Capítulo 21 - Análise Combinatória - Métodos de Contagem

Exercícios Respondidos, Básicos, Complementares e Questões de Vestibular

Autor: Daniel de Lima Claudino

Referência Bibliográfica

PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática**. Vol. 2. São Paulo: Moderna, 2004.

Dezembro/2022

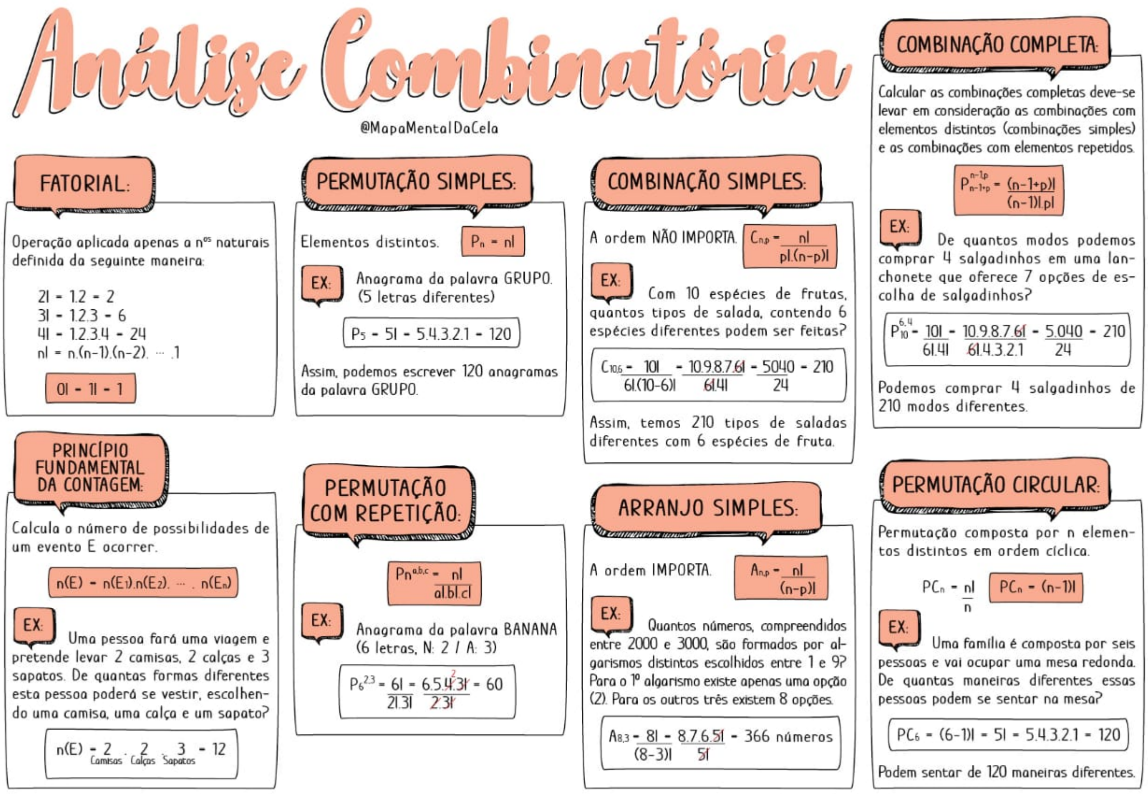
Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

1 Mapa Mental - Análise Combinatória

Figura 1: Mapa Mental - Análise Combinatória



Fonte:Site Infinittus - Conhecimento nas medidas exatas

2 Exercícios Resolvidos

R1 Uma montadora de automóveis apresenta um carro em **quatro modelos** diferentes e em **cinco cores** diferentes. Um consumidor que quiser arquirir esse veículo terá quantas opções de escolha ?

① **O que contar?:** Quantas opções de escolha de veículo o consumidor terá ?

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.

③ **Experimento 1:** Escolher uma das opções de modelo. n_1 possui 5 resultados possíveis.

④ **Experimento 2:** Escolher uma das opções de cor. n_2 possui 4 resultados possíveis.

⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento composto 1 e 2, nessa ordem, tem $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja, $5 \times 4 = 20$ opções de escolha.

⑥ **Conclusão:** existem 20 opções de escolha de veículos para o consumidor.

R2 Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?

① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos podem ser formados com os algarismos dados.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhuma.

③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.

④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A)$ resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_2 = n(A) = 5$.

⑤ **Experimento 2:** E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_3 possui $n(A)$ resultados possíveis, já que nenhuma restrição existe para realizarmos o experimento, ou seja, $n_3 = n(A) = 5$.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 5 \times 5 = 125$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **125 números naturais de três algarismos** com os números dados.

