Цель работы

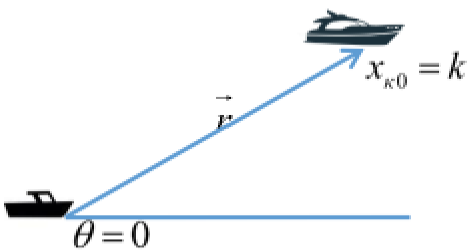
Решить задачу о погоне

Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 19,1 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,2 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Теоретическое введение

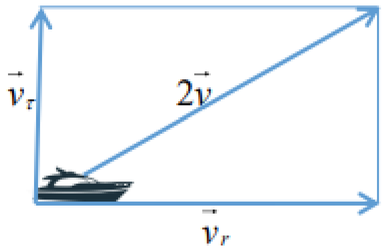
1. Принимает за t_0, $x_л0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_к0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения.
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_л0 (\theta = x_л0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой 

охраны
3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.
4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $k-x$ или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x / 2v$ (во втором случае $x + k / 2v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения: $$\frac {x}{v} = \frac {k-x}{2v}\ в \ первом \ случае$$ или

$$\frac {x}{v} = \frac {k+x}{2v}\ во \ втором$$

Отсюда найдём два значения $x_1 = \frac {k}{3}$ и $x_2 = k$, задача решается для двух случаев

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_τ - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем, что $\frac{dr}{dt} = v$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $v_\tau = r\frac{d\theta}{dt}$.



Из рисунка видно, что $v_\tau =\sqrt{4v^2 - v^2} = \sqrt{3}v$. Тогда получаем, что $r\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{3}v$

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений $$ \begin{equation*} \begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \ r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{3}v

\end{cases} \end{equation*} с \ начальными \ условиями \begin{equation*} \begin{cases}

```
\theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1

\end{cases}
```

\end{equation*}

\ или

\begin{equation*} \begin{cases}

```
\theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2

\end{cases}
```

\end{equation*} $$ Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $$\frac{dr}{d\theta}=\frac{r}{\sqrt{3}}$$ Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, вы получите траекторию движения катера в полярных координатах.

Выполнение работы

Открыв Pluto.jl, я начал писать код. Сначала я подключил библиотеки Plots и DiffetentialEquations:

```
using Plots
using DiffetentialEquations
```

Далее я ввёл данные, приведённые в условии задачи:

```
const k = 19.1 # Расстояние между лодкой и катером, когда туман развеялся
const vel_diff = 5.2 # Разница скоростей
```

и посчитал начальные точки и задал начальные углы для двух случаев:

```
x_firstInst = k/(vel_diff + 1) # Начальная точка первого случая
x_secondInst = k/(vel_diff - 1) # Начальная точка второго случая
teta01 = 0
teta02 = π
```

Далее написал функцию, являющуюся дифф. уравнением, необходимым для нахождения траектории:

```
function ode_fn(du, u, p, t) # Дифференциальное уравнение для вычисления
траектории катера
    r, teta = u
    du[1] = 1
    du[2] = sqrt(vel_diff^2 - 1) / du[1]
end

dt = 0.01 # Изменение времени
tspan = (0, 5) # Продолжительность
```

Далее с помощью ODEProblem передал в функцию ode_fn начальные значения и границы и с помощью solve решил её для шага dt:

```
prob1 = ODEProblem(ode_fn, [x_firstInst, teta01], tspan) # Задание начальных
условий в дифф. уравнение для первого случая

sol = solve(prob1, dtmax = dt) # Решение дифф. уравнения
```

После я передал массивы значений R1 и $\Theta1$, полученные с помощью solve:

```
```

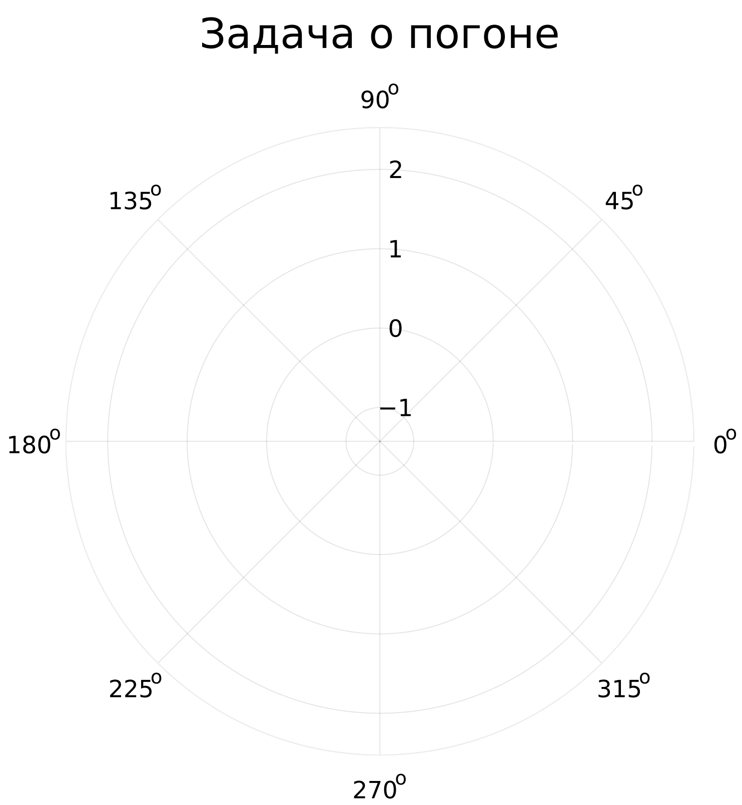
```
R1 = [u[1] for u in sol.u] # Изменение расстояния от центра
Θ1 = [u[2] for u in sol.u] # Изменение угла поворота относительно центра
```

