Цель работы

Реализовать и проанализировать модель распространения эпидемии

Задача

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове (N=15 089) в момент начала эпидемии (t=0) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0)=95$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0)=45$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0)=N-I(0)- R(0)$.

Необходимо построить графики изменения числа особей в каждой из трех групп и рассмотреть, как будет протекать эпидемия в случае:

1. Если $I(0) \le I^*$
2. Если $I(0) > I^*$

Теоретическое введение

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через S(t). Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их I(t). А третья группа, обозначающаяся через R(t) – это здоровые особи с иммунитетом к болезни.

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t)>I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Таким образом, скорость изменения числа S(t) меняется по следующему закону:

$$ \frac{dS}{dt}= \begin{equation*} \begin{cases} -\alpha S, если \ I(t) > I^* \\ 0, если \ I(t) \le I^* \end{cases} \end{equation*} $$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится, т.е.:

$$ \frac{dI}{dt}= \begin{equation*} \begin{cases} \alpha S - \beta I, если \ I(t) > I^* \\ -\beta I, если \ I(t) \le I^* \end{cases} \end{equation*} $$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни)

$$ \frac{dR}{dt} = \beta I $$

Постоянные пропорциональности α и β, - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Выполнение работы

Julia

Открыв Pluto.jl я приступил к написанию кода. Сначала я подключил библиотеки Plots и DiffetentialEquations:

```
using Plots, DiffetentialEquations
```

Далее я ввёл начальные данные, представленные в условии задачи, коэффиценты α и β, а также временные рамки и интервал моделирования:

```
# Начальные условия

N = 15089
I0 = 95
R0 = 45
S0 = N - I0 - R0
tspan = (0, 20)
dt = 0.01
α = 0.35
β = 0.24
```

Далее я задал и решил систему дифференциальных для случая, когда $I(0) \le I^*$:

```
# Система ОДУ для I(0) <= I*

function ode_fn_1(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = 0
    du[2] = - β * I
    du[3] = β * I
end

prob1 = ODEProblem(ode_fn_1, [S0, I0, R0], tspan)

# Решение системы ОДУ

sol1 = solve(prob1, dtmax = dt)

diffS1 = [u[1] for u in sol1.u]
diffI1 = [u[2] for u in sol1.u]
diffR1 = [u[3] for u in sol1.u]
diffT1 = [timestamp for timestamp in sol1.t]
```

Следующим шагом я вывел изменение численности групп на график с помощью метода plot():

```
# График изменения численности групп

plt1 = plot(
    diffT1,
    diffI1,
    label = "Заражённые"
)

plot!(
    diffT1,
    diffR1,
    label = "Выздоровевшие"
)

plot!(
    diffT1,
    diffS1,
    label = "Восприимчивые"
)
```

График изменения количества заражённых и выздоровевших от времени без графика изменения числа восприимчивых:

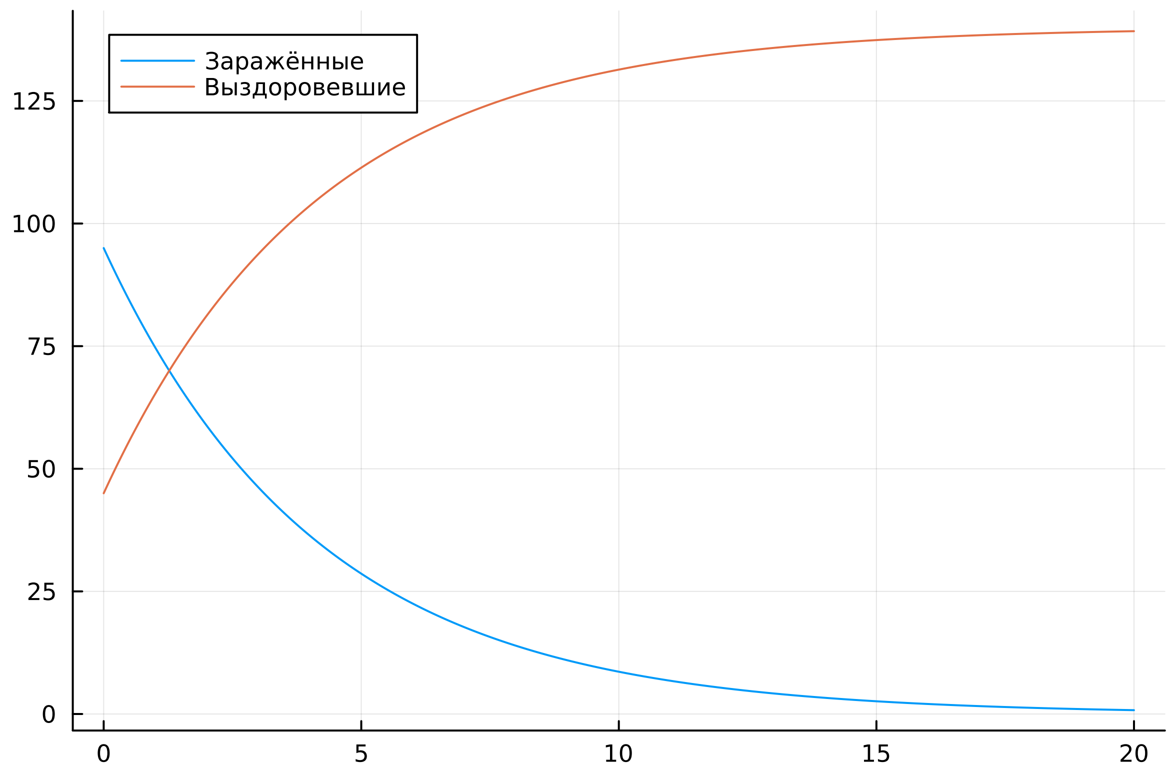
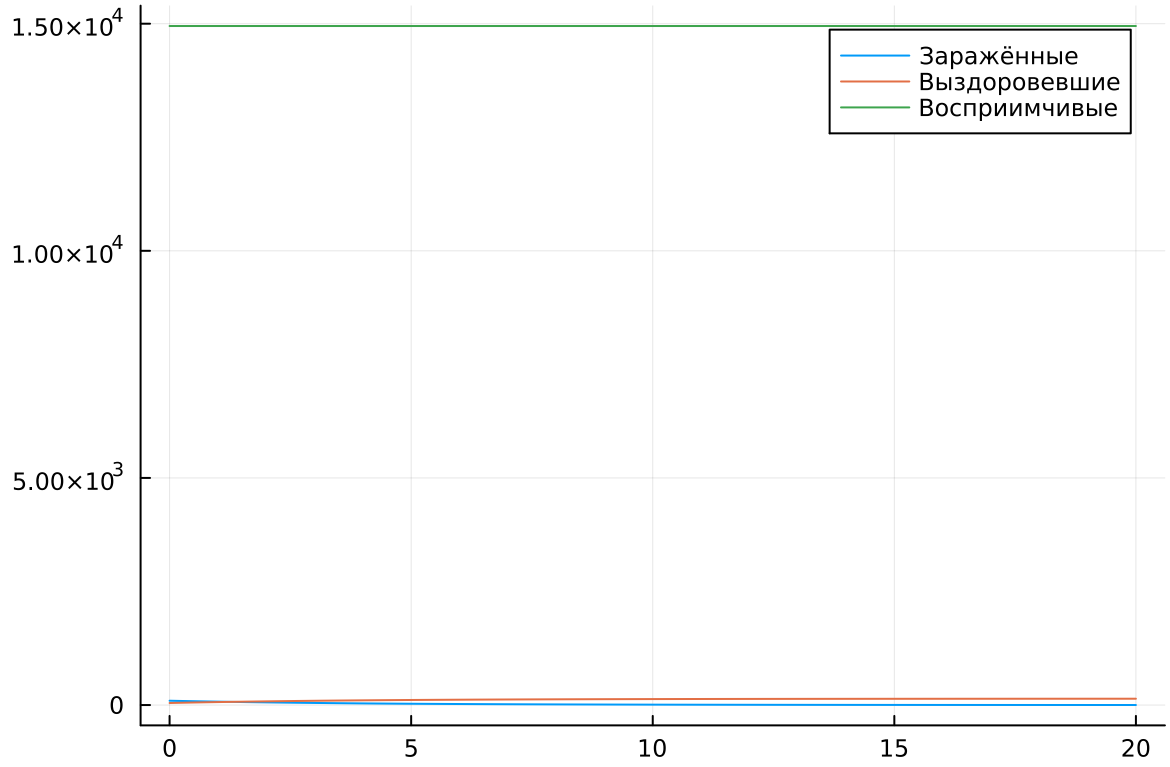