R3 Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{1, 2, 6, 8, 9\}$?

① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.

③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) = 5$.

④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados. Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 1$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, ou seja, $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$.

⑤ **Experimento 3:** E_3 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados. Sendo n_3 o número de resultados possíveis do **experimento 3**, n_3 possui $n(A) - 2$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no **experimento 1** e outro no **experimento 2**, ou seja, $n_2 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $5 \times 4 \times 3 = 60$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **60 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

R4 Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{0, 1, 2, 6, 8\}$?

① **O que contar?:** Quantos números naturais de três algarismos **distintos** podem ser formados com os algarismos dados.

② **Restrições do(s) Experimento(s):**

a) Os números escolhidos em cada experimento devem ser distintos.

b) A posição da **centena** não pode conter o número zero (0), pois, nesse caso, o número natural formado não terá três algarismos, e sim dois.

③ **Experimento 1:** E_1 = Preencher a posição das centenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que o zero não pode ser excolhido. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do **experimento 1**, n_1 possui $n(A)$ resultados possíveis, ou seja, $n_1 = n(A) - 1 = 4$.

④ **Experimento 2:** E_2 = Preencher a posição das dezenas com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e (2) para casa das dezenas o zero pode ser escolhido.
Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 1$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1 e o zero pode ser escolhido, ou seja, $n_2 = n(A) - 1 = 5 - 1 = 4$.

⑤ **Experimento 3:** E_2 = Preencher a posição das unidades com um dos algarismos dados, observando as duas restrições apontadas do experimento.
Lembrando que: (1) Já foi escolhido o algarismo das centenas e das dezenas e (2) para casa das unidades o zero pode ser escolhido.
Sendo n_2 o número de resultados possíveis do **experimento 2**, n_2 possui $n(A) - 2$ resultados possíveis,pois um dos algarismos já foi escolhido no experimento 1, outro algarismo no experimento 2 e o zero pode ser escolhido, ou seja, $n_2 = n(A) - 2 = 5 - 2 = 3$.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $4 \times 4 \times 3 = 48$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **48 números naturais de três algarismos distintos** com os números dados.

R5 Quantos divisores naturais possui o número 72?

① **O que contar?** Quantos divisores naturais possui o número 72.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.

③ Fatoramos o número 72.

Fatoração do número 72

72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	$2^4 \cdot 3^2$

④ A partir da fatoração realizada no item 3, podemos construir uma lista de divisores do número 72. Qualquer número que pode ser escrito através do produto $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$, com $x \in \{0,1,2,3\}$ e $y \in \{0,1,2\}$, é um divisor de 72. Ou seja, os divisores são:

$$D(72) = \{2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^0, 2^0 \times 3^1, 2^0 \times 3^2, 2^1 \times 3^0, 2^1 \times 3^1, 2^1 \times 3^2, 2^2 \times 3^0, 2^2 \times 3^1, 2^2 \times 3^2, 2^3 \times 3^0, 2^3 \times 3^1, 2^3 \times 3^2\}$$

ou

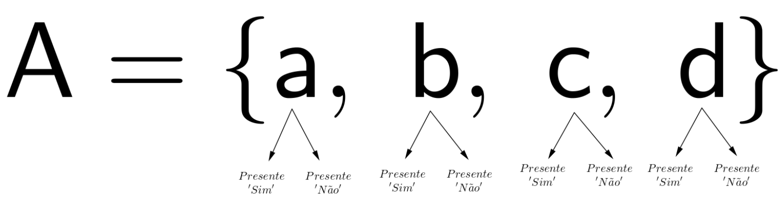
$$D(72) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$$

Um outra forma, mais genérica e rápida, de constatar que 72 possui 12 divisores é descobrir de quantas maneiras, no produto $2^{\{0..3\}} \times 3^{\{0..2\}}$, com $x \in \{0,1,2,3\}$ e $y \in \{0,1,2\}$, eu posso preencher o expoente do 2 e o expoente do 3.
Percebe-se que, tal qual respondemos nas questões anteriores, pelo princípio fundamental da contagem (PFC), temos dois experimentos: $E_1 =$ Preencher o expoente do 2 e $E_2 =$ Preencher o expoente do 3. Sendo n_1 o número de resultados possíveis do experimento E_1 e n_2 o número de resultados possíveis do experimento E_2, temos que pelo PFC, o experimento composto E_1 e E_2, nessa ordem, apresenta $n_1 \times n_2$ resultados possíveis, ou seja $4 \times 3 = 12$ números (divisores).

