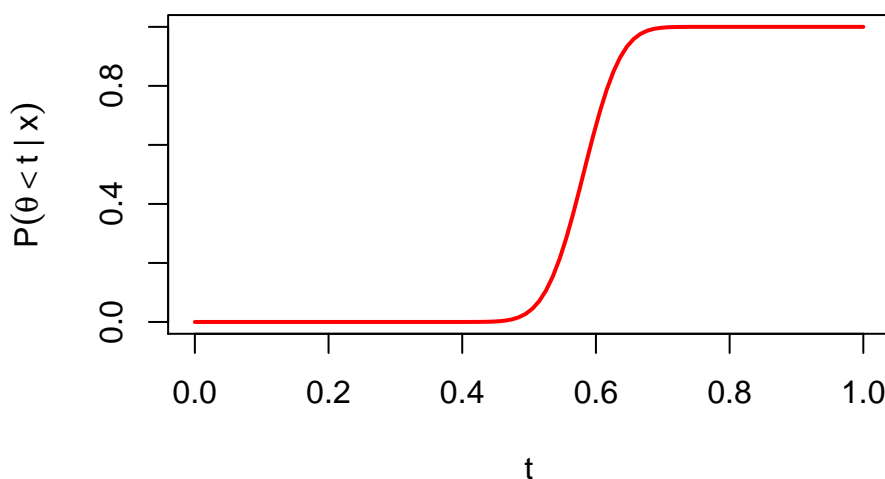




**Ayudantía 7**  
**EYP2805 - Métodos Bayesianos**  
**7 de Octubre**

1. Suponga que se tiene una muestra  $X_1, \dots, X_n \sim \text{BinNeg}(r, \theta)$  donde  $r$  es conocido y  $\theta$  tiene distribución a priori  $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ .

- a) Encuentre la distribución a posteriori de  $\theta$ .
- b) Suponga ahora que  $r = 5$ ,  $n = 10$  y que se observa  $\sum_{i=1}^n x_i = 70$ . De las siguientes hipótesis,  $H_1 : \theta \leq 0.5$ ,  $H_1 : \theta > 0.5$ , ¿cuál tiene mayor probabilidad a posteriori bajo la priori  $\text{Beta}(2, 2)$ ? Guíese con el siguiente gráfico:



- c) ¿Cuál es el factor de Bayes a favor de  $H_1$ ?
2. Considere la hipótesis nula puntual  $H_0 : \theta = \theta_0$ . Si  $P(\theta = \theta_0) = \varrho_0$ .
- a) Proponga una distribución a priori adecuada para  $f(x|\theta_0)$ . **Hint:** Recuerde que  $\theta_0$  es un punto y que  $\Theta \setminus \{\theta_0\}$  no.
- b) Demuestre que la distribución a posteriori de la hipótesis nula puede ser escrita como

$$\pi(\Theta_0|x) = \left[ 1 + \frac{1 - \varrho_0}{\varrho_0} \frac{1}{B_{01}^\pi(x)} \right]^{-1}$$

donde  $B_{01}^\pi(x)$  es el Factor de Bayes.

3. Si  $x \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$  y  $\theta \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ , compare las respuestas Bayesianas para los dos problemas de testeo

$$H_0 : \theta = 0 \text{ vs } H_1 : \theta \neq 0$$

$$H_0 : |\theta| \leq \epsilon \text{ vs } H_1 : |\theta| > \epsilon$$

cuando  $\epsilon$  y  $\sigma$  varían. **Ayuda:** Use la aproximación  $\Phi(x) \approx \frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ .