Uge 13

Danny Nygård Hansen

28. november 2023

11.4 • ✎

(a) Bemærk at for $t \geq 0$ er

$$(\lambda_2 \circ \eta^{-1})((-\infty, t]) = \pi t^2 = (f\lambda)((-\infty, t]),$$

idet vi benytter at arealet af en disk med radius t er πt^2.

(b) Bemærk at

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\, \lambda_2(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-r^2}\, (\lambda_2 \circ \eta^{-1})(\mathrm{d}r) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-r^2}\, (f\lambda)(\mathrm{d}r) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(r)\mathrm{e}^{-r^2}\, \lambda(\mathrm{d}r) = \pi.\end{aligned}$$

(c) Følger nærmest direkte af Tonellis sætning.

(d) Benyt transformationssætningen (og evt. translationsinvarians).

(e) Benyt transformationssætningen sammen med del (c), og udnyt at funktionen $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ er lige. ∎

11.5 • ✎

(a) Husk at funktionen $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2/2}$ er et element i $\mathcal{L}^1(\lambda)$.

(b) Funktionen $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ er også et element i $\mathcal{L}^1(\lambda)$.

(c) Omskriv til Riemannintegraler og benyt partiel integration. (Første del af opgaven bruger ikke de foregående delopgaver.)

(d) At differentialligningen $y'(t) + ty(t) = 0$ har en entydig løsning y der opfylder $y(0) = \sqrt{2\pi}$ bevises i kurset *Differentialligninger*, men vi kan give et elementært bevis for denne påstand: Lad y være en løsning til differentialligningen, og sæt $z(t) = \mathrm{e}^{t^2/2}y(t)$. Det er da let at vise at $z'(t) = 0$ (idet vi udnytter at y er en løsning til differentialligningen), så $z \equiv C$ for et $C \in \mathbb{R}$, og det følger at $y(t) = C\mathrm{e}^{-t^2/2}$. Vi ser desuden at $y(0) = C$, så vi må have $C = \sqrt{2\pi}$.

Vi bemærker at resultatet af denne opgave benyttes i Eksempel 12.1.5 til at beregne den Fouriertransformerede af tætheden for normalfordelingen. ∎

12.2 • ✎ Ved Sætning 12.2.3(ii) er $f * g$ et element i $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\lambda)$. Benyt Fubinis sætning (idet Tonellis sætning, som sædvanligt, viser at dette er tilladt). ■

12.3 • ✎ Dette er en direkte konsekvens af Inversionssætningen og Opgave 5.9(c). ■

12.4 • ✎

(a) Benyt f.eks. Opgave 8.2(c) og bemærk at imaginærdelen er en ulige funktion.

(b) Sammenlign f.eks. med funktionen

$$t \mapsto \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{t^2}$$

for $|t| \geq 1$. Denne er punktvist større end $\widehat{H}_\sigma$ og er som bekendt integrabel.

(c) Benyt Inversionssætningen og at imaginærdelen er en ulige funktion. ■