⑦ **Conclusão:** O número 72 possui **12 divisores naturais**.

R6 Quantos subconjuntos possui o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$?

Figura 2: [Questão R6, pág.158] - Os elementos dos subconjuntos do conjunto A



Fonte: Autor

① **O que contar?:** Quantos subconjuntos possui o conjunto A.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Nenhum.

③ **Experimento:** trata-se de um experimento composto de vários experimentos, conforme explicitamos abaixo.

  ① E_1 Escolher se o **1º** elemento do conjunto de A, "a", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_1) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente).

  ② E_1 Escolher se o **2º** elemento do conjunto de A, "b", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_2) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)

  ③ E_1 Escolher se o **3º** elemento do conjunto de A, "c", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_3) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)

  ④ E_1 Escolher se o **4º** elemento do conjunto de A, "d", será ou não escolhido. Esse experimento possui $n(E_4) = 2$ resultados possíveis (presente ou não presente)

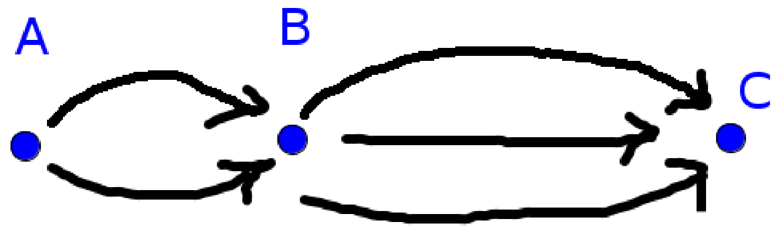
④ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente, n_1, n_2, n_3 e n_4 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ ou $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Podemos formar **16 subconjuntos de A, incluindo o conjunto vazio**.

3 Exercícios Básicos

B1 Duas linhas de ônibus vão de uma cidade A para uma cidade B e três linhas vão da cidade B para uma cidade C. De quantos modos diferentes um usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B ?

Figura 3: [Questão B1, pág.159] - Esquema das opções de transporte de A para C, passando por B



Fonte: Autor

① **Experimento 1:** E_1 = Escolher uma das duas linhas de ônibus de A para B. Esse experimento possui $n(E_1) = 2$ resultados possíveis.

② **Experimento 2:** E_2 = Escolher uma das três linhas de ônibus de B para C. Esse experimento possui $n(E_2) = 3$ resultados possíveis.

③ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1 e 2 apresentam, respectivamente, n_1 e n_2 resultados possíveis, logo o experimento composto 1 e 2 possui, nessa ordem, $n_1 \times n_2$ ou $2 \times 3 = 6$ resultados possíveis.

④ **Conclusão:** O usuário dessas linhas pode ir de A para C, passando por B, de **6 formas diferentes**.

B2 Quantos números naturais **de quatro algarismos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

① **Experimento 1:** E_1 = Escolher o algarismo da **unidade de milhar** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui $n(E_1) = 7$ resultados possíveis.

② **Experimento 2:** E_2 = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui $n(E_2) = 7$ resultados possíveis.

③ **Experimento 3:** E_3 = Escolher o algarismo da **dezena** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui $n(E_3) = 7$ resultados possíveis.

④ **Experimento 4:** E_4 = Escolher o algarismo da **unidade** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui $n(E_4) = 7$ resultados possíveis.

⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente, n_1, n_2, n_3 e n_4 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ ou $7 \times 7 \times 7 \times 7 = 2401$ resultados possíveis.

⑥ **Conclusão: 2.401 números naturais de quatro algarismos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

B3 Quantos números naturais de **quatro algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

① **Restrição do(s) Experimento(s):** Os algarismos dos números naturais formados **devem ser distintos**.

② **Experimento 1:** E_1 = Escolher o algarismo da **unidade de milhar** dentre os algarismos dados. Esse experimento possui $n(E_1) = 7$ resultados possíveis.

③ **Experimento 2:** E_2 = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento $1(E_1)$. Esse experimento possui $n(E_2) = 7 - 1 = 6$ resultados possíveis.

④ **Experimento 3:** E_3 = Escolher o algarismo da **dezena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido nos experimentos 1 e 2 (E_1 e E_2). Esse experimento possui $n(E_3) = 7 - 2 = 5$ resultados possíveis.

⑤ **Experimento 4:** E_4 = Escolher o algarismo da **unidade** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido nos experimentos 1, 2 e 3 (E_1 e E_2 e E_3). Esse experimento possui $n(E_4) = 7 - 3 = 4$ resultados possíveis.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente, n_1, n_2, n_3 e n_4 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ ou $7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão: 840 números naturais de quatro algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

B4 Quantos números naturais de **cinco algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos $A = \{0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?

