代数幾何学まとめノート

第 1 章

可換環

1.1　可換環

定義 1　アーベル群 A が（単位的）**可換環**であるとは、**積**と呼ばれる写像 $A \times A \to A$, $a, b \mapsto ab, \mathrm{where}, a, b \in A$ を備えており、以下の公理を満たすときをいう:

任意の $a, b, c \in A$ について

1. ab = ba
2. (ab)c = a(bc)
3. (a + b)c = ac + bc
4. 1a = a

ここで、$1 \in a$ を A の単位元という。

以降、単に環といったら単位的可換環のことを意味すると約束する。

定義 2　環 A から B への写像 $\phi : A \to B$ が**環準同型写像**であるとは、次の性質を満たすときをいう：

1. $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$
2. $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$
3. $\phi(1) = 1$

定義 3　環 A の部分集合 $\mathfrak{a}$ が**イデアル**であるとは、$\mathfrak{a}$ が次の性質を満たすときをいう。

1. $\mathfrak{a}$ は加法に関して部分群である。すなわち
   (a) $0 \in \mathfrak{a}$
   (b) $\forall a \in \mathfrak{a}, -a \in \mathfrak{a}$
   (c) $\forall a, \forall b \in \mathfrak{a},\ a+b \in \mathfrak{a}$
2. $\forall a \in \mathfrak{a}, \forall x \in A,\ ax \in A.$

定義 4 環 A のイデアル $\mathfrak{p}$ が**素イデアル**であるとは、$\mathfrak{p}$ が次の性質を満たすときをいう。

$$p, q \in A \text{ について、 } pq \in \mathfrak{p} \text{ ならば } p \in \mathfrak{p} \text{ または } q \in \mathfrak{p}.$$

定義 5 (Wikipedia) 拡大体の**超越次数**とは、体の拡大 L/K の大きさのある種のかなり粗いはかり方である。きちんと言えば、K 上代数的に独立な L の部分集合の最も大きい濃度として定義される。

定義 6 体 k の超越次数 1 の有限生成拡大体 K を **1 次元関数体**と呼ぶ。

ここでは K として k 上の 1 変数有理関数体 $k(X)$ を思い浮かべておけばよいはず。

K を k 上の 1 次元関数体とする。C_K を K/k の DVR すべてのなす集合とする。C_K の元を点とも呼ぶ。

$$C_K \ni P \leftrightarrow R_P \ (P \text{ に対応する DVR}).$$

定義 7 **抽象非特異曲線**とは K を k 上の 1 次元関数体として、開部分集合 $U \subseteq C_K$ である。ただし U には誘導位相を与え、開部分集合上の正則関数の概念を C_K の場合から定める。

第 2 章

層

定義 8　X を位相空間とする。X 上の**前層** $\mathcal{F}$ とは以下のようなデータである。

1. X の各開集合 U に対してアーベル群 $\mathcal{F}(U)$ が定まっている。
2. X の開集合 U, V で、$V \subseteq U$ となるペアについてアーベル群の準同型写像 $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ が定まっている。 これを**制限写像**と呼ぶ。

ただしこれらは以下の条件を満たすものとする：

- 空集合 $\emptyset$ に対しては $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ (自明なアーベル群)。
- $\rho_{UU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$ は恒等写像。
- X の開集合 $W \subseteq V \subseteq U$ に対して、$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$.

$s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\rho_{UV}(s)$ を $s|_V$ と書くこともある。

定義 9　(層の茎と芽) 順極限の定義をする。もっとわかりやすく書く。$\mathcal{F}$ を X 上の前層とし、P を X 上の点とする。$\mathcal{F}$ の P における**茎** $\mathcal{F}_P$ を、P を含む全ての開集合 U に対する群 $\mathcal{F}(U)$ と制限写像 ρ がなす順系に関する順極限と定義する。茎 $\mathcal{F}_P$ の元を点 P における $\mathcal{F}$ の切断の**芽**という。

定義 10　位相空間 X の上の前層 $\mathcal{F}$ がさらに次の条件を満たすとき $\mathcal{F}$ を**層**という。

3. (局所性) X の任意の開集合 U とその開被覆 $\{V_i\}$ に対して、$s \in \mathcal{F}(U)$ がすべての i について $s|_{V_i} = 0$ を満たすならば $s = 0$.
4. (貼り合わせ条件) 各 i について $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ があり、$s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ を満たすならば、ある $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在して、$s_i = s|_{V_i}$ となる。

定義 11　(前層に付随する層) X 上の前層 $\mathcal{F}$ が与えられたときに、それから X 上の層 $\mathcal{F}^+$ を構成することができる：

X の各開集合 U に対し、アーベル群 $\mathcal{F}^+(U)$ を次で定める。

1. $\mathcal{F}^+(U)$ は次のような関数 $s : U \to \bigcup_{P\in U} \mathcal{F}_P$ 全体の集合である。(これがアーベル群をなすことは明らか。各点における茎 $\mathcal{F}_P$ がアーベル群なので各点ごとで和を考えればよい。)
2. ただし s は以下の条件を満たすものとする：
   - 各点 $P \in U$ について $s(P) \in \mathcal{F}_P$.
   - 各点 $P \in U$ について　U に含まれる P の開近傍 V と $t \in \mathcal{F}(V)$ が存在して、$\forall Q \in V$ について t の Q における芽 t_Q は $s(Q)$ に等しい。

Appendix

定義 12 (写像の制限と延長) 写像 $f : X \to Y$ と部分集合 $S \subseteq X$ が任意に与えられたとき、$\forall s \in S, f|_S := f(s)$ と置くことにより定義される写像 $f|_S : S \to Y$ を f の S への**制限**と呼ぶ。写像 h の適当な制限が f に一致するとき h は f の**延長**または拡大、もしくは拡張であるという。

定義 13 (写像の貼り合わせ) V_1, V_2, Y を集合、$U = V_1 \cup V_2$ とする。写像 $f_1 : V_1 \to Y$, $f_2 : V_2 \to Y$ が与えられて、

$$f_1|_{V_1 \cap V_2} = f_2|_{V_1 \cap V_2}$$

を満たしているとする。このとき、写像 $f : U \to Y$ を

$$\forall x \in U = V_1 \cup V_2, \quad f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{if } x \in V_1 \\ f_2(x) & \text{if } x \in V_2 \end{cases}$$

で定義すれば、これは well-defined な写像になる。このとき、f_1 と f_2 は貼り合わさって写像 f を定めるという。f は f_1 の延長かつ f_2 の延長になっている。また、f_1 は f の V_1 への制限かつ f_2 は f の V_2 への制限になっている。