

# Capítulo 21 - Análise Combinatória - Métodos de Contagem

Exercícios Respondidos, Básicos, Complementares e Questões de Vestibular



Autor: Daniel de Lima Claudino

**Referência Bibliográfica**  
PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2004.

Dezembro/2022

## Sumário

<b>1</b>	<b>Mapa Mental - Análise Combinatória</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Exercícios Resolvidos</b>	<b>1</b>
<b>3</b>	<b>Exercícios Básicos</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Exercícios Complementares</b>	<b>12</b>
<b>5</b>	<b>Questões de Vestibulares</b>	<b>14</b>

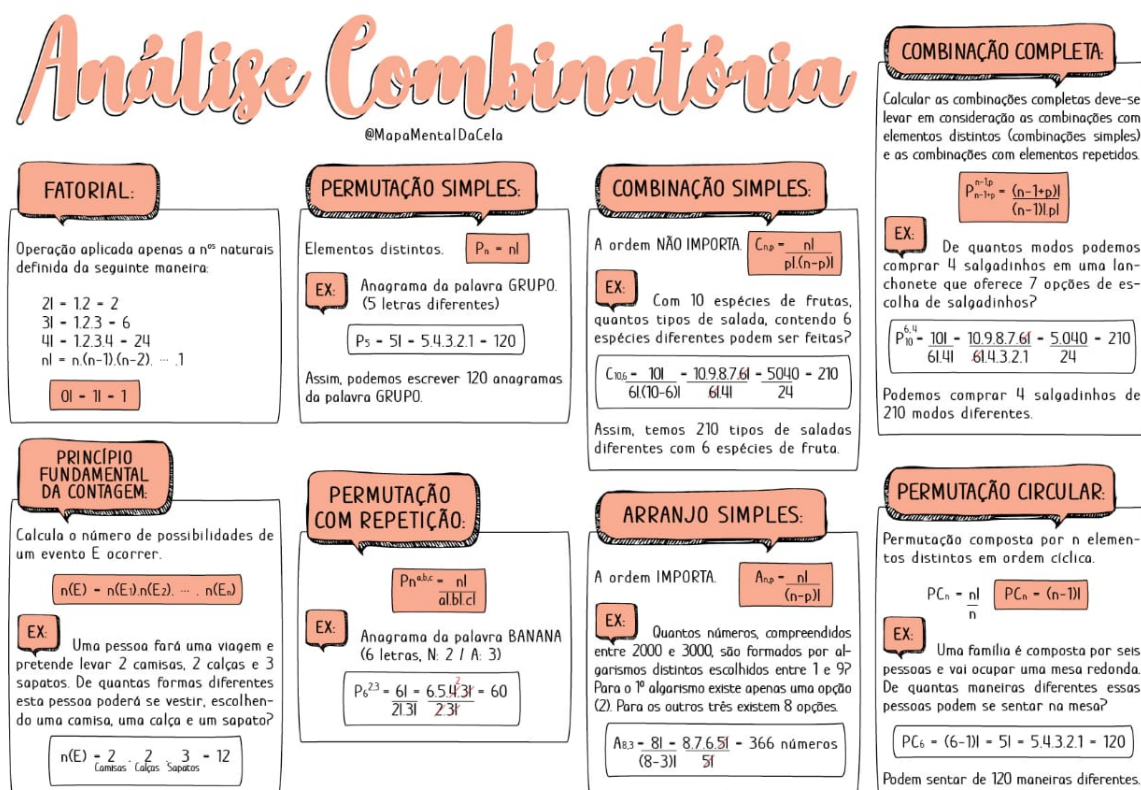
## Lista de Figuras

1	Mapa Mental - Análise Combinatória . . . . .	1
2	[Questão R6, pág.158] - Os elementos dos subconjuntos do conjunto A . . . . .	4
3	[Questão B1, pág.159] - Esquema das opções de transporte de A para C, passando por B . . . . .	5
4	[Questão B9, pág.159] - Esquema - Quantos números podemos formar? . . . . .	9
5	[Questão B10, pág.159] - Formar placas com <b>pelo menos um</b> dígito não-nulo. . . .	10
6	[Questão C1, pág.160 1/2 ] - O que é uma função bijetora ? . . . . .	12
7	[Questão C1, pág.160 2/2 ] - Diagrama de Venn do enunciado da questão . . . . .	12

## Lista de Tabelas

# 1 Mapa Mental - Análise Combinatória

Figura 1: Mapa Mental - Análise Combinatória



Fonte: Site Infinittus - Conhecimento nas medidas exatas

## 2 Exercícios Resolvidos

**R1** Uma montadora de automóveis apresenta um carro em **quatro modelos** diferentes e em **cinco cores** diferentes. Um consumidor que quiser arquirir esse veículo terá quantas opções de escolha ?