① **Dados para o Problema:** O número de elementos de A é dado pela expressão: $n(A) = 8$.

② **Restrições do(s) Experimento(s):**

a) Os algarismos dos números naturais formados **devem ser distintos**;
b) A escolha do algarismo da **dezena de milhar** não pode ser zero, pois, nesse caso, o número natural formado não terá **cinco algarismos**.

③ **Experimento 1:** E_1 = Escolher o algarismo da **dezena de milhar**, exceto o zero, dentre os algarismos dados. Esse experimento possui $n(E_1) = n(A) - 1 = 8 - 1 = 7$ resultados possíveis.

④ **Experimento 2:** E_2 = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento $1(E_2)$ e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui $n(E_2) = n(A) - 1 = 8 - 1 = 7$ resultados possíveis.

④ **Experimento 3:** E_3 = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 e 2 (E_1 e E_2) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui $n(E_3) = n(A) - 2 = 8 - 2 = 6$ resultados possíveis.

④ **Experimento 4:** E_4 = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1, 2 e 3 (E_1 e E_2 e E_3) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui $n(E_4) = n(A) - 3 = 8 - 3 = 5$ resultados possíveis.

④ **Experimento 5:** E_5 = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1, 2, 3 e 4 (E_1 e E_2 e E_3 e E_4) e considerando que o zero pode ser escolhido. Esse experimento possui $n(E_5) = n(A) - 4 = 8 - 4 = 4$ resultados possíveis.

⑦ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3, 4 e 5 apresentam, respectivamente, n_1, n_2, n_3, n_4 e n_5 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3, 4 e 5 possui, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4 \times n_5$ ou $7 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 5880$ resultados possíveis.

⑧ **Conclusão: 5880 números naturais de cinco algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

B5 Quantos números pares e positivos de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9?

① **Dados para o problema:** O número de elementos de A é dado pela expressão: $n(A) = 7$.

② **Restrições do(s) Experimento(s):**

a) Devemos formar números naturais de três algarismos **distintos**;

b) Os algarismos das unidades deve ser par, dentre os algarismos disponíveis, ou seja, $4, 6$ ou 8;

③ **Experimento 1:** E_1 = Escolher o algarismo das **unidades**, dentre os algarismos dados de forma que o número seja par, ou seja, escolher entre $4, 6$ ou 8. Esse experimento possui $n(E_1) = 3$ resultados possíveis.

④ **Experimento 2:** E_2 = Escolher o algarismo da **dezenas** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento $1(E_1)$ e considerando a restrição "a"(algarismos distintos). Esse experimento possui $n(E_2) = n(A) - 1 = 6$ resultados possíveis.

⑤ **Experimento 3:** E_3 = Escolher o algarismo da **centena** dentre os algarismos dados, sem contar o que foi escolhido no experimento 1 e 2 (E_1 e E_2) e considerando a restrição "a"(algarismos distintos). Esse experimento possui $n(E_2) = n(A) - 2 = 5$ resultados possíveis.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possui, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $3 \times 6 \times 5 = 90$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão: 90 números pares positivos de três algarismos distintos** podem ser formados com os algarismos 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

B6 Quatro linhas de ónibus unem a cidade A à cidade B e três linhas unem a cidade B à cidade C. Um usuário vai viajar de A para C passando por B e vai voltar para A, passando novamente por B. De quantos modos diferentes esse usuário poderá escolher as linhas, se na volta ele não puder usar a linha que usou na ida?

① **Restrições do(s) Experimento(s):**

a) Ir de A para C, passando por B;

b) Voltar de C para A, passando por B e **não utilizando os ônibus usados na IDA de A para C**;

② **Experimento 1:** E_1 = Escolher o ônibus para ir da A para B. Esse experimento possui $n(E_1) = 4$ resultados possíveis.

③ **Experimento 2:** E_2 = Escolher o ônibus para ir da B para C. Esse experimento possui $n(E_2) = 3$ resultados possíveis.

④ **Experimento 3:** E_3 = Escolher o ônibus para ir da C para B, **não podendo escolher o que foi utilizado no experimento 2** (E_2). Esse experimento possui $n(E_3) = 3 - 1 = 2$ resultados possíveis.

