

仅在一一点连续的函数例子

15110840001 陈智鹏

October 27, 2015

在一元微积分中, 有一个广为人知的结论: 一元函数在一点可导, 必在该点连续, 即可导必连续。

自然会有这样一个问题:

一元函数在一点可导能否推出它在该点的一个小邻域连续呢?

这个想法是很自然的, 不严格的思考可能会认为应该是对的, 但是它并不成立。下面给出一个反例:

$$f(x) = x^2 D(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数。

容易验证函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 但在 $x \neq 0$ 处不连续。即否定了上述问题。

最后, 类似地, 我们还可以通过 Dirichlet 函数构造 \mathbb{R} 上一些仅在有限个点连续的函数。也可以通过周期函数构造仅在所有整数点连续的函数。但是由 Baire 纲定理可以证明, 不存在在所有有理数点连续, 无理点间断的函数。最后 Riemann 函数给出了一个在所有有理数点间断, 无理点连续的函数。这些反例使得人们对函数连续的概念有了更感性的认识。