- ① **O que contar?:** Quantas opções de escolha de veículo o consumidor terá ?
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.
- ③ **Experimento 1:** Escolher uma das opções de modelo.  $n_1$  possui 5 resultados possíveis.
- ④ **Experimento 2:** Escolher uma das opções de cor.  $n_2$  possui 4 resultados possíveis.
- ⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento composto 1 e 2, nessa ordem, tem  $n_1 \times n_2$  resultados possíveis, ou seja,  $5 \times 4 = 20$  opções de escolha.
- ⑥ **Conclusão:** existem 20 opções de escolha de veículos para o consumidor.

**R2** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos  $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$  ?

- ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos dados.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.
- ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do **experimento 1**,  $n_1$  possui  $n(A)$  resultados possíveis, ou seja,  $n_1 = n(A) = 5$ .
- ④ **Experimento 2:**  $E_2$  = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_2$  o número de resultados possíveis do **experimento 2**,  $n_2$  possui  $n(A)$  resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja,  $n_2 = n(A) = 5$ .
- ⑤ **Experimento 2:**  $E_3$  = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_3$  o número de resultados possíveis do **experimento 2**,  $n_3$  possui  $n(A)$  resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja,  $n_3 = n(A) = 5$ .
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $5 \times 5 \times 5 = 125$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **125 números naturais de três algarismos** com os números dados.

**R3** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos  $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$  ?

- ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
- ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do **experimento 1**,  $n_1$  possui  $n(A)$  resultados possíveis, ou seja,  $n_1 = n(A) = 5$ .
- ④ **Experimento 2:**  $E_2$  = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_2$  o número de resultados possíveis do **experimento 2**,  $n_2$  possui  $n(A) - 1$  resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, ou seja,  $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$ .
- ⑤ **Experimento 3:**  $E_3$  = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_3$  o número de resultados possíveis do **experimento 3**,  $n_3$  possui  $n(A) - 2$  resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no **experimento 1** e outro no **experimento 2**, ou seja,  $n_3 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$ .
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $5 \times 4 \times 3 = 60$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **60 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

**R4** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos  $A = \{0, 1, 2, 6, 8\}$  ?

- ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):**
  - a) Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
  - b) A posição da **centena** não pode conter o número zero ( 0 ), pois, nesse caso, o número natural formado não terá três algarismos, e sim dois.
- ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.  
Lembrando que o zero não pode ser escolhido. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do **experimento 1**,  $n_1$  possui  $n(A)$  resultados possíveis, ou seja,  $n_1 = n(A) - 1 = 4$ .
- ④ **Experimento 2:**  $E_2$  = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.  
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e (2) para casa das dezenas o zero pode ser escolhido.  
Sendo  $n_2$  o número de resultados possíveis do **experimento 2**,  $n_2$  possui  $n(A) - 1$  resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1 e o zero pode ser escolhido, ou seja,  $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$ .
- ⑤ **Experimento 3:**  $E_3$  = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.  
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e das dezenas e (2) para casa das unidades o zero pode ser escolhido.  
Sendo  $n_3$  o número de resultados possíveis do **experimento 3**,  $n_3$  possui  $n(A) - 2$  resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, outro algarismo no experimento 2 e o zero pode ser escolhido, ou seja,  $n_3 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$ .
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $4 \times 4 \times 3 = 48$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **48 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

**R5** Quantos divisores naturais possui o número 72?

- ① **O que contar?** Quantos divisores naturais possui o número 72.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.
- ③ Fatoramos o número 72.

Fatoração do número 72

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$2^4 \cdot 3^2$

- ④ A partir da fatoração realizada no item 3, podemos construir uma lista de divisores do número 72. Qualquer número que pode ser escrito através do produto  $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$ , com  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $y \in \{0, 1, 2\}$ , é um divisor de 72. Ou seja, os divisores são:

$$D(72) = \{2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^1, 2^0 \times 3^2, 2^1 \times 3^0, 2^1 \times 3^1, 2^1 \times 3^2, 2^2 \times 3^0, 2^2 \times 3^1, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^0, 2^3 \times 3^1, 2^3 \times 3^2\}$$

ou

$$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

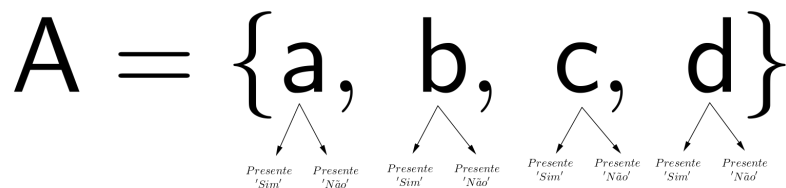
Um outra forma, mais genérica e rápida, de constatar que 72 possui 12 divisores é descobrir de quantas maneiras, no produto  $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$ , com  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $y \in \{0, 1, 2\}$ , eu posso preencher o expoente do 2 e o expoente do 3.