График изменения количества заражённых во всех группах:

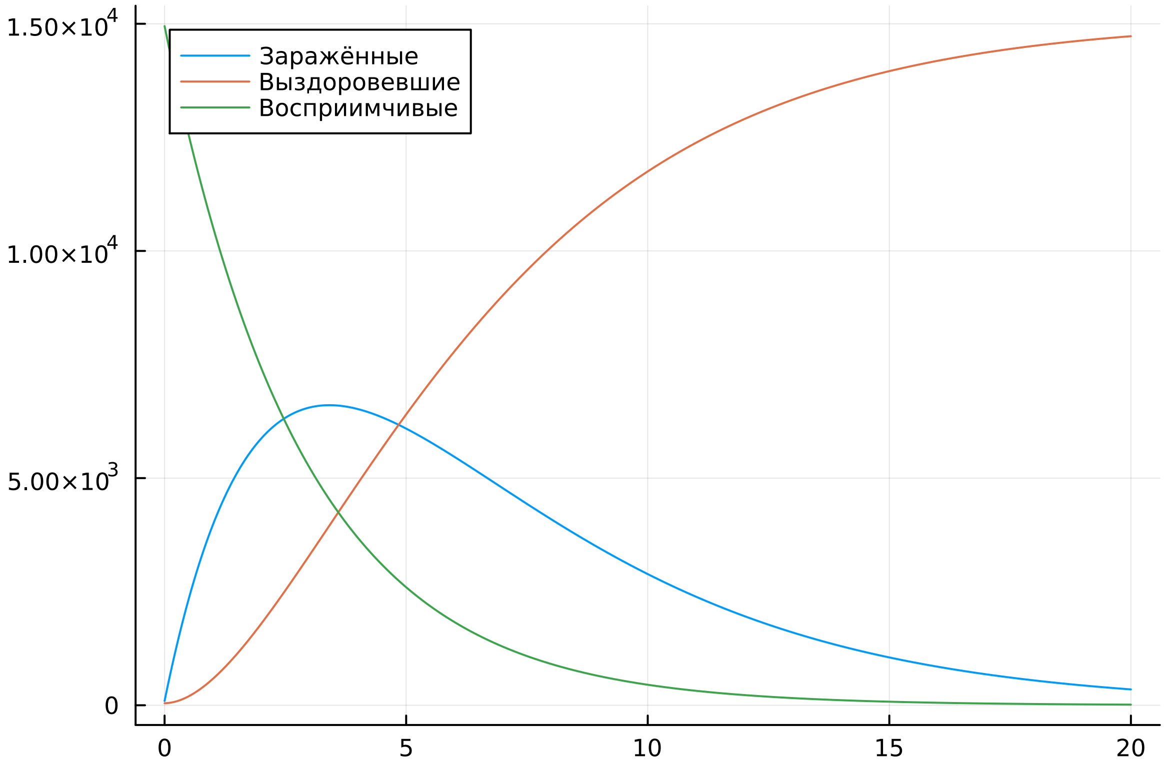


Для случая, где $I(0) > I^*$ решение аналогичное - меняется только формула в системе ОДУ:

```
# Система ОДУ для I(0) > I*

function ode_fn_2(du, u, p, t)
    S, I, R = u
    du[1] = - α * S
    du[2] = α * S - β * I
    du[3] = β * I
end

prob2 = ODEProblem(ode_fn_2, [S0, I0, R0], tspan)

# Решение системы ОДУ

sol2 = solve(prob2, dtmax = dt)

diffS2 = [u[1] for u in sol2.u]
diffI2 = [u[2] for u in sol2.u]
diffR2 = [u[3] for u in sol2.u]
diffT2 = [timestamp for timestamp in sol1.t]

# График изменения численности групп

plt2 = plot(
    diffT2,
    diffI2,
    label = "Заражённые"
)
```

```
plot!(
    diffT2,
    diffR2,
    label = "Выздоровевшие"
)

plot!(
    diffT2,
    diffS2,
    label = "Восприимчивые"
)
```

График изменения числа особей во всех группах от времени:



OpenModelica

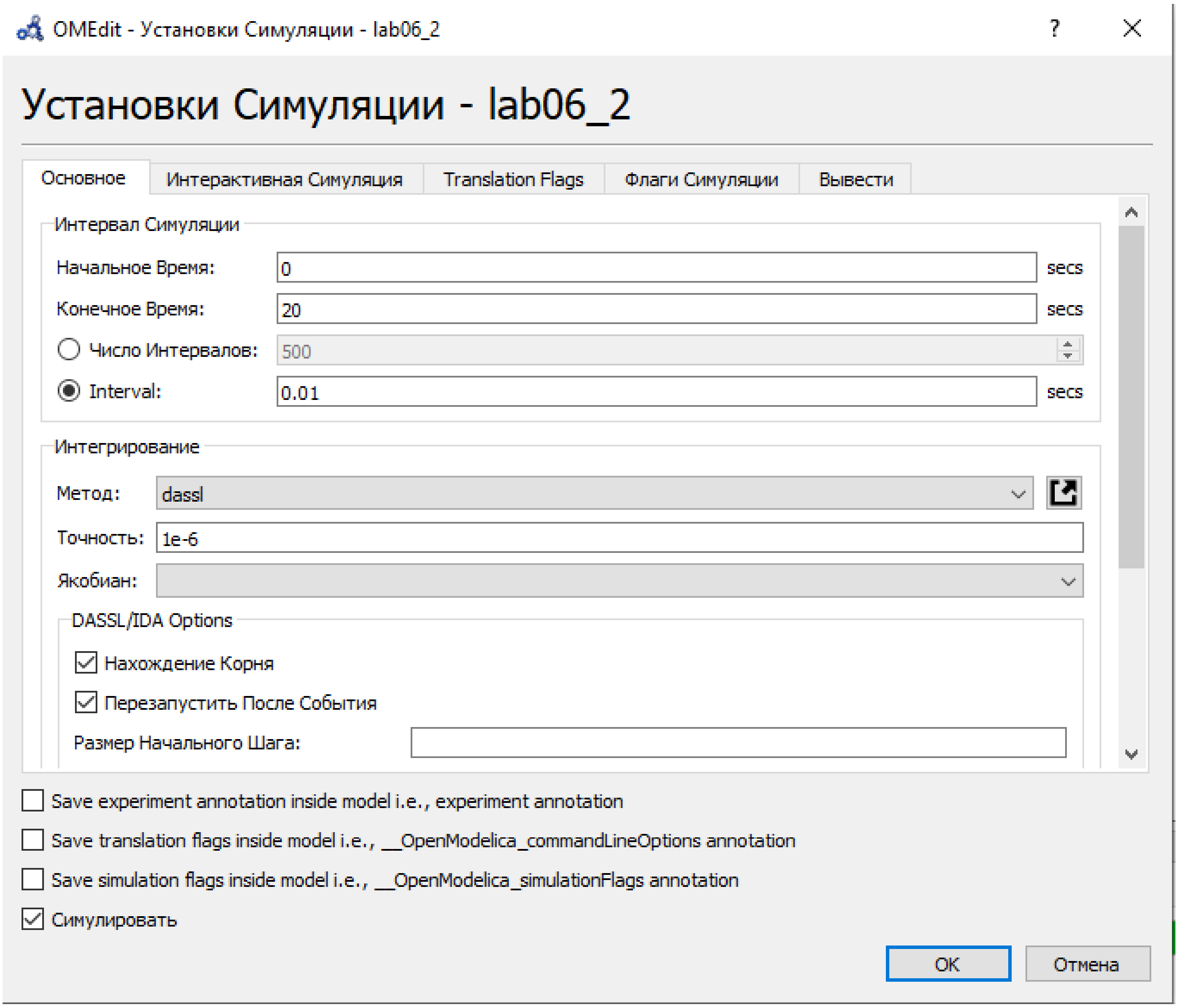
Открыв OpenModelica я задал константы N, α и β, а также переменные S, I и R.

После этого я задал начальные условия и систему ОДУ для первого случая, по которой была построена симуляция:

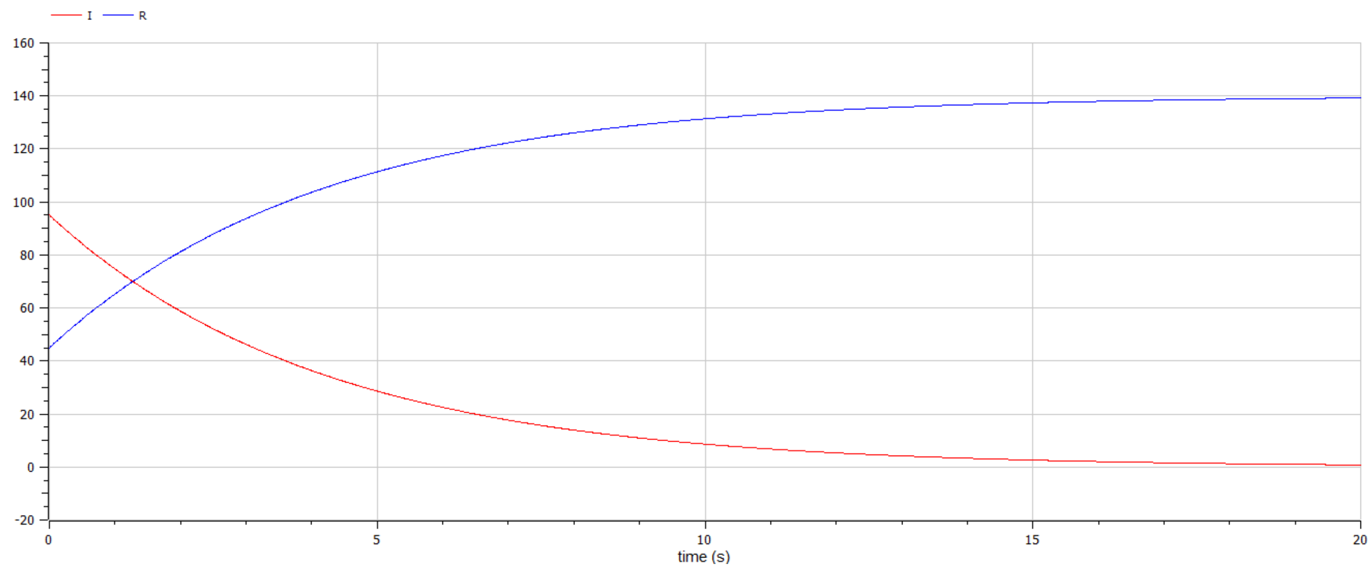
```
model lab06_1
  Real N = 15089;
  Real S;
  Real I;
  Real R;
  Real beta = 0.24;
  Real alpha = 0.59;
```

```
initial equation
  I = 95;
  R = 45;
  S = N - I - R;

equation
  der(S) = 0;
  der(I) = - beta * I;
  der(R) = beta * I;

end lab06_1;
```

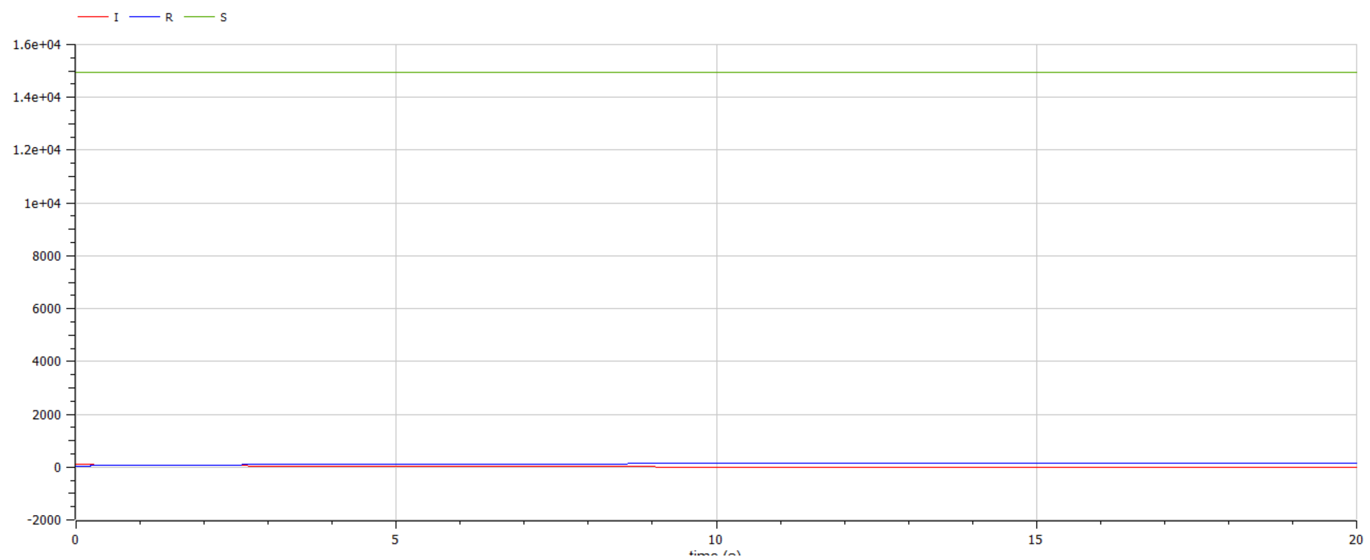
Задал установки симуляции (одинаковые для обоих случаев):



