Функции нескольких переменных
Основные утверждения

Математический анализ, 3 семестр

ММФ НГУ

2019 год

Данный документ содержит основные теоремы и утверждения по функциям нескольких переменных и многообразиям.

Выражаю свою благодарность Джозефу Лунгу за помощь при написании некоторых разделов.

Сбоев Данил

Оглавление

Глава 1

Нормированные векторные пространства

Определение 1.1. $\mathcal{V}$ – в. п-во над $\mathbb{R}$, если

$$\forall x, y \in \mathcal{V}\ x + y = y + x, \tag{ВП.1}$$
$$\forall x, y, z \in \mathcal{V}\ (x + y) + z = x + (y + z), \tag{ВП.2}$$
$$\exists \vec{0}\ \forall x \in \mathcal{V}\ \vec{0} + x = x + \vec{0} = x, \tag{ВП.3}$$
$$\forall x \in \mathcal{V}\ \exists -x \in \mathcal{V}:\ x + (-x) = \vec{0}, \tag{ВП.4}$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \tag{ВП.5}$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \tag{ВП.6}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in \mathcal{V}\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \tag{ВП.7}$$
$$\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ 1 \cdot x = x. \tag{ВП.8}$$

Определение 1.2. $\|\cdot\|: \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ – норма, если

$$\forall x \in \mathcal{V}\ \|x\| \geq 0, \tag{Н.1}$$
$$\forall x, y \in \mathcal{V}\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{Н.2}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \tag{Н.3}$$
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \tag{Н.4}$$

Пример 1.1. *Примеры норм:*

1. *В пространстве* $\mathbb{R}^n$ *введем норму* $\|x\|_p = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ *и* $\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{|x_i|\}$*;*

2. *В пространстве* $C[a,b]$ *норма* $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]}\{|f(x)|\}$ *и* $\|f\|_{C[a,b]} = \int\limits_a^b |f|dx$*.*

3. *В пространстве ограниченных последовательностей* $\{x_n\}$ *определим норму* $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$, *где* x *– последовательность* $\{x_n\}$.

Замечание 1.1. *На нормированном в. п-ве можно определить метрику следующим образом:*

$$\rho(x,y) = \|x-y\|.$$

И это действительно будет метрикой.

Определение 1.3. Банахово пространство – полное (относительно метрики из предыдущего замечания) нормированное векторное пространство.

Определение 1.4. $(\cdot,\cdot) : \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

$$\forall x\in\mathcal{V}\ (x,x)\geq 0, \tag{СП.1}$$
$$\forall x,y\in\mathcal{V}\ (x,y)=(y,x), \tag{СП.2}$$
$$\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}\ \forall x,y,z\in\mathcal{V}\ (\alpha x+\beta y,z)=(\alpha x,z)+(\beta y,z), \tag{СП.3}$$
$$(x,x)=0\Leftrightarrow x=\vec{0}. \tag{СП.4}$$

Определение 1.5. Если $\mathcal{V}$ – в. пр-во и $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, то $(\mathcal{V},(\cdot,\cdot))$ – евклидово пространство.

Утверждение 1.2. *В евклидовом пространстве можно ввести норму следующим образом:*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Определение 1.6. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ билипшицево эквивалентны, если

$$\exists C>0:\ \frac{1}{C}\|x\|_1\leq\|x\|_2\leq C\|x\|_1,\quad \forall x\in\mathcal{V}$$

Теорема 1.3. *Все нормы в* $\mathbb{R}^n$ *билипшицево эквивалентны.*

Доказательство. Докажем, что любая норма f билипшицево эквивалентна $\|\cdot\|_2$.

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) \leq \sum_{k=1}^n |x_k| f(e_k) \underset{\text{Н-во К-Б-Ш}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n f(e_k)^2\right)^{\frac{1}{2}} = C_1\|x\|_2.$$

Обратим неравенство.

$$f(x) = f\left(\frac{\|x\|_2}{\|x\|_2}f\right) = \|x\|_2 f\left(\frac{1}{\|x\|_2}f\right) \geq \|x\|_2 \underset{\|\xi\|_2=1}{f(\xi)} = \|x\|_2 C_2.$$

□

Следствие 1.4. *Последовательность точек*

$$v^m = \begin{pmatrix} v_1^m \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix}$$

сходится к точке

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

при $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда $v_i^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.7. Введем понятие отображения $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

где $x \in U$ и U – область в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 1.5.

$$\lim_{x\to a} F(x) = u \Leftrightarrow \lim_{\eta\to a_i} f_i(\eta) = u_i \quad \textit{для всех } i = 1, \ldots, m,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Определение 2.1. Функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + o(\|h\|),$$

где A_k – константы и $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$.

Аналогичное определение:

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}\left\langle h \right\rangle + o(\|h\|),$$

где $\mathcal{L}$ – линейное отображение.