Percebe-se que, tal qual respondemos nas questões anteriores, pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos dois experimentos:  $E_1$  = Preencher o expoente do 2 e  $E_2$  = Preencher o expoente do 3. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do experimento  $E_1$  e  $n_2$  o número de resultados possíveis do experimento  $E_2$ , temos que pelo PFC, o experimento composto  $E_1$  e  $E_2$ , nessa ordem, apresenta  $n_1 \times n_2$  resultados possíveis, ou seja  $4 \times 3 = 12$  números (divisores).

- ⑦ **Conclusão:** O número 72 possui **12 divisores naturais**.

**R6** Quantos subconjuntos possui o conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$ ?

Figura 2: [Questão R6, pág.158] - Os elementos dos subconjuntos do conjunto A



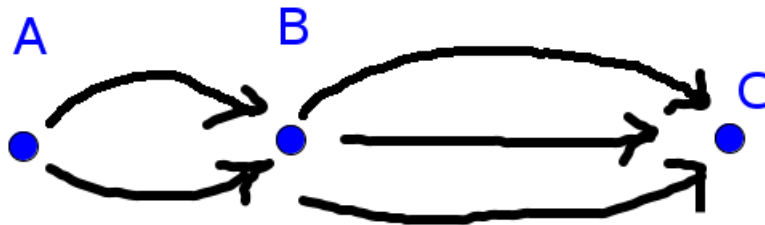
Fonte: Autor

- ① **O que contar?:** Quantos subconjuntos possui o conjunto A.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.
- ③ **Experimento:** trata-se de um experimento composto de vários experimentos, conforme explicitamos abaixo.
- ①  $E_1$  Escolher se o 1º elemento do conjunto de A, "a", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_1) = 2$  resultados possíveis (presente ou não presente).
  - ②  $E_1$  Escolher se o 2º elemento do conjunto de A, "b", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_2) = 2$  resultados possíveis (presente ou não presente)
  - ③  $E_1$  Escolher se o 3º elemento do conjunto de A, "c", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_3) = 2$  resultados possíveis (presente ou não presente)
  - ④  $E_1$  Escolher se o 4º elemento do conjunto de A, "d", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_4) = 2$  resultados possíveis (presente ou não presente)
- ④ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  ou  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Podemos formar **16 subconjuntos de A, incluindo o conjunto vazio**.

### 3 Exercícios Básicos

- B1** Duas linhas de ônibus vão de uma cidade A para uma cidade B e três linhas vão da cidade B para uma cidade C. De quantos modos diferentes um usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B ?

Figura 3: [Questão B1, pág.159] - Esquema das opções de transporte de A para C, passando por B



Fonte: Autor

- ① **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher uma das duas linhas de ônibus de A para B. Esse experimento possui  $n(E_1) = 2$  resultados possíveis.
  - ② **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher uma das três linhas de ônibus de B para C. Esse experimento possui  $n(E_2) = 3$  resultados possíveis.
  - ③ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1 e 2 apresentam, respectivamente,  $n_1$  e  $n_2$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1 e 2 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2$  ou  $2 \times 3 = 6$  resultados possíveis.
  - ④ **Conclusão:** O usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B, de **6 formas diferentes**.
- B2** Quantos números naturais de **quatro algarismos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
- ① **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher o algarismo da **unidade de milhar** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_1) = 7$  resultados possíveis.
  - ② **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_2) = 7$  resultados possíveis.
  - ③ **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o algarismo da **dezena** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_3) = 7$  resultados possíveis.
  - ④ **Experimento 4:**  $E_4$  = Escolher o algarismo da **unidade** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_4) = 7$  resultados possíveis.
  - ⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  ou  $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$  resultados possíveis.
  - ⑥ **Conclusão:** **2.401 números naturais de quatro algarismos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
- B3** Quantos números naturais de **quatro algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

- ① **Restrição do(s) Experimento(s):** Os Algarismos dos números naturais formados **devem ser distintos**.
- ② **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher o algarismo da **unidade de milhar** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_1) = 7$  resultados possíveis.
- ③ **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 ( $E_1$ ). Esse experimento possui  $n(E_2) = 7 - 1 = 6$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o algarismo da **dezena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido nos experimentos 1 e 2 ( $E_1$  e  $E_2$ ). Esse experimento possui  $n(E_3) = 7 - 2 = 5$  resultados possíveis.
- ⑤ **Experimento 4:**  $E_4$  = Escolher o algarismo da **unidade** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido nos experimentos 1, 2 e 3 ( $E_1$  e  $E_2$  e  $E_3$ ). Esse experimento possui  $n(E_4) = 7 - 3 = 4$  resultados possíveis.
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  ou  $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** **840 números naturais de quatro algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

**B4** Quantos números naturais de **cinco algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos  $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ?

