Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 5

EYP2805 - Métodos Bayesianos

12 de Septiembre

1. Considere $x \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$. Encuentre el estimador de Bayes para las siguientes funciones de pérdida:

   a) (*Distancia entropía* o *divergencia KL*)

$$L_e(\theta, \delta) = E_\theta \left[log \left(\frac{f(x|\theta)}{f(x|\delta)} \right) \right]$$

   b) (*Distancia Hellinger*)

$$L_H(\theta, \delta) = \frac{1}{2} E_\theta \left[\left(\sqrt{\frac{f(x|\delta)}{f(x|\theta)}} - 1 \right)^2 \right]$$

2. Demuestre que L_e y L_H son localmente equivalentes a la pérdida cuadrática asociada a la información de Fisher,

$$I(\theta) = E_\theta \left[\frac{\partial log f(x|\theta)}{\partial log} \left(\frac{\partial log f(x|\theta)}{\partial log} \right)^t \right]$$

   Esto es,

$$L_*(\theta, \delta) = c_*(\theta - \delta)^t I(\theta)^{-1}(\theta - \delta) + O(||\theta - \delta||^2)$$

3. Considere el modelo

$$X|\theta \sim \text{Multinomial}(n, \theta)$$
$$\theta \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

   donde $X = (x_1, \ldots, x_k)$ y $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$.

   a) Muestre que

$$E(\theta_i) = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}, \;\; Var(\theta_i) = \frac{(\alpha_0 - \alpha_i)\alpha_i}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}, \;\; Cov(\theta_i, \theta_j) = -\frac{\alpha_i \alpha_j}{\alpha_0^2(\alpha_0 + 1)}$$

b) Encuentre el estimador de Bayes de θ bajo la pérdida cuadrática $L(\theta, a) = ||\theta - a||^2 = \sum_{i=1}^{k}(\theta_i - a_i)^2$.

Hint: Considere el caso general $L(\theta, a) = (\theta - a)^t Q(\theta - a)$, donde Q es una matriz de $k \times k$ definida positiva. Muestre que el estimador de Bayes viene dado por $\hat{\theta} = E[\theta|X]$