Нетрудно понять, что $\mathcal{L}\left\langle h \right\rangle = df(a)\left\langle h \right\rangle$ и

$$A_k = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=a} \quad \text{для всех } k = 1, \ldots, n.$$

Определение 2.2. Пусть $\vec{v}$ – некоторый фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Производная функции f в точке $a \in \mathcal{D}$ по направлению $\vec{v}$ определяется следующим образом:

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Если положить $\varphi(t) = f(a + t\vec{v})$, то

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \frac{d\varphi(0)}{dt}.$$

Если $\vec{v} = \vec{e_i}$, то

$$\partial_{\vec{e_i}} f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(a).$$

Утверждение 2.1. *Если функция f дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, то для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ существует $\partial_{\vec{v}} f(a)$, которую можно вычислить следующими способами:*

$$\begin{aligned}
&\partial_{\vec{v}} f(a) = \left((f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a))^T, (v_1, \ldots, v_n)^T\right), \\
&\partial_{\vec{v}} f(a) = (gradf(a), \vec{v})
\end{aligned}$$

Лемма 2.2. *Пусть функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, имеет в $\mathcal{D}$ ограниченные константой K частные производные, тогда*

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \leq nK\|b - a\|_2$$

или

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \leq K\|b - a\|_1.$$

Замечание 2.3. *Далее полагается, что множество определения функций – выпуклая область, если не оговорено другое.*

Теорема 2.4. *Пусть все частные производные функции $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ существуют в $\mathcal{D}$ и непрерывны в точке $a \in \mathcal{D}$, тогда f дифференцируема в точке a.*

Теорема 2.5. *Пусть $f, g \in D(a)$.*

Тогда $f + g, fg \in D(a)$

$$\begin{aligned}
&d(f+g)(a) = df(a) + dg(a), \\
&d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a).
\end{aligned}$$

Определение 2.3. Вектор-функция (векторное поле) $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, если

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\langle h \rangle + o(\|h\|).$$

Определение 2.4. Введем понятие матрицы Якоби отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, в точке $a \in U$:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{x=a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

и понятие Якобиана отображения в точке $a \in U$:

$$\mathcal{J}_f(a) = \left|\frac{\partial f(a)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}\right|.$$

Теорема 2.6. *Если функция $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, и функция $g\colon V \to \mathbb{R}^k$, где $V \subset R^m$, дифференцируема в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке $a \in U$ и*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot df(a).$$

Следствие 2.7. *Пусть отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо в точке $a \in U$ и имеет обратное отображение f^{-1}.*

Тогда $f^{-1} \in D(f(a))$ и

$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$

2.1 Производные высших порядков

Определение 2.5. Функция f k-раз дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если любая n-ая частная производная, где $n = 1,\ldots,k-1$, дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$.

Замечание 2.8. *Используют также понятие гладкости функции f.*

Функция f класса $\mathcal{C}^r$ в точке $a \in \mathcal{D}$, если каждая ее k-ая производная, где $k = 1,\ldots,r$, непрерывна.

По достаточному условию дифференцируемости, функция $f \in D^r$.

Теорема 2.9. *Пусть $u = f(x,y) \in D^2(M_0)$, $M_0 = (x_0,y_0) \in U$ и M_0 – внутренняя точка U. Тогда*

$$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y \partial x}.$$

Доказательство. По условию функция u дважды дифференцируема, следовательно, u'_x, u'_y определены в некоторой окрестности точки M_0 и сами являются дифференцируемыми.

Рассмотрим функцию одной переменной

$$\Phi(h) = f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+h) + f(x_0, y_0)$$

и $\varphi(x) = f(x, y_0+h) - f(x, y_0)$. Тогда нетрудно проверить, что

$$\Delta\varphi(x_0) = \varphi(x_0+h) - \varphi(x_0) = \Phi(h). \tag{2.1}$$

Сама функция $\varphi(x)$ является дифференцируемой в некоторой окрестности x_0, так как исходная функция $f(x, y)$ является дифференцируемой (здесь можно совсем формализовать эти рассуждения и воспользоваться существованием производной u'_x и определением дифференцирумой функции одной переменной).

Мы можем применить теорему Лагранжа и получить

$$\Delta\varphi(x_0) = \varphi'(x_0 + \theta h)h = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0))h, \tag{2.2}$$

где $\theta \in [0, 1]$.

Преобразуем выражение (2.2) далее:

$$\begin{aligned}
&(f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0))\, h = \\
&\quad = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0) + f'_x(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0))h = \\
&\qquad = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0))h - (f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0))h.
\end{aligned}$$

Рассмотрим $f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0)$. Так как функция f'_x дифференцируема в точке M_0, то

$$f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0, y_0) = f''_{xx}(M_0)\theta h + f''_{yx}(M_0)h + \alpha_1 \cdot \theta h + \beta_1 \cdot h,$$

где $\alpha_1 = o(1)$ и $\beta_1 = o(1)$ при $h \to 0$.

Аналогично рассматриваем $f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0)$.

$$f'_x(x_0 + \theta h, y_0) - f'_x(x_0, y_0) = f''_{xx}(M_0)\theta h + f''_{yx}(M_0) \cdot 0 + \alpha_2 \cdot \theta h,$$

где $\alpha_2 = o(1)$ при $h \to 0$.

