

- **Premenné:**

Každá premenná P_{ij} reprezentuje, či muž m_i a žena w_j tvoria pár:

- $P_{ij} = 1$: muž m_i a žena w_j tvoria pár.
- $P_{ij} = 0$: muž m_i a žena w_j netvoria pár.

- **Domény premenných:**

Každá premenná P_{ij} môže nadobúdať iba hodnoty z množiny $\{0, 1\}$, kde:

- i predstavuje index muža z množiny mužov M , pričom n je celkový počet mužov ($i \in \{0, \dots, n - 1\}$).
- j predstavuje index ženy z množiny žien W , pričom m je celkový počet žien ($j \in \{0, \dots, m - 1\}$).
- **Formálne:** $P_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in \{0, \dots, n - 1\}, \forall j \in \{0, \dots, m - 1\}$

2. Definícia ohraničení nad doménami

- **Všetky ohraničenia:**

- Páry môžu byť tvorené iba z dvoch množín: mužov a žien.
- Každý pár musí pozostávať z jedného muža a jednej ženy.
- Každá osoba môže byť súčasťou iba jednej dvojice.
- Všetky osoby z menšej množiny musia byť zapojené do párovania.
- Každý muž môže byť v páre najviac s jednou ženou.
- Každá žena môže byť v páre najviac s jedným mužom.
- Ak muž tvorí pár so ženou, nesmie existovať iná žena, ktorú by preferoval viac ako svoju aktuálnu partnerku, ak je táto žena voľná, alebo ak je táto žena vo vzťahu s iným mužom, ale uprednostňuje práve jeho.
- Ak žena tvorí pár s mužom, nesmie existovať iný muž, ktorého by preferovala viac ako svojho aktuálneho partnera, ak je tento muž voľný, alebo ak je tento muž vo vzťahu s inou ženou, ale uprednostňuje práve ju.
- Akékoľvek blokujúce páry nesmú byť súčasťou párovania.

- **Analýza redundantnosti ohraňení:**

Po analýze všetkých možných pravidiel z hľadiska redundantnosti sme identifikovali 2 pravidlá, ktoré sú nadbytočné, pretože sú opakovaním alebo zovšeobecnením iných pravidiel. Ide konkrétne o:

- Každý pár musí pozostávať z jedného muža a jednej ženy.
- Akékoľvek blokujúce páry nesmú byť súčasťou párovania.

- **Výber minimálnej množiny ohraňení:**

Hlavné obmedzenia budú bodmi: 5, 6, 7, 8 ktoré budú následne zapísané formálnym spôsobom, pretože majú zmysel pri ďalšom preklade do logických klauzúl.

- **Zápis ohraňení formálnym spôsobom:**

- Každý muž môže byť v páre najviac s jednou ženou:

$$\blacksquare \sum_{j=1}^m P_{ij} \leq 1, \forall i \in \{0, \dots, n-1\}$$

- Každá žena môže byť v páre najviac s jedným mužom:

$$\blacksquare \sum_{i=1}^n P_{ij} \leq 1, \forall j \in \{0, \dots, m-1\}$$

- Ak muž tvorí pár so ženou, nesmie existovať iná žena, ktorú by preferoval viac ako svoju aktuálnu partnerku, ak je táto žena voľná, alebo ak je táto žena vo vzťahu s iným mužom, ale uprednostňuje práve jeho:

$$\blacksquare P_{ij} = 1 \Rightarrow \forall k \neq j: (\sum_{l=1}^n P_{lk} \geq 1 \vee P_{ik} = 0)$$

- Ak žena tvorí pár s mužom, nesmie existovať iný muž, ktorého by preferovala viac ako svojho aktuálneho partnera, ak je tento muž voľný, alebo ak je tento muž vo vzťahu s inou ženou, ale uprednostňuje práve ju:

$$\blacksquare P_{ij} = 1 \Rightarrow \forall l \neq i: (\sum_{k=1}^m P_{lk} \geq 1 \vee P_{lj} = 0)$$

Vytvorenie logického modelu

Táto kapitola zahŕňa spôsob reprezentácie premenných, prevod formálneho zápisu ohraňení na logické klauzuly, odhad počtu klauzúl, ktoré je potrebné vygenerovať pre CNF, a transformáciu modelu do CNF.

1. Spôsob reprezentácie premenných

- V našom modeli pracujeme s dvoma množinami: množinou mužov M a množinou žien W , ktoré majú nasledujúce počty prvkov:

- Množina mužov $M = \{m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8, m_9, m_{10}, m_{12}\}$,
počet: $n = 13$.

