Notas de aula: Introdução às funções de uma variável,
com Gabriel Bondioli Piterutti

Sumário

1 Encontro 1 - 08 de julho de 2025

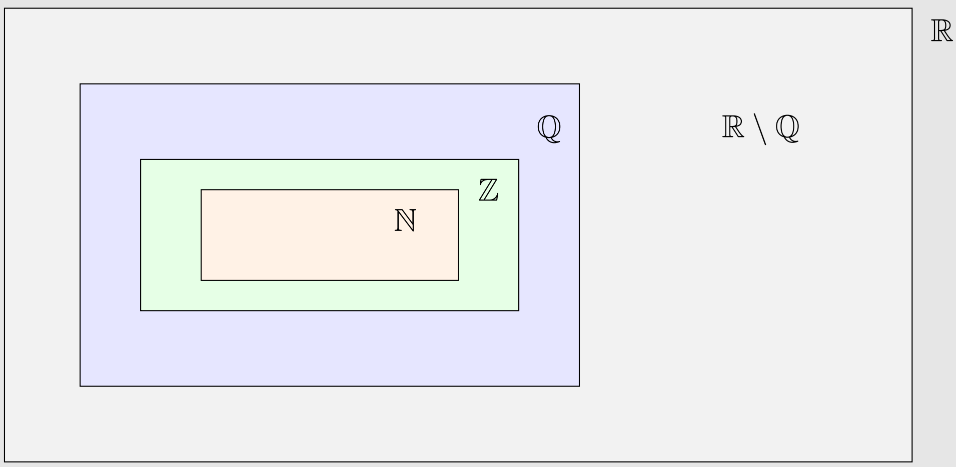
Matemática é linguagem! Isso significa que nos comunicamos com as outras pessoas e expressamos ideias matemáticas por meio de símbolos.

1.1 Intervalos

Relembre!

Denotamos o conjunto dos números reais pela letra estilizada $\mathbb{R}$, e dentro deste conjunto há ainda outros conjuntos.

Conjuntos Numéricos



Assim, podemos representar os diferentes conjuntos de várias formas diferentes:

Conjunto dos Naturais: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

Conjunto dos Inteiros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Conjunto dos Racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$. Lê-se "*o conjunto de todas as frações a sobre b, tal que a pertence ao conjunto dos inteiros, e b pertence ao conjunto dos inteiros diferentes de zero.*"

Exemplos: $\mathbb{Q} = \left\{ -1,\, \frac{1}{2},\, 0,\, 3,\, \frac{22}{7},\, \dots \right\}$

Exemplo 1.1. Considere $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ele é um número racional? Não, pois $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ (lê-se *"raiz de dois não pertence ao conjunto dos números inteiros"*).

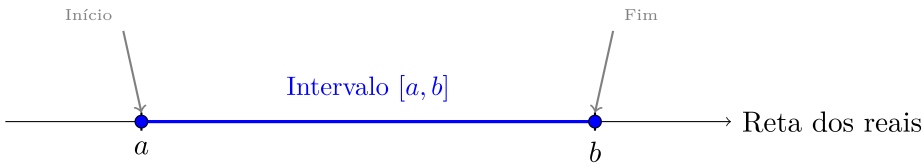
E um número qualquer $\dfrac{a}{b}$, com $b = 0$? Também não, pois para que um número seja racional, $b \neq 0$ (lê-se *"b tem que ser diferente de zero"*).

Conjunto dos Irracionais: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{\pi,\, \sqrt{2},\, e,\, \dots\}$. A contrabarra ($\setminus$) é um operador de diferença entre conjuntos, e lemos *"o conjunto dos números irracionais é o conjunto dos números reais, menos o conjunto dos números racionais"*.

Um intervalo real é um conjunto de elementos pertencentes ao conjunto dos números reais, que possui dois extremos.

Podemos pensar nos extremos como os dois elementos que limitam esse intervalo, ou ainda, como os elementos que indicam o início e o fim do pedaço dos números reais.

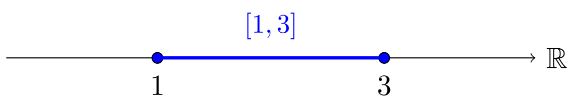
Extremos de um intervalo como limites do pedaço dos reais $\mathbb{R}$

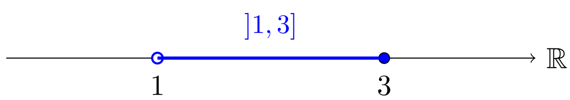


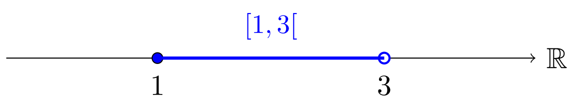
Como denotar um intervalo? Podemos fazê-lo usando os colchetes ([ ]), observando o seguinte:

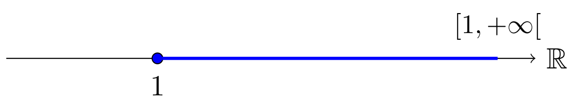
- Os símbolos [e] indicam que o **extremo está incluído** no intervalo (chamado de **intervalo fechado**).
- Os símbolos] e [indicam que o **extremo está excluído** do intervalo (chamado de **intervalo aberto**).
- Por exemplo: $[a, b[$ representa todos os reais entre a e b, **incluindo o** a, mas **excluindo o** b.

Exemplo 1.2. Diferentes formas de denotar um intervalo.









1.2 Operações com frações

Relembre!

"Dividir por fração é multiplicar pelo inverso". Mas, por que?

Considere dois números racionais $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, com $b \neq 0$ e $d \neq 0$. Vamos calcular a divisão entre estes dois números:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

Agora vamos multiplicar por 1:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \times 1$$

Mas podemos multiplicar por 1 de uma forma mais esperta. Note que:

$$1 = \frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}}, \quad \text{com } c \neq 0$$

Isto é verdade porque estamos efetuando a divisão de um número por ele mesmo e, além disso, observe que $\frac{d}{c}$ é o inverso de $\frac{c}{d}$. Voltando ao problema inicial:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} &= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \times 1 \\
&= \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \times \frac{\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}} \\
&= \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}{\frac{\cancel{c} \cdot \cancel{d}}{\cancel{d} \cdot \cancel{c}}} \\
&= \frac{\frac{a \cdot d}{b \cdot c}}{1} \\
&= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \\
&= \frac{ad}{bc}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Exemplo 1.3. Operações com frações

a) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{5} =$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \frac{3}{5} &= \frac{5}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{2} \quad \text{(uma multiplicação esperta: } \frac{5}{5} = \frac{2}{2} = 1\text{)} \\
&= \frac{5}{10} + \frac{6}{10} \quad \text{(os denominadores foram igualados)} \\
&= \frac{11}{10}
\end{aligned}$$

b) $\dfrac{7}{5} \div \dfrac{3}{4} =$

$$\begin{aligned}
\frac{7}{5} \div \frac{3}{4} &= \frac{\frac{7}{5}}{\frac{3}{4}} \quad \text{(Dividir por fração é multiplicar pelo inverso)} \\
&= \frac{7}{5} \cdot \frac{4}{3} \\
&= \frac{28}{15}
\end{aligned}$$

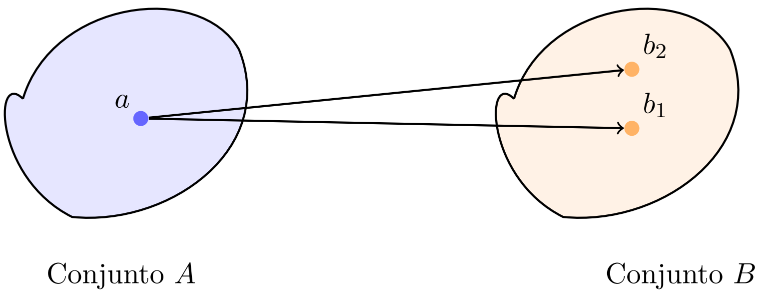
1.3 Funções de uma variável real

Reconhecendo funções a partir de exemplos.

Uma função é um tipo especial de relação entre conjuntos em que, para cada elemento de um conjunto, existe apenas um elemento associado pertencente a outro conjunto. Chamamos esse critério de *unicidade*.

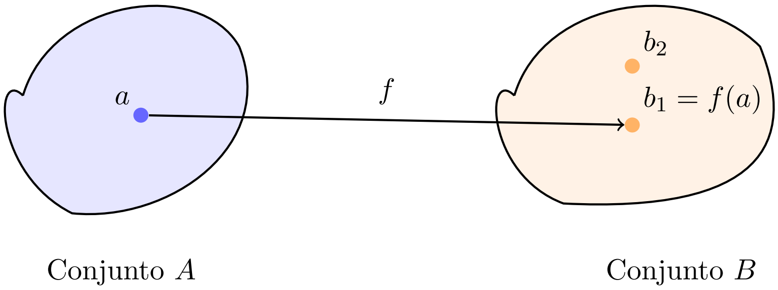
Considere dois conjuntos A e B. Considere, também, que A possui um elemento a, e B possui os elementos b_1 e b_2. Expressamos essa ideia matemática como $a \in A$ (lê-se *"a pertence ao conjunto A"*) e $b_1, b_2 \in B$ (lê-se *"b_1 e b_2 pertencem ao conjunto B"*).

Veja que a figura abaixo **não representa uma função**, pois não atende ao critério de *unicidade*.



O elemento a de A se associa aos elementos b_1, b_2 de B. **O diagrama não representa uma função.**

Por outro lado, veja que a figura abaixo representa uma função, pois $a \in A$ está relacionado apenas ao elemento $b_1 \in B$.



O elemento a de A se associa ao elemento b de B. **O diagrama representa uma função.**

Podemos representar a função acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned} f : & A \longrightarrow B \quad (\text{lê-se } f \; de \; A \; em \; B) \\ & a \mapsto f(a) = b_1 \end{aligned}$$

Onde:

f	$\Longrightarrow$	nome que demos para a função
A, B	$\Longrightarrow$	os conjuntos
a, b_1	$\Longrightarrow$	os elementos dos conjuntos
$\mapsto$	$\Longrightarrow$	é um símbolo que *mapeia* os elementos a e b

A regra que relaciona $a \in A$ e $b_1 \in B$ é denotada por $a \mapsto f(a) = b_1$, e dizemos que $f(a)$ é a *imagem* do elemento a pela função f.

Reconhecendo o domínio, contradomínio e imagem de funções.

Se os elementos de A e de B são números reais, então dizemos que essa função é de uma variável real a valores reais. Podemos expressar essa ideia matemática da seguinte forma:

$$A \subseteq \mathbb{R} \quad \text{e} \quad B \subseteq \mathbb{R}$$

(Lê-se "A e B são subconjuntos do conjunto dos reais")

Dizemos, ainda, que A é o domínio da função f, e B é o contradomínio da função f. Nos referimos ao conjunto de elementos no conjunto B que estão relacionados aos elementos que pertencem a A como imagem da função f.

Denotamos o domínio da função f por D_f, ou $Dom\, f$, e a imagem por Im_f, ou $Im\, f$. No nosso exemplo, em particular, identificamos os conjuntos:

$$\begin{aligned} D_f &= A \\ Im_f &= \{b_1\} \\ & B \text{ é o contradomínio} \end{aligned}$$

Importante!

Existe mais de uma forma de denotar o domínio (D_f) e a imagem (Im_f) de uma função. Neste material, apresentamos as mais usuais.

