# Capítulo 21 - Análise Combinatória - Métodos de Contagem

Exercícios Respondidos, Básicos, Complementares e Questões de Vestibular



Daniel de Lima Claudino

Referência Bibliográfica

PAIVA, Manoel Rodrigues. Matemática. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2004.

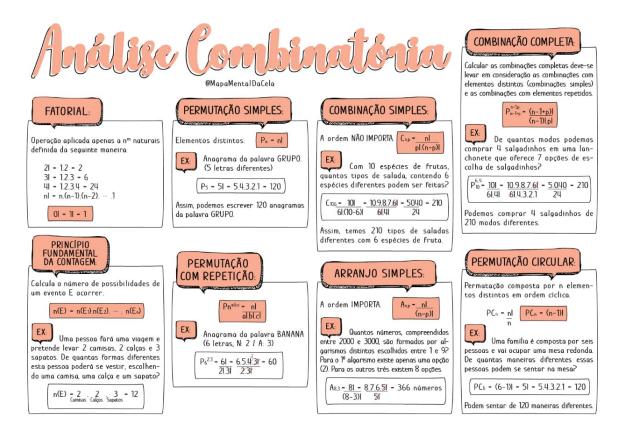
# Sumário

1	Mapa Mental - Análise Combinatória		1
2	Exe	rcícios Resolvidos	1
3	Exe	rcícios Básicos	5
4	Exercícios Complementares		7
5	5 Questões de Vestibulares		
Li	ista	de Figuras	
	1	Mapa Mental - Análise Combinatória	1
	2	[Questão R6, pág.158] - Os elementos dos subconjuntos do conjunto A	4
	3	[Questão B1, pág.159] - Esquema das opções de transporte de A para C, passando	
		por B	5

## Lista de Tabelas

## 1 Mapa Mental - Análise Combinatória

Figura 1: Mapa Mental - Análise Combinatória



Fonte:Site Infinittus - Conhecimento nas medidas exatas

#### 2 Exercícios Resolvidos

- **R1** Uma montadora de automóveis apresenta um carro em **quatro modelos** diferentes e em **cinco cores** diferentes. Um consumidor que quiser arquirir esse veículo terá quantas opções de escolha ?
  - ① **O que contar?:** Quantas opções de escolha de veículo o consumidor terá?
  - ② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.
  - ③ **Experimento 1:** Escolher uma das opções de modelo.  $n_1$  possui 5 resultados possíveis.
  - **Experimento 2:** Escolher uma das opções de cor.  $n_2$  possui 4 resultados possíveis.
  - **S Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento composto 1 e 2, nessa ordem, tem  $n_1 \times n_2$  resultados possíveis, ou seja,  $5 \times 4 = 20$  opções de escolha.
  - **©** Conclusão: existem 20 opções de escolha de veículos para o consumidor.

- **R2** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos  $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$ ?
  - ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos dados.
  - ② Restrições do(s) Experimento(s): Nenhuma.
  - ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do **experimento 1**,  $n_1$  possui n(A) resultados possíveis, ou seja,  $n_1 = n(A) = 5$ .
  - **Experimento 2:**  $E_2$  = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_2$  o número de resultados possíveis do **experimento 2**,  $n_2$  possui n(A) resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja,  $n_2 = n(A) = 5$ .
  - ⑤ Experimento 2:  $E_3$  = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do **experimento 2**,  $n_3$  possui n(A) resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja,  $n_3 = n(A) = 5$ .
  - **© Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $5 \times 5 \times 5 = 125$  resultados possíveis.
  - Conclusão: Podemos formar 125 números naturais de três algarismos com os números dados.
- **R3** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos  $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$ ?
  - ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
  - ② Restrições do(s) Experimento(s): Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
  - ③ **Experimento 1:**  $E_1$  = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do **experimento 1**,  $n_1$  possui n(A) resultados possíveis, ou seja,  $n_1 = n(A) = 5$ .
  - **Experimento 2:**  $E_2$  = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_2$  o número de resultados possíveis do **experimento 2**,  $n_2$  possui n(A) 1 resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, ou seja,  $n_2 = n(A) 1 = 5 1 = 4$ .
  - **Experimento 3:**  $E_3$  = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo  $n_3$  o número de resultados possíveis do **experimento 3**,  $n_3$  possui n(A) 2 resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no **experimento 1** e outro no **experimento 2**, ou seja,  $n_2 = n(A) 2 = 5 2 = 3$ .
  - **© Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $5 \times 4 \times 3 = 60$  resultados possíveis.
  - Conclusão: Podemos formar 60 números naturais de três algarismos distintos com os números dados.

