Цель работы

Реализовать и проанализировать модель эффективности рекламы

Задача

Построить график распространения рекламы, математическая модель которой описывается следующим уравнением:

1. $\frac{dn}{dt} = (0.133 + 0.000033n(t))(N - n(t))$
2. $\frac{dn}{dt} = (0.0000132 + 0.32n(t))(N - n(t))$
3. $\frac{dn}{dt} = (0.8t + 0.15sin(t)n(t))(N - n(t))$

При этом объем аудитории $N = 1670$, в начальный момент о товаре знает 12 человек. Для случая 2 определить в какой момент времени скорость распространения рекламы будет иметь максимальное значение.

Теоретическое введение

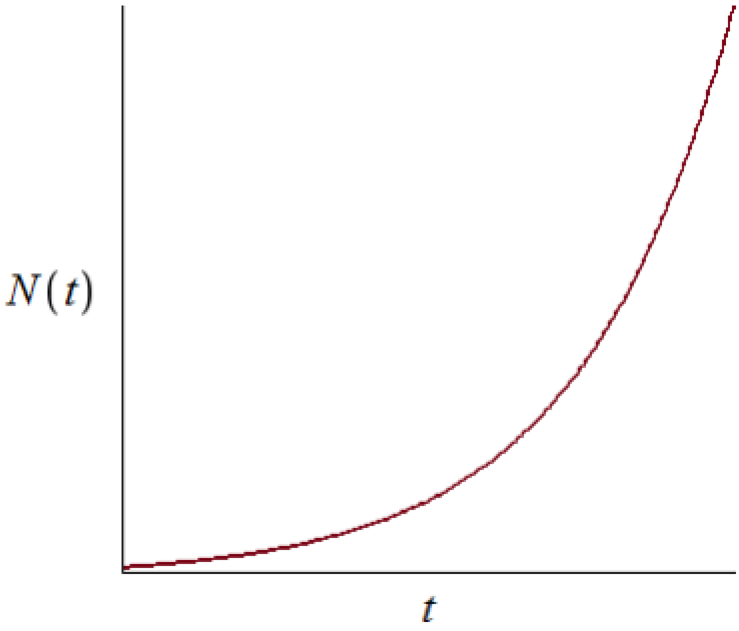
Предположим, что торговыми учреждениями реализуется некоторая продукция, о которой в момент времени t из числа потенциальных покупателей N знает лишь n покупателей. Для ускорения сбыта продукции запускается реклама по радио, телевидению и других средств массовой информации. После запуска рекламной кампании информация о продукции начнет распространяться среди потенциальных покупателей путем общения друг с другом. Таким образом, после запуска рекламных объявлений скорость изменения числа знающих о продукции людей пропорциональна как числу знающих о товаре покупателей, так и числу покупателей о нем не знающих

Модель рекламной кампании описывается следующими величинами. Считаем, что $\frac{dn}{dt}$ - скорость изменения со временем числа потребителей, узнавших о товаре и готовых его купить, t - время, прошедшее с начала рекламной кампании, $n(t)$ - число уже информированных клиентов. Эта величина пропорциональна числу покупателей, еще не знающих о нем, это описывается следующим образом: $\alpha_1(t)(N - n(t))$, где N - общее число потенциальных платежеспособных покупателей, $\alpha_1(t) > 0$ - характеризует интенсивность рекламной кампании (зависит от затрат на рекламу в данный момент времени).

