Capítulo 21 - Análise Combinatória - Métodos de Contagem

Exercícios Respondidos, Básicos, Complementares e Questões de Vestibular



Daniel de Lima Claudino

Referência Bibliográfica

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2004.

Sumário

1	Mapa Mental - Análise Combinatória Exercícios Resolvidos		1
2			1
L	ista	de Figuras	
	1	Mapa Mental - Análise Combinatória	1
L	ista	de Tabelas	

1 Mapa Mental - Análise Combinatória

COMBINAÇÃO COMPLETA Calcular as combinações completas deve-se levar em consideração as combinações con elementos distintos (combinações simples) e as combinações com elementos repetidos. $P_{n-1+p}^{n-1p} = \frac{(n-1+p)!}{(n-1)! p!}$ COMBINAÇÃO SIMPLES FATORIAL: PERMUTAÇÃO SIMPLES: A ordem NÃO IMPORTA. Cno -De quantos modos podemos comprar 4 salgadinhos em uma lan-Operação aplicada apenas a nºs naturais Elementos distintos. definida da seguinte maneira: Anagrama da palavra GRUPO. (5 letras diferentes) chonete que oferece 7 opções de es-colha de salgadinhos? EX: Com 10 espécies de frutas 31 - 1.2.3 - 6 41 - 1.2.3.4 - 24 quantos tipos de salada, contendo 6 espécies diferentes podem ser feitas? P₅ - 5I - 5.4.3.2.1 - 120 nl = n.(n-1).(n-2). - .1 $C_{10,6}$ - 101 - 10.9.8.7.61 - 5040 - 210 61.41 24 Assim, podemos escrever 120 anagramas Podemos comprar 4 salgadinhos de 01 - 11 - 1 da palavra GRUPO. Assim, temos 210 tipos de saladas diferentes com 6 espécies de fruta. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: PERMUTAÇÃO CIRCULAR: **PERMUTAÇÃO** ARRANJO SIMPLES: COM REPETIÇÃO Calcula o número de possibilidades de Permutação composta por n elemen-tos distintos em ordem cíclica. um evento E ocorrer A ordem IMPORTA - nl al.bl.cl n(E) - n(E1).n(E2). $PC_n - \underline{n}I$ $PC_n - (n-1)I$ Quantos números, compreendidos Anagrama da palavra BANANA (6 letras, N: 2 / A: 3) Uma pessoa fará uma viagem e entre 2000 e 3000, são formados por al-garismos distintos escolhidos entre 1 e 9? Uma família é composta por seis pretende levar 2 camisas. 2 calcas e 3 pessoas e vai ocupar uma mesa redonda. sapatos. De quantas formas diferentes $P_6^{23} = \frac{61}{21.31} = \frac{6.5.4^2.31}{2.31} = 60$ De quantas maneiras diferentes essas Para o 1º algarismo existe apenas uma opcão esta pessoa poderá se vestir, escolhen-(2). Para os outros três existem 8 opções. A_{8.3} <u>81 - 8.7.6.51</u> - 366 números PC6 = (6-1)I = 5I = 5.43.2.1 = 120 n(E) = 2 . 2 . 3 = 12 Podem sentar de 120 maneiras diferentes

Figura 1: Mapa Mental - Análise Combinatória

Fonte: Site Infinittus - Conhecimento nas medidas exatas

2 Exercícios Resolvidos

- **R1** Uma montadora de automóveis apresenta um carro em **quatro modelos** diferentes e em **cinco cores** diferentes. Um consumidor que quiser arquirir esse veículo terá quantas opções de escolha ?
 - ① **O que contar?:** Quantas opções de escolha de veículo o consumidor terá?
 - ② Restrições do(s) Experimento(s): Nenhuma.
 - ③ **Experimento 1:** Escolher uma das opções de modelo. n_1 possui 5 resultados possíveis.
 - **Experimento 2:** Escolher uma das opções de cor. n_2 possui 4 resultados possíveis.
 - **S Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento composto 1 e 2, nessa ordem, tem $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja, $5 \times 4 = 20$ opções de escolha.
 - **©** Conclusão: existem 20 opções de escolha de veículos para o consumidor.