⑤ **Experimento 4:** E_4 = Escolher o ônibus para ir da B para A, **não podendo escolher o que foi utilizado no experimento 1** (E_1). Esse experimento possui $n(E_4) = 4 - 1 = 3$ resultados possíveis.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3 e 4 apresentam, respectivamente, n_1, n_2, n_3 e n_4 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3 e 4 possui, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ ou $4 \times 3 \times 2 \times 3 = 72$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Para fazer a viagem de IDA e VOLTA conforme especificado no enunciado da questão, existem **72 possibilidade distintas**.

B7 Oito atletas participam de uma corrida. Serão premiados apenas os três primeiros lugares. De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos?

① **Dados para o problema:**

a) O número de atletas que participam da corrida é dado pela expressão: $n(A) = 8$;
b) Serão premiados apenas os **três primeiros lugares**;

② **O que se dejesa saber?**

a) De quantas maneiras diferentes os prêmios podem ser distribuídos?

③ **Experimento 1:** E_1 = Premiar o corredor que terminou em **primeiro** lugar. Esse experimento possui $n(E_1) = n(A) = 8$ resultados possíveis.

④ **Experimento 2:** E_2 = Premiar o corredor que terminou em **segundo lugar**. Esse experimento possui $n(E_2) = n(A) - 1 = 8 - 1 = 7$ resultados possíveis já que desconsideramos o corredor que terminou em 1º lugar.

⑤ **Experimento 3:** E_3 = Premiar o corredor que terminou em **terceiro lugar**. Esse experimento possui $n(E_3) = n(A) - 2 = 8$ resultados possíveis já que desconsideramos o corredor que terminou em 1º e em 2º lugar.

⑥ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2 e 3 apresentam, respectivamente, n_1, n_2 e n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2 e 3 possui, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3$ ou $8 \times 7 \times 6 = 336$ resultados possíveis.

⑦ **Conclusão:** Os prêmios podem ser distribuídos de **336 maneiras diferentes**.

B8 Uma prova é constituída por dez testes do tipo "verdadeiro ou falso". De quantas maneiras diferentes um candidato poderá responder aos dez testes, não deixando nenhum sem resposta e assinalando apenas uma alternativa em cada um?

① **O que contar?:** Tratam-se de dez experimentos, um para cada questão, que consistem em escolher a ALTERNATIVA "V"OU "F", havendo, portanto, dois resultados possíveis para cada experimento.

② **Restrições do(s) Experimento(s):** Ao responder as questões, o candidato:

a) Não pode deixar nenhuma questão sem resposta
b) Deve asinalar apenas uma alternativa em cada questão ("V"ou "F")

③ **Experimentos:** Em síntese, tratam-se de dez experimentos, um para cada questão, que consistem em escolher a alternativa "V"OU "F", ou seja $n(A_n) = 2$ para cada experimento.

④ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), os experimentos 1, 2, 3, ..., 10 apresentam, respectivamente, n_1, n_2, n_3, ..., n_{10} resultados possíveis, logo o experimento composto 1, 2, 3, ..., 10 possuem, nessa ordem, $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ ... \ \times n_4$ ou $2 \times 2 \times 2 \times \ ... \ \times 2 = 2^{10} = 1024$ resultados possíveis.

⑤ **Conclusão:** A prova poderá ser respondida de **1024 maneiras distintas**.

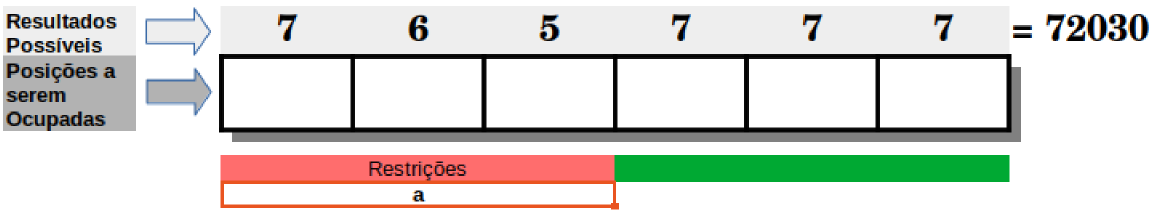
B9 Quantos números de telefone de seis dígitos podem ser formados com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, de modo que os três primeiros dígitos sejam distintos?

① **O que contar?:** Tratam-se de 6 experimentos, escolher cada um dos algarismos de telefone a ser formado, respeitando as restrições abaixo.

② **Restrições do(s) Experimento(s):**

a) Os três primeiros algarismos do número de telefone devem ser distintos.

Figura 4: [Questão B9, pág.159] - Esquema - Quantos números podemos formar?