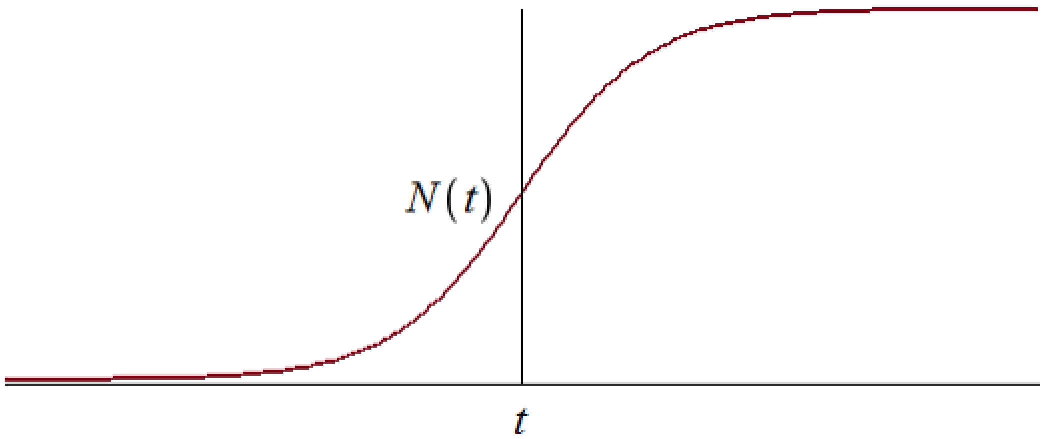
Помимо этого, узнавшие о товаре потребители также распространяют полученную информацию среди потенциальных покупателей, не знающих о нем (в этом случае работает т.н. сарафанное радио). Этот вклад в рекламу описывается величиной $\alpha_2(t)n(t)(N - n(t))$, эта величина увеличивается с увеличением потребителей узнавших о товаре. Математическая модель распространения рекламы описывается уравнением:

$$ \frac{dn}{dt} = (\alpha_1(t) + \alpha_2(t)n(t))(N-n(t)) $$

При $\alpha_1 \gg \alpha_2$ получается модель типа модели Мальтуса, решение которой имеет следующий вид



В обратном случае, при $\alpha_1 \ll \alpha_2$, получаем уравнение логистической кривой:



Выполнение работы

Julia

Открыв Pluto.jl я приступил к написанию кода. Сначала я подключил библиотеки Plots и DiffetentialEquations:

```
using Plots, DiffetentialEquations
```

Далее я ввёл начальные данные, представленные в условии задачи, коэффиценты α_1 и α_2 для всех трёх случаев, а также временные рамки и интервал моделирования:

```
# Начальные условия
```

```
N = 1670
n0 = 12
timespan = (0, 30)
dt = 0.01

# Для первого случая

α1_1 = 0.013
α2_1 =  0.000033

# Для второго случая

α1_2 = 0.0000132
α2_2 =  0.32

# Для третьего случая

α1_3 = 0.8
α2_3 =  0.15
```

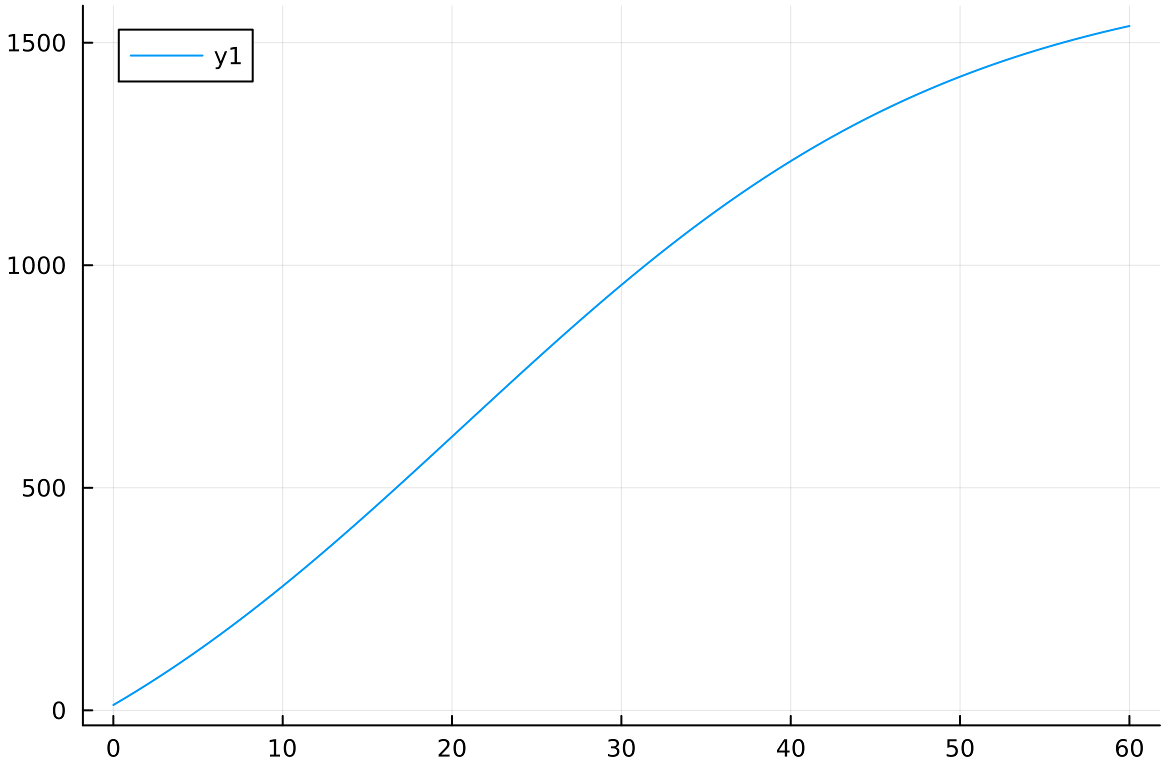
После этого я задал и решил ОДУ для каждого из случаев:

