

Mémoire présenté le :
pour l'obtention du Diplôme Universitaire d'actuariat de l'ISFA
et l'admission à l'Institut des Actuaires

Par : VU Duc Thinh

Titre : Modélisation de risque catastrophique en réassurance vie dans le contexte de Solvabilité II

Confidentialité : ☐ NON ☒ OUI (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut des Actuaires

Entreprise : AXA Global Re
Nom :

Signature :

Directeur de mémoire en entreprise :
Nom : PHAM Hai Trung

Signature :

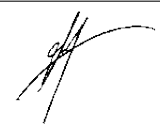
Invité :
Nom :

Signature :


Membres présents du jury de l'ISFA

Autorisation de publication et de mise en ligne sur un site de diffusion de documents actuariels (après expiration de l'éventuel délai de confidentialité)

Signature du responsable entreprise



Signature du candidat



Résumé

AXA Global Re est une entité du groupe AXA créée pour centraliser les opérations de réassurance vie et non-vie du groupe. La branche de la réassurance vie de la compagnie est exposée à plusieurs risques dont le risque catastrophique qui est un risque majeur.

La mise en place de la directive Solvabilité II a changé fondamentalement la façon dont les compagnies d'assurance et de réassurance calculent leur besoin en capital (SCR). L'objectif principal de cette réforme est de s'assurer que les montants de SCR reflètent au mieux le profil de risque des assureurs et des réassureurs.

C'est dans le contexte de Solvabilité II qu'AXA Global Re a développé un modèle interne pour calculer ses différents SCR. Le but de ce mémoire est de développer une modélisation pour le calcul du SCR qui représente le risque catastrophique sur les activités de réassurance de personnes de l'entreprise, particulièrement le risque de catastrophe naturelle, technologique et le risque de terrorisme.

Ce mémoire contient 5 sections. Dans la première section, nous exposerons les notions de réassurance vie et différents aspects du calcul de SCR sous Solvabilité II. Ensuite, nous développons les nouvelles modélisations pas à pas dans les 3 sections suivantes. Enfin, les résultats du modèle ainsi que l'étude de sensibilité des paramètres retenus seront évoqués dans la dernière section.

Mots-clés : Solvabilité 2, SCR CAT Vie, risque catastrophique, réassurance vie, catastrophe naturelle, catastrophe technologique, terrorisme.

Abstract

AXA Global Re is an entity of the AXA group created to centralize the life and non-life reinsurance operations of the group. The life reinsurance branch of the company exposes to several risks of which the catastrophic risk is a major risk.

The implementation of the Solvency II directive has fundamentally changed the way insurance and reinsurance companies calculate their capital requirement (SCR). The main objective of this reform is to ensure that the SCR amounts reflect adequately the risk profile of insurers and reinsurers.

It is in the context of Solvency II, AXA Global Re has developed an internal model to calculate its different SCRs. The purpose of this thesis is to develop a methodology for calculating the SCR which represents the catastrophic risk on the company's life reinsurance activities, in particular the risk of natural catastrophe, technological catastrophe and the risk of terrorism.

This thesis is divided into 5 sections. In the first section, we will introduce the notions of life reinsurance and different aspects in the calculation of SCR under Solvency II. Then, we develop the new models step by step in the 3 following sections. Finally, the results of the model as well as the sensitivity study of the selected parameters will be discussed in the last section.

Keywords : Solvency 2; SCR Life CAT; catastrophic risk; life reinsurance; natural catastrophe; technological catastrophe; terrorism.

Remerciements

J'adresse un grand merci à mon tuteur de stage, M.PHAM Hai Trung pour sa disponibilité, son expert, sa patience et ses pertinentes orientations qui m'ont permis de progresser et de réaliser ce travail.

Je remercie mon manager David BILLOD DE FILIQUIER pour avoir répondu à plusieurs de mes questions et m'avoir donné des conseils très précieux dans la réalisation de mes missions.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance envers l'ensemble de l'équipe Risk Management d'AXA Global Re pour leur accueil et leur bonne humeur générale. J'ai eu un grand plaisir de travailler avec vous.

Mes remerciements vont également à l'équipe pédagogique du Master d'Actuariat de l'ISFA pour leur présence, leur compétence et leur patience au cours de ma formation. J'adresse plus particulièrement mes remerciements à M.Didier RULLIERE, Mme.Esterina MASIELLO, Mme.Diana DOROBANTU et M.Samy BRIAS pour leurs disponibilités tout au long de mon parcours à l'ISFA.

Je remercie également M.Frédéric PLANCHET, mon tuteur pédagogique pour sa disponibilité et pour son aide.

Je n'aurais pas pu réaliser ce mémoire sans mes amis. C'est pour ça je tiens à remercier tous mes amis qui ont su rendre ce long chemin à travers les études le plus intéressant et sympathique possible.

Pour finir, mes plus grands remerciements vont à ma famille pour leur soutien et pour leur amour sans fin tout au long de ces années.

Table des matières

Remerciements	3
Table des matières	4
Introduction	7
1 Généralité de réassurance vie et Solvabilité II	8
1.1 L'assurance de personnes	8
1.1.1 Définition et le marché de l'assurance de personnes	8
1.1.2 Assurance prévoyance - santé	9
1.2 Notions liées à la réassurance	11
1.2.1 Définition de la réassurance	11
1.2.2 Le marché de la réassurance	12
1.3 Classification des traités de réassurance	13
1.3.1 Les formes de réassurance	13
1.3.2 Les catégories de traité de réassurance	14
1.4 Présentation d'AXA Global Re	18
1.4.1 La création d'AXA Global Re	18
1.4.2 Mécanisme du pool vie et le profil de risque d'AXA Global Re en réassurance vie	18
1.5 Généralité sur Solvabilité II	19
1.5.1 Solvabilité II	19
1.5.2 Le calcul de SCR dans la Formule Standard	21
1.6 Calcul du SCR avec le modèle interne chez AXA Global Re	24
1.6.1 Modèle Interne d'AXA Global Re et le SCR Vie	24

1.6.2	Calcul du SCR CAT Vie dans le modèle interne d'AXA Global Re	25
2	Le panorama du modèle de calcul du SCR CAT Vie non-pandémique	27
2.1	Périmètre de modélisation	27
2.2	Données entrantes	28
2.2.1	Données des traités XL par événement	28
2.2.2	Données des portefeuilles d'assurance	29
2.2.3	Données pour la modélisation des fréquences et des sévérités des catastrophes	30
2.3	Les risques de catastrophes naturelles, technologiques et attentats terroristes pour AXA Global Re	32
2.3.1	Analyses descriptives des catastrophes naturelles et technologiques	33
2.3.2	Analyses descriptives des attentats terroristes	35
2.4	Le panorama du modèle	36
2.4.1	L'objectif et les spécifications du modèle	36
2.4.2	Hypothèses du modèle et méthodologie générale	38
2.4.3	La structure du modèle	40
3	La modélisation des fréquences pays par pays	44
3.1	Théorie des copules	44
3.1.1	La définition et l'estimation des copules	44
3.1.2	Copule dans la modélisation des variables de comptage	47
3.1.3	Processus d'estimation et simulation de la copule dans le modèle	49
3.2	Estimation des lois marginales	50
3.2.1	Lois de fréquence usuelles	50
3.2.2	Construction des lois marginales pour les pays ayant peu de données . . .	53
3.2.3	Choix de méthodologies de calibration de la fréquence des catastrophes naturelles/technologiques	57
3.2.4	Choix des méthodologies de calibration de la fréquence des attentats terroristes	60
3.3	Estimation de la structure de dépendance des fréquences	63
3.3.1	Les copules usuelles	63

3.3.2	Résultat de l'estimation de la copule de Student	64
4	La modélisation de sévérité	68
4.1	Modélisation de la sévérité d'une catastrophe	68
4.1.1	Modélisation de la mortalité dans la population générale	68
4.1.2	Modélisation de perte pour un portefeuille d'assurance	71
4.1.3	La prise en compte du risque d'invalidité et des frais médicaux	75
4.2	Modélisation des catastrophes transfrontalières	78
4.2.1	Définition et statistiques descriptives des catastrophes transfrontalières .	78
4.2.2	L'idée générale de la modélisation	80
4.2.3	Simulation de fréquence des événements transfrontaliers région par région	82
4.2.4	Formation d'une catastrophe transfrontalière	84
4.2.5	Description du processus de simulation	89
5	Résultat et études de sensibilité	91
5.1	Résultat du modèle	91
5.2	Études de sensibilité	92
5.2.1	Sensibilité sur l'hypothèse de loi de sévérité	93
5.2.2	Sensibilité sur la structure de dépendance des fréquences	95
5.2.3	Sensibilité sur d'autres paramètres du modèle	98
	Conclusion	103
	Bibliographie	105

Introduction

Avec la mise en place de la directive Solvabilité II, les réassureurs doivent détenir suffisamment de capital pour pouvoir faire face à des chocs bicentennaires. De plus, ces montants de capital doivent refléter adéquatement les risques pris par des compagnies de réassurance. C'est dans ce contexte qu'AXA Global Re, l'entité du groupe AXA créée pour centraliser les opérations de réassurance du groupe, développe son modèle interne pour calculer ses besoins en capital pour différents risques pour mieux refléter son profil de risque.

Ce mémoire a pour but de proposer une modélisation du risque catastrophique non-pandémique auquel sont exposées les activités de réassurance vie d'AXA Global Re.

Le mémoire s'articule sur 5 chapitres avec la structure suivante :

- ◇ Dans le premier chapitre, nous présenterons tout d'abord l'assurance de personne et en particulier l'assurance prévoyance santé. Ensuite, les notions de la réassurance vie qui est un outil de transfert de risque dans le cadre des activités d'assurance de personne seront discutées. Puis nous donnerons quelques pistes sur le profil de risque d'AXA Global Re ainsi que sur les calculs de SCR en Formule Standard et dans le modèle interne de l'entreprise.
- ◇ Dans le deuxième chapitre, nous donnerons la vision générale du modèle concernant différents éléments : le périmètre, les données entrantes, l'objectif et les spécifications, la méthodologie et notamment la structure du modèle. Dans ce chapitre, des analyses descriptives des risques de catastrophes naturelles, technologiques et terroristes pour AXA Global Re seront également présentées.
- ◇ Dans le troisième chapitre, la modélisation des fréquences des événements catastrophiques pays par pays qui constitue la première brique de l'approche "fréquence-sévérité" retenue pour le modèle sera introduite.
- ◇ Ensuite, l'autre brique de l'approche "fréquence-sévérité" retenue qui concerne la modélisation des sévérités sera abordée. Dans ce chapitre, nous développerons également une nouvelle méthodologie pour la simulation des événements transfrontaliers afin de rendre la modélisation des traités de réassurance "internationaux" plus précise.
- ◇ Enfin, les résultats du modèle ainsi que l'étude de sensibilité des paramètres retenus seront évoqués dans le dernier chapitre.

Chapitre 1

Généralité de réassurance vie et Solvabilité II

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion de réassurance vie, qui consiste en un outil de transfert de risque dans le cadre des activités d'assurance de personnes et de présenter brièvement Solvabilité II qui constitue le contexte de ce mémoire.

1.1 L'assurance de personnes

1.1.1 Définition et le marché de l'assurance de personnes

L'assurance de personnes

Un contrat d'assurance est une convention par laquelle l'assureur s'engage à verser un montant d'argent à l'assuré afin d'indemniser l'assuré de son dommage causé par un événement aléatoire en échange du paiement d'un montant appelé prime d'assurance.

Les opérations d'assurance pourraient être segmentées en 2 familles : assurance de dommages et assurance de personnes.

L'assurance de personnes protège l'assuré et aussi sa famille et ses ayants droit contre les risques inhérents à la vie humaine. Les garanties principales offertes en assurance de personnes comprennent les garanties de type prévoyance - santé, dépendance, assurance emprunteur et épargne - retraite.

Le marché de l'assurance de personnes

Comme montre la figure 1.1 ci-dessous, en 2020, le montant total de cotisation de l'assurance française atteint 201,9 milliards d'euros dont 70,18 % en assurance de personnes. L'assurance maladie et accidents corporels (prévoyance - santé) constituent 17,9 % du montant de cotisation de l'assurance de personnes et la branche d'assurance vie et capitalisation contribue aux 82,1% restants.

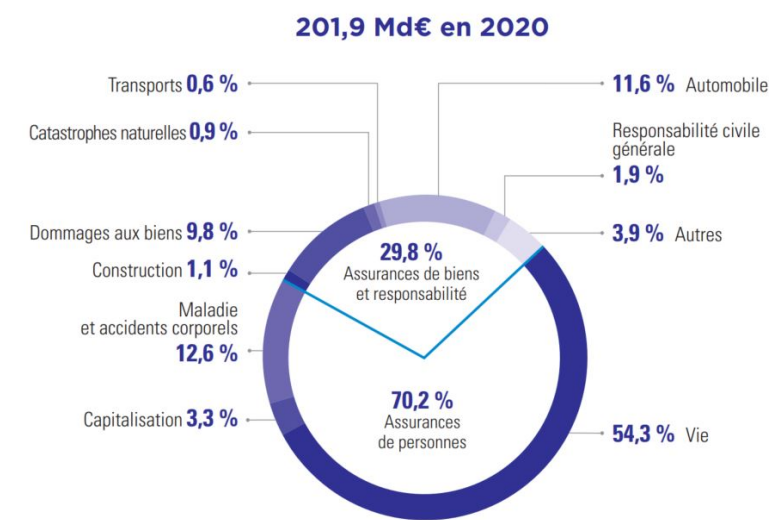


FIGURE 1.1 – Cotisations par branche du marché d'assurance française

Source : France Assureurs (2021)

1.1.2 Assurance prévoyance - santé

Pour l'instant, nous nous concentrons sur l'assurance prévoyance - santé qui fait l'objet de l'étude de ce mémoire.

Un contrat d'assurance prévoyance - santé a pour objectif de protéger contre les aléas de la vie comme le risque de décès, d'incapacité, d'invalidité et de couvrir les frais liés à des soins médicaux comme l'hospitalisation ou les consultations chez un spécialiste.

Un contrat prévoyance - santé peut être souscrit individuellement ou collectivement. Dans le premier cas, une personne souscrit par elle-même à une solution proposée par les assureurs. Au contraire, dans le cas collectif, les contrats sont souscrits par un organisme au profit de ses employés et en général, une partie des cotisations de chaque employé sera prise en charge par l'organisme.

Comme illustré dans la figure 1.2 ci-dessous, parmi un montant total de cotisations de 141,7 milliards d'euros en assurance de personnes, l'assurance prévoyance - santé contribue à 27 % de ce volume et plus de 50 % de ce montant correspond à des contrats souscrits à titre collectif.

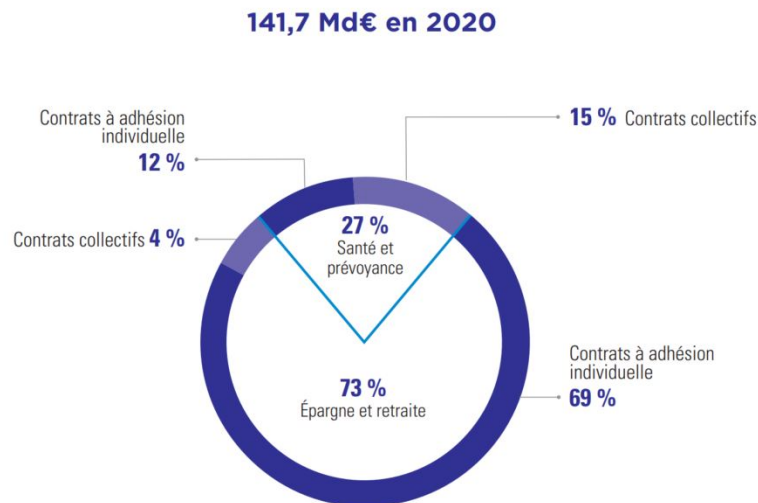


FIGURE 1.2 – Cotisations par type de produit dans l'assurance de personnes du marché d'assurance française

Source : France Assureurs (2021)

Assurance prévoyance

Un contrat de prévoyance prévoit des protections contre deux grandes familles de risques :

◇ Risque de décès

En cas de décès de l'assuré, l'assureur versera une prestation sous la forme d'un capital décès, une rente versée au conjoint survivant ou une rente éducation pour financer les études des enfants survivants.

◇ Risque d'invalidité/incapacité

Il y a généralement 3 cas concernant ce type de risque :

- Si l'assuré subit une diminution d'au moins deux tiers des capacités de travail d'une manière permanente provoquée par une maladie ou un accident d'origine non professionnelle, il s'agit de l'invalidité. Dans ce cas, l'assuré peut recevoir une pension d'invalidité attribuée par la Sécurité sociale et une rente en complément de la part de l'assureur qui lui permet de pallier la perte de revenus jusqu'à sa retraite.
- Si l'assuré est victime d'un accident ou d'une maladie professionnelle et que sa capacité de travail est réduite définitivement, il s'agit de l'incapacité permanente

et non de l'invalidité. Dans ce cas, selon le taux d'incapacité permanente (IPP) déterminé par la CPAM, l'assuré peut recevoir un capital ou une rente viagère.

- Si l'assuré ne peut plus travailler pendant un certain temps, il s'agit de l'incapacité temporaire de travail. La cause ayant entraîné une incapacité temporaire peut être d'origine professionnelle ou non-professionnelle. Dans ce cas, l'assuré recevra le versement d'Indemnités Journalières pour compenser la perte de revenus pendant son arrêt de travail. Il y a 3 possibilités de sortie de l'état d'incapacité temporaire : le rétablissement, le passage en invalidité/incapacité permanente ou au pire, le décès.

Assurance santé

L'assurance santé, quant à elle, a pour l'objectif de couvrir les frais liés à des soins médicaux. Elle peut soit être souscrite à titre individuel ou à titre collectif par un organisme.

La souscription à un contrat d'assurance santé est très importante parce qu'elle permet de diminuer le montant restant à charge de l'assuré notamment dans le cas d'une hospitalisation suite à un accident ou si l'assuré souffre d'une maladie chronique.

1.2 Notions liées à la réassurance

1.2.1 Définition de la réassurance

Les activités de réassurance sont des activités qui traitent des risques transférés par les compagnies d'assurance et d'autres compagnies de réassurance. La réassurance peut être vue comme une activité "d'assurance" pour les compagnies d'assurance. Le réassureur peut également partager le risque avec d'autres réassureurs. Dans un contrat de réassurance, le réassureur protégera une partie des portefeuilles des assureurs en échange d'une rémunération qui s'appelle la prime de réassurance, avec des conditions précisées dans le contrat de réassurance.

Le rôle de la réassurance dans l'économie est essentiel et multiple. Tout d'abord, la réassurance agit comme un assureur secondaire pour protéger le bilan de la cédante contre les risques extrêmes ou contre le cumul de sinistres "normaux". De plus, la réassurance aide une compagnie d'assurance à augmenter sa marge de solvabilité, tout en maintenant la capacité de souscription.

Il existe des notions fondamentales en réassurance qui sont mentionnées ci-dessous :

- La cédante : représente la société d'assurance.
- Le courtier : l'organisme chargé de négocier et placer les programmes de réassurance de la cédante auprès des compagnies de réassurance.
- Un risque : un événement dont la survenance aléatoire, est susceptible de causer une conséquence mauvaise aux personnes ou aux biens. Dans le contexte de la réassurance

vie, les risques concernés sont principalement le risque de mortalité, morbidité, invalidité, longévité et frais médicaux.

- Le contrat de réassurance : Le contrat de réassurance est un document qui définit les engagements des partis ainsi que les termes et conditions du mécanisme de la réassurance. Le caractère international complexifie le contrat de réassurance. La plupart des contrats de réassurance sont valables pour un an. Le contrat de réassurance s'applique à une seule cédante. Il peut, cependant, y avoir plusieurs réassureurs (généralement de 4 à 10 réassureurs) dans le cadre d'un contrat qui s'appelle la coréassurance.

1.2.2 Le marché de la réassurance

Le marché de la réassurance est un marché dynamique et concurrentiel. Selon l'Association des professionnels de la réassurance en France (APREF), le montant total de prime cédée valait 265 milliards d'euros au niveau mondial en 2020 dont 192 milliards d'euros en réassurance non-vie et 96 milliards d'euros en réassurance vie.

En France, le montant de chiffre d'affaires accepté pour 2020 s'élève à 5,1 milliards d'euros pour les réassureurs et 1,2 milliard d'euros pour la Caisse centrale de réassurance (CCR). Hors CCR, 60% des primes brutes collectées concernent la réassurance non-vie et 40% concernent la réassurance vie. 34% du chiffre d'affaires provient du non proportionnel et 66% provient du proportionnel. En réassurance vie, la prévoyance représente 70% du chiffre d'affaires.

Les sociétés de réassurance sont souvent de nature internationale. Cela permet à ces entreprises de diversifier plus efficacement leurs portefeuilles. En fait, les défauts systématiques sont peu probables car les compagnies d'assurance partagent le risque. Mais une catastrophe naturelle à grande échelle comme l'ouragan Katrina peut mettre en faillite de nombreuses sociétés de réassurance en même temps. La réassurance joue également un rôle important en tant que consultant de la compagnie d'assurance dans le cadre d'une commercialisation de nouveaux produits ou dans la revue des réserves, etc.

La caractéristique principale du marché de la réassurance est son caractère cyclique. Les primes baissent et augmentent au cours de cycles pluriannuels en fonction de l'évolution des sinistres et de l'effet concurrentiel entre les acteurs selon les principes de l'offre et demande.

Lorsque les prix sont élevés, le marché est appelé "Hard Market", qui survient généralement après qu'un cycle de baisse a conduit à un marché des prix bas. Donc, non seulement les réassureurs du cycle précédent veulent en profiter, mais cela va également attirer de nouveaux réassureurs pour entrer sur le marché. Comme il existe de nombreux réassureurs sur le marché, les prix commencent à baisser en raison de la nature concurrentielle. Lorsque les prix de la réassurance tombent à un niveau bas, le marché est appelé "Soft Market".

Le marché de la réassurance vie

On estime que la taille du marché mondial de la réassurance vie va dépasser 135 milliards de dollars en 2021, soit un taux de croissance annuel de 6,2 % depuis 2020. Le marché mondial de la réassurance vie est très concentré, avec un petit nombre de grands acteurs constituant la majorité du marché. Les cinq principaux acteurs dominent le marché mondial de la réassurance vie et détiennent environ 70% des parts de marché. Ils sont susceptibles de maintenir leur domination, en particulier sur les marchés développés, malgré les opportunités de croissance pour certains acteurs plus petits. Ces principaux acteurs comprennent Swiss Reinsurance Company Ltd, Munich Re Group, Reinsurance Group of America (RGA), SCOR SE et Hannover Re.

En terme d'ampleur du marché, avec 46,9 % part de marché, l'Amérique du Nord est le marché le plus gros pour la réassurance vie. Elle est suivie par l'Europe de l'Ouest et puis d'autres régions.

1.3 Classification des traités de réassurance

1.3.1 Les formes de réassurance

Il existe principalement 2 formes de réassurance :

- La réassurance obligatoire : Les traités couvrent l'intégralité du portefeuille, il n'y a pas de sélection des risques. L'objectif est de réassurer un ensemble de risques (par exemple un portefeuille d'assurance automobile). Les traités sont négociés avant leurs dates effectives et de plus, l'assureur s'engage à céder toutes les polices du portefeuille et le réassureur s'engage à les accepter sans aucune sélection.
- La réassurance facultative : L'objectif est de protéger un risque spécifique (par exemple une usine). Dans un traité facultatif, l'assureur peut décider de céder le risque ou non et en contrepartie, le réassureur a la possibilité de l'accepter ou non.

Un traité de réassurance peut être également classifié selon la base sur laquelle se détermine l'engagement du réassureur :

- Traités “base survenance” (“loss occurring” en anglais) : Ce sont des contrats à court terme dans lesquels tous les sinistres d'un portefeuille donné, survenus dans la période définie contractuellement sont réassurés quelle que soit la date de déclaration et quelle que soit la date d'émission du contrat d'assurance dans le portefeuille.

Par exemple, un traité de réassurance couvrant la période du 1 janvier 2020 au 31 décembre 2020 sur la base “survenance”. Un contrat d'assurance entre l'assuré et l'assureur a été accordé le 31 décembre 2019 (avant la date de début du traité). Tous les

sinistres relatifs à ce contrat qui surviennent entre 1 janvier 2020 et 31 décembre 2020 seront pris en charge par le réassureur. Par conséquent, avec un traité “base survenance”, le réassureur pourrait être conduit à payer un sinistre qui serait déclaré plusieurs années après la date d’échéance du traité, tant que cela se produit pendant la durée de couverture du traité.

- Traités “base souscription” (“risk attaching” en anglais) : Ce sont des contrats à long terme dans lesquels tous les sinistres relatifs à des polices d’assurance sous-jacentes de la cédante ayant pris l’effet pendant la durée du contrat de réassurance sont couverts même s’ils surviennent après la date de fin du contrat.

Par exemple, supposons qu’il y a un contrat de réassurance couvrant la période du 1 juin 2019 au 31 mai 2020 sur la base de souscription. La cédante souscrit un contrat au 1 juillet 2019 et il y a un sinistre sous ce contrat d’assurance qui survient le 1 juillet 2020, ce sinistre sera couvert par le traité de réassurance même s’il survient en dehors de la période effective du traité. Au contraire, s’il y a un contrat souscrit en dehors de la période de couverture du traité, les sinistres associés ne seront pas couverts même s’ils surviennent dans la période d’effectif du traité.

1.3.2 Les catégories de traité de réassurance

Les traités de réassurance sont divisés en traité proportionnel et non-proportionnel selon la figure 1.3

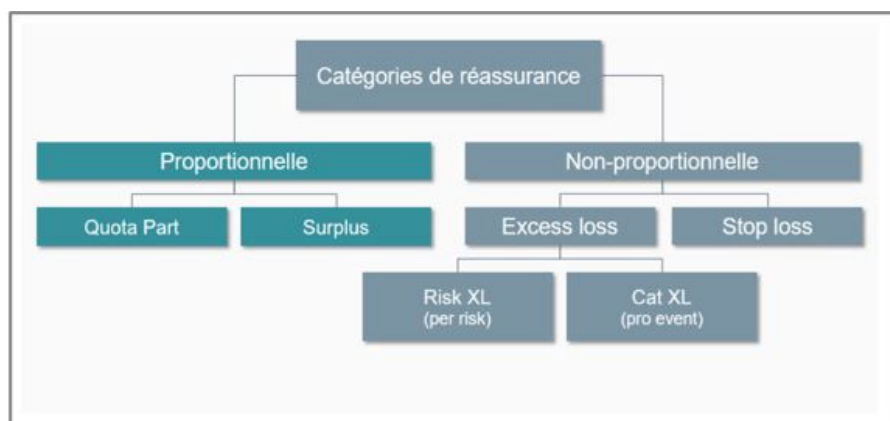


FIGURE 1.3 – Catégories de traité de réassurance

Traité proportionnel

Lorsque le sinistre payé par la compagnie de réassurance est proportionnel à la prime qu’elle perçoit, il s’agit d’un traité proportionnel. Ainsi, la performance de la cédante est intimement liée à celle de la société de réassurance, ce qui limite ainsi l’aléa moral. Par exemple, une

compagnie d'assurance reçoit une prime de 25 % et à son tour prend en charge 25% du montant de sinistre. Ainsi, le résultat du réassureur dépend directement de la qualité de la souscription de la cédante. Le réassureur partage donc non seulement les bénéfices avec la cédante mais aussi les pertes potentielles.

Les frais de gestion et d'acquisition du portefeuille sont entièrement supportés par la cédante. Cette partie du coût est incluse dans la "commission de réassurance" qui est versée par le réassureur pour couvrir sa part. Si le contrat est signé par l'intermédiaire d'un courtier, la "commission de courtage" est également incluse dans la prime de réassurance (environ 1% à 5%).

Les deux principaux types de traité proportionnel sont : Quota-Part (Quota Share) et Excédent de Plein (Surplus)

✓ Quota-Part (Quota Share)

Le principe d'un traité Quota-Part est d'avoir un taux de cession unique appliqué à tous les risques du portefeuille quelle que soit la somme assurée. Grâce à la formule ci-dessous, nous pouvons voir que ce traité ne modifie pas le ratio S/P.

	Total	Cédé au réassureur	Conservé par l'assureur
Primes	$P = \sum_{i=1}^n P_i$	$a P = \sum_{i=1}^n a P_i$	$(1 - a) P = \sum_{i=1}^n (1 - a) P_i$
Sinistres	$S = \sum_{i=1}^n S_i$	$a S = \sum_{i=1}^n a S_i$	$(1 - a) S = \sum_{i=1}^n (1 - a) S_i$

où :

- n : le nombre de contrats d'assurance dans le portefeuille
- S_i : le montant de sinistre du i -ème contrat
- P_i : le montant de prime du i -ème contrat
- a : le taux de cession défini dans le contrat de réassurance

✓ Surplus/ Excédent de plein

Le fonctionnement du Surplus est similaire à celui d'un traité Quote-Part. Cependant, au lieu de définir un taux de cession unique, le taux de cession sera différent pour chaque risque.

Le taux de cession de risques i est calculé par la formule :

$$x_i = \min(\max(\frac{S_i - R}{S_i}, 0), \frac{C}{K_i})$$

Avec l'excédent de plein, l'assureur prendra à sa charge les sinistres inférieurs à R . Cela permet à l'assureur de conserver une prime plus élevée pour bénéficier d'une protection

contre des sinistres plus importants. Cependant, les sinistres dépassant le capital de l'excédent de pleine sont à la charge de la cédante. Autrement dit, le risque de fréquence n'est pas bien assuré par ce traité.

Traité non-proportionnel

Les traités non-proportionnels sont définis par une priorité (correspondant à une franchise que l'on notera D) et une portée (notée L). Le réassureur prend alors à sa charge les montants de sinistre qui dépassent la priorité, à hauteur d'un montant qui est égal à la portée. Il existe deux types de traités de réassurance non-proportionnels : traité en excédent de sinistre (XL) et traité en excédent de perte annuelle (Stop Loss).

✓ Traité en excédent de sinistre - XL

Le traité en excédent de sinistre fonctionne comme un contrat d'assurance avec une franchise. En effet, le réassureur indemnise un sinistre plus important qu'une priorité qui est dénoté D . Le traité définit aussi une portée (dénotée L) qui représente le montant maximum d'indemnisation du réassureur. Autrement dit, la compagnie d'assurance conservera la portion de sinistre en-dessous de la priorité et au-dessus de la somme de la priorité et la portée. Un traité en excédent de sinistre est noté : $L \text{ XS } D$.

L'engagement du réassureur est calculé avec la formule suivante :

$$\text{Engagement du réassureur} = \begin{cases} 0, & \text{si } X \leq \text{priorité} \\ X - \text{priorité}, & \text{si } \text{priorité} \leq X \leq \text{priorité} + \text{portée} \\ \text{portée}, & \text{si } \text{priorité} + \text{portée} \leq X \end{cases}$$

où X est le montant d'un sinistre.

