

Capítulo 21 - Análise Combinatória - Métodos de Contagem

Exercícios Respondidos, Básicos, Complementares e Questões de Vestibular



Daniel de Lima Claudino

Referência Bibliográfica
PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2004.

12 de Dezembro de 2022

Sumário

1	Mapa Mental - Análise Combinatória	1
2	Exercícios Resolvidos	1
3	Exercícios Básicos	5
4	Exercícios Complementares	5
5	Questões de Vestibulares	6

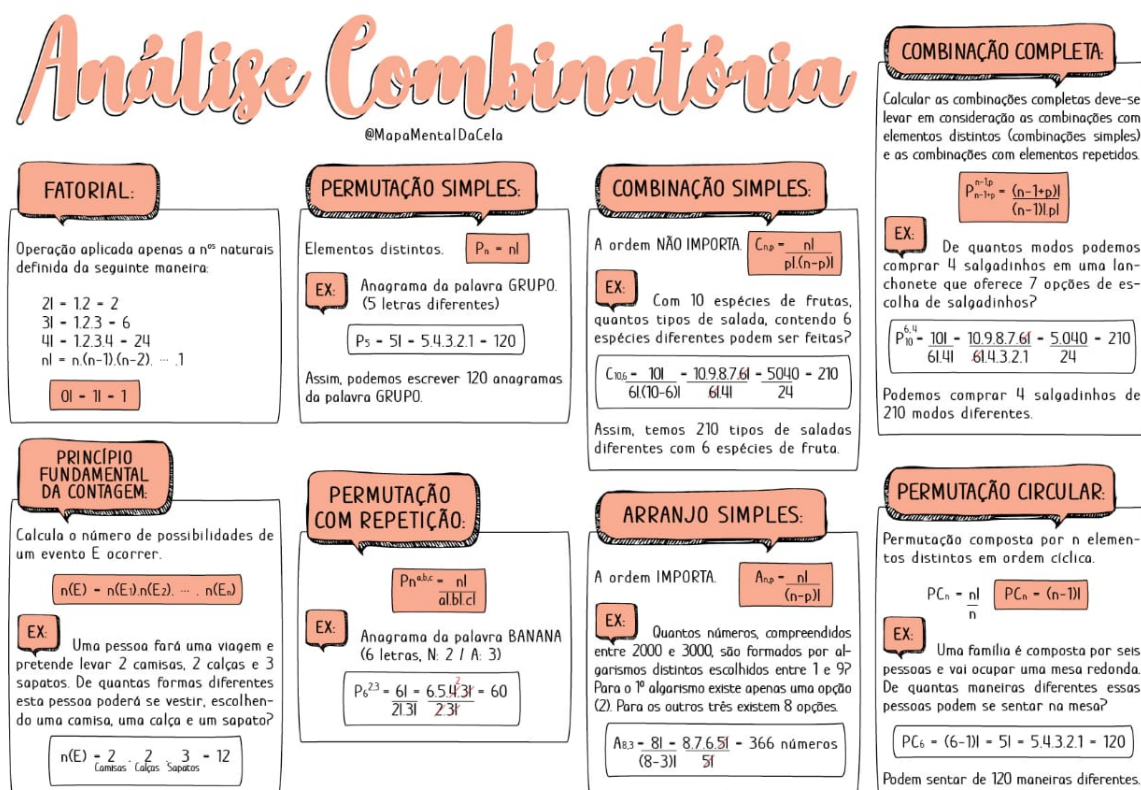
Lista de Figuras

1	Mapa Mental - Análise Combinatória	1
2	Os elementos dos subconjuntos do conjunto A	4

Lista de Tabelas

1 Mapa Mental - Análise Combinatória

Figura 1: Mapa Mental - Análise Combinatória



Fonte: Site Infinittus - Conhecimento nas medidas exatas

2 Exercícios Resolvidos

R1 Uma montadora de automóveis apresenta um carro em **quatro modelos** diferentes e em **cinco cores** diferentes. Um consumidor que quiser arquirir esse veículo terá quantas opções de escolha ?

