Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

# Ayudantía 11
## EPG3310 - Probabilidad
## 29 de Mayo

1. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes. Suponga que para cada $n \geq 1$, se tiene que $P(X_n = 1) = p_n$ y $P(X_n = 0) = 1 - p_n$. Muestre que

   *a)* $X_n \stackrel{P}{\to} 0$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

   *b)* $X_n \stackrel{c.s.}{\to} 0$ si y sólo si $\sum_{n\geq 1} p_n < \infty$.

2. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Asuma que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j = m \quad c.s.$$

   donde $|m| < \infty$. Muestre que $E(X_1)$ es finita y $E(X_1) = m$ c.s.

3. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas tales que $E(|\ln X_1|) < \infty$. Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \left( \prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{\frac{1}{n}}$$

   Además, si $X_1$ distribuye uniforme en $(0, 1)$, calcule su valor numérico.

4. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas en un espacio $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con $|E(X_n)| < \infty$. Muestre que si

$$\sum_{n\geq 1} Var(X_n) < \infty$$

   entonces $\sum_{n\geq 1}(X_n - E(X_n))$ existe c.s.