Uge 7

Danny Nygård Hansen

11. oktober 2023

2.1 •
(a) Vis betingelserne for fastholdt B (vi har endda $\mathcal{U}_{\mathcal{J}} = \bigcap_{B\in\mathcal{J}} \mathcal{U}_{\{B\}}$). For $A \in \mathcal{U}_{\mathcal{J}}$ har vi

$$\mu((A_1 \setminus A_2) \cap B) = \mu((A_1 \cap B) \setminus A_2) = \mu(A_1 \cap B) - \mu(A_2 \cap B) = \mu(A_1 \setminus A_2)\mu(B).$$

Den sidste betingelse følger ved kontinuitet af μ.

(b) Betragt $A_1 \cap A_2$. ■

2.2 • Pointen er at der ikke er nok målelige mængder i $\mathcal{E}$ til at skelne mellem μ og μ', hvilket der f.eks. er i Borelalgebraen på $\mathbb{R}$. ■

2.4 • Sæt $\nu(B) = \mu(-B)$. Da stemmer ν og μ overens på mængderne $(-\infty, x]$. Benyt da Hovedsætning 2.2.2. ■

5.18 •
(a) Lad $n \in \mathbb{N}$ afparere $\epsilon = 1$, og bemærk at $|f_n| - |f| \leq |f_n - f| \leq 1$. Vis da at $\int |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int |f_n| \,\mathrm{d}\mu + \mu(X)$.

For den anden påstand, bemærk at $|f| + 1$ er en integrabel majorant for en hale af følgen (f_n), og anvend domineret konvergens. Alternativt bemærk at

$$\left| \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_X f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(X) \sup_{x\in X} |f_n(x) - f(x)|,$$

og at højresiden går mod 0.

(b) Betragt målrummet $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$. Hvis f.eks. $f_n = \sum_{j=1}^n (1/j) \mathbf{1}_{(j-1,j]}$, så er alle f_n integrable men ikke f. Hvis i stedet $f_n = (1/n)\mathbf{1}_{[-n^2,n^2]}$, så er alle f_n og $f = 0$ integrable, men $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda \to \infty$. ■

5.26 •
(a) Benyt vinket samt resultatet fra Opgave 2.4.

(b) Bemærk at

$$\int f(x)\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int f(-x)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(-x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int f(x)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)\,\mu(\mathrm{d}x). \quad \blacksquare$$

6.3 • ✎

(a) Benyt Tonelli og Fubini.

(b) Skriv $f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}$ og $g(y) = \mathrm{e}^{-y}$. ■

6.4 • ✎

(a) For at vise at S er en Borelmængde, gå f.eks. frem som i Opgave 4.7(c) eller Opgave 4.8.

(b) Se Eksempel 6.4.3.

(c) Se Eksempel 6.4.3. ■

6.5 • ✎ Som i Opgave 6.4. ■

6.6 • ✎

(a) Som i Opgave 6.4 og 6.5.

(b) Bemærk at tællemålet på $\mathbb{R}$ ikke er σ-endeligt. ■

6.7 • ✎ Som i ovenstående opgaver. ■