Nous pouvons reformuler la formule comme suit :

$$\text{Engagement de réassureur} = \min(\max(X - D, 0), L)$$

Il existe 3 sous-catégories de traité en excédent de sinistre :

- Excédent de sinistre par risque (XL par risque ou XL par tête) : Le traité de ce type s'applique à chaque sinistre individuel généré par un risque. Cela permet de se protéger contre la survenance de gros sinistres.
- Excédent de sinistre par événement (XL par événement) : Le traité de ce type s'applique à l'agrégation des sinistres causés par un même événement.

Dans cette catégorie, il existe un type de traité pour protéger le portefeuille contre la survenance des événements catastrophiques qui peut causer un grand nombre de sinistres en même temps. Ce type de traité s'appelle "CAT XL par événement". Il est caractérisé par un "seuil" s de nombre de décès minimum. C'est à dire, un événement

est considéré "catastrophique" s'il a causé au moins s décès dans le portefeuille de la compagnie d'assurance qui est cédé auprès du réassureur.

Normalement, pour borner la responsabilité du réassureur, à côté de la limite L qui représente l'engagement maximum du réassureur pour chaque catastrophe, il y a une autre limite définie dans le contrat qui s'appelle *Annual Aggregate Limit* en anglais. C'est le montant maximum d'indemnisation du réassureur pendant une année de réassurance.

- Excédent de sinistre par événement et risque : Le traité de ce type peut être affecté par des incidents tels que des incendies qui pourraient affecter une même police.

Deux mesures sont souvent utilisées dans la réassurance : le "Rate On Line" (ROL) et le "Pay Back". Le ROL représente le coût de 1 euro de couverture pour la tranche considérée. Il se définit par la formule suivante :

$$\text{ROL} = \frac{\text{Prime}}{\text{Portée}}$$

Quant à lui, le Pay Back représente le nombre d'années de primes nécessaire pour payer un sinistre, il se calcule comme :

$$\text{Payback} = \frac{\text{Portée}}{\text{Prime}}$$

✓ Excédent de perte annuelle (Stop Loss)

Un traité de type "Excédent de perte annuelle" fonctionne selon le même principe qu'un traité XL mais avec l'objectif de protéger le ratio S/P. Autrement dit, un traité "Stop Loss" est placé pour protéger la compagnie d'assurance contre non seulement la survenance des sinistres graves voire catastrophiques mais aussi contre un grand nombre de sinistres attritionnels survenant pendant l'année. Ce traité permet à l'assureur d'avoir une protection contre le risque de perte de résultat.

Dans ce traité, les indicateurs de priorité et de portée sont exprimés en pourcentage. En notant S_i le montant du i -ème sinistre, P la prime d'assurance et n le nombre de sinistres survenus, la charge du réassureur dans un traité "Stop Loss" se calcule avec la formule suivante :

$$\text{Engagement du réassureur} = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{P} \leq \text{priorité} \\ \left(\frac{\sum_{i=1}^n S_i}{P} - \text{priorité} \right) \times P, & \text{si } \text{priorité} \leq \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{P} \leq \text{priorité} + \text{portée} \\ \text{portée} \times P, & \text{si } \text{priorité} + \text{portée} \leq \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{P} \end{cases}$$

Autrement dit, l'engagement du réassureur se calcule avec la formule suivante :

$$\text{Engagement du réassureur} = \text{Min}\left(\text{Max}\left(\frac{S}{P} - \text{priorité}, 0\right), \text{portée}\right) \times P$$

où : $S = \sum_{i=1}^n S_i$

1.4 Présentation d'AXA Global Re

1.4.1 La création d'AXA Global Re

Le groupe AXA opère dans le domaine de l'assurance et de la réassurance avec un montant total d'actifs de 805 milliards d'euros au 31 décembre 2021. C'est une compagnie internationale qui opère dans plusieurs pays en Europe, Asie, Amérique Latine et Afrique.

En 2020, le chiffre d'affaires de la compagnie est de 96 723 millions d'euros, qui a généré un résultat net d'environ 3 milliards d'euros selon [AXA Group \(2020\)](#). Le groupe et ses filiales principales maintiennent une notation de perspective "stable" de solidité financière selon S&P Global Ratings et Moody's Investors Service. Sur le côté de la solvabilité, le rapport annuel 2020 dit que les capitaux propres du groupe sont de 71,6 milliards d'euros avec un ratio de Solvabilité II de 200%.

AXA Global Re (AGRe) a été créée en 2017 à partir de la fusion entre l'entité de réassurance vie (AXA Global Life) et de réassurance non-vie (AXA Global P & C) du groupe AXA. Elle est la société captive de réassurance et de service du groupe AXA. Elle joue le rôle d'un réassureur interne et aussi d'une compagnie de service qui fournit des supports de souscription et de gestion de sinistres aux entités d'AXA. La compagnie accepte les risques cédés par les entités locales d'AXA et ensuite, elle rétrocède une part, variant de 0% à 100% du risque au marché de la réassurance. Les risques conservés sont mutualisés dans un pool de risques, contribuant à l'optimisation de la réassurance au sein du groupe AXA. De par la nature des opérations internationales du Groupe AXA et comme les clients d'AGRe sont les entités locales d'AXA, le portefeuille d'AGRe est généralement bien diversifié.

1.4.2 Mécanisme du pool vie et le profil de risque d'AXA Global Re en réassurance vie

Il existe différentes catégories de réassurance dans le portefeuille d'AGRe : traité proportionnel, traité non-proportionnel (Excédent de sinistre, Excédent de perte annuelle et CAT XL par événement). Dans un traité de réassurance vie, AGRe accepte généralement 100 % des risques des cédantes (qui sont uniquement des entités locales du Groupe AXA).

Quelques traités sont ensuite rétrocédés dans les mêmes conditions aux réassureurs externes. Dans un tel cas, AGRe est exposée au risque de défaut de ces réassureurs externes. Les parties conservées sont mutualisées dans le "Pool Vie".

Pour protéger le résultat du pool, AGRe place sur le marché de la réassurance un traité CAT XL par événement qui s'appelle "Group Cover" pour protéger l'ensemble des risques du pool contre les événements extrêmes.

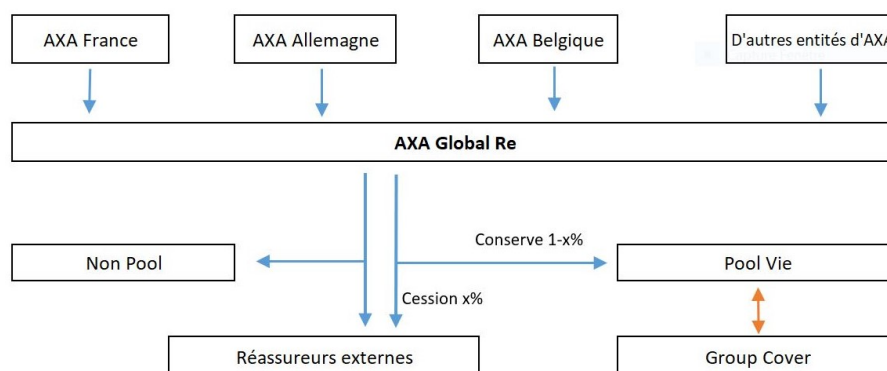


FIGURE 1.4 – Mécanisme du pool vie d'AXA Global Re

Dans le contexte particulier de la réassurance vie, avec la structure de Pool Vie, AGRé est exposée aux plusieurs risques qui sont décrits par la suite :

- Risques de marché sur ses investissements dans le marché
- Risque de crédit qui est né dans le processus de rétrocession aux réassureurs externes
- Risques vie relatifs à ses traités de réassurance vie
- Risques opérationnels sur les procédures, le personnel et les systèmes internes

Concernant les risques vie dans le profil de risque d'AGRé, ils correspondent aux risques suivants :

- Risques biométriques : Longévité, Mortalité, Invalidité, Frais médicaux, Catastrophe
- D'autres risques : Rachat (hausse, baisse, masse), Dépenses, Autre comportement client (ou "OCB" en anglais)

1.5 Généralité sur Solvabilité II

1.5.1 Solvabilité II

La directive Solvabilité II a pour but de corriger les insuffisances de Solvabilité I en tant que le cadre réglementaire dans le secteur de l'assurance et de la réassurance en l'Union Européenne. L'enjeu de la directive est de permettre aux autorités de mieux contrôler, d'assurer un bon fonctionnement des entreprises dans le marché, et de déterminer en amont des problématiques pour protéger les consommateurs.

Les grands principes de Solvabilité II sont de :

- Harmoniser le marché de l'assurance et de la réassurance européenne
- Donner des exigences quantitatives qui reflètent au mieux les risques auxquels sont exposés les entreprises d'assurance et de réassurance

La directive Solvabilité II est articulée autour de 3 piliers :

- Le pilier 1 (Exigences quantitatives) donne les règles sur l'évaluation des provisions techniques, les règles relatives aux actifs et les calculs des besoins en capital (SCR/MCR).
- Le pilier 2 (Exigences qualitatives) donne les règles relatives aux supervisions et aux contrôles des risques en interne des sociétés. Dans le pilier 2, chaque compagnie d'assurance doit mettre en place le Own Risk Assessment and Solvency (ORSA) pour identifier et quantifier sa capacité à continuer à respecter les exigences du pilier 1.
- Le pilier 3 (Discipline du marché) donne les règles relatives aux informations à destination du public et du régulateur ainsi que les règles sur la transparence de publication d'information

Le pilier 1 traite le côté quantitatif des risques. C'est-à-dire qu'il définit les exigences des fonds propres que les entreprises doivent remplir et qu'il précise les méthodes d'évaluation des provisions techniques. Le pilier 1 spécifie deux exigences de capital : SCR (Solvency Capital Requirement) et MCR (Minimum Capital Requirement).

Le SCR représente le montant de fonds propres nécessaires pour qu'une compagnie d'assurance ou de réassurance puisse faire face à des pertes inattendues générées par des événements extrêmes pendant un an d'opération. Le MCR, par ailleurs, représente le montant minimum de fonds propres qu'une compagnie doit avoir pour être capable d'opérer.

Dans le cadre de Solvabilité II, le SCR est calculé comme le montant de capital requis qui permet de limiter la probabilité de ruine économique d'une compagnie à l'horizon d'un an à 0,5% ou autrement dit, de limiter la probabilité que l'entreprise fasse faillite une fois tous les 200 ans.

Le calcul du SCR peut être effectué en appliquant la Formule Standard fournie par les autorités de régulation européennes ou à l'aide d'un modèle interne développé par l'entreprise, ce qui nécessite l'approbation de l'autorité de contrôle. Ce modèle interne doit satisfaire un certain nombre de règles et l'entreprise doit être capable de prouver que le modèle reflète au mieux son profil de risque auprès de l'autorité de contrôle.

1.5.2 Le calcul de SCR dans la Formule Standard

Formule Standard

La Formule Standard est une approche de calcul du SCR qui se base sur l'agrégation des risques avec des matrices de corrélation qui sont communes à tous les assureurs. L'idée est d'évaluer le bilan central et de réévaluer le bilan avec l'application d'un choc instantané sur les risques qui concernent les assureurs.

La Formule Standard utilise une méthode modulaire dans laquelle les SCR d'une compagnie sont classifiés en des modules Marché, Santé, Défaut, Vie et Non vie. L'avantage de cette approche est sa simplicité de mise en œuvre et de maintenance.

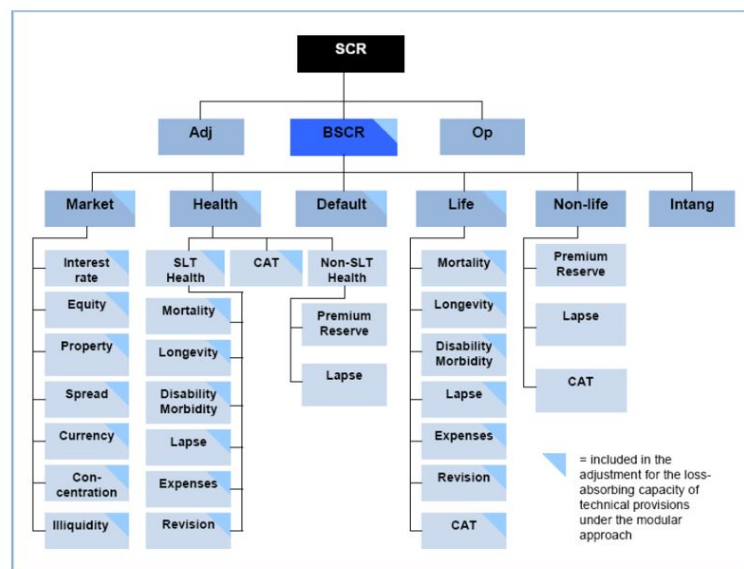


FIGURE 1.5 – Catographie des risques en Formule Standard

La formule de calcul du SCR avec l'approche Formule Standard est :

$$SCR = BSCR + Adj + SCR_{\text{opérationnel}}$$

où :

- le $BSCR$ est le SCR de base calculé à partir de l'agrégation des SCR des différentes catégories de risques en utilisant une matrice de corrélation. Les SCR des ces catégories de risques, à leur tour, sont calculés à partir de l'agrégation des SCR des sous-modules.
- le Adj est l'ajustement pour prendre en compte la capacité d'absorption des pertes par les provisions techniques et par les impôts différés
- $SCR_{\text{opérationnel}}$ est le SCR correspondant au risque opérationnel

Dans notre étude, nous nous intéressons principalement au risque CAT du module “Vie” et du module “Santé”.

SCR CAT Vie dans la Formule Standard

Le risque de souscription Vie est le deuxième module le plus cher pour le SCR d’une compagnie d’assurance vie derrière le risque de marché. Dans la Formule Standard, le module Vie se compose de 7 sous-modules qui correspondent à différents risques : mortalité, longévité, invalidité, dépenses, révision, rachat et catastrophe.

Dans un premier temps, le SCR pour chaque risque individuel est déterminé comme la différence entre le NAV (Net Asset Value - défini comme la différence entre les actifs et les provisions techniques) dans le bilan non stressé et le NAV dans le bilan stressé. Les paramètres du scénario choqué sont calibrés pour qu’ils correspondent au quantile à 99,5 % de la distribution de risque. Le calcul de SCR_{Vie} est également fait en agrégeant les SCR des sous-risques par le biais d’une matrice de corrélation.

En effet, le SCR_{Vie} est calculé comme suit :

$$SCR_{Vie} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

où SCR_i et SCR_j correspondent aux risques i et j du module vie. $Corr_{i,j}$ correspond à la corrélation entre le risque i et le risque j . Cette corrélation est définie dans la matrice ci-dessous :

	Mortalité	Longévité	Invalidité	Dépenses	Révision	Rachat	CAT vie
Mortalité	1						
Longévité	- 0,25	1					
Invalidité	0,25	0	1				
Dépenses	0,25	0,25	0,5	1			
Révision	0	0,25	0	0,5	1		
Rachat	0	0,25	0	0,5	0	1	
CAT vie	0,25	0	0,25	0,25	0	0,25	1

TABLE 1.1 – Matrice de corrélation du module de souscription Vie

Le risque CAT Vie est le risque de perte ou de changement de la valeur des engagements d’assurance résultant de catastrophes. Ce risque n’a aucune corrélation avec le risque de longévité

et de révision. Le calcul du $SCR_{CAT Vie}$ est effectué en se basant sur la perte en fonds propres suite à une hausse soudaine de 0,15 point de pourcentage des taux de mortalité utilisés dans le calcul des provisions. Le $SCR_{CAT Vie}$ est calculé avec la formule suivante :

$$SCR_{CAT Vie} = 0,15\% \times CAD$$

où CAD sont des capitaux assurés de la garantie décès.

SCR CAT Santé dans la Formule Standard

Dans la Formule Standard, le SCR catastrophique en assurance santé est corrélé avec deux autres sous-modules du module “Santé” pour en déduire le $SCR_{Santé}$:

$$SCR_{Santé} = \sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} \times SCR_i \times SCR_j}$$

où SCR_i , SCR_j représentent les SCR pour les sous-modules i et j , respectivement. $Corr_{i,j}$ est le coefficient de corrélation entre le sous-module i et le sous-module j , défini selon la matrice suivante :

	Santé non-SLT	Santé SLT	CAT Santé
Santé non-SLT	1		
Santé SLT	0,5	1	
CAT Santé	0,25	0,25	1

TABLE 1.2 – Matrice de corrélation du SCR du module souscription Santé

Le SCR CAT Santé est calculé en prenant en compte 3 types de catastrophes :

$$SCR_{CAT Santé} = \sqrt{SCR_{masse}^2 + SCR_{concentration}^2 + SCR_{pandémie}^2}$$

Il s’agit du SCR que les compagnies d’assurance/réassurance doivent calculer en considérant l’impact de 3 types de catastrophes : “accident de masse”, “concentration d’accidents” et “pandémie” sur ses bilan. Ces trois scénarios de catastrophes sont supposés indépendants dans la Formule Standard.

1.6 Calcul du SCR avec le modèle interne chez AXA Global Re

1.6.1 Modèle Interne d'AXA Global Re et le SCR Vie

Modèle Interne d'AXA Global Re

Les compagnies d'assurance et de réassurance peuvent adopter une autre méthode pour calculer le SCR qui est plus adaptée à leur profil de risque. L'utilisation du modèle interne au lieu de la Formule Standard est soumise à l'approbation de l'Autorité de contrôle prudentiel et de résolution (ACPR).

AGRe dispose chez eux d'un modèle interne qui modélise tous les risques matériels auxquels la compagnie est exposée. Le SCR dans le modèle interne d'AGRe est dénommé STEC ("Short Term Economic Capital"). Cependant, dans ce mémoire, nous utilisons toujours la notion SCR pour éviter l'introduction d'une notion supplémentaire.

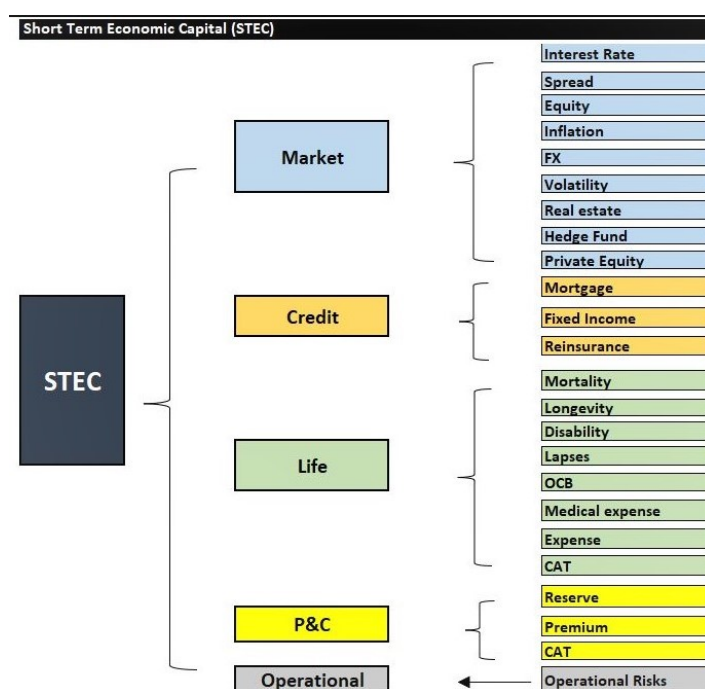


FIGURE 1.6 – Catographie des risques dans le Modèle Interne d'AXA Global Re

Le modèle interne d'AGRe se compose de 5 modules : Marché, Crédit, Vie, P&C et Opérationnel. Dans ce modèle interne, les SCR d'AGRe sont également calculés en agrégeant les SCR des modules en utilisant une matrice de corrélation.

Calcul du SCR Vie dans le modèle interne d'AXA Global Re

Les risques techniques Vie dans le modèle interne d'AGRe sont décomposés en des sous-modules suivants :

- Risque mortalité : le risque de sous-estimation de la mortalité pour les entreprises qui sont sensibles à une augmentation des taux de mortalité
- Risque longévité : le risque de sur-estimation des taux de mortalité pour les garanties sensibles à une baisse des taux de mortalité
- Risque invalidité : le risque de sous-estimation des taux d'invalidité ainsi que de sur-estimation des taux de retour en bonne santé
- Risque de rachat (baisse/hausse) : le risque lié à des pertes d'adhérents plus faibles/grandes qu'espéré pour les entreprises qui sont sensibles à une réduction/augmentation des rachat d'adhérents
- Risque de rachat massif : le risque de rachat indésirable imprévu pendant l'année à venir à cause d'un facteur qui conduit à la perte massive de clients
- Risque de frais : le risque lié à une sous-estimation du niveau des frais de gestion
- Risque de frais médicaux : le risque de sous-estimation de la sinistralité des contrats d'assurance santé
- Risque de catastrophe Vie : le risque d'avoir un excès de mortalité, d'invalidité et de frais médicaux suite à des catastrophes

Dans un premier temps, chacun des SCR des sous-modules est calculé. Puis, ils sont agrégés avec une matrice de corrélation pour en déduire le SCR Vie d'AGRe.

Différent de la Formule Standard, le module santé est regroupé dans le module Vie dans le modèle interne d'AGRe. Le module Vie d'AGRe traitera les risques de mortalité, d'incapacité/invalidité et de frais médicaux associés aux traités de réassurance vie qui protègent les portefeuilles d'assurance type prévoyance-santé.

1.6.2 Calcul du SCR CAT Vie dans le modèle interne d'AXA Global Re

Le SCR CAT Vie sert à couvrir les scénarios extrêmes causant un excès de mortalité, d'invalidité et de frais médicaux qui conduisent à une perte significative pour la compagnie.

Dans le modèle interne d'AGRe, le SCR CAT Vie est calculé en considérant l'impact des scénarios extrêmes sur le passif d'AGRe. Nous considérons 4 types de catastrophes dans le module CAT Vie : les pandémies/épidémies, les catastrophes naturelles, les catastrophes technologiques (ou "man made" en anglais) et les attaques terroristes.

Les 4 types d'événements sont divisés en deux groupes : CAT pandémique et CAT non-pandémique. Le module CAT non-pandémique traite les catastrophes naturelles, technologiques et les attentats terroristes. En supposant que les risques pandémiques et les risques non-pandémiques sont indépendants, le SCR CAT Vie d'AGRe est calculé avec la formule suivante :

$$SCR_{\text{CAT Vie}} = \sqrt{SCR_{\text{CAT Vie pandémique}}^2 + SCR_{\text{CAT Vie non-pandémique}}^2}$$

Le risque pandémique concerne les maladies qui s'étendent rapidement au niveau mondial et conduisent à une augmentation très forte de décès, d'invalidité et de frais médicaux dans le portefeuille protégé par un traité de réassurance.

Le risque de catastrophe naturelle concerne les événements naturels graves comme une tempête, un tsunami ou une inondation tandis que le risque de catastrophe technologique concerne les événements "man-made" comme par exemple une explosion d'usine ou des accidents de transport. Le risque terroriste, quant à lui, inclut les événements terroristes qui sont définis comme l'utilisation de la violence intentionnelle à des fins idéologiques, politiques ou religieuses.

Dans le cadre de ce mémoire, nous développons une modélisation pour calculer le SCR CAT Vie non-pandémique dans le modèle interne d'AGRe.

Chapitre 2

Le panorama du modèle de calcul du SCR CAT Vie non-pandémique

L'objectif de ce chapitre est de fournir une vision générale du modèle de calcul du SCR CAT Vie non-pandémique dans le modèle interne d'AXA Global Re. Dans un premier temps, les risques de catastrophes naturelles, de catastrophes technologiques et d'attentats terroristes concernés par le modèle seront présentés. Ensuite, nous introduirons la méthodologie générale ainsi qu'un résumé du processus du modèle.

2.1 Périmètre de modélisation

Le modèle SCR CAT Vie non-pandémique considère les risques de catastrophes naturelles, technologiques et terroristes pour les traités de réassurance d'AGRe.

Dans le portefeuille d'AGRe, les risques de catastrophes non-pandémiques pourraient impacter à la fois les traités XL par tête et les traités CAT XL par événement. AGRe estime que le risque principal pour les traités XL par tête est le risque pandémique/épidémique tandis que les risques principaux pour les traités CAT XL par événement sont les risques non-pandémiques.

Dans le modèle interne d'AGRe, le module CAT Vie pandémique modélise le risque pandémique sur les traités XL par tête. Pour faciliter la modélisation qui est déjà complexe dans le cadre d'un modèle interne, les risques liés à des catastrophes naturelles, technologiques et des actes terroristes pour les traités XL par tête sont également pris en compte dans le module CAT Vie pandémique, sachant que ces risques sont très petits par rapport au risque pandémique.

Le module CAT Vie non-pandémique traitera les risques de catastrophes naturelles, technologiques et d'actes terroristes uniquement pour les traités CAT XL par événement qui couvrent une zone géographique de 30 pays où se trouvent les expositions de risques des entités d'AXA.

Pour résumer, il y a 3 dimensions dans le périmètre du modèle de calcul du SCR CAT Vie non-pandémique :

- Type de traité concerné : CAT XL par événement
- Type de risque : CAT naturelle, CAT technologique et attentat terroriste
- Zone géographique : 30 pays où se trouvent les expositions de risque des entités d'AXA

2.2 Données entrantes

Pour le calcul du SCR CAT Vie non-pandémique, nous utilisons les données qui concernent :

- Les caractéristiques des traités CAT XL par événement
- Les informations relatives aux portefeuilles d'assurance protégés par les traités CAT XL par événement
- La fréquence et la sévérité des catastrophes

2.2.1 Données des traités XL par événement

Pour évaluer l'impact des catastrophes non-pandémiques sur les traités CAT XL par événement, nous utiliserons les données contractuelles des traités comme la limite, la rétention, le nombre minimum de victimes pour constituer un événement catastrophique ainsi que les types d'événements qui ne sont pas pris en charge par les traités (l'épidémie, la situation de température extrême, la catastrophe complexe, la sécheresse et l'infection par les insectes).

Il y a une vingtaine de traités CAT XL par événement chez AGRe couvrant une zone géographique composée de 30 pays en Asie, Europe, Australie et Amérique. La figure ci-dessous montre quelques traités parmi les traités CAT XL par événement d'AGRe avec leurs limites et leurs rétentions (les chiffres ont été modifiés pour respecter la confidentialité des données) :

Treaty ID	Region	Retention	Limit
ASIE - Regional CAT Life	Singapore, Indonesia, Thailand	10 500 000	10 5000 000
BE/LIFE CAT GROUP XL	Belgium	35 000 000	122 500 000
FR/LIFECATXLL1/NON NationalPool	France	2 625 000	32 375 000
FR/LIFECATXLL2/NON NationalPool	France	35 000 000	175 000 000
Germany_Layer_1_Company1	Germany	7 000 000	28 000 000
Germany_Layer_2_Company2_Company1	Germany	35 000 000	87 500 000
HKG_CAT	Hong Kong	127 128 263	206 583 428
Italy_ITA_Company1	Italy	3 500 000	70 000 000

TABLE 2.1 – Quelques traités CAT par événement d'AXA Global Re

2.2.2 Données des portefeuilles d'assurance

La notion de la somme à risque

Pour chaque police d'assurance, la somme à risque est définie comme la différence entre la somme assurée (montant de garantie en cas de sinistre) et la provision technique statutaire à date.

En principe, un assureur reçoit les primes d'assurance et constitue les provisions statutaires pour régler les sinistres à l'avenir. La somme à risque est effectivement l'exposition au-delà des provisions statutaires. Si la garantie est sous forme d'une rente, la somme à risque est calculée comme la valeur actuelle probable de cette rente. Nous calculons cette valeur actuelle probable en utilisant une table de mortalité et une courbe de taux d'intérêt prédéfinie. Dans ce mémoire, la somme à risque est désormais dénotée **“SaR”**.

Pour un portefeuille d'assurance et pour chaque type de garantie, la somme à risque totale du portefeuille pour ce type de garantie est la totalité des toutes les sommes à risque de cette garantie dans chaque police d'assurance.

Par exemple, la somme à risque de la garantie décès d'un portefeuille est calculée avec la formule suivante :

$$SaR_{T_{totale}}^{Mort} = \sum_{i=1}^N SaR_i^{Mort}$$

où N est le nombre de polices (ou d'assurés) et SaR_i^{Mort} est la somme à risque de la i -ème police du portefeuille.

Données d'expositions des portefeuilles d'assurance des entités d'AXA

Il existe les informations suivantes pour un portefeuille d'assurance prévoyance - santé d'une entité d'AXA, qui fait l'objet d'une protection par un traité CAT XL par événement d'AGRe :

- Treaty.Id : le nom du traité CAT XL par événement d'AGRe qui couvre le portefeuille
- Country : le pays auquel appartient le portefeuille
- share.groupe : le pourcentage des assurés souscrits collectivement du portefeuille
- SaR.groupe.Mort : la SaR moyenne de la garantie décès d'un assuré souscrit collectivement
- SaR.ind.Mort : la SaR moyenne de la garantie décès d'un assuré souscrit individuellement
- nb.assuré : le nombre d'assurés du portefeuille
- death.SaR : la SaR totale de la garantie décès du portefeuille
- disability.SaR : la SaR totale de la garantie invalidité/incapacité du portefeuille
- medex.SaR : la SaR totale de la garantie frais médicaux du portefeuille

Le tableau 2.2 montre un exemple des données d'expositions des portefeuilles cédés au traité ASIE-Regional CAT Life d'AGRe (les données ont été modifiées pour respecter la demande de confidentialité).

Treaty ID	Country	share.groupe	SaR.groupe.Mort	SaR.ind.Mort	nb.assuré	death.SaR	disability.SaR	medex.SaR
ASIE- Regional CAT Life	Indonesia	0%	0	19 885	225 130	4 476 679 505	0	124 455 314
ASIE- Regional CAT Life	Indonesia	2,40%	5 129	9 721	2 708 518	26 037 549 006	1 718 066 312	0
ASIE- Regional CAT Life	Thailand	22,10%	51 337	36 724	4 219 819	168 583 042 985	529 108 932	0

TABLE 2.2 – Exemple des portefeuilles cédés au traité ASIE-Regional CAT Life

2.2.3 Données pour la modélisation des fréquences et des sévérités des catastrophes

Généralement, les réassureurs ne disposent pas d'assez de données d'expérience pour implémenter la calibration des lois de fréquence et des lois de sévérité des catastrophes. Ils font donc référence à des données publiques.

Données concernant les catastrophes naturelles et technologiques

L'une des bases de données les plus complètes sur les catastrophes naturelles et technologiques est l'EMDAT (Emergency Events Database). Cette base de données est maintenue par le Centre de Recherche sur l'Epidémiologie des Catastrophes (CRED) au sein de l'Université Catholique de Louvain (UCL) à Belgique.

EMDAT est une base de données des événements d'urgence contenant les informations de plus de 20 000 catastrophes naturelles et technologiques sur la période 1900-2020. Cette base de données est constituée d'informations provenant de diverses sources : les agences de l'Organisation des Nations Unies (ONU), des assureurs, des instituts de recherche, etc. Les données fournies par les agences d'ONU et par les gouvernements sont favorisées.

Les catastrophes dans EMDAT sont classifiées en 2 groupes de base : naturelles et technologiques. Les catastrophes naturelles correspondent à des tremblements de terre, des volcans, des ouragans, des inondations et des incendies. Les catastrophes technologiques (ou *man-made* en anglais) correspondent à des guerres, des pollutions, des accidents de transport, etc.

