Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Jorge Gonzalez
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 7

EYP2305/230I - Análisis de Regresión

25 de Abril

1. Si $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{A\beta} = \boldsymbol{c}$ es cierto, muestre que F puede ser expresado de la forma

$$\frac{n-p}{q} \cdot \frac{\boldsymbol{\epsilon^t (P - P_H) \epsilon}}{\boldsymbol{\epsilon^t (I_n - P) \epsilon}}$$

2. Suponga que $E(\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{A\theta} = \boldsymbol{0}$ y $Var(\boldsymbol{Y}) = \sigma^2 \boldsymbol{V}$, donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz de $q \times n$ de rango q y $\boldsymbol{V}$ es una matriz conocida de $n \times n$, definida positiva. Sea $\boldsymbol{\theta^*}$ el estimador de mínimos cuadrados generales de $\boldsymbol{\theta}$; esto significa que $\boldsymbol{\theta^*}$ minimiza $\boldsymbol{(Y - \theta)^t V^{-1} (Y - \theta)}$ sujeto a $\boldsymbol{A\theta} = \boldsymbol{0}$. Muestre que

$$\boldsymbol{Y - \theta^* = V A^t \gamma^*}$$

donde $\boldsymbol{\gamma^*}$ es el estimador de mínimos cuadrados generales de $\boldsymbol{\gamma}$ para el modelo $E[\boldsymbol{Y}] = \boldsymbol{V A^t \gamma}$, $Var[\boldsymbol{Y}] = \sigma^2 \boldsymbol{V}$.

3. Dado el modelo de rango completo, suponga que se desea contrastar $H : \beta_j = 0$, $j \neq 0$. Sea R_H^2 el coeficiente de determinación del modelo con $\beta_j = 0$.

   a) Muestre que el estadístico F para contrastar H está dado por

$$F = \frac{R^2 - R_H^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n-p}{1}$$

   b) Deduzca que R^2 nunca puede aumentar cuando un coeficiente de β es igual a 0.

4. Sean

$$\begin{aligned} Y_1 &= \theta_1 + \theta_2 + \epsilon_1 \\ Y_2 &= 2\theta_2 + \epsilon_2 \\ Y_3 &= -\theta_1 + \theta_2 + \epsilon_3 \end{aligned}$$

donde los ϵ_i $(i = 1, 2, 3)$ son $N(0, \sigma^2)$ independientes. Derive un estadístico F para contrastar la hipótesis $H : \theta_1 = 2\theta_2$.

5. Sean $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, donde los ϵ_i son $N(0, \sigma^2)$ independientes.

   a) Derive un estadístico F para contrastar la hipótesis $H : \beta_0 = 0$.

   b) Si $\bar{x} = 0$, derive un estadístico F para constrastar la hipótesis $\beta_0 = \beta_1$. Muestre que es equivalente a un test-t.