После этого вывел графики изменения групп I и R:



После этого вывел вместе с ними график изменения группы S:

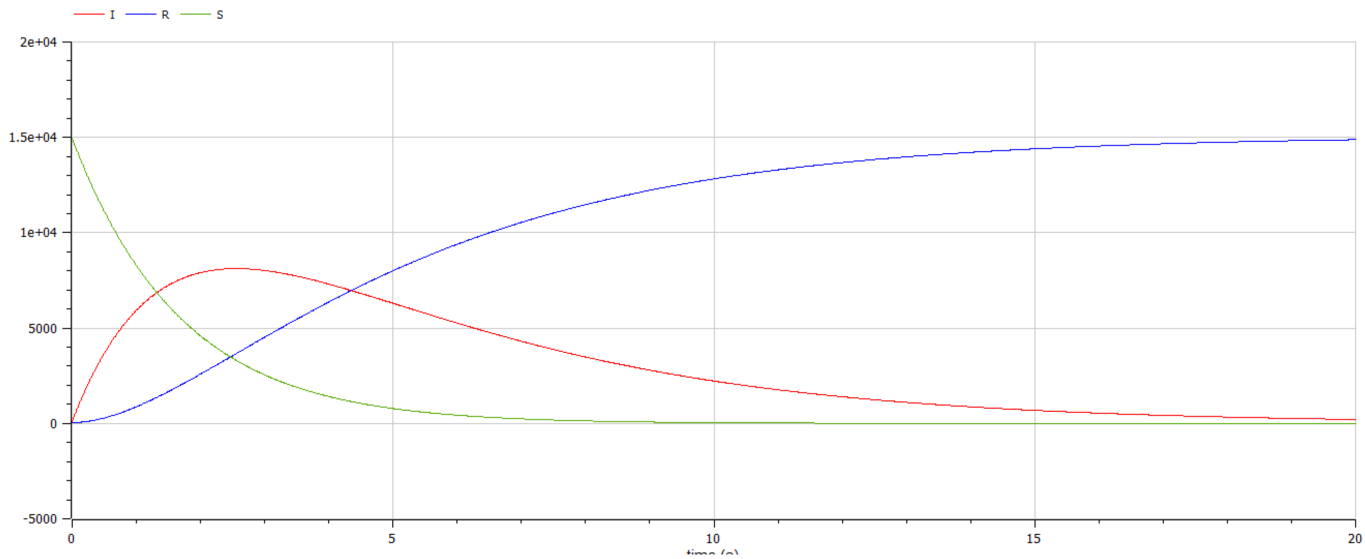


После этого я задал систему ОДУ для второго случая:

```
model lab06_2

  Real N = 15089;
  Real S;
  Real I;
  Real R;
  Real beta = 0.24;
  Real alpha = 0.59;

initial equation
  I = 95;
  R = 45;
  S = N - I - R;

equation
  der(S) = - alpha * S;
  der(I) = alpha * S - beta * I;
```

```
    der(R) = beta * I;

  end lab06_2;
```

Построил симуляцию и вывел графики изменения групп S, I и R:



Вывод

Я построил графики изменения групп S, I и R для двух случаев. В первом случае количество зараженных не увеличивалось, из-за чего они в течение некоторого времени выздоровели, не увеличивая своего количества.

Во втором случае инфецированные имели возможность заражать здоровых, из-за чего каждый человек в популяции острова был заражён и в конечном итоге выздоровел.