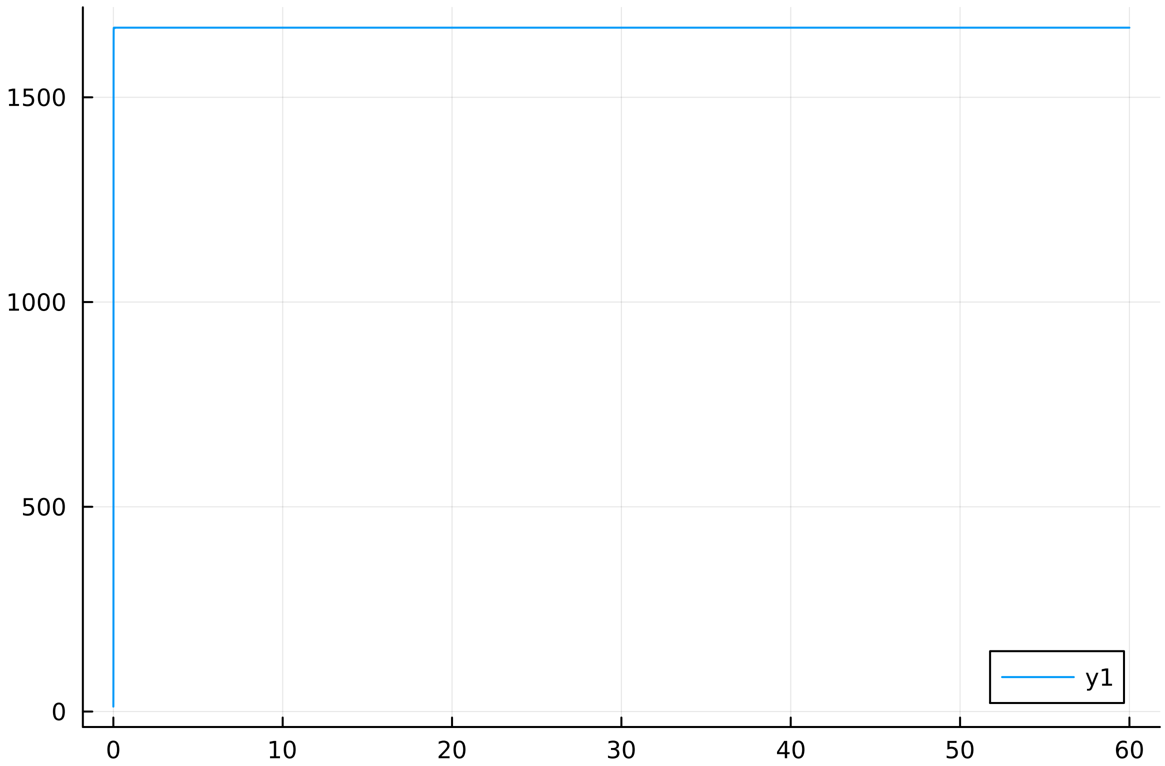
```
# ОДУ

# Первый случай

ode_fn1(x, p, t) = (α1_1 + α2_1 * x) * (N - x)
prob1 = ODEProblem(ode_fn1, n0, timespan)
sol1 = solve(prob1, dtmax = dt)

diffX1 = [u[1] for u in sol1.u]
diffT1 = [timestamp for timestamp in sol1.t]

# Второй случай

ode_fn2(x, p, t) = (α1_2 + α2_2 * x) * (N - x)
prob2 = ODEProblem(ode_fn2, n0, timespan)
sol2 = solve(prob2, dtmax = dt)

diffX2 = [u[1] for u in sol2.u]
diffT2 = [timestamp for timestamp in sol2.t]

# Третий случай

ode_fn3(x, p, t) = (α1_3 * t + α2_3 * sin(t) * x) * (N - x)
prob3 = ODEProblem(ode_fn3, n0, timespan)
sol3 = solve(prob3, dtmax = dt)

diffX3 = [u[1] for u in sol3.u]
diffT3 = [timestamp for timestamp in sol3.t]
```