Вернемся к равенству (2.1).

$$\begin{aligned}
\Phi = \Delta\varphi = (f''_{xx}(M_0)\theta h + f''_{yx}(M_0)h + \alpha_1 \cdot \theta h + \beta_1 \cdot h)h- \\
- (f''_{xx}(M_0)\theta h + \alpha_2 \cdot \theta h)h = f''_{yx}(M_0)h^2 + \gamma \cdot h^2,
\end{aligned}$$

где $\gamma = o(1)$ при $h \to 0$.

Теперь проделаем точно такие же действия для функции одной переменной

$$\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y).$$

То есть, если в $\varphi(x)$ мы фиксировали вторую переменную ($y_0 + h$ и y_0), то сейчас мы фиксируем первую.

Получим следующее:

$$\Phi = f''_{xy}(M_0) + \xi \cdot h^2 = f''_{yx}(M_0)h^2 + \gamma \cdot h^2 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f''_{xy}(M_0) = f''_{xy}(M_0).$$

$\square$

Теорема 2.10. *Пусть* $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ *в некоторой окрестности точки* $M_0 = (x_0, y_0)$ *имеет частные производные* f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} *и при этом вторые производные непрерывны в* M_0. *Тогда*
$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Доказательство. Пусть Φ, φ, ψ те же самые функции, что в доказательстве теоремы 2.9.

Тогда
$$\Phi = \Delta\varphi = \varphi'(x_0 + \theta h)h = (f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0))h.$$

В последнем выражении можно воспользоваться теоремой Лагранжа (по переменной y) и получить:
$$\Phi = f''_{yx}(x_0 + \theta h, y_0 + \xi h)h^2,$$
где $\theta, \xi \in [0, 1]$.

Аналогично, рассматривая функцию ψ получаем
$$\Phi = \Delta\psi = f''_{xy}(x_0 + \eta h, y_0 + \zeta h)h^2,$$
где $\eta, \zeta \in [0, 1]$.

При $h \to 0$ имеем
$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$
□

Следствие 2.11. *Пусть* $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ *–* m*-раз дифференцируемая функция в точке* M_0, *при этом* $M_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. *Тогда в точке* M_0 *любые смешанные производные равны, то есть*
$$\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\pi(1)} \ldots \partial x_{\pi(k)}} = \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\sigma(1)} \ldots \partial x_{\sigma(k)}},$$
где $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_k$ *такие, что* $\pi \neq \sigma$.

Доказательство. Достаточно заметить, что любую смешанную производную, меняя порядок дифференцирования по двум «соседним» переменным, можно перевести в смешанную производную с другим порядком дифференцирования. А возможность совершения таких действий обеспечивается теоремой 2.9:
$$\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\pi(1)} \ldots (\partial x_{\pi(i)} \partial x_{\pi(i+1)}) \ldots \partial x_{\pi(k)}} = \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\pi(1)} \ldots (\partial x_{\pi(i+1)} \partial x_{\pi(i)}) \ldots \partial x_{\pi(k)}}$$
□

2.2 Формула Тейлора

Определение 2.6. Определим понятие мультииндекса.

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Так же определим следующие операции:

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!,$$

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

Пусть $h \in \mathcal{V} : h = (h_1, \ldots, h_n)^T$, то $h^\alpha = \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i}$.

Удобство мультииндекса заключается в компактности обозначений. Далее под

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$$

будем подразумевать

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \ldots \left(\frac{\partial^{\alpha_n} f}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) \ldots \right).$$

Теорема 2.12.

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n \\ \alpha_1 + \ldots \alpha_n = k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}.$$

Пример 2.1. *Обозначим за $\mathfrak{D}$ следующее отображение:*

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где h_i – i-ая компонента фиксированного вектора $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$.

Если функция $f \in D^k$, то

$$\mathfrak{D}^k f = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f =$$

$$= \left(\sum_{\substack{\alpha_i \geq 0,\ i=1,\dots,n \\ \alpha_1+\dots\alpha_n=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\dots\alpha_n!} \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}\right) f =$$

$$= \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} h^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) f.$$

Теорема 2.13 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Пусть $f \in D^k(a)$, где $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.*

Тогда

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha\right) + o(\|h\|^k),$$

где $o(\|h\|^k) \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по k.

База индукции. $k = 1$ – определение дифференцируемой функции.

Шаг индукции. $k \Rightarrow k+1$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(h) = f(a+h) - \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha\right).$$

Ее производная по h_j выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \psi(h)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{|\beta|=i} \frac{1}{\beta!} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h^\beta\right)$$

При этом верно разложение $\alpha = \beta + \delta_{ij}$, где $\delta_{ij} = (0, \dots, \underset{j}{1}, \dots, 0)$ и $|\beta| = k-1$.

По предположению индукции, $\dfrac{\partial \psi(h)}{\partial x_j} = o(\|h\|^{k-1})$.