- ① **Dados para o Problema:** O número de elementos de  $A$  é dado pela expressão:  $n(A) = 8$ .
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):**
  - a) Os algarismos dos números naturais formados **devem ser distintos**;
  - b) A escolha do algarismo da **dezena de milhar** não pode ser zero, pois, nesse caso, o número natural formado não terá **cinco algarismos**.
- ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher o algarismo da **dezena de milhar**, exceto o zero, dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_1) = n(A) - 1 = 8 - 1 = 7$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 ( $E_1$ ) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_2) = n(A) - 1 = 8 - 1 = 7$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 e 2 ( $E_1$  e  $E_2$ ) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_3) = n(A) - 2 = 8 - 2 = 6$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 4:**  $E_4$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1, 2 e 3 ( $E_1$  e  $E_2$  e  $E_3$ ) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_4) = n(A) - 3 = 8 - 3 = 5$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 5:**  $E_5$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1, 2, 3 e 4 ( $E_1$  e  $E_2$  e  $E_3$  e  $E_4$ ) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_5) = n(A) - 4 = 8 - 4 = 4$  resultados possíveis.



- ⑦ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3, 4 e 5 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3, n_4$  e  $n_5$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3, 4 e 5 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5$  ou  $7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 5880$  resultados possíveis.
- ⑧ **Conclusão:** **5880 números naturais de cinco algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

**B5** Quantos números pares e positivos de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

- ① **Dados para o problema:** O número de elementos de A é dado pela expressão:  $n(A) = 7$ .
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):**
- Devemos formar números naturais de três algarismos **distintos**;
  - Os algarismos das unidades deve ser par, dentre os algarismos disponíveis, ou seja, 4, 6 ou 8;
- ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher o algarismo das **unidades**, dentre os algarismos dados de forma que o número seja par, ou seja, escolher entre 4, 6 ou 8. Esse experimento possui  $n(E_1) = 3$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o algarismo da **dezenas** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 ( $E_1$ ) e considerando a restrição "a" (algarismos distintos). Esse experimento possui  $n(E_2) = n(A) - 1 = 6$  resultados possíveis.
- ⑤ **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 e 2 ( $E_1$  e  $E_2$ ) e considerando a restrição "a" (algarismos distintos). Esse experimento possui  $n(E_3) = n(A) - 2 = 5$  resultados possíveis.
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $3 \times 6 \times 5 = 90$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** **90 números pares positivos de três algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

**B6** Quatro linhas de ônibus unem a cidade A à cidade B e três linhas unem a cidade B à cidade C. Um usuário vai viajar de A para C passando por B e vai voltar para A, passando novamente por B. De quantos modos diferentes esse usuário poderá escolher as linhas, se na volta ele não puder usar a linha que usou na ida?

- ① **Restrições do(s) Experimento(s):**
- Ir de A para C, passando por B;
  - Voltar de C para A, passando por B e **não utilizando os ônibus usados na IDA de A para C**;
- ② **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher o ônibus para ir da A para B. Esse experimento possui  $n(E_1) = 4$  resultados possíveis.
- ③ **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o ônibus para ir da B para C. Esse experimento possui  $n(E_2) = 3$  resultados possíveis.

- ④ **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o ônibus para ir da C para B, **não podendo escolher o que foi utilizado no experimento 2** ( $E_2$ ). Esse experimento possui  $n(E_3) = 3 - 1 = 2$  resultados possíveis.
- ⑤ **Experimento 4:**  $E_4$  = Escolher o ônibus para ir da B para A, **não podendo escolher o que foi utilizado no experimento 1** ( $E_1$ ). Esse experimento possui  $n(E_4) = 4 - 1 = 3$  resultados possíveis.
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  ou  $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Para fazer a viagem de IDA e VOLTA conforme especificado no enunciado da questão, existem **72 possibilidade distintas**.

**B7** Oito atletas participam de uma corrida. Serão premiados apenas os três primeiros lugares. De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos?

