

## Uge 12

Danny Nygård Hansen

22. november 2023

### 9.13 •

(a) Den eneste  $\tau$ -nulmængde er  $\emptyset$ .

(b) Bemærk at

$$\langle f, \mathbf{1}_{\{x\}} \rangle = \int_X f \mathbf{1}_{\{x\}} d\tau = \int_X f(x) \mathbf{1}_{\{x\}} d\tau = f(x) \tau(\{x\}) = f(x).$$

(c) I lyset af del (b) har vi

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \mathbf{1}_{\{x\}} = \sum_{x \in X} \langle f, \mathbf{1}_{\{x\}} \rangle \mathbf{1}_{\{x\}},$$

for enhver funktion  $f \in L^2(\tau)$ . Alternativt, hvis  $f$  er ortogonal på enhver  $\mathbf{1}_{\{x\}}$ , så må den være 0 overalt. Altså opfylder mængden betingelserne (i) hhv. (iv) i Korollar 9.4.9. ■

### 9.15 •

(a) Vis at hver betingelse medfører den næste, og at (v) medfører (i). For at vise implikationen (ii)  $\Rightarrow$  (iii), vælg  $\delta > 0$  så  $\|x\| \leq \delta$  medfører  $\|T(x)\| \leq 1$ , og bemærk at

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| T \left( \delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \delta^{-1} \|x\|.$$

(b) For trekantsuligheden, bemærk at

$$\|T(x) + S(x)\| \leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \leq \|T\| + \|S\|$$

for  $\|x\| \leq 1$ . For homogenitet, bemærk at

$$\|\alpha T(x)\| = |\alpha| \|T(x)\| \leq |\alpha| \|T\|$$

for samme  $x$ . Den omvendte ulighed følger ved at lave substitutionerne  $\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$  og  $T \rightarrow \alpha T$ . Uligheden følger ved at erstatte  $x$  med  $x/\|x\|$ .

(c) Følger direkte af uligheden vist i del (b). ■

**US1 • ☞**

(a) For alle  $A \in \mathcal{E}$  med  $\mu(A) = 0$  er

$$\nu(A) = \int_A h \, d\mu = \int_X h \mathbf{1}_A \, d\mu = 0,$$

da  $h \mathbf{1}_A = 0$   $\mu$ -n.o.

(b) Her er  $\lambda \ll \tau$  (vi har endda  $\mu \ll \tau$  for alle Borelmål  $\mu$ ), men ikke omvendt.

■

**10.1 • ☞** Alle mål på  $\mathbb{N}$  er absolut kontinuerte med hensyn til tællemålet. Bemærk dernæst at hvis  $A \subseteq \mathbb{N}$ , så er

$$\begin{aligned} \text{Bin}(n, p)(A) &= \sum_{k=0}^n f(k) \delta_k(A) = \sum_{k=0}^n f(k) \tau_{\mathbb{N}}(A \cap \{k\}) \\ &= \sum_{k=0}^n f(k) \int_A \mathbf{1}_{\{k\}} \, d\tau_{\mathbb{N}} = \int_A \sum_{k=0}^n f(k) \mathbf{1}_{\{k\}} \, d\tau_{\mathbb{N}} \\ &= \int_A f \, d\tau_{\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

■

**10.3 • ☞**

(a) Dette er oplagt.

(b) Det følger af Sætning 10.1.4 at

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int_A f g \, d\omega.$$

Såfremt tæthederne er entydigt bestemte (næsten overalt), har vi altså (jf. notationen fra Definition 10.1.2)

$$\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{d\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{d\omega},$$

$\omega$ -n.o. (Bemærk desuden at bogstavet » $\omega$ « ikke er et omega, men derimod en variant af pi. I  $\text{\LaTeX}$  kan kommandoen `\varpi` benyttes.)

■