Uge 12

Danny Nygård Hansen

23. november 2023

9.13 •

(a) Den eneste τ-nulmængde er $\emptyset$.

(b) Bemærk at

$$\langle f, \mathbf{1}_{\{x\}} \rangle = \int_X f \mathbf{1}_{\{x\}} \,\mathrm{d}\tau = \int_X f(x) \mathbf{1}_{\{x\}} \,\mathrm{d}\tau = f(x)\tau(\{x\}) = f(x).$$

(c) I lyset af del (b) har vi

$$f = \sum_{x \in X} f(x) \mathbf{1}_{\{x\}} = \sum_{x \in X} \langle f, \mathbf{1}_{\{x\}} \rangle \mathbf{1}_{\{x\}},$$

for enhver funktion $f \in L^2(\tau)$. Alternativt, hvis f er ortogonal på enhver $\mathbf{1}_{\{x\}}$, så må den være 0 overalt. Altså opfylder mængden betingelserne (i) hhv. (iv) i Korollar 9.4.9. ∎

9.15 •

(a) Vis at hver betingelse medfører den næste, og at (v) medfører (i). For at vise implikationen (ii) $\Rightarrow$ (iii), vælg $\delta > 0$ så $\|x\| \leq \delta$ medfører $\|T(x)\| \leq 1$, og bemærk at

$$\|T(x)\| = \frac{\|x\|}{\delta} \left\| T\left(\delta \frac{x}{\|x\|} \right) \right\| \leq \delta^{-1} \|x\|.$$

For et mere geometrisk argument, lad først

$$\overline{b}(x, r) = \left\{ y \in V \;\middle|\; \|x - y\| \leq r \right\}$$

betegne den *lukkede* kugle med centrum i $x \in V$ og radius $r > 0$. Bemærk så at kontinuitet af T i 0 betyder at

$$T\left(\overline{b}(0, \delta)\right) \subseteq \overline{b}(0, 1).$$

Dette medfører at

$$T\left(\overline{b}(0, 1)\right) = T\left(\tfrac{1}{\delta} \overline{b}(0, \delta)\right) = \tfrac{1}{\delta} T\left(\overline{b}(0, \delta)\right) \subseteq \tfrac{1}{\delta} \overline{b}(0, 1) = \overline{b}(0, \tfrac{1}{\delta}),$$

hvilket netop siger at $\|T(x)\| \leq \frac{1}{\delta}$ når $\|x\| \leq 1$.

(b) For trekantsuligheden, bemærk at

$$\|T(x)+S(x)\| \leq \|T(x)\|+\|S(x)\| \leq \|T\|+\|S\|$$

for $\|x\| \leq 1$. For homogenitet, bemærk at

$$\|\alpha T(x)\| = |\alpha|\,\|T(x)\| \leq |\alpha|\,\|T\|$$

for samme x. Den omvendte ulighed følger ved at lave substitutionerne $\alpha \to \alpha^{-1}$ og $T \to \alpha T$. Uligheden følger ved at erstatte x med $x/\|x\|$.

(c) Følger direkte af uligheden vist i del (b). ■

US1 • ✎

(a) For alle $A \in \mathcal{E}$ med $\mu(A) = 0$ er

$$\nu(A) = \int_A h \,\mathrm{d}\mu = \int_X h\mathbf{1}_A \,\mathrm{d}\mu = 0,$$

da $h\mathbf{1}_A = 0$ μ-n.o.

(b) Her er $\lambda \ll \tau$ (vi har endda $\mu \ll \tau$ for alle Borelmål μ), men ikke omvendt.
■

10.1 • ✎ Alle mål på $\mathbb{N}$ er absolut kontinuerte med hensyn til tællemålet. Bemærk dernæst at hvis $A \subseteq \mathbb{N}$, så er

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bin}(n,p)(A) &= \sum_{k=0}^{n} f(k)\delta_k(A) = \sum_{k=0}^{n} f(k)\tau_{\mathbb{N}}(A \cap \{k\}) \\
&= \sum_{k=0}^{n} f(k) \int_A \mathbf{1}_{\{k\}} \,\mathrm{d}\tau_{\mathbb{N}} = \int_A \sum_{k=0}^{n} f(k)\mathbf{1}_{\{k\}} \,\mathrm{d}\tau_{\mathbb{N}} \\
&= \int_A f \,\mathrm{d}\tau_{\mathbb{N}}.
\end{aligned}$$

■

10.3 • ✎

(a) Dette er oplagt.

(b) Det følger af Sætning 10.1.4 at

$$\nu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A fg \,\mathrm{d}\varpi.$$

Såfremt tæthederne er entydigt bestemte (næsten overalt), har vi altså (jf. notationen fra Definition 10.1.2)

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\varpi} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\varpi},$$

ϖ-n.o. (Bemærk desuden at bogstavet »ϖ« ikke er et omega, men derimod en variant af pi. I LaTeX kan kommandoen `\varpi` benyttes.) ■