Universidad Rey Juan Carlos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Informe

Actividad grupal de Métodos Estadísticos para la Gestión e Investigación

Daniela Ioana Iacobita, David Lavado Peña y Rodrigo López Torres

8 de abril, 2025

Índice

1. Descripción del problema

Se nos plantea un problema de optimización lineal continua donde debemos decidir la compra, producción y envío de ciertos productos de una petroquímica. Dicha petroquímica puede comprar petróleo, en barriles de 159 litros, de cuatro suministradores, por un precio de 47, 49, 53 y 51 euros el barril respectivamente, y enviarlos a sus tres refinerías, por ciertos costes de envío.

Tabla de costes de envío (euros)

Suministrador	Refinería 1	Refinería 2	Refinería 3
A	0,4	0,3	0,3
B	0,4	0,4	0,4
C	0,2	0,5	0,4
D	0,4	0,3	0,2

Cada barril de petróleo va a producir un cierta cantidad de gasolina, gas-oil y queroseno, según el suministrador del que proceda. Además, para trabajar el petróleo de los barriles, cada refinería va a tener un coste de producción asociado a las distintas sustancias.

Tabla de sustancias obtenidas por barril de petróleo (litros)

Suministrador	Gasolina	Gas-oil	Queroseno
A	72	35	10
B	80	37	12
C	69	50	8
D	80	20	15

Tabla de costes de producción de los productos por litro (euros)

Producto	Refinería 1	Refinería 2	Refinería 3
Gasolina	0,021	0,011	0,013
Gas-oil	0,015	0,062	0,082
Queroseno	0,010	0,033	0,041

Se sabe que hay cuatro regiones a las que debe envíar su producción: España, Portugal, Francia y el Norte de África. No se nos dice que haya ningún coste de envío desde las refinerías hasta las regiones. Para cada zona se nos da una demanda, es decir, no se va a comprar más producto del que dicta dicha demanda.

Tabla de la demanda de cada producto en cada región (millones de litros)

Producto	España	Portugal	Francia	N. de África
Gasolina	20	10	10	25
Gas-oil	15	6	8	10
Queroseno	10	3	4	12

Además, para cada región y producto se va a tener un beneficio por venta.

Tabla de beneficios por producto y región (euros)

Producto	España	Portugal	Francia	N. de África
Gasolina	0,5	0,45	0,6	0,55
Gas-oil	0,45	0,55	0,45	0,35
Queroseno	0,15	0,10	0,15	0,12

Con todos estos datos debemos hallar la solución óptima del problema, en caso de que la haya.

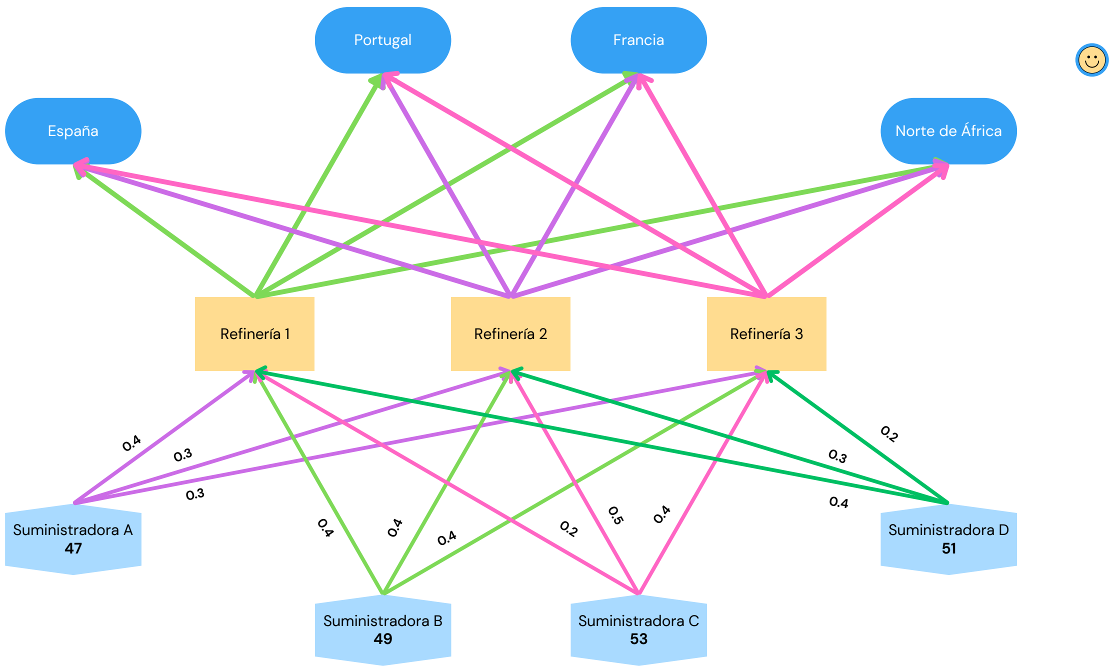

Figura 1: Grafo ilustrativo del problema

2. Estrategia de resolución del problema

Tratándose de un problema de optimización lineal, proponemos la siguiente interpretación de los datos del problema. Vamos a definir las variables y sus conjuntos de índices:

Conjunto de suministradores I $= \{A, B, C, D\}$.

Conjunto de refinerías J $= \{1, 2, 3\}$.

Abreviaciones y conjunto de regiones: España (E), Portugal (P), Francia (F), Norte de África (N), K = $\{E, P, F, N\}$.

Conjunto de productos: P = G, O, Q, siendo gasolina (G), gas-oil (O) y queroseno (Q). x_{ij} = "Número de barriles comprados del suministrador i y llevados a la refinería j"(12 variables).

g_{jk} = "Cantidad de gasolina producida en la refinería j y enviados a la región k"(12 variables).

o_{jk} = "Cantidad de gas-oil producido en la refinería j y enviados a la región k"(12 variables).

q_{jk} = "Cantidad de queroseno producido en la refinería j y enviados a la región k"(12 variables).

Los parámetros del problema son:

1. Los precios de los barriles.

2. Los litros de petróleo de cada barril.

3. Los valores mínimos y máximos de compra de barriles.

4. Los litros que se pueden producir de gasolina, gas-oil y queroseno de cada barril: α_{ip}, para $i \in$ I y $p \in$ P.

5. Los gastos de envío de materiales de cada suministrador a las refinerías.

6. La demanda de las regiones para cada producto: β_{kp}, para $k \in$ K y $p \in$ P.

7. Los gastos de producción.

8. Los ingresos netos por litro de sustancias.

Todos estos datos aparecen en las tablas de la sección de "Descripción del problemaz usaremos dichos valores.

Con todas las variables anteriores vamos a representar el sistema de ecuaciones y la función objetivo:

$$
\begin{gathered}
\text{máx. } z = 0{,}5 \cdot (\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} g_{jE}) + 0{,}45 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} g_{jP}) + 0{,}6 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} g_{jF}) + 0{,}55 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} g_{jN}) + \\
0{,}45 \cdot (\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} o_{jE}) + 0{,}55 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} o_{jP}) + 0{,}45 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} o_{jF}) + 0{,}35 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} o_{jN}) + \\
0{,}15 \cdot (\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} q_{jE}) + 0{,}10 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} q_{jP}) + 0{,}15 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} q_{jF}) + 0{,}12 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} q_{jN}) \\
-\Big[47 \cdot (\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} x_{Aj}) + 49 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} x_{Bj}) + 53 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} x_{Cj}) + 51 \cdot (\sum_{j\in \mathrm{J}} x_{Dj}) \\
+0{,}4 \cdot x_{A1} + 0{,}3 \cdot x_{A2} + 0{,}3 \cdot x_{A3} \\
+0{,}4 \cdot x_{B1} + 0{,}4 \cdot x_{B2} + 0{,}4 \cdot x_{B3} \\
+0{,}2 \cdot x_{C1} + 0{,}5 \cdot x_{C2} + 0{,}4 \cdot x_{C3} \\
+0{,}4 \cdot x_{D1} + 0{,}3 \cdot x_{D2} + 0{,}2 \cdot x_{D3} \\
+0{,}021 \cdot (72 \cdot x_{A1} + 80 \cdot x_{B1} + 69 \cdot x_{C1} + 80 \cdot x_{D1}) \\
+0{,}011 \cdot (72 \cdot x_{A2} + 80 \cdot x_{B2} + 69 \cdot x_{C2} + 80 \cdot x_{D2}) \\
+0{,}013 \cdot (72 \cdot x_{A3} + 80 \cdot x_{B3} + 69 \cdot x_{C3} + 80 \cdot x_{D3}) \\
+0{,}015 \cdot (35 \cdot x_{A1} + 37 \cdot x_{B1} + 50 \cdot x_{C1} + 20 \cdot x_{D1}) \\
+0{,}062 \cdot (35 \cdot x_{A2} + 37 \cdot x_{B2} + 50 \cdot x_{C2} + 20 \cdot x_{D2}) \\
+0{,}082 \cdot (35 \cdot x_{A3} + 37 \cdot x_{B3} + 50 \cdot x_{C3} + 20 \cdot x_{D3}) \\
+0{,}010 \cdot (10 \cdot x_{A1} + 12 \cdot x_{B1} + 8 \cdot x_{C1} + 15 \cdot x_{D1}) \\
+0{,}033 \cdot (10 \cdot x_{A2} + 12 \cdot x_{B2} + 8 \cdot x_{C2} + 15 \cdot x_{D2}) \\
+0{,}041 \cdot (10 \cdot x_{A3} + 12 \cdot x_{B3} + 8 \cdot x_{C3} + 15 \cdot x_{D3})\Big]
\end{gathered}
$$

