



Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Estadística
Facultad de Matemática
Profesor: Fernando Quintana
Ayudante: Daniel Acuña León

Ayudantía 10
EPG3310 - Probabilidad
22 de Mayo

1. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria en Ω con $E(|X|) < \infty$. Sea \mathcal{G} una σ -sub-álgebra de \mathcal{F} . Muestre que si X es \mathcal{G} -medible, entonces $E(X|\mathcal{G}) = X$ c. s.
2. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en Ω tales que $|X_n| \leq V$ para $n \geq 1$, donde V es una variable aleatoria con $E(V) < \infty$ y $X_n \rightarrow X$ c.s. Sea \mathcal{G} una σ -sub-álgebra de \mathcal{F} . Muestre que $E(X_n|\mathcal{G}) \rightarrow E(X|\mathcal{G})$ c.s.
3. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad y X una variable aleatoria en Ω con $E(|X|) < \infty$. Sea \mathcal{G} una σ -sub-álgebra de \mathcal{F} y sea \mathcal{H} una σ -sub-álgebra de \mathcal{G} . Muestre que

$$E[E(X|\mathcal{G})|\mathcal{H}] = E(X|\mathcal{H})$$

4. Sea X una variable aleatoria en un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) con $E(|X|) < \infty$. Sea $H \in \mathcal{F}$. Muestre que

a)

$$E[XI_H] = E[X|H] \cdot E[I_H] = E[X|H]P(H)$$

b)

$$E[X] = E[X|H]P(H) + E[X|H^c]P(H^c)$$

5. Sea (Ω, \mathcal{F}, P) un espacio de probabilidad. Sea Q una medida de probabilidad en (Ω, \mathcal{F}) tal que $Q \ll P$. Sea \mathcal{G} una σ -sub-álgebra de \mathcal{F} y $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, Q)$. Sea $L = dQ/dP$ la derivada de Radon-Nikodym. Muestre que

a) $Q\{E_P[L|\mathcal{G}] > 0\} = 1$.

b)

$$E_Q[X|\mathcal{G}] = \frac{E_P[XL|\mathcal{G}]}{E_P[L|\mathcal{G}]}$$