



Pontificia Universidad Católica de Chile  
Departamento de Estadística  
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana  
Ayudante: Daniel Acuña León

**Ayudantía 4**  
**EYP2805 - Métodos Bayesianos**  
**5 de Septiembre**

1. Sea  $\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\theta} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  una observación con distribución *Normal Multivariada* de dimensión  $p$ , que tiene como *pdf*

$$p(\mathbf{y}_i|\boldsymbol{\theta}, \Sigma) = (2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta})^T \Sigma^{-1} (\mathbf{y}_i - \boldsymbol{\theta}) \right\}$$

Proponga una distribución a priori conjugada para  $\boldsymbol{\theta}$  y calcule su distribución a posteriori para una muestra  $i = 1, \dots, n$ .

2. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución  $Poisson(\theta)$ , con  $\Theta = (0, \infty)$  y  $\mathcal{A} = [0, \infty)$ , función de pérdida  $L(\theta, a) = (\theta - a)^2$  y reglas de decisión de la forma  $\delta_c(x) = cx$ . Asuma que  $\pi(\theta) = e^{-\theta}$ .
- Calcule  $\rho(\pi, a)$  y encuentre la acción de Bayes.
  - Encuentre  $R(\theta, \delta_c)$ .
  - Muestre que  $\delta_c$  es inadmisibles para  $c > 1$ .
  - Encuentre  $r(\pi, \delta_c)$ .
  - Encuentre el valor de  $c$  que minimiza  $r(\pi, \delta_c)$ .
3. Suponga que la distribución a posteriori de  $\theta$ ,  $p(\theta|x)$  es discreta con soporte  $\theta_1, \theta_2, \dots$ . Muestre que la regla de Bayes bajo función de pérdida 0 – 1 es la moda a posteriori.
4. Considere el modelo Bayesiano con verosimilitud  $p(\mathbf{y}|\theta)$  y distribución a priori  $p(\theta)$ , para  $\theta \in \Theta$ . Se propone estimar  $\theta$  mediante  $a$  con una función de pérdida  $L(\theta, a) = b(\theta)(\theta - a)^2$ , con  $b(\theta)$  no negativa. Encuentre el estimador Bayesiano para la función de pérdida descrita. ¿Qué condiciones debe cumplir para la existencia de dicho estimador?