A partir do exemplo da função f acima, perceba que $Im_f \subseteq B$ ("o conjunto imagem da função f é um subconjunto de B"). Assim, uma outra forma de expressar a imagem de uma função é

$$Im_f = \{b \in B \,|\, b = f(a), a \in A\}$$

(Lê-se “um elemento b pertence ao conjunto B, tal que b é a função f calculada em um a, e a pertence ao conjunto A”)

Com essa ideia, podemos denotar funções com elementos infinitos, como aquelas definidas de reais em reais, como a abaixo:

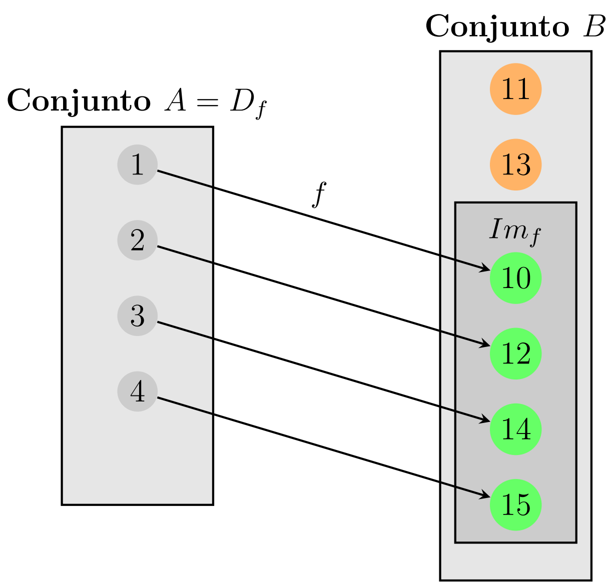
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = y \end{aligned}$$

Onde:	$\mathbb{R}$	$\Longrightarrow$	é o conjunto dos números reais
	x	$\Longrightarrow$	uma variável independente qualquer, pertencente aos reais
	$f(x) = y$	$\Longrightarrow$	uma variável dependente de x, pertencente aos reais
	$x \mapsto f(x) = y$	$\Longrightarrow$	a regra que relaciona x e $f(x) = y$

O que essa função f faz é relacionar um $x \in \mathbb{R}$ e um $y \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} D_f &= \mathbb{R} \\ Im_f &= \{y \in \mathbb{R} \,|\, y = f(x), x \in \mathbb{R}\} \\ \text{ou ainda, } Im_f &= \{f(x) \,|\, x \in D_f\} \end{aligned}$$

Exemplo 1.4. Sejam os conjuntos finitos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, e a função $f : A \longrightarrow B$ representada pelo diagrama abaixo:



Outra maneira de representar o diagrama da ilustração acima é por meio de uma tabela que relaciona os valores x com seus valores $f(x)$ correspondentes:

Temos:

Tabela 1: Tabela de valores: $x \mapsto f(x)$

x	$f(x)$
1	10
2	12
3	14
4	15

$$D_f = A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$Im_f = \{10, 12, 14, 15\} = \{f(x)\,|\,x \in D_f\}$$
$$B \text{ é o contradomínio}$$

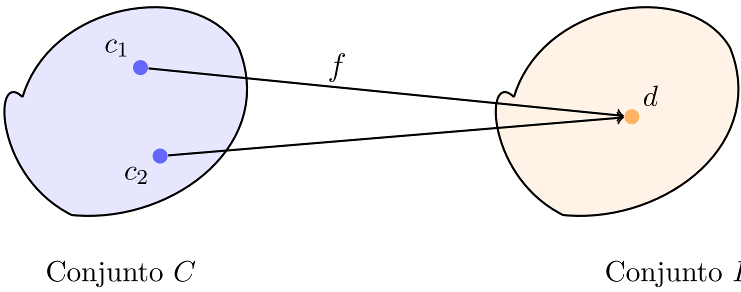
Observe que os valores $11, 13 \in B$ não estão associados a nenhum $x \in D_f$. Compare os conjuntos $B = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ e $Im_f = \{10, 12, 14, 15\}$. Perceba que os valores destacados em vermelho no contradomínio não pertencem à imagem.

Isso significa que o conjunto imagem é um subconjunto do contradomínio. Em notação matemática, $Im_f \subseteq B$.

Uma função especial: a função constante.

Agora, imagine dois conjuntos C e D, com $c_1, c_2 \in C$ e $d \in D$, de modo que $f : C \longrightarrow D$ e $f(c_1) = d = f(c_2)$ (isto é, todos os elementos de C correspondem a $d \in D$). Temos, assim, uma função constante.

Uma função constante é aquela em que todos os elementos de um conjunto estão relacionados a um mesmo elemento do outro conjunto. Observe:



Os elementos c_1 e c_2 de C se associam ao elemento d de D

O plano cartesiano

Uma forma comum de representar as relações entre dois conjuntos é em um plano cartesiano.

Um plano cartesiano tem dois eixos perpendiculares (x e y) e permite localizarmos pontos de interesse no gráfico, associando valores de x e y na forma de *pares ordenados*.

Um par ordenado tem a forma (x, y), de modo que o par ordenado $(1, 3)$ representa o ponto no plano em que $x = 1$ e $y = 3$.

Alguns autores costumam nomear o eixo vertical do plano cartesiano por $f(x)$, ao invés de y. Assim, o par ordenado do exemplo acima também pode ser representado como $(x, f(x)) = (1, 3)$.

A ordem em que os elementos aparecem em um par ordenado importa. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 1.5. Seja o conjunto $A = [1, 3]$ (ou seja, um intervalo de valores reais).

Seja a função $f : [1, 3] \in A \longrightarrow \{4\}$, tal que $x \mapsto f(x) = y = 4$. Como o conjunto $\{4\}$ tem apenas um elemento, então todo elemento $x \in [1, 3]$ levará ao elemento $y = 4$.

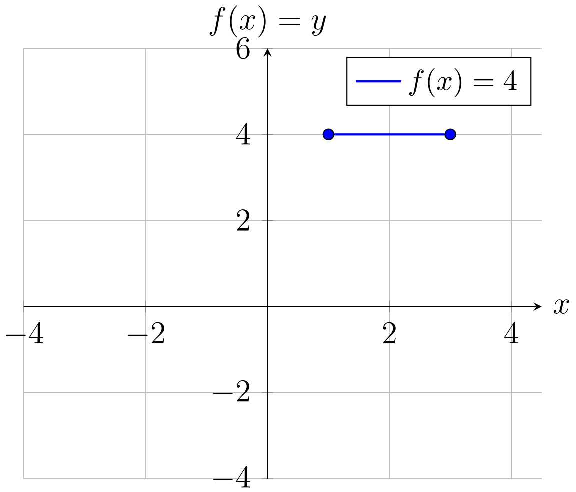


Figura 1: Gráfico da função constante $f(x) = 4$, onde todos os valores de x no intervalo $[1, 3]$ são levados ao único valor $y = 4$.

O conjunto de pontos do gráfico da Fig. 1 pode ser denotado $G_f = \{(x, f(x)) \,|\, x \in A\}$, e cada elemento deste conjunto é chamado *par ordenado*.

Saiba mais!

Podemos pensar no plano cartesiano como um mapa que guarda e representa endereços de vários pontos. Os pares ordenados, por sua vez, são os endereços de cada um dos pontos.

1.4 Resolvendo exercícios

Os exercícios a seguir foram extraídos de Guidorizzi (2012).

Prática e solução 1.1. Exercício 2 do livro. Simplifique $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$, $(x \neq p)$ sendo dados:

a) $f(x) = x^2$ e $p = 1$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f(1) &= 1^2 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
&= \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} \\
&= x + 1 \quad (\text{para } x \neq 1)
\end{aligned}
$$

b) $f(x) = x^2$ e $p = -1$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f(-1) &= (-1)^2 = 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} &= \frac{x^2 - 1}{x + 1} \\
&= \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} \\
&= x - 1 \quad (\text{para } x \neq -1)
\end{aligned}
$$

c) $f(x) = x^2$ e p qualquer

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 \\
f(p) &= p^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(p)}{x - p} &= \frac{x^2 - p^2}{x - p} \quad (\text{Diferença entre dois quadrados}) \\
&= \frac{(x-p)(x+p)}{x-p} \\
&= x + p \quad (\text{para } x \neq p)
\end{aligned}
$$

Importante!

Na expressão $\dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$, $f(p)$ representa outra função diferente de $f(x)$?

Não. Uma vez definida a função f ela não é alterada. Por exemplo, uma vez que nos foi dito que a função f é dada pela regra $f(x) = x^2$, toda vez que aparecer "f de alguma coisa", iremos pegar a "alguma coisa"e elevar ao quadrado.

Deste modo, $f(p) = p^2$ e, caso nos tenha sido fornecido algum valor específico para o p, o que se faz é uma troca da letra p pelo valor dado. Se nos foi dado que $p = 3$, então a expressão $f(p) = p^2$ ficará $f(3) = 3^2$.

Outra forma de observar isto é que $f(x)$ é um símbolo que representa o cálculo da função f num determinado valor de x e, portanto, o $f(x)$ está dizendo que a regra da função f está sendo aplicada no valor x.

2 Encontro 2 - 10 de julho de 2025

2.1 Função afim

Uma função afim tem a forma abaixo:

$$\boxed{f(x) = ax + b, a \neq 0} \tag{1}$$

Onde:
$f(x) = y \implies$ variável dependente de x
$a \implies$ coeficiente angular da reta
$b \implies$ coeficiente linear
$x \implies$ variável independente

Importante!

Toda função afim é de primeiro grau e, portanto, é uma reta. Com dois pontos no plano cartesiano podemos formar uma reta.

Exemplo 2.1. Considere a função $f(x) = 2x + 1$, com $a \neq 0$, definida no conjunto dos números reais (que denotamos por $\mathbb{R}$). Trata-se de uma função afim com coeficiente angular igual a 2 (ou seja, $a = 2$).

O gráfico da função f é representado no plano cartesiano da Fig. 2 .

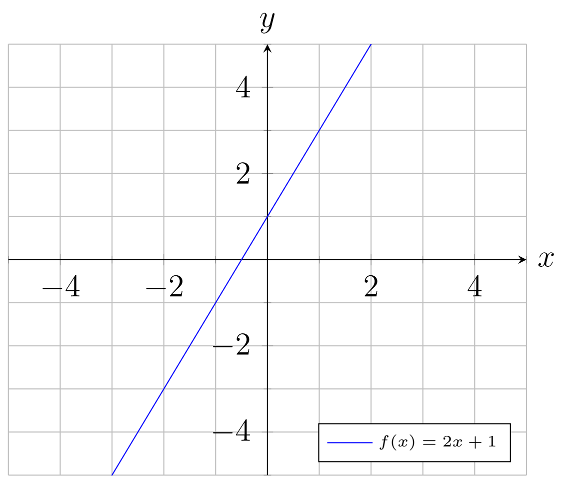


Figura 2: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

O que o gráfico da Fig. 2 nos mostra? Vamos ver o todo e depois resolver passo a passo.

Quando $x = 0$, $f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ (colocamos 0 no lugar do x)
Quando $y = 0$, $x = -\frac{1}{2}$ (resolvemos $f(x) = 2x + 1 = 0$)

Resolvendo passo a passo, temos:

Quando $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 0 + 1 \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Em outras palavras, quando $x = 0$, a reta intercepta o eixo y em $y = 1$.

Quando $y = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) = 2x + 1 &= 0 \\ = 2x &= -1 \\ = x &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Isso significa que a reta cruzará o eixo x quando $x = -\dfrac{1}{2}$.

Analisando o coeficiente angular.

Volte à função $f(x) = 2x + 1$. O que o coeficiente angular (2) faz com a reta no gráfico da Fig. 2?

Observe no gráfico que, conforme caminhamos em uma unidade para a direita na reta dos valores para x, y aumenta em duas unidades.

Exemplo 2.2. Comparando o comportamento da função para dois valores de x. Considere $x = 0$, então $y = 1$. Para $x = 1$, temos $y = 3$ (aumentamos y em duas unidades).