EMDAT fournit plusieurs informations concernant une catastrophe : la date de survenance, le type d'événement, le nombre de victimes à l'issue de l'événement, le pays où l'événement survient, le montant des dommages suite à l'événement.

Pour qu'une catastrophe soit enregistrée dans la base de données, au moins un des critères suivants doit être rempli :

- L'événement a causé au moins 10 décès

- Au moins 100 personnes se sont déclarées touchées pendant l'événement
- Il y avait la déclaration d'état d'urgence dans les pays impliqués par l'événement
- Il y avait l'appel à l'aide internationale dans les pays impliqués par l'événement

Une partie de ce jeu de données peut se voir dans le tableau 2.3 ci-dessous.

Year	Disaster Group	Disaster Type	Disaster Subtype	Country	Region	Start Year	End Year	Total Deaths
1900	Natural	Drought	Drought	Cabo Verde	Western Africa	1900	1900	11 000
1900	Natural	Drought	Drought	India	Southern Asia	1900	1900	1 250 000
1901	Technological	Industrial accident	Explosion	Belgium	Western Europe	1901	1901	18
1902	Natural	Earthquake	Ground movement	Guatemala	Central America	1902	1902	2 000
1902	Natural	Volcanic activity	Ash fall	Guatemala	Central America	1902	1902	1 000
1902	Natural	Volcanic activity	Ash fall	Guatemala	Central America	1902	1902	6 000

TABLE 2.3 – Exemple de données EMDAT

Données concernant les actes terroristes

Pour la modélisation des actes terroristes, la base des données la plus utilisée est Global Terrorism Database (GTD). Elle est maintenue par l'université de Maryland.

GTD est publique et gratuite. Elle contient plusieurs informations sur un attentat terroriste par exemple la date et le lieu de l'incident, les armes utilisées, le nombre de victimes. Dans cette base de données, il y a plus de 200 000 événements terroristes sur la période de 1970 à 2019. Une partie de ce jeu de données est affichée dans le tableau 2.4.

eventid	year	imonth	iday	country	region	city	attacktype	nkill
197 000 000 001	1970	7	2	Dominican Republic	Central America Caribbean	Santo Domingo	Assassination	1
197 000 000 002	1970	0	0	Mexico	North America	Mexico city	Hostage Taking (Kidnapping)	0
197 001 000 001	1970	1	0	Philippines	Southeast Asia	Unknown	Assassination	1
197 001 000 002	1970	1	0	Greece	Western Europe	Athens	Bombing/Explosion	0
197 001 000 003	1970	1	0	Japan	East Asia	Fukouka	Facility/Infrastructure Attack	0
197 001 010 002	1970	1	1	United States	North America	Cairo	Armed Assault	0

TABLE 2.4 – Exemple de données GTD

Pour accompagner les données GTD, il existe un indice appelé “Global Terrorism Index” (GTI). Il est calculé dans le rapport portant le même nom par l'Institut pour l'économie et la paix (IEP) en utilisant les données GTD et d'autres sources de données.

L'indice GTI est un score composite allant de 0 à 10 pour classer l'impact du terrorisme des pays. Il est attribué à chaque pays dans le monde où 0 représente l'absence d'impact du terrorisme tandis que 10 représente l'impact le plus élevé.

L'indice GTI est calculé en plusieurs étapes. Dans un premier temps, pour chaque pays, la note de chacune des 5 dernières années est calculée en se basant sur 4 facteurs :

- Le nombre total d'événements terroristes au cours de l'année
- Le nombre total de morts dans les événements terroristes au cours de l'année

2.3. LES RISQUES DE CATASTROPHES NATURELLES, TECHNOLOGIQUES ET ATTENTATS TER

- Le nombre total de blessures dans les événements terroristes au cours de l'année
- Une mesure du niveau de dommages matériels suite à des événements terroristes pendant l'année

Ensuite, la note globale brute du pays est calculée comme une moyenne pondérée des notes des 5 dernières années. Au finale, les notes brutes sont transformées sur une échelle de 0 à 10 en appliquant un système de bande logarithmique de base 10.

De par sa nature, l'indice GTI est d'une part une mesure qui reflète l'impact et la tendance du terrorisme dans un pays et d'autre part un indicateur qui permet de comparer les expositions au terrorisme entre les pays.

Un exemple de GTI est montré dans la figure 2.1.

GTI Rank	Country	2020 GTI score (out of 10)	Change in score (2019–2020)
1	Afghanistan	9.592	-0.013
2	Iraq	8.682	-0.57
3	Nigeria	8.314	-0.286
4	Syria	7.778	-0.299
5	Somalia	7.645	-0.157
6	Yemen	7.581	0.017
7	Pakistan	7.541	-0.361
8	India	7.353	-0.167
9	Congo - Kinshasa	7.178	0.138
10	Philippines	7.099	-0.041

FIGURE 2.1 – Exemple des données GTI

Source : Global Terrorism Index 2020

2.3 Les risques de catastrophes naturelles, technologiques et attentats terroristes pour AXA Global Re

Dans le périmètre du modèle, il y a 30 pays. Dans cette partie, nous ne pouvons pas afficher les statistiques descriptives de tous les 30 pays. Pour chacune des parties suivantes, nous choisissons donc de ne montrer que 5 pays avec les moyennes les plus élevées et 5 pays avec les moyennes les plus basses.

2.3.1 Analyses descriptives des catastrophes naturelles et technologiques

Pour les analyses descriptives des catastrophes naturelles et technologiques, l'EMDAT est utilisée et nous nous concentrons sur la période d'observation de 1970 à 2020 pour refléter au mieux la tendance.

CAT Naturelle

Concernant le type d'événement, la table 2.5 montre la répartition des catastrophes par type d'événement et le nombre de décès moyen pour chaque événement.

Les catastrophes naturelles les plus fréquentes sont les inondations, les orages, les glissements de terrain et les tremblements de terre. Cependant, les inondations ne sont pas les événements les plus meurtriers. Les tremblements de terre sont des événements qui surviennent assez souvent et causent en moyenne beaucoup de morts. Les orages sont aussi fréquents mais avec une ampleur moins sévère que ceux des tremblements de terre.

Type	Part	Nb décès moyen par événement
Inondation	37,29%	55,73
Orage	32,63%	135,28
Glissement de terrain	13,90%	57,45
Tremblement de terre	11,27%	1 929,91
Incendies	2,29%	43,85
Activité volcanique	1,53%	1 339,61
Mouvement de masse (sec)	1,10%	96,54

TABLE 2.5 – Type des catastrophes naturelles

Le tableau 2.6 montre les statistiques descriptives des fréquences des catastrophes naturelles. Dans ce cas, nous nous intéressons à des événements avec au moins 10 victimes.

Country	Mean	Std	Max
Philippines	6,37	3,14	17
Indonesia	4,59	2,95	12
Colombia	2,2	1,43	6
Mexico	1,98	1,48	6
Thailand	1,2	1,04	4
Norway	0,02	0,14	1
Singapore	0	0	0
Denmark	0	0	0
Finland	0	0	0
Luxembourg	0	0	0

TABLE 2.6 – Statistiques descriptives des fréquences des événements CAT naturelles sur la période 1970-2020 par pays

Comme montre la table 2.6, Philippines, Indonésie et Colombie sont les trois pays dont les

2.3. LES RISQUES DE CATASTROPHES NATURELLES, TECHNOLOGIQUES ET ATTENTATS TER

fréquences sont les plus élevées. Au contraire, il y a certains pays qui n'ont jamais eu une catastrophe naturelle qui cause plus de 10 décès dans le passé (Luxembourg, Finlande, Singapour).

La table 2.7 affiche les statistiques relatives à la sévérité d'une catastrophe naturelle. Parmi les pays ayant eu au moins 1 événement causant au moins 10 décès dans le passé, l'Indonésie est le pays avec la sévérité moyenne la plus importante et sa sévérité maximale de 165 708 décès a été atteint dans le tsunami en Asie en 2004.

Country	Mean	Std	Max
Indonesia	848,4	10 835,6	165 708
Turkey	535,0	2 304,3	17 127
Colombia	276,6	2 057,5	21 800
Thailand	219,3	1 067,5	8 345
Italy	209,1	797,7	4 689
United Kingdom	20,8	12,9	48
Lebanon	20,0	5,0	25
Austria	19,4	13,9	50
Sweden	12,0	1,4	13
Ireland	10,5	0,7	11

TABLE 2.7 – Statistiques descriptives de sévérité d'un événement CAT naturelle sur la période 1970–2020 par pays

CAT Technologique

Les événements technologiques enregistrés dans EMDAT consistent en 3 types d'événements : accidents industriels (accidents de nature industrielle), accidents de transport et accidents divers (par exemple un incendie dans le métro ou un incendie dans une église).

La table 2.8 fournit une vision générale sur les fréquences des CAT technologiques. Encore une fois, l'Indonésie et Philippines sont parmi les 5 pays qui sont touchés le plus souvent.

Country	Mean	Std	Max
Indonesia	4,43	3,61	14
Egypt	3,78	4,08	15
Turkey	3,08	2,58	10
Philippines	2,82	2,10	11
Mexico	2,69	2,34	8
Finland	0,06	0,24	1
Sweden	0,06	0,24	1
Singapore	0,04	0,20	1
Denmark	0,04	0,20	1
Luxembourg	0,02	0,14	1

TABLE 2.8 – Statistiques descriptives des fréquences des événements CAT technologiques par pays sur la période 1970-2020

En ce qui concerne la sévérité d'une CAT technologique, l'Irlande est le pays avec l'espérance la plus élevée tandis que sa fréquence est très faible (en moyenne 0,04 événement technologique

par année). C'est parce qu'il n'y a que 5 catastrophes technologiques en Irlande enregistrés dans EMDAT dont un crash d'avion ayant fait 329 victimes. Nous pouvons observer à partir du tableau 2.9 que les Philippines sont fortement impactées par les catastrophes technologiques avec une fréquence élevée et une sévérité moyenne significative.

Country	Mean	Std	Max
Ireland	113,50	143,95	329
Philippines	80,15	339,67	4 000
Lebanon	54,13	67,24	206
Indonesia	51,50	74,46	481
Norway	50,21	51,28	160
Turkey	28,45	34,22	301
Belgium	27,30	40,80	193
Finland	26,00	16,09	43
Morocco	24,10	22,90	168
Singapore	17,00	9,90	24

TABLE 2.9 – Statistiques descriptives de la sévérité d'un événement CAT technologique sur la période 1970-2020 par pays

Le tableau 2.10 ci-dessous affiche la répartition des catastrophes technologiques par type d'événement. Nous pouvons constater que les accidents de transports sont les événements les plus fréquents et leur nombre de décès moyen est du même niveau que celui d'un accident industriel.

Type	Répartition	Nb_Décès_Moyen
Accident de transport	76,0%	42,92
Accident divers	14,5%	31,53
Accident industriel	9,5%	42,09

TABLE 2.10 – Répartition des catastrophes technologiques par type d'événement

2.3.2 Analyses descriptives des attentats terroristes

Pour les analyses descriptives des actes terroristes, la base de données GTD est utilisée. Ici, nous nous concentrons sur la période d'observation de 1970 à 2019 pour refléter au mieux l'évolution de la fréquence et de la sévérité des événements terroristes.

Parmi 30 pays dans le périmètre du modèle, le pays ayant la fréquence d'événements terroristes graves la plus élevée est la Colombie avec 6,3 événements en moyenne par an. Au contraire, il y a 9 pays qui n'ont jamais subi d'attaque terroriste, par exemple Singapour, l'Australie, l'Autriche ou le Danemark comme le montre le tableau 2.11 dans la page suivante.

Country	Mean	Std	Max
Colombia	6,30	7,58	27
Philippines	3,82	4,30	16
Turkey	2,82	6,35	31
Lebanon	1,58	3,31	18
Egypt	1,26	2,88	13
Hong Kong	0,00	0,00	0
Poland	0,00	0,00	0
Portugal	0,00	0,00	0
Sweden	0,00	0,00	0
Luxembourg	0,00	0,00	0

TABLE 2.11 – Statistiques descriptives des fréquences des événements terroristes sur la période 1970-2019 par pays

En terme d'ampleur d'un événement, c'est surprenant de voir dans le tableau 2.12 que la France qui est un pays développé soit parmi les 5 pays avec le nombre moyen de décès dans un attentat le plus élevé. C'est parce que sur la période de 1970 à 2019, il n'y a eu que 5 attaques terroristes en France mais elles ont été des événements graves, notamment l'attaque en 2015 dans la salle de spectacle du Bataclan causant 93 décès et l'attaque au camion-bélier en 2016 à Nice qui a causé 87 décès.

Country	Mean	Std	Max
Malaysia	100,00		100
Norway	69,00		69
France	45,20	41,03	93
Greece	42,75	37,87	88
Morocco	35,14	18,73	50
Philippines	17,91	13,20	116
Belgium	17,50	0,71	18
Mexico	17,06	15,00	57
Thailand	15,14	4,67	27
Germany	11,00	1,41	12

TABLE 2.12 – Statistiques descriptives de la sévérité d'un événement terroriste sur la période 1970-2019 par pays

2.4 Le panorama du modèle

2.4.1 L'objectif et les spécifications du modèle

L'objectif du modèle

Le but ultime du modèle est de calculer le besoin en capital (SCR) d'AGRe pour les risques CAT Vie non-pandémiques. Ces risques concernent les traités CAT XL par événement détenus

par AGRe, qui couvrent les portefeuilles d'assurance prévoyance-santé des entités du groupe AXA. La formule pour calculer ce SCR est :

$$SCR = q_{99,5\%}(S) - E(S)$$

où S est la variable aléatoire qui représente l'engagement annuel d'AXA Global Re envers les cédantes.

Nous avons donc besoin d'une distribution de S . Le modèle fait appel à l'approche Monte-Carlo dans laquelle nous simulons 10^6 années fictives et calculons S pour chacune de ces années afin d'obtenir une distribution empirique de S . Une année fictive dans cette approche est appelée un "scénario".

L'objectif du modèle devient donc de simuler stochastiquement l'engagement d'AGRe envers les cédantes pendant une année. Cet engagement sert à indemniser les cédantes de la perte qu'elles subissent à cause des catastrophes de type naturelle, technologique et terroriste pendant une année.

Les spécifications du modèle

Il existe 4 spécifications du modèle :

- ◇ Le modèle se compose de deux modules : CAT Terroriste et CAT Naturelles/Technologique. Les CAT naturelles et technologiques sont traitées dans le même module parce que il n'y a pas assez de données par pays pour la calibration des paramètres si chaque risque est considéré séparément.
- ◇ Le modèle permet de simuler d'une manière réaliste les fréquences annuelles des événements catastrophiques dans les pays dans le périmètre de modélisation tout en prenant en compte la corrélation entre pays.
Cette spécification permet d'envisager des scénarios où il y a plusieurs événements catastrophiques se produisant dans plusieurs pays pendant une même année.
- ◇ Le modèle spécifie les impacts des événements catastrophiques jusqu'au niveau des portefeuilles d'assurance cédés qui est le niveau de granularité le plus détaillé possible avec les données disponibles.
Cette spécification permet de réduire le niveau d'hétérogénéité dans le calcul du SCR.
- ◇ Le modèle simule également les catastrophes transfrontalières qui sont les catastrophes touchant plusieurs pays à la fois lors de leur survenance.
Cette spécification permet d'améliorer la modélisation des traités "régionaux" dans le portefeuille d'AGRe. Par exemple, il existe le traité "ASIE - Regional CAT Life" qui couvre les expositions des entités d'AXA en Thaïlande, en Indonésie et à Singapour en même temps.

2.4.2 Hypothèses du modèle et méthodologie générale

Hypothèses du modèle

Le modèle repose sur les hypothèses principales suivantes :

- ◇ **Hypothèse I** : Il n'y a pas de corrélation entre la fréquence des catastrophes naturelles/technologiques et la fréquence des attentats terroristes.
- ◇ **Hypothèse II** : Pendant une année, les fréquences des catastrophes dans les pays dans le périmètre du modèle sont corrélées.
C'est à dire que les fréquences des catastrophes naturelles/technologiques des pays sont corrélées avec une structure de dépendance. Les fréquences des actes terroristes sont également corrélées mais avec une structure de dépendance différente.
- ◇ **Hypothèse III** : La fréquence et la sévérité d'une catastrophe sont indépendantes.
- ◇ **Hypothèse IV** : Il existe des catastrophes naturelles ou technologiques transfrontalières mais il n'existe pas d'attentats terroristes transfrontaliers.

Cette hypothèse permet de simplifier la modélisation.

Parmi ces hypothèses, l'hypothèse I qui suppose l'indépendance entre le nombre de catastrophes naturelles/technologiques et le nombre d'attentats terroristes est discutable. Intuitivement, une catastrophe pourrait impacter fortement la structure socio-économique d'un pays et créer des situations que des groupes terroristes pourraient exploiter.

En effet, selon l'étude de [Berrebi & Ostwald \(2011\)](#), il existe une corrélation positive entre le nombre de décès suite aux événements terroristes et le nombre de décès suite aux catastrophes naturelles de l'année passée mais pas celui de l'année en cours. Une des raisons est que pendant l'année courante, il est encore trop tôt pour des terroristes d'exploiter les changements dans un pays. Bien que l'étude n'examine pas directement les interactions entre les catastrophes naturelles et les attentats terroristes en termes de fréquence, il est toujours raisonnable de supposer l'indépendance entre le nombre de catastrophes naturelles/technologiques et le nombre d'attentats terroristes. De plus, cette hypothèse permettra de modéliser séparément les événements terroristes et les catastrophes naturelles/technologiques pour faciliter la modélisation.

Méthodologie générale

L'objectif du modèle est de simuler le montant d'engagement annuel d'AGRe qui est en fait la somme des montants d'indemnisations annuelles de tous les traités CAT XL. Afin de modéliser le montant d'indemnisation d'un traité CAT XL par événement, le modèle fait appel à l'approche "fréquence - sévérité" qui est souvent utilisée en réassurance. Dans cette approche, l'engagement annuel d'un traité CAT XL par événement avec un seuil de s décès minimum se calcule avec la formule suivante :

$$C = \sum_{i=1}^M \text{Min}(\text{Limite}_{\text{traite}}; \text{Max}(0; A_i - \text{Retention}_{\text{traite}})) \quad (2.1)$$

où C est l'engagement annuel du traité, M est le nombre de catastrophes causant au moins s décès dans les portefeuilles couverts par le traité, A_i est le montant de sinistre présenté au traité à l'issue de la i ème catastrophe.

Dans le contexte de réassurance, le A_i dans l'équation 2.1 ci-dessus est en fait l'engagement des assureurs envers les assurés suite à la i -ème catastrophe :

$$A_i = \sum_{j=1}^{X_i} Z_j \quad (2.2)$$

où X_i est le nombre de sinistres dans le portefeuille d'assurance suite à la i -ème catastrophe et Z_j est le montant du j -ème sinistre.

La méthodologie du modèle s'inspire de [Ekhedén & Hössjer \(2014\)](#). Selon l'article, pour un traité CAT XL par événement, son montant d'engagement annuel est simulé par les étapes suivantes :

- ★ Modéliser M qui est le nombre de catastrophes causant au moins s décès dans les portefeuilles couverts par le traité
- ★ Modéliser A_i qui est le montant d'engagement de chaque portefeuille cédé suite au i -ème événement
 - Modéliser X_i qui est le nombre de déclarations de sinistre suite au i -ème événement
 - Modéliser Z_j le montant de sinistres pour la j -ème déclaration

Notion de perte “From Ground Up”

Dans notre modèle, nous appelons les A_i dans l'équation 2.1 ci-dessus la perte “**FGU**” (abréviation pour “From Ground Up”) d'un portefeuille suite au i -ème événement.

Pour un traité, sa perte FGU représente l'impact d'un événement sur les portefeuilles cédés auprès du traité. Autrement dit, il s'agit du montant de sinistre engagé par le réassureur avant l'application des conditions (rétention, limite) du traité.

Malgré son nom, la perte “From Ground Up” n'est pas vraiment la perte à partir du premier euro d'un sinistre parce que les traités CAT XL par événement sont déclenchés après un traité par tête. Il est donc plus correct de comprendre que la perte “From Ground Up” signifie le montant de sinistre à partir du premier euro seulement du point de vue d'un traité CAT XL par événement.

2.4.3 La structure du modèle

L'objectif de cette partie est de présenter la structure du modèle ainsi que les méthodologies retenues. Les justifications de ces méthodologies seront abordées dans les chapitres 3 et 4 suivants.

Le modèle consiste en 3 phases principales : Calibration, Simulation et Accumulation.

Calibration

Dans la phase de calibration, nous allons calibrer les lois de fréquence, de sévérité pour chaque pays et les structures de dépendances des fréquences entre pays selon la table 2.13 suivante. La méthodologie générale retenue pour la calibration des catastrophes naturelles/technologiques et des attentats terroristes sont similaires sauf qu'il y a certaines différences dans les détails.

	CAT Nat/Techno	CAT Terroriste
Loi de fréquence	Poisson ou binomiale négative	binomiale négative
Copule de fréquence	Student	Student
Loi de sévérité	Pareto généralisée	Pareto généralisée

TABLE 2.13 – Hypothèses des lois et de dépendance utilisés dans le modèle CAT Vie non-pandémique

Simulation

Notre modèle va simuler 10^6 scénarios indépendants. Le processus de simulation est identique pour tous les scénarios.

Dans cette phase, les simulations de catastrophes naturelles/technologiques et d'actes terroristes seront effectuées séparément. Les étapes dans cette phase sont identiques pour le module CAT naturelle/technologique et CAT terroriste. La phase se compose des quelques étapes suivantes :

— **Étape S.1 : Simulation des fréquences des pays**

Nous allons simuler simultanément le nombre d'événements CAT pendant une année (n_1, n_2, \dots, n_K) dans K pays avec une structure de dépendance qui est basée sur la copule de Student et les distributions marginales de fréquence de chaque pays. Ces distributions marginales sont déjà calibrées dans la phase de Calibration.

Les résultats de cette étape seront organisés dans une table comme par exemple :

Scénario	Nb_Event_Pays A	Nb_Event_Pays B	Nb_Event_Pays C
1	1	2	1

— **Étape S.2 : Simulation de nombre de décès pour chaque catastrophe**

Pour chaque catastrophe, nous simulons ensuite le nombre de décès dans la population générale du pays où l'événement survient. La simulation est effectuée en utilisant la loi de sévérité de chaque pays dont les paramètres ont été calibrés dans la phase de Calibration.

Les résultats de cette étape seront organisés dans une table comme par exemple la table suivante :

Scénario	Type	Event	Pays	Nb_Décès
1	Nat/Tech	1	A	12
1	Nat/Tech	1	B	200
1	Nat/Tech	2	B	10
1	Nat/Tech	1	C	2

— Étape S.3 : Formation des catastrophe transfrontalières

Les événements transfrontaliers sont des événements qui impactent plusieurs pays à la fois lors de leur survenance. En fait, nous ne simulons pas vraiment les événements transfrontaliers. Nous relient des événements “locaux” déjà simulés dans les étapes précédentes pour former des événements transfrontaliers. Les événements locaux appartenant à une catastrophe transfrontalière se voient attribuer le même identifiant. La simulation des événements transfrontaliers sera présentée dans le chapitre 4.

Les résultats de cette étape seront organisés dans une table comme par exemple la table ci-dessous. Cette table indique que le seul événement du pays *A* et le deuxième événement du pays *B* appartiennent à un événement transfrontalier dont l’identifiant est “*Trans1*”.

Scénario	Type	Event	Pays	Nb_Décès	Code_Event
1	Nat/Tech	1	A	12	Trans1
1	Nat/Tech	1	B	200	B1
1	Nat/Tech	2	B	10	Trans1
1	Nat/Tech	1	C	2	C1

— Étape S.4 : Simulation de perte FGU dans chaque portefeuille d’assurance cédé

Pour chaque catastrophe, étant donné le nombre de victimes dans la population générale (Y), nous simulons le nombre de victimes qui sont assurés dans le portefeuille cédé (X) impliqué par l’événement. La simulation est effectuée en utilisant la loi Beta-binomiale : $X|Y \sim \text{Binomiale}(Y, p)$ et $p \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$. La calibration des paramètres α, β sera présentée dans le chapitre 4 à venir.

Ensuite, toujours dans cette étape, la perte FGU du portefeuille ayant X décès d’assurés est simulée en utilisant la loi *Gamma* ($\alpha = X, \beta = 1$).

Les résultats de cette étape seront organisés dans une table comme par exemple la table ci-dessous. Nous pouvons remarquer à partir d’exemple que l’événement “*Trans1*” implique 3 portefeuilles : 2 portefeuilles *P.A1* et *P.A2* du pays *A* et 1 portefeuille *P.B2* du pays *B*.

Scénario	Type	Evt	Pays	Nb_Décès	Code_Evt	Code_Port	Décès_Port	FGU_Port
1	Nat/Tech	1	A	12	Trans1	P.A1	5	20 000
1	Nat/Tech	1	A	12	Trans1	P.A2	2	7 000
1	Nat/Tech	1	B	200	B1	P.B1	20	200 000
1	Nat/Tech	2	B	10	Trans1	P.B2	1	5 000
1	Nat/Tech	1	C	2	C1	P.C1	0	0

Accumulation

L'étape d'accumulation sert à calculer dans un premier temps l'engagement de chaque traité CAT XL envers les cédantes pour chaque événement et éventuellement l'engagement annuel d'AGRe.

La phase d'accumulation consiste en 3 étapes :

— Étape A.1 : Accumulation par événement au niveau du traité

Pour chaque traité, dans un premier temps, les nombres de décès et les pertes FGU de tous les portefeuilles d'assurance couverts par le traité sont sommés par événement. Ensuite, les conditions des traités (nombre de décès minimum, limite, rétention) sont appliqués pour calculer l'engagement du traité par événement.

Les résultats pour chaque traité CAT XL par événement sont organisés dans une table comme par exemple les 2 tables ci-dessous. Dans l'exemple, nous avons 2 traités : traité *CAT-XL-1* et traité *CAT-XL-2*

Scénario	Type	Code_Evt	Nb_Mort_Traité	FGU_Traité	Engagement	Traité
1	Nat/Tech	Trans 1	7	27 000	15 000	CAT-XL-1
1	Terroriste	A1	10	50 000	35 000	CAT-XL-1

Scénario	Type	Code_Evt	Nb_Mort_Traité	FGU_Traité	Engagement	Traité
1	Nat/Tech	Trans 1	7	27 000	7 000	CAT-XL-2
1	Terroriste	A1	5	25 000	5 000	CAT-XL-2

— Étape A.2 : Accumulation par événement au niveau d'AGRe

Dans cette étape, le but est de calculer l'engagement d'AGRe pour chaque événement. En fait, le versement d'AGRe suite à chaque événement est la somme des engagements de tous traités CAT XL pour cet événement.

Pour un scénario, les résultats à l'issue de cette étape sont organisés dans une table comme par exemple :

Scénario	Type	Code_Evt	Engagement_AGRe
1	Nat/Tech	Trans 1	22 000
1	Terroriste	A1	40 000

La table ci-dessus indique que dans le scénario 1, il y a 2 événements catastrophiques qui font payer AGRe. L'un des 2 événements est une catastrophe transfrontalière et l'autre est un attentat terroriste.

— **Étape A.3 : Accumulation au niveau d'AGRe par scénario**

Finalement, l'engagement d'AGRe dans le i -ème scénario est accumulé à partir des versements d'AGRe pour toutes les catastrophes du scénario.

En répétant les 3 étapes de la phase d'accumulation pour $N = 10^6$ scénarios, nous obtiendrons une distribution empirique d'engagement annuel d'AGRe qui va être utilisée pour le calcul du SCR CAT Vie non-pandémique.

Chapitre 3

La modélisation des fréquences pays par pays

Pour chaque scénario, la première partie dans le processus de modélisation est la simulation des fréquences, ou autrement dit, du nombre de catastrophes dans chacun des 30 pays dans le périmètre du modèle. La simulation des fréquences est effectuée à l'aide d'une copule pour prendre en compte la corrélation entre les pays.

Premièrement, les parties suivantes présentent la théorie des copules et la calibration des lois marginales. Deuxièmement, elles présentent l'estimation de la copule de Student qui est la copule retenue dans le modèle.

3.1 Théorie des copules

Dans la gestion des risques, il est important de connaître la fonction de répartition conjointe des variables. La copule permet d'exprimer la fonction de répartition conjointe de plusieurs variables aléatoires en fonction de leurs lois marginales et d'une structure de dépendance. Les éléments théoriques des copules seront présentés par la suite.

3.1.1 La définition et l'estimation des copules

La définition de la copule suivante est extraite de [McNeil et al. \(2015\)](#) :

Définition 3.1.1 *Une copule de dimension d est une fonction de répartition sur $[0; 1]$ avec des distributions marginales uniformes standards.*

La notation $C(\mathbf{u}) = C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ est utilisée pour indiquer une copule. Une copule de dimension d est donc une fonction $C : [0; 1]^d \rightarrow [0; 1]$.

Les propriétés suivantes doivent être satisfaites :

- $C(u_1, u_2, \dots, u_d) = 0$ si $u_i = 0$ pour tout i
- Comme la distribution marginale de chaque élément i doit être uniforme standard, nous devons avoir $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ pour tout i
- Pour chaque $a_i \leq b_i$, la probabilité $P(U_1 \in [a_1; b_1]; \dots, U_d \in [a_d; b_d])$ doit être non négative. Par conséquent, l'équation suivante doit être satisfaite :

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1,i_1}; \dots; u_{d,i_d}) \geq 0$$

où $u_{j,1} = a_j$ et $u_{j,2} = b_j$

Par exemple, si $d = 2$, nous avons : $\sum_{i_1=1}^2 \sum_{i_2=1}^2 (-1)^{i_1+i_2} C(u_{1,i_1}; u_{2,i_2}) = C(a_1; b_1) - C(a_2; b_1) - C(a_1; b_2) + C(a_2; b_2) \geq 0$

Le théorème de Sklar montre que si nous disposons des lois marginales ainsi que d'une copule, nous pouvons les combiner pour former une fonction de répartition conjointe :

Théorème 3.1.1 (Théorème de Sklar) Soit F une fonction de répartition de dimension d ayant les marginales F_1, \dots, F_d , il existe une copule C telle que :

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \quad (3.1)$$

pour tout $x_i \in [-\infty, \infty]$, $i = 1, \dots, d$.

Si F_i est continue pour tout $i = 1, \dots, d$, alors C est unique, sinon elle est déterminée de manière unique sur $\text{Img } F_1 \times \text{Img } F_2 \times \dots \times \text{Img } F_d$ où $\text{Img } F_i$ est l'image de la fonction F_i .

À l'inverse, soit C une copule et F_1, \dots, F_d des lois uni-variées, la fonction F définie par l'équation ci-dessus est une fonction de répartition multivariée ayant les marginales F_1, \dots, F_d .

La partie inversée du théorème de Sklar est le point de départ de la simulation des variables aléatoires étant donné leurs lois marginales et une copule prédéfinie.

La fonction de densité de F (si elle existe) pourrait être calculée avec la formule suivante :

$$f_X(x_1, \dots, x_d) = c_{\mathbf{X}}[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)] f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_d}(x_d)$$

où $c_{\mathbf{X}}[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)] = \frac{\partial}{\partial u_1 \dots \partial u_d} C(u_1, \dots, u_d)$ est la fonction de densité de la copule.