Fonte: Autor

③ **Experimentos:** Em síntese, tratam-se de seis experimentos: Escolher um algarismo dentre os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

④ **Cálculo:**

a) Atuamos primeiro nos três primeiros algarismos que possuem restrições. A primeira posição pode ser ocupada por 7 dos disgitos disponíveis. A segunda possição poderá ser ocupada por 6 algarismos$(7 - 1)$, a terceira por 5 $(7 - 2)$, já que eles devem ser distintos (restrição "a").

a) As demais posições do número de telefone não possuem restrição. Elas podem receber quaisquer dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, disponíveis.

⑤ Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), as posições podem ser preenchidas conforme a figura 4.

⑥ **Conclusão:** Podem ser formados **72.030 telefones diferentes** obedecendo os critérios do enunciado da questão.

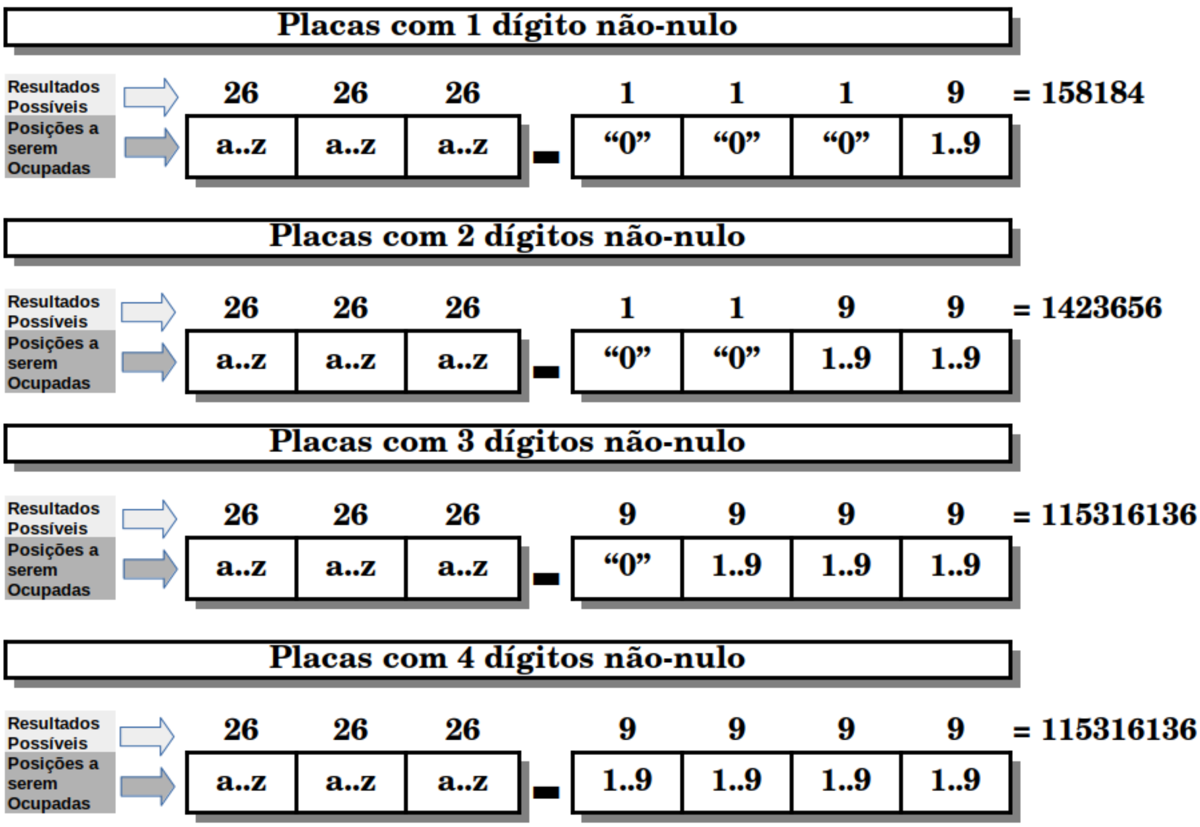
B10 Uma placa de automóvel é formada por três letras seguidas de quatro algarismos, por exemplo: "BNP - 0339". Quantas placas podem ser formadas com pelo menos um algarismo não-nulo, dispondo-se das 26 letras do alfabeto e dos dez algarismos do sistema decimal? (Incluímos as letras Y, W e K.)

① **O que contar?:** Tratam-se de 2 experimentos. E_1 = Escolher três as letras para a placa do automóvel. E_2 = Escolher 4 números para a placa, respeitando as restrições do enunciado da questão.