Observe também que nessa (e em qualquer outra!) função afim podemos identificar um triângulo retângulo, como o destacado na Fig. 3.

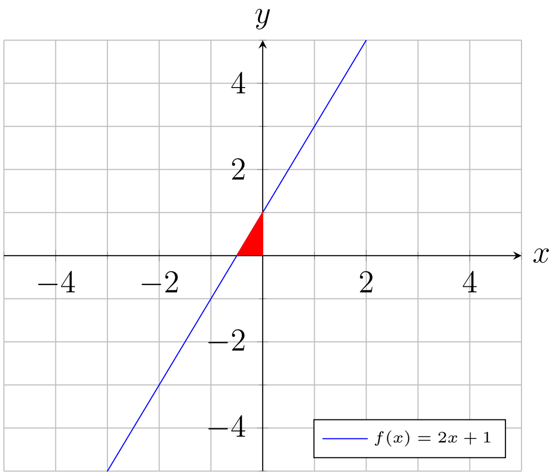


Figura 3: Efeito do coeficiente angular no gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Vamos ampliar o triângulo e analisá-lo na Fig. 4. Note que a base tem tamanho igual a $\dfrac{1}{2}$, e formamos um ângulo que chamamos de θ (lê-se *téta*).

Podemos determinar o valor do ângulo θ usando a função trigonométrica tangent (tan)

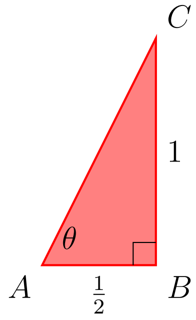


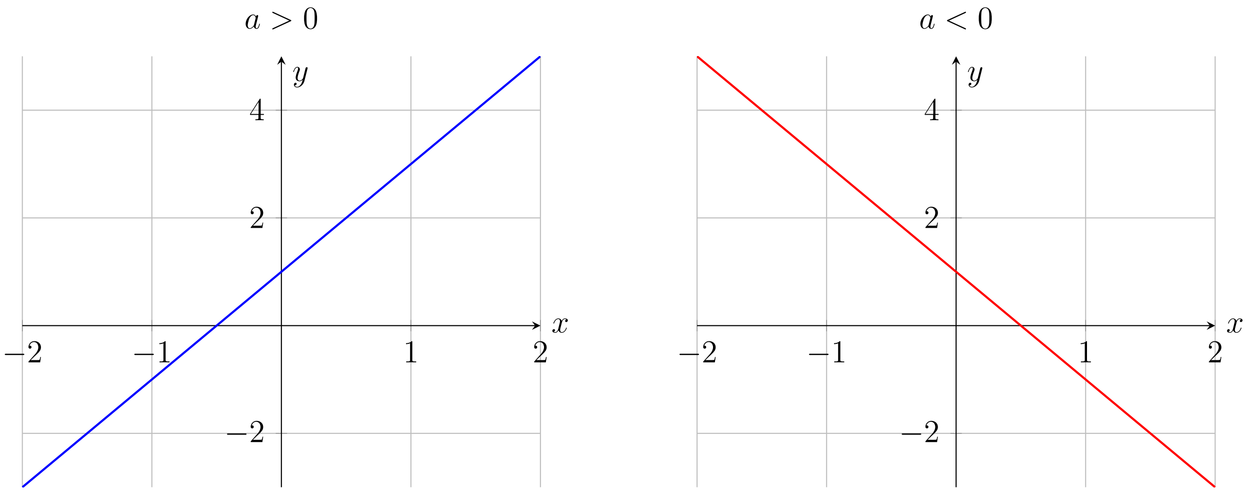
Figura 4: Esse é o triângulo destacado da função.

e, da seguinte forma:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{\frac{1}{2}} \textit{ (dividir por fração é o mesmo que multiplicar pelo inverso)}$$
$$\tan\theta = 1 \cdot \frac{2}{1}$$
$$\tan\theta = 2$$

Repare como o coeficiente angular da função $f(x) = 2x + 1$, $a = 2$, é igual a $\tan\theta$. Veja também que ele é maior que zero. Matematicamente, expressamos assim: $\tan\theta > 0$.

O que acontece se mudarmos o sinal da $\tan\theta$? A inclinação da reta mudará. Dizemos que, quando $a > 0$, a função cresce, e; quando $a < 0$, a função decresce. Já quando $a = 0$, a função será constante, já que a reta não possui inclinação.



(a) Inclinação positiva: reta crescente

(b) Inclinação negativa: reta decrescente

Figura 5: Comparação da inclinação da reta tangente para coeficiente angular positivo e negativo

2.2 Função quadrática

As funções quadráticas tem a seguinte forma:

$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0} \tag{2}$$

Onde: $f(x) = y \implies$ variável dependente de x
$a \implies$ termo dominante
$c \implies$ termo independente
$x \implies$ variável independente

Elas são conhecidas pelos seus comportamentos em forma de parábola, com concavidades para cima ou para baixo.

Saiba mais!

Qual o melhor método para resolver uma equação quadrática? Aquela que funciona e que você não erra!

Outros métodos para resolver equações quadráticas incluem:

- Fórmula quadrática (o popular Bhaskara):

$$\text{Para uma função } f(x) = ax^2 + bx + c$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$\text{Calculando } x_1 \text{ e } x_2\text{:}$$
$$x_{1,2} = \frac{-b^2 \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

Também podemos calcular de uma maneira mais direta:

$$x_{1,2} = \frac{-b^2 \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2 \cdot a}$$

- Soma e produto;
- Fatoração;
- Completar quadrados.

Analisando o comportamento da função, da mesma forma como fizemos com a função afim.

Exemplo 2.3. Seja a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$, definida no conjunto $\mathbb{R}$.

Quando $x = 0$, temos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 6x + 8 \\
f(0) &= 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 \\
&= 0 + 0 + 8 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

Isso significa que, quando $x = 0$, a função intercepta o eixo y em $y = 8$.

Por outro lado, quando $f(x) = 0$, teremos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 6x + 8 \\
0 &= x^2 - 6x + 8 \\
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} && \text{(Fórmula quadrática)} \\
x &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} \\
x &= \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \\
x &= \frac{6 \pm 2}{2}
\end{aligned}
$$

Achando as raízes, vemos que a função tocará o eixo x em dois pontos: quando $x = 4$ e $x = 2$.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{6+2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\
x_2 &= \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}
$$

O gráfico da função quadrática pode ser visto na Fig. 6.

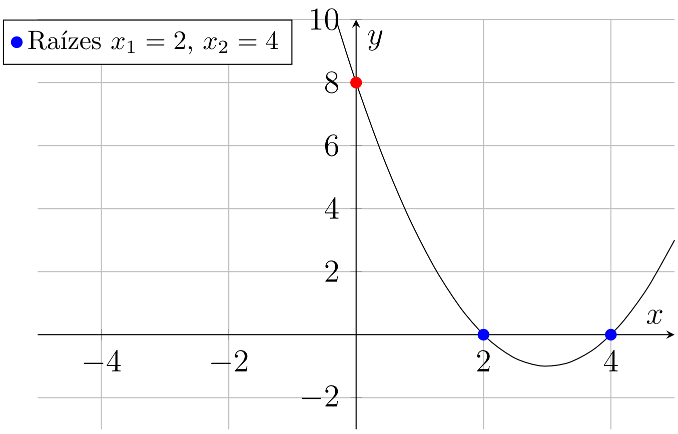


Figura 6: Pontos destacados da função $f(x) = x^2 - 6x + 8$: interseção com eixo y e raízes.

Analisando o discriminante (nós o denotamos por Δ).

Espere aí... A parábola sempre cortará o eixo x em qualquer função quadrática? Não! Observe o exemplo a seguir:

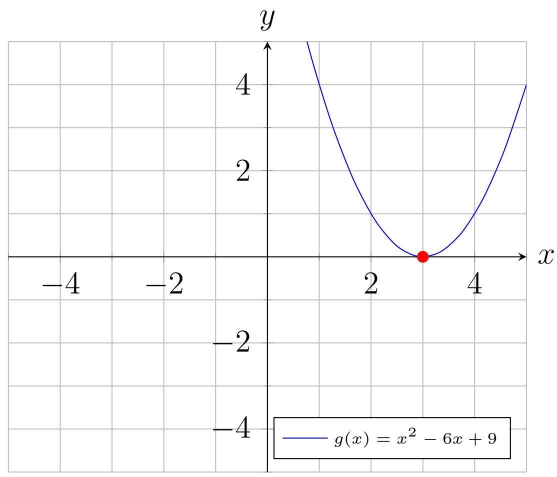


Figura 7: Gráfico da função quadrática $g(x) = x^2 - 6x + 9$.

Exemplo 2.4. Seja $g(x) = x^2 - 6x + 9$ uma função definida no conjunto $\mathbb{R}$. O gráfico da Fig. 7 mostra o comportamento dessa função.

Calculando o discriminante (Δ), temos:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2 - 6x + 9 \\ a &= 1, \quad b = -6, \quad c = 9 \\ \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \\ &= 36 - 36 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Experimente encontrar as raízes da função e verá que $\sqrt{\Delta} = 0$, e assim obteremos apenas um valor para x. Em outras palavras, a função tocará o eixo x em apenas um ponto:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{6 \pm 0}{2} \\ x &= \frac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Em outros casos, a função pode não tocar o eixo x. Isso acontece quando $\Delta < 0$ (lê-se *delta é menor que zero*).

Exemplo 2.5. Seja a função $h(x) = x^2 - 6x + 10$. Resolvendo da mesma maneira como as demais, temos

$$\begin{aligned}
h(x) &= x^2 - 6x + 10 \\
a &= 1, \quad b = -6, \quad c = 10 \\
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 \\
&= 36 - 40 \\
&= -4 \\
x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\
x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1}
\end{aligned}$$

Por enquanto não sabemos resolver $\sqrt{-4}$, mas aqui vai o gráfico que mostra o comportamento dessa função (veja a Fig. 8, na página 19).

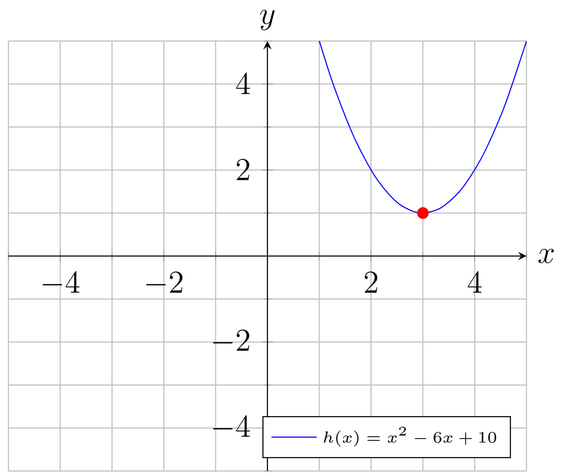


Figura 8: Gráfico da função quadrática $h(x) = x^2 - 6x + 10$.

Assim, podemos resumir que:

- Quando $\Delta > 0$, a função quadrática terá duas raízes reais e distintas, tocando o eixo x em dois pontos;
- Quando $\Delta = 0$, a função tocará o eixo x apenas uma vez;
- Quando $\Delta < 0$, a função não terá raízes reais, de modo que não tocará o eixo x.

Analisando a concavidade ($a > 0$, $a < 0$).

Como sabíamos que a concavidade da parábola estava voltada para cima? Graças ao coeficiente a, que nos exemplos anteriores era positivo ($a > 0$).

Observe no gráfico da Fig. 10 da página 20 como o sinal do coeficiente a afeta a concavidade da parábola.