Nous essayons ensuite de répondre à la question suivante : “Étant donné d variables aléatoires X_1, \dots, X_d avec leurs fonctions de répartition et une copule appartenant à une famille paramétrique, comment peut-on estimer les paramètres des lois marginales et les paramètres de la copule en utilisant l'échantillon de n observations $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{id})$ ($i = 1, \dots, n$) ?”

Selon [Choroś et al. \(2010\)](#), il existe 3 méthodologies pour estimer une copule : paramétrique, semi-paramétrique et non-paramétrique.

Dans notre modèle, nous souhaitons imposer le type des lois marginales et la famille de la copule. Par conséquent, la méthode paramétrique sera utilisée. Dans la partie ci-après, le mécanisme de cette méthode sera présenté.

Estimation paramétrique - Maximum de vraisemblance

Dans cette approche, nous supposons que la copule appartient à la famille paramétrique avec un paramètre θ (θ peut être un vecteur) et que chaque loi marginale est une loi pré-choisie avec des paramètres α_i . L'objectif ici est d'estimer θ et les paramètres α_i ($i = 1, \dots, d$).

Sous l'hypothèse de continuité de chaque variable X_1, \dots, X_d , la fonction de densité f existe et sa forme est :

$$f(x_1, \dots, x_d) = c[F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)] f_{X_1}(x_1) \dots f_{X_d}(x_d)$$

Avec n observations de (X_1, \dots, X_d) , la fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} L &= \prod_{j=1}^n f(x_1^{(j)}, \dots, x_d^{(j)}) \\ &= \prod_{j=1}^n c[F_{X_1}(x_1^{(j)}); \dots; F_{X_d}(x_d^{(j)})] f_{X_1}(x_1^{(j)}) \dots f_{X_d}(x_d^{(j)}) \end{aligned}$$

D'où la fonction de log-vraisemblance :

$$LL = \sum_{j=1}^n \ln(c[F_{X_1}(x_1^{(j)}), \dots, F_{X_d}(x_d^{(j)})]) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \ln(f_i(x_i^{(j)}))$$

Avec l'introduction du paramètre θ et des paramètres α_i , la fonction de log-vraisemblance devient :

$$LL = \sum_{j=1}^n \ln(c[F_{X_1}(x_1^{(j)}; \alpha_1); \dots; F_{X_d}(x_d^{(j)}; \alpha_d); \theta]) + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^n \ln(f_i(x_i^{(j)}; \alpha_i)) \quad (3.2)$$

En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, nous essayons de trouver le vecteur $(\hat{\alpha}_1^{MLE}; \dots; \hat{\alpha}_d^{MLE}; \hat{\theta}^{MLE})$ qui maximise la fonction LL ci-dessus.

Estimation paramétrique - Inference Functions for Margins (IFM)

Cependant, dans la pratique, quand la dimension d devient plus grande, la maximisation de la fonction de log-vraisemblance est très exigeante en termes de temps de calcul. Dès lors, une autre approche qui est plus intéressante est utilisée comme alternative à la méthode du maximum de vraisemblance. Cette approche est appelée “Inference Functions for Margins” (IFM).

En notant $L_C = \sum_{j=1}^n \ln(c[F_{X_1}(x_1^{(j)}; \alpha_1); \dots; F_{X_d}(x_d^{(j)}; \alpha_d); \theta])$ et $L_i = \sum_{j=1}^n \ln(f_i(x_i^{(j)}; \alpha_i))$ la fonction de log-vraisemblance s’écrit :

$$LL = L_C + \sum_{i=1}^d L_i \quad (3.3)$$

où L_C est la contribution de la structure de dépendance et L_i la contribution de chaque variable dans la vraisemblance.

La méthode IFM est motivée à partir de l’équation 3.3 ci-dessus. Elle est effectuée en 3 étapes :

- Étape 1 - Le paramètre α_i de la loi de chaque variable X_i est estimé en maximisant la fonction L_i par la méthode du maximum de vraisemblance. Les paramètres estimés sont $(\hat{\alpha}_1^{IFM}; \dots; \hat{\alpha}_d^{IFM})$.
- Étape 2 - Les paramètres α_i dans la fonction L_C sont remplacés par leurs estimateurs obtenus à la fin de l’étape 1.
- Étape 3 - Le paramètre θ de la copule est estimé en maximisant la fonction $L_C : \hat{\theta}_{IFM} = \operatorname{argmax}_{\theta} L_C(\hat{\alpha}_1^{IFM}, \dots, \hat{\alpha}_d^{IFM}, \theta)$

3.1.2 Copule dans la modélisation des variables de comptage

Dans le modèle, nous appliquons la copule pour modéliser les corrélations des nombres de catastrophes des pays. Une variable qui représente le nombre de catastrophes est bien une variable discrète.

D’après le théorème de Sklar, si toutes les variables sont continues, la copule C est unique. Au contraire, s’il existe une variable discrète, la copule n’est unique que sur $\operatorname{Img} F_1 \times \operatorname{Img} F_2 \times \dots \times \operatorname{Img} F_d$ où $\operatorname{Img} F_i$ est l’image de la fonction F_i . C’est à dire s’il y a 2 copules différentes qui coïncident sur l’ensemble $\prod_{i=1}^d \operatorname{Img}(F_i)$, ils définiront la même fonction de répartition F . [Tasena \(2021\)](#) reconnaît que cela ne pose pas de problème si la copule est utilisée pour modéliser la fonction de répartition conjointe mais il y aura un impact si nous souhaitons extraire la structure de dépendance des variables. Autrement dit, au cas où il y a plus d’une copule qui peut être utilisée, laquelle faut-il utiliser ?

Pour contourner le problème technique concernant l’unicité de la copule dans la modélisation des variables discrètes, la méthode d’extension continue d’une variable discrète proposée par

Denuit & Lambert (2005) est utilisée. Cette approche est également adoptée dans Shi & Valdez (2014) pour modéliser la dépendance des nombres de déclarations de sinistre dans l'assurance automobile.

Extension continue d'une variable aléatoire discrète

L'idée de cette approche est qu'au lieu d'estimer une copule des variables discrètes, nous estimerons une copule des variables continues qui sont "proches" de ces variables discrètes. Il est supposé que la structure de dépendance de ces variables "continuées" soit similaire à celle des variables discrètes originales.

En utilisant l'extension continue, nous créons une nouvelle variable aléatoire continue Y^* à partir de la variable discrète originale Y et une variable U qui suit la loi uniforme $(0; 1)$:

$$Y^* = Y - U$$

où U et Y sont indépendantes.

Dans ce cas, nous avons :

$$\begin{aligned} P(Y^* = y) &= P(Y - U = y) = \sum_{k=[y+1]} P(Y = k; U = k - y) \\ &\leq P(U = [y + 1] - y) = 0 \end{aligned}$$

où $[y]$ est la partie entière de y .

Cela implique que Y^* est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est continue. Par conséquent, d'après le théorème de Sklar, la copule C des variables Y_1^*, \dots, Y_d^* est unique, qui résout le problème d'unicité dans l'estimation de copule pour les variables discrètes.

La fonction de répartition de Y^* est déduite comme suit :

$$\begin{aligned} F^*(y) &= P(Y^* \leq y) \\ &= P(Y - U \leq y; Y \leq [y]) + P(Y - U \leq y; Y = [y] + 1) + P(Y - U \leq y; Y > [y] + 1) \end{aligned}$$

Si $Y \leq [y]$, alors $Y - U \leq y$ pour tout U donc $P(Y - U \leq y; Y \leq [y]) = P(Y \leq [y]) = F_Y([y])$

Si $Y \geq [y] + 1$, alors $P(Y - U \leq y; Y > [y] + 1) = 0$

Nous avons aussi :

$$\begin{aligned} P(Y - U \leq y; Y = [y] + 1) &= P(U \geq [y] + 1 - y; Y = [y] + 1) \\ &= P(U \geq [y] + 1 - y) P(Y = [y] + 1) \quad \text{car } Y \text{ et } U \text{ sont indépendantes} \\ &= (1 - P(U \leq [y] + 1 - y)) P(Y = [y] + 1) \\ &= (1 - [y] - 1 + y) P(Y = [y] + 1) \quad \text{car } U \text{ suit la loi Uniforme}(0;1) \\ &= (y - [y]) P(Y = [y] + 1) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc la fonction de répartition de Y^* :

$$F^*(y) = F_Y([y]) + (y - [y]) P(Y = [y] + 1) \quad (3.4)$$

3.1.3 Processus d'estimation et simulation de la copule dans le modèle

Étant donné les observations des nombres de catastrophes de K pays pendant N années : $(n_{1;j}, \dots, n_{K;j})$ ($j = 1, \dots, N$), l'estimation de la copule et la simulation de cette dernière sont présentées ci-après.

Estimation de copule

- ◇ Étape I : Estimation des lois marginales
 - Pour chaque pays i , nous estimons F_i qui est sa loi marginale de fréquence en utilisant le vecteur d'observation $n_{i;1}, n_{i;2}, \dots, n_{i;N}$
- ◇ Étape II : Estimation de la structure de dépendance
 - Étape II.1 : Simuler N vecteurs $(u_{1;j}, \dots, u_{K;j})$ de loi uniforme $(0;1)$
 - Étape II.2 : Créer N vecteurs $(n_{1;j}^*, \dots, n_{K;j}^*)$ avec la formule : $n_{i;j}^* = n_{i;j} - u_{i;j}$
 - Étape II.3 : Convertir ces N vecteurs $(n_{1;j}^*, \dots, n_{K;j}^*)$ en des vecteurs de variables uniformes $(u_{1;j}^*, \dots, u_{K;j}^*)$ avec la formule : $u_{i;j}^* = F_i^*(n_{i;j}^*)$
où F_i^* est la fonction de répartition de la variable “continuée” de la variable de comptage correspondant au pays i .
 - Étape II.4 : Maximiser la fonction de log-vraisemblance $L_C = \sum_{j=1}^N \ln \{c[u_{1;j}^*, \dots, u_{K;j}^*; \theta]\}$ pour trouver les paramètres θ de la copule où $c(\cdot)$ est la fonction de densité de la copule

Simulation de la copule

Afin de simuler un vecteur $(n_{1;j}, \dots, n_{K;j})$ où $n_{i;j}$ représente le nombre de catastrophe dans le pays i ($i = 1, \dots, K$) dans le scénario j ($j = 1, \dots, N = 10^6$), nous effectuons les étapes suivantes :

- Étape 1 : Simuler un vecteur $(u_{1;j}, \dots, u_{K;j})$ avec $u_{i;j} \in [0;1]$ en utilisant la copule déjà estimée.
- Étape 2 : Convertir chaque élément $u_{i;j}$ en $n_{i;j}$ avec la formule $n_{i;j} = F_i^{-1}(u_{i;j})$ où F_i est la fonction de répartition du nombre d'événements correspondant au pays i .
En faisant de la même manière pour K pays, nous obtiendrons un vecteur simulé $(n_{1;j}, \dots, n_{K;j})$ pour le scénario j .

Dans le cadre de l'estimation de la copule par la méthode IFM, nous présenterons par la suite l'estimation des lois de fréquence marginales et puis l'estimation de la copule.

3.2 Estimation des lois marginales

3.2.1 Lois de fréquence usuelles

Pour modéliser la fréquence, il existe trois lois qui sont souvent utilisées dans l'assurance : la loi binomiale, la loi de Poisson et la loi binomiale négative.

La loi binomiale

La définition suivante est utilisée par [Dekking et al. \(2005\)](#) :

Définition 3.2.1 Soit $N \in \mathbb{N}$, $p \in [0; 1]$ et X une variable aléatoire discrète.

X suit la loi binomiale de paramètre N et p si sa fonction de masse est donnée par :

$$p_X(k) = P(X = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

pour $k = 0, 1, \dots, N$.

Dans ce cas, nous dénotons : $X \sim \text{Bin}(N, p)$

Il est utile de connaître les caractéristiques de la loi binomiale. Si X suit une loi binomiale $\text{Bin}(N, p)$, alors :

$$E(X) = Np \qquad \text{Var}(X) = Np(1-p) \qquad \sigma_X = \sqrt{Np(1-p)}$$

La loi binomiale est utilisée pour modéliser le nombre de réussites au bout de N essais indépendants dont la probabilité de réussite est p . Si un essai signifie un tirage d'un élément à partir d'une population, la loi binomiale n'est appropriée que quand il s'agit d'un tirage avec remise. Sinon, les essais sont dépendants, ce qui ne satisfait pas l'hypothèse de cette loi.

La loi de Poisson

La loi de Poisson sert à modéliser le nombre d'individus ou d'événements sur une période donnée pourvu que tous les événements soient indépendants. La définition de la loi de Poisson est :

Définition 3.2.2 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire discrète.

X est dit suivre la loi de Poisson de paramètre λ si sa fonction de masse est donnée par :

$$p(k) = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Dans ce cas, nous dénotons : $X \sim \text{Pois}(\lambda)$

La moyenne, la variance et l'écart-type de la loi de Poisson seront alors :

$$E(X) = \lambda \qquad \text{Var}(X) = \lambda \qquad \sigma_X = \sqrt{\lambda}$$

Il existe une relation entre la loi binomiale et la loi de Poisson. C'est que la loi de Poisson est un cas particulier de la loi binomiale quand la probabilité de réussite p est très faible et le nombre d'essais N est très grand.

La démonstration ci-après est motivée dans [Walck et al. \(2007\)](#). La fonction de masse de la loi binomiale s'écrit :

$$P(X = r) = \binom{N}{r} p^r (1-p)^{N-r} = \binom{N}{r} \left(\frac{\mu}{N}\right)^r \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-r} \text{ (en remplaçant } p = \frac{\mu}{N} \text{)}$$

Pour approximer la factorielle d'un grand nombre, nous utilisons la formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

En appliquant la formule de Stirling, nous avons :

$$\begin{aligned} P(X = r) &\approx \frac{1}{r!} \binom{N}{r} \left(\frac{\mu}{N}\right)^r \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-r} \frac{\sqrt{2\pi N} N^N e^{-N}}{\sqrt{2\pi(N-r)} (N-r)^{N-r} e^{-(N-r)}} \\ &= \frac{1}{r!} \sqrt{\frac{N}{N-r}} \frac{1}{\left(1 - \frac{r}{N}\right)^N} e^{-r} \mu^r \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-r} \end{aligned}$$

En appliquant la formule : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x}$, la limite de la loi binomiale est obtenue :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(X = r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!}$$

qui est en fait la fonction de masse d'une variable de la loi de Poisson avec le paramètre $\lambda = \mu = Np$.

La loi binomiale négative

Il existe plusieurs formulations de la loi binomiale négative. La première version et aussi la version la plus facile à comprendre, c'est que la loi binomiale négative sert à modéliser le nombre de succès d'une suite d'essais indépendants avant que r échecs (r est prédéfini) surviennent sachant que la probabilité de succès est la même pour tous les essais. Dans ce cas, la définition de la loi binomiale négative est formulée comme suit :

Définition 3.2.3 (Première version) Soit $p > 0$ et $r \in \mathbb{N}$ et X une variable aléatoire discrète.

X est dit suivre la loi binomiale négative si sa fonction de masse est donnée par :

$$P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} (1-p)^r p^k$$

Dans ce cas, nous dénotons : $X \sim NB(r, p)$

Dans le contexte de modélisation du nombre de catastrophes pendant une année, la formulation ci-dessus n'est pas adaptée. C'est parce qu'il est difficile à trouver un mécanisme "échec - succès" dans ce contexte.

Il existe une autre formulation de la loi binomiale négative qui est plus facile à interpréter. Selon [Zhou & Carin \(2013\)](#), la loi binomiale négative est en fait un mélange Poisson - Gamma. C'est à dire dans un premier temps, la variable d'intérêt est distribuée selon la loi de Poisson avec le paramètre λ . À son tour, λ est une variable aléatoire de la loi Gamma avec le paramètre d'échelle $\frac{p}{1-p}$ et le paramètre de forme θ : $X|\lambda \sim \text{Pois}(\lambda)$ et $\lambda \sim \text{Gamma}(\theta, \frac{p}{1-p})$.

Cette formulation conduit à une nouvelle définition de la loi binomiale négative :

Définition 3.2.4 (*Deuxième version*) Soit $\theta > 0$, $p > 0$ et X une variable aléatoire discrète X est dit suivre la loi binomiale négative si sa fonction de masse est donnée par :

$$P(X = x) = f_X(x; \theta; p) = \frac{\Gamma(\theta + x)}{x! \Gamma(\theta)} (1 - p)^r p^x$$

La moyenne, la variance et l'écart-type de X sont ensuite obtenues :

$$E(X) = \theta \frac{p}{1-p} \quad \text{Var}(X) = \theta \frac{p}{(1-p)^2} \quad \sigma_X = \sqrt{\theta \frac{p}{(1-p)^2}}$$

Dans le logiciel **R**, pour calibrer différentes lois, nous utilisons la fonction *fitdistr*. L'expression de $P(X = x)$ peut être reformulée en remplaçant $p = \frac{\mu}{\mu + \theta}$ où $\mu = E(X)$ pour être en ligne avec le paramétrage de la fonction *fitdistr*. Cette forme sera utilisée à partir d'ici pour décrire la loi binomiale négative.

Formule 3.2.1 (*Fonction de masse de la loi binomiale négative*)

Si $X \sim NB(\mu, \theta)$, alors :

$$P(X = x) = f_X(x; \theta; \mu) = \frac{\Gamma(\theta + x)}{x! \Gamma(\theta)} \left(\frac{\mu}{\mu + \theta}\right)^x \left(\frac{\theta}{\mu + \theta}\right)^\theta$$

Sous-dispersion et sur-dispersion

Le phénomène de dispersion est le fait que la variance observée soit différente de celle prévue théoriquement. Pour mesurer le degré de dispersion d'un ensemble d'observations, le rapport variance-moyenne (VMR) est utilisé.

L'indice VMR est défini comme le rapport de la variance σ^2 à la moyenne μ :

$$VMR = \frac{\sigma^2}{\mu}$$

Il existe donc 3 possibilités de VMR :

- $VMR = 1$: il existe une equi-dispersion des observations

- $VMR < 1$: il existe une sous-dispersion des observations
- $VMR > 1$: il existe une sur-dispersion des observations

Avec $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, l'équation $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ montre que la loi de Poisson est adaptée quand une equi-dispersion est observée dans les données.

La loi binomiale des paramètres (N, p) ayant $\mu = Np$ et $\sigma^2 = Np(1 - p)$ correspond au cas où $VMR < 1$. Par conséquent, cette loi est appropriée pour la modélisation s'il existe une sous-dispersion.

Au contraire, la loi négative binomiale est appropriée dans le cas d'une sur-dispersion parce que $\mu = \theta \frac{p}{1-p} > \sigma^2 = \theta \frac{p}{(1-p)^2}$.

3.2.2 Construction des lois marginales pour les pays ayant peu de données

Dans notre modèle, l'utilisation de la copule nécessite les lois marginales des variables considérées. Généralement, la calibration des lois marginales de fréquence et de sévérité est effectuée pays par pays en utilisant les données historiques de chaque pays. Cependant, parmi les 30 pays dans le périmètre de modélisation, il y a certains pays qui ont très peu d'observations historiques pour la calibration de sévérité en utilisant uniquement les données de ces pays. C'est le cas des pays suivants : Danemark, Finlande, Singapour, Luxembourg, Irlande, Suède.

Par exemple, à Singapour, sur une période de cinquante années de 1970 à 2020, il n'y a eu que 2 catastrophes naturelles en 1986 et en 2017 qui ont chacune causé plus de 10 décès comme le montre la figure 3.1 ci-dessous. Par conséquent, bien que nous puissions toujours calibrer la loi de fréquence de Singapour, il n'y a pas suffisamment de données pour la calibration de sa loi de sévérité car il y a seulement 2 observations.

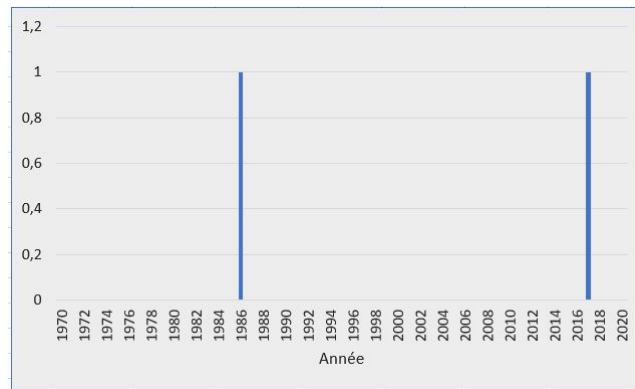


FIGURE 3.1 – Nombre de catastrophes avec au moins 10 décès à Singapour par année

Ici, pour chaque pays, nous souhaitons avoir une cohérence entre la calibration de la loi de fréquence et la calibration de la loi de sévérité. C'est-à-dire que nous souhaitons calibrer les paramètres sur les données observées sur la même période historique. Il est donc nécessaire de trouver un traitement spécifique pour un pays lorsque ce pays a connu très peu de catastrophes dans le passé.

Étant donné un pays, une idée serait de calibrer la loi de fréquence d'un groupe de pays à laquelle ce pays appartient et ensuite d'essayer de "corriger" la loi du groupe pour en déduire celle du pays. La définition du groupe d'un pays pour la calibration des fréquences dans le modèle est :

Définition 3.2.5 (Groupe d'un pays)

Le groupe d'un pays est défini comme un regroupement des plusieurs pays dans la même région géographique, ayant des caractéristiques similaires au pays considéré.

Intuitivement, soit A un pays ayant peu de données historiques, un événement qui survient dans le groupe du pays A a deux possibilités :

- Il survient également dans le pays A avec une probabilité p_A
- Il ne survient pas dans le pays A avec une probabilité $1 - p_A$

Cette vue nous conduit donc à poser 2 hypothèses qui constituent la base du traitement pour les pays ayant peu de données historiques :

Hypothèse 3.2.1 *Soit X la variable aléatoire représentant la fréquence d'un pays ayant peu de données historiques et Y la variable aléatoire représentant la fréquence du groupe auquel le pays appartient.*

Soit $\lambda, \mu, \theta, p > 0$. Nous posons 2 hypothèses :

1. *Soit $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ soit $Y \sim \text{NB}(\mu, \theta)$*
2. *$X | Y \sim \text{Bin}(Y, p)$*

Les parties suivantes expliquent la dérivation de la loi de fréquence d'un pays ayant peu de données historiques à partir de 2 hypothèses ci-dessus. Nous considérons 2 types de loi de fréquence : la loi de Poisson et la loi binomiale négative.

La loi 2-étapes Poisson-Binomiale

Cette partie répond à la question suivante :

“ **Supposons que $Y \sim \text{Pois}(\lambda)$ et $X | Y \sim \text{Bin}(Y, p)$ avec $p > 0$ constant. Quelle est $F_X(x)$ la loi de X ?** ”

La réponse est que $X \sim \text{Pois}(\lambda p)$ et la démonstration suivante le confirme.

Démonstration :

Nous avons $Y \sim \text{Pois}(\lambda) \implies P(Y = y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!}$

Nous avons également $X | Y \sim \text{Bin}(Y, p) \implies P(X = x | Y = y) = \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x}$

D'où $P(X = x, Y = y) = P(X = x | Y = y) \cdot P(Y = y) = \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x}$

La loi marginale $F_X(x)$ de X sera :

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{y=x}^{\infty} P(X = x, Y = y) = \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{y!} \binom{y}{x} p^x (1-p)^{y-x} \\ &= \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\lambda^y e^{-\lambda}}{x! (y-x)!} p^x (1-p)^{y-x} \\ &= \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!} (1-p)^{y-x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

En utilisant la série de Taylor pour $e^{\lambda(1-p)}$ on aura :

$$e^{\lambda(1-p)} = \sum_{y=x}^{\infty} \frac{\lambda^{y-x}}{(y-x)!} (1-p)^{y-x}$$

En remplaçant cette expression de Taylor à l'équation (3.5) nous avons :

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda} \cdot p^x}{x!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^x e^{-\lambda p}}{x!}$$

Cette équation signifie que $X \sim \text{Pois}(\lambda p)$.

Dans le modèle du calcul du SCR CAT Vie non-pandémique chez AGRe, nous appelons la distribution de X mentionnée ci-dessus **“2-étapes Poisson-Binomiale”**. La raison c'est que cette variable est engendrée à partir d'un processus consistant à conditionner une variable de la loi binomiale sur une variable de la loi de Poisson.

La loi 2-étapes Binomiale négative - Binomiale

Cette partie répond à la question suivante :

“ Supposons que $Y \sim \text{NB}(\mu, \theta)$ et $X | Y \sim \text{Bin}(Y, p)$ avec $p > 0$ constant. Quelle est $F_X(x)$ la loi marginale de X ?”

La réponse est que $X \sim \text{NB}(p\mu, \theta)$ et la démonstration suivante montre la preuve de ce résultat.

Démonstration :

Dans ce cas, si nous utilisons la même méthode que dans le cas de la loi de Poisson, la démonstration serait fastidieuse. Nous nous dirigeons vers une méthode qui est plus simple en utilisant la fonction génératrice des probabilités.

Si deux variables aléatoires discrètes admettent la même fonction génératrice des probabilités alors elles suivent la même loi. La stratégie ici est de prouver que la variable X admet une fonction génératrice des probabilités de la même forme que celle d'une variable de la loi binomiale négative($p\mu, \theta$).

La preuve est composée de 3 parties :

- Dans un premier temps, la fonction génératrice des probabilités $G_Y(t)$ d'une variable Y de loi binomiale négative (μ, θ) est déduite.
- Ensuite, la fonction génératrice des probabilités $G_{X|Y}(z)$ d'une variable $X|Y$ est dérivée.
- Finalement, la fonction génératrice des probabilités $G_X(z)$ de la variable X est formulée en utilisant le théorème de l'espérance totale.

Soit Y une variable aléatoire de la loi binomiale négative (μ, θ) , sa fonction génératrice des probabilités est :

$$G_Y(z) = E(z^Y) = \sum_{y=0}^{\infty} z^y P(Y = y) = \sum_{y=0}^{\infty} z^y \frac{\Gamma(\theta + y)}{\Gamma(\theta) y!} \left(\frac{\mu}{\mu + \theta}\right)^y \left(\frac{\theta}{\mu + \theta}\right)^\theta$$

En dénotant $p_Y = \frac{\mu}{\mu + \theta}$, nous avons :

$$G_Y(z) = (1 - p_Y)^\theta \frac{1}{\Gamma(\theta)} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\theta + y)}{y!} (p_Y z)^y$$

En utilisant la formule $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+s)}{n!} t^n = \frac{\Gamma(s)}{(1-t)^s}$, nous avons ensuite :

$$\begin{aligned} G_Y(z) &= (1 - p_Y)^\theta \frac{1}{\Gamma(\theta)} \frac{\Gamma(\theta)}{(1 - p_Y \cdot z)^\theta} = \left(\frac{1 - p_Y}{1 - p_Y \cdot z}\right)^\theta = \left(\frac{1 - \frac{\mu}{\mu + \theta}}{1 - \frac{\mu}{\mu + \theta} \cdot z}\right)^\theta \\ &= \left(\frac{\theta}{\mu + \theta - \mu z}\right)^\theta \end{aligned}$$

L'étape suivante est de dériver la fonction génératrice des probabilités d'une variable $X|Y \sim \text{Bin}(Y, p)$. Par définition, la fonction génératrice des probabilités de $X|Y$ s'écrit :

$$G_{X|Y}(z) = E[z^X | Y] = \sum_{x=0}^Y \binom{Y}{x} (1-p)^Y \left(\frac{p}{1-p}\right)^x z^x = (1-p)^Y \sum_{x=0}^Y \binom{Y}{x} \left(\frac{pz}{1-p}\right)^x$$

Pour raccourcir $\sum_{x=0}^Y \binom{Y}{x} \left(\frac{pz}{1-p}\right)^x$, nous appliquons la formule :

$$\sum_{x=0}^N \binom{N}{x} t^x = (t+1)^N$$

D'où :

$$G_{X|Y}(z) = (1-p)^Y \left(\frac{pz - p + 1}{1-p} \right)^Y = [1 - (1-z)p]^Y$$

Maintenant, nous avons tous les éléments nécessaires pour en déduire la fonction génératrice des probabilités de X :

$$\begin{aligned} G_X(z) &= E[z^X] = E[E[z^X|Y]] \quad \text{par le théorème de l'espérance totale} \\ &= E[G_{X|Y}(z)] = E[(1 - (1-z)p)^Y] = G_Y(1 - (1-z)p) \\ &= \left(\frac{\theta}{\mu + \theta - \mu[1 - (1-z)p]} \right)^\theta \\ &= \left(\frac{\theta}{\theta + \mu p - \mu p z} \right)^\theta \\ &= G_{Y'}(z) \quad \text{où } Y' \sim \text{NB}(p\mu, \theta) \end{aligned}$$

Parce que deux variables discrètes admettent la même fonction génératrice des probabilités seulement si elles suivent la même loi, il est donc possible de confirmer que $X \sim \text{NB}(p\mu, \theta)$.

Dans le modèle de calcul de SCR CAT Vie non-pandémique chez AGRe, nous appelons la distribution de X mentionnée ci-dessus **“2-étapes Binomiale négative - Binomiale”**. La raison est que cette variable est engendrée à partir d'un processus qui consiste à conditionner une variable de loi binomiale sur une variable de loi binomiale négative.

Après avoir détaillé les éléments théoriques de l'estimation des distributions marginales de fréquence, le choix de la méthodologie retenue est présenté ci-après en considérant les catastrophes naturelles/technologiques et les attaques terroristes séparément.

3.2.3 Choix de méthodologies de calibration de la fréquence des catastrophes naturelles/technologiques

La calibration des lois de fréquence est effectuée en considérant les catastrophes survenant sur la période 1970 - 2020. Cette période d'observation est choisie pour capturer l'évolution du comportement des catastrophes. Selon la figure 3.2 dans la page suivante, nous observons des fréquences très faibles par rapport à celles des années récentes. Par conséquent, la période 1970-2020 est un choix qui nous permet de capter au mieux la tendance du développement des fréquences des pays.

