Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 1
EYP2805 - Métodos Bayesianos
12 de Agosto

1. Considere una variable aleatoria X, que dado θ posee distribución $Binom(n, \theta)$ y una distribución a priori para θ uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Muestre que *a priori* todos los valores del soporte de X son igualmente probables.

2. Sea x el número de éxitos en n intentos Bernoulli independientes, cada uno con probabilidad θ desconocida de éxito. Se creee que θ puede ser modelada por una distribución $Unif(0, 1)$. Un intento extra z es realizado, independiente de los primeros n dado θ, pero con probabilidad $\theta/2$ de éxito. Así, la información completa corresponde a (x, z) donde $z = 1$ si el intento fue éxito. Muestre que

$$f(\theta|x, z = 0) = \kappa\{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} + \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta}\}$$

donde $\alpha = x+1$, $\beta = n-x+1$. Encuentre además el valor de la constante de proporcionalidad κ.

3. Suponga que $X_1, \ldots, X_n$ es una secuencia finita de variables aleatorias permutables tal que su distribución conjunta tiene una representación de la forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \int_{\Theta} \left\{ \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) \right\} f(\theta) d\theta$$

Muestre que

$$f(x_{m+1}, \ldots, x_n|x_1, \ldots, x_m) = \int_{\Theta} \left\{ \prod_{i=m+1}^{n} f(x_i|\theta) \right\} f(\theta|x_1, \ldots, x_m) d\theta$$

4. Considere el modelo

$$X|\theta \sim \text{Multinomial}(n, \theta)$$
$$\theta \sim \text{Dirichlet}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$$

donde $X = (x_1, \ldots, x_k)$ y $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$. Encuentre la distribución a posteriori de $\theta|X$.