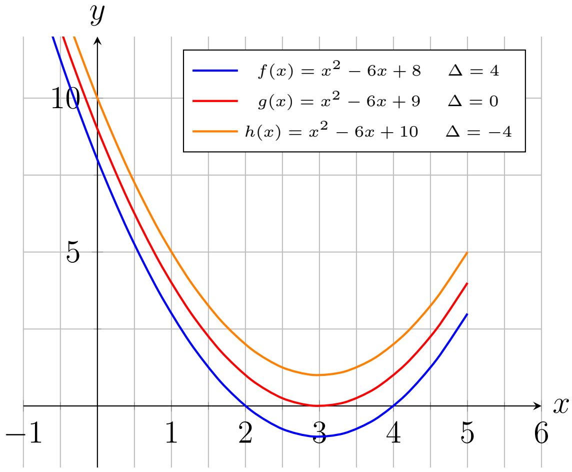


Figura 9: Comparação gráfica das funções quadráticas com diferentes valores de Δ.

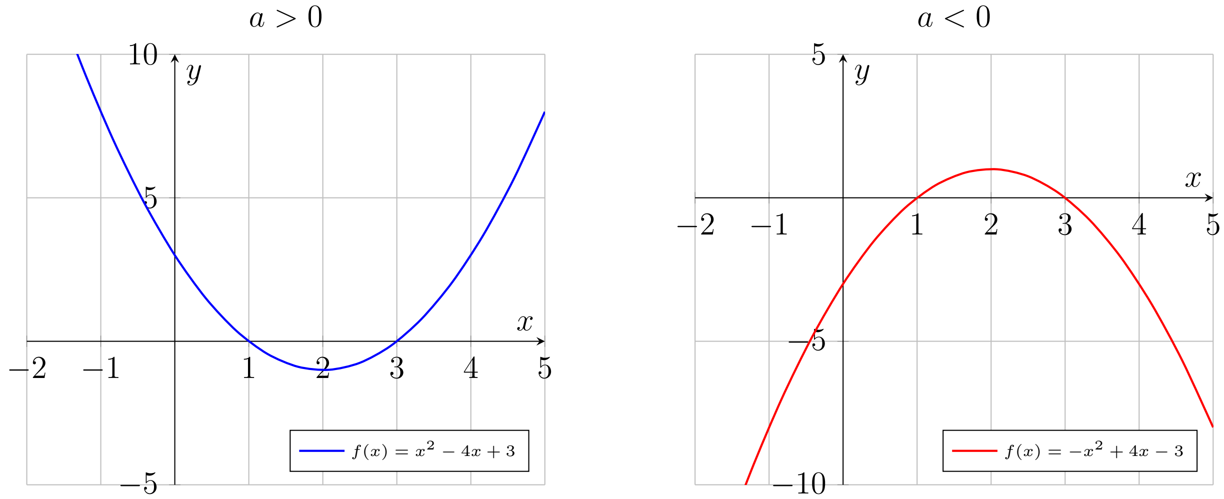


Figura 10: Comparação da concavidade: à esquerda com $a > 0$ (parábola voltada para cima) e à direita com $a < 0$ (parábola voltada para baixo).

2.3 Função polinomial

Uma função polinomial tem a forma

$$\boxed{f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} \cdots a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0, n \in \mathbb{N}} \tag{3}$$

Onde: a_n $\Longrightarrow$ termo dominante (aquele que multiplica a variável independente de maior
a_0 $\Longrightarrow$ termo independente
x $\Longrightarrow$ variável independente
$f(x) = y$ $\Longrightarrow$ variável dependente

Importante!

Preste especial atenção à definição: para que uma função seja polinomial, o expoente deve ser um número natural.

2.4 Funções racionais

Funções racionais tem a forma

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, q(x) \neq 0,\; p(x) \text{ e } q(x) \text{ são funções polinomiais} \tag{4}$$

Exemplo 2.6. Seja a função $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 1}{2x - 1}$. Recorde-se de que $2x - 1 \neq 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} 2x - 1 &\neq 0 \quad \text{(Jamais dividirás por zero!)} \\ 2x &\neq 1 \\ x &\neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exemplo 2.7. A função a seguir **não** é uma função racional, já que o numerador não é um polinômio. Observe que o expoente $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$ (lê-se *meio não pertence ao conjunto dos números naturais*).

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2+1} = \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{x^2+1}$$

2.5 Função exponencial

Relembre alguns conceitos sobre as potências:

Observe os exemplos a seguir:

- $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
- $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ (cuidado com os sinais negativos)
- $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ (como o expoente é par, o resultado é positivo)
- $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$
- $2^{-1} = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$
- $0^{-1} = \dfrac{1}{0^1} = \dfrac{1}{0}$ (Opa! Não é possível realizar a divisão por zero.)

Qualquer número elevado a uma fração pode ser escrito como uma raiz:

$$b^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{b^n}$$

Observe o que acontece quando $b < 0$.

$$(-b)^{\frac{n}{d}} = \sqrt[d]{(-b)^n}$$

Quando $b < 0$, a função não está definida para todo $\frac{n}{d} \in \mathbb{R}$. Em outras palavras, quando $b < 0$, o gráfico dessa função é cheio de buracos.

Uma função exponencial tem a forma

$$\boxed{f(x) = b^x, \text{ com } b > 0, b \neq 1} \tag{5}$$

Onde: $b \implies$ base
$x \implies$ variável independente

Observe como a variável independente (x) agora é o expoente nessa função.

2.6 Função logarítmica

Relembre!

Definição 2.1 (Logaritmo)**.** Sejam dois números a e b, ambos reais e positivos, com $b \neq 1$. Dizemos que o logaritmo de a na base b é um número c se, e somente se, b elevado a c for igual a a. Podemos escrever essa ideia matemática da seguinte forma:

$$\log_b a = c \iff b^c = a$$

Assim, o logaritmo responde a pergunta: "devo elevar a base b a qual número c para obter a?

Por exemplo, $\log_2 4 = 2 \iff 2^2 = 4$

Uma função logarítmica tem a forma

$$\boxed{f(x) = \log_b x, \text{ com } b > 0, b \neq 1} \tag{6}$$

2.7 Resolvendo exercícios

Os exercícios a seguir foram extraídos de Guidorizzi (2012).

Prática e solução 2.1. (Exercício 4 do livro) Dê o domínio da função e esboce o gráfico.

a) $f(x) = 3x$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x \\ \text{Domínio: } \mathbb{R} &\quad \text{(afim, definida para todos os reais)} \\ \text{Imagem: } \mathbb{R} &\quad \text{(sem restrições)} \end{aligned}$$

b) $g(x) = -x + 1$

$$\begin{aligned} g(x) &= -x + 1 \\ a &= -1, \quad b = 1 \\ \text{Domínio: } &\mathbb{R} \\ \text{Imagem: } &\mathbb{R} \end{aligned}$$

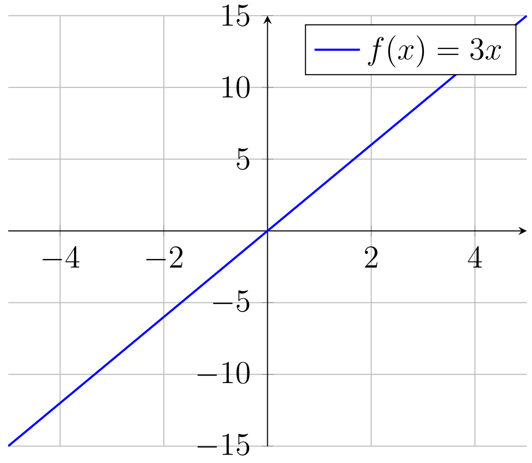


Figura 11: Função afim $f(x) = 3x$

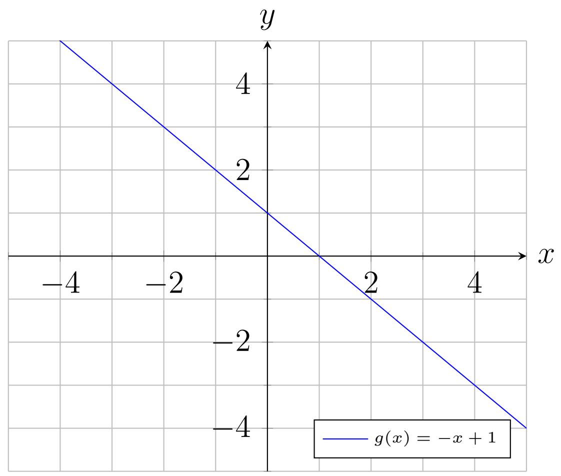


Figura 12: Função afim $g(x) = -x + 1$.

d) $f(x) = 2x + 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x + 1 \\ a &= 2, \quad b = 1 \\ \text{Domínio: } &\mathbb{R} \\ \text{Imagem: } &\mathbb{R} \end{aligned}$$

j) $g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 2 \\ 3 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

o) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

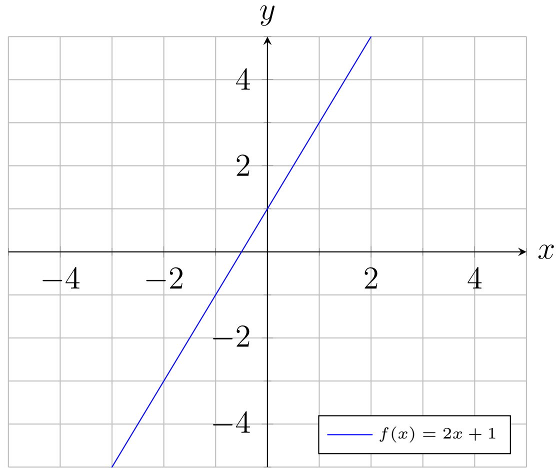


Figura 13: Função afim $f(x) = 2x + 1$.

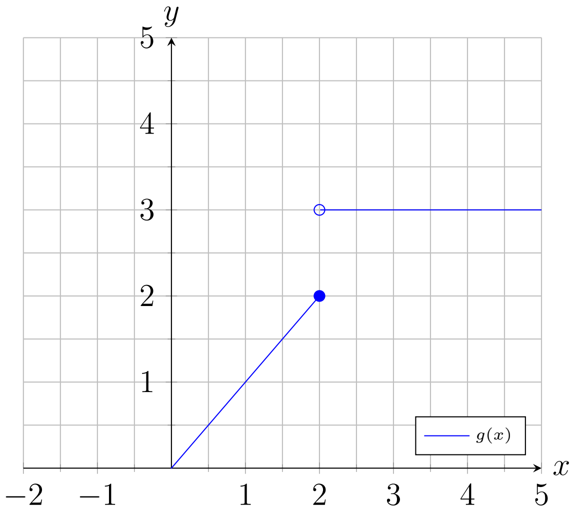


Figura 14: Função definida por partes $g(x)$.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{(Repare a diferença de quadrados no numerador)} \\
&= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} \\
&= x + 1, \quad \text{com } x \neq 1
\end{aligned}
$$

Domínio: $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Prática e solução 2.2. (Exercício 9 do livro) Determine o domínio.

e) $h(x) = \sqrt{x + 2}$

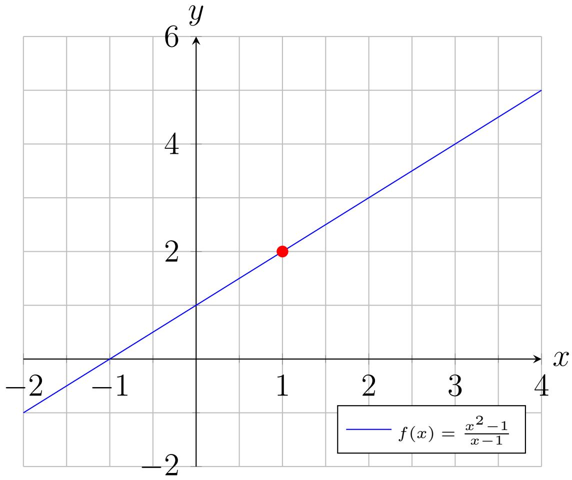
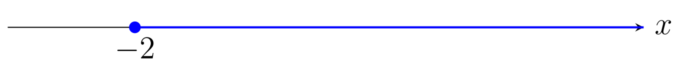


Figura 15: Função racional com um "buraco" em $x = 1$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \sqrt{x+2} \\ \text{Domínio: } & x+2 \geq 0 \\ & x \geq -2 \\ \text{Logo, Domínio: } & [-2, \infty[\end{aligned}$$

O intervalo pode ser representado também em uma reta orientada, em que $x \in \mathbb{R}$.