Pour un pays ayant suffisamment de données historiques, sa loi est choisie en fonction de son rapport variance-moyenne (VMR) empirique qui est estimé sur les données de ce pays :

- Si $VMR < 1$: la loi binomiale est retenue
- Si $VMR = 1$: la loi de Poisson est retenue
- Si $VMR > 1$: la loi binomiale négative est retenue

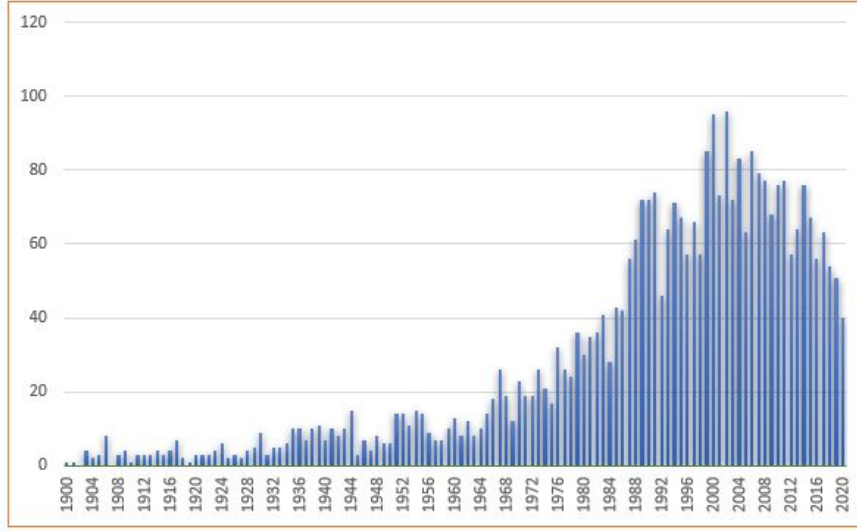


FIGURE 3.2 – Nombre total des catastrophes naturelles et technologiques de tous les pays dans le périmètre de modélisation par année

Par prudence concernant la volatilité de fréquence, pour les pays ayant le $VMR < 1$, la loi de Poisson est retenue au lieu de la loi binomiale. Les paramètres des lois sont ensuite calibrés en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour les pays ayant peu de données historiques, le processus de calibration des lois de fréquence se compose des 3 étapes suivantes :

- ◇ Premièrement, pour un pays, son groupe est défini comme le regroupement de ce pays avec d'autres pays ayant des expériences de risque similaires. La loi de fréquence du groupe est ensuite calibrée.
- ◇ Deuxièmement, la probabilité qu'un événement qui survient dans un groupe se produise également dans un pays est calculée proportionnellement à la population de ce pays.
- ◇ Finalement, la loi de fréquence de chaque pays est choisie entre la loi "2-étapes Poisson-Binomiale" et la loi "2-étapes Binomiale négative - Binomiale".

Autrement dit, soit Y_{groupe} le nombre de catastrophes naturelles/technologiques pendant une année du groupe et X_{pays} celui d'un pays, nous avons ainsi :

- Soit $Y_{groupe} \sim \text{Pois}(\lambda_{groupe})$ soit $Y \sim \text{NB}(\mu_{groupe}, \theta_{groupe})$
- $X_{pays}|Y_{groupe} \sim \text{Bin}(Y_{groupe}, p_{pays})$ où $p_{pays} = \frac{\text{Population}_{pays}}{\text{Population}_{groupe}}$ qui conduit au fait que soit $X \sim \text{Pois}(\lambda_{pays} = p_{pays} \lambda_{groupe})$ soit $X \sim \text{NB}(\mu_{pays} = \mu_{groupe} p_{pays}, \theta_{pays} = \theta_{groupe})$

En fait, il existe une autre idée pour contourner le manque de données. Dans l'approche "fréquence - sévérité", la fréquence et la sévérité sont supposées indépendantes. Par conséquent, nous pouvons calibrer la loi de fréquence et la loi de sévérité en utilisant 2 périodes d'observation différentes.

Cette approche nous permet d'éviter la méthode de déduction de la loi d'un pays à partir de celle de son groupe qui pourrait causer des inexactitudes. À noter que pour la fréquence, le nombre d'événements pendant une année est une observation tandis que pour la sévérité, chaque événement est une observation. Cette idée peut être expliquée par un exemple : la loi de fréquence est calibrée sur la période 1970-2020 et la loi de sévérité est calibrée sur une période qui est plus longue, par exemple 1900 - 2020 pour augmenter le nombre d'observations.

Mathématiquement, c'est une idée juste grâce à l'indépendance entre la fréquence et la sévérité. Cependant, cela soulèvera une question philosophique : "Est-ce que c'est approprié quand les lois relatives au même risque sont calibrées en utilisant des périodes d'observation différentes?". Au final, un modèle doit satisfaire également les arguments "philosophiques". L'approche de calibration avec les lois "2-étapes Poisson-Binomiale" et "2-étapes Binomiale négative - Binomiale" est donc retenue dans le modèle.

Pour un pays ayant peu de données historiques, la constitution de son groupe est effectuée par le biais de jugements qualitatifs. Un groupe est constitué de plusieurs pays ayant des caractéristiques climatiques naturelles similaires (pour prendre en compte le risque CAT naturel) et des caractéristiques d'infrastructures comparables (pour prendre en compte le risque CAT technologique).

Par exemple, Singapour est regroupé avec la Malaisie et l'Indonésie. La création de ce groupe se base plutôt sur les similarités géographiques des 3 pays que sur les niveaux de développement d'infrastructure. C'est parce que Singapour est un pays développé et qu'il n'existe pas d'autres pays dans la région Asie du Sud-Est qui ont le même niveau de développement d'infrastructure.

La table 3.1 suivante présente les pays ayant peu de données historiques avec leur groupe définis dans notre modèle.

Pays	Groupe
Singapour	Singapour, Malaisie, Indonésie
Finlande	Finlande, Norvège, Suède, Estonie
Suède	Finlande, Norvège, Suède, Estonie
Luxembourg	Luxembourg, France, Belgique, Allemagne, Pays-Bas
Danemark	Danemark, Norvège, Pays-Bas, Allemagne
Irlande	Irlande, Royaume-Uni

TABLE 3.1 – Les pays ayant peu de données historiques avec leurs groupes

Pour illustrer la calibration des fréquences, le résultat d'estimation du Portugal et de la Colombie est affiché ci-après.

Pour le Portugal, il a un rapport variance-moyenne inférieur à 1 ($VMR < 1$), la loi de Poisson est donc retenue. Le paramètre estimé est $\lambda_{Portugal} = 0,5686275$ et le résultat du test de χ^2 pour le Portugal est affiché dans la table 3.2 dans la page suivante.

Chi-squared test for given probabilités
data : Portugal
 $\chi^2 = 0.288804$, $df = 3$, $p\text{-value} = 0.9623$

TABLE 3.2 – Test de χ^2 de la loi de Poisson pour la fréquence du Portugal

Dans le cas de la Colombie, le rapport variance-moyenne est supérieur à 1, ce qui signifie une sur-dispersion. La loi négative binomiale est donc retenue pour modéliser la fréquence de la Colombie. Les paramètres sont estimés par la méthode du maximum de vraisemblance : $\mu_{Colombie} = 3,9$ et $\theta_{Colombie} = 6,3$. Le résultat du test de χ^2 pour la Colombie est affiché dans la table 3.3.

Chi-squared test for given probabilités
data : Columbia
 $\chi^2 = 7.511$, $df = 10$, $p\text{-value} = 0.6765$

TABLE 3.3 – Test de χ^2 de la loi de Poisson pour la fréquence de la Colombie

3.2.4 Choix des méthodologies de calibration de la fréquence des attentats terroristes

La calibration des lois de fréquence des événements terroristes est un peu différente de celle dans le cas des CAT naturelles/technologiques dû à la rareté des événements terroristes dans les pays dans le périmètre de modélisation. La figure 3.3 ci-dessous montre le nombre d'événements terroristes dans chacun des pays dans le périmètre du modèle sur un horizon de cinquante ans (1970-2019).

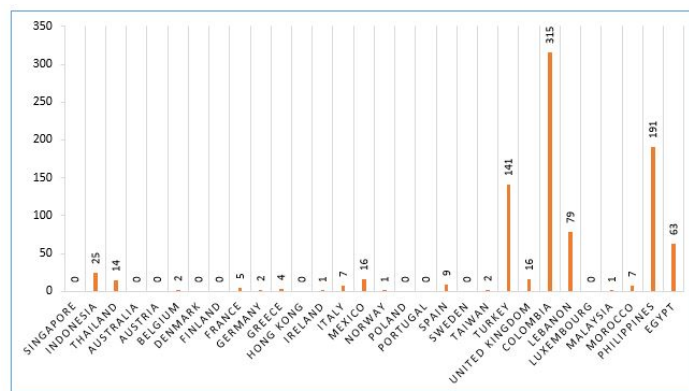


FIGURE 3.3 – Nombre d'attentats terroristes causant au moins 10 décès des pays dans le périmètre de modélisation

Nous remarquons qu'il y a 21 pays ayant moins de 10 événements. Il reste donc 9 pays qui pourraient être considérés comme ayant suffisamment de données pour calibrer la fréquence et la sévérité.

Ici, nous avons besoin d'une solution adaptée à tous les pays. Nous utilisons toujours la même approche que celle utilisée pour les CAT naturelles/technologiques mais avec une modification dans la constitution des "groupes". Si nous définissons un groupe pour chaque pays ayant peu de données historiques, il nous faut 21 groupes au total. Cela cause une difficulté dans le regroupement des pays. Concernant le risque terroriste, savoir si 2 pays ont des expériences similaires ou pas n'est pas toujours clair. La raison est que le terrorisme est un risque complexe qui dépend de plusieurs facteurs comme par exemple l'état économique et le système politique.

Pour être pratique et homogène, nous considérons le monde comme un seul groupe. La loi de fréquence des attentats terroristes du monde est calibrée dans un premier temps. Puis, la probabilité de pénétration de chaque pays est appliquée sur cette loi pour arriver à la loi du pays.

La figure 3.4 ci-dessous montre le nombre d'événements terroristes avec au moins 10 décès dans le monde sur la période 1970-2019. Nous remarquons que sur la période 1970-1977, il y avait beaucoup moins d'attentats que sur la période suivante. Pour bien capturer l'évolution du risque terroriste, la calibration des paramètres sera effectuée avec les données de la période 1978-2019.

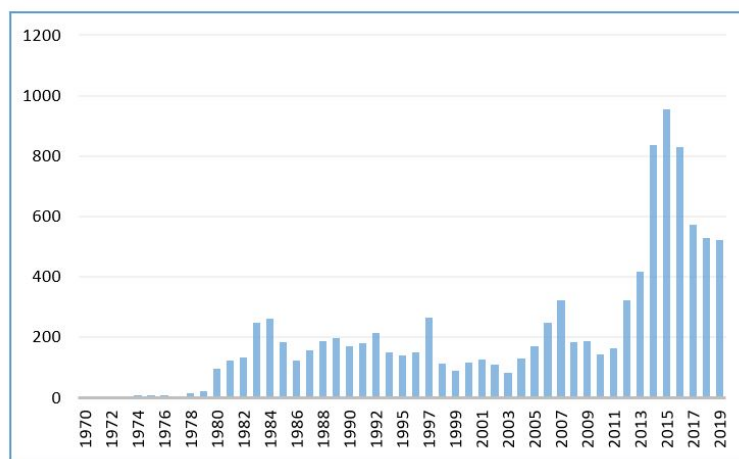


FIGURE 3.4 – Nombre d'événements terroristes avec au moins 10 décès dans le monde sur la période 1970-2019

Notons X_{monde} une variable aléatoire qui représente le nombre annuel d'attentats terroristes avec au moins 10 décès dans le monde. Le calcul de la variance et de la moyenne empirique de X_{monde} nous donne $\mu_X = 248,7073$ et $\sigma_X^2 = 47123,46$. Cela signifie qu'il faut utiliser la loi binomiale négative pour X_{monde} . En utilisant la méthode du maximum de vraisemblance, nous

obtenons les paramètres ainsi leurs intervalles de confiance comme le montre la table 3.4.

	μ_{monde}	θ_{monde}
Estimation	248,7	1,823
Erreur standard	28,87	1,375
Intervalle de confiance	[192,12 ; 305,29]	[1,0866 ; 2,56]

TABLE 3.4 – Résultat de l’estimation des paramètres de la loi de fréquence des attentats terroristes du monde

Afin d’en déduire la loi de fréquence d’un pays, il est nécessaire de définir la probabilité de “pénétration” pour ce pays. Autrement dit, si nous considérons un pays A , étant donné qu’un attentat terroriste survient (dans le monde), il y a une probabilité de p_A que l’événement est observé dans le pays A . La première idée est de définir la probabilité en fonction du nombre d’événements observés dans le passé. C’est à dire que pour un pays A , nous avons :

$$p_A = \frac{\text{Le nombre total d'événement survenus dans le pays } A \text{ dans le passé}}{\text{Le nombre total d'événement survenus dans le monde dans le passé}}$$

Cette idée a l’avantage d’être simple et intuitive. Cependant, nous constatons que le risque terroriste est un risque dynamique dont le comportement pourrait changer à l’avenir. Par conséquent, il est préférable de trouver un indicateur qui reflète mieux l’exposition au risque terroriste de chaque pays.

L’indice GTD (Global Terrorism Index) est un indice qui est calculé en utilisant 4 facteurs pondérés au cours des 5 dernières années (le nombre d’attaques terroristes, le nombre total de décès, le nombre total de blessés et le niveau de dommages causés par les actes terroristes). Le GTI prend donc en compte non seulement la fréquence mais aussi l’intensité des événements terroristes. C’est donc raisonnable de supposer que plus le GTI d’un pays est élevé, plus il y a de chance qu’un événement terroriste arbitraire dans le monde se produise dans ce pays. Dès lors, la probabilité de “pénétration” d’un pays A arbitraire est calculée comme suit :

$$p_{pays A} = \frac{GTI_{pays A}}{\text{Total GTI de tous les pays dans le monde}}$$

Parce que la loi binomiale négative est retenue pour modéliser la fréquence au niveau mondial, la loi de fréquence d’un pays est donc aussi une loi binomiale négative dont les paramètres sont :

$$\mu_{pays} = p_{pays} \cdot \mu_{monde} \quad \text{et} \quad \theta_{pays} = \theta_{monde}$$

À ce stade, les lois de fréquence de chaque pays sont obtenues. Pour compléter la modélisation par l’intermédiaire d’une copule, la partie suivante est consacrée à l’estimation de la copule.

3.3 Estimation de la structure de dépendance des fréquences

3.3.1 Les copules usuelles

Il existe 2 familles de copules qui sont souvent utilisées dans la pratique : les copules elliptiques et les copules Archimédiennes.

La famille elliptique : la copule Gaussien et la copule de Student

La copule Gaussienne est définie comme suit :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \Phi_d(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_d))$$

où ϕ est la fonction de répartition de la loi Gaussienne standard $N(0; 1)$ et Φ_d est la fonction de répartition d'une Gaussienne multivariée de dimension d avec la moyenne $\mathbf{0}$ et une matrice de covariance Σ .

La fonction de densité de la copule Gaussienne s'écrit sous la forme :

$$c(u_1, \dots, u_d) = |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{[\phi^{-1}(F_1(x_1)), \dots, \phi^{-1}(F_d(x_d))] [\Sigma^{-1} - I] [\phi^{-1}(F_1(x_1)), \dots, \phi^{-1}(F_d(x_d))]^T}{2} \right\}$$

où x_1, \dots, x_d est une observation.

La copule Gaussienne a l'avantage d'être simple parce qu'elle est caractérisée complètement par une matrice de corrélation linéaire Σ . De plus, elle est aussi flexible dans le sens où chaque paire de variables a son coefficient de corrélation. Cependant, la copule Gaussienne n'admet pas une dépendance dans la queue ce qui ne permet pas de prendre en compte la dépendance en cas extrême.

Pour montrer la dépendance de queue, la copule de Student pourrait être utilisée comme une alternative à la copule Gaussienne. La formule suivante de la copule de Student est extraite à partir de [Bouyé et al. \(2000\)](#) :

$$C(u_1, \dots, u_d, \Sigma, \nu) = T_{\Sigma, \nu}(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d))$$

où t_ν^{-1} est l'inverse de la distribution univariée de Student, Σ est la matrice de corrélation et ν est le nombre de degrés de liberté.

L'avantage de la copule de Student est d'être toujours simple et flexible. Elle est aussi intuitive à comprendre grâce à une matrice de corrélation associée. Par conséquent, la copule de Student est souvent utilisée comme une alternative à la copule Gaussienne quand nous avons besoin de l'introduction de la dépendance de queue.

La famille Archimédienne

Une autre famille de copule qui est aussi souvent utilisée est la famille Archimédienne. Selon [Bouyé et al. \(2000\)](#), une copule Archimédienne est définie comme :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \begin{cases} \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d)), & \text{si } \sum_{i=1}^d \phi(u_i) \leq \phi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\phi(u) \in C^2$ avec $\phi(1) = 0$, $\phi(u) < 0$ et $\phi(u)'' > 0$ pour tout $0 \leq u \leq 1$. $\phi(u)$ s'appelle le générateur de la copule.

Les copules Archimédiennes sont populaires parce qu'elles permettent de capturer les structures de dépendance autre que la corrélation linéaire. Toutefois, la caractéristique d'interchangeabilité de cette famille de copules implique que les dépendances entre toutes les paires des variables dans la copule Archimédienne sont identiques selon [Di Bernardino & Rullière \(2016\)](#). Cette caractéristique est reconnue comme une contrainte de flexibilité dans la modélisation dans un contexte de grande dimension.

Choix de copule

Dans le contexte de la modélisation des fréquences de 30 pays, nous avons donc besoin d'une copule qui est facile à mettre en place et en même temps, pourrait capturer la dépendance dans la queue. La copule de Student est donc retenue grâce à sa flexibilité et la simplicité dans le processus de simulation d'une telle copule.

3.3.2 Résultat de l'estimation de la copule de Student

Dans cette partie, le résultat de l'estimation de la copule de Student sera présenté dans un premier temps pour le cas des catastrophes naturelles/technologiques et dans un deuxième temps pour le cas des attentats terroristes.

Le choix du nombre de degrés de liberté

Afin de réduire le nombre de paramètres à estimer tout en restant prudent, nous fixons le paramètre du nombre de degrés de liberté ν à 3. Pour la copule de Student, étant donné une matrice de corrélation, la dépendance de queue diminue avec ν . Le choix de $\nu = 3$ est donc assez raisonnable parce qu'il permet de prendre en compte la forte dépendance dans la queue mais pas aussi "théoriquement extrême" comme dans le cas où $\nu = 1$.

Continuation des données

Quand le nombre de degrés de liberté est fixé à 3, l'estimation de la copule de Student coïncide avec l'estimation de la matrice de corrélation Σ .

En utilisant la méthode d’extension continue des variables aléatoires discrètes, la matrice de corrélation de la copule est calibrée à partir des vecteurs $(n_{1;j}^*, \dots, n_{K;j}^*)$ qui sont des vecteurs “continués” à partir des vecteurs d’observations $(n_{1;j}, \dots, n_{K;j})$ en utilisant la formule suivante :

$$n_{i;j}^* = n_{i;j} - u_{i;j}$$

où K est le nombre de pays dans le périmètre de modélisation, $n_{i;j}$ est le nombre de catastrophes (naturelles/technologiques ou terroristes) dans le pays i observé pendant l’année j ($j = 1, \dots, 50$), $u_{i;j}$ est une réalisation d’une variable aléatoire de la loi Uniforme(0;1) que nous simulons en amont.

Matrice de corrélation en cas des catastrophes naturelles/technologiques

Il y a 30 pays dans le périmètre du modèle ce qui signifie qu’il faut estimer $\frac{30 \times (30-1)}{2} = 435$ coefficients de corrélation. C’est informatiquement impossible d’estimer un si grand nombre de coefficients.

Pour contourner ce défi, nous essayons de reparamétriser la matrice de corrélation. Nous observons que des pays dans la même région géographique peuvent être affectés par une caractéristique commune à travers de la région. En même temps, toutes les régions dans le monde peuvent subir un facteur global (par exemple le changement climatique) qui pourrait produire une corrélation de fréquence entre deux pays appartenant à 2 régions différentes.

Pour prendre en compte l’interaction aussi bien à l’intérieur qu’à l’extérieur d’une région, nous posons l’hypothèse qu’il existe 2 types de corrélation :

- Corrélation intra-région : Chaque région a son propre coefficient de corrélation $\rho_{intra-region}$, c’est-à-dire que si le pays A et le pays B sont dans la même région, la corrélation entre la fréquence du pays A et celle du pays B sera celle de la région, i.e. $\rho_{A;B} = \rho_{intra-region}$
- Corrélation inter-région : C’est un coefficient de corrélation constant à travers les régions. C’est-à-dire que si le pays A et le pays B sont dans 2 régions différentes, la corrélation entre la fréquence du pays A et celle du pays B sera ce coefficient inter-région, i.e. $\rho_{A;B} = \rho_{inter-region}$

La constitution des régions se base sur la classification des pays dans l’annexe III du règlement délégué 2015/35 du 10 octobre 2014 comme montre la table 3.5 dans la page suivante.

Il y a 11 régions dans notre modèle dont 4 régions n’ont qu’un seul pays. Ainsi, pour la calibration de la matrice de corrélation type “inter/intra région”, le nombre de paramètres à calibrer est 8 (7 paramètres de corrélation “intra région” pour 7 régions ayant plus de deux pays et 1 paramètre de corrélation “inter région”).

Région	Pays
Caraïbes et Amérique centrale	Mexique
Amérique du Nord, Sud et l'Ouest	Colombie
Asie centrale et occidentale	Liban , Turquie
Asie de l'Est	Hong Kong, Taïwan
Asie du Sud et du Sud-Est	Indonésie, Malaisie, Philippines, Thaïlande, Singapour
L'Europe de l'Est	Pologne
Europe du Nord	Danemark, Irlande, Norvège, Suède, UK, Finlande
Europe du Sud	Grèce, Italie, Portugal, Espagne
Europe de l'Ouest	Autriche, Belgique, France, Allemagne, Luxembourg
Afrique du Nord	Egypte, Maroc
Oceania	Australie

TABLE 3.5 – Classification des pays en régions dans le périmètre de modélisation

Idéalement, chaque région a son propre coefficient de corrélation “intra – région” mais l’algorithme numérique pour maximiser la fonction de log-vraisemblance ne donne pas un bon résultat. C’est à dire que les valeurs des coefficients à trouver ne convergent pas au bout du programme de maximisation.

```

Maximum Likelihood estimation
Nelder-Mead maximization, 501 iterations
Return code 1: iteration limit exceeded
Log-Likelihood: 135.1394
8 free parameters
Estimates:
              Estimate Std. error t value Pr(> t)
Inter_Region    0.21841    0.03298   6.623 3.53e-11 ***
Northern Europe  0.47040    0.03819  12.316 < 2e-16 ***
South and South-Eastern Asia 0.41232    0.05836   7.065 1.60e-12 ***
Southern Europe  0.30068    0.07336   4.099 4.15e-05 ***
Western Europe   0.34832    0.08013   4.347 1.38e-05 ***
Central and Western Asia 0.01117    0.15555   0.072 0.942744
Eastern Asia     0.41364    0.11812   3.502 0.000462 ***
Northern Africa  0.77859    0.04205  18.516 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

FIGURE 3.5 – Résultat de calibration des corrélation inter-intra région CAT naturelle/technologique

La fonction “maxLik” en **R** nous donne une erreur de code **1** (voir la figure 3.5) ce qui signifie que le processus de maximisation ne converge pas bien que le nombre maximum d’itération a été dépassé.

Pour contourner le problème de convergence du processus de maximisation, l’hypothèse sur la structure de corrélation type “inter/intra région” est reformulée afin de réduire le nombre de paramètres à estimer. Nous gardons toujours le paramètre de corrélation type “inter région” constant à travers les régions. Au contraire, nous posons l’hypothèse que les coefficients de corrélation type “intra-région” sont constants pour toutes les régions. Bien que cela ne soit pas

idéal, il nous permet d’obtenir un résultat plus précis comme le montre la figure 3.6 ci-dessous :
 $\rho_{inter-region} = 0,19068$ et $\rho_{intra-region} = 0,36646$.

```
Maximum Likelihood estimation
Nelder-Mead maximization, 57 iterations
Return code 0: successful convergence
Log-Likelihood: 127.5233
2 free parameters
Estimates:
      Estimate Std. error t value Pr(> t)
Inter_Region  0.19068    0.02917   6.538 6.25e-11 ***
Intra_Region  0.36646    0.02867  12.782 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

FIGURE 3.6 – Résultat de la calibration des coefficients de corrélation type “inter-intra région” en cas des catastrophes naturelles/technologiques

Matrice de corrélation en cas des catastrophes terroristes

Comme dans le cas des catastrophes naturelles/technologiques, nous souhaitons également avoir une matrice de corrélation type “inter/intra - région”. La constitution d’une région sert à capturer les phénomènes régionaux qui impactent seulement les pays au sein de la région mais pas les pays dans d’autres régions. Ce sont les phénomènes comme par exemple une crise financière régionale ou la propagation d’une idéologie extrémiste à travers de la région. Cependant, si un événement est trop important pour pouvoir impacter la situation socio-économique de tous les pays à l’intérieur d’une région, il y a une forte possibilité qu’il soit plutôt un phénomène global qui pourrait impacter également les pays dans d’autres régions. Dans ce cas, la définition d’une région n’est plus respectée.

Par conséquent, nous imposons une solution plus simple au lieu d’essayer de diviser des pays en des régions. Nous supposons qu’il y a un seul paramètre de corrélation $\rho_{CAT-Terr}$ pour tous les couples de pays. Cela repose sur l’hypothèse que les interactions entre les pays sont créées uniquement par les phénomènes d’échelle globale. Le processus de calibration en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance donne $\rho_{CAT-Terr} = 0,06$.

Chapitre 4

La modélisation de sévérité

Après avoir simulé le nombre de catastrophes dans chaque pays, le modèle simule la sévérité de chaque catastrophe. Plus précisément, pour une catastrophe, nous allons étudier son impact sur tous les portefeuilles d'assurance couverts par les traités CAT XL par événement d'AGRe. De plus, parmi les traités CAT XL par événement, il existe des traités régionaux qui nécessitent une modélisation des catastrophes qui peuvent impliquer plusieurs pays à la fois. Ce chapitre est donc consacré à détailler la méthodologie de :

- La modélisation de la perte FGU d'un événement CAT sur un portefeuille d'assurance cédé
- La modélisation des événements transfrontaliers qui pourraient impacter plusieurs pays à la fois

4.1 Modélisation de la sévérité d'une catastrophe

L'objectif de cette partie est de simuler la perte FGU d'une catastrophe sur un portefeuille d'assurance. La modélisation suit le modèle proposé par [Ekheden & Hössjer \(2014\)](#) qui est composée de 2 étapes principales :

- ★ La modélisation de la mortalité dans la population générale
- ★ La modélisation de la perte en euro pour un portefeuille d'assurance cédé, étant donné le nombre de décès dans la population générale

4.1.1 Modélisation de la mortalité dans la population générale

Un traité CAT XL par événement est déclenché par un événement seulement si l'événement qualifie le statut "catastrophe". Un traité CAT XL par événement spécifie un seuil de s décès et un événement est considéré catastrophique s'il cause au moins s décès dans les portefeuilles

d'assurance protégés par le traité. Par conséquent, les événements à prendre en compte doivent être suffisamment importants. Effectivement, ils devraient causer au moins m décès dans la population générale pour qu'il puissent causer au moins s décès dans le portefeuille cédé. Ici, il nous faut choisir un seuil m qui est significatif.

Dans le cas des catastrophes naturelles et technologiques, le seuil m est fixé à 10 décès. La raison c'est que s'il y avait des décès lors d'un événement, il faudrait que l'événement ait causé au moins 10 décès pour être enregistré dans la base des données EMDAT. Dans le cas des événements terroristes, le seuil choisi est aussi de 10 décès même s'il n'y a pas une règle d'enregistrement des événements dans la base des données GTD comme dans EMDAT.

Bien que le seuil de décès s exigé le plus petit parmi les traités d'AGRe soit de 3 décès, la considération unique des événements faisant au moins 10 décès est toujours raisonnable si nous regardons la rétention d'un traité CAT XL par événement. En général, la priorité d'un traité CAT XL par événement est très élevée par rapport à la SaR moyenne. Par conséquent, nous ne sous-estime pas les risques en négligeant les événements de moins de 10 décès.

Dans le modèle, pour modéliser le nombre de décès dans la population générale d'un pays à cause d'une catastrophe, la loi de Pareto généralisée est utilisée.

La distribution de Pareto généralisée

La distribution de Pareto généralisée est souvent utilisée dans le monde de l'actuariat et notamment pour modéliser une variable dépassant un seuil. La fonction de distribution cumulative d'une variable aléatoire X qui suit la loi de Pareto généralisée a la forme :

$$F_{(\mu,\sigma,\xi)}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \frac{\xi(x-\mu)}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}} & \text{si } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Sa fonction de densité s'écrit :

$$f_{(\mu,\sigma,\xi)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} (1 + \xi \frac{x-\mu}{\sigma})^{-\frac{1}{\xi}-1} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \frac{1}{\sigma} \exp(-\frac{x-\mu}{\sigma}) & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

La fonction de distribution cumulative et la fonction de densité ne sont valides que pour $x \leq \mu$ si $\xi \geq 0$ ou pour $\mu \leq x \leq \mu - \frac{\sigma}{\xi}$ si $\xi < 0$.

La moyenne et la variance d'une variable aléatoire de la loi de Pareto généralisée sont :

$$E(X) = \mu + \frac{\sigma}{1-\xi} \quad \text{si } \xi < 1$$

$$\sigma^2(X) = \frac{\sigma^2}{(1-\xi)^2(1-2\xi)} \quad \text{si } \xi < \frac{1}{2}$$

Si $\xi \geq \frac{1}{2}$, la variance n'existe pas tandis que si $\xi \geq 1$, la variance et la moyenne n'existent pas. L'estimation des paramètres de la loi de Pareto généralisée est effectuée en utilisant des méthodes numériques afin de maximiser la fonction de log-vraisemblance. Dans le modèle, nous ne considérons pas le cas où le paramètre de forme $\xi = 0$ car nous supposons que dans le cas de données mesurées réelles, nous rencontrons ce cas relativement rarement comme proposé dans [Lenz \(2015\)](#). Dès lors, étant donné les données \mathbf{x} de n observations, la fonction de log-vraisemblance a la forme :

$$LL_{GPD}(\mu, \sigma, \xi) = -n \ln(\sigma) - (1 + \frac{1}{\xi}) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma})$$

Avec un seuil m , nous dénotons Y_1, \dots, Y_k des variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées qui représentent les nombre de morts suite à la i -ème catastrophe sachant que $Y_i \geq m$. Dans [Ekheden & Hössjer \(2014\)](#), la modélisation de Y_1, \dots, Y_k repose sur les hypothèses suivantes :

- Y_1, \dots, Y_k sont indépendantes et identiquement distribuées comme $Y \sim F_m$
- $Y = \text{arrondir}(\bar{Y})$ où $\text{arrondir}(y)$ est l'entier naturel le plus proche de y
- $\bar{Y} \sim \text{GPD}(m - \frac{1}{2}, \xi_m, \sigma_m)$

Dans cette modélisation, nous allons calibrer les paramètres de la loi de \bar{Y} qui est la loi de Pareto généralisée. Ensuite, nous obtiendrons le nombre de décès dans la population générale comme l'entier naturel le plus proche de \bar{Y} .

La calibration des paramètres de la loi de Pareto généralisée

Le seuil de la loi Pareto généralisée est fixé à 10. Dans la calibration des paramètres ξ et σ , nous distinguons le cas des catastrophes naturelles/technologiques du cas des attentats terroristes comme suivants :

♦ CAT naturelle/technologique

La loi de sévérité est calibrée avec la base EMDAT et la méthode de calibration retenue est la méthode du maximum de vraisemblance.

Pour les pays ayant suffisamment de données historiques comme présentés dans la partie de calibration des fréquences, la calibration s'effectue pays par pays. Pour un pays, nous utilisons les données des catastrophes qui ont survenus sur la période 1970-2020.

Pour chaque pays qui n'a pas suffisamment de données historiques, la calibration est réalisée en utilisant le vecteur du nombre de décès de tous les événements catastrophiques naturelles/technologiques survenant dans le groupe auquel ce pays appartient.