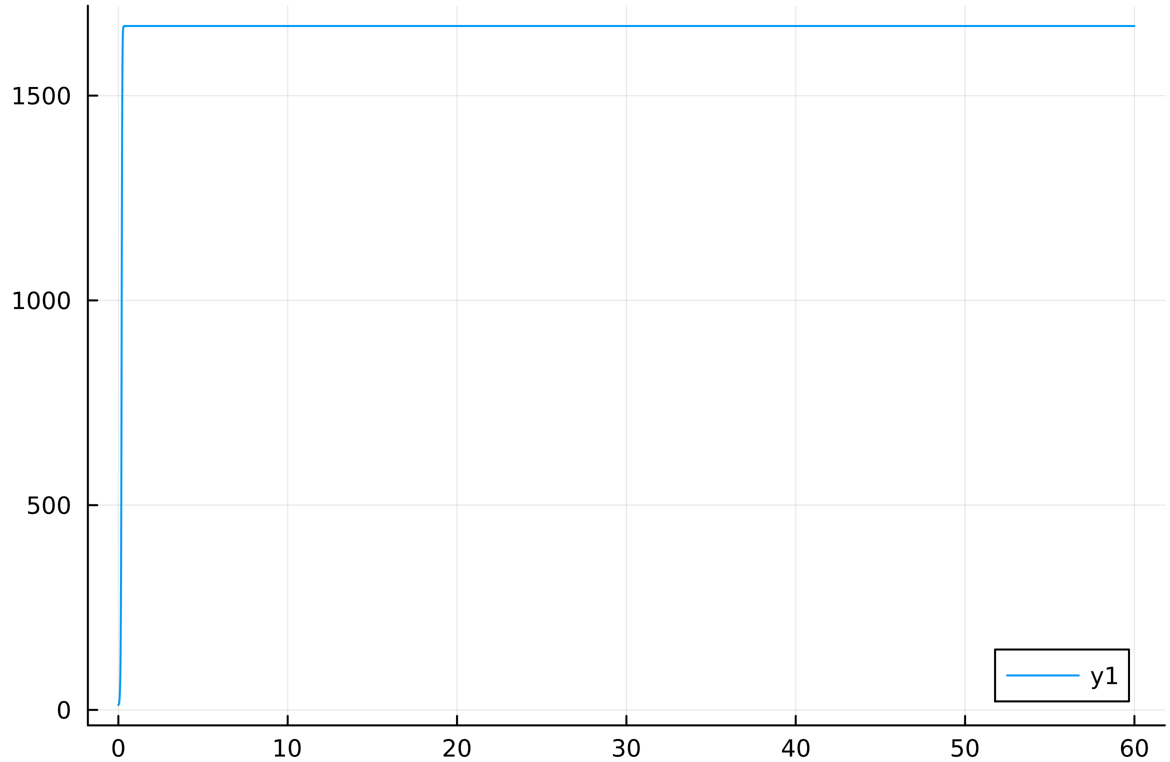
В конце я вывел графики изменения x(t) для всех трёх случаев с помощью plot:

```
# График первого случая

plt1 = plot(
    diffT1,
    diffX1
)

# График второго случая

plt2 = plot(
    diffT2,
    diffX2
)

# График третьего случая

plt3 = plot(
    diffT3,
    diffX3
)
```

Получившиеся графики представлены на изображениях ниже:


y1
1500
1000
500
0
0
10
20
30
40
50
60


1500
1000
500
0
y1
0
10
20
30
40
50
60



OpenModelica

Открыв OpenModelica, я создал три файла модели для - каждого из случаев. Далее, задав начальные условия и коэффициенты α_1 и α_2, я ввёл уравнение математической модели, описанное в задании, для каждого из случаев. Во втором случае с помощью метода if нашёл, в какой момент времени скорость изменения была максимальной. Наибольшее изменение в количестве заинтересованных покупателей было в момент времени с 0.00 по 0.01:

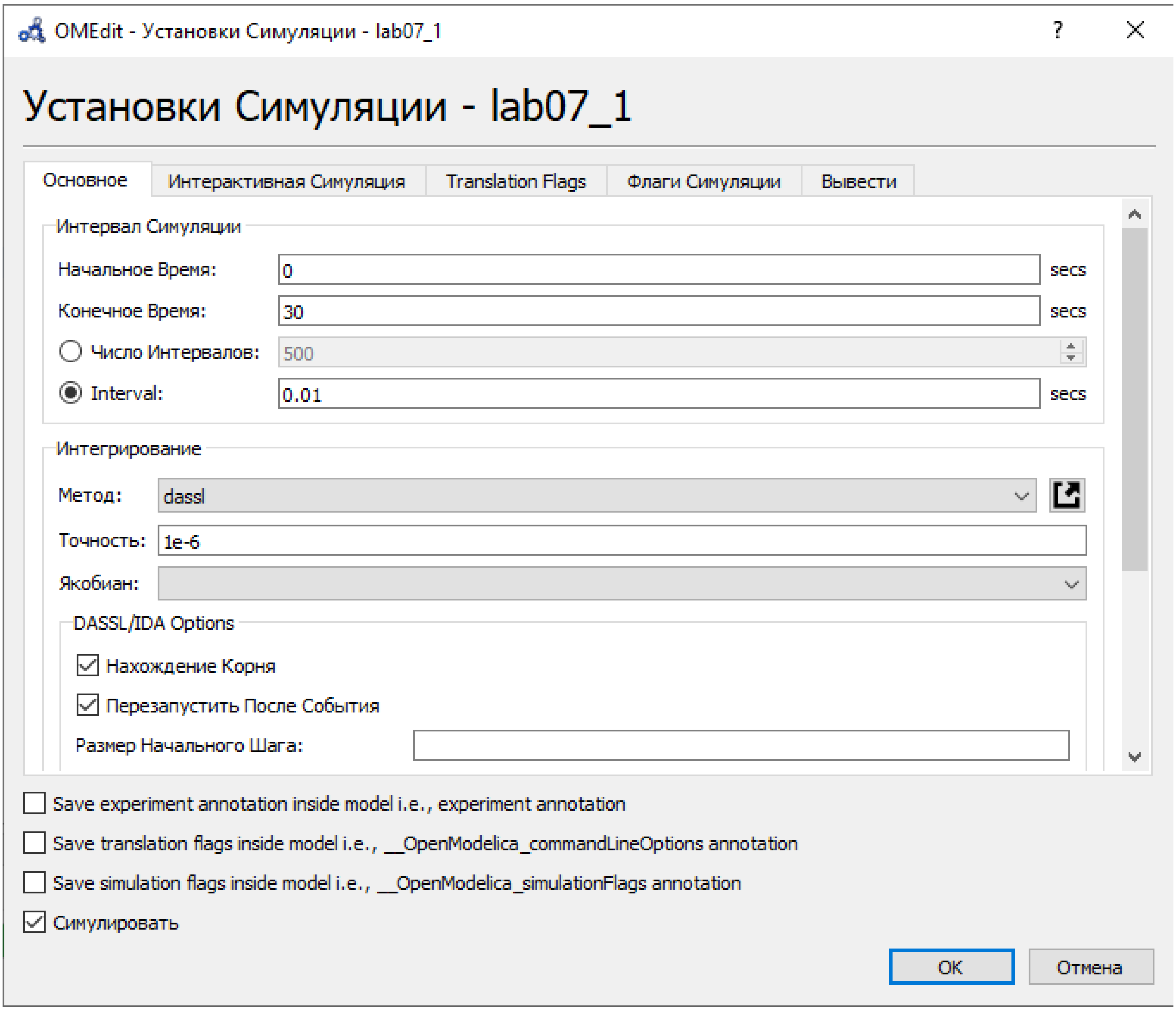
```
model lab07_1


Real N = 1670;
  Real x;
  Real alpha1 = 0.113;
  Real alpha2 = 0.000033;
initial equation

  x = 12;

equation

  der(x) = (alpha1 + alpha2 * x) * (N - x);

end lab07_1;
```

```
model lab07_2