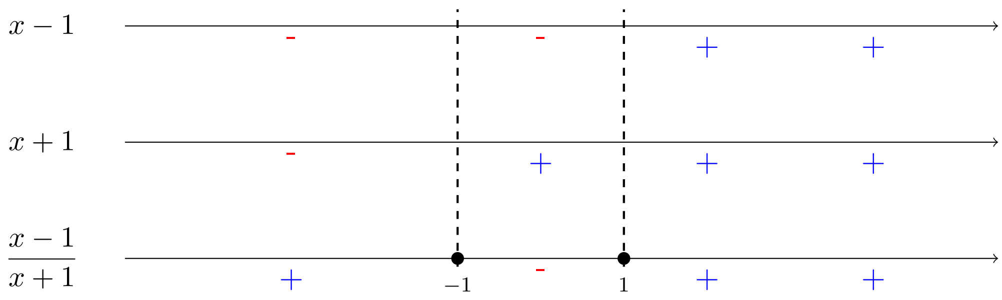


g) $y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \\ \text{Para que } y \in \mathbb{R}, \quad & \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ \text{Iremos estudar o sinal da expressão: } & \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ \text{Restrição no numerador: } & x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \\ \text{Restrição no denominador: } & x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \end{aligned}$$

Utilizaremos um recurso gráfico para analisar os sinais, popularmente conhecido como "varal de sinais" ou "varalzinho".

Nas duas primeiras linhas, analisamos cada parte da expressão, individualmente, nos pontos onde encontramos as restrições (-1 e 1). Na última linha, analisamos o sinal da expressão toda. Lembre-se: queremos o(s) intervalo(s) onde $x \geq 0$, ou seja, onde a reta não for negativa.



$$
\begin{aligned}
\text{Solução:} \quad & x \in \,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\\
\text{Domínio:} \quad &]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[
\end{aligned}
$$

3 Encontro 3 - 11 de julho de 2025

3.1 Módulo

O módulo de um número x, ou o valor absoluto de x, é graficamente representado como a distância entre x e 0 na reta dos números reais. Representamos o módulo de x por $|x|$.

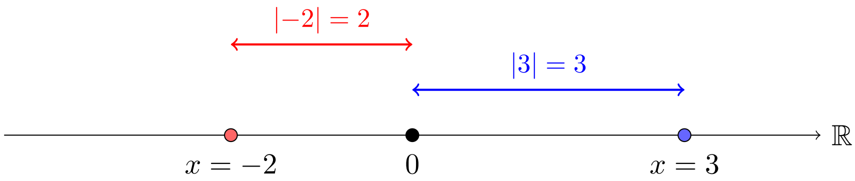


Figura 16: A distância de um número x até o zero na reta representa o valor absoluto de x, isto é, $|x|$.

Assim, podemos definir módulo da seguinte forma:

Definição 3.1 (Módulo de um número x)**.**

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ se } x \geq 0 \\ -x & , \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo 3.1. Calcule $|x-1|$. A partir da definição, temos

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x-1 \geq 0 \\ -(x-1), & \text{se } x-1 < 0 \end{cases}$$

Para cada caso, analisamos os sinais:

$$x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$
$$x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1$$

Assim, temos

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{se } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Exemplo 3.2. Calcule $|(x-2)(x-4)|$.

Para isso, é necessário analisar o sinal de cada expressão.

$$|(x-2)(x-4)| = \begin{cases} (x-2)(x-4), & \text{se } (x-2)(x-4) \geq 0 \implies x \geq ? \\ -(x-2)(x-4), & \text{se } (x-2)(x-4) < 0 \implies x < ? \end{cases}$$

Vejamos o primeiro caso:

$$(x-2)(x-4) \geq 0$$
$$\text{ou } (x-2) \geq 0 \quad , \text{ ou } (x-4) \geq 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{(Primeira parte) } x - 2 &\geq 0 \\ x &\geq 2 \\ \text{(Segunda parte) } x - 4 &\geq 0 \\ x &\geq 4 \end{aligned}$$

Observe que obtivemos os intervalos onde $(x-2)(x-4) \geq 0$ e $(x-2)(x-4) < 0$. Podemos completar nossa função:

$$|(x-2)(x-4)| = \begin{cases} (x-2)(x-4), & \text{se } (x-2)(x-4) \geq 0 \implies x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4 \\ -(x-2)(x-4), & \text{se } (x-2)(x-4) < 0 \implies 2 < x < 4 \end{cases}$$

ou, simplesmente

$$|(x-2)(x-4)| = \begin{cases} (x-2)(x-4), & \text{se } x \leq 2 \text{ ou } x \geq 4 \\ -(x-2)(x-4), & \text{se } 2 < x < 4 \end{cases}$$

Uma comparação visual entre a função $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e $|(x-2)(x-4)|$.

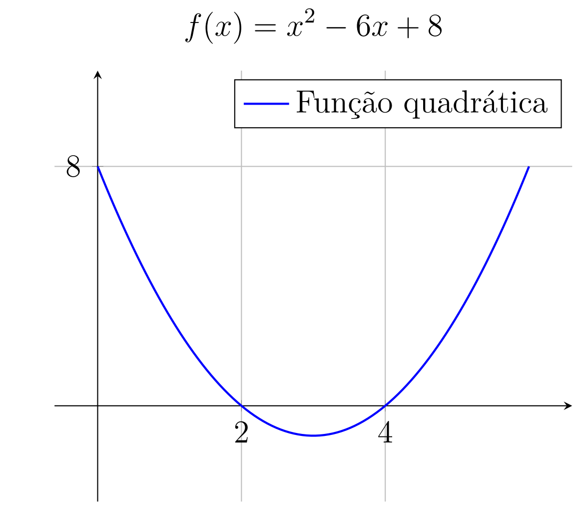
Experimente calcular $(x-2)(x-4)$. Fazendo a distributiva, teremos a mesma expressão $x^2 - 6x + 8$ do Exemplo 2.3 da página 16.

$$\begin{aligned} (x-2)(x-4) &= x^2 - 4x - 2x + 8 \\ &= x^2 - 6x + 8 \end{aligned}$$

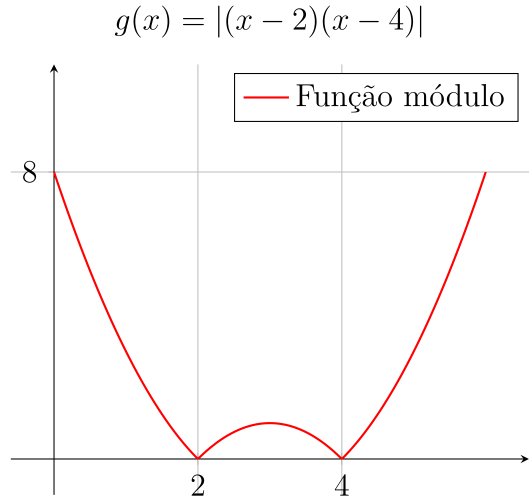
Graficamente, o que o módulo faz é refletir os valores negativos de y, como um espelho. Observe o comportamento das duas funções na Fig. 17b.

3.2 Funções compostas

A composição de funções é uma operação entre duas ou mais funções, em que a saída de uma função é a entrada da outra função.



(a) Gráfico da função original $f(x) = x^2 - 6x + 8$.



(b) Gráfico de $g(x) = |(x-2)(x-4)|$, com reflexões dos valores negativos.

Figura 17: Comparação entre a função quadrática $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e a função módulo $|(x-2)(x-4)|$. Observe que o gráfico da função com módulo reflete os valores negativos da parábola para cima, gerando uma curva sempre não negativa.

Definição 3.2 (Função composta)**.** Sejam três conjuntos A, B, C, e sejam duas funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$. Dizemos que a função $g \circ f$ é uma função de A em C.

Denotamos essa função por $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, em que $x \in A$. Lemos *"g composta f"*, ou *"g composta com f"*.

Observe, também, que $Im_f \subseteq D_g$ (lê-se *"a imagem de f é subconjunto do domínio de g"*, ou ainda *"todos os elementos que se encontram na imagem de f também se encontram no domínio de g"*).

Graficamente, podemos representar $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ da seguinte forma:

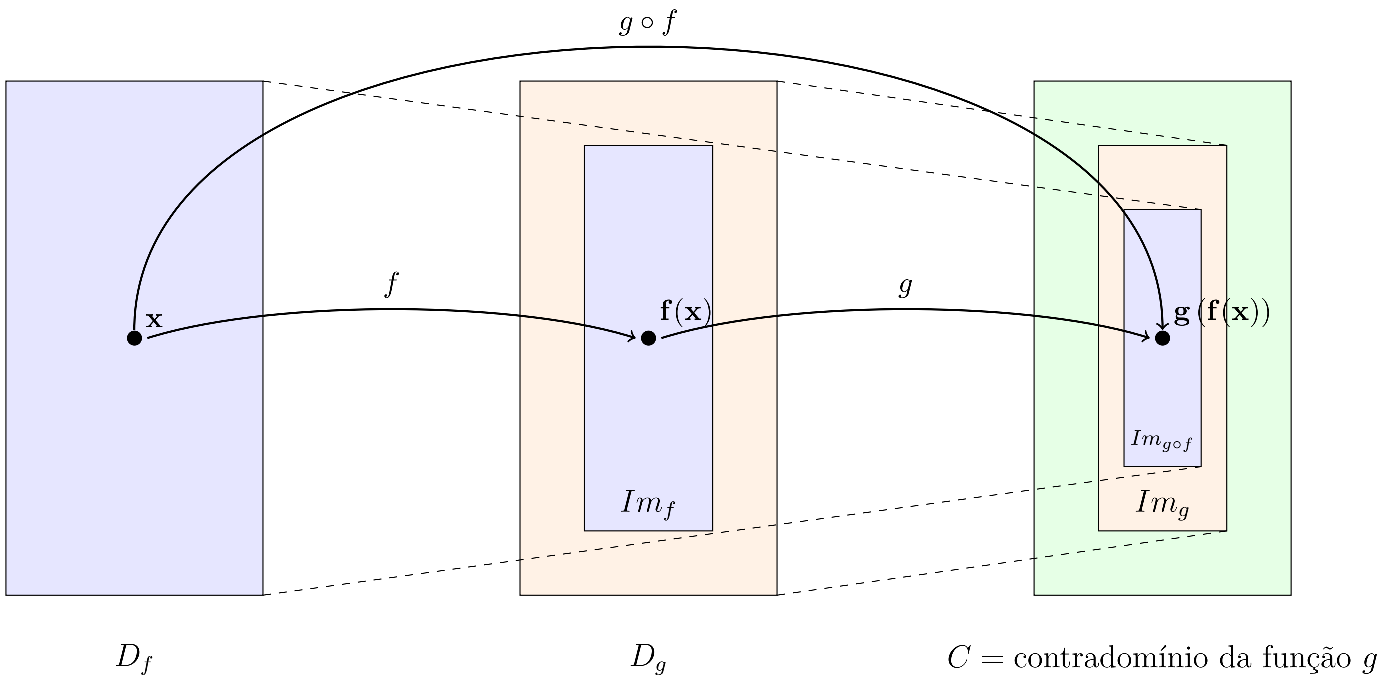


Diagrama da função $g \circ f$.