◇ Attentat terroriste

Dans un premier temps, la distribution est calibrée au niveau mondial. Autrement dit, nous utilisons le vecteur du nombre de décès de tous les événements terroristes qui ont survenus dans le passé.

Concernant un événement terroriste, nous pouvons croire que cet événement peut être n'importe quel événement qui a déjà survenu en supposant que les terroristes connaissent toutes les méthodologies historiques et qu'ils puissent reproduire n'importe quel événement à l'avenir. Par conséquent, nous retenons l'hypothèse que tous les pays ont une même loi de sévérité qui est celle calibrée au niveau mondial.

4.1.2 Modélisation de perte pour un portefeuille d'assurance

Pour une catastrophe, une fois que le nombre de victimes Y dans la population générale du pays est simulé, nous simulons ensuite les pertes FGU des portefeuilles d'assurance suite à l'événement. Le processus de simulation se compose de 2 étapes principales :

- Simulation du nombre de victimes du portefeuille
- Simulation de la perte FGU du portefeuille

Simulation de la mortalité dans le portefeuille

Pour modéliser le nombre de décès dans un portefeuille d'assurance, nous définissons “*le taux de pénétration du marché*” du portefeuille comme :

$$q = \frac{\text{Nombre assurés dans le portefeuille}}{\text{Population générale}}$$

Ce rapport q mesure le niveau d'exposition du portefeuille aux risques survenant dans un pays. Effectivement, il est naturel à première vue de supposer que $X|Y \sim \text{Bin}(Y, q)$ où X est le nombre de victimes du portefeuille suite à une catastrophe qui cause Y décès dans le pays enveloppant.

Toutefois, la loi binomiale ne convient que dans le cas où les assurés sont également répartis sur le territoire et les risques des assurés sont indépendants. En réalité, l'hypothèse de l'indépendance des individus n'est pas très juste, notamment dans le cas d'une catastrophe. De plus, un événement extrême peut se produire très aléatoirement ou autrement dit, il peut toucher une zone peuplée ou il peut également impacter une zone rurale avec peu de monde. De ce fait, [Ekheden & Hössjer \(2014\)](#) a proposé de modéliser le nombre de décès dans un portefeuille d'assurance avec la loi **Beta - Binomiale** en se basant sur l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.1.1 *Soit X le nombre de décès dans un portefeuille d'assurance suite à une catastrophe causant Y décès dans la population générale. Nous supposons que la loi conditionnelle de X étant donné Y est la loi Beta-Binomiale.*

C'est-à-dire que :

- $X|Y \sim \text{Bin}(Y, p)$
- $p|Y \sim \text{Beta}(q \theta \ln(Y), (1 - q) \theta \ln(Y))$

où $\theta > 0$ appelé le **facteur de dilution**.

Nous considérons 2 situations asymptotiques :

- Si $\theta \ln(Y) \rightarrow \infty$ alors $X|Y \sim \text{Bin}(Y, q)$: C'est le scénario où les assurés sont également distribués dans la population générale. Par conséquent, la probabilité de décès d'un assuré à cause d'une catastrophe sera q , qui est le taux de pénétration du marché du portefeuille.
- Si $\theta \ln(Y) \rightarrow 0$ alors $P(X = 0|Y) = (1 - q)$ et $P(X = Y|Y) = q$: C'est le scénario de concentration extrême avec la probabilité q que toutes les personnes décédées dans la population générale soient tous assurés. En même temps, il y a une probabilité de $(1 - q)$ qu'il n'y ait personne assuré parmi les victimes. Autrement dit, dans ce scénario, nous supposons que soit aucun assuré n'est touché soit tous les assurés sont touchés par la catastrophe.

Dans chaque scénario, Y , le nombre de décès dans la population générale, est déjà simulé donc $\ln(Y)$ est fixé. Par conséquent, plus θ est grand, plus proches nous sommes du scénario de dilution. En revanche, nous approchons le scénario de concentration quand θ s'approche de 0. Le choix de θ est différent entre un scénario de CAT naturelle/technologique et un scénario de CAT terroriste.

◇ CAT naturelle/technologique

Nous avons défini 3 options de θ : $\theta_{collective}$, $\theta_{individuel}$ et θ_{mixte} selon le pourcentage d'adhérents collectifs du portefeuille. Les adhérents collectifs sont les assurés souscrits collectivement dans le portefeuille. Nous définissons le rapport Q qui représente le niveau de concentration du portefeuille comme suit :

$$Q = \frac{\text{Nombre d'assurés collectifs}}{\text{Nombre d'assurés dans le portefeuille}}$$

En utilisant le rapport Q , la probabilité pour chaque θ est choisie comme suit :

- Q^2 pour $\theta_{collective}$: la probabilité que la catastrophe implique seulement la partie collective du portefeuille. Autrement dit, c'est le scénario de concentration.
- $(1 - Q)^2$ pour $\theta_{individuel}$: la probabilité que la catastrophe implique seulement la partie individuelle du portefeuille. Autrement dit, c'est le scénario de dilution.
- $2 \times (1 - Q) \times Q$ pour θ_{mixte} : la probabilité que la catastrophe implique une partie collective et une partie individuelle du portefeuille à la fois. Autrement dit, c'est le scénario entre les deux extrêmes cas.

La probabilité pour attribuer les θ est calculée en supposant que le portefeuille est composé de 2 parties indépendantes et que les assurés collectifs et individuels sont distribués uniformément dans les 2 parties. Ainsi, dans chaque portefeuille, il y a une probabilité de Q qu'un assuré soit souscrit collectivement et une probabilité de $(1 - Q)$ qu'il soit souscrit individuellement. Cette approche permet de créer différents scénarios avec différents niveaux de concentration lors d'une catastrophe.

La calibration de θ souffre du manque de données. [Ekheden & Hössjer \(2014\)](#) examine le changement de la moyenne et de la variance du coût annuel total des sinistres d'un portefeuille fictif en fonction des θ allant de 100 à 0,01. Il est observé que la moyenne et la variance diminuent avec θ et que cet effet commence à partir de $\theta = 10$ et devient moins significatif à partir de $\theta = 0.1$ comme le montre la figure 4.1 suivante.

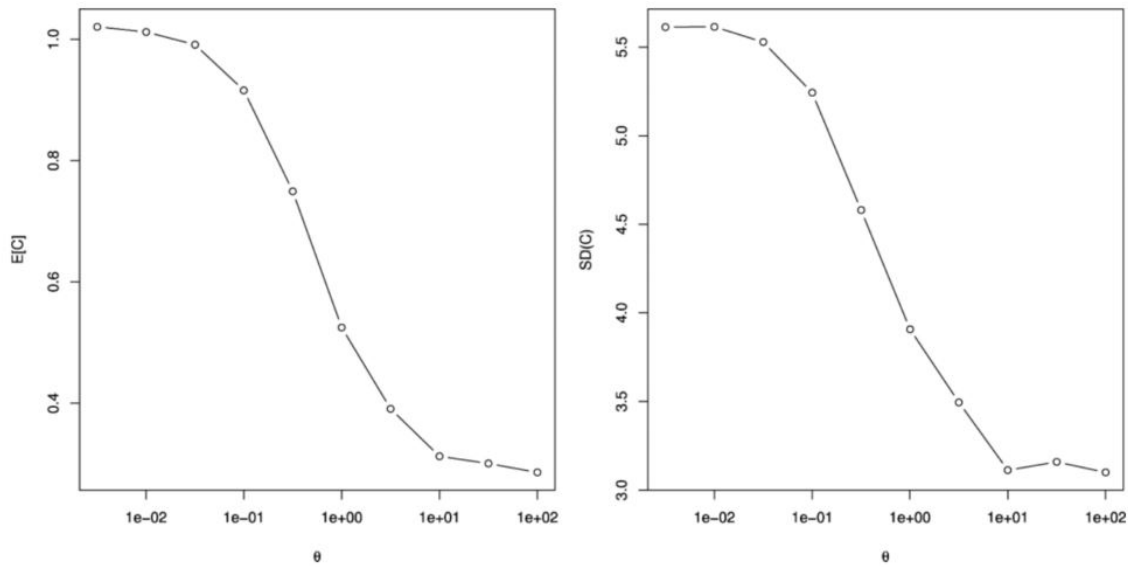


FIGURE 4.1 – Moyenne et variance du coût annuel total des sinistres d'un portefeuille fictif en fonction de θ

Source : [Ekheden & Hössjer \(2014\)](#), page 16, section 4.4.2

Nous retenons donc les valeurs de θ comme suit :

- $\theta_{collective} = 0, 1$
- $\theta_{individuel} = 10$
- θ_{mixte} est la moyenne pondérée de $\theta_{collective}$ et $\theta_{individuel}$:

$$\theta_{mixte} = \theta_{collective} \times Q + \theta_{individuel} \times (1 - Q)$$

◇ CAT terroriste

Dans le cas des événements terroristes, le but des attaquants est de causer le plus de dommages possible et ils ciblent donc les endroits densément peuplés. Afin de refléter au mieux cette caractéristique du terrorisme, le θ utilisé dans la simulation du nombre de victimes suite à une attaque terroriste est fait tendre vers 0. Il en résulte une situation de concentration extrême au cours de laquelle une attaque terroriste se produit : soit personne ne meurt soit tous meurent.

Simulation de la perte FGU du portefeuille

Après avoir estimé qu'il y a X décès dans un portefeuille, nous simulons ensuite le montant de sinistres (la perte FGU) associé aux portefeuilles couverts par les traités CAT XL par événement. La perte FGU sera modélisée comme la somme des montants de X sinistres du portefeuille :

$$FGU = \sum_{i=1}^X Z_i$$

où Z_i est le montant du i -ème sinistre suite à l'événement.

Dans ce modèle, le montant de chaque sinistre d'une police d'assurance du point de vue du réassureur est caractérisé par la somme à risque de cette police. C'est à dire, le montant à charge du réassureur pour chaque police est égale à la somme à risque de cette dernière, qui est abrégée comme SaR.

Malheureusement, les données sur la distribution de SaR ne sont pas disponibles, seule les SaR moyennes sont connues par AGRe. Par conséquent, une hypothèse sur la distribution de SaR doit être formulée. Le modèle utilisera la méthode proposée initialement par Strickler(1960) et adoptée dans [Ekheden & Hössjer \(2014\)](#).

Nous dénotons \bar{Z} la SaR de la garantie décès d'une police d'assurance. \bar{Z} est exprimée en pourcentage de la SaR moyenne de la garantie décès du portefeuille. Il est supposé dans [Ekheden & Hössjer \(2014\)](#) que \bar{Z} suit la loi exponentielle avec la moyenne 1, c'est à dire :

$$P(\bar{Z} \leq z) = 1 - e^{-z}$$

Nous supposons que les SaR des assurés sont indépendantes et identiquement distribuées. Dès lors, étant donné qu'il y a X décès dans le portefeuille d'assurance, la SaR totale (en pourcentage de la SaR moyenne) sera la somme de X variables aléatoires exponentielles. La SaR totale suivra la loi Gamma $\Gamma(X, 1)$ avec le paramètre de forme $\alpha = X$ et le paramètre d'intensité $\beta = 1$. Il est suffisant de multiplier par la SaR moyenne pour en déduire le montant de la perte FGU en euros du portefeuille ou autrement dit, le montant d'engagement de l'assureur envers les assurés.

Pour résumer, la méthodologie retenue pour la simulation de la perte FGU d'un portefeuille d'assurance à l'issue d'une catastrophe qui tue X assurés repose sur la formule suivante :

$$FGU = A \times SaR_{moyenne} \quad \text{où } A \sim \text{Gamma}(\alpha = X, \beta = 1)$$

4.1.3 La prise en compte du risque d'invalidité et des frais médicaux

Dans le modèle de calcul du SCR chez AGRe, le risque catastrophique relatif aux produits d'assurance qui prévoient la garantie d'invalidité et des frais médicaux est aussi intégré dans le SCR CAT Vie non-pandémique. Par conséquent, il est nécessaire de prendre en compte le risque associé à la garantie d'invalidité et la garantie de frais médicaux des portefeuilles d'assurance sous-jacents dans le calcul du SCR CAT Vie non-pandémique.

Dans le document "Catastrophe Task Force report on the Standardised Scenarios for the Catastrophe Risk Module in the Standard Formula" (CEIOPS-DOC-79/10 du 11 juin 2010) qui définit les scénarios standardisés pour le calcul du SCR CAT Santé dans la Formule Standard, les données relatives à la fréquence par type de hasard suite à l'événement World Trade Center (11 septembre 2001) sont utilisées pour calibrer la distribution des catégories d'un sinistre à l'issue d'un événement extrême. La distribution de type du sinistre proposée dans la Formule Standard pour le scénario d'accident de masse et de concentration est résumée dans la table 4.1 suivante. Le scénario d'accident de masse est défini comme la situation d'avoir beaucoup de personnes dans un même endroit en même temps quand une catastrophe survient. Le scénario de concentration, quant à lui, correspond à la situation où il y a des expositions concentrées comme par exemple une catastrophe dans des immeubles dans un centre financier. Jusqu'à

	Pourcentage (%)
Accidental Deaths	10
Permanent Total Disability	1,5
Long Term Disability	5
Short Term Disability	13,5
Medical/Injuries	30
Total Percentage	60

TABLE 4.1 – Répartition de type du sinistre proposée par la Formule Standard

maintenant, le seul risque considéré est le risque de mortalité. En outre, nous disposons le montant de la perte FGU correspondant à la garantie décès d'un portefeuille d'assurance. Pour prendre en compte le risque d'invalidité et de frais médicaux, la méthode d'extrapolation sera utilisée. L'extrapolation se base sur le rapport de la fréquence et du niveau de sévérité entre le risque de mortalité et le risque d'invalidité/frais médicaux. Cette approche est présentée par la suite.

L'extrapolation de la perte FGU de garantie de frais médicaux

La perte FGU correspondant à la garantie décès peut s'écrire sous la formule :

$$FGU_{mort} = \sum_{i=1}^{N_{mort}} X_i^{mort}$$

où N_{mort} est le nombre de décès dans le portefeuille d'assurance et X_i^{mort} est le montant du i -ème sinistre.

Comme le nombre de décès et le montant de chaque sinistre sont supposés indépendants, nous avons ainsi :

$$E(FGU_{Mort}) = E(N_{Mort}) E(X_{Mort})$$

De la même manière, la perte FGU correspondant à la garantie de frais médicaux d'un portefeuille d'assurance a sa moyenne définie comme :

$$E(FGU_{MedEx}) = E(N_{MedEx}) E(X_{MedEx})$$

Le figure 4.1 (dans la page précédente) montre que à l'issue d'une catastrophe, le nombre de sinistres de type frais médicaux est égal à 3 fois le nombre de décès survenus, c'est à dire :

$$\frac{E(N_{MedEx})}{E(N_{Mort})} = 3$$

Pour mesurer l'intensité relative entre la garantie décès et la garantie de frais médicaux, nous utilisons le rapport suivant :

$$\frac{E(X_{MedEx})}{E(X_{Mort})} = \frac{E(SaR_{MedEx})}{E(SaR_{Mort})}$$

Comme le nombre d'assurés dans le portefeuille exposés au risque de décès et au risque de frais médicaux sont égaux, nous avons ainsi :

$$\frac{E(X_{MedEx})}{E(X_{Mort})} = \frac{E(SaR_{MedEx})}{E(SaR_{Mort})} = \frac{SaR_{MedEx}}{SaR_{Mort}}$$

où SaR_{MedEx} et SaR_{Mort} sont la somme à risque totale du portefeuille en frais médicaux et en mortalité respectivement.

Avec ces rapports élémentaires, la perte moyenne d'un portefeuille liée aux frais médicaux peut être calculée avec la formule suivante :

$$\begin{aligned} E(FGU_{MedEx}) &= E(FGU_{Mort}) \frac{E(N_{MedEx})}{E(N_{Mort})} \frac{E(X_{MedEx})}{E(X_{Mort})} \\ &= 3 \times E(FGU_{Mort}) \frac{SaR_{MedEx}}{SaR_{Mort}} \end{aligned}$$

Nous faisons l'hypothèse qu'il existe une relation linéaire entre la perte FGU du portefeuille à cause des décès et celle à cause des frais médicaux. Nous avons donc l'équation :

$$\frac{FGU_{MedEx}}{FGU_{Mort}} = \frac{E(FGU_{MedEx})}{E(FGU_{Mort})}$$

Cette hypothèse indique que la perte FGU du portefeuille correspondant à la garantie de frais médicaux est extrapolée en utilisant la formule suivante :

$$FGU_{MedEx} = 3 \times FGU_{Mort} \times \frac{SaR_{MedEx}}{SaR_{Mort}}$$

Extrapolation de la perte FGU des garanties d'invalidité

Pour extrapoler la perte FGU correspondant à la garantie d'invalidité, la même approche est appliquée.

Afin d'appliquer la méthode d'extrapolation, il faut avoir les sommes à risque correspondant à chaque type de garantie d'invalidité : Invalidité Permanente et Totale (IPT), Invalidité de longue durée (ILD) et Invalidité de courte durée (ICD). Cependant, dans les données fournies par les entités d'AXA, il n'y a que la somme à risque d'invalidité au total sans une distinction entre les trois types de garantie. Nous estimons à partir de ces données que 60 % de cette somme à risque correspond à la garantie d'IPT tandis que deux garanties d'ILD et d'ICD comptent pour les 40 % restants (les chiffres sont modifiés pour respecter la demande de confidentialité de données).

Pour séparer les SaR des garanties d'ILD et d'ICD, nous faisons une hypothèse que les SaR d'ILD et d'ICD sont proportionnelles à leurs durées moyennes d'invalidité. Généralement, la durée d'une ILD est de 10 ans tandis que celle d'une ICD est de 3 ans maximum avec la prise en compte des termes et conditions du contrat d'assurance. Avec cette hypothèse, la répartition des SaR d'IPT, d'ILD et d'ICD en pourcentage de la SaR totale d'invalidité (notée SaR_{Inval}) sera :

$$SaR_{IPT} : SaR_{ILD} : SaR_{ICD} = 60\% : 30\% : 10\%$$

En utilisant la même formule d'extrapolation que dans le cas de la garantie de frais médicaux, nous avons ainsi :

$$FGU_{Inval} = \alpha_{IPT} \frac{SaR_{IPT}}{SaR_{Mort}} + \alpha_{ILD} \frac{SaR_{ILD}}{SaR_{Mort}} + \alpha_{ICD} \frac{SaR_{ICD}}{SaR_{Mort}} \quad (4.1)$$

où FGU_{Inval} est la perte FGU totale liée aux garanties d'invalidité ; α_{IPT} , α_{ILD} , α_{ICD} sont les rapports entre le nombre moyen de sinistres type IPT, ILD, ICD et le nombre moyen de décès, respectivement. En se basant sur la répartition de type du sinistre proposée par la Formule Standard, les valeurs de α_{IPT} , α_{ILD} , α_{ICD} sont obtenues :

$$\alpha_{IPT} = 15\% \quad \alpha_{ILD} = 50\% \quad \alpha_{ICD} = 135\%$$

En reformulant l'équation 4.1, nous pouvons calculer le FGU_{Inval} en utilisant un coefficient moyen pondéré :

$$\begin{aligned}
 FGU_{Inval} &= (\alpha_{IPT} \frac{SaR_{IPT}}{SaR_{Mort}} + \alpha_{ILD} \frac{SaR_{ILD}}{SaR_{Mort}} + \alpha_{ICD} \frac{SaR_{ICD}}{SaR_{Mort}}) \times FGU_{Mort} \\
 &= (\alpha_{IPT} \frac{SaR_{IPT}}{SaR_{Inval}} + \alpha_{ILD} \frac{SaR_{ILD}}{SaR_{Inval}} + \alpha_{ICD} \frac{SaR_{ICD}}{SaR_{Inval}}) \times \frac{SaR_{Inval}}{SaR_{Mort}} \times FGU_{Mort} \\
 &= (15\% \times 60\% + 50\% \times 30\% + 135\% \times 10\%) \times \frac{SaR_{Inval}}{SaR_{Mort}} \times FGU_{Mort} \\
 &= 0,375 \times \frac{SaR_{Inval}}{SaR_{Mort}} \times FGU_{Mort}
 \end{aligned}$$

FGU tous risques

Après l'extrapolation de la perte FGU liée aux garanties de frais médicaux et d'invalidité, la perte FGU du portefeuille d'assurance tous risques compris pourrait être calculée à partir de la perte FGU correspondant à la garantie décès avec la formule suivante :

$$FGU_{TousRisques} = FGU_{Mort} \times (1 + 3 \frac{SaR_{MedEx}}{SaR_{Mort}} + 0,375 \frac{SaR_{Inval}}{SaR_{Mort}})$$

4.2 Modélisation des catastrophes transfrontalières

4.2.1 Définition et statistiques descriptives des catastrophes transfrontalières

Définition

Parmi les traités CAT XL par événement dans le modèle, il existe certains traités qui couvrent plusieurs portefeuilles d'assurance des entités d'AXA dans plusieurs pays en même temps. Il s'agit les traités "régionaux". Pour améliorer la précision de la simulation, il nous faut prendre en compte les catastrophes qui peuvent survenir dans plusieurs pays à la fois.

Comme les événements terroristes sont souvent concentrés dans le territoire d'un pays, le modèle ne modélise que les événements transfrontaliers de type CAT naturelle/technologique.

La définition d'un événement transfrontalier dans le modèle CAT Vie non-pandémique chez AGRe est précisée ci-dessous :

Définition 4.2.1 *Un événement transfrontalier est défini comme un événement qui survient dans au moins 2 pays appartenant au périmètre de modélisation du modèle et cause au moins 10 décès dans chaque pays concerné.*

Une définition comme telle est importante parce qu'il y a des événements transfrontaliers qui ne concernent pas les traités d'AGRe, la prise en compte de ces événements dans la modélisation

est donc inutile. Le seuil de 10 décès dans chaque pays suite à une catastrophe transfrontalière est choisi pour être conforme au seuil choisi dans la partie modélisation des sévérités.

Pour un événement transfrontalier, il est aussi important de connaître le pays d'origine qui est défini comme suit :

Définition 4.2.2 *Le pays d'origine d'un événement transfrontalier est le pays avec le nombre de victimes le plus élevé lors de l'événement.*

Dans la partie suivante, nous détaillons les descriptions statistiques des événements transfrontaliers.

Statistiques descriptives

En ce qui concerne la fréquence, dans les pays couverts par les traités d'AGRe, les événements transfrontaliers sont rares. Selon l'EMDAT, sur la période d'observation de 1970-2020 (soit 50 ans), il y a eu seulement 14 événements transfrontaliers dont 6 événements en Europe et 8 événements en Asie.

Concernant le type d'événement, presque tous les événements transfrontaliers sont des tempêtes sauf en 2004, c'était un tsunami engendré par un tremblement de terre. De plus, un événement transfrontalier survient généralement dans 2 pays et de temps en temps dans 3 pays lors de sa survenance.

Concernant l'intensité des événements transfrontaliers, l'événement le plus meurtrier est le tsunami en Asie en 2004. La figure 4.2 montre l'impact en termes de nombre de décès suite au tsunami de 2004 en Asie dans les pays dans le périmètre de modélisation. L'ampleur et l'étendue de la destruction classent l'événement parmi les plus grandes catastrophes naturelles de l'histoire récente avec des dommages s'élevant à 10 milliards de dollars selon [Jayasuriya & McCawley \(2010\)](#).

Year	Country	Region	Death_Country
2004	Indonesia	Asia	165 708
2004	Malaysia	Asia	80
2004	Thailand	Asia	8 345

TABLE 4.2 – Nombre de victimes causées par le tsunami en Asie en 2004 dans les pays du périmètre de modélisation

Si nous ne prenons pas en compte cet événement exceptionnel, la figure 4.3 dans la page suivante décrit les statistiques descriptives de l'ampleur d'une catastrophe transfrontalière dans l'histoire.

Statistique	Valeur
Min	24
Max	656
Moyenne	117
Ecart-type	172
Median	57

TABLE 4.3 – Statistiques descriptives des événements transfrontaliers sans tenir compte du tsunami de 2004 en Asie

Le tableau 4.4 suivant qui est créé à partir de la base de données EMDAT nous montre la liste de tous les événements transfrontaliers sur la période 1970-2020 qu’il faut prendre en compte dans la modélisation.

Year	Disaster_Type	Region	Nb_Country_Impacted	Total_Death	Original_Country	Damage_Ranking
1990	Storm	Europe	2	57	United Kingdom	1 out of 3
1990	Storm	Europe	3	43	United Kingdom	2 out of 3
1990	Storm	Europe	3	52	Germany	1 out of 5
1999	Storm	Europe	2	103	France	1 out of 6
2000	Storm	Asia	2	243	Philippines	2 out of 14
2004	Storm	Asia	2	56	Taiwan	2 out of 2
2004	Storm	Asia	2	67	Philippines	4 out of 11
2004	Earthquake	Asia	3	174 133	Indonesia	1 out of 17
2005	Storm	Asia	2	26	Philippines	5 out of 5
2007	Storm	Europe	2	24	United Kingdom	1 out of 1
2009	Storm	Europe	2	25	Spain	1 out of 1
2009	Storm	Asia	2	656	Taiwan	1 out of 1
2010	Storm	Asia	2	67	Philippines	4 out of 11
2011	Storm	Asia	2	102	Philippines	3 out of 20

TABLE 4.4 – Liste de tous les catastrophes concernant AGRe sur la période 1970-2020

Nous pouvons noter qu’un événement transfrontalier dans notre modèle ne peut que survenir en Asie ou en Europe à partir du tableau 4.4. La colonne “**Damage Ranking**” du tableau 4.4 représente l’ordre en termes de mortalité de l’événement dans le pays d’origine par rapport à d’autres catastrophes survenant dans le pays dans la même année. Nous observons que les événements transfrontaliers sont souvent les désastres les plus mortels dans un an.

4.2.2 L’idée générale de la modélisation

Dans le contexte d’AGRe, une entité d’AXA peut céder à AGRe plusieurs portefeuilles en même temps. Pour rappel, il y a 2 types de traité CAT XL par événement chez AGRe : traité local et traité régional. Un traité local est couvrir seulement un pays tandis qu’un traité régional couvre plusieurs pays à la fois. Il existe des pays qui sont en même temps dans la couverture d’un traité local et celle d’un traité régional. Par exemple, l’entité Hong Kong d’AXA est couverte par le traité local “HKG-CAT” et le traité régional “Pool BC L1-all scope”. Cette particularité

chez AGRe nécessite donc une méthode de modélisation des événements transfrontaliers qui ne modifie pas les distributions marginales de chaque pays pour ne pas perturber la modélisation des traités locaux.

Nous allons aborder ce défi par une approche “bottom-up”. Cette idée se base sur l’observation qu’un événement transfrontalier n’est qu’une combinaison d’événements locaux de plusieurs pays. Par conséquent, dans un premier temps, nous simulons tous les événements dans chaque pays et puis, un algorithme est construit pour “concaténer” les événements locaux pour former les catastrophes transfrontalières. L’algorithme prend en compte le comportement des événements transfrontaliers observés dans le passé afin de les simuler d’une manière aussi réaliste que possible.

A titre d’illustration, la figure 4.2 suivante présente un scénario où il y a 3 catastrophes en France et 4 catastrophes en Allemagne. Le deuxième événement de la France et le troisième événement d’Allemagne sont concaténés pour former un événement transfrontalier qui survient à la fois en France et en Allemagne causant 30 décès en total.

France	
Event	Nb décès popul générale
1	10
2	20
3	30

Allemagne	
Event	Nb décès popul générale
1	20
2	15
3	10
4	30

Catastrophe transfrontalière de 30 décès

FIGURE 4.2 – Combinaison des événements locaux pour former un événement transfrontalier

Cette approche de modélisation nous permet de respecter correctement les lois de distribution du nombre d’événement CAT dans un pays pendant une année.

À partir de la base de données EMDAT, nous constatons que les catastrophes transfrontalières ne surviennent que dans 2 régions du monde : l’Asie et l’Europe. Cette remarque nous conduit à une approche de simulation région par région en suivant les étapes principales ci-après pour chaque continent :

- Étape 1 : Simuler le nombre d’événements transfrontaliers dans une région
- Étape 2 : Combiner les événements locaux déjà simulés pays par pays pour produire autant des catastrophes transfrontalières

Les parties suivantes expliquent chaque étape à tour de rôle.

4.2.3 Simulation de fréquence des événements transfrontaliers région par région

À propos des régions, le monde est divisé en 5 régions : Asie, Europe, Australie, Afrique et Amérique. Cette division sert à faciliter la simulation et la calibration des paramètres parce qu'il est plus facile quand il n'y a qu'une seule région considérée chaque fois. La segmentation est raisonnable car les régions sont suffisamment larges, ce qui permet de capturer la majorité des événements transfrontaliers possibles.

Le nombre d'événements transfrontaliers dans chaque région sera simulé stochastiquement et puis la simulation des événements sera effectuée région par région.

La première idée

Pour simuler le nombre d'événements transfrontaliers pendant une année dans chaque région, la première idée est de calibrer une loi de fréquence. Cependant, cela posera un problème avec la méthode de combinaison des événements locaux. La technique de combinaison sera présentée dans la section à venir mais en général, elle repose sur l'idée de "contagion". C'est-à-dire que pour former un événement transfrontalier, nous choisissons tout d'abord le pays d'origine et puis choisissons d'autres pays concernés par l'événement. Le problème est relatif à la définition du pays d'origine dans le modèle. Nous avons défini que le pays d'origine est défini comme le pays dont le nombre de morts est le plus élevé lors de l'événement. Un pays d'origine est choisi en se basant sur les observations historiques obtenues à partir de la base de données EMDAT et sans prendre en compte les résultats de simulation des événements locaux. Pour mieux expliquer l'inconvénient de cette approche, nous prenons un exemple par la suite.

Par exemple, en 2020, en utilisant la loi de fréquence, nous savons qu'il y a 1 événement transfrontalier. Le tirage aléatoire décide que le pays *A* est le pays d'origine de la catastrophe transfrontalière et le pays *B* est aussi impacté. Pour pouvoir combiner les événements locaux, en 2020, parmi les catastrophes locales déjà simulées, il devrait exister au moins 1 événement du pays *A* qui est plus meurtrier qu'au moins 1 événement du pays *B*. Sinon, tous les événements du pays *B* sont plus mortels que ceux de pays *A*, ce qui viole la définition du pays d'origine. Cependant, dans l'étape de simulation des événements locaux, c'est impossible de contrôler la gravité de chaque événement dans chaque pays. Par conséquent, il y a une possibilité qu'un événement transfrontalier ne puisse pas être formé, ce qui est contradictoire avec la simulation en utilisant la loi de fréquence où il est dit qu'il existe une catastrophe transfrontalière.

La méthodologie retenue

Nous notons aussi que l'important est de respecter la fréquence des catastrophes transfrontalières dans l'ensemble des scénarios simulés. Autrement dit, le modèle simule 1 million "années"

et ce qu'il faut assurer c'est le nombre d'événements transfrontaliers obtenus au bout de 1 million d'années. Pour cette raison, afin de contourner l'inconvénient de l'approche d'utilisation d'une loi de fréquence tout en assurant le nombre de catastrophes transfrontalières au bout de N scénarios, nous posons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.2.1 *Soit N le nombre de scénarios simulés dans le modèle et M_r une variable aléatoire discrète qui représente le nombre d'événements transfrontaliers survenant au sein d'une région au bout de N scénarios. Nous supposons que M_r suit la loi binomiale :*

$$M_r \sim \text{Bin}(N, p_r)$$

où p_r est la probabilité qu'un événement transfrontalier survienne dans la région pendant une année.

