Capítulo 21 - Análise Combinatória - Métodos de Contagem

Exercícios Respondidos, Básicos, Complementares e Questões de Vestibular

Daniel de Lima Claudino

Referência Bibliográfica

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2004.

12 de Dezembro de 2022

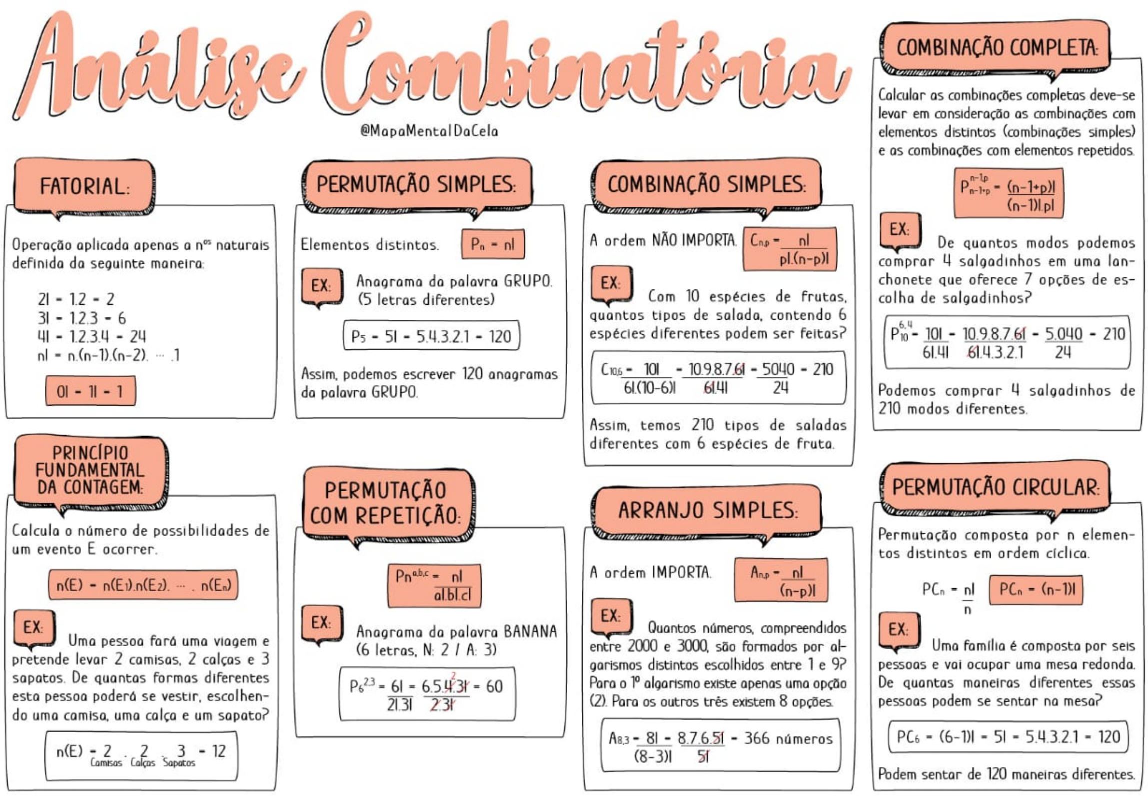
Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Mapa Mental - Análise Combinatória

Figura 1: Mapa Mental - Análise Combinatória



Fonte:Site Infinittus - Conhecimento nas medidas exatas

2 Exercícios Resolvidos

R1 Uma montadora de automóveis apresenta um carro em **quatro modelos** diferentes e em **cinco cores** diferentes. Um consumidor que quiser arquirir esse veículo terá quantas opções de escolha ?

① **O que contar?:** Quantas opções de escolha de veículo o consumidor terá ?

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.

③ **Experimento 1:** Escolher uma das opções de modelo. n_1 possui 5 resultados possíveis.

④ **Experimento 2:** Escolher uma das opções de cor. n_2 possui 4 resultados possíveis.

⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento composto 1 e 2, nessa ordem, tem $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja, $5 \times 4 = 20$ opções de escolha.

⑥ **Conclusão:** existem 20 opções de escolha de veículos para o consumidor.

R2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?

① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos dados.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.

