Uge 3

Danny Nygård Hansen

13. september 2023

1.8 • ✎

(a) En forening af tælleligt mange tællelig mængder er selv tællelig.

(b) Bemærk at det er tilstrækkeligt at vise at $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{E}_B$. Dette følger da A_n og B er disjunkte.

(c) Bemærk at $\{x\} \notin \mathcal{E}_B$ og benyt (b).

(d) Hvis A_n' ikke er tællelig, skift da denne ud med sit (tællelige) komplement.

(e) Benyt (c).

(f) Benyt at tællelige mængder er Borelmængder (jf. Opgave 1.3(b)). ■

1.10 • ✎

(a) Overvej eksempelvis at

$$A \cup B = A \cup (B \setminus A) = A \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big).$$

(b) Hvad går galt hvis $\mu(A \cap B) = \infty$?

(c) Hvad gik galt i (b)? Hvilken antagelse løser dette problem? ■

1.12 • ✎

For at vise σ-additivitet, bemærk at

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \cap A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A)$$

for enhver følge (B_n) fra $\mathcal{E}$. ■

1.13 • ✏ Bemærk først at hvis ν er et mål og $a \in [0,\infty)$, da er $a\nu$ også et mål (vis dette!). Vi kan derfor antage at $a_n = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$. For at vise σ-additivitet, bemærk at hvis (A_k) er en følge af parvist disjunkte mængder fra $\mathcal{E}$, så er

$$\mu\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k).$$

Benyt da Lemma A.2.14 og regn videre. ■

1.15 • ✏

(a) Bemærk at

$$\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\Big) \leq \mu(B_n)$$

for alle n, og tag infimum på højresiden. Den anden ulighed vises tilsvarende.

(b) Følger af (a), da følgen $(\mu(B_n))$ i så fald også er aftagende. ■

1.16 • ✏ Vi henviser til Sætning 7.2.6. ■

1.19 • ✏

(a) Skriv f.eks. $\mathbb{R}^d$ som en forening af »kasser«.

(b) Benyt at en tællelig forening af endelige mængder selv er tællelig. ■