- ① **O que contar?:** Quantas opções de escolha de veículo o consumidor terá ?
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.
- ③ **Experimento 1:** Escolher uma das opções de modelo. n_1 possui 5 resultados possíveis.
- ④ **Experimento 2:** Escolher uma das opções de cor. n_2 possui 4 resultados possíveis.
- ⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento composto 1 e 2, nessa ordem, tem $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja, $5 \times 4 = 20$ opções de escolha.
- ⑥ **Conclusão:** existem 20 opções de escolha de veículos para o consumidor.

R2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?

- ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos dados.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.
- ③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.
- ④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A)$ resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_2 = n(A) = 5$.
- ⑤ **Experimento 2:** E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_3 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_3 possui $n(A)$ resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_3 = n(A) = 5$.
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1 , n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 5 \times 5 = 125$ resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **125 números naturais de três algarismos** com os números dados.

R3 Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?

- ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
- ③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.
- ④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 1$ resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, ou seja, $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$.
- ⑤ **Experimento 3:** E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_3 o número de resultados possíveis do **experimento 3**, n_3 possui $n(A) - 2$ resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no **experimento 1** e outro no **experimento 2**, ou seja, $n_3 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$.
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1 , n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 4 \times 3 = 60$ resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **60 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

R4 Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{0, 1, 2, 6, 8\}$?

- ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):**
 - a) Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
 - b) A posição da **centena** não pode conter o número zero (0), pois, nesse caso, o número natural formado não terá três algarismos, e sim dois.
- ③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que o zero não pode ser escolhido. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) - 1 = 4$.
- ④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e (2) para casa das dezenas o zero pode ser escolhido.
Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 1$ resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1 e o zero pode ser escolhido, ou seja, $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$.
- ⑤ **Experimento 3:** E_3 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e das dezenas e (2) para casa das unidades o zero pode ser escolhido.
Sendo n_3 o número de resultados possíveis do **experimento 3**, n_3 possui $n(A) - 2$ resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, outro algarismo no experimento 2 e o zero pode ser escolhido, ou seja, $n_3 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$.
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1 , n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $4 \times 4 \times 3 = 48$ resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **48 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

R5 Quantos divisores naturais possui o número 72?

- ① **O que contar?** Quantos divisores naturais possui o número 72.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.
- ③ Fatoramos o número 72.

Fatoração do número 72

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$2^4 \cdot 3^2$

- ④ A partir da fatoração realizada no item 3, podemos construir uma lista de divisores do número 72. Qualquer número que pode ser escrito através do produto $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$, com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$, é um divisor de 72. Ou seja, os divisores são:

$$D(72) = \{2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^1, 2^0 \times 3^2, 2^1 \times 3^0, 2^1 \times 3^1, 2^1 \times 3^2, 2^2 \times 3^0, 2^2 \times 3^1, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^0, 2^3 \times 3^1, 2^3 \times 3^2\}$$

ou

$$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

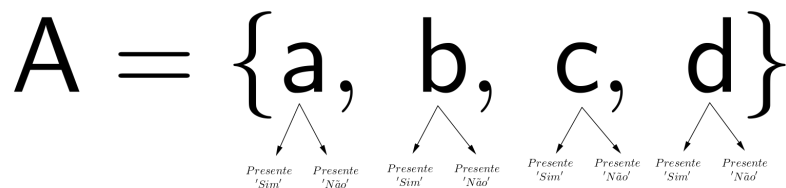
Um outra forma, mais genérica e rápida, de constatar que 72 possui 12 divisores é descobrir de quantas maneiras, no produto $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$, com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$, eu posso preencher o expoente do 2 e o expoente do 3.

Percebe-se que, tal qual respondemos nas questões anteriores, pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos dois experimentos: E_1 = Preencher o expoente do 2 e E_2 = Preencher o expoente do 3. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do experimento E_1 e n_2 o número de resultados possíveis do experimento E_2 , temos que pelo PFC, o experimento composto E_1 e E_2 , nessa ordem, apresenta $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja $4 \times 3 = 12$ números (divisores).