```

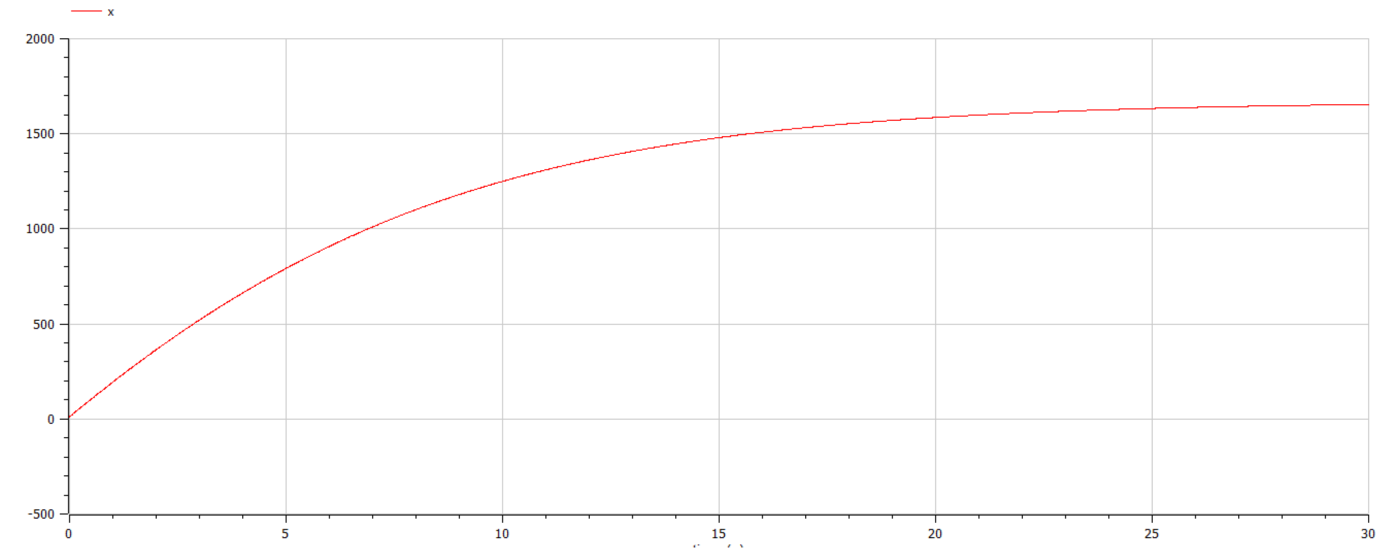
```
  Real N = 1670;
  Real x;
  Real alpha1 = 0.0000132;
  Real alpha2 =  0.32;

  Real maxDiff = 0;
  Real maxDiffTime = 0;

initial equation

  x = 12;

equation

  der(x) = (alpha1 + alpha2 * x) * (N - x);

  if der(x) > maxDiff then
    maxDiff = der(x);
    maxDiffTime = time;
  end if;

end lab07_2;
```