Exemplo 3.3. Sejam duas funções $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x + 1$. A função f composta com a função g, que denotamos por $(f \circ g)(x)$ ou $f(g(x))$ é $f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$.

Analogamente, a função g composta com a f denotamos $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$.

Analisando o domínio das funções compostas.

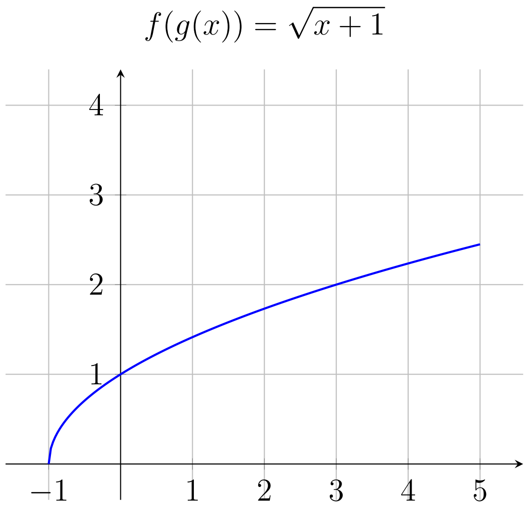
Observe que as funções do Exemplo 3.3 possuem domínios diferentes, e que Im_g, representada pelo retângulo amarelo, não está no domínio da função f. Podemos restringir o domínio de g para que $Im_g \subseteq D_f$.

$$f(x) = \sqrt{x} \implies x \geq 0$$
$$D_f = [0, +\infty[, \quad Im_f = [0, +\infty[$$

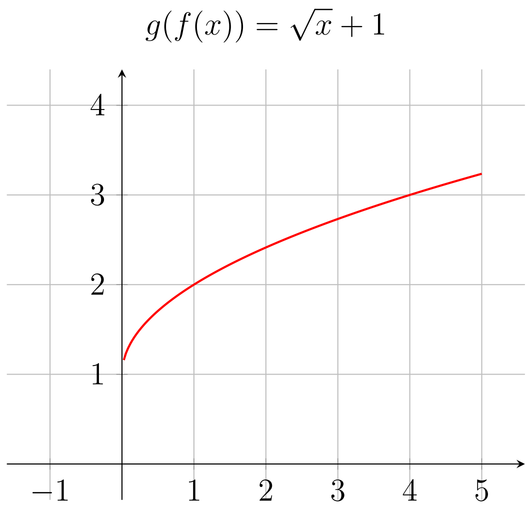
$$g(x) = x + 1$$
$$D_g = \mathbb{R}, \quad Im_g = \mathbb{R}$$

$$f(g(x)) = \sqrt{x+1} \implies x + 1 \geq 0 \implies x \geq -1$$
$$\text{Domínio de } f \circ g = [-1, +\infty[, \quad \text{Imagem de } f \circ g = [0, +\infty[$$

$$g(f(x)) = \sqrt{x} + 1 \implies x \geq 0$$
$$\text{Domínio de } g \circ f = [0, +\infty[, \quad \text{Imagem de } g \circ f = [1, +\infty[$$



(a) Gráfico da função composta $f(g(x)) = \sqrt{x+1}$. Começa em $x = -1$ com imagem em $[0, +\infty[$.



(b) Gráfico da função composta $g(f(x)) = \sqrt{x}+1$, definida em $x \geq 0$, com imagem em $[1, +\infty[$.

Figura 18: Comparação entre as funções compostas $f(g(x)) = \sqrt{x+1}$ e $g(f(x)) = \sqrt{x} + 1$. Embora ambas sejam crescentes e indefinidas para certos valores, $f(g(x))$ começa em 0 e $g(f(x))$ começa em 1.

3.3 Revisão de conceitos de geometria analítica

A distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Relembre!

O plano cartesiano é um conjunto de pares ordenados, e os pares ordenados nos dão os endereços desses pontos.

Considere os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ no plano cartesiano abaixo. Qual a distância entre os pontos A e B indicada pela reta D?

Podemos calcular a distância D usando o teorema de Pitágoras.

Cálculo da distância entre dois pontos em um plano.

$$\begin{aligned}
D^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad \text{(aplicando o teorema de Pitágoras)} \\
\sqrt[\cancel{2}]{D^{\cancel{2}}} &= \pm\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{(Extraímos a raiz de ambos os lados)} \\
D &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad \square
\end{aligned}$$

É comum denotarmos a distância D por $d(A, B)$ nos livros. Assim, vamos usar $d(A, B)$ quando nos referirmos a distância entre dois pontos, da seguinte forma:

$$\boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \tag{7}$$

Importante!

Perceba que a distância é sempre maior ou igual a zero. Não faria sentido termos uma distância negativa entre dois pontos, no nosso contexto.

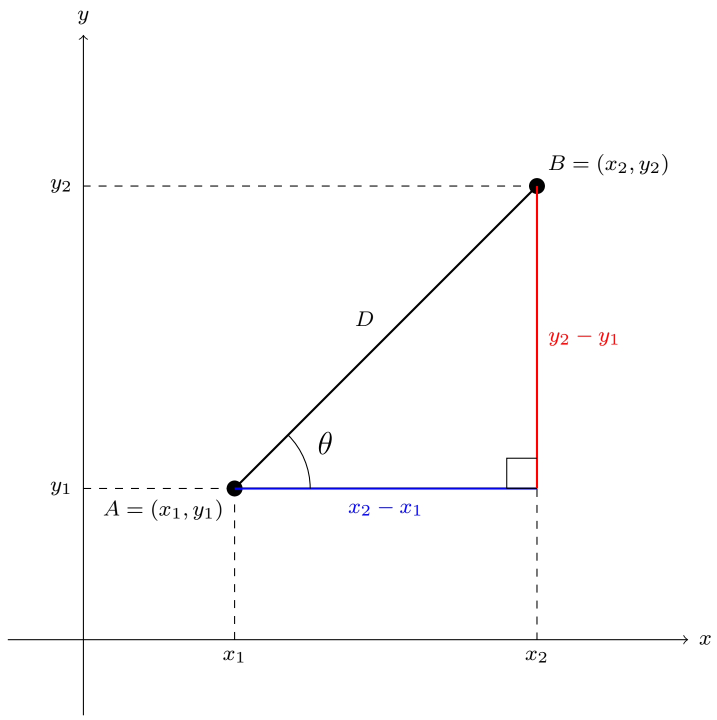


Figura 19: Calculando a distância entre dois pontos no plano.

Calculando a inclinação da reta

Observe, a partir da Fig. 19, que se formou um ângulo θ entre os lados $(x_2 - x_1)$ e a reta D. Já sabemos calcular essa inclinação (veja Pág. 14). Basta calcularmos a tangente do ângulo $(\tan\theta)$. Podemos generalizar e calcular a inclinação para quaisquer pontos x e y, da seguinte forma:

A equação da reta.

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$
$$\tan\theta = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$
$$\tan\theta = \frac{y - y_0}{x - x_0} = m \quad \text{(onde } m \text{ é o coeficiente angular)}$$

Podemos reorganizar a equação para a forma que geralmente encontramos nos livros de matemática:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m$$
$$\boxed{y - y_0 = m(x - x_0)} \qquad \square$$

A distância entre qualquer ponto no plano e o centro de uma circunferência.

Agora, e se quisermos calcular a distância entre o centro e um ponto P sobre a linha de uma circunferência?

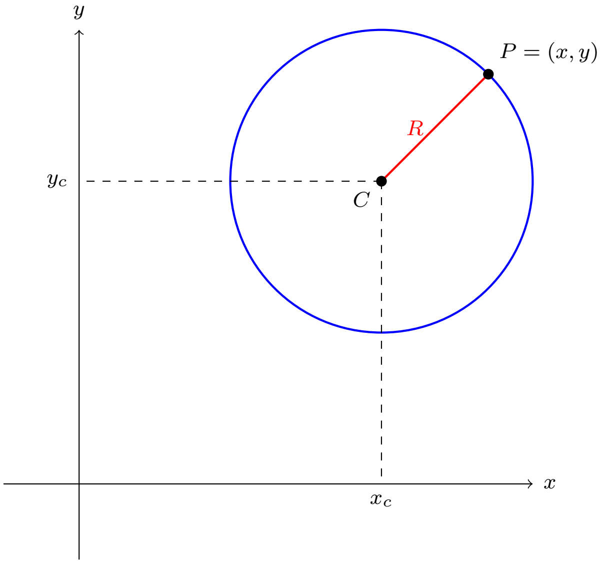


Figura 20: Circunferência com centro C e ponto P sobre sua borda. A reta R representa o raio entre C e P.

Importante!

Algumas coisas a considerar sobre a Fig. 20:

1. O ponto P está sobre o contorno da circunferência, destacada em azul;
2. A medida entre o centro e o contorno da circunferência tem raio R;
3. O valor do raio R é o mesmo do centro a qualquer ponto do contorno;

Isso significa que podemos calcular a distância entre o centro C e qualquer ponto P que se encontre no contorno da circunferência. Isto é, podemos calcular para qualquer $P = (x, y)$.

A distância entre o centro e um ponto P qualquer .

$$d(P, C) = R = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$R^2 = \left(\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}\right)^2 \quad \text{(Eleve os dois lados ao quadrado para simplificar a raiz)}$$

$$\boxed{R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

□

Exemplo 3.4. Seja $C = (1, 2)$ o centro de uma circunferência de raio $R = 2$. A equação dessa circunferência é

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

$$2^2 = (x - x_1)^2 + (y - 2)^2 \quad \text{(Substitua } x_1 = 1 \text{ e } y_1 = 2\text{)}$$

$$4 = (x - x_1)^2 + (y - 2)^2$$

Com essa expressão podemos desenhar o círculo da Fig. 21.

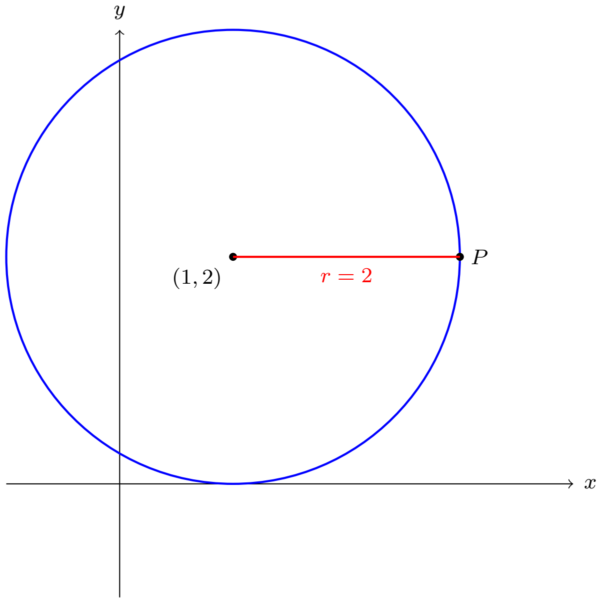
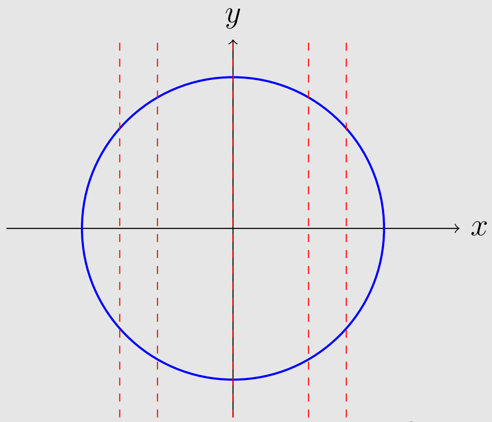


Figura 21: A curva em azul representa a circunferência dada por $4 = (y-2)^2 + (x-1)^2$, com centro em $(1, 2)$ e raio $r = 2$.