- **R4** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos  $A = \{0, 1, 2, 6, 8\}$ ?
  - ① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.
  - 2 Restrições do(s) Experimento(s):
    - a) Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.
    - b) A posição da **centena** não pode conter o número zero (0), pois, nesse caso, o número natural formado não terá três algarismos, e sim dois.
  - ③ Experimento 1:  $E_1$  = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento. Lembrando que o zero não pode ser excolhido. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do experimento 1,  $n_1$  possui n(A) resultados possíveis, ou seja,  $n_1 = n(A) - 1 = 4$ .
  - Experimento 2: E<sub>2</sub> = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
    Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e (2) para casa das dezenas o zero pode ser escolhido.
    Sendo n<sub>2</sub> o número de resultados possíveis do experimento 2, n<sub>2</sub> possui n(A) 1 resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1 e o zero pode ser escolhido, ou seja, n<sub>2</sub> = n(A) 1 = 5 1 = 4.
  - ⑤ Experimento 3: E<sub>2</sub> = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
    Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e das dezenas e (2) para casa das unidades o zero pode ser escolhido.
    Sendo n<sub>2</sub> o número de resultados possíveis do experimento 2, n<sub>2</sub> possui n(A) 2 resultados possíveis, pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, outro algarismo no experimento 2 e o zero pode ser escolhido, ou seja, n<sub>2</sub> = n(A) 2 = 5 2 = 3.
  - **© Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3$  ou  $4 \times 4 \times 3 = 48$  resultados possíveis.
  - Conclusão: Podemos formar 48 números naturais de três algarismos distintos com os números dados.
- **R5** Quantos divisores naturais possui o número 72?
  - ① **Que contar?** Quantos divisores naturais possui o número 72.
  - ② Restrições do(s) Experimento(s): Nenhum.
  - 3 Fatoramos o número 72.

Fatoração do número 72

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$2^4 \cdot 3^2$

**④** A partir da fatoração realizada no item 3, podemos construir uma lista de divisores do número 72. Qualquer número que pode ser escrito através do produto  $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$ , com  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $y \in \{0, 1, 2\}$ , é um divisor de 72. Ou seja, os divisores são:

$$D(72) = \{2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^1, 2^0 \times 3^2, 2^1 \times 3^0, 2^1 \times 3^1, 2^1 \times 3^2, 2^2 \times 3^0, 2^2 \times 3^1, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^0, 2^3 \times 3^1, 2^3 \times 3^2\}$$
 ou 
$$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Um outra forma, mais genérica e rápida, de constatar que 72 possui 12 divisores é descobrir de quantas maneiras, no produto  $2^{\{0...3\}} \times 3^{\{0...2\}}$ , com  $x \in \{0,1,2,3\}$  e  $y \in \{0,1,2\}$ , eu posso preencher o expoente do 2 e o expoente do 3.

Percebe-se que, tal qual respondemos nas questões anteriores, pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos dois experimentos:  $E_1$  = Preencher o expoente do 2 e  $E_2$  = Preencher o expoente do 3. Sendo  $n_1$  o número de resultados possíveis do experimento  $E_1$  e  $n_2$  o número de resultados possíveis do experimento  $E_2$ , temos que pelo PFC, o experimento composto  $E_1$  e  $E_2$ , nessa ordem, apresenta  $n_1 \times n_2$  resultados possíveis, ou seja  $4 \times 3 = 12$  números (divisores).

© Conclusão: O número 72 possui 12 divisores naturais

**R6** Quantos subconjuntos possui o conjunto  $A = \{a, b, c, d\}$ ?

Figura 2: [Questão R6, pág.158] - Os elementos dos subconjuntos do conjunto A

$$\mathsf{A} = \{ \mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}, \mathsf{d} \}_{\frac{Presente}{r_{Simi}} \frac{Presente}{r_{Nad}} \frac{Presente}{r$$

