Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 8
EPG3310 - Probabilidad
8 de Mayo

1. Sea $\{E_i\}_{i\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de S. Demuestre que

$$I_{\text{lím sup}\, E_i}(s) = \text{lím sup}\, I_{E_i}(s),\ \forall s \in S$$

y que

$$I_{\text{lím ínf}\, E_i}(s) = \text{lím ínf}\, I_{E_i}(s),\ \forall s \in S$$

2. Sea S un conjunto numerable y sea $\Sigma_0 = \{A \subseteq S : |A| < \infty \text{ o } |A^c| < \infty\}$. Sea μ_0 una función en S definida como

$$\mu_0(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito} \\ 1 & \text{si } A^c \text{ es finito} \end{cases}$$

   a) Demuestre que Σ_0 es un álgebra pero no una σ-álgebra.
   b) Muestre que μ_0 es aditiva finita pero no aditiva numerable en Σ_0.
   c) Muestre que existe una sucesión $\{A_i\}_{i\geq 1}$ de elementos de Σ_0 tal que $A_i \uparrow S$ y $\mu_0(A_i) = 0$ para todo $i \geq 1$.

3. Sea F una función de distribución continua en $\mathbb{R}$. Sea μ la medida de Lebesgue-Stieltjes definida como $\mu(a, b] = F(b) - F(a)$. Muestre que $\mu(A) = 0$ si A es un subconjunto numerable de $\mathbb{R}$.

4. Sea (S, Σ) un espacio medible y f una función positiva y Σ-medible. Para $n \in \mathbb{N}$, sea $\alpha_n : [0, \infty] \to [0, \infty]$, definida como

$$\alpha_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (i-1)2^{-n} & \text{si } (i-1)2^{-n} < x \leq i2^{-n}, i = 1, 2, \ldots, n2^n \\ n & \text{si } n < x \end{cases}$$

Muestre que $f_n \uparrow f$, donde $f_n = \alpha_n \circ f$.

5. Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sea $|\phi_X(t)|$ la norma dada por

$$|\phi_X(t)| = [(E[\cos tX])^2 + (E[\sin tX])^2]^{1/2}$$

Muestre que $|\phi_X(t_0)| = 1$ para algún $t_0 \neq 0$ si y sólo si existe un $a \in \mathbb{R}$ y un $h \neq 0$ tales que

$$P\{X \in \{a + jh : j \in \mathbb{Z}\}\} = 1$$

6. Sea $\boldsymbol{Y} \sim N_n(0, I_n)$ y sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ matrices simétricas. Muestre que la f.g.m conjunta de $\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{Y}$ y $\boldsymbol{Y}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{Y}$ es $[det(I_n - 2sA - 2tB)]^{-1/2}$. Con esto muestre que dos formas cuadráticas son independientes si $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$.