Importante!

A equação $R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$ é uma função? **Não!**

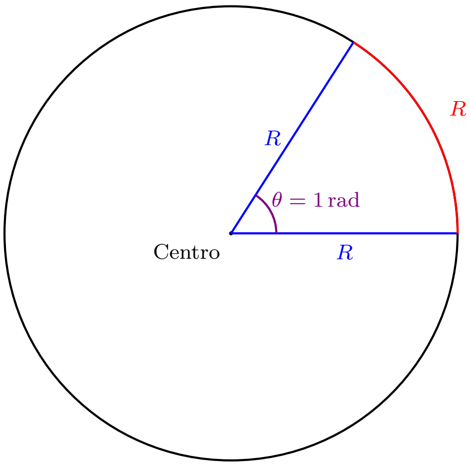
Lembre-se de que uma condição necessária para termos uma função é que, para cada x em um conjunto A, exista apenas um y em um conjunto B. Chamamos isso de "critério de unicidade". Contudo, em um círculo encontramos um mesmo x relacionado a mais de um y. Isso fica mais evidente ao traçarmos retas paralelas ao eixo x.



Não é uma função! Observe como um x possui mais de um y relacionado, ferindo a condição de unicidade.

3.4 Revisão de outros conceitos de trigonometria

O que é um radiano (rad)? Considere a circunferência abaixo.

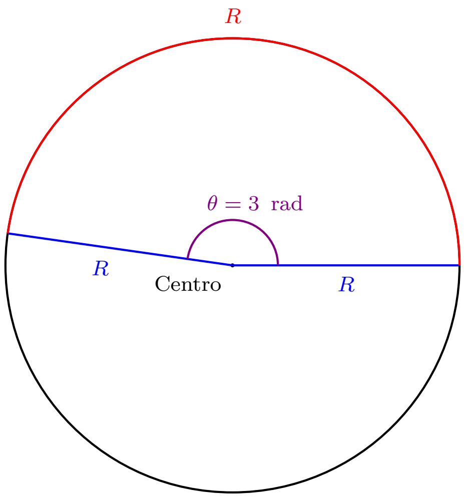


Definição 3.3 (Radiano)**.** Um radiano é a medida do ângulo central que gera um arco de circunferência (R) com comprimento igual ao raio da circunferência (R).

Trabalhamos com números em radianos porque eles são muito convenientes e facilitam cálculos.

Quantos radianos há em uma circunferência?

Imagine uma linha com comprimento R, e tente dispô-la sobre o contorno da circunferência. Você perceberá que caberão três linhas com comprimento R e ainda faltará um pedaço para cobrir metade da circunferência.



O comprimento do pedaço que falta é algo muito próximo de $R \cdot 0,141592...$ Isso acontece porque o número de arcos com o mesmo tamanho do raio que completam essa metade da circunferência é um número irracional, que chamamos de π (lê-se *"pi"*).

$$\pi \approx 3,141592653...(\text{ lê-se } \textit{"pi é aproximadamente três vírgula quatorze..."})$$

Ou seja, em metade de uma circunferência há $\pi\, rad$. Em uma circunferência completa há $2\pi\, rad$.

Observe que para calcularmos quantos arcos cabiam na circunferência contamos $R \cdot \pi$ arcos. É daí que vem a fórmula do comprimento da circunferência:

$$\boxed{C = 2\pi R}$$

Onde: $C \implies$ comprimento da circunferência completa
$2\pi \implies$ em radianos, o ângulo completo da circunferência
$R \implies$ o raio da circunferência

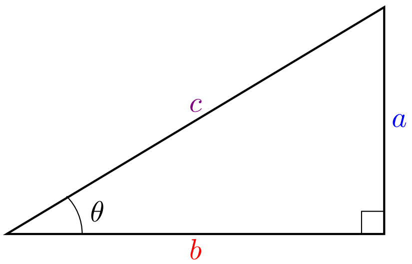
Para calcularmos qualquer comprimento de arco, calculamos

$$\boxed{S = \theta \cdot R}$$

Onde: $S \implies$ comprimento do arco
$\theta \implies$ ângulo, em radianos
$R \implies$ raio da circunferência

Funções trigonométricas.

Considere o triângulo retângulo a seguir. Um triângulo retângulo é aquele que possui um de seus ângulos igual a 90°.



Onde: $b \implies$ cateto adjacente ao ângulo θ
$a \implies$ cateto oposto ao ângulo θ
$c \implies$ hipotenusa

A partir do triângulo podemos encontrar as seguintes relações trigonométricas:

$$\boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}} \tag{8}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}} \tag{9}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}} \tag{10}$$

Mostrando que $\tan\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} &= \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} \\
&= \frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b} \quad \text{(Dividir por fração é multiplicar pelo inverso)} \\
&= \frac{a}{\cancel{c}}\cdot\frac{\cancel{c}}{b} \quad \text{(Simplifique } \frac{c}{c} = 1\text{)} \\
&= \frac{a}{b} = \tan\theta
\end{aligned}
$$

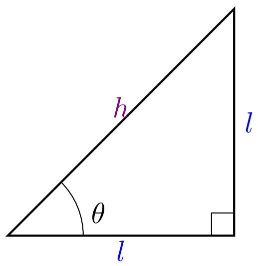
□

A partir do triângulo retângulo da Pág. 37, cujos lados são iguais, também podemos encontrar valores para alguns ângulos notáveis.

Exemplo 3.5. Demonstre ângulos notáveis (30°, 45°, 60°).

Considerando que um triângulo retângulo tem um dos ângulos igual a 90° graus, e que o triângulo todo possui 180° graus, então:

$$\theta = \frac{180 - 90}{2} = 45° = \frac{\pi}{4}$$



Assim, podemos dizer que

$$\tan(\theta) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{l}{l} = 1$$

Também podemos encontrar que

$$
\begin{aligned}
h^2 &= l^2 + l^2 \quad \text{(Teorema de Pitágoras)} \\
h^2 &= 2\cdot l^2 \\
h &= \sqrt{2\cdot l^2} \quad \text{(Tiramos a raiz dos dois lados)} \\
h &= \sqrt{2}\cdot\sqrt{l^2} \quad \text{(Reescrevemos o produto de duas raízes)} \\
h &= \sqrt{2}\cdot\sqrt[\cancel{2}]{l^{\cancel{2}}} \quad \text{(Simplificamos } \sqrt{l^2}\text{)} \\
h &= l\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

E agora podemos encontrar

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{l}{l\sqrt{2}} \\
&= \frac{l}{l\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad \text{(Racionalizamos)} \\
&= \frac{\cancel{l}}{\cancel{l}\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Observe que o mesmo serve para $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3.5 Resolvendo exercícios

Prática e solução 3.1. Exercício 2 do livro. Simplifique $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, $(x \neq p)$ sendo dados:

j) $f(x) = \frac{1}{x}$ e p qualquer

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{x} \\
f(p) &= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(p)}{x-p} &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{p}}{x-p} \\
&= \frac{\frac{p-x}{xp}}{x-p} \quad \left(\text{Tire mmc ou use a multiplicação esperta } \frac{x}{x} = \frac{p}{p} = 1\right) \\
&= \frac{-x+p}{xp} \cdot \frac{1}{(x-p)} \quad \text{(Divisão de fração: multiplique pelo inverso)} \\
&= \frac{-1(x-p)}{xp(x-p)} \quad (\text{Repare: } -x+p = (-1)(x-p)) \\
&= \frac{-1\cancel{(x-p)}}{xp\cancel{(x-p)}} \quad \left(\text{Simplificando } \frac{x-p}{x-p}\right) \\
&= -\frac{1}{xp} \quad (\text{para } x \neq p)
\end{aligned}$$

4 Encontro 4 - 14 de julho de 2025

4.1 Continuidade de funções

Intuitivamente, uma função contínua é aquela cujo gráfico pode ser desenhado sem tirar o lápis do papel. Observe as Fig. abaixo

[Gráfico aqui...]

Considere *vizinhança* o intervalo aberto ao redor do ponto $f(p)$.

Analisando a): no ponto x, veja que sua imagem ($f(x)$) está dentro da vizinhança do ponto $f(p)$. Isso vale para qualquer x na vizinhança do ponto p. Ou seja, dentro da vizinhança de $f(p)$ existe uma vizinhança de p, para a qual x dentro desse intervalo possui $f(x)$. Dizemos, então, que essa função é contínua.

Analisando b): o mesmo não ocorre no gráfico da função g. Dizemos que essa função não é contínua.

Perceba, assim, que o **conceito de limite em um ponto é um conceito local**, já que depende de um intervalo, que costumamos chamar *vizinhança*.

Relembre!

Propriedade do módulo:

$$|x| < r \iff -r < x < r$$

Definição 4.1 (Função contínua)**.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, tal que $|x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon$, então a função f será contínua.

Exemplo 4.1. Sabendo $|x-p| < \delta \implies |f(x)-f(p)| < \epsilon$, mostre que $f(x) = 2x+1$ é contínua para qualquer p. Partindo da definição 4.1 de continuidade, queremos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| < \epsilon$$

Começamos pela segunda parte da expressão, observando que $f(x) = 2x+1 \quad \text{e} \quad f(p) = 2p + 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(p)| < \epsilon &\implies |(2x + 1) - (2p + 1)| < \epsilon \\
&\implies |(2x + 1) - (2p + 1)| < \epsilon \quad \text{(Substituímos a função)} \\
&\implies |2x + 1 - 2p - 1| < \epsilon \\
&\implies |2x - 2p| < \epsilon \quad \text{(Colocamos 2 em evidência)} \\
&\implies |2| \cdot |x - p| < \epsilon \quad \text{(Propriedade do módulo)} \\
&\implies |x - p| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{(Sabemos que)}|2| = 2
\end{aligned}$$

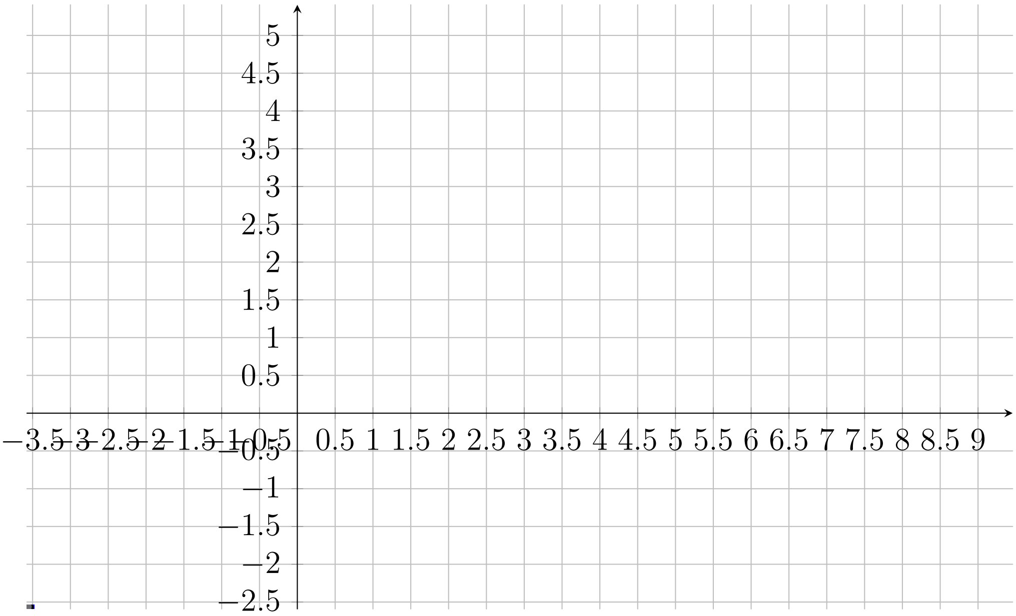
Assim, temos:

$$|x-p|<\delta \implies |x-p|<\frac{\epsilon}{2}$$

Em outras palavras, $\delta = \dfrac{\epsilon}{2}$

Mostramos que existe um $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ que satisfaz a condição da definição de continuidade.