Pour une région, la probabilité qu'un événement régional survienne est calibrée en utilisant la base de données EMDAT par le biais de la méthode du maximum de vraisemblance, c'est-à-dire :

$$\hat{p}_r = \frac{x}{n}$$

où x est le nombre d'événements transfrontaliers observés dans le passé et n est la durée d'observation. Ici, dans notre modèle, n est de 50 ans (de 1970 à 2020).

La table 4.5 suivante résume les résultats d'estimation du paramètre p_r pour chaque région dans le modèle : Avec les paramètres p_r dans la table 4.5, la méthodologie retenue établit qu'il

Région	p_r	Année de début d'obs	Année de fin d'obs
Asie	0,1568	1970	2020
Europe	0,1176	1970	2020
Australie	0	1970	2020
Afrique	0	1970	2020
Amérique	0	1970	2020

TABLE 4.5 – Résultat d'estimation du paramètre p_r pour chaque région

y aura en moyenne 156 800 et 117 600 événements transfrontaliers au bout de 1 million de scénarios simulés dans le modèle en Asie et en Europe respectivement.

Les probabilités de 0 en Australie, en Afrique et en Amérique correspondent à ce qui a été observé dans le passé tout en assurant la prudence du modèle. Pour l'Australie, il y a un seul pays, l'Australie dans la zone de couverture des traités CAT d'AGRe. Pour l'Afrique, il y a deux pays, l'Égypte et le Maroc, qui sont dans le périmètre du modèle. Cependant, les 2 pays sont trop loin l'un de l'autre comme montre la figure 4.3 dans la page suivante. De ce fait, c'est raisonnable de supposer qu'il n'y ait aucun événement transfrontalier qui touche les deux pays en même temps lors de sa survenance.



FIGURE 4.3 – Égypte et Maroc dans la carte du monde

Source : maps.google.com

Pour l'Amérique, nous avons la même justification. Il y a la Colombie et le Mexique qui sont pris en compte dans le modèle. Toutefois, ils sont aussi trop éloignés (comme montre la figure 4.4) pour s'attendre à ce qu'il y ait une catastrophe transfrontalière qui impacte les 2 pays.

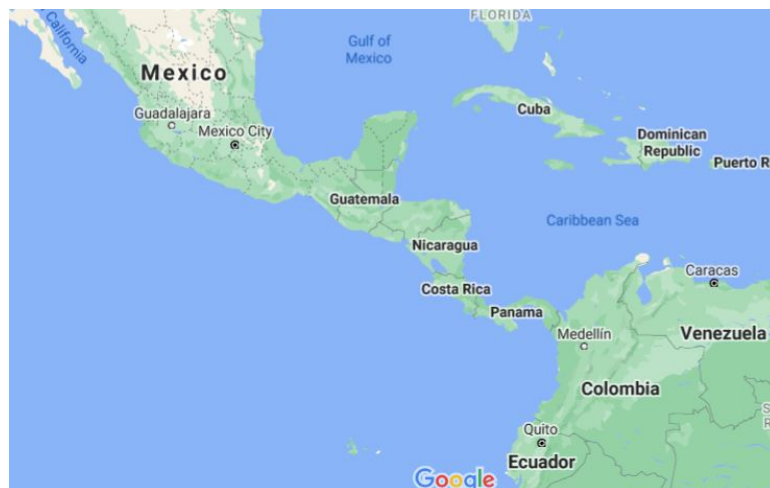


FIGURE 4.4 – Colombie et Mexique dans la carte du monde

Source : maps.google.com

4.2.4 Formation d'une catastrophe transfrontalière

La simulation des catastrophes transfrontalières est effectuée région par région. Une fois que le nombre d'événements dans chaque région est simulé, un algorithme essaie de former autant de catastrophes transfrontalières à partir des événements locaux déjà simulés. Cette partie présente l'idée de l'algorithme ainsi que la méthodologie pour former une catastrophe transfrontalière.

Pour rappel, un événement transfrontalier est formé à partir de la concaténation des événements locaux déjà simulés.

Les événements régionaux dans le modèle sont simulés en suivant la figure 4.5 ci-dessous selon 3 étapes principales suivantes :

- Étape 1 : Simuler le nombre de pays impliqués
- Étape 2 : Choisir le pays d'origine et un événement parmi ses événements locaux
- Étape 3 : Choisir d'autres pays et les événements locaux à concaténer

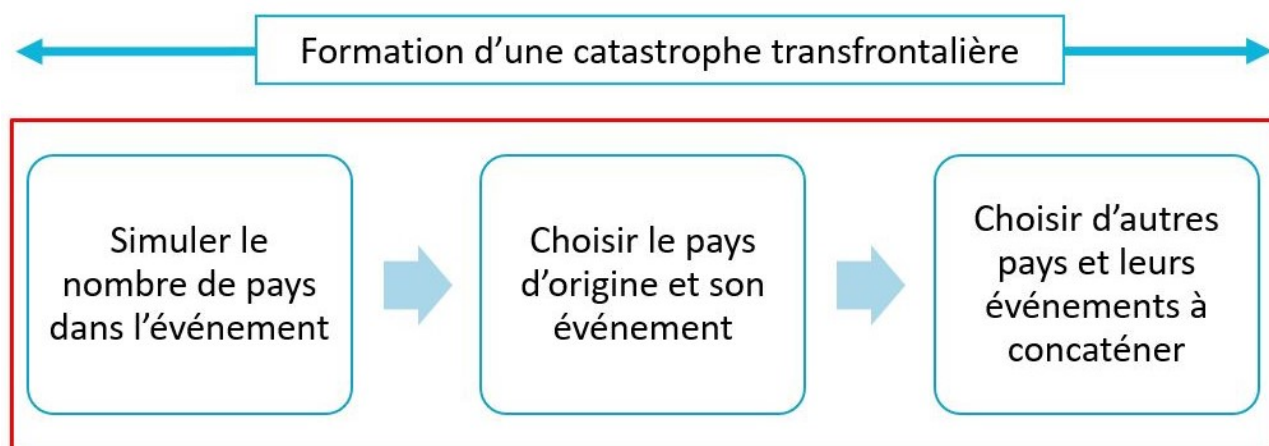


FIGURE 4.5 – Les étapes pour former un événement transfrontalier

Les parties ci-après abordent chacune des trois étapes pour élucider pas à pas le mécanisme de la formation d'une catastrophe transfrontalière.

Étape 1 - Simulation du nombre de pays impliqués par l'événement transfrontalier

Selon la base de données EMDAT, parmi 14 événements transfrontaliers observés dans le passé, 11 événements impliquent 2 pays et 3 événements impliquent 3 pays. Pour pouvoir simuler stochastiquement le nombre de pays touchés lors d'un événement transfrontalier, nous nous fondons sur la distribution discrète empirique du nombre de pays obtenue à partir de la base de données EMDAT. Cette distribution est résumée dans la table 4.8 suivante.

Nombre de pays impliqués	Probabilité empirique
2 pays	11 / 14
3 pays	3 / 14

TABLE 4.6 – La distribution empirique du nombre de pays impliqués lors d'un événement transfrontalier

Étape 2 - Choix du pays d'origine et du premier événement local

Le choix des pays associés se repose sur l'idée de "contagion". C'est-à-dire que nous commençons par un pays dit "le pays d'origine" et puis d'autres pays concernés sont choisis en suivant ce qui s'est passé dans l'histoire. Pour rappel, le pays d'origine est le pays dont le nombre de victimes est le plus élevé lors d'une catastrophe transfrontalière. La simulation de ce pays s'appuie aussi sur une distribution empirique obtenue à partir de la base de données EMDAT. Cette distribution est extraite région par région et elle est résumée dans la table 4.7 ci-dessous.

	Royaume-Uni	Allemagne	France	Espagne	Philippines	Taïwan	Indonésie	Total
Europe	0,5	0,16	0,17	0,17				1
Asie					0,625	0,25	0,125	1

TABLE 4.7 – Distribution empirique par pays d'origine

Une fois que le pays d'origine est déterminé, il nous faut choisir un événement parmi ceux déjà simulés dans ce pays comme le premier événement causé par la catastrophe transfrontalière. Cet événement est désormais appelé le **"premier événement"**.

Cette étape est à effectuer avant la simulation d'autres pays impactés parce que l'événement local dans le pays d'origine doit être plus mortel lors d'une catastrophe transfrontalière. Par conséquent, concernant la détermination d'autres pays, un pays est classé comme un "candidat" seulement s'il existe au moins 1 événement dont le nombre de victimes est inférieur à celui de l'événement du pays d'origine. Autrement dit, d'autres pays touchés par la catastrophe transfrontalière sont simulés avec l'appréciation de la gravité de l'événement du pays d'origine.

Étant donné le pays d'origine O et ses événements locaux déjà simulés, on se demandera quel événement est à prendre pour refléter au mieux les caractéristiques d'une catastrophe transfrontalière. Selon la base de données EMDAT, nous remarquons que l'événement constitutif du pays d'origine est toujours parmi les événements les plus graves du pays dans l'année. Il est donc raisonnable d'effectuer le tirage du premier événement en utilisant une distribution de rangs de gravité comme le montre la figure 4.6.

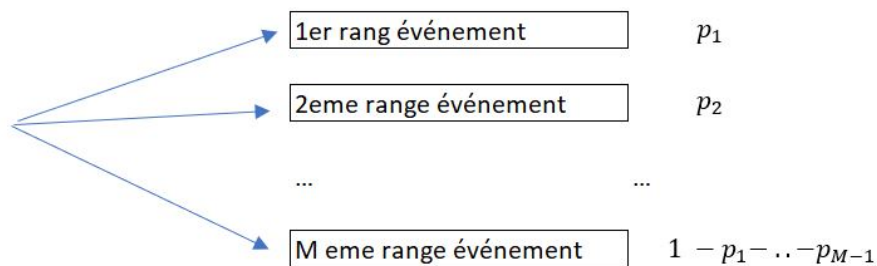


FIGURE 4.6 – Allocation des probabilités pour les rangs

Nous supposons que cette distribution est commune pour tous les pays d'origine. Elle est estimée à partir de la base de données EMDAT et résumée dans la table 4.8 ci-dessous. Dans le cas où le nombre d'événements dans le pays d'origine est inférieur au rang choisi, nous prenons toujours l'événement le plus meurtrier du pays de l'année.

Rang	Probabilité empirique
1 ^{er}	50%
2 ^{ème}	21,43%
3 ^{ème}	7,14%
4 ^{ème}	14,29%
5 ^{ème}	7,14%
Total	100 %

TABLE 4.8 – La distribution empirique du rang de l'événement local d'un pays d'origine

Étape 3 - Choix des autres pays et leurs événements locaux à concaténer

L'étape suivante est de déterminer les autres pays concernés par l'événement. La table 4.9 montre que les types d'événement graves les plus courants sont les inondations, les glissements de terrain, les tempêtes et les tremblements de terre.

Type Event	Count
Flood	440
Storm	385
Landslide	164
Earthquake	133
Wildfire	27
Volcanic activity	18
Mass movement (dry)	13

TABLE 4.9 – Le nombre de catastrophes naturelles par type

Les inondations, les glissements de terrain et les tremblements de terre, s'ils sont transfrontaliers, impactent plutôt un pays d'origine et ses pays voisins tandis qu'une tempête peut toucher des pays éloignés dans sa trajectoire. Afin de simuler différents type d'événements transfrontaliers, cela nécessite une solution qui permet de simuler soit un événement régional qui frappe des pays voisins soit un événement qui pourrait frapper des pays éloignés lors de sa survenance.

Étant donné le pays d'origine O , nous définissons deux groupes des pays :

- Catégorie 1 : les pays qui ont déjà appartenu à un événement transfrontalier dans lequel le pays O était le pays d'origine
- Catégorie 2 : les pays voisins de pays O qui n'appartiennent pas à la catégorie 1

Tout d'abord, la catégorie 1 permet de détecter les pays "à risque" selon ce qui est observé dans l'histoire. Dans un deuxième temps, la catégorie 2 permet de créer des nouveaux événements qui ont la possibilité de se produire à l'avenir mais nous ne les avons jamais vus dans l'histoire.

La détermination des autres pays étant donné un pays d'origine se base tout d'abord sur le choix aléatoire d'une catégorie. Ensuite, un pays au sein du groupe choisi est tiré. Le choix de catégorie privilégie les expériences historiques avec 80 % de probabilité allouée à la catégorie 1 et 20 % à la catégorie 2.

Après avoir choisi la catégorie du pays, nous tirons un pays dans le groupe selon le mécanisme suivant :

- Si la catégorie 1 est choisie : Nous attribuons la probabilité totale à chaque pays proportionnellement au nombre total de victimes de ce pays dans tous les événements transfrontaliers dont le pays O est le pays d'origine.

Par exemple, supposons qu'il y eu 2 événements transfrontaliers associés à 3 pays O, A, B . Le pays O est déjà choisi comme le pays d'origine. Ici, nous devons simuler les pays supplémentaires en choisissant entre le pays A et B . Les nombres de morts sont résumés dans la figure suivante :

Event 1		Event 2	
Pays	Nb_Décès	Pays	Nb_Décès
Pays O	100	Pays O	100
Pays A	20	Pays A	20
Pays B	10		

Le nombre de décès total du pays A est de 40 et celui du pays B est de 10. La probabilité est donc allouée de la manière suivante : $p_A : p_B = 4 : 1$ et donc $p_A = 80\%$, $p_B = 20\%$.

- Si la catégorie 2 est choisie : La probabilité totale est allouée à chaque pays proportionnellement à la longueur des frontières de chaque pays avec le pays d'origine.

La dernière étape est de choisir les événements des pays “voisins” à concaténer. Le tableau 4.10 (dans la page suivante) montre la liste de tous les événements locaux qui ont fait partie d'un événement transfrontalier avec leurs rangs. Par exemple, la première ligne de la table signifie qu'en 1990, il y a eu une tempête régionale qui a impacté la Belgique et elle a causé 10 décès. De plus, la colonne “Rank event” montre qu'en 1990, il y eu 2 événements extrêmes en Belgique et la tempête a été le 2-ème événement le plus meurtrier du pays. La colonne “Rank event (conditional)” montre que tous les deux événements en Belgique sont moins mortels que l'événement du pays d'origine (i.e. Royaume-Uni) dans la tempête régionale en 1990. Comme nous pouvons constater à partir de la table, un événement du pays “voisin” pourrait être parmi non seulement les événements les plus mortels mais aussi les événements les moins mortels du pays de l'année.

Event-Id	Type	Country	Nb-Death	Country-Origin	Rank event	Rank event (conditional)
1990-717NAT	Storm	Belgium	10	United Kingdom	2 out of 2	2 out of 2
1990-722NAT	Storm	Germany	15	United Kingdom	3 out of 5	2 out of 4
1990-722NAT	Storm	France	10	United Kingdom	5 out of 5	4 out of 4
1990-723NAT	Storm	France	10	Germany	5 out of 5	5 out of 5
1990-723NAT	Storm	United Kingdom	18	Germany	2 out of 3	2 out of 2
1999-571NAT	Storm	Germany	15	France	1 out of 1	1 out of 1
2000-706NAT	Storm	Taiwan	89	Philippines	1 out of 3	1 out of 3
2004-309NAT	Storm	Philippines	28	Taiwan	8 out of 11	1 out of 5
2004-435NAT	Storm	Taiwan	32	Philippines	1 out of 2	1 out of 2
2004-659NAT	Earthquake	Malaysia	80	Indonesia	1 out of 2	1 out of 2
2004-659NAT	Earthquake	Thailand	8 345	Indonesia	1 out of 5	1 out of 5
2005-540NAT	Storm	Thailand	10	Philippines	5 out of 5	2 out of 2
2007-19NAT	Storm	Germany	11	United Kingdom	2 out of 2	2 out of 2
2009-14NAT	Storm	France	11	Spain	1 out of 1	1 out of 1
2009-321NAT	Storm	Philippines	26	Taiwan	9 out of 16	9 out of 16
2010-543NAT	Storm	Taiwan	32	Philippines	1 out of 1	1 out of 1
2011-272NAT	Storm	Thailand	18	Philippines	3 out of 4	2 out of 3

TABLE 4.10 – Les rangs des événements locaux faisant partie des événements transfrontaliers dans le pays où ils se sont produits

Toutefois, la modélisation du rang d'un événement du pays "voisin" n'est pas évidente. La raison est que dans ce cas, nous devons modéliser le rang d'une variable aléatoire conditionnelle $X|X < Y$, où Y est le nombre de décès de l'événement du pays d'origine et X est le nombre de décès de l'événement du pays "voisin". Ici, Y est une variable aléatoire, ce qui complique la modélisation du rang de X . Pour être simple tout en permettant de créer différents scénarios d'événements transfrontaliers, l'événement du pays "voisin" est tiré aléatoirement parmi les événements dont le nombre de décès sont inférieurs à celui de l'événement du pays d'origine.

Cette section a décrit et expliqué les méthodologies retenues pour la modélisation des catastrophes transfrontalières. La section suivante détaille d'une manière concrète et structurée le processus de simulation utilisé dans le modèle.

4.2.5 Description du processus de simulation

La simulation des catastrophes transfrontalières d'une région est composée de 3 étapes :

- ◇ **Étape 1** : Nous simulons tout d'abord M_r qui est le nombre d'événements transfrontaliers à l'issue de N scénarios. $M_r \sim \text{Bin}(N, p_r)$ où p_r est la probabilité d'avoir un événement transfrontalier pendant un an dans la région.
- ◇ **Étape 2** : Afin de simuler M_r événements, nous faisons une boucle jusqu'à ce que nous obtenions M_r événements transfrontaliers. Dans chaque boucle, nous sélectionnons un scénario (échantillonnage avec remise) dans lequel nous supposons qu'un événement transfrontalier survient.
- ◇ **Étape 3** : Pour simuler un événement transfrontalier dans le scénario choisi, nous faisons les étapes suivantes :

- Simuler c qui est le nombre de pays impliqués par l'événement selon une distribution discrète empirique construite à partir de la base de données EMDAT.
- Simuler le pays O qui est le pays d'origine de l'événement selon une distribution empirique construite à partir de la base de données EMDAT.
- Choisir un événement parmi ceux qui sont déjà simulés du pays d'origine. Le tirage est fait avec une distribution empirique du rang de l'événement du pays d'origine qui est construite à partir de la base de données EMDAT.
- Simuler $(c-1)$ pays “voisins” impliqués par l'événement transfrontalier par les étapes suivantes :
 - ★ Dans un premier temps, nous identifions les pays appelés “candidats” qui sont les pays qui ont au moins un événement dont le nombre de victimes est inférieur à celui de l'événement du pays d'origine sous la condition que cet événement n'appartient pas encore à un événement transfrontalier dans les simulations précédentes. Les pays “candidats” sont classifiés en 2 catégories :
 - Catégorie 1 (a pays) : les pays qui ont déjà appartenu à un événement transfrontalier dans lequel le pays d'origine est le pays O
 - Catégorie 2 (b pays) : les pays voisins du pays O qui n'appartiennent pas à la catégorie 1
 - Si $(a+b) < (c-1)$, nous ne pouvons pas former un événement transfrontalier. L'essai a échoué. Nous nous arrêtons et faisons un autre essai de simulation.
 - ★ Pour choisir un pays parmi $(c-1)$ pays, nous choisissons tout d'abord la catégorie. Si la catégorie 1 existe, nous attribuons 80% de probabilité à cette catégorie et 20% à la catégorie 2. Si la catégorie 1 n'existe pas, nous attribuons 100% de probabilité à la catégorie 2.

Pour les pays appartenant à la catégorie 1, nous attribuons la probabilité totale à chaque pays proportionnellement au nombre total de victimes de ce pays dans tous les événements transfrontaliers dans lesquels le pays O est le pays d'origine. Pour le pays de catégorie 2, la probabilité totale est allouée à chaque pays proportionnellement aux longueurs des frontières avec le pays d'origine.

- ★ Après avoir choisi un pays impliqué, nous choisissons aléatoirement un événement qui n'appartient pas encore à un événement transfrontalier et qui a moins de victimes que celui du pays d'origine.

Chapitre 5

Résultat et études de sensibilité

L'objectif de ce chapitre est de présenter le résultat du modèle et les études de sensibilité des paramètres du modèle.

5.1 Résultat du modèle

Pour rappel, l'objectif principal du modèle est de calculer le SCR CAT Vie non-pandémique d'AGRe. Le modèle traite les scénarios extrêmes relatifs aux survenances des catastrophes naturelles, technologiques et terroristes dans 30 pays où il y a des expositions des entités d'AXA.

Le SCR est calculé à partir du quantile à 99,5% et de la moyenne d'une distribution simulée d'engagement d'AGRe. Le tableau suivant montre différents résultats du modèle (les chiffres sont modifiés pour respecter la confidentialité de données).

	SCR
SCR acceptation	56 055 160
SCR net rétrocession	43 818 477
SCR net rétrocession & GC	39 004 191

TABLE 5.1 – Résultat du modèle de calcul SCR CAT Vie non-pandémique

Dans la table 5.1 ci-dessus, le SCR acceptation représente le montant des fonds propres pour faire face à des situations extrêmes avant l'intervention des réassureurs externes dans le contexte d'une rétrocession proportionnelle.

La rétrocession correspond à la situation où un réassureur cède le même portefeuille d'assurance à une autre réassureur. Par exemple, supposons qu'une entité d'AXA place un traité CAT XL par événement chez AGRe et qu'ensuite, AGRe rétrocède proportionnellement ce traité auprès

de Swiss Re à 30 %. Alors, quand une catastrophe survient et qu'elle fait payer AGRe à l'entité 20 millions d'euros, AGRe devra tout d'abord verser l'intégralité de ces 20 millions à l'entité et puis, Swiss Re va indemniser AGRe à hauteur de 30% de ce montant soit 6 millions d'euros.

Quand il y a un sinistre, c'est la responsabilité d'AGRe d'indemniser intégralement les entités même si les réassureurs externes font faillite. Par conséquent, le SCR acceptation permet de prendre en compte le risque de défaut des réassureurs externes auxquels AGRe rétrocède une partie de son risque.

Pour rappel, afin de mieux protéger le pool Vie contre les événements extrêmes, AGRe place aussi un traité CAT XL par événement qui s'appelle "Group Cover". Ce traité Group Cover intervient aussi dans chaque catastrophe à la suite de laquelle AGRe devrait indemniser les entités. Nous pouvons imaginer le Group Cover comme un traité d'AGRe dont l'engagement dans chaque événement est calculé à partir de la perte FGU du portefeuille d'assurance couvert. Pour illustrer son fonctionnement, nous prenons un exemple avec la présence du Group Cover et d'une rétrocession. Supposons qu'une catastrophe cause une perte pour le portefeuille sous-jacent et déclenche à la fois le traité CAT XL par événement d'AGRe et le Group Cover. Les engagements des ces deux traités sont calculés avec la formule ci-dessous, dans l'hypothèse qu'AGRe ne soit pas autorisé à réaliser des bénéfices suite à la survenance d'un événement assurantiel.

$$\begin{aligned} \text{— } Y_{AGRe} &= (1 - \text{Taux rétrocession}) \times \text{Min}(\text{Limit}_{AGRe}, \text{Max}(\text{FGU} - \text{Retention}_{AGRe}, 0)) \\ \text{— } Y_{GroupCover} &= \text{Min}[\text{Min}(\text{Limit}_{GC}, \text{Max}(\text{FGU} - \text{Retention}_{GC}, 0)), Y_{AGRe}] \end{aligned}$$

où Y_{AGRe} et $Y_{GroupCover}$ sont l'engagement du traité d'AGRe et du Group Cover, respectivement, suite à une catastrophe.

À côté du "SCR acceptation", le "SCR net rétrocession" et le "SCR net rétrocession & GC" donnent des informations de différents niveaux pour mieux comprendre le montant du SCR nécessaire dans chaque situation. Le "SCR net rétrocession" donne l'idée de l'exposition au risque de crédit d'AGRe. Quant à lui, le "SCR net rétrocession & GC" donne une vision nette d'AGRe qui prend en compte le traité Group Cover dont le rôle essentiel d'atténuation des risques ("*risk mitigation*" en anglais) est souligné.

5.2 Études de sensibilité

Le regroupement des hypothèses des lois marginales de fréquence/sévérité, de la structure de dépendance des fréquences ainsi que des paramètres comme $\theta_{individuel}$, $\theta_{collective}$ est appelé désormais le "Modèle Central".

Dans une étude de sensibilité, nous allons faire varier à chaque fois une hypothèse du Modèle Central pour construire un nouveau jeu d'hypothèses. Chaque nouveau jeu est appelé une

“**Sensi**” (abréviation pour “Sensibilité”) dans le modèle.

Pour chaque Sensi, nous allons recalculer le SCR CAT Vie non-pandémique et le comparer avec celui du Modèle Central pour voir l’impact du changement des hypothèses. Nous allons comparer les montants suivants : acceptation, net rétrocession (abrégé comme “net rétro”), net rétrocession et net Group Cover (abrégé comme “net rétro & GC”).

Dans les étude de sensibilité, deux “familles” de sensibilité seront présentées :

- Sensibilités sur les hypothèses des lois et de la structure de dépendance
- Sensibilités sur d’autres paramètres du modèle

5.2.1 Sensibilité sur l’hypothèse de loi de sévérité

La loi de Weibull tronquée

Il existe plusieurs distributions souvent utilisées pour la modélisation des phénomènes extrêmes comme par exemple la loi log-normale, la loi log-gamma, la loi de Weibull. Le support de ces lois est soit \mathbb{R} soit \mathbb{R}^+ mais nous ne nous intéressons qu’à des variables qui dépassent un seuil m qui représente la sévérité d’une catastrophe. Pour cette raison, nous faisons appel à des distributions “tronquées” dont le support est borné.

Nous donnons par la suite la formule de la fonction de densité d’une loi tronquée.

Définition 5.2.1 Soit $g(x)$ et $G(x)$ la fonction de densité et la fonction de répartition d’une variable aléatoire X , alors la fonction de répartition et la fonction de densité d’une variable $Y = X|a \leq X \leq b$ sont données par la formule suivante :

$$F_{Y,a,b}(y) = \frac{G(y) - G(a)}{G(b) - G(a)} \mathbb{I}_{a \leq y \leq b} + \mathbb{I}_{y > b}$$

$$f_{Y,a,b}(y) = \frac{g(y)}{G(b) - G(a)} \mathbb{I}_{a \leq y \leq b}$$

Dans notre modèle, nous nous intéressons à la loi tronquée à gauche dont le support est $[m; +\infty]$.

Pour parler de la loi de Weibull tronquée, nous parlerons tout d’abord de la loi de Weibull qui est une loi souvent utilisée dans la théorie des valeurs extrêmes.

Définition 5.2.2 La fonction de répartition et de densité d’une variable X qui suit la loi de Weibull avec les paramètres α, β s’écrivent :

$$G(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$$

$$g(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$$

A partir de la définition de la loi de Weibull, nous pouvons déduire la fonction de répartition et la fonction de densité de la loi de Weibull tronquée à gauche :

Définition 5.2.3 Soit X une variable de la loi de Weibull(α, β), la fonction de répartition et la fonction de densité d'une variable $Y = X|X \geq m$ de la loi de Weibull tronquée à gauche avec le seuil m et les paramètres α, β sont :

$$F_Y(y) = \frac{G_X(y) - G_X(m)}{1 - G_X(m)} \mathbb{I}_{m \leq y} = 1 - \exp \left[\left(\frac{m}{\beta} \right)^\alpha - \left(\frac{y}{\beta} \right)^\alpha \right] \mathbb{I}_{m \leq y}$$

$$f_Y(y) = \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{y}{\beta} \right)^{\alpha-1} \exp \left[\left(\frac{m}{\beta} \right)^\alpha - \left(\frac{y}{\beta} \right)^\alpha \right] \mathbb{I}_{m \leq y}$$

La figure 5.1 ci-dessous montre la fonction de densité empirique de la loi de Pareto généralisée contre la loi de Weibull tronquée avec les paramètres estimés avec les données de la France. Nous pouvons constater que la loi de Pareto généralisée peut produire des événements très extrêmes par rapport à la loi de Weibull tronquée parce que la queue de la loi de Pareto généralisée est plus épaisse.

Fonction de densité empirique de GPD vs Weibull tronquée de la France

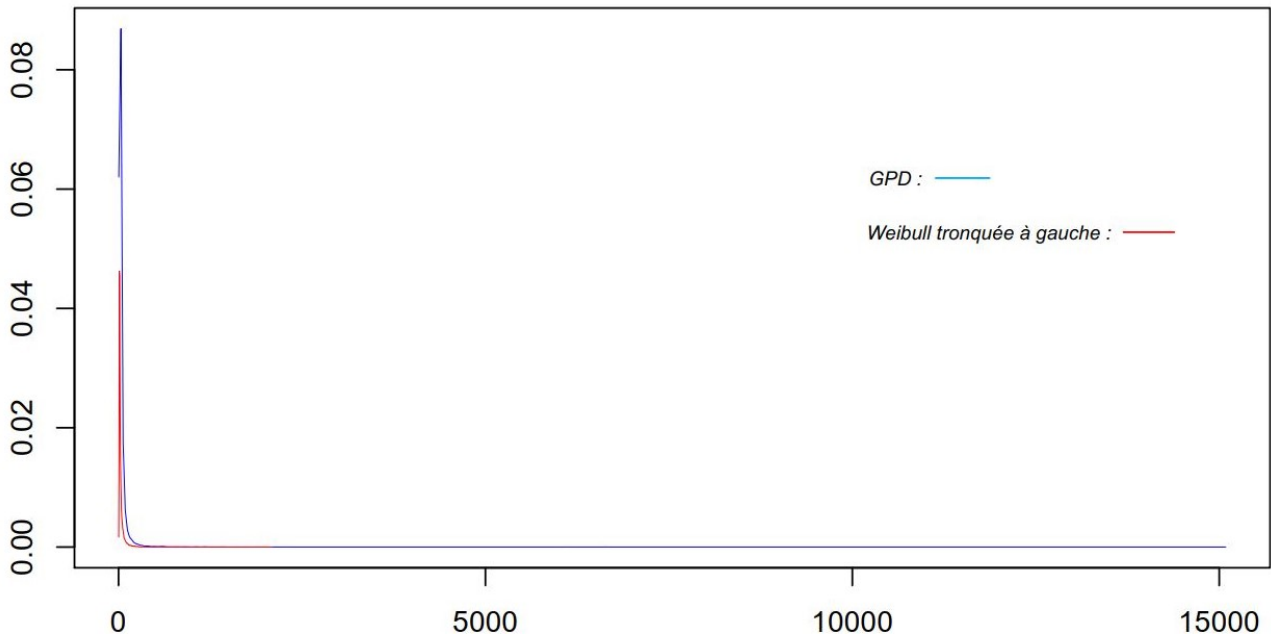


FIGURE 5.1 – La fonction de densité empirique de la loi de Pareto généralisée et de la loi de Weibull tronquée dont les paramètres sont calibrés avec les données de la France

Sensibilité sur l'hypothèse de la loi de sévérité

La loi de sévérité retenue dans le Modèle Central est la loi de Pareto généralisée. Nous allons changer la loi de sévérité pour tester le changement du SCR quand une autre loi est utilisée.

