Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 2
EPG3310 - Probabilidad
20 de Marzo

1. Sea (S, Σ) un espacio medible. Demuestre que un subconjunto $A \subset S$ es Σ-medible si y sólo si I_A es Σ-medible; esto es, $A \in \Sigma$ si y sólo si $I_A \in m\Sigma$.

2. Sea (S, Σ, μ) un espacio medible y
$$f = \sum_{i=1}^{m} a_i I_{A_i}$$
una función simple diferente de cero en S, donde $a_i \in [0, \infty)$ y $A_i \in \Sigma$. Demuestre que existe una colección finita de conjuntos mutuamente disjuntos C_H $(H \in \mathcal{H})$ y $u_H > 0$ tales que
$$\sum_{i=1}^{m} a_i I_{A_i} = \sum_{H \in \mathcal{H}} u_H I_{C_H}$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_i \mu(A_i) = \sum_{H \in \mathcal{H}} u_H \mu(C_H)$$

3. Sea (S, Σ, μ) un espacio medible y $f \in (m\Sigma)^+$. Suponga que $\{f_n\}_{n \geq 1}$ es una sucesión de elementos en $(m\Sigma)^+$ tales que, excepto en un conjunto μ-nulo A, $f_n \uparrow f$. Demuestre que $\mu(f_n) \uparrow \mu(f)$.

4. Sea (S, Σ, μ) un espacio medible y f una función Borel medible no negativa en S. Sea $p \in (0, \infty)$ y $\epsilon \in (0, \infty)$. Demuestre que:
$$\mu\{s : f(s) \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_S f^p d\mu$$

5. Sea (S, Σ, μ) un espacio medible y $g, h, g_1, g_2, \ldots$ funciones Σ-medibles. Muestre que

   a) Si $\int_S h d\mu > -\infty$, $g_n \geq h$ para todo $n \geq 1$, y $g_n \uparrow g$, entonces
   $$\int_S g_n d\mu \uparrow \int_S g d\mu$$

   b) Si $\int_S h d\mu < \infty$, $g_n \leq h$ para todo $n \geq 1$, y $g_n \downarrow g$, entonces
   $$\int_S g_n d\mu \downarrow \int_S g d\mu$$

6. Un despistado cartero tiene n cartas con sus respectivos n sobres. Por un descuido deja caer todo al piso. Viendo la titánica tarea que tiene frente, decide darse una idea de cuánto le tomará ordenar todo ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una carta esté en su sobre correcto? ¿Y que ninguna lo esté? ¿Que sucede cuando $n \to \infty$?