Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 2
EYP2805 - Métodos Bayesianos
24 de Agosto

1. La idea detrás del cálculo numérico de un intervalo HPD (*Highest Posterior Density*), en una situación donde $\pi(\theta|\boldsymbol{x})$ sea continua en θ es la siguiente:

   a) Crear una función que dado k, encuentre todas las soluciones de la ecuación $\pi(\theta|\boldsymbol{x}) = k$. Notar que si la distribución a posteriori es unimodal se obtendrá un intervalo $C(k) = (\theta_1(k), \theta_2(k))$.

   b) Crear una función que calcule

   $$P(\theta \in C(k)) = \int_{C(k)} \pi(\theta|\boldsymbol{x}) d\theta$$

   c) Resolver numéricamente la ecuación

   $$P(\theta \in C(k)) = 1 - \alpha$$

   Haga un esbozo de como sería una implementación en R. ¿Que diferencia existe con usar la función `quantile()`? Compare su idea con la implementación de `HPDinterval()` del paquete `coda`.

2. Una caja contiene inicialmente r fichas rojas y v fichas verdes (para efectos de este problema, imaginaremos que r, v son numeros reales positivos, pero no necesariamente enteros). Se realiza el siguiente experimento en etapas: se extrae una ficha al azar de la caja, se observa su color, y se devuelve junto con 1 ficha mas del mismo color. En la segunda etapa, se vuelve a seleccionar una ficha al azar, se observa su color, y se devuelve junto con otra ficha mas del mismo color. Suponga que en total se ejecutan n etapas de este experimento. Denote por X_k el color que se obtuvo en la k-esima etapa del experimento, $k = 1, \ldots, n$.

   a) Encuentre la distribución conjunta de $X_1, \ldots, X_n$ y demuestre que es permutable.

   b) Demuestre que el resultado anterior sigue siendo válido si ahora en cada etapa del experimento se agregan $s > 0$ fichas del mismo color observado en vez de una.

   c) Pruebe que para $r = v = s = 1$ se tiene que

   $$P(X_1 = \ldots = X_k = \text{rojo}, X_{k+1} = \ldots = X_n = \text{verde}) = \int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{n-k} \, d\theta$$

   y concluya que la distribución $Q(\theta)$ en el Teorema de de Finetti es $U(0, 1)$.

d) Pruebe ahora que en el caso general la distribución $Q(\theta)$ en el Teorema de de Finetti es $Beta(r/s, v/s)$.

3. Sea X una variable aleatoria discreta. X distribuye *Conway-Maxwell-Poisson* (*COM-Poisson*) si:

$$P(X = x|\lambda, \nu) = \frac{\lambda^x}{(x!)^\nu} \cdot \frac{1}{Z(\lambda, \nu)}$$

donde

$$Z(\lambda, \nu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i!)^\nu}$$

a) Obtenga las ditribuciones correspondientes cuando (i) $\nu = 0$ y $\lambda < 1$ y (ii) $\nu = 1$.

b) Calcule la verosimilitud para una muestra aleatoria $X_1, \ldots, X_n$ distribuidas *COM-Poisson*.

c) A partir del resultado anterior proponga una distribución a priori conjugada para el vector de parámetros (λ, ν).