# Uge 6

Danny Nygård Hansen

5. oktober 2023

**5.9** • ✏
(a) Fra Opgave 1.3(b) ved vi at enhver tællelig delmængde er målelig. Benyt da Opgave 1.14(a).

(b) Dette vises let ved kontraponering, da hvis $\mathbb{R} \setminus N$ ikke er tæt i $\mathbb{R}$, da indeholder $N$ et åbent interval. Den omvendte implikation gælder ikke (betragt f.eks. $N = \mathbb{Q}$).

(c) Mængden $\{f \neq g\}$ er en nulmængde, så $\{f = g\}$ er tæt i $\mathbb{R}$. Udvid da til dele $\mathbb{R}$ ved at betragte passende følger i $\{f = g\}$.

(d) Antag at $f$ er en sådan funktion. Der findes da et $\delta > 0$ der afparerer 1 i punktet 0. Men intervallet $(-\delta, \delta)$ må både indeholder punkter $x$ hvor $f(x) = 0$ og $f(x) = 1$ (pga. del (a)), hvilket er en modstrid. ■

**5.10** • ✏ Beregn blot integralerne af $f$ og $g$, og bemærk at $(f+g)^+ = g$ og $(f+g)^- = -f$. ■

**5.11** • ✏
(a) Den eneste $\tau$-nulmængde er $\emptyset$.

(b) Fra Eksempel 5.2.13 ved vi at $\int f \,\mathrm{d}\tau = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ for $f : \mathbb{N} \to [0, \infty]$. Se da på $f^+$ og $f^-$ og beskriv $\mathcal{L}(\tau)$ og $\mathcal{L}^1(\tau)$ i termer af summer.

(c) Benyt del (b). For absolut konvergens, benyt karakterisationen af $\mathcal{L}^1(\tau)$ fra Sætning 5.4.3.

(d) Split både integralet og summen op i udtryk der hver især afhænger af $f^+$ og $f^-$, benyt Eksempel 5.2.13 igen, og saml til sidst summerne (her skal man være en smule varsom, da man ikke blot kan lægge divergerende summer sammen – men her er der intet problem da den ene sum divergerer mod *uendelig*). ■

**5.13** • ✏

(a) Eftersom $f_n(0) = 0$, går følgen mod nulfunktionen. Omvendt er integralet konstant lig med 1. Bemærk at vi ikke kan anvende monoton konvergens, da følgen ikke er monoton. Derudover vil enhver majorant for følgen være punktvist mindre end funktionen $g$ givet ved

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{1}_{\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]},$$

men

$$\int g \,\mathrm{d}\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

og denne række divergerer mod $\infty$. Altså har $(f_n)$ ingen integrabel majorant, og vi kan derfor heller ikke anvende domineret konvergens. (Eftersom domineret konvergens ikke kan anvendes her, så ved vi allerede at $(f_n)$ ikke har en integrabel majorant. Men ovenstående er et mere direkte argument for dette.)

(b) For $x \notin [0,1]$ er $g_n(x)$ konstant lig med 0, og $g_n(1)$ er konstant lig med $g(1)$. For $x \in [0,1)$ vil $x^n \to 0$ for $n \to \infty$,[1] så $g(x^n) \to g(0)$ for $n \to \infty$ ved kontinuitet.

Eftersom $g$ er kontinuert på $[0,1]$, er den begrænset derpå at et tal $R > 0$. Så er $g_n$ også begrænset af $R$, så funktionen $R\mathbf{1}_{[0,1]}$ er en integrabel majorant for $(g_n)$. Ved domineret konvergens får vi at

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \,\mathrm{d}\lambda = \int \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\lambda = \int \left(g(0)\mathbf{1}_{[0,1)} + g(1)\mathbf{1}_{\{1\}}\right) \mathrm{d}\lambda = g(0). \qquad \blacksquare$$

**5.15** • ✏

(a) Dette følger da $g^+ \leq h^+$ og $g^- \leq f^-$.

(b) At $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ følger fra del (a). Ulighederne følger ved at tage integralet på alle sider af uligheden $a \leq g \leq b$.

(c) Bemærk at

$$\int |fh| \,\mathrm{d}\mu \leq \int K|h| \,\mathrm{d}\mu = K \int |h| \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

(d) Lad $\mu = \lambda^r_{(0,1]}$, og lad $f(x) = h(x) = 1/\sqrt{x}$. Da er $f$ (og $h$) integrabel (den har stamfunktion $x \mapsto 2\sqrt{x}$), men $fh$ er ikke integrabel. $\blacksquare$

[1] Vi husker dette fra *Matematisk analyse 1*. Det følger af Benoullis ulighed og af den arkimediske egenskab ved de reelle tal (dvs., der findes vilkårligt store naturlige tal).

**5.16** • ✎ Bemærk først at hvis $y > 0$, så er

$$0 \le \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \sqrt{y}\right)^2 = \frac{1}{y} + y - 2,$$

hvilket medfører at $2 \le \frac{1}{y} + y$. Lader vi $y = nx$, får vi at

$$2 \le \frac{1}{nx} + nx = \frac{1 + n^2x^2}{nx},$$

og ved at gange med $\sqrt{x}$,

$$2\sqrt{x} \le \frac{1 + n^2x^2}{n\sqrt{x}}.$$

Den ønskede ulighed følger ved at tage den reciprokke på begge sider (og vende uligheden).

Ved Opgave 5.14 er funktionen $x \mapsto 1/(2\sqrt{x}) \cdot \mathbf{1}_{(0,1]}$ en integrabel majorant for følgen af integrander, så det ønskede følger af domineret konvergens, idet integranderne går mod nulfunktionen for $n \to \infty$. (Bemærk desuden at faktoren $\frac{1}{2}$ er helt ligegyldig for det sidste argument.) ■

**5.17** • ✎

(a) Da ln har stamfunktion $1/x$ på $(0, \infty)$, følger dette ved at omskrive til et Riemannintegral vha. monoton konvergens, og derefter benytte analysens fundamentalsætning.

(b) Bemærk at $f$ er begrænset af $\ln 2$ på $[-2, 2]$, og er dermed integrabel. For at beregne integralet, benyt den sædvanlige metode som ovenfor. ■