Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 13
EPG3310 - Probabilidad
12 de Junio

1. Suponga que X_n distribuye `Pareto` con parámetro n para cada $n \in \mathbb{N}^+$, donde cdf viene dada por

$$F_n(x) = 1 - \frac{1}{x^n}$$

   a) Muestre que la distribución de X_n converge a la distribución 1.
   b) Muestre que $Y_n = nX_n - n$ converge a la distribución exponencial estándar.

2. Considere una permutación de las variables aleatorias $(X_1, \dots, X_n)$ en el conjunto $\{1, \dots, n\}$. Un "acierto" se dá cuando $X_i = i$. Sea $N_n = \sum_{i=1}^n I_{\{X_i = i\}}$. Muestre que la distribución de N_n converge a una distribución `Poisson`(1) cuando $n \to \infty$.

3. Sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ y $\{u_n\}_{n\geq 1}$ dos sucesiones de números reales positivos. Sea $\{F_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones de distribución tal que $F_n(a_n x + b_n) \to G(x)$ y $F_n(u_n x + v_n) \to F(x)$, donde F y G son funciones de distribución no-degeneradas. Entonces existen a, b, con $a > 0$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{u_n} = a,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - v_n}{u_n} = b$$

   y

$$F(ax + b) = G(x)$$

4. Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias con

$$P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = p_n, \qquad P(X_n = 0) = 1 - 2p_n$$

   donde $p_n \in [0, 1/2]$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \infty$$

   Encuentre una elección adecuada de constantes c_n tales que $\frac{1}{c_n} \sum_{n=1}^n X_i$ converge en distribución a una normal con media 0 y varianza 1.