По лемме о приращении, имеем

$$|\psi(h) - \psi(0)\| \leq o(\|h\|^{k-1})\|h\|.$$

Следовательно, $\psi(h) - \psi(0) = o(\|h\|^k)$, значит,

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k}\left(\sum_{|\alpha|=i}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha}h^\alpha\right) + o(\|h\|^k)$$

$\square$

Определение 2.7. $\sum\limits_{i=0}^{k}\left(\sum\limits_{|\alpha|=i}\dfrac{1}{\alpha!}\dfrac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha}h^\alpha\right)$ – полином Тейлора порядка k в точке $a \in U$ функции $f \in D^k(a)$.

Лемма 2.14. *$h^\alpha = o(\|h\|^k)$ при $\|h\| \to 0$ тогда и только тогда, когда $k < |\alpha|$.*

Теорема 2.15 (Единственность полинома Тейлора)**.** *Пусть существует полином*

$$P = \sum_{i=0}^{k}\sum_{|\alpha|=i}P_\alpha h^\alpha$$

такой, что

$$f(a+h) - P = o(\|h\|^k)$$

при $\|h\| \to 0$.

Тогда P – полином Тейлора.

Следствие 2.16. *Пусть $f \in D^k(a)$ и*

$$\frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} = 0$$

при $|\alpha| \leq k$.

Тогда $f(a+h) = o(\|h\|^k)$ при $\|h\| \to 0$.

2.3 Дифференциалы высших порядков

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ – дифференцируемая функция. Тогда дифференциал функции f имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Обозначим за δ приращение.

Определение 2.8. Значение $\delta(df)$ при $\delta x_i = dx_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ называется вторым дифференциалом функции f и обозначается $d^2 f$.

$$d^2 f = \delta \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i, \\ i=1,\ldots,n}}$$

Определение 2.9. k-кратный дифференциал функции f определяется следующим образом:

$$\delta(d^{k-1} f)\big|_{\substack{\delta x_i = dx_i, \\ i=1,\ldots,n}} = d^k f.$$

Теорема 2.17. *Пусть функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ дважды дифференцируема, тогда ее второй дифференциал имеет вид*

1. *Если $x_1, \ldots, x_n$ – независимые переменные, то*

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i.$$

2. *Если $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ дважды дифференцируемые функции, и $f(x_1, \ldots, x_n)$ – дважды дифференцируемая функция, тогда*

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \xi_j \partial \xi_i} d\xi_j d\xi_i,$$

в более компактной форме:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k.$$

Замечание 2.18. *Второй дифференциал функции f от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$*

$$d^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right)^2$$

является симметричной квадратичной формой.

Утверждение 2.19. *Пусть функция $f \colon U \to \mathbb{R}$ k раз дифференцируема в точке $a \in U$. Тогда*

$$d^k f(a) = \sum_{|\alpha| = k} \frac{k!}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a) (dx)^\alpha, \quad \text{где } (dx)^\alpha = (dx_1)^{\alpha_1} \cdots (dx_n)^{\alpha_n}$$

Следствие 2.20. *Пусть функция* $f\colon U \to \mathbb{R}$ k *раз дифференцируема в точке* $a \in U$*. Тогда*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)\langle h\rangle + \frac{1}{2!}d^2f(a)\langle h\rangle^2 + \dots + \frac{1}{k!}d^kf(a)\langle h\rangle^k + o(\|h\|^k)$$

2.4 Экстремумы функций нескольких переменных

2.5 Теорема о неявной функции

Для функции $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, то есть запись $(a,b) \in U$ означает, что $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Определим $F_a\colon U_a \to \mathbb{R}^m$, где $U_a = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (a,y) \in U\}$, то есть $F_a(y) = F(a,y)$ и $F_b\colon U_b \to \mathbb{R}^m$ аналогично $(F_b(x) = F(x,b))$.

Теорема 2.21 (О неявной функции)**.** *Пусть* $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, *где* $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $U \in \mathcal{N}[(a,b)]$ *– некоторая окрестность точки* (a,b).

Если выполнены следующие условия:

1. $F(a,b) = 0$,
2. $F \in \mathcal{C}^1[(a,b)]$, *то есть* F *непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* (a,b),
3. $dF_a(b)$ *– невырожденный оператор* $(\det(dF_a(b)) \neq 0)$,

то найдутся окрестности $V \in \mathcal{N}(a)$, $V \subset \mathbb{R}^n$, *и* $W \in \mathcal{N}(b)$, $W \subset \mathbb{R}^m$, *и функция* $f\colon V \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{D}(V)$, *что*

1. $F(x,y) = 0 \iff y = f(x)$ *для* $x \in V, y \in W$,
2. $df(x) = -(dF_x(y))^{-1}dF_y(x)$, *где* $y = f(x)$.

Доказательство. Обозначим $A = dF_a(b)$ и определим отображение $G_x(y) = y - A^{-1}F(x,y)$, $G_x\colon U_x \to \mathbb{R}^m$, где $U_x = \{y \mid (x,y) \in U\}$. Проверим, что $G_x(y) = y \Leftrightarrow F(x,y) = 0$.

$$G_x(y) = y - A^{-1}F(x,y) = y \Leftrightarrow A^{-1}F(x,y) = 0 \Leftrightarrow F(x,y) = 0. \tag{2.3}$$

Но подождите, а что за странная функция $G_x(y)$? Попробуем понять, как можно не заучивать это все дело. Смотрим «за руками».

Пусть функция $y = y(x)$ такая, что $F(x, y(x)) \equiv 0$. Тогда

$$Ay(x) \equiv Ay(x) \Leftrightarrow Ay(x) - F(x, y(x)) \equiv Ay(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A^{-1}(Ay(x) - F(x, y(x))) \equiv y(x) \text{ (так как } A \text{ – невырожден)} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y - A^{-1}F(x, y) \equiv y(x).$$

Теперь чуть понятнее откуда эта $G_x(y)$ берется, я надеюсь. Продолжаем.

Мы хотим доказать, что найдутся $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ такие, что при $\|x - a\| \le \delta_1$ отображение $G_x(y)$ является сжимающим на $\|y - b\| \le \delta_2$.

Возьмем дифференциал от $G_x(y)$.

$$dG_x(y) = d(y - A^{-1}F(x, y)) = E - A^{-1}dF(x, y).$$

Из непрерывности производных F следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta_1, \delta_2 > 0$ такие, что $dF_x(y) = dF_a(b) + B_x(y)$, где $\|B_x(y)\| < \varepsilon$ при $\|x - a\|_1 \le \delta_1$ и $\|y - b\|_1 \le \delta_2$. Как это понимать? Если мы достаточно близки к точке (a, b), то, по непрерывности, $dF_x(y)$ «приближается» к $dF_a(b)$. Тогда

$$\|dG_x(y)\| = \|E - A^{-1}dF(x, y)\| = \|A^{-1}(A - dF(x, y))\| \le$$
$$\le \|A^{-1}\|\|A - dF(x, y)\| = \|A^{-1}\|\|B_x(y)\|.$$

Можно выбрать $\varepsilon > 0$ (от которого строится оценка на норму $B_x(y)$) так, что все частные производные $G_x(y)$ не превышали $\frac{1}{2}$ при $\|x - a\|_1 \le \delta_1$ и $\|y - b\|_1 \le \delta_2$.

По лемме о приращении имеем, что $\|G_x(y) - G_x(z)\|_1 \le \frac{1}{2}\|y - z\|_1$ для всех $\|y - b\|_1 \le \delta_2$ и $\|z - b\|_1 \le \delta_2$

Кроме того, мы имеем

$$\|G_x(y) - b\|_1 = \|G_x(y) - G_x(b) + G_x(b) - G_a(b)\|_1 \le$$
$$\le \|G_x(y) - G_x(b)\|_1 + \|G_x(b) - G_a(b)\|_1 \le$$
$$\le \frac{1}{2}\|y - b\|_1 + \sup \|G_x(b) - G_a(b)\|_1 = \frac{1}{2}\|y - b\|_1 + r$$

При этом

$$r = \sup \|G_x(b) - G_a(b)\|_1 = \sup \|y - A^{-1}F(x, b) - y + A^{-1}F(a, b)\|_1 =$$
$$= \sup \|A^{-1}(F(x, b) - F(a, b))\|_1 \le \|A^{-1}\|\|B_x(y)\|$$

при $\|x - a\|_1 \le \delta_1$.

А теперь мы найдем столь малый $\delta_2 > 0$, что $r < \frac{\delta_2}{2}$. Обозначим эту окрестность точки a за V. Тогда каждая функция G_x при $x \in V$ переводит множество $W = \{y \mid \|y - b\|_1 \le \delta_2\}$ в себя.

Очень важно то, что знак неравенства в окрестностях – нестрогий, иначе бы наша окрестность точки y была неполной, так как она не компактна, и мы бы не смогли применить теорему о неподвижной точке.

Мы проверили, что G_x является сжимающим отображением на W, тогда, по теореме о неподвижной точке, для каждого $x \in V$ найдется единственная точка $z_x \in W$ такая, что $G_x(z) = z_x$. Если кому-то непонятно, почему неподвижная точка – то, что нам требуется, то посмотрите (2.3).

Определим $f(x) = z_x$. Этим мы доказали существование неявной функции.

Докажем непрерывность неявной функции.

Рассмотрим произвольную точку $(x_0, y_0) \in V \times W$ $(x_0 \in V, y_0 \in W)$. Так как $dF_a(b)$ – невырожденный оператор из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$, то его определитель не равен нулю, а определитель $\left(\det A = \sum\limits_{\pi \in \mathbb{S}_m} \operatorname{sgn}(\pi) \prod\limits_{i=1}^{m} a_{i,\pi(i)}\right)$ – непрерывная функция от элементов матрицы, то в некоторой окрестности точки (a, b) оператор $dF_{x_0}(y_0)$ так же является невырожденным, так как, по условию 2) теоремы, $F \in \mathcal{C}^1[(x_0, y_0)]$.

Можем считать, что $V \times W$ входит в эту окрестность (если не входит, то уменьшим δ_1, δ_2).

Итого, можем сделать так:

$$\begin{aligned} F(x,y) - F(x_0,y_0) &= dF(x_0,y_0)\langle x-x_0, y-y_0\rangle + o(\|x-x_0\|_1 + \|y-y_0\|_1) = \\ &= dF_{x_0}(y_0)\langle y-y_0\rangle + dF_{y_0}(x_0)\langle x-x_0\rangle + \alpha(x,y)(\|x-x_0\|_1 + \|y-y_0\|_1), \end{aligned}$$

где $\alpha(x,y) \to 0$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$.

Пусть $y = f(x)$ и $y_0 = f(x_0)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(x,f(x)) - F(x_0,f(x_0)) = 0 = dF_{x_0}(y_0)\langle f(x) - f(x_0)\rangle &+ \\ + dF_{y_0}(x_0)\langle x-x_0\rangle + \alpha(x,y)(\|x-x_0\|_1 &+ \|f(x)-f(x_0)\|_1). \end{aligned}$$

Применим обратную матрицу $(dF_{x_0}(y_0))^{-1}$ к равенству.

$$\begin{aligned} 0 = \langle y-y_0\rangle &+ (dF_{x_0}(y_0))^{-1} dF_{y_0}(x_0)\langle x-x_0\rangle + \\ &+ (dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x,y)(\|x-x_0\|_1 + \|f(x)-f(x_0)\|_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) - f(x_0) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1} dF_{y_0}(x_0)\langle x-x_0\rangle - \\ &- (dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x,y)(\|x-x_0\|_1 + \|f(x)-f(x_0)\|_1). \end{aligned}$$

Оценим $f(x) - f(x_0)$ по норме (мы же хотим доказать непрерывность f).

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(x_0)\|_1 = \| - (dF_{x_0}(y_0))^{-1} dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0\rangle - \\ - (dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x,y)(\|x-x_0\|_1 + \|f(x) - f(x_0)\|_1)\|_1 \leq \\ \leq \|(dF_{x_0}(y_0))^{-1} dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0\rangle\|_1 + \\ + \|(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x,y)(\|x-x_0\|_1 + \|f(x) - f(x_0)\|_1)\|_1 \leq \\ \leq \|(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\|_1 \|dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0\rangle\|_1 + \\ + \|(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\|_1\|\alpha(x,y)\|_1(\|x-x_0\|_1 + \|f(x) - f(x_0)\|_1)\end{aligned}$$

Так как $\alpha(x,y) \to 0$ при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, то в найдется малая окрестность точки (x_0, y_0) такая, что

$$\|(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\|_1\|\alpha(x,y)\|_1 < \frac{1}{2}$$

и, значит, $\frac{1}{2}\|f(x) - f(x_0)\|_1 < C\|x - x_0\|_1$, то есть функция непрерывна (мы доказали, что функция непрерывна в x_0, но x_0 – произвольная точка V).

Теперь **остается доказать дифференцируемость**. Последний пункт теоремы, а потом ч.т.д., как говорится.

Смотрим внимательно сюда.

$$\begin{aligned}f(x) - f(x_0) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1} dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0\rangle - \\ - (dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x,y)(\|x-x_0\|_1 + \|f(x) - f(x_0)\|_1)\end{aligned}$$

Положим $\beta(x,y) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x,y)\|f(x) - f(x_0)\|_1$, при этом

$$\|\beta(x,y)\|_1 \leq C\|(dF_{x_0}(y_0))^{-1}\|_1\|\alpha(x,y)\|_1\|x - x_0\| \leq K\|x - x_0\|_1$$

.

То есть

$$\begin{aligned}f(x) - f(x_0) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1} dF_{y_0}(x_0)\langle x - x_0\rangle - \\ - (dF_{x_0}(y_0))^{-1}\alpha(x,y)\|x-x_0\|_1 + \beta(x,y).\end{aligned}$$

Функция f дифференцируема и $df(x_0) = -(dF_{x_0}(y_0))^{-1} dF_{y_0}(x_0)$. □

Следствие 2.22 (О гладкости неявной функции)**.** *Если при выполнении условий теоремы о неявной функции потребовать, что бы $F \in \mathcal{C}^r[(a,b)]$, то и неявная функция f будет принадлежать классу $\mathcal{C}^r$ в области определения V.*

Доказательство. Пусть $y = f(x)$ – неявная функция такая, что $F(x, y) = 0$.

База индукции. $r = 1$ – утверждение теоремы о неявной функции.

Шаг индукции. $r \Rightarrow r + 1$.

Предполагается, что $F \in \mathcal{C}^{r+1}[(a, b)]$ и $f \in \mathcal{C}^r[(a)]$.

Покажем рассуждения для второй производной – последующие аналогично, но вычислений больше.

Исходя из формулы дифференциала неявной функции, мы имеем:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Отсюда,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}$$

Продифференцируем по x еще раз.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-1}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^{-2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

Из этого равенства можно выразить $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, которая будет зависеть от второй производной F и $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, которые непрерывны по предположению.

Мы можем продолжать так выражать k-ые производные, где $k \leq r+1$, которые будут зависеть он непрерывных функций, следовательно, сами будут непрерывны. □

Следствие 2.23 (Теорема об обратной функции)**.** *Пусть* $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $U \in \mathcal{N}(b)$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Если верно, что

1. $f \in \mathcal{C}^1(b)$,
2. $df(b)$ *– невырожденный оператор,*

то найдется $V \in \mathcal{N}(f(b))$, $V \subset \mathbb{R}^n$ *в которой определена обратная функция* $f^{-1}\colon V \to U$ *такая, что* $f^{-1} \in \mathcal{D}(V)$ *и* $df^{-1}(x) = (df(y))^{-1}$, *где* $x = f(y)$.

Доказательство. Определим $F\colon \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: $F(x, y) = f(y) - x$. Данная функция удовлетворяет условия теоремы о неявной функции в окрестности точки (a, b), где $b = f(a)$.

Значит, найдется окрестность V точки $f(b)$, и W точки a, и функция $g\colon V \to W$ такая, что $F(x, g(x)) = 0$ для любого $x \in V$. То есть $f(g(x)) = x$, при этом $dg(x) = (df(y))^{-1}$. □

2.6 Диффеоморфизмы

Теорема 2.24 (Теорема о ранге). *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ – некоторая окрестность точки x_0.*

Отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ является $\mathcal{C}^r$-гладким, где $r \geq 1$, и $\operatorname{rank} f(x) = k$ для всех $x \in U$.

Тогда найдутся окрестности $V \subset \mathbb{R}^n$ точки x_0 и $W \subset \mathbb{R}^m$ точки $y_0 = f(x_0)$ и $\mathcal{C}^r$-диффеоморфизмы $\varphi\colon V \to \mathbb{R}^n$ и $\psi\colon W \to \mathbb{R}^m$ такие, что отображение $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ в окрестности $\varphi(V)$ имеет вид

$$\mathbb{R}^n \ni u = (u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n) \overset{h}{\mapsto} (u_1, \ldots, u_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m-k}) = v \in \mathbb{R}^m. \tag{2.4}$$

Доказательство. Мы хотим построить отображение h, которое действовало бы в точности, как указано в 2.4.

Отразим зависимости функций на следующей коммутативной диаграмме:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \supset U & \xrightarrow[f]{} & W \subset \mathbb{R}^m \\ \big\uparrow \varphi^{-1} & & \big\downarrow \psi \\ \mathbb{R}^n \supset \varphi(V) & \xrightarrow[h]{} & \psi(W) \subset \mathbb{R}^m \end{array}$$

Введем следующее обозначение.

$$\begin{aligned} x^1 &= (x_1, \ldots, x_k) & y^1 &= (y_1, \ldots, y_k) \\ x^2 &= (x_{k+1}, \ldots x_n) & y^2 &= (y_{k+1}, \ldots, y_m) \end{aligned}$$

Аналогично будут определяться функции, но там уже размеры «второй составляющей» будут зависеть от контекста.

И тогда фунция $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет представима в следующим виде:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f^1(x^1, x^2) \\ f^2(x^2, x^2) \end{pmatrix}.$$

Можем считать, что невырожденный минор размера $k \times k$ расположен в левом верхнем углу матрицы Якоби отображения f. Рассмотрим матрицу Якоби[1]:

$$\mathcal{J}_f = \begin{pmatrix} \partial_{x^1} f^1 & \partial_{x^2} f^1 \\ \partial_{x^1} f^2 & \partial_{x^2} f^2 \end{pmatrix}$$

[1]Обозначение $\partial_{x^1} f^1$ подразумевает матрицу размера $k \times k$ вида $\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1\ldots k}}$. Аналогично определяются $\partial_{x^2} f^1, \partial_{x^1} f^2, \partial_{x^2} f^2$

Матрица $\partial_{x^1} f^1$ невырожденна. Рассмотрим отображение φ, задаваемое, следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi^1(x^1, x^2) &= f^1(x^1, x^2)\\ \varphi^2(x^1, x^2) &= x^2.\end{aligned}$$

Рассмотрим матрицу Якоби этого отображения.

$$\mathcal{J}_\varphi = \begin{pmatrix} \partial_{x^1} f^1 & \partial_{x^2} f^1 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

Данная матрица невырождена и ее ранг равен n. По теореме о диффеоморфизмах, функция φ – $\mathcal{C}^r$-гладкий диффеоморфизм в некоторой окрестности V точки x_0 (мы пересекаем U и V, чтобы получить итоговую окрестность, которая указана в формулировке) и определено обратное отображение

$$\varphi^{-1} \colon \varphi(V) \to V.$$

Рассмотрим отображение $g \colon \varphi(V) \to f(U)$, определяемую следующим образом: $g = f \circ \varphi^{-1}$. Ранг данного отображения не больше, чем k. При этом

$$\begin{aligned}g^1(u^1, u^2) &= u^1\\ g^2(u^1, u^2) &= g(u^1, u^2),\end{aligned}$$

при этом мы обозначаем вторую «составляющую» функции g за g, так как первая часть – тождественное отображение (надеюсь, это не вызовет путаницы).