② **Restrições do(s) Experimento(s):**

a) A parte numérica da placa deve conter, **pelo menos** um algarismo não-nulo (1,2,3,4,5,6,7,8 e 9), ou seja, existem três situações distintas que devem ser tratadas: A parte numérica da placa deve conter três algarismos zero, dois algarismos zero ou um algarismo zero, **mas não os quatro algarismos zero**.

Figura 5: [Questão B10, pág.159] - Formar placas com **pelo menos um** dígito não-nulo.



Fonte: Autor

B11 Qual o número de divisores naturais de $n = 2^4 \times 3^3 \times 5$?

① **O que contar?** A partir da fatoração $2^4 \times 3^3 \times 5 = 2160$, podemos construir uma lista de divisores possíveis. Qualquer número que pode ser escrito através do produto $2^x \times 3^y \times 5^z$, com $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $y \in \{0, 1, 2, 3\}$ e $z \in \{0, 1\}$, é um divisor de 2160, ou seja, se dividirmos o número 2160 por $2^x \times 3^y \times 5^z$ ocorrerá divisão exata (com resto zero). Em resumo, qualquer número $b, b \in \mathbb{N}$, será divisor de um número $a, a \in \mathbb{N}$, se na divisão $\frac{a}{b}$, o resto for zero.

② **Experimento 1:** E_1 = Escolher o expoente para o **fator 2** em $2^x \times 3^y \times 5^z$. Com $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, esse experimento possui $n(E_1) = n_1 = 5$ resultados possíveis.

③ **Experimento 2:** E_2 = Escolher o expoente para o **fator 3** em $2^x \times 3^y \times 5^z$. Com $y \in \{0, 1, 2, 3\}$, esse experimento possui $n(E_2) = n_2 = 4$ resultados possíveis.

④ **Experimento 3:** E_3 = Escolher o expoente para o **fator 5** em $2^x \times 3^y \times 5^z$. Com $z \in \{0, 1\}$, esse experimento possui $n(E_3) = n_3 = 2$ resultados possíveis.

⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento E_1 possui n_1 resultados possíveis, o experimento E_2 possui n_2 resultados possíveis e o experimento E_3 possui n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto E_1, E_2 e E_3, nessa ordem, apresenta $n_1 \times n_2 \times n_3$ resultados possíveis, ou seja, $5 \times 4 \times 2 = 40$ resultados possíveis.

⑥ **Conclusão:** Existem 40 divisores naturais de $2^4 \times 3^3 \times 5 = 2160$.

B12 Qual o número de divisores naturais de n = 504 ?

① **O que contar?** A partir da fatoração do número $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$, podemos construir uma lista de divisores possíveis. Qualquer número que pode ser escrito através do produto $2^x \times 3^y \times 5^z$, com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$ e $z \in \{0, 1\}$, é um divisor de 504, ou seja, se dividirmos o número 504 por $2^x \times 3^y \times 7^z$ ocorrerá divisão exata (com resto zero). Em resumo, qualquer número $b, b \in \mathbb{N}$, será divisor de um número $a, a \in \mathbb{N}$, se na divisão $\frac{a}{b}$, o resto for zero.

② **Experimento 1:** E_1 = Escolher o expoente para o **fator 2** em $2^x \times 3^y \times 5^z$. Com $x \in \{0, 1, 2, 3\}$, esse experimento possui $n(E_1) = n_1 = 4$ resultados possíveis.

③ **Experimento 2:** E_2 = Escolher o expoente para o **fator 3** em $2^x \times 3^y \times 5^z$. Com $y \in \{0, 1, 2\}$, esse experimento possui $n(E_2) = n_2 = 3$ resultados possíveis.

④ **Experimento 3:** E_3 = Escolher o expoente para o **fator 7** em $2^x \times 3^y \times 5^z$. Com $z \in \{0, 1\}$, esse experimento possui $n(E_3) = n_3 = 2$ resultados possíveis.

⑤ **Cálculo:** Pelo princípio fundamental da contagem (PFC), o experimento E_1 possui n_1 resultados possíveis, o experimento E_2 possui n_2 resultados possíveis e o experimento E_3 possui n_3 resultados possíveis, logo o experimento composto E_1, E_2 e E_3, nessa ordem, apresenta $n_1 \times n_2 \times n_3$ resultados possíveis, ou seja, $4 \times 3 \times 2 = 24$ resultados possíveis.

⑥ **Conclusão:** Existem 24 divisores naturais de $2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$.

4 Exercícios Complementares

C1 Quantas funções bijetoras têm domínio $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e contradomínio $B = \{5, 6, 7, 8\}$?

