Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 1
EPG3310 - Probabilidad
13 de Marzo

1. Una colección no vacía M de subconjuntos de X se llama "clase monótona" si, para cada sucesión monótona creciente (E_n) en M y cada sucesión monótona decreciente (F_n) en M, los conjuntos

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

pertenecen a M. Demuestre que una σ-álgebra es una clase monótona. Además, si A es una colección no vacía de subconjuntos de X, entonces existe una clase monótona más pequeña que contiene a A (también llamada "clase monótona generada por A").

2. Sea (S, Σ, μ) un espacio medible y Σ_μ la completación de Σ relativa a μ. Demuestre que Σ_μ es una σ-álgebra.

3. El conjunto de Cantor es construido removiendo los tercios centrales de segmentos de línea en $[0,1]$ del siguiente modo: Sea M_1 el tercio central de $[0,1]$, esto es, $M_1 = (1/3, 2/3)$. Sea M_2 la unión de los tercios centrales de $[0,1] \setminus M_1$, i.e. $M_2 = (1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$ y así sucesivamente. El conjunto de Cantor C es definido entonces como $[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$.

   a) Demuestre que C tiene medida de Lebesgue 0.

   b) Sea $x = (0.a_1a_2\ldots)_3 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/3^n$ la expansión en base 3 de $x \in [0,1]$. Demuestre que $x \in C$ si y sólo si $a_n \in \{0,2\}$ para todo $n \geq 1$.

   c) Demuestre que C es no numerable.

4. Sea (S, Σ, μ) un espacio medible y f una función Borel medible no negativa en S. Sea $p \in (0,\infty)$ y $\epsilon \in (0,\infty)$. Demuestre que:

$$\mu\{s : f(s) \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_S f^p d\mu$$