Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática

Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

**Ayudantía 6**
**EPG3310 - Probabilidad**
**17 de Abril**

1. Sean $X$ e $Y$ variables aleatorias independientes. Sea $g(x)$ una función sólo en $x$ y $h(y)$ una función sólo en $y$. Demuestre que las variables aleatorias $U = g(X)$ y $V = h(Y)$ son independientes.

2. Sean $X_1$ e $X_2$ variables aleatorias independientes que distribuyen $N(0, \sigma^2)$.

   *a*) Encuentre la distribución conjunta de $Y_1$ e $Y_2$, donde

   $$Y_1 = X_1^2 + X_2^2 \qquad \text{e} \qquad Y_2 = \frac{X_1}{\sqrt{Y_1}}$$

   *b*) Muestre que $Y_1$ e $Y_2$ son independientes, e interprete este resultado geométricamente.

3. Un punto es generado al azar en el plano de acuerdo al siguiente esquema en coordenadas polares. Se escoge un radio $R$, donde la distribución de $R^2$ es $\chi^2_2$. Independientemente se escoge un ángulo $\theta$, donde $\theta \sim \texttt{Unif}(0, 2\pi)$. Encuentre la distribución conjunta de $X = R\cos\theta$ e $Y = R\sin\theta$.

4. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $\{Z_n\}_{n\geq 1} \in (m\mathcal{F})^+$ tal que

   $$\sum_{n\geq 1} E(Z_n) < \infty$$

   Demuestre que $\sum_{n\geq 1} Z_n < \infty$ c.s. y $Z_n \to 0$ c.s.

5. Demuestre que si una variable aleatoria $X$ cumple que $X(\omega) \geq 0$, $\forall \omega \in \Omega$, entonces $F_X(x) = 0$ para $x < 0$ y

   $$E(X) = \int_0^\infty [1 - F_X(x)]\, dx = \int_0^\infty P(X > x)\, dx$$