A função bijetora, também chamada bijetiva, é um tipo de função matemática que relaciona cada elemento do domínio A, a um elemento diferente no contradomínio B.

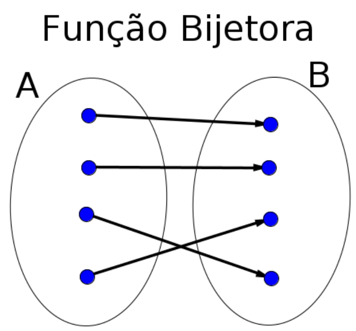
Além disto, todo elemento do contradomínio B é imagem de A.

$$CD(f) = Im(f)$$

Todo elemento de B recebe uma única flecha de A. Não sobre elementos no contradomínio B (correspondência biunívoca).

Importante notar que eles apresentam o mesmo número de elementos.

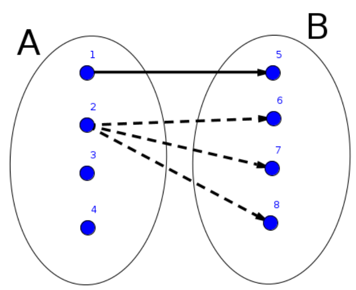
Figura 6: [Questão C1, pág.160 1/2] - O que é uma função bijetora ?



Fonte: Autor

Para saber quantas funções bijetoras poderemos formar, considere a figura 7

Figura 7: [Questão C1, pág.160 2/2] - Diagrama de Venn do enunciado da questão



Fonte: Autor

① **O que contar?** Tratam-se de 4 experimentos. Para cada elemento do domínio $\{1, 2, 3, 4\}$, deve-se escolher, dentre os elementos disponíveis do contradomínio $\{5, 6, 7, 8\}$, outro elemento de forma que a função seja bijetora (restrição).

② **Restrição:** Para cada elemento do domínio $\{1, 2, 3, 4\}$, deve-se escolher, dentre os elementos disponíveis do contradomínio $\{5, 6, 7, 8\}$, outro elemento de forma que a função seja bijetora (restrição).

③ **Experimento 1:** E_1 = Para o primeiro elemento do domínio "1"em A, devemos escolher um elemento do contradomínio em B de forma a respeitar a restrição do enununciado da questão.

C2 Quantas funções injetoras podem ser definidas em $A = \{1, 2, 3, 4\}$ com imagens em $B = \{a, b, c, d, e, f\}$?

C3 Quantos subconjuntos tem o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$?

C4 O número $n = 2^x \times 3^4 \times 5^2$, com $x \in \mathbb{N}$, possui sessenta divisores naturais. Determine x.

C5 Quamos números naturais pares de quatro algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

C6 Quantos números naturais pares de quatro algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5?

C7 Quantos números naturais maiores do que 400 de três algarismos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

C8 Quantos números naturais maiores do que 400 e de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 4, 5 e 6?

5 Questões de Vestibulares

V1 (UFRS) Dum ponto A a um ponto B existem cinco caminhos; de B a um terceiro ponto C existem seis caminhos, e de C a um quarto ponto D existem também seis caminhos. Quantos caminhos existem para ir do ponto A ao ponto D, passando por B e C?

a) 17
b) 30
c) 180
d) 680
e) 4080

V2 (FGV-SP) Antes de 1990 as placas de automóveis eram constituídas de duas leuas seguidas de quarto algarismos. Quantas placas desse tipo, diferentes, podem ser formadas com as vogais do afabeto e algarismos pares?

a) 400
b) 31250
c) 7812
d) 15625
e) n.d.a.

V2 (Vunesp) Os jomais noticiaram que, a partir de 1990, o código de placas dos automóveis particulares seda constituído por três letras seguidas de quatro algarismos, admitindo-se repetições. Usando-se 26 letras e dez algarismos, o maior número possível de placas desse tipo em que figuram pelo menos uma lona R e pelo menos uma letra C é:

a) $32 \times 35 \times 10^4$
b) $3 \times 2 \times 26 \times 10^4$
c) $3 \times 26 \times 10^4$

d) $325 \times 24 \times 23 \times 10^4$

e) $41 \times 6 \times 10^4$

V2 (PUC-MG) Considerando os elementos do conjunto A = 10, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 91, quantos números inteiros de cinco algarismos distintos, maiores que 64000, podem ser formados?

V2 (Cesgranrio) Considere todos os n números pares positivos, de quatro dígitos distintos, formados com os algarismos I, 2, 3 e 4. Então n é:

a) 10

b) 12

c) 16

d) 18

e) 24