Restricciones por mínimos y máximos en la compra de barriles (8 restricciones):

$$
\begin{gathered}
\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} x_{ij} \geq 100000, \text{ para cada } i \in \mathrm{I} \\
\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} x_{ij} \leq 500000, \text{ para cada } i \in \mathrm{I}
\end{gathered}
$$

Restricciones por demandas (12 restricciones):

$$
\begin{gathered}
\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} g_{jk} \leq \beta_{kG} \text{ para cada } k \in \mathrm{K} \\
\textstyle\sum_{j\in \mathrm{J}} o_{jk} \leq \beta_{kO} \text{ para cada } k \in \mathrm{K}
\end{gathered}
$$

$$\sum_{j\in \mathrm{J}} q_{jk} \leq \beta_{kQ} \text{ para cada } k \in \mathrm{K}$$

Restricciones de producción-recursos (9 restricciones):

$$\sum_{k\in \mathrm{K}} g_{jk} \leq \sum_{i\in \mathrm{I}} x_{ij} \cdot \alpha_{iG}, \text{ para cada } j \in \mathrm{J}$$
$$\sum_{k\in \mathrm{K}} o_{jk} \leq \sum_{i\in \mathrm{I}} x_{ij} \cdot \alpha_{iO}, \text{ para cada } j \in \mathrm{J}$$
$$\sum_{k\in \mathrm{K}} q_{jk} \leq \sum_{i\in \mathrm{I}} x_{ij} \cdot \alpha_{iQ}, \text{ para cada } j \in \mathrm{J}$$

Utilizaremos las mismas variables, restricciones y función objetivo en el programa de GAMS para valorar la factibilidad del problema y, en caso de ser factible, el tipo de solución y la solución óptima.

3. Solución propuesta

Al introducir el modelo en el programa obtenemos la siguiente solución óptima:

Variable	Valor	Variables	Valor	Variable	Valor	Variable	Valor
x_{A1}	100000	g_{1E}	20000000	o_{1E}	15000000	q_{1E}	5300000
x_{A2}	0	g_{2E}	0	o_{2E}	0	q_{2E}	0
x_{A3}	0	g_{3E}	0	o_{3E}	0	q_{3E}	0
x_{B1}	500000	g_{1P}	7100000	o_{1P}	6000000	q_{1P}	0
x_{B2}	0	g_{2P}	0	o_{2P}	0	q_{2P}	0
x_{B3}	0	g_{3P}	0	o_{3P}	0	q_{3P}	0
x_{C1}	100000	g_{1F}	10000000	o_{1F}	8000000	q_{1F}	4000000
x_{C2}	0	g_{2F}	0	o_{2F}	0	q_{2F}	0
x_{C3}	0	g_{3F}	0	o_{3F}	0	q_{3F}	0
x_{D1}	100000	g_{1N}	25000000	o_{1N}	0	q_{1N}	0
x_{D2}	0	g_{2N}	0	o_{2N}	0	q_{2N}	0
x_{D3}	0	g_{3N}	0	o_{3N}	0	q_{3N}	0

Por como hemos definido las variables obtenemos las siguientes conclusiones. Debemos comprar 100000 barriles de petróleo al suministrador A, 500000 barriles al suministrador B, 100000 barriles al suministrador D y todos ellos llevarlos a la refinería 1. Dado que únicamente llegarán recursos a la refinería 1, la más rentable, también se producirán allí los derivados del petróleo. La gasolina será repartida de la siguiente manera: 20000000 litros a España, 7100000 litros a Portugal, 10000000 litros a Francia y 25000000 litros al Norte de África.

En cuanto al gas-oil, su distribución será la siguiente: 15000000 litros a España, 6000000 litros a Portugal y 8000000 litros a Francia.

