Uge 4

Danny Nygård Hansen

14. september 2023

1.18 • ✎

(a) Da λ er voksende, er f ligeledes voksende. For kontinuitet, benyt kontinuitet af λ.

(b) Benyt kontinuitet af f og/eller λ.

(c) Husk mellemværdisætningen. ■

1.21 • ✎ Hvis μ er et mål, opfylder det klart de tre betingelser (og den fjerde hvis μ er endeligt), idet vi husker på kontinuitet af μ. Omvendt benyt (ii) (udvidet med induktion) og (iii) til at vise σ-additivitet. Hvis μ er endeligt, bemærk at (ii) og (iv) medfører (iii). ■

1.22 • ✎

(a) Benyt igen kontinuitet af μ.

(b) Igen kontinuitet.

(c) Kontinuitet igen.

(d) Følger af (c). ■

4.1 • ✎

(a) Tænk på maksimum og minimum.

(b) Tænk på supremum og infimum. ■

4.3 • ✎

(a) Løsningsforslag udeladt.

(b) Løsningsforslag udeladt.

(c) Hvis $b \in \mathbb{R}$ ligger i billedet af f, hvad er så $f^{-1}(\{b\})$? ■

4.4 • ✎ Husk at inklusionerne ι_A og ι_{A^c} er målelige, og bemærk at

$$h(x) = \begin{cases} (f \circ \iota_A)(x), & x \in A, \\ (g \circ \iota_{A^c})(x), & x \in A^c. \end{cases}$$

Benyt da »Tuborgresultatet«. ■

4.6 • ✎

(a) Bemærk at

$$|p_j(x) - p_j(y)|^2 = |x_j - y_j|^2 \leq \sum_{j=1}^{d} |x_j - y_j|^2.$$

(b) For φ_1 og φ_2, benyt trekantsuligheden. For φ_3 og φ_4, vis først at funktionen $x \mapsto |x|$ er kontinuert (husk den omvendte trekantsulighed), og benyt eksempelvis at

$$x \wedge y = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$ ■

4.7 • ✎

(a) Benyt »Tuborgresultatet« og kontinuitet.

(b) Bemærk at $f/g = f \cdot (f_3 \circ g)$.

(c) Skriv U_f som

$$U_f = p_2^{-1}\big([0,\infty)\big) \cap (f \circ p_1 - p_2)^{-1}\big([0,\infty)\big).$$ ■