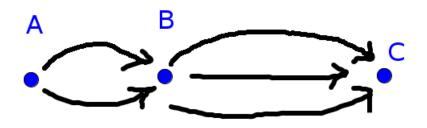
Fonte: Autor

- ① **Que contar?:** Quantos subconjuntos possui o conjunto A.
- ② Restrições do(s) Experimento(s): Nenhum.
- 3 Experimento: trata-se de um experimento composto de vários experimentos, conforme explicitamos abaixo.
  - ①  $E_1$  Escolher se o  $\mathbf{1}^{\mathbf{0}}$  elemento do conjunto de A, "a", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_1) = 2$  resultados possíveis (presente ou não presente).
  - ②  $E_1$  Escolher se o **2º** elemento do conjunto de A, "b", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_2) = 2$  resultados possíveis (presente ou não presente)
  - ③  $E_1$  Escolher se o  $\mathbf{3}^{\mathbf{0}}$  elemento do conjunto de A, "c", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_3)=2$  resultados possíveis (presente ou não presente)
  - ①  $E_1$  Escolher se o **4º** elemento do conjunto de A, "d", será ou não escolhido. Esse experimento possui  $n(E_4) = 2$  resultados possíveis (presente ou não presente)
- **@ Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente,  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  e  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possuem, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  ou  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  resultados possíveis.
- © Conclusão: Podemos formar 16 subconjuntos de A, incluindo o conjunto vazio.

#### 3 Exercícios Básicos

**B1** Duas linhas de ônibus vão de uma cidade A para uma cidade B e três linhas vão da cidade B para uma cidade C. De quantos modos diferentes um usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B?

Figura 3: [Questão B1, pág.159] - Esquema das opções de transporte de A para C, passando por B



Fonte: Autor

- ① Experimento 1:  $E_1$  = Escolher uma das duas linhas de ônibus de A para B. Esse experimento possui  $n(E_1) = 2$  resultados possíveis.
- ② Experimento 2:  $E_2$  = Escolher uma das três linhas de ônibus de B para C. Esse experimento possui  $n(E_2) = 3$  resultados possíveis.
- ③ Cálculo: Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1 e 2 apresentam, respectivamente,  $n_1$  e  $n_2$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1 e 2 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2$  ou  $2 \times 3 = 6$  resultados possíveis.
- Conclusão: O usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B, de 6 formas diferentes.
- **B2** Quantos números naturais **de quatro algarismos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
  - ① Experimento 1:  $E_1$  = Escolher o algarismo da unidade de milhar dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_1) = 7$  resultados possíveis.
  - ② Experimento 2:  $E_2$  = Escolher o algarismo da centena dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_2) = 7$  resultados possíveis.
  - ③ Experimento 3:  $E_3$  = Escolher o algarismo da dezena dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_3) = 7$  resultados possíveis.
  - **Experimento 4:**  $E_4$  = Escolher o algarismo da **unidade** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_4) = 7$  resultados possíveis.
  - ⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  ou  $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$  resultados possíveis.
  - © **Conclusão:** 2.401 números naturais de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
- **B3** Quantos números naturais de **quatro algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

- ① **Restrição do(s) Experimento(s):** Os algarismos dos números naturais formados **devem ser distintos**.
- ② Experimento 1:  $E_1$  = Escolher o algarismo da unidade de milhar dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_1) = 7$  resultados possíveis.
- ③ Experimento 2:  $E_2$  = Escolher o algarismo da centena dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento  $1(E_1)$ . Esse experimento possui  $n(E_2) = 7 1 = 6$  resultados possíveis.
- **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o algarismo da **dezena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido nos experimentos 1 e 2 ( $E_1$  e  $E_2$ ). Esse experimento possui  $n(E_3) = 7 2 = 5$  resultados possíveis.
- ⑤ Experimento 4:  $E_4$  = Escolher o algarismo da unidade dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido nos experimentos 1, 2 e 3 ( $E_1$  e  $E_2$  e  $E_3$ ). Esse experimento possui  $n(E_4) = 7 3 = 4$  resultados possíveis.
- **©** Cálculo: Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3$  e  $n_4$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$  ou  $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$  resultados possíveis.
- © **Conclusão:** 840 números naturais de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.
- **B4** Quantos números naturais de **cinco algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos  $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ?
  - ① **Dados para o Problema:** O número de elementos de A é dado pela expressão: n(A) = 8
  - ② Restrição do(s) Experimento(s):
    - a) Os algarismos dos números naturais formados devem ser distintos;
    - b) A escolha do algarismo da **dezena de milhar** não pode ser zero, pois, nesse caso, o número natural formado não terá **cinco algarismos**.
  - ③ Experimento 1:  $E_1$  = Escolher o algarismo da dezena de milhar, exceto o zero, dentre os algarismos dados. Esse experimento possui  $n(E_1) = n(A) 1 = 8 1 = 7$  resultados possíveis.
  - **Experimento 2:**  $E_2$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento  $1(E_2)$  e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_2) = n(A) 1 = 8 1 = 7$  resultados possíveis.
  - **Experimento 3:**  $E_3$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 e 2 ( $E_1$  e  $E_2$ ) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_3) = n(A) 2 = 8 2 = 6$  resultados possíveis.
  - **Experimento 4:**  $E_4$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1, 2 e 3 ( $E_1$  e  $E_2$  e  $E_3$ ) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_4) = n(A) 3 = 8 3 = 5$  resultados possíveis.
  - **Experimento 5:**  $E_5$  = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1, 2, 3 e 4 ( $E_1$  e  $E_2$  e  $E_3$  e  $E_4$ ) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui  $n(E_5) = n(A) 4 = 8 4 = 4$  resultados possíveis.