Рассмотрим матрицу Якоби отображения g.

$$\mathcal{J}_g = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \partial_{u^1} g & \partial_{u^2} g \end{pmatrix}$$

Из этого получаем, что $\partial_{u^2} g = 0$ (иначе могли бы получить матрицу ранга выше, чем k – противоречие). И можем считать, что $g = g(u^1)$, так как $\partial_{u^2} g = 0$.

Определим отображение ψ следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi^1(y^1, y^2) &= y^1\\ \psi^2(y^1, y^2) &= y^2 - g(y^1).\end{aligned}$$

Опять же рассмотрим матрицу Якоби отображения ψ:

$$\mathcal{J}_\psi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\partial_{y^1} g & E \end{pmatrix}$$

Якобиан ψ равен 1, следовательно, ψ – $\mathcal{C}^r$-гладкий диффеоморфизм в некоторой окрестности W (которую мы опять же пересечем с $f(U)$).

Теперь мы можем составить требуемое отображение $h = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. При этом

$$h^1(u^1, u^2) = \psi^1 \circ f^1 \varphi^{-1} = \psi^1 \circ y^1 = y^1$$
$$h^2(u^1, u^2) = \psi^2 \circ f^2 \circ \varphi^{-1} = \psi^2 \circ g(u^1) = g(u^1) - g(u^1) = 0.$$

$\square$

2.7 Условные экстремумы

Глава 3

Многообразия

3.1 Определения и способы задания многообразий

Определение 3.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерное многообразие без края класса $\mathcal{C}^r$, если Существует диффеоморфизм класса $\mathcal{C}^r$

$$\varphi\colon (-1,1)^n \to \mathbb{R}^n$$

такой, что $\varphi\left((-1,1)^k \times 0^{n-k}\right) = M$.

Определение 3.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерное многообразие с краем класса $\mathcal{C}^r$, если Существует диффеоморфизм класса $\mathcal{C}^r$

$$\varphi\colon (-1,1)^n \to \mathbb{R}^n$$

такой, что $\varphi\left((-1,1)^{k-1} \times [0,1) \times 0^{n-k}\right) = M$.

Определение 3.3. Сужение диффеоморфизма $\varphi\colon (-1,1)^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}\colon (-1,1)^k \to \mathbb{R}^n$$

и $\widetilde{\varphi}(t_1,\ldots,t_k) = \varphi(t_1,\ldots,t_k,\underbrace{0,\ldots,0}_{n-k})$ называется параметризацией элементарного многообразия.

Определение 3.4. $M \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерное многообразие без края (с краем), если

$$\forall x \in M\ \exists U \in \mathcal{N}(x) :\ U \cap M \text{ – элементарное многообразие без края (с краем).}$$

Замечание 3.1. *Дальнейшие факты приводятся для многообразий без края.*

Теорема 3.2. *Если $\forall x \in M$ $\exists U \in \mathcal{N}(x)$ и $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ – $\mathcal{C}^r$ гладкий диффеоморфизм такой, что $F(U \cap M) = F(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{n-k})$.*

Тогда M – k-мерное многообразие.

Теорема 3.3. *$f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $f \in \mathcal{C}^r$ и $\forall a \in U$ $\operatorname{rank} f(a) = k$.*

Тогда $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ – $\mathcal{C}^r$ гладкое $(n-k)$-мерное многообразие.

Следствие 3.4. *Пусть $f(x, y, z) = 0$, $f \in \mathcal{C}^r$ и $df(a) \neq 0$. Тогда*

$$M = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0$$

является $\mathcal{C}^r$ гладким двумерным многообразием в некоторой окрестности точки a.

Теорема 3.5. *Пусть $e\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^k$, отображение класса $\mathcal{C}^r$ и $\operatorname{rank} f = k$ в любой точке U.*

Тогда $y(U)$ – k-мерное $\mathcal{C}^r$ гладкое многообразие.

3.2 Касательные векторы и пространства, нормальные подпространства

3.2.1 Касательные векторы и пространства

Определение 3.5. Пусть $\gamma(t)$– некоторая гладкая параметризированная кривая.

Определим касательный вектор к γ в точке t_0 следующим образом:

$$\dot{\gamma}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Определение 3.6. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ – Касательный вектор к множеству M в точке $a \in M$, если найдется $\varepsilon > 0$ и гладкая кривая $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ такая, что $\gamma(0) = a$, и при этом $\dot{\gamma}(0) = \vec{v}$.

Совокупность всех касательных векторов к множеству M в точке $a \in M$ будем обозначать $T_a(M)$.

Замечание 3.6. *