- ① **Dados para o problema:**
  - a) O número de atletas que participam da corrida é dado pela expressão:  $n(A) = 8$ ;
  - b) Serão premiados apenas os **três primeiros lugares**;
- ② **O que se deseja saber?**
  - a) De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos?
- ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Premiar o corredor que terminou em **primeiro** lugar. Esse experimento possui  $n(E_1) = n(A) = 8$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 2:**  $E_2$  = Premiar o corredor que terminou em **segundo** lugar. Esse experimento possui  $n(E_2) = n(A) - 1 = 8 - 1 = 7$  resultados possíveis já que desconsideramos o corredor que terminou em 1º lugar.
- ⑤ **Experimento 3:**  $E_3$  = Premiar o corredor que terminou em **terceiro** lugar. Esse experimento possui  $n(E_3) = n(A) - 2 = 8$  resultados possíveis já que desconsideramos o corredor que terminou em 1º e em 2º lugar.
- ⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $8 \times 7 \times 6 = 336$  resultados possíveis.
- ⑦ **Conclusão:** Os prêmios podem ser distribuídos de **336 maneiras diferentes**.

**B8** Uma prova é constituída por dez testes do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um candidato poderá responder aos dez testes, não deixando nenhum sem resposta e assinalando apenas uma alternativa em cada um?

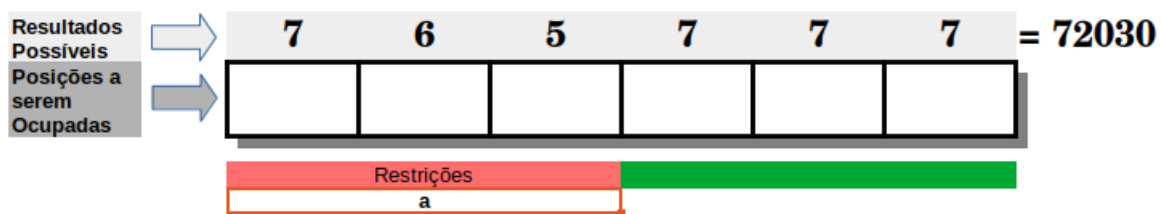
- ① **O que contar?:** Tratam-se de dez experimentos, um para cada questão, que consistem em escolher a ALTERNATIVA "V"OU "F", havendo, portanto, dois resultados possíveis para cada experimento.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Ao responder as questões, o candidato:
  - a) Não pode deixar nenhuma questão sem resposta
  - b) Deve assinalar apenas uma alternativa em cada questão ("V"ou "F")

- ③ **Experimentos:** Em síntese, tratam-se de dez experimentos, um para cada questão, que consistem em escolher a alternativa "V"OU "F", ou seja  $n(A_n) = 2$  para cada experimento.
- ④ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3, ..., 10 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_{10}$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3, ..., 10 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_4$  ou  $2 \times 2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^{10} = 1024$  resultados possíveis.
- ⑤ **Conclusão:** A prova poderá ser respondida de **1024 maneiras distintas**.

**B9** Quantos números de telefone de seis dígitos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que os três primeiros dígitos sejam distintos?

- ① **O que contar?:** Tratam-se de 6 experimentos, escolher cada um dos algarismos de telefone a ser formado, respeitando as restrições abaixo.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):**
- a) Os três primeiros algarismos do número de telefone devem ser distintos.

Figura 4: [Questão B9, pág.159] - Esquema - Quantos números podemos formar?