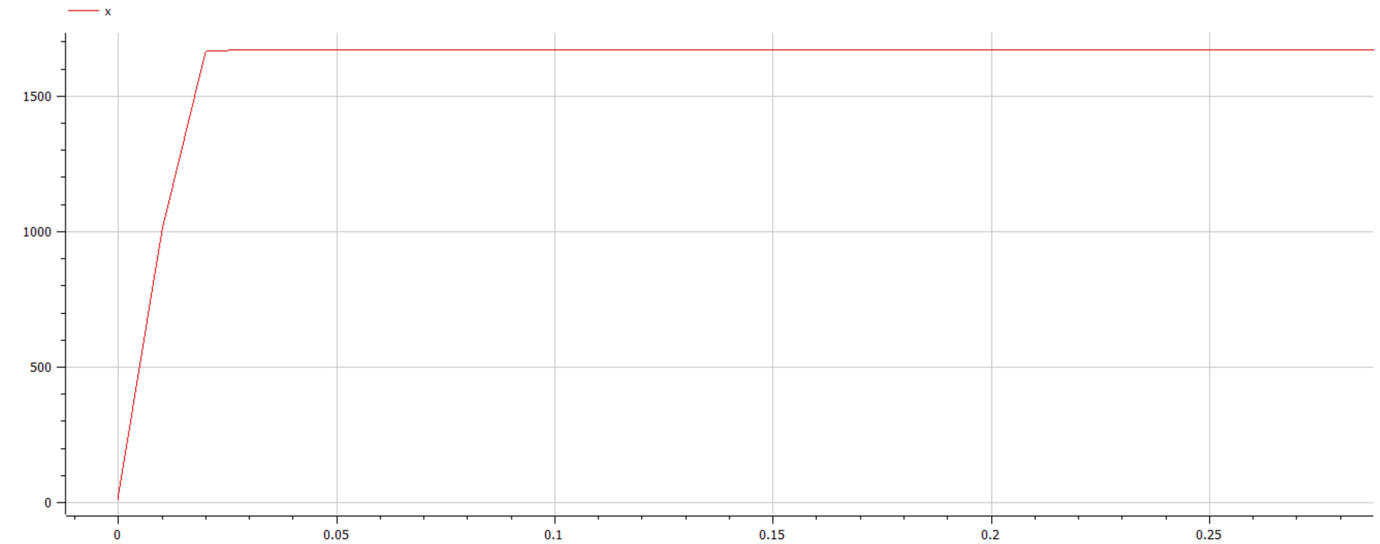
```
model lab07_3

  Real N = 1670;
  Real x;
  Real alpha1 = 0.8;
  Real alpha2 = 0.15;

initial equation

  x = 12;

equation

  der(x) = (alpha1 * time + alpha2 * sin(time) * x) * (N - x);

end lab07_3;
```

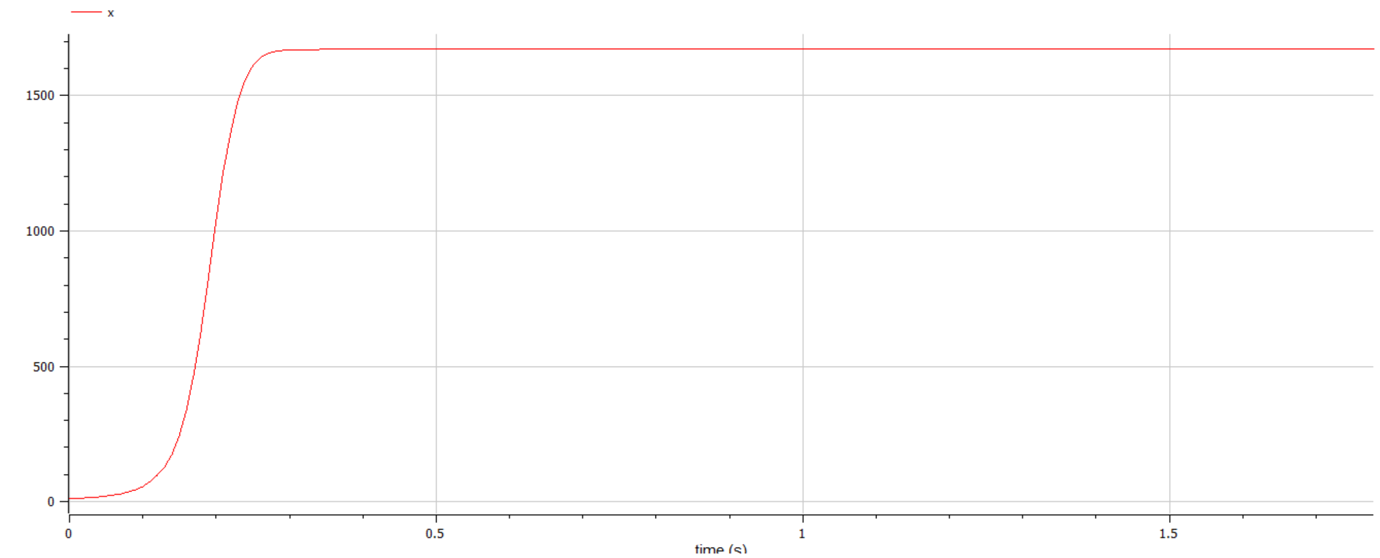
Далее я задал установки моделирования и смоделировал все три случая:



Графики изменения (второй и третий приближены для лучшей читаемости):







Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были построены графики изменения числа заинтересованных покупателей в ходе рекламной кампании на языках Julia и OpenModelica для трёх случаев. Во втором случае было найдено, в какой момент времени изменение числа заинтересованных покупателей было максимальным.