Logo, a função $f(x) = 2x + 1$ é contínua em todo ponto $p \in \mathbb{R}$.



Aproximações pela esquerda ou direita de um ponto x

Considere, novamente, os dois gráficos da Fig. abaixo.

[Gráficos aqui...]

Observe na Fig. b) que após o ponto p, x não possui uma imagem associada na vizinhança do ponto $f(p)$. Sabemos que essa função é descontínua, pois apresenta um salto no gráfico.

Esse salto é mais sutil no gráfico da Fig. c). Perceba que existe uma descontinuidade no ponto $(p, f(p))$, ainda que $p \in D_f$.

Importante!

Continuidade em um ponto p só faz sentido se $p \in D_f$.

Na Fig. c), $p \in D_f$. Contudo, $f(p) \notin [\epsilon - f(p), f(p) + \epsilon]$. Em outras palavras, $f(p)$ **está** definida para p, ainda que o valor que esperássemos não seja o mesmo.

Por outro lado, na Fig. d) $p \notin D_f$. Assim, não faz sentido questionarmos se essa função é contínua.

Resumo de funções contínuas

Assim, as seguintes funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ abaixo são contínuas:

Tabela 2: Resumo de funções contínuas.

Função	Exemplos
Constantes	$f(x) = K, K \in \mathbb{R}$
Polinomiais	$f(x) = mx + b,\ f(x) = ax^2 + bx + c$
Racionais	$f(x) = \dfrac{p(x)}{s(x)}$
Raízes	$f(x) = \sqrt[3]{x},\ f(x) = \sqrt{x+1}$
Exponenciais	$f(x) = b^x$
Logarítmicas	$f(x) = \log x$
Trigonométricas	$f(x) = \operatorname{sen} x,\ f(x) = \cos x$

4.2 Limites de funções

Observe o gráfico da Fig. a) abaixo. Perceba como, à medida em que nos aproximamos de p, pela esquerda ou direita, $f(x)$ se aproxima de $f(p) = L$. Denotamos essa ideia por $x \to p$ (lê-se "x tende a p").

Já no gráfico da Fig. b), vemos que quando $x \to p$, $f(x)$ tende a um valor L do gráfico, e a imagem de p é $f(p)$.

Por fim, no gráfico da Fig. c), vemos que $p \notin D_f$. Contudo, quando $x \to p$ pela esquerda ou direita, $f(x)$ continua se aproximando do ponto L.

Denotamos o limite L de x tendendo a p da função f por

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

Definição 4.2 (Limite de uma função)**.** Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. O limite de uma função em que $x \in D_f$ e $x \to p$ é L se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$ existir $\delta > 0$, tal que $|x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$.

Saiba mais!

Uma ferramenta útil para a fatoração é o Triângulo de Pascal, abaixo segue a forma de construí-lo e utilizá-lo. Também incluo algumas fatorações que poderão ser úteis ao longo do curso e na resolução de exercícios.

Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal pode ser representado como um triângulo retângulo da seguinte forma:

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
1 & 4+ & 6 & 4 & 1 & & & \\
 & & || & & & & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Como construir o Triângulo de Pascal

- A primeira coluna e a diagonal principal contêm apenas o número 1.
- Cada elemento interno é a soma do elemento acima dele com o elemento à esquerda do elemento acima. Note os números destacados em vermelho e que $4 + 6 = 10$

Conexão com Potências Binomiais

Os coeficientes das expansões binomiais correspondem às linhas do Triângulo de Pascal:

Quadrado de um binômio

$$(a+b)^2 = \boxed{1}a^2 + \boxed{2}ab + \boxed{1}b^2$$

Corresponde à 3ª linha do triângulo: $1, 2, 1$.

A expansão de $(a-b)^2$ seria:

$$(a-b)^2 = 1a^2 - 2ab + 1b^2$$

que usa os coeficientes da 3ª linha com sinais alternados.

Cubo de um binômio

$$(a+b)^3 = \boxed{1}a^3 + \boxed{3}a^2b + \boxed{3}ab^2 + \boxed{1}b^3$$

Corresponde à 4ª linha do triângulo: $1, 3, 3, 1$.

A expansão de $(a-b)^3$ seria:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

que usa os coeficientes da 4ª linha com sinais alternados.

Quarta potência de um binômio

$$(a+b)^4 = \boxed{1}a^4 + \boxed{4}a^3b + \boxed{6}a^2b^2 + \boxed{4}ab^3 + \boxed{1}b^4$$

Corresponde à 5ª linha do triângulo: $1, 4, 6, 4, 1$.

A expansão de $(a-b)^4$ seria:

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

usando os coeficientes da 5ª linha com sinais alternados.

Outras fatorações importantes

Diferença de Quadrados

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Diferença de Cubos

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Quarta Diferença

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

É importante notar que no lado direito da igualdade e nas expressões do segundo fator, a potência do a começa em grau uma unidade menor, por exemplo, ser for uma diferença de termos elevados à quarta ($a^4 - b^4$), teremos o inicío em a^3 e a potência do b inicia em zero e, enquanto a potência do a decresce, a do b cresce, observe

$$a^3b^0 + a^2b^1 + a^1b^2 + a^0b^3 = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$$

Este raciocínio se aplica às demais diferenças entre potências de expoentes iguais.

4.3 Resolvendo exercícios

5 Encontro 5 - 15 de julho de 2025

5.1 Derivadas

Definição 5.1 (Derivada de uma função)**.** Seja f uma função e $p \in D_f$. A derivada de f, denotada por $f'(x)$, quando $x \to p$ é

$$\boxed{f'(p) = \lim_{x \to p} f(p) = \frac{f(x) - f(p)}{x - p}} \tag{11}$$

Ou ainda,

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} f(p) = \frac{f(p-h) - f(p)}{h} \tag{12}$$

A derivada como um limite

Exemplo 5.1. Seja a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 2$. Calcule a derivada $f'(x)$.

Exemplo 5.2. Seja $f(x) = 2x + 1$. Calcule a derivada de f.

Exemplo 5.3. Seja $f(x) = x^2$. Calcule a derivada de f.

Exemplo 5.4. Seja $f(x) = x^3$. Calcule a derivada de f.

A função derivada será $f'(x) = 2x\ 2 + 2x$, $x \in D'_f \subseteq D_f$.

A equação da reta.

Relembre!

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Substituindo os valores, temos

Revisão

Gabriel, na linha 3 da equação mantive y. Acha melhor explicar as diferentes notações de derivada, primeiro? Vi que o Guidorizzi só vai comentar sobre $\dfrac{dy}{dx}$ bem mais pra frente (e eu ainda não domino a notação).

$$\begin{aligned} & y - y_0 = m(x - x_0) \\ \text{em que} \quad & y_0 = f(p) \quad x_0 = p \\ & y - f(p) = m(x - p) \quad \text{(Veja que } m \text{ é a reta tangente em } p\text{)} \\ & \frac{y - f(p)}{x - p} = m \end{aligned}$$

A equação reduzida da reta.

Pela definição 5.1 de derivada, a equação acima é a reta tangente no ponto $(p, f(p))$. Isto é, a derivada de f no ponto p é:

$$f'(x) = m = \frac{y - f(p)}{x - p}$$

ou, simplesmente

$$f'(x) = \frac{y - f(p)}{x - p}$$

A partir disso, vemos que a equação da reta no ponto $(p, f(p))$ pode ser reescrita assim

$$f'(x) = \frac{y - f(p)}{x - p}$$

$$\boxed{y - f(p) = f'(x) \cdot (x - p)}$$

Exemplo 5.5. Determine a equação reduzida da reta tangente a $f(x) = x^2$ em $p = 3$.

Regras de derivação

Após resolver inúmeros problemas de derivadas, a comunidade de matemáticos desenvolveu regras de derivação úteis para os exercícios a seguir.

Cada uma das regras de derivação pode ser demonstrada. Como não é o intuito do curso, demonstra-se a regra da derivada da soma de duas funções.

A derivada da soma de duas funções. Sejam f e g funções deriváveis em $p \in \mathbb{R}$, e definimos $h(x) = f(x) + g(x)$. Vamos provar que:

$$h'(p) = f'(p) + g'(p)$$

Usamos a definição de derivada:

$$\begin{aligned}
h'(p) &= \lim_{x \to p} \frac{h(x) - h(p)}{x - p} \quad \text{(Substituindo } h(x) = f(x) + g(x)\text{)} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{[f(x) + g(x)] - [f(p) + g(p)]}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{[f(x) - f(p)] + [g(x) - g(p)]}{x - p} \\
&= \lim_{x \to p} \left(\frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \right) \quad \text{(Propriedade dos limites)} \\
&= \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} + \lim_{x \to p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \\
&= f'(p) + g'(p)
\end{aligned}$$

□

Conclusão: A derivada da soma é a soma das derivadas:

$$\boxed{(f+g)'(p) = f'(p) + g'(p)}$$

Tabela de derivação

Tabela 3: Regras comuns de derivação

Regra	**Expressão Matemática**
Soma	$[f(x)+g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
Subtração	$[f(x)-g(x)]' = f'(x) - g'(x)$
Produto	$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Quociente	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

Lista de derivação

Incluímos outros recursos na nossa caixa de ferramentas matemáticas para derivação:

Tabela 4: Principais Regras de Derivação

Função	**Derivada**
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = c$ (constante)	$f'(x) = 0$
$f(x) = a \cdot x$	$f'(x) = a$
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$
$f(x) = \tan x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}$

5.2 Resolvendo Exercícios

6 Encontro 6 - 16 de julho de 2025

6.1 Regra da Cadeia

6.2 Propriedades das derivadas e estudo da variação de funções

6.3 Resolvendo Exercícios

Saiba mais!

O Teorema do Valor Médio (TVM)

Quando a função cresce ou decresce.

Pontos de máximo e de mínimo local

7 Encontro 7 - 17 de julho de 2025

7.1 Integrais

Primitivas

Tabela 5: Primitivas Imediatas

Função	**Integral**
$\int x^\alpha \, dx$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k,\ \alpha \neq -1$
$\int x^{-1} \, dx$	$\ln \lvert x \rvert + k$
$\int a \cdot f(x) \, dx$	$a \cdot \int f(x) \, dx$
$\int \operatorname{sen} x \, dx$	$-\cos x + k$
$\int \cos x \, dx$	$\operatorname{sen} x + k$
$\int \sec^2 x \, dx$	$\tan x + k$
$\int e^x \, dx$	$e^x + k$
$\int \ln x \, dx$	$x \ln x - x + k$

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC)

Teorema 7.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.**

Propriedades das integrais

Tabela 6: Propriedades das Integrais

Propriedade	**Expressão**
Linearidade (soma)	$\int [f(x) + g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$
Linearidade (constante)	$\int a \cdot f(x) \, dx = a \cdot \int f(x) \, dx$
Subtração	$\int [f(x) - g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx - \int g(x) \, dx$
Intervalo nulo	$\int_a^a f(x) \, dx = 0$
Troca de limites	$\int_a^b f(x) \, dx = -\int_b^a f(x) \, dx$
Adição de intervalos	$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$

7.2 Técnicas de integração

7.3 Resolvendo Exercícios

8 Encontro 8 - 18 de julho de 2025

8.1 Continuação das técnicas de integração

8.2 Aplicações práticas das integrais

8.3 Resolvendo Exercícios

Referências

[1] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um curso de cálculo volume I*. Ltc-Livros Tecnicos E Cientificos Editora Lda, 28 de set. de 2012. ISBN: 978-85-216-2244-4.