



Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática
Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 4
EPG3310 - Probabilidad
3 de Abril

1. Sea n un entero positivo y $p_1, p_2, \dots, p_n \in (0, 1)$. Sean X_1, X_2, \dots, X_n n variables aleatorias independientes tales que

$$X_k \sim \text{Ber}(p_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Sea M una variable aleatoria definida como

$$M = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Demuestre que

$$M \sim \text{Ber}(\lambda), \quad \text{con } \lambda = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_k)$$

2. Sea $X \sim \text{Binom}(n, p)$. Demuestre que para cualquier entero $m \in [1, n]$, se tiene que

$$\sum_{k=m}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \int_0^p x^{m-1} (1-x)^{n-m} dx$$

3. Sea n un entero positivo y $p_1, p_2, \dots, p_n \in (0, 1)$. Sean X_1, X_2, \dots, X_n variables aleatorias independientes tales que

$$X_k \sim \text{Geom}(p_k), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Sea Y una variable aleatoria definida como

$$Y = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$$

Demuestre que $Y \sim \text{Geom}(p)$, con $p = \prod_{k=1}^n p_k$.

4. Considere un círculo de radio R y suponga que un punto dentro del círculo es escogido aleatoriamente de tal manera que todas las regiones dentro del círculo de igual área tienen igual probabilidad de contener el punto. Si el centro del círculo denota el origen y se definen X e Y como las coordenadas del punto, la función de densidad conjunta está dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} c & \text{si } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{si } x^2 + y^2 > R^2 \end{cases}$$

para algún valor c .

- a) Determine el valor de c .
 - b) Encuentre las distribuciones marginales de X e Y .
 - c) Calcule la probabilidad que D , la distancia desde el origen del punto seleccionado, sea menor o igual a a .
 - d) Calcule $E[D]$.
5. Una mesa posee líneas paralelas equidistantes a una distancia D de cada una. Una aguja de largo L , con $L \leq D$, es lanzada al azar a la mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la aguja intersecte una de las líneas?