- **R2** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?
 - ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos dados.
 - ② Restrições do(s) Experimento(s): Nenhuma.
 - ③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui n(A) resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.
 - **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui n(A) resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_2 = n(A) = 5$.
 - ⑤ Experimento 2: E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do experimento 2, n_3 possui n(A) resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_3 = n(A) = 5$.
 - **© Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1 , n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 5 \times 5 = 125$ resultados possíveis.
 - © Conclusão: Podemos formar 125 números naturais de três algarismos com os números dados.
- **R3** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?
 - ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
 - ② Restrições do(s) Experimento(s): Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
 - ③ Experimento 1: E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui n(A) resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.
 - **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui n(A) 1 resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, ou seja, $n_2 = n(A) 1 = 5 1 = 4$.
 - **Experimento 3:** E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_3 o número de resultados possíveis do **experimento 3**, n_3 possui n(A) 2 resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no **experimento 1** e outro no **experimento 2**, ou seja, $n_2 = n(A) 2 = 5 2 = 3$.
 - **© Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1 , n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 4 \times 3 = 60$ resultados possíveis.
 - Conclusão: Podemos formar 60 números naturais de três algarismos distintos com os números dados.

- **R4** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{0, 1, 2, 6, 8\}$?
 - ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
 - 2 Restrições do(s) Experimento(s):
 - a) Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
 - b) A posição da **centena** não pode conter o número zero (0), pois, nesse caso, o número natural formado não terá três algarismos, e sim dois.
 - ③ Experimento 1: E_1 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento. Lembrando que o zero não pode ser excolhido. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do experimento 1, n_1 possui n(A) resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) - 1 = 4$.
 - Experimento 2: E₂ = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
 Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e (2) para casa das dezenas o zero pode ser escolhido.
 Sendo n₂ o número de resultados possíveis do experimento 2, n₂ possui n(A) 1 resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1 e o zero
 - ⑤ Experimento 3: E₂ = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
 Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e das dezenas e (2) para casa das unidades o zero pode ser escolhido.
 Sendo n₂ o número de resultados possíveis do experimento 2, n₂ possui n(A) 2 resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, outro algarismo no experimento 2 e o zero pode ser escolhido, ou seja, n₂ = n(A) 2 = 5 2 = 3.
 - **© Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1 , n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $4 \times 4 \times 3 = 48$ resultados possíveis.
 - Conclusão: Podemos formar 48 números naturais de três algarismos distintos com os números dados.
- **R5** Quantos divisores naturais possui o número 72?
 - ① **Que contar?** Quantos divisores naturais possui o número 72.

pode ser escolhido, ou seja, $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$.

- ② Restrições do(s) Experimento(s): Nenhum.
- 3 Fatoramos o número 72.

Fatoração do número 72

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$2^4 \cdot 3^2$

④ A partir da fatoração realizada no item 3, podemos construir uma lista de divisores do número 72. Qualquer número que pode ser escrito através do produto $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$, com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$, é um divisor de 72. Ou seja, os divisores são:

$$D(72) = \{2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^1, 2^0 \times 3^2, 2^1 \times 3^0, 2^1 \times 3^1, 2^1 \times 3^2, 2^2 \times 3^0, 2^2 \times 3^1, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^0, 2^3 \times 3^1, 2^3 \times 3^2\}$$
 ou
$$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Um outra forma, mais genérica e rápida, de constatar que 72 possui 12 divisores é descobrir de quantas maneiras, no produto $2^{\{0...3\}} \times 3^{\{0...2\}}$, com $x \in \{0,1,2,3\}$ e $y \in \{0,1,2\}$, eu posso preencher o expoente do 2 e o expoente do 3.

Percebe-se que, tal qual respondemos nas questões anteriores, pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos dois experimentos: E_1 = Preencher o expoente do 2 e E_2 = Preencher o expoente do 3. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do experimento E_1 e n_2 o número de resultados possíveis do experimento E_2 , temos que pelo PFC, o experimento composto E_1 e E_2 , nessa ordem, apresenta $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja $4 \times 3 = 12$ números (divisores).

© Conclusão: O número 72 possui 12 divisores naturais