И задал траекторию движения лодки:

```
boat_r = Float64[0, 8]
boat_θ = Float64[2 * π/3]
```

После этого я инициализировал полярную систему координат:

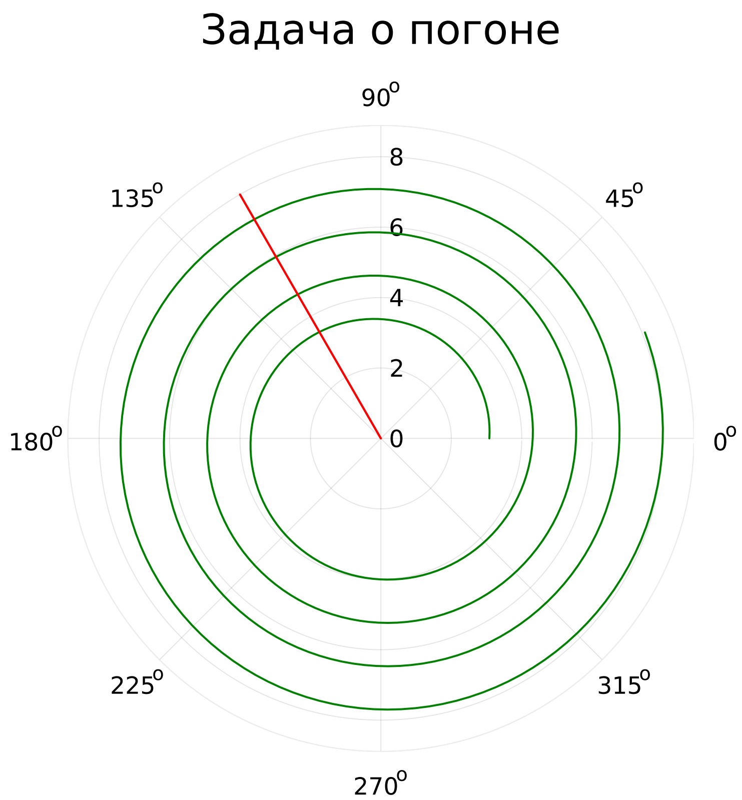
```
plt1 = plot( # Полярная система координат
    proj = :polar,
    aspect_ratio = :equal,
    dpi = 300,
    title = "Задача о погоне",
    legend = false
)
```



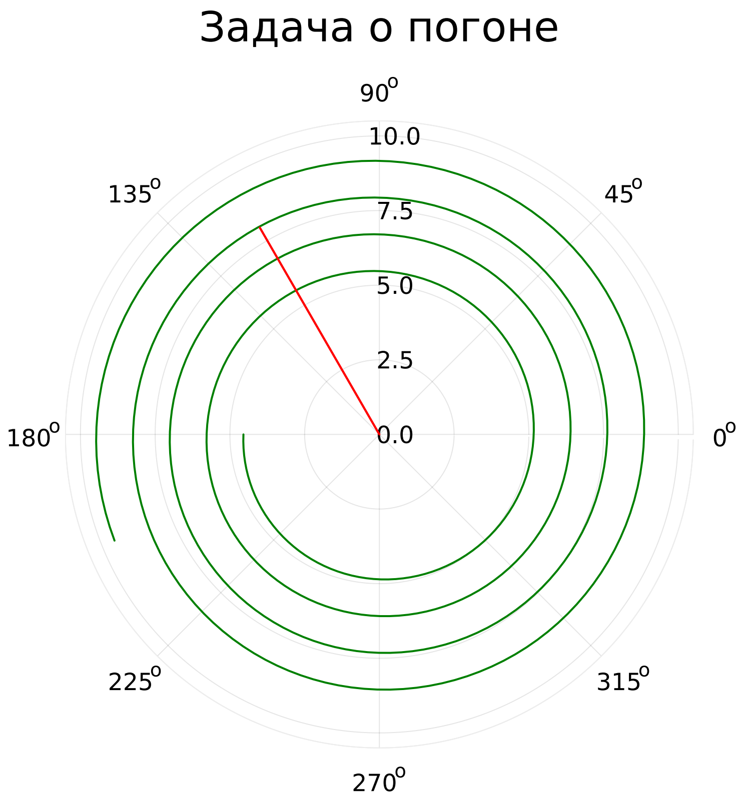
После этого я добавляю на неё траектории катера и лодки:

```
plot!( # Отрисовка траектории катера для первого случая
    plt1,
    Θ1,
    R1,
```

```
    label = "Траектория катера",
    color = :green
)
plot!( # Добавление траектории лодки
    plt1,
    boat_θ,
    boat_r,
    label = "Траектория лодки",
    color = :red
)
```



Выполнив аналогичные команды для второго случая получил следующую траекторию:



Вывод

Задача выполнена, траектории движения катера и лодки построены