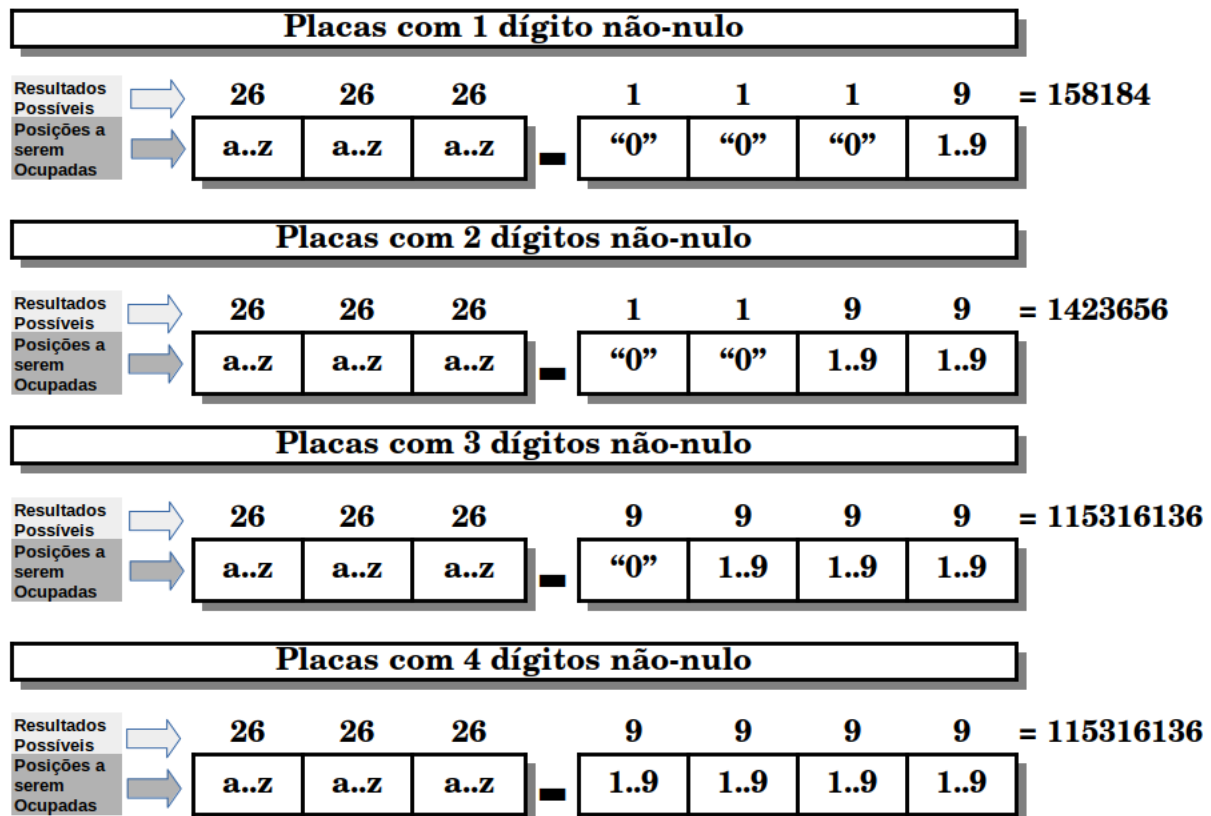
Fonte: Autor

- ③ **Experimentos:** Em síntese, tratam-se de seis experimentos: Escolher um algarismo dentre os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.
- ④ **Cálculo:**
- a) Atuamos primeiro nos três primeiros algarismos que possuem restrições. A primeira posição pode ser ocupada por 7 dos dígitos disponíveis. A segunda posição poderá ser ocupada por 6 algarismos ( $7 - 1$ ), a terceira por 5 ( $7 - 2$ ), já que eles devem ser distintos (restrição "a").
- a) As demais posições do número de telefone não possuem restrição. Elas podem receber quaisquer dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, disponíveis.
- ⑤ Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), as posições podem ser preenchidas conforme a figura 4.
- ⑥ **Conclusão:** Podem ser formados **72.030 telefones diferentes** obedecendo os critérios do enunciado da questão.

**B10** Uma placa de automóvel é formada por três letras seguidas de quatro algarismos, por exemplo: "BNP - 0339". Quantas placas podem ser formadas com pelo menos um algarismo não-nulo, dispondo-se das 26 letras do alfabeto e dos dez algarismos do sistema decimal? (Incluimos as letras Y, W e K.)

- ① **O que contar?:** Tratam-se de 2 experimentos.  $E_1$  = Escolher três as letras para a placa do automóvel.  $E_2$  = Escolher 4 números para a placa, respeitando as restrições do enunciado da questão.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):**
- a) A parte numérica da placa deve conter, **pelo menos** um algarismo não-nulo (1,2,3,4,5,6,7,8 e 9), ou seja, existem três situações distintas que devem ser tratadas: A parte numérica da placa deve conter três algarismos zero, dois algarismos zero ou um algarismo zero, **mas não os quatro algarismos zero**.

Figura 5: [Questão B10, pág.159] - Formar placas com **pelo menos um** dígito não-nulo.



Fonte: Autor

**B11** Qual o número de divisores naturais de  $n = 2^4 \times 3^3 \times 5$ ?

- ① **O que contar?** A partir da fatoração  $2^4 \times 3^3 \times 5 = 2160$ , podemos construir uma lista de divisores possíveis. Qualquer número que pode ser escrito através do produto  $2^x \times 3^y \times 5^z$ , com  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ,  $y \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $z \in \{0, 1\}$ , é um divisor de 2160, ou seja, se dividirmos o número 2160 por  $2^x \times 3^y \times 5^z$  ocorrerá divisão exata (com resto zero). Em resumo, qualquer número  $b, b \in \mathbb{N}$ , será divisor de um número  $a, a \in \mathbb{N}$ , se na divisão  $\frac{a}{b}$ , o resto for zero.
- ② **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher o expoente para o **fator 2** em  $2^x \times 3^y \times 5^z$ . Com  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ , esse experimento possui  $n(E_1) = n_1 = 5$  resultados possíveis.
- ③ **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o expoente para o **fator 3** em  $2^x \times 3^y \times 5^z$ . Com  $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ , esse experimento possui  $n(E_2) = n_2 = 4$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o expoente para o **fator 5** em  $2^x \times 3^y \times 5^z$ . Com  $z \in \{0, 1\}$ , esse experimento possui  $n(E_3) = n_3 = 2$  resultados possíveis.
- ⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento  $E_1$  possui  $n_1$  resultados possíveis, o experimento  $E_2$  possui  $n_2$  resultados possíveis e o experimento  $E_3$  possui  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto  $E_1, E_2$  e  $E_3$ , nessa ordem, apresenta  $n_1 \times n_2 \times n_3$  resultados possíveis, ou seja,  $5 \times 4 \times 2 = 40$  resultados possíveis.
- ⑥ **Conclusão:** Existem 40 divisores naturais de  $2^4 \times 3^3 \times 5 = 2160$ .