En cuanto al queroseno, hemos observado lo siguiente: el precio del queroseno es el mismo para España y para Francia y, a diferencia del gas-oil que cumple lo anterior también, la demanda no se cumple en España. Dado que no hay otro parámetro asociado al envío de queroseno a dichas regiones, la cantidad de queroseno puede variar. El margen es el siguiente:

$$q_{1E} + q_{1F} = 9300000$$
$$q_{1E} \leq 10000000$$
$$q_{1F} \leq 4000000$$

La solución que proporciona el programa es una de las soluciones posibles, pero cualquier valor que cumpla las restricciones anteriores asegura, junto con los demás valores sin modificar de las demás variables, una solución óptima.

Con esta distribución de recursos se obtiene un beneficio de 6257900 euros.

Observando los resultados obtenidos podemos apreciar que la refinería que se usa es la número uno, puesto que es la que dará una rentabilidad general mejor.

Desde un inicio, antes de formular el modelo, nos dimos cuenta de que no se podrían cumplir todas las demandas, como es el caso del queroseno. La demanda de todos los países es, en total, de 29 millones de litros, pero, por los límites de medio millón de barriles por suministrador y la cantidad de queroseno que se puede obtener de cada uno de los barriles, como máximo se podrían llegar a fabricar 22,5 millones de litros de queroseno, por lo que se ve que la demanda jamás podría llegar a cumplirse. Es decir, no es de extrañar tampoco que el resultado más rentable no cumpla todas las demandas.

Además, los gastos por el tratamiento de los productos en la refinería y el transporte del suministrador a la propia refinería hacen que también haya un coste bastante significativo. Si modificamos el problema para que lo resuelva, en nuestro caso, GAMS estudio, creando una variable de gastos y otra de ganancias, en la solución óptima podemos apreciar que se consigue una ganancia de casi 48 millones de euros, pero que hay un pago de más de 41 millones de euros. Es decir, no es de extrañar que la ganancia sea de 6 millones de euros (aprox.) teniendo en cuenta los altos costes y que si intentasemos suplir con más producto para acercarnos a las demás demandas, la ganancia sería menor.

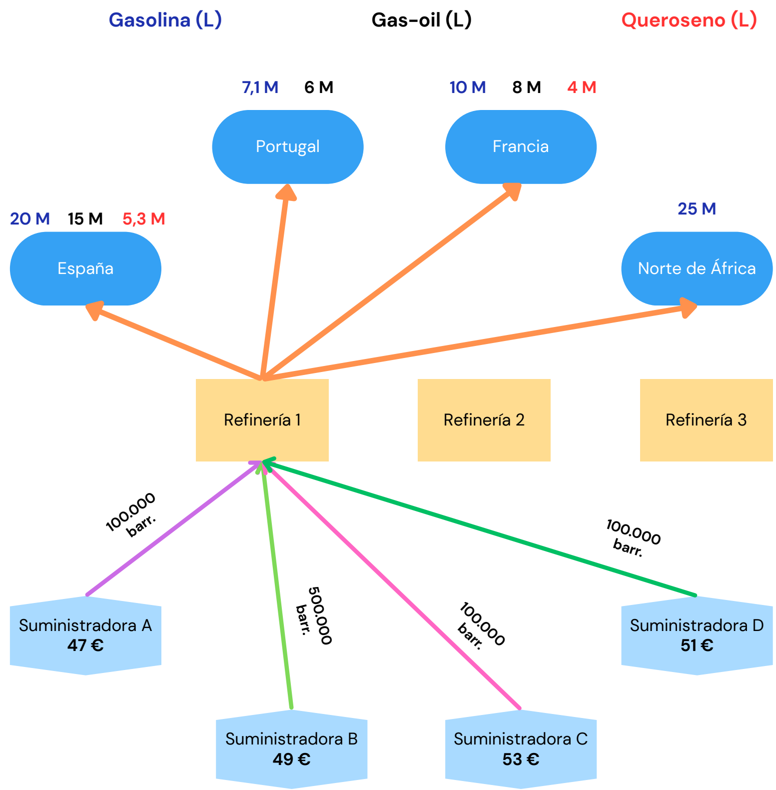

Figura 2: Grafo ilustrativo de la solución óptima de GAMS

4. Participación de los miembros en el trabajo

	Daniela	David	Rodrigo
Desarrollo del modelo	Alta	Media	Alta
Implementación	Baja	Baja	Alta
Depuración y validación	Alta	Alta	Alta
Análisis de la solución	Media	Alta	Alta
Redacción de la memoria	Alta	Baja	Baja