③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.

④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A)$ resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_2 = n(A) = 5$.

⑤ **Experimento 2:** E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_3 possui $n(A)$ resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_3 = n(A) = 5$.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 5 \times 5 = 125$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **125 números naturais de três algarismos** com os números dados.

R3 Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?

① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.

③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.

④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 1$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, ou seja, $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$.

⑤ **Experimento 3:** E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_3 o número de resultados possíveis do **experimento 3**, n_3 possui $n(A) - 2$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no **experimento 1** e outro no **experimento 2**, ou seja, $n_2 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 4 \times 3 = 60$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **60 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

R4 Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{0, 1, 2, 6, 8\}$?

① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.

② **Restrições do(s) Experimento(s):**

a) Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.

b) A posição da **centena** não pode conter o número zero (0), pois, nesse caso, o número natural formado não terá três algarismos, e sim dois.

③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que o zero não pode ser excolhido. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) - 1 = 4$.

④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e (2) para casa das dezenas o zero pode ser escolhido.
Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 1$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1 e o zero pode ser escolhido, ou seja, $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$.

⑤ **Experimento 3:** E_2 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e das dezenas e (2) para casa das unidades o zero pode ser escolhido.
Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 2$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, outro algarismo no experimento 2 e o zero pode ser escolhido, ou seja, $n_2 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $4 \times 4 \times 3 = 48$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **48 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

R5 Quantos divisores naturais possui o número 72?

① **O que contar?** Quantos divisores naturais possui o número 72.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.

③ Fatoramos o número 72.

Fatoração do número 72

$$\begin{array}{r|l} 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 2^4 \cdot 3^2 \end{array}$$

④ A partir da fatoração realizada no item 3, podemos construir uma lista de divisores do número 72. Qualquer número que pode ser escrito através do produto $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$, com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$, é um divisor de 72. Ou seja, os divisores são:

$$D(72) = \{2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^1, 2^0 \times 3^2, 2^1 \times 3^0, 2^1 \times 3^1, 2^1 \times 3^2, 2^2 \times 3^0, 2^2 \times 3^1, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^0, 2^3 \times 3^1, 2^3 \times 3^2\}$$

ou

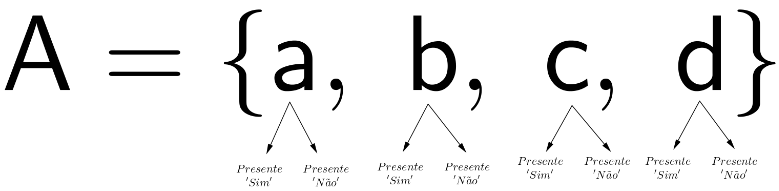
$$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Um outra forma, mais genérica e rápida, de constatar que 72 possui 12 divisores é descobrir de quantas maneiras, no produto $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$, com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $y \in \{0, 1, 2\}$, eu posso preencher o expoente do 2 e o expoente do 3.
Percebe-se que, tal qual respondemos nas questões anteriores, pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos dois experimentos: E_1 = Preencher o expoente do 2 e E_2 = Preencher o expoente do 3. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do experimento E_1 e n_2 o número de resultados possíveis do experimento E_2, temos que pelo PFC, o experimento composto E_1 e E_2, nessa ordem, apresenta $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja $4 \times 3 = 12$ números (divisores).

⑦ **Conclusão:** O número 72 possui 12 divisores naturais

R6 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

Figura 2: Os elementos dos subconjuntos do conjunto A



Fonte: Autor

① **O que contar?:** Quantos subconjuntos possui o conjunto A.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.

③ **Experimento:** trata-se de um experimento composto de vários experimentos, conforme explicitamos abaixo.

  ① E_1 Escolher se o **1º** elemento do conjunto de A, "a", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_1) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente).

  ② E_1 Escolher se o **2º** elemento do conjunto de A, "b", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_2) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)

  ③ E_1 Escolher se o **3º** elemento do conjunto de A, "c", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_3) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)

  ④ E_1 Escolher se o **4º** elemento do conjunto de A, "d", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_4) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)

④ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente, n_1, n_2, n_3 e n_4 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ ou $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **16 subconjuntos de A, incluindo o conjunto vazio**.