- ⑦ **Conclusão:** O número 72 possui 12 divisores naturais

R6 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

Figura 2: Os elementos dos subconjuntos do conjunto A



Fonte: Autor

- ① **O que contar?:** Quantos subconjuntos possui o conjunto A.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.
- ③ **Experimento:** trata-se de um experimento composto de vários experimentos, conforme explicitamos abaixo.
- ① E_1 Escolher se o 1º elemento do conjunto de A, "a", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_1) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente).
 - ② E_1 Escolher se o 2º elemento do conjunto de A, "b", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_2) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)
 - ③ E_1 Escolher se o 3º elemento do conjunto de A, "c", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_3) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)
 - ④ E_1 Escolher se o 4º elemento do conjunto de A, "d", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_4) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)
- ④ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente, n_1 , n_2 , n_3 e n_4 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ ou $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **16 subconjuntos de A, incluindo o conjunto vazio.**

3 Exercícios Básicos

- B1** Duas linhas de ônibus vão de uma cidade A para uma cidade B e três linhas vão da cidade B para uma cidade C. De quantos modos diferentes um usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B ?
- B2** Quantos números naturais de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
- B3** Quantos números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
- B4** Quantos números naturais de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
- B5** Quantos números pares e positivos de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
- B6** Quatro linhas de ônibus unem a cidade A à cidade B e três linhas unem a cidade B à cidade C. Um usuário vai viajar de A para C passando por B e vai voltar para A, passando novamente por B. De quantos modos diferentes esse usuário poderá escolher as linhas, se na volta ele não puder usar a linha que usou na ida?
- B7** Oito atletas participam de uma corrida. Serão premiados apenas os três primeiros lugares. De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos?
- B8** Uma prova é constituída por dez testes do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um candidato poderá responder aos dez testes, não deixando nenhum sem resposta e assinalando apenas uma alternativa em cada um?
- B9** Quantos números de telefone de seis dígitos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que os três primeiros dígitos sejam distintos?
- B10** Uma placa de automóvel é formada por três letras seguidas de quatro algarismos, por exemplo: "BNP - 0339". Quantas placas podem ser formadas com pelo menos um algarismo não-nulo, dispondo-se das 26 letras do alfabeto e dos dez algarismos do sistema decimal? (Incluimos as letras Y, W e K.)
- B11** Qual o número de divisores naturais de $n = 2^4 \times 3^3 \times 5$?
- B12** Qual o número de divisores naturais de $n = 504$?

4 Exercícios Complementares

- C1** Quantas funções bijetoras têm domínio $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e contradomínio $B = \{5, 6, 7, 8\}$?
- C2** Quantas funções injetoras podem ser definidas em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ com imagens em $B = \{a, b, c, d, e, f\}$?
- C3** Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$?
- C4** O número $n = 2^x \times 3^4 \times 5^2$, com $x \in \mathbb{N}$, possui sessenta divisores naturais. Determine x .
- C5** Quantos números naturais pares de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

- C6** Quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
- C7** Quantos números naturais maiores do que 400 de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?
- C8** Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

5 Questões de Vestibulares

- V1** (UFRS) De um ponto A a um ponto B existem cinco caminhos; de B a um terceiro ponto C existem seis caminhos, e de C a um quarto ponto D existem também seis caminhos. Quantos caminhos existem para ir do ponto A ao ponto D, passando por B e C?
- a) 17
 - b) 30
 - c) 180
 - d) 680
 - e) 4080
- V2** (FOV-SP) Antes de 1990 as placas de automóveis eram constituídas de duas letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas desse tipo, diferentes, podem ser formadas com as vogais do alfabeto e algarismos pares?
- a) 400
 - b) 31250
 - c) 7812
 - d) 15625
 - e) n.d.a.
- V2** (Vunesp) Os jornais noticiaram que, a partir de 1990, o código de placas dos automóveis particulares seria constituído por três letras seguidas de quatro algarismos, admitindo-se repetições. Usando-se 26 letras e dez algarismos, o maior número possível de placas desse tipo em que figuram pelo menos uma letra R e pelo menos uma letra C é:
- a) $32 \times 35 \times 10^4$
 - b) $3 \times 2 \times 26 \times 10^4$
 - c) $3 \times 26 \times 10^4$
 - d) $325 \times 24 \times 23 \times 10^4$
 - e) $41 \times 6 \times 10^4$
- V2** (PUC-MG) Considerando os elementos do conjunto $A = \{10, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 91\}$, quantos números inteiros de cinco algarismos distintos, maiores que 64000, podem ser formados?
- V2** (Cesgranrio) Considere todos os n números pares positivos, de quatro dígitos distintos, formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4. Então n é:
- a) 10

- b) 12
- c) 16
- d) 18
- e) 24