Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 12
EPG3310 - Probabilidad
5 de Junio

1. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sea X_0 una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Muestre que si $X_n \overset{P}{\to} X_0$, entonces $X_n \overset{d}{\to} X_0$.

2. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias con p.d.f's dadas por

$$f_{X_n} = 1 - \cos(2n\pi x)$$

   Muestre que $X_n \overset{d}{\to} X$, donde $X \sim Unif(0,1)$.

3. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias con distribución común $Exp(1)$. Muestre que $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n) - \ln(n)$ converge en distribución a una variable con cdf $F(x) = e^{-e^{-x}}$.

4. Sea $\{F_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de distribución de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$, distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, n]$ y F_0 la función de distribución de una variable aleatoria degenerada X_0. Se define

$$G_n(x) = \frac{1}{n}F_n(x) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)F_0(x)$$

   Muestre que $G_n \overset{d}{\to} F_0$, pero sus momentos no convergen para ningún orden.

5. Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{u_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números reales positivos. Sea $\{F_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de distribución tal que $F_n(a_n x + b_n) \to G(x)$ y $F_n(u_n x + v_n) \to F(x)$, donde F y G son funciones de distribución no-degeneradas. Entonces existen a, b, con $a > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{u_n} = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - v_n}{u_n} = b$$

   y

$$F(ax + b) = G(x)$$