La loi retenue pour réaliser cette sensibilité est la loi de Weibull tronquée à gauche avec le seuil fixé à 10 décès. Les paramètres restants de la loi sont calibrés pays par pays en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

La table 5.2 suivante montre que le choix de la loi de sévérité pourrait fortement impacter le SCR.

Sensi description	SCR acceptance	SCR net rétro	SCR net rétro & GC
Modèle Central (Pareto généralisée)	56 055 160	43 818 477	39 004 191
CAT nat/techno - Weibull tronquée	35 445 814	25 134 419	24 614 862
CAT terr - Weibull tronquée	48 703 493	37 594 482	35 077 761

TABLE 5.2 – SCR correspondant à différentes Sensi de la loi de sévérité

Effectivement, en utilisant la loi de Pareto généralisée, nous pouvons simuler plus d'événements extrêmes, ce qui va augmenter le quantile à 99,5% de la distribution de perte à un an comme le montre la table 5.3 ci-dessous.

Sensi description	q995-perte acceptance	q995-perte net rétro	q995-perte net rétro&GC
Central-Pareto généralisée	58 102 673	45 218 381	40 242 387
Nat/tech-Weibull tronquée	36 736 080	26 024 748	25 455 094
Terr-Weibull tronquée	50 628 582	38 897 863	36 239 562

TABLE 5.3 – Quantile à 99,5% de perte correspondant à différents Sensi de la loi de sévérité

5.2.2 Sensibilité sur la structure de dépendance des fréquences

Pour rappel, la structure de corrélation des fréquences retenue dans le Modèle Central est :

- Pour CAT naturelle/technologique : la copule de Student avec la matrice de corrélation de type “inter/intra-région” : $\rho_{inter-region} = 0,19068$ et $\rho_{intra-region} = 0,36646$
- Pour CAT terroriste : la copule de Student avec la matrice de corrélation d'un seul paramètre : $\rho_{CAT-Terr} = 0,06$

Pour les sensibilités sur la structure de dépendance, nous allons dans un premier temps choquer les coefficients de corrélation des fréquences des catastrophes naturelles/technologiques et ensuite ceux des fréquences d'attaques terroristes.

Sensibilité sur la corrélation des fréquences des catastrophes naturelles/technologiques

Nous augmentons tous les coefficients de corrélation de 25%. En regardant la table 5.4 dans la page suivante, nous remarquons qu'il y a une hausse légère du SCR quand il y a une augmentation du niveau de corrélation.

Sensi description	SCR acceptation	SCR net rétro	SCR net rétro & GC
Modèle Central	56 055 160	43 818 477	39 004 191
Corr CAT nat/techno + 25%	56 928 918	44 157 263	39 773 420

TABLE 5.4 – SCR correspondant à différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des catastrophes naturelles/technologiques

En regardant la TVaR_{99,5%} de la distribution du montant d’engagement annuel d’AGRe dans la table 5.5, nous pouvons constater que l’augmentation du niveau de corrélation des fréquences des catastrophes naturelles/technologiques conduit à une hausse de l’engagement d’AGRe pour les scénarios extrêmes au-delà du quantile à 99,5%.

Sensi description	TVaR995-acceptation	TVaR995-net rétro	TVaR995-net rétro&GC
Modèle Central	115 183 760	90 184 973	73 117 886
Corr CAT nat/techno+25%	118 843 858	92 787 614	74 197 971

TABLE 5.5 – TVaR_{99,5%} d’engagement annuel d’AGRe correspondant à différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des catastrophes naturelles/technologiques

Sensibilité sur les corrélations des fréquences des actes terroristes

Dans un premier temps, comme pour les catastrophes naturelles/technologiques, un choc à la hausse de 25% sur tous les coefficients de la matrice de corrélation des fréquences des événements terroristes est appliqué. La table 5.6 ci-dessous montre un résultat qui est assez surprenant : le SCR acceptation baisse très légèrement de 56 055 160 à 55 878 313 (soit 0,31%) quand le niveau de corrélation augmente de 25%.

Sensi description	SCR acceptation	SCR net rétro	SCR net rétro & GC
Modèle Central	56 055 160	43 818 477	39 263 280
Corr CAT terr + 25%	55 878 313	43 539 448	39 260 506

TABLE 5.6 – SCR correspondant à différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des actes terroristes

En essayant d’expliquer le phénomène, nous appliquons respectivement un choc de 50% et un stress de 100% sur les coefficients de corrélation. Le résultat de la table 5.7 dans la page suivante montre qu’il y a toujours une baisse très légère même quand les coefficients sont augmentés de 50%. D’ailleurs, même lorsque les corrélations sont à 100%, la différence du SCR acceptation entre cette sensibilité (56 114 692) et celui du Modèle Central (56 055 160) est toujours négligeable (un écart de 0,106%).

Sensi description	SCR acceptation	SCR net rétro	SCR net rétro&GC
Modèle Central	56 055 160	43 818 477	39 263 280
Corr CAT terr + 25%	55 878 313	43 539 448	39 260 506
Corr CAT terr + 50%	56 003 009	43 690 227	39 432 388
Corr CAT terr = 100%	56 114 692	44 034 111	39 216 320

TABLE 5.7 – Différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des actes terroristes

Nous affichons ensuite la TVaR à 99,5% de différentes sensibilités pour voir l'impact de l'augmentation des coefficients de corrélation des fréquences dans la table 5.8.

Sensi description	TVaR995-acceptation	TVaR995-net rétro	TVaR995-net rétro &GC
Modèle Central	115 183 760	90 184 973	73 117 886
Corr Freq CAT terr+ 25%	114 514 855	89 684 779	72 945 406
Corr Freq CAT terr+ 50%	115 929 411	90 712 870	73 309 044
Corr Freq CAT terr= 100%	116 498 062	91 206 888	73 234 482

TABLE 5.8 – TVaR_99,5% de l'engagement d'AGRe de différentes sensibilités

Nous regardons ensuite la distribution du nombre total annuel d'attentats terroristes de tous les pays dans le périmètre de modélisation dans la table 5.9 suivante.

	E	Sd	q50	q75	q95	q995	TVaR50	TVaR75	TVaR95	TVaR995
Modèle Central	54,8	12,3	54,0	61,0	76,0	100,0	64,7	71,1	86,7	112,3
Corrfreq +25%	54,8	20,9	53,0	66,0	92,0	128,0	71,3	82,5	108,3	144,9
Corrfreq +50%	54,8	26,9	52,0	70,0	103,0	147,0	76,1	91,2	122,6	165,9
Corrfreq =100%	54,8	35,6	50,0	76,0	122,0	174,0	83,1	104,3	144,1	192,0

TABLE 5.9 – Distribution du nombre total annuel d'attentats terroristes de tous les pays dans le périmètre de modélisation

La table 5.9 nous montre que la moyenne est inchangée, ce qui est dû au fait que la corrélation n'impacte pas les fréquences marginales. Au contraire, le changement d'écarts-types (la colonne *Sd*) nous montre que les nombres d'attentats des sensibilités sont plus volatiles que celui du Modèle Central. De plus, en regardant les quantiles à 75%, 95%, 99,5% et les TVaR à 75%, 95% et 99,5%, nous pouvons constater que l'augmentation des coefficients de corrélation nous amène à avoir plus de scénarios dans lesquels il y a beaucoup d'attentats terroristes au total.

Toutefois, ayant plus de scénarios extrêmes en termes de nombre d'événements n'impacte pas AGRe. La table 5.10 (dans la page suivante) affiche la distribution du nombre total d'attaques terroristes qui déclenchent les traités CAT XL par événement d'AGRe. Nous remarquons que la distribution reste presque pareille à travers les sensibilités. Ce phénomène peut être expliqué par la rareté des attentats terroristes qui peuvent déclencher un traité CAT XL par événement. Autrement dit, nous avons plus d'événements terroristes pendant une année mais la plupart

d'entre eux ne sont pas significatifs. Par conséquent, le SCR d'AGRe n'est pas sensible au changement des coefficients de corrélation. Nous pouvons conclure que les écarts du SCR entre les sensibilités et le Modèle Central sont dus à l'effet de Monte Carlo.

	E	Sd	q50	q75	q95	q995	TVaR50	TVaR75	TVaR95	TVaR995
Modèle Central	0,12	0,35	0,00	0,00	1,00	2,00	1,07	1,07	2,07	3,09
Corrfreq+25%	0,12	0,35	0,00	0,00	1,00	2,00	1,08	1,08	2,07	3,08
Corrfreq+50%	0,12	0,35	0,00	0,00	1,00	2,00	1,08	1,08	2,08	3,08
Corrfreq=100%	0,12	0,35	0,00	0,00	1,00	2,00	1,09	1,09	2,09	3,08

TABLE 5.10 – Distribution du nombre total annuel d'attentats qui déclenchent les traités CAT XL par événement d'AGRe

5.2.3 Sensibilité sur d'autres paramètres du modèle

Sensibilité sur les facteurs de dilution

Pour pouvoir générer différents scénarios avec des catastrophes ayant différents niveaux de concentration, nous utilisons 3 paramètres de dilution dans le modèle :

- $\theta_{individuel} = 10$ pour générer des scénarios de dilution extrême
- $\theta_{collective} = 0, 1$ pour générer des scénarios de concentration extrême
- θ_{mixte} qui est la moyenne pondérée de $\theta_{individuel}$ et $\theta_{collective}$ pour générer des scénarios entre les deux extrêmes

Nous allons assimiler la valeur de $\theta_{collective}$ et $\theta_{individuel}$ pour 4 sensibilités différentes. Dans chacune des 4 sensibilités, le modèle ne produit que des scénarios d'un même niveau de concentration des catastrophes.

Sensi description	SCR acceptance	SCR net rétro	SCR net rétro&GC
Modèle Central- $\theta_{individuel} = 10; \theta_{groupe} = 0, 1$	56 055 160	43 818 477	39 004 191
$\theta_{individuel} = \theta_{groupe} = 0,01$	63 095 555	50 107 426	48 917 061
$\theta_{individuel} = \theta_{groupe} = 0,1$	61 480 665	49 085 237	47 387 835
$\theta_{individuel} = \theta_{groupe} = 10$	50 142 953	39 113 061	36 001 465
$\theta_{individuel} = \theta_{groupe} = 100$	48 332 912	37 368 435	34 478 274

TABLE 5.11 – SCR correspondant à différents Sensi de θ

La table 5.11 ci-dessus montre que le SCR diminue quand le paramètre de dilution θ devient plus grand ou autrement dit, quand les catastrophes simulées impactent principalement une population qui est répartie à travers le pays.

Sensibilité sur le coefficient d'extrapolation de la perte FGU d'invalidité et de frais médicaux

Pour rappel, le modèle de calcul du SCR CAT Vie non-pandémique devrait prendre en compte le risque d'excès d'invalidités et de frais médicaux. Toutefois, il n'y a pas de données pour modéliser directement ces risques. Par conséquent, le modèle se base sur le risque de mortalité et la formule suivante est appliquée pour extrapoler le montant de la perte FGU incluant les 3 risques :

$$FGU_{TousRisques} = FGU_{Mort} \times \left(1 + 3 \frac{SaR_{MedEx}}{SaR_{Mort}} + 0,375 \frac{SaR_{Inval}}{SaR_{Mort}}\right)$$

Afin de quantifier le changement du SCR s'il y a eu une mauvaise estimation du coefficient d'extrapolation, nous allons faire varier ces facteurs un à la fois. La table 5.12 ci-dessous montre les SCR correspondant à différents coefficients d'extrapolation. Nous remarquons que le changement du SCR n'est pas significatif quand nous augmentons la valeur du coefficient de frais médicaux : le SCR n'augmente que de 2,88 % quand le coefficient est multiplié par plus de 3 fois. Cela peut être expliqué par le fait que la SaR totale de la garantie de frais médicaux est très petite par rapport à la SaR de la garantie décès dans le portefeuille d'assurance des entités d'AXA.

Sensi description	SCR acceptation	SCR net rétro	SCR net rétro&GC
Modèle Central-CMedEx=3 ; CDisab=0,375	56 055 160	43 818 477	39 004 191
CMedEx = 10	57 669 316	44 178 761	39 303 338
CDisab = 0.5	60 719 643	48 816 302	43 661 614

TABLE 5.12 – SCR correspondant à différentes Sensi au coefficient d'extrapolation

Sensibilité sur la graine en R

Le modèle utilise la méthode de Monte-Carlo pour simuler la distribution empirique de perte annuel d'AGRe. En **R**, un générateur de nombres aléatoires est utilisé dont l'état est géré par une "graine" qui est un nombre entier. Nous pouvons simuler différents scénarios en changeant la valeur de cette graine par le biais de la fonction *set.seed()*. La table 5.13 suivante montre les SCR pour différentes graines :

Sensi description	SCR acceptation	SCR net rétro	SCR net rétro & GC
Modèle Central (graine = 1111)	56 055 160	43 818 477	39 004 191
Graine = 2222	54 917 811	42 883 488	38 498 408

TABLE 5.13 – Les sensibilités de la graine en R

Pour qu'un modèle soit robuste, il faut que la variation du SCR en fonction de graine soit petite parce que avec le même mécanisme de simulation et les mêmes hypothèses, la variation due au changement d'état du générateur de nombres aléatoires ne devrait pas être significatif. Étant donné que le modèle simule 1 millions scénarios et qu'il faut attendre 2.5 heures pour avoir

le résultat, un écart de 2,071% du SCR acceptation et de 2,180 % du SCR net rétrocession pourraient être considérés non significatifs.

Pour améliorer la précision ainsi que la qualité de convergence du modèle, nous pouvons augmenter le nombre de scénarios à simuler à 2 millions. Cette option peut être acceptée compte tenu du fait qu’après la phase de développement, l’entreprise n’implémentera le modèle qu’une fois par an.

Impact des événements transfrontaliers

La simulation des événements transfrontaliers rend la modélisation des traités régionaux plus précis. Nous voulons tester le changement du SCR si nous ne simulons pas les événements transfrontaliers.

Sensi description	SCR acceptation	SCR net rétro	SCR net rétro&GC
Modèle Central-avec trans CAT nat/tech	56 055 160	43 818 476	39 004 191
Sans événements trans CAT nat/tech	56 055 161	43 818 478	39 004 184

TABLE 5.14 – SCR avec et sans les événements transfrontaliers

La table 5.14 ci-dessus montre un résultat qui est assez surprenant, il n’y a quasiment aucun impact des événements transfrontaliers sur le SCR d’AGRe.

Dans un premier temps, nous voudrions confirmer que pour les traités locaux, il n’y absolument aucun impact des événements transfrontaliers. C’est parce qu’un traité local couvre un seul pays donc il n’a aucune chance d’être impacté par des événements transfrontaliers. La table 5.15 suivante montre la moyenne et l’écart-type de l’engagement annuel de certains traités locaux d’AGRe. Il est possible d’observer que les moyennes et les écart-types sont bien identiques ce qui confirme notre attente.

Traité	Moyen-Modèle Central	Moyen-Sensi	Std-Modèle Central	Std-Sensi
BE/LIFE CAT XL	68 379,7	68 379,7	3 640 232,0	3 640 232,0
FR/LIFE CAT XL L1	441 612,7	441 612,7	3 911 982,2	3 911 982,2
Germany L1 C1	58 610,1	58 610,1	1 862 385,3	1 862 385,3
Malaysia CAT	49 513,7	49 513,7	745 447,3	745 447,3

TABLE 5.15 – La moyenne et l’écart-type de l’engagement annuel de quelques traités locaux d’AGRe

Ensuite, nous regardons en détail le traité “Asie-Regional CAT Life” qui est un traité régional couvrant 3 pays Indonésie, Thaïlande et Singapour. La table 5.16 ci-dessous affiche la moyenne, l’écart-type et le quantile à 99,5% de la distribution de l’engagement annuel du traité Asie-Regional CAT Life. Nous pouvons observer que l’impact des événements transfrontaliers sur la distribution de l’engagement du traité est négligeable.

	Montant
E - Modèle Central (avec événements transfrontaliers)	787 719
E - Sensi sans événements transfrontaliers	787 715
Std - Modèle Central (avec événements transfrontaliers)	11 747 490
Std - Sensi sans événements transfrontaliers	11 747 477
TVaR _{99,5%} - Modèle Central (avec événements transfrontaliers)	136 365 522
TVaR _{99,5%} - Sensi sans événements transfrontaliers	136 365 271

TABLE 5.16 – Statistiques du traité Asie-Regional CAT Life dans le Modèle Central et la Sensi sans événements transfrontaliers

Effectivement, la formation d'un événement transfrontalier se base sur la concaténation de plusieurs événements locaux. Dans un premier temps, un pays d'origine est choisi. Ensuite, un événement de ce pays est pris comme le premier élément de l'événement transfrontalier. Selon la section qui parle de la modélisation des événements transfrontaliers, il y a une probabilité de 50% que l'événement choisi dans le pays d'origine soit l'événement le plus meurtrier du pays de l'année. Au final, d'autres événements locaux des autres pays sont choisis aléatoirement à condition qu'il soient moins mortels que celui du pays d'origine.

Dans notre modèle, il y a une forte possibilité qu'un événement transfrontalier soit constitué à partir d'un événement extrême dans le pays d'origine et des événements beaucoup moins mortels dans les autres pays. La raison est liée à l'hypothèse que les sévérités des catastrophes sont indépendantes. Il y a une faible possibilité d'observer pendant une année deux événements extrêmes survenant dans 2 pays différents. En utilisant l'algorithme du modèle, la probabilité de créer un événement transfrontalier qui se compose des événements qui sont simultanément très meurtriers est encore plus faible.

Concernant le traité Asie-Regional CAT Life, s'il y a une catastrophe transfrontalière, l'Indonésie sera toujours le pays d'origine car dans l'histoire, la Thaïlande et Singapour n'ont jamais été le pays d'origine. De plus, comme Singapour n'a jamais été impliqué dans une catastrophe transfrontalière et il ne partage pas de frontières avec l'Indonésie, l'événement transfrontalier simulé n'implique jamais Singapour. Autrement dit, les événements transfrontaliers pour le traité Asie-Regional CAT Life ne touchent que l'Indonésie et la Thaïlande à la fois.

	Modèle Central	Sensi sans événement trans
Nb_CAT Nat/Techno.Déclenche.Traité	12095	12094
Nb_Evt_Trans	12	0
Engagement moyen du traité par événement	22 507 996	22 509 751

TABLE 5.17 – Comparaison du Modèle Central et la Sensi sans événements transfrontaliers pour le traité Asie-Regional CAT Life

La table 5.17 ci-dessus montre que dans le Modèle Central, à l'issue de 10^6 scénarios, il y a 12 095 catastrophes naturelles/technologiques qui déclenchent le traité dont 12 événements sont transfrontaliers. Nous pouvons observer que le nombre d'événements qui déclenchent le

traité dans le Modèle Central et dans la Sensi sont quasiment identiques. En même temps, les engagements moyens par événement dans les 2 cas sont presque égaux. Cela pourrait s'expliquer par le fait que les événements transfrontaliers dans le Modèle Central sont composés d'un événement extrême en Indonésie et d'un événement "petit" en Thaïlande. Par conséquent, c'est l'événement extrême local en Indonésie qui cause les décès du portefeuille d'assurance tandis que l'impact de l'événement "petit" en Thaïlande peut être négligé.

À ce stade, nous pouvons voir que l'impact négligeable des événements transfrontaliers sur le SCR d'AGRe est dû dans un premier temps à l'hypothèse d'indépendance des sévérités et dans un deuxième temps à l'algorithme utilisé pour la formation de tels événements.

Pour conclure, au-delà de l'algorithme, l'idée de "combiner les événements locaux pour former un événement transfrontalier" est critiquable. Cela signifie qu'il faut améliorer l'approche de simulation si nous souhaitons créer plus de scénarios où il y a des événements transfrontaliers qui sont vraiment extrêmes dans tous les pays où ils surviennent, ce qui pourrait éventuellement stresser le montant du SCR d'AGRe.

Conclusion

Nous avons réalisé une modélisation de catastrophes pour calculer le SCR correspondant au risque catastrophique non-pandémique qui est un risque majeur auquel sont exposées les activités de réassurance vie d'AXA Global Re. Dans notre modèle, les risques catastrophiques non-pandémiques sont composés de 3 types d'événements : les catastrophes naturelles, les catastrophes technologiques et les attentats terroristes.

Le modèle fait appel à l'approche "fréquence-sévérité" qui consiste en deux parties : la modélisation des fréquences et la modélisation des sévérités.

Pour la modélisation des fréquences, le modèle prend en compte la corrélation des fréquences des catastrophes en utilisant l'approche de copule. Dans cette partie, nous avons décrit la méthodologie retenue pour calibrer les paramètres de la loi de fréquence et la matrice de corrélation de la copule de Student.

Pour la modélisation des sévérités, le modèle évalue l'impact de chaque catastrophe sur les traités CAT XL par événement d'AXA Global Re à la granularité la plus fine possible pour réduire le niveau d'hétérogénéité dans le calcul du SCR. Nous avons également essayé de rendre la simulation de l'impact d'une catastrophe aussi dynamique que possible pour capturer différents scénarios qui peuvent survenir dans la réalité. Notre modèle simule aussi les catastrophes transfrontalières afin de rendre la modélisation des traités régionaux plus exacte.

Toutefois, nous avons bien conscience des éléments de ce mémoire qui pourraient être améliorés.

Premièrement, le choix de la copule dans la modélisation des fréquences se base sur des critères plutôt qualitatifs comme par exemple la simplicité de mise en œuvre de la copule de Student. Il faut que le choix de la copule se base plus sur des critères quantitatives pour avoir une structure de dépendance plus adaptée aux données.

Deuxièmement, la calibration des lois de sévérité se fait strictement sur les données brutes sans retraitement pour prendre en compte l'évolution de la population. Nous pourrions par exemple appliquer un "facteur d'inflation de la population" pour mieux refléter l'exposition de la population aux catastrophes à l'avenir.

Troisièmement, la modélisation des événements transfrontaliers pourrait être améliorée pour reproduire des événements transfrontaliers qui sont plus extrêmes. Par exemple, dans le choix

des événements locaux des pays “voisins”, au lieu de prendre aléatoirement un événement local, nous pourrions prendre l’événement le plus meurtrier de chaque pays “voisin”. Une autre approche est que nous pouvons séparer la modélisation des événements locaux de la modélisation des événements transfrontaliers. Pour la modélisation des événements locaux, nous calibrons les lois de fréquence et de sévérité sur les données historiques en excluant les événements transfrontaliers. L’approche de ce mémoire reste donc pertinente. Ensuite, nous construisons un module à part qui calibre et simule uniquement les événements transfrontaliers. Le principal défi pour mettre en œuvre cette approche est le manque de données historiques des événements transfrontaliers.

Ce mémoire a essayé de modéliser adéquatement et dynamiquement le risque catastrophique compte tenu des sources limitées de données en réassurance vie. Les méthodologies du mémoire peuvent servir comme une base de référence pour les futurs travaux de modélisation de catastrophes en réassurance vie.

Bibliographie

- AXA Group (2020), ‘Document d’enregistrement universel 2020’.
- Berrebi, C. & Ostwald, J. (2011), ‘Earthquakes, hurricanes, and terrorism : do natural disasters incite terror?’, *Public Choice* **149**(3), 383–403.
- Bouyé, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A., Riboulet, G. & Roncalli, T. (2000), ‘Copulas for finance-a reading guide and some applications’, *Available at SSRN 1032533*.
- Choroś, B., Ibragimov, R. & Permiakova, E. (2010), Copula estimation, *in* ‘Copula theory and its applications’, Springer, pp. 77–91.
- Dekking, F. M., Kraaikamp, C., Lopuhaä, H. P. & Meester, L. E. (2005), *A Modern Introduction to Probability and Statistics : Understanding why and how*, Springer Science & Business Media.
- Denuit, M. & Lambert, P. (2005), ‘Constraints on concordance measures in bivariate discrete data’, *Journal of Multivariate Analysis* **93**(1), 40–57.
- Di Bernardino, E. & Rullière, D. (2016), ‘On an asymmetric extension of multivariate archimedean copulas based on quadratic form’, *Dependence Modeling* **4**(1).
- Ekheden, E. & Hössjer, O. (2014), ‘Pricing catastrophe risk in life (re) insurance’, *Scandinavian Actuarial Journal* **2014**(4), 352–367.
- Jayasuriya, S. K. & McCawley, P. (2010), *The Asian tsunami : aid and reconstruction after a disaster*, Edward Elgar Publishing.
- Lenz, R. (2015), ‘Generalized pareto distributions—application to autofocus in automated microscopy’, *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing* **10**(1), 92–98.
- McNeil, A. J., Frey, R. & Embrechts, P. (2015), *Quantitative risk management : concepts, techniques and tools-revised edition*, Princeton university press.
- Shi, P. & Valdez, E. A. (2014), ‘Multivariate negative binomial models for insurance claim counts’, *Insurance : Mathematics and Economics* **55**, 18–29.

- Tasena, S. (2021), ‘On subcopula estimation for discrete models’, *Asian Journal of Economics and Banking* .
- Walck, C. et al. (2007), ‘Hand-book on statistical distributions for experimentalists’, *University of Stockholm* **10**.
- Zhou, M. & Carin, L. (2013), ‘Negative binomial process count and mixture modeling’, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **37**(2), 307–320.

Table des figures

1.1	Cotisations par branche du marché d'assurance française	9
1.2	Cotisations par type de produit dans l'assurance de personnes du marché d'assurance française	10
1.3	Catégories de traité de réassurance	14
1.4	Mécanisme du pool vie d'AXA Global Re	19
1.5	Catographie des risques en Formule Standard	21
1.6	Catographie des risques dans le Modèle Interne d'AXA Global Re	24
2.1	Exemple des données GTI	32
3.1	Nombre de catastrophes avec au moins 10 décès à Singapour par année	53
3.2	Nombre total des catastrophes naturelles et technologiques de tous les pays dans le périmètre de modélisation par année	58
3.3	Nombre d'attentats terroristes causant au moins 10 décès des pays dans le périmètre de modélisation	60
3.4	Nombre d'événements terroristes avec au moins 10 décès dans le monde sur la période 1970-2019	61
3.5	Résultat de calibration des corrélation inter-intra région CAT naturelle/technologique	66
3.6	Résultat de la calibration des coefficients de corrélation type "inter-intra région" en cas des catastrophes naturelles/technologiques	67
4.1	Moyenne et variance du coût annuel total des sinistres d'un portefeuille fictif en fonction de θ	73
4.2	Combinaison des événements locaux pour former un événement transfrontalier .	81
4.3	Égypte et Maroc dans la carte du monde	84
4.4	Colombie et Mexique dans la carte du monde	84

4.5	Les étapes pour former un événement transfrontalier	85
4.6	Allocation des probabilités pour les rangs	86
5.1	La fonction de densité empirique de la loi de Pareto généralisée et de la loi de Weibull tronquée dont les paramètres sont calibrés avec les données de la France	94

Liste des tableaux

1.1	Matrice de corrélation du module de souscription Vie	22
1.2	Matrice de corrélation du SCR du module souscription Santé	23
2.1	Quelques traités CAT par événement d'AXA Global Re	28
2.2	Exemple des portefeuilles cédés au traité ASIE-Regional CAT Life	30
2.3	Exemple de données EMDAT	31
2.4	Exemple de données GTD	31
2.5	Type des catastrophes naturelles	33
2.6	Statistiques descriptives des fréquences des événements CAT naturelles sur la période 1970-2020 par pays	33
2.7	Statistiques descriptives de sévérité d'un événement CAT naturelle sur la période 1970-2020 par pays	34
2.8	Statistiques descriptives des fréquences des événements CAT technologiques par pays sur la période 1970-2020	34
2.9	Statistiques descriptives de la sévérité d'un événement CAT technologique sur la période 1970-2020 par pays	35
2.10	Répartition des catastrophes technologiques par type d'événement	35
2.11	Statistiques descriptives des fréquences des événements terroristes sur la période 1970-2019 par pays	36
2.12	Statistiques descriptives de la sévérité d'un événement terroriste sur la période 1970-2019 par pays	36
2.13	Hypothèses des lois et de dépendance utilisés dans le modèle CAT Vie non-pandémique	40
3.1	Les pays ayant peu de données historiques avec leurs groupes	59
3.2	Test de χ^2 de la loi de Poisson pour la fréquence du Portugal	60

3.3	Test de χ^2 de la loi de Poisson pour la fréquence de la Colombie	60
3.4	Résultat de l'estimation des paramètres de la loi de fréquence des attentats terroristes du monde	62
3.5	Classification des pays en régions dans le périmètre de modélisation	66
4.1	Répartition de type du sinistre proposée par la Formule Standard	75
4.2	Nombre de victimes causées par le tsunami en Asie en 2004 dans les pays du périmètre de modélisation	79
4.3	Statistiques descriptives des événements transfrontaliers sans tenir compte du tsunami de 2004 en Asie	80
4.4	Liste de tous les catastrophes concernant AGRe sur la période 1970-2020	80
4.5	Résultat d'estimation du paramètre p_r pour chaque région	83
4.6	La distribution empirique du nombre de pays impliqués lors d'un événement transfrontalier	85
4.7	Distribution empirique par pays d'origine	86
4.8	La distribution empirique du rang de l'événement local d'un pays d'origine . . .	87
4.9	Le nombre de catastrophes naturelles par type	87
4.10	Les rangs des événements locaux faisant partie des événements transfrontaliers dans le pays où ils se sont produits	89
5.1	Résultat du modèle de calcul SCR CAT Vie non-pandémique	91
5.2	SCR correspondant à différentes Sensi de la loi de sévérité	95
5.3	Quantile à 99,5% de perte correspondant à différents Sensi de la loi de sévérité .	95
5.4	SCR correspondant à différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des catastrophes naturelles/technologiques	96
5.5	TVaR_99,5% d'engagement annuel d'AGRe correspondant à différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des catastrophes naturelles/technologiques	96
5.6	SCR correspondant à différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des actes terroristes	96
5.7	Différentes sensibilités sur les coefficients de corrélation des fréquences des actes terroristes	97
5.8	TVaR_99,5% de l'engagement d'AGRe de différentes sensibilités	97

5.9	Distribution du nombre total annuel d'attentats terroristes de tous les pays dans le périmètre de modélisation	97
5.10	Distribution du nombre total annuel d'attentats qui déclenchent les traités CAT XL par événement d'AGRe	98
5.11	SCR correspondant à différents Sensi de θ	98
5.12	SCR correspondant à différentes Sensi au coefficient d'extrapolation	99
5.13	Les sensibilités de la graine en R	99
5.14	SCR avec et sans les événements transfrontaliers	100
5.15	La moyenne et l'écart-type de l'engagement annuel de quelques traités locaux d'AGRe	100
5.16	Statistiques du traité Asie-Regional CAT Life dans le Modèle Central et la Sensi sans événements transfrontaliers	101
5.17	Comparaison du Modèle Central et la Sensi sans événements transfrontaliers pour le traité Asie-Regional CAT Life	101