- Množina žien $W = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9\}$,
počet: $m = 10$

- Každá premenná P_{ij} reprezentuje možnú dvojicu muža m_i a ženy w_j , kde:

- $P_{ij} = 1$: muž m_i a žena w_j tvoria pár.
- $P_{ij} = 0$: muž m_i a žena w_j netvoria pár.

- Pre zabezpečenie jedinečnosti každej dvojice používame jedinečné indexovanie premenných.
 - Celkovo teda máme: $n \cdot m = 13 \cdot 10 = 130$ premenných.
- Každej premennej P_{ij} priradíme jedinečné číslo pomocou vzorca:
 - Premenné P_{ij} , kde $i \in \{0, \dots, 12\}$ a $j \in \{0, \dots, 9\}$
 - $Index(P_{ij}) = i \cdot m + j + 1$
- Príklady indexovania:
 - $P_{00} \rightarrow 1$: muž m_0 a žena w_0 .
 - $P_{01} \rightarrow 2$: muž m_0 a žena w_1 .
 - $P_{13} \rightarrow 14$: muž m_1 a žena w_3 .
 - $P_{129} \rightarrow 130$: muž m_{12} a žena w_9 .

2. Prevod formálneho zápisu ohraničení na logické klauzuly

1. Každý muž môže byť spojený maximálne s jednou ženou

Pre každého muža m a pre každý pár žien w_1, w_2 ($w_1 < w_2$):

- Vzorec: $\neg x(m, w_1) \vee \neg x(m, w_2) \vee \neg x(m, w_1) \wedge \neg x(m, w_2)$

2. Každá žena musí byť spojená presne s jedným mužom

- Aspoň jeden muž je spojený s každou ženou:

$$x(m_1, w) \vee x(m_2, w) \vee \dots \vee x(m_n, w) \vee \neg x(m_1, w) \wedge \neg x(m_2, w) \wedge \dots \wedge \neg x(m_n, w)$$

3. Stabilita

Pre každý pár (m, w) a (m', w') , kde $x(m, w) \wedge x(m', w')$ patrí do riešenia, kontrolujeme všetky možné blokujúce páry:

- Vzorec: $\neg x(m, w) \vee \neg x(m', w') \vee \neg x(m, w') \vee \neg x(m', w)$

3. Odhad počtu klauzúl, ktoré je potrebné vygenerovať pre CNF

1. $13 \times (210) = 13 \times 45 = 585$
2. $10 \times (213) = 10 \times 78 = 780$
3. počet = 3505 pre stabilitu

4. Transformácia modelu do CNF

Pomocou algoritmu, ktorý generuje klauzy máme cnf vzorec pre našu úlohu, Příklad:

```
-1 -2 0
-1 -3 0
-1 -8 0
-1 -9 0
-1 -6 0
-1 -4 0
-1 -10 0
-1 -5 0
-1 -7 0
-2 -3 0
-2 -8 0
-2 -9 0
-2 -6 0
```

Transformácia modelu do formátu Dimacs

Pre format dimacs musíme na začiatku ukazať počet premenných a počet klauz:

Pre túto úlohu máme: `p cnf 130 4880`

Použitie SAT solvera

Táto kapitola zahŕňa informácie o použitom SAT solveri a tiež o riešení poskytnutom SAT solverom.

1. Informácia o použitom SAT solve

Na riešenie tejto úlohy bol použitý [MiniSAT](#).

MiniSat je rýchly a efektívny SAT solver, ktorý rieši problémy splniteľnosti logických formulí v konjunktívnej normálnej forme (CNF). Používa sa v oblasti umelého inteligencie, overovania správnosti softvéru a optimalizácie.

2. Riešenie poskytnuté SAT solverom

CPU time: 0.03s

```
SAT -1 -2 3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19 -20 21 -22 -23 -24 -25 -26
-27 -28 -29 -30 -31 32 -33 -34 -35 -36 -37 -38 -39 -40 -41 -42 -43 -44 -45 -46 -47 -48 -49 -50
-51 52 -53 -54 -55 -56 -57 -58 -59 -60 -61 -62 -63 64 -65 -66 -67 -68 -69 -70 -71 -72 -73 -74
-75 76 -77 -78 -79 -80 -81 -82 -83 -84 -85 -86 -87 -88 -89 -90 -91 92 -93 -94 -95 -96 -97 -98
-99 -100 -101 -102 -103 104 -105 -106 -107 -108 -109 -110 111 -112 -113 -114 -115 -116
-117 -118 -119 -120 -121 -122 -123 -124 -125 -126 -127 -128 -129 -130
```

Riešenie úlohy dekodované z výstupu SAT solvera

Vysledok je:

m0 w2

m1 w0

m2 w4

m3 w5

m5 w1

m7 w9

m9 w8

m10 w6

m11 w7