Uge 1

Danny Nygård Hansen

30. august 2023

US1 • ✏

(a) To mængder er (pr. definition) ens hvis de har samme elementer. For f.eks. at vise (A.9), altså at $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, skal man vise at ethvert element i mængden til venstre for lighedstegnet også ligger i mængden til højre for lighedstegnet, og omvendt. Det kan nogle gange være nyttigt at vise inklusionerne »$\subseteq$« og »$\supseteq$« hver for sig. Det er også ofte nyttigt at tegne en figur der repræsenterer mængderne som geometriske figurer (f.eks. cirkler) og lade dette styre ens intuition.

For at vise et udsagn som (A.17), altså at $A \subseteq B$ medfører $B = A \cup (B \setminus A)$, skal man gøre det samme men undervejs benytte antagelsen $A \subseteq B$.

Bemærk at (A.9) og (A.10) er specialtilfælde af (A.20).

(b) Her er $\mathcal{A}_3$ stabilt over for $\cup$ og $\cap$, men ikke komplementærmængdedannelse. Derudover er f.eks. $(-\infty, 1) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-\infty, 1 - \frac{1}{n}]$, så $\mathcal{A}_3$ er ikke stabilt over for forening af tælleligt mange mængder.

Yderligere er $\mathcal{A}_4$ ikke stabilt over for komplementærmængdedannelse.

(c) Disse udsagn vises med samme teknikker som i (a), idet man selvfølgelig benytter definitionen på urbillede. Hvis f.eks. $x \in f^{-1}(H^c)$, da er $f(x) \in H^c$. Altså er $f(x) \notin H$, så $x \notin f^{-1}(H)$, og dermed er $x \in f^{-1}(H)^c$.

(d) Der er selvfølgelig ikke en præcis definition på »meningsfuldt«, og strengt taget giver alle udsagnene mening. Men udsagnene

$$X \subseteq \mathcal{G}, \quad \mathcal{G} \subseteq X \quad \text{og} \quad \{1,3\} \cap \mathcal{G} = \emptyset$$

er nok ikke udsagn som vi rent faktisk er interesserede i. ■

1.1 • ✏

(a) Den eneste svære egenskab at vise er nok trekantsuligheden. Her skal man benytte trekantsuligheden for absolutværdien på $\mathbb{R}$, samt bemærke at

$$\max_{i=1,\dots,d} \bigl(|x_i - y_i| + |y_i - z_i|\bigr) \leq \max_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i| + \max_{i=1,\dots,d} |y_i - z_i|.$$

(b) Her er $b_2(\underline{0}, 2)$ en cirkelskive (uden rand) med radius 2, og $b_\infty(\underline{0}, 2)$ er et kvadrat (uden rand) med sidelængde 4.

(c) Bemærk at hvis $a_1, \ldots, a_d \geq 0$, så er

$$\max\{a_1, \ldots, a_d\} = \left(\max\{a_1^2, \ldots, a_d^2\}\right)^{1/2} \leq \left(a_1^2 + \cdots + a_d^2\right)^{1/2},$$

og omvendt er

$$\left(a_1^2 + \cdots + a_d^2\right)^{1/2} \leq \left(d \max\{a_1^2, \ldots, a_d^2\}\right)^{1/2} = \sqrt{d} \max\{a_1, \ldots, a_d\}.$$

(d) Benyt (c).

(e) Benyt (d). ■

1.2 • ✎

(a) Her hjælper det at tegne en figur. For $\mathbb{Q}$, lad $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$. Vælg et $n \in \mathbb{N}$ så $\frac{1}{n} < b - a$, og lad $m \in \mathbb{Z}$ være det mindste heltal med $m > an$. Så er $a < \frac{m}{n} < b$, hvor den sidste ulighed følger da $m - 1 \leq an$, så

$$\frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + b - a = b.$$

For $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ kan man f.eks. gøre det samme, men erstatte n med $\sqrt{2}n$. Man kan også, for $a < b$, finde et $q \in \mathbb{Q}$ så

$$\frac{a}{\sqrt{2}} < q < \frac{b}{\sqrt{2}},$$

hvilket medfører at

$$a < \sqrt{2}q < b,$$

som ønsket.

(b) Det er tilstrækkeligt at vise udsagnene for ρ_∞, da enhver ρ_2-kugle indeholder en ρ_∞-kugle. For $\mathbb{Q}^d$, hvis $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Q}^d$, vælg da $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}$ med $q_j \in (x_j - r, x_j + r)$. Hvis $\underline{q} = (q_1, \ldots, q_d)$, så er $\underline{q} \in b_\infty(\underline{x}, r)$.

Tilfældet $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^d$ vises tilsvarende, og det sidste tilfælde følger eftersom $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^d \subseteq \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$. ■

1.17 • ✎ Vi nøjes med at vise del (a), idet de andre to delopgaver vises tilsvarende.

Antag først at $\lim_{t \to a} F(t) = c$, og lad (t_n) være en følge i $I \setminus \{a\}$ som opfylder at $\lim_{n \to \infty} t_n = a$. Lad $\epsilon > 0$, og vælg $\delta > 0$ så $|F(t) - c| < \epsilon$ for $t \in I \setminus \{a\}$ med

$|t-a| < \delta$. Vælg nu $N \in \mathbb{N}$ så $n \geq N$ medfører at $|t_n - a| < \delta$. For $n \geq N$ følger det da at $|F(t_n) - c| < \epsilon$, hvilket viser at $\lim_{n\to\infty} F(t_n) = c$ som ønsket.

Den omvendte implikation vises ved kontraponering. Antag derfor at $F(t)$ *ikke* konvergerer mod c for $t \to a$. Der findes da et $\epsilon > 0$ så der for ethvert $\delta > 0$ findes et $t \in I \setminus \{a\}$ således at $|t-a| < \delta$ og $|F(t) - c| \geq \epsilon$. Lad sådan et ϵ være givet. For ethvert $n \in \mathbb{N}$ findes da et $t_n \in I \setminus \{a\}$ så $|t_n - a| < \frac{1}{n}$ og $|F(t_n) - c| \geq \epsilon$. Det følger da at $t_n \to a$ men $F(t_n) \not\to c$. ■