- © Cálculo: Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3, 4 e 5 apresentam, respectivamente,  $n_1, n_2, n_3, n_4$  e  $n_5$  resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3, 4 e 5 possui, nessa ordem,  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5$  ou  $7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 5880$  resultados possíveis.
- **® Conclusão:** 5880 números naturais de cinco algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
- **B5** Quantos números pares e positivos de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?
- **B6** Quatro linhas de ónibus unem a cidade A à cidade B e três linhas unem a cidade B à cidade C. Um usuário vai viajar de A para C passando por B e vai voltar para A, passando novamente por B. De quantos modos diferentes esse usuário poderá escolher as linhas, se na volta ele não puder usar a linha que usou na ida?
- **B7** Oito atletas participam de uma corrida. Serão premiados apenas os três primeiros lugares. De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos?
- **B8** Uma prova é constituída por dez testes do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um candidato poderá responder aos dez testes, não deixando nenhum sem resposta e assinalando apenas uma alternativa em cada um?
- **B9** Quantos números de telefone de seis dígitos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que os três primeiros dígitos sejam distintos?
- **B10** Uma placa de automóvel é formada por três letras seguidas de quatro algarismos, por exemplo: "BNP 0339". Quantas placas podem ser formadas com pelo menos um algarismo não-nulo, dispondo-se das 26 letras do alfabeto e dos dez algarismos do sistema decimal? (Incluímos as letras Y, W e K.)
- **B11** Qual o número de divisores naturais de  $n-2^4 \times 3^3 \times 5$ ?
- **B12** Qual o número de divisores naturais de n = 504?

### 4 Exercícios Complementares

- C1 Quantas funções bijetoras têm domínio  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e contradomínio  $B = \{5, 6, 7, 8\}$ ?
- C2 Quantas funções injetoras podem ser definidas em  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  com imagens em  $B = \{a, b, c, d, e, f\}$ ?
- C3 Quantos subconjuntos tem o conjunto  $A = \{a, b, c, d, e\}$ ?
- C4 O número  $n = 2^x \times 3^4 \times 5^2$ , com  $x \in \mathbb{N}$ , possui sessenta divisores naturais. Determine x.
- C5 Quamos números naturais pares de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
- **C6** Quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?
- C7 Quantos números naturais maiores do que 400 de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?
- **C8** Quantos números naturais maMres do que 400 e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

## 5 Questões de Vestibulares

- **V1** (UFRS) Dum ponto A a um ponto B existem cinco caminhos; de B a um terceiro ponto C existem seis caminhos, e de C a um quarto ponto D existem também seis caminhos. Quantos caminhos existem para ir do ponto A ao ponto D, passando por B e C?
  - a) 17
  - b) 30
  - c) 180
  - d) 680
  - e) 4080
- **V2** (FGV-SP) Antes de 1990 as placas de automóveis eram constituídas de duas leuas seguidas de quarto algarismos. Quantas placas desse tipo, diferentes, podem ser formadas com as vogais do afabeto e algarismos pares?
  - a) 400
  - b) 31250
  - c) 7812
  - d) 15625
  - e) n.d.a.
- **V2** (Vunesp) Os jomais noticiaram que, a partir de 1990, o código de placas dos automóveis particulares seda constituído por três letras seguidas de quatro algarismos, admitindo-se repetições. Usando-se 26 letras e dez algarismos, o maior número possível de placas desse tipo em que figuram pelo menos uma lona R e pelo menos uma letra C é:
  - a)  $32 \times 35 \times 10^4$
  - b)  $3 \times 2 \times 26 \times 10^4$
  - c)  $3 \times 26 \times 10^4$
  - d)  $325 \times 24 \times 23 \times 10^4$
  - e)  $41 \times 6 \times 10^4$
- **V2** (PUC-MG) Considerando os elementos do conjunto A = 10, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 91, quantos números inteiros de cinco algarismos distintos, maiores que 64000, podem ser formados?
- **V2** (Cesgranrio) Considere todos os n números pares positivos, de quatro dígitos distintos, formados com os algarismos I, 2, 3 e 4. Então n é:
  - a) 10
  - b) 12
  - c) 16
  - d) 18
  - e) 24