Uge 10

Danny Nygård Hansen

7. november 2023

7.10 • ✎

(a) Funktionen $x \mapsto x^{-1/s}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$ ligger i $\mathcal{L}^r(\lambda)$ men ikke i $\mathcal{L}^s(\lambda)$, og det omvendte gælder for $x \mapsto x^{-1/r}\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$. (Sammenlign Sætning 7.3.2(ii).)

(b) Funktionen $x \mapsto 1$ ligger i $\mathcal{L}^\infty(\lambda)$ men ikke i $\mathcal{L}^r(\lambda)$, og det omvendte gælder f.eks. funktionen $x \mapsto x^{-1/s}\mathbf{1}_{(1,\infty)}(x)$ fra del (a). (Sammenlign Opgave 7.6(b).)

■

7.16 • ✎ Bemærk at

$$\int_X |f-g| \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{n\to\infty} |f-f_n| \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X |f-f_n| \,\mathrm{d}\mu = 0$$

ved Fatous lemma, så $f = g$ μ-n.o. ■

8.1 • ✎

(a) Bemærk at $\mathrm{Re}(f)$ og $\mathrm{Im}(f)$ er kontinuerte og derfor har stamfunktioner, sig hhv. F_1 og F_2. Da er $F_1 + \mathrm{i}F_2$ en stamfunktion for f.

(b) Da er $f\mathbf{1}_I$ begrænset og dermed integrabel. Lad F være stamfunktionen fra del (a). ■

8.2 • ✎

(a) Bemærk at $x \mapsto \exp(kx)$ er integrabel på $[0,\infty)$ netop når $k < 0$, så $K = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$.

(b) Find en stamfunktion for f_z, og beregn integralet af $f\mathbf{1}_{[0,n]}$ for ethvert $n \in \mathbb{N}$, jf. vinket (bemærk at $f\mathbf{1}_{[0,\infty)}$ er en integrabel majorant). Vi finder

$$\int_0^\infty f_z \,\mathrm{d}\lambda = -\frac{1}{z}.$$

(c) Bemærk at

$$\frac{1}{a+\mathrm{i}b} = \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2},$$

og betragt real- og imaginærdelene af integralet fra del (b) med $z = a + \mathrm{i}b$. ■

7.17 • ✎

(a) Bemærk at

$$\|u\| = \|(u-v)+v\| \le \|u-v\| + \|v\|.$$

(b) Dette følger direkte af del (a). ■

7.9 • ✎

(a) Vis at funktionen $x \mapsto (1+x^2)^{-1/2}$ ligger i $\mathcal{L}^2(\lambda)$ og benyt Hölders ulighed.

(b) Bemærk f.eks. at $1 \le 0+\cos(0)$, og at funktionen $x \mapsto x+\cos(x)$ er voksende på $[0,\infty)$. Vi har da for $x \in (0,1]$ at

$$|h(x)| \le x^{\gamma-1/5}.$$

Det er da let at tjekke at $h \in \mathcal{L}^5(\lambda)$, så det ønskede følger af Hölders ulighed.

(c) Ifølge Sætning 7.3.2(ii) ligger $f|_{(0,1]}$ da også i $\mathcal{L}^{5/4}(\lambda^r_{(0,1]})$. ■