Uge 8

Danny Nygård Hansen

25. oktober 2023

5.22 • ✎ Husk at det er tilstrækkeligt at vise at $F(t_n) \to F(t_0)$ for enhver følge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i I der konvergerer mod t_0. Benyt da domineret konvergens. ■

5.23 • ✎

(a) Vi benytter her at f.eks.

$$\int_a^b f(x+c)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,\lambda(\mathrm{d}x),$$

hvilket er velkendt for Riemannintegralet og kan vises for Lebesgueintegralet ved den sædvanlige korrespondence derimellem. Dette følger også fra resultater i §11.2. Vis da at

$$\frac{1}{n}\int_a^b \Delta_n f(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) = \int_b^{b+1/n} f(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) - \int_a^{a+1/n} f(x)\,\lambda(\mathrm{d}x),$$

og derefter at f.eks.

$$\left| n\int_b^{b+1/n} f(x)\,\lambda(\mathrm{d}x) - f(b) \right| \leq \epsilon$$

for n stor nok (benyt her kontinuiteten af f i b).

(b) Bemærk at $\Delta_n f \to f'$ punktvist, så f' er målelig. Lad $|f'|$ være begrænset af $R > 0$ på $[a, b+1]$. Ved middelværdisætningen findes for $x \in [a,b]$ et $s \in (x, x+1/n) \subseteq [a, b+1]$ så $\Delta_n f(x) = f'(s)$, så $|\Delta_n f|$ er begrænset af R på $[a,b]$ for alle n. Altså er $R\mathbf{1}_{[a,b]}$ en integrabel majorant. Det ønskede følger da af domineret konvergens. ■

5.24 • ✎

(a) Indsæt definitionen på F.

(b) Benyt middelværdisætningen på funktionen $t \mapsto f(x,t)$.

(c) Benyt at funktionen g er integrabel, og anvend derefter domineret konvergens (bemærk at $\xi_{n,x} \to t$ for $n \to \infty$).

(d) Dette følger af (c) da følgen (t_n) var arbitrært valgt.

(e) Bemærk at F er veldefineret da cos er begrænset, så integranden er faktisk integrabel. Der findes ikke umiddelbart en funktion g som dominerer den afledte af integranden for alle t, men betragt da F restringeret til et interval $(-R, R)$ og vis at den er differentiabel herpå. Da R er vilkårlig, er F differentiabel overalt. ■

5.25 • ✎
(a) Bemærk at at cos er begrænset og at μ er endeligt, så kontinuitet følger af domineret konvergens.

(b) Overvej først at også $\int_{\mathbb{R}} x\,\mu(\mathrm{d}x) < \infty$ da $|x| \leq x^2 + 1$, og μ er endeligt. Benyt da Opgave 5.24. (Bemærk at eftersom t kun optræder som argument til enten sin eller cos, behøver vi ikke benytte samme trick som i Opgave 5.24(e).) ■

6.9 • ✎
(a) Bemærk at τ_1 er σ-endeligt, så $\tau_1 \otimes \tau_2$ giver mening. Tjek da at $\tau_2(A \times B) = \tau_1(A)\tau_1(B)$ og benyt entydighedsdelen af Hovedsætning 6.3.3.

(b) Husk Eksempel 5.2.13. Hvis alle $a_{m,n}$ er ikke-negative, da giver Tonelli at summationsrækkefølgen kan ombyttes. Fubini giver det samme såfremt rækken er absolut konvergent. ■

6.10 • ✎ Løsningsforslag udeladt. ■

7.2 • ✎
(a) Opskriv hvad det vil sige at f er konveks, benyt at φ er voksende, og til sidst at φ er konveks. (Resultatet gælder ikke generelt hvis φ ikke er voksende. Lad f.eks. $f(x) = x^2$ og $\varphi(t) = -t$.)

(b) Benyt at $a = \ell a + (1 - \ell)a$ samt trekantsuligheden.

(c) Beregn φ'' og se at denne er positiv, og benyt derefter Korollar 7.1.3.

(d) Dette følger direkte af ovenstående. ■