**B12** Qual o número de divisores naturais de  $n = 504$  ?

- ① **O que contar?** A partir da fatoração do número  $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$ , podemos construir uma lista de divisores possíveis. Qualquer número que pode ser escrito através do produto  $2^x \times 3^y \times 7^z$ , com  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $y \in \{0, 1, 2\}$  e  $z \in \{0, 1\}$ , é um divisor de 504, ou seja, se dividirmos o número 504 por  $2^x \times 3^y \times 7^z$  ocorrerá divisão exata (com resto zero). Em resumo, qualquer número  $b, b \in \mathbb{N}$ , será divisor de um número  $a, a \in \mathbb{N}$ , se na divisão  $\frac{a}{b}$ , o resto for zero.
- ② **Experimento 1:**  $E_1$  = Escolher o expoente para o **fator 2** em  $2^x \times 3^y \times 7^z$ . Com  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ , esse experimento possui  $n(E_1) = n_1 = 4$  resultados possíveis.
- ③ **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o expoente para o **fator 3** em  $2^x \times 3^y \times 7^z$ . Com  $y \in \{0, 1, 2\}$ , esse experimento possui  $n(E_2) = n_2 = 3$  resultados possíveis.
- ④ **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o expoente para o **fator 7** em  $2^x \times 3^y \times 7^z$ . Com  $z \in \{0, 1\}$ , esse experimento possui  $n(E_3) = n_3 = 2$  resultados possíveis.
- ⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento  $E_1$  possui  $n_1$  resultados possíveis, o experimento  $E_2$  possui  $n_2$  resultados possíveis e o experimento  $E_3$  possui  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto  $E_1, E_2$  e  $E_3$ , nessa ordem, apresenta  $n_1 \times n_2 \times n_3$  resultados possíveis, ou seja,  $4 \times 3 \times 2 = 24$  resultados possíveis.
- ⑥ **Conclusão:** Existem 24 divisores naturais de  $2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$ .

## 4 Exercícios Complementares

C1 Quantas funções bijetoras têm domínio  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e contradomínio  $B = \{5, 6, 7, 8\}$ ?

### Discussão Conceitual Sobre Funções Bijetoras

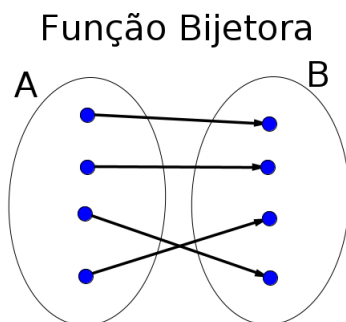
A função bijetora, também chamada bijetiva, é um tipo de função matemática que relaciona cada elemento do domínio A a um elemento diferente no contradomínio B.

Além disto, todo elemento do contradomínio B é imagem de A.

$$CD(f) = Im(f)$$

Em resumo, todo elemento de B recebe uma única flecha de A (**função injetora**). Não sobra elementos no contradomínio B (**função sobrejetora**). A correspondência entre os elementos dos dois conjuntos é biunívoca<sup>1</sup>.

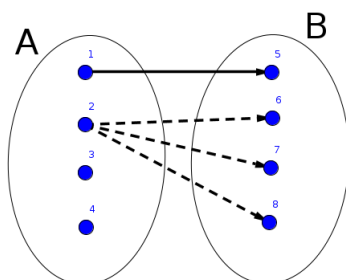
Figura 6: [Questão C1, pág.160 1/2 ] - O que é uma função bijetora ?



Fonte: Autor

Vamos descobrir **quantas funções bijetoras poderemos formar**. Para isso, considere a figura 7

Figura 7: [Questão C1, pág.160 2/2 ] - Diagrama de Venn do enunciado da questão



Fonte: Autor

<sup>1</sup>Importante notar que o **domínio** e o **contradomínio** apresentam o mesmo número de elementos

## Resolução da Questão

- ① **O que contar?** Quantas funções bijetoras poderemos formar.
- ② **Restrições do(s) Experimento(s):** A função deve ser bijetora.
- a) Cada elemento do domínio  $A$  só pode ser levado a um elemento do contradomínio  $B$  (Para ser uma relação do tipo função)
  - b) Cada elemento do contradomínio  $B$  só pode estar ligado a um elemento do domínio  $A$  (função injetora)
  - c) Não pode sobrar elementos no contradomínio  $B$  (função sobrejetora)
- ③ **Experimento 1:**  $E_1 =$  Para o primeiro elemento do domínio "1" em  $A$ , devemos escolher um elemento do contradomínio em  $B$  de forma a respeitar a restrição do enunciado da questão. Essa escolha gera  $n_1 = 4$  possibilidades de escolha no contradomínio.
- ④ **Experimento 2:**  $E_2 =$  Para o segundo elemento do domínio "2" em  $A$ , devemos escolher um elemento do contradomínio em  $B$  de forma a respeitar a restrição do enunciado da questão. Essa escolha gera  $n_2 = 3$  possibilidades de escolha no contradomínio, pois um elemento já foi escolhido no  $E_1$ .
- ⑤ **Experimento 3:**  $E_3 =$  Para o terceiro elemento do domínio "3" em  $A$ , devemos escolher um elemento do contradomínio em  $B$  de forma a respeitar a restrição do enunciado da questão. Essa escolha gera  $n_3 = 2$  possibilidades de escolha no contradomínio, pois dois elementos já foram escolhidos no  $E_1$  e  $E_2$ .
- ⑥ **Experimento 4:**  $E_4 =$  Para o quarto elemento do domínio "4" em  $A$ , devemos escolher um elemento do contradomínio em  $B$  de forma a respeitar a restrição do enunciado da questão. Essa escolha gera  $n_4 = 1$  possibilidade de escolha no contradomínio, pois três elementos já foram escolhidos no  $E_1$  e  $E_2$  e  $E_3$ .
- ⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento  $E_1$  possui  $n_1$  resultados possíveis, o experimento  $E_2$  possui  $n_2$  resultados possíveis, o experimento  $E_3$  possui  $n_3$  resultados possíveis e o experimento  $E_4$  possui  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto  $E_1, E_2, E_3$  e  $E_4$ , nessa ordem, apresenta  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  resultados possíveis, ou seja,  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  resultados possíveis.
- ⑥ **Conclusão:** Podemos formar 24 funções bijetoras com os conjuntos  $A$  e  $B$  (domínio e contradomínio, respectivamente).
- C2** Quantas funções injetoras podem ser definidas em  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  com imagens em  $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ?
- C3** Quantos subconjuntos tem o conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ?
- C4** O número  $n = 2^x \times 3^4 \times 5^2$ , com  $x \in \mathbb{N}$ , possui sessenta divisores naturais. Determine  $x$ .
- C5** Quantos números naturais pares de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
- C6** Quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
- C7** Quantos números naturais maiores do que 400 de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?
- C8** Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

## 5 Questões de Vestibulares

- V1** (UFRS) De um ponto A a um ponto B existem cinco caminhos; de B a um terceiro ponto C existem seis caminhos, e de C a um quarto ponto D existem também seis caminhos. Quantos caminhos existem para ir do ponto A ao ponto D, passando por B e C?
- a) 17
  - b) 30
  - c) 180
  - d) 680
  - e) 4080
- V2** (FGV-SP) Antes de 1990 as placas de automóveis eram constituídas de duas letras seguidas de quatro algarismos. Quantas placas desse tipo, diferentes, podem ser formadas com as vogais do alfabeto e algarismos pares?
- a) 400
  - b) 31250
  - c) 7812
  - d) 15625
  - e) n.d.a.
- V2** (Vunesp) Os jornais noticiaram que, a partir de 1990, o código de placas dos automóveis particulares seria constituído por três letras seguidas de quatro algarismos, admitindo-se repetições. Usando-se 26 letras e dez algarismos, o maior número possível de placas desse tipo em que figuram pelo menos uma letra R e pelo menos uma letra C é:
- a)  $32 \times 35 \times 10^4$
  - b)  $3 \times 2 \times 26 \times 10^4$
  - c)  $3 \times 26 \times 10^4$
  - d)  $325 \times 24 \times 23 \times 10^4$
  - e)  $41 \times 6 \times 10^4$
- V2** (PUC-MG) Considerando os elementos do conjunto  $A = \{10, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 91\}$ , quantos números inteiros de cinco algarismos distintos, maiores que 64000, podem ser formados?
- V2** (Cesgranrio) Considere todos os  $n$  números pares positivos, de quatro dígitos distintos, formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4. Então  $n$  é:
- a) 10
  - b) 12
  - c) 16
  - d) 18
  - e) 24