Отчёт о выполнении финального экзамена

1. Робастный принцип робастного контроля заключается в нахождении такого правила контроля, при котором при изменениях параметром системы в определённом диапазоне, система всё равно будет сходиться к желаемым значениям. Это обеспечивается за счёт введения скользящей поверхности (sliding surface) и структуры управления, которая учитывает возможные отклонения от ожидаемых параметров. На приложенных ниже снимках представлен вывод контроллера в скользящем режиме. Контроль τ задаётся как обычный контроль обратной динамики с номинальными значениями параметров $M(q), C(q,\dot{q})$ и $g(q)$: $\tau = \widehat{M}(q)v + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q)$. Подставляя данный контроль в уравнение динамики, можно выразить $\ddot{q}$.

   Уравнение скользящей плоскости задаётся как $s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)\tilde{q} = \dot{\tilde{q}} + \lambda\tilde{q}$. v задаётся как сумма v_s (скользящего фид-форварда) и v_n (номинального). $v_n = \ddot{q}_d + \lambda\dot{\tilde{q}}$. Таким образом $v = v_n + v_s = v_s + \ddot{q}_d + \lambda\dot{\tilde{q}}$.
2. В [репозитории] на Github находится код, реализующий робастное управление при помощи библиотек MuJoCo и Pinocchio.

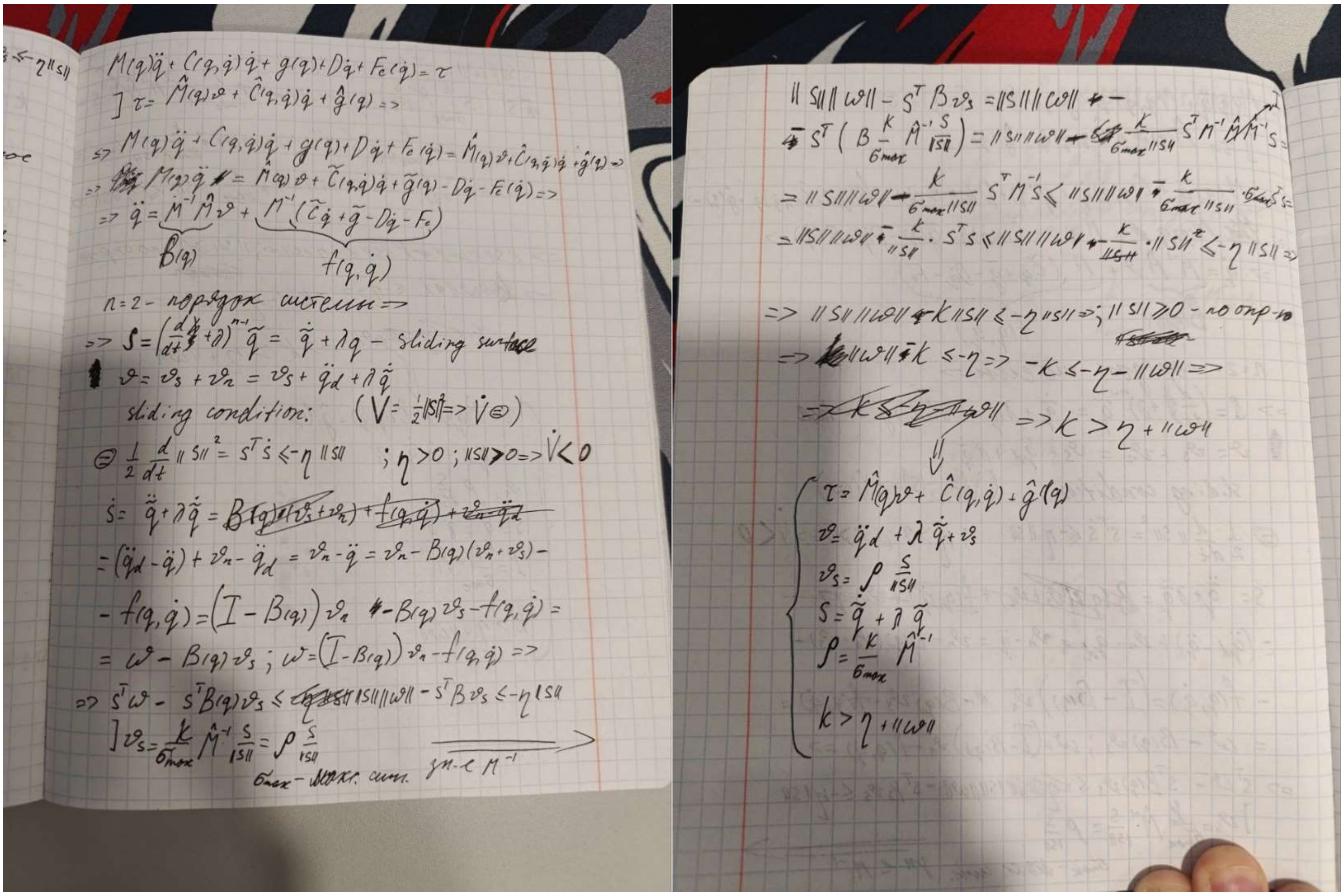
   Сначала к изменённой модели робота с изменёнными весами был применён обычный контроль, основанный на обратной динамике, который не смог привести систему к желаемому состоянию, сильно отклонившись от него. В папке logs/plots представлены графики ошибки, контроля и фазовый портрет всех для всех шарниров.

   В свою очередь робастное управление привело систему к желаемому состоянию, но имело тряску в шарнирах, что в настоящем роботе может привести к серьёзным проблемам в двигателях вплоть до их поломки.
3. Тряска в шарнирах при применении робастного управления возникает из-за того, что контроллер в скользящем режиме (v_s) при приближении к нулю начинает резко менять свой знак и значения, что приводит к резкому изменению значения контроля τ на противоположное или сильно отличающееся. На практике это может привести к очень быстрой поломке двигателя из-за резких перепадов напряжения в моторах. Для исправления этой проблемы можно задать условие, что если норма вектора s меньше определённой границы ϵ ($\|s\| \leq \epsilon$), то норма заменяется на это значение ϵ:

$$v_s = \begin{cases} \rho \dfrac{s}{\|s\|}; \|s\| > \epsilon \\ \rho \dfrac{s}{\epsilon}; \|s\| \le \epsilon \end{cases}$$

Чем больше это самое значение ϵ, тем медленнее и менее точно будет сходиться к нулю ошибка положения, а если значение будет слишком низким, то тогда проблема с тряской сохранится. В папке logs/plots хранятся графики, показывающие разные параметры системы при разных значениях ϵ, а также в папке logs/videos можно найти записи работы системы для разных значений.

Математический вывод параметров:



$M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + D\dot{q} + F_c(\dot{q}) = \tau$

$] \ \tau = \hat{M}(q)\vartheta + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q) \Rightarrow$

$\Rightarrow M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + g(q) + D\dot{q} + F_c(\dot{q}) = \hat{M}(q)\vartheta + \hat{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \hat{g}(q) \Rightarrow$

$\Rightarrow M(q)\ddot{q} = \hat{M}(q)\vartheta + \tilde{C}(q,\dot{q})\dot{q} + \tilde{g}(q) - D\dot{q} - F_c(\dot{q}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ddot{q} = \underbrace{M^{-1}\hat{M}}_{B(q)}\vartheta + \underbrace{M^{-1}(\tilde{C}\dot{q} + \tilde{g} - D\dot{q} - F_c)}_{f(q,\dot{q})}$

$n=2$ - порядок системы $\Rightarrow$

$\Rightarrow s = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{n-1}\tilde{q} = \dot{\tilde{q}} + \lambda \tilde{q}$ - sliding surface

$\vartheta = \vartheta_s + \vartheta_n = \vartheta_s + \ddot{q}_d + \lambda\dot{\tilde{q}}$

sliding condition: $\left(V = \frac{1}{2}\|s\|^2 \Rightarrow \dot{V} \ominus\right)$

$\ominus \ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|s\|^2 = s^T\dot{s} \le -\eta\|s\|$; $\eta > 0$; $\|s\| > 0 \Rightarrow \dot{V} < 0$

$\dot{s} = \ddot{\tilde{q}} + \lambda\dot{\tilde{q}} = \cancel{B(q)(\vartheta_s + \vartheta_n) + f(q,\dot{q}) + \vartheta_n - \ddot{q}_d}$

$= (\ddot{q}_d - \ddot{q}) + \vartheta_n - \ddot{q}_d = \vartheta_n - \ddot{q} = \vartheta_n - B(q)(\vartheta_n + \vartheta_s) -$

$- f(q,\dot{q}) = (I - B(q))\vartheta_n - B(q)\vartheta_s - f(q,\dot{q}) =$

$= w - B(q)\vartheta_s$; $w = (I - B(q))\vartheta_n - f(q,\dot{q}) \Rightarrow$

$\Rightarrow s^Tw - s^TB(q)\vartheta_s \le \|s\|\|w\| - s^TB\vartheta_s \le -\eta\|s\|$

$] \ \vartheta_s = \frac{k}{\sigma_{max}}\hat{M}^{-1}\frac{s}{\|s\|} = \rho\frac{s}{\|s\|}$

σ_{max} - макс. сингл. зн-е M^{-1}

$\|s\|\|w\| - s^TB\vartheta_s = \|s\|\|w\| -$

$- s^T\left(B\frac{k}{\sigma_{max}}\hat{M}^{-1}\frac{s}{\|s\|}\right) = \|s\|\|w\| - \frac{k}{\sigma_{max}\|s\|}s^TM^{-1}\hat{M}\hat{M}^{-1}s =$

$= \|s\|\|w\| - \frac{k}{\sigma_{max}\|s\|}s^TM^{-1}s \le \|s\|\|w\| - \frac{k}{\sigma_{max}\|s\|}\cdot\sigma_{max}s^Ts =$

$= \|s\|\|w\| - \frac{k}{\|s\|}\cdot s^Ts \le \|s\|\|w\| - \frac{k}{\|s\|}\cdot\|s\|^2 \le -\eta\|s\| \Rightarrow$

$\Rightarrow \|s\|\|w\| - k\|s\| \le -\eta\|s\| \Rightarrow$; $\|s\| \ge 0$ - по опр-ю

$\Rightarrow \|w\| - k \le -\eta \Rightarrow -k \le -\eta - \|w\| \Rightarrow$

$\Rightarrow k > \eta + \|w\|$

$$\begin{cases} \tau = \hat{M}(q)\vartheta + \hat{C}(q,\dot{q}) + \hat{g}(q) \\ \vartheta = \ddot{q}_d + \lambda\dot{\tilde{q}} + \vartheta_s \\ \vartheta_s = \rho\frac{s}{\|s\|} \\ s = \dot{\tilde{q}} + \lambda\tilde{q} \\ \rho = \frac{k}{\sigma_{max}}\hat{M}^{-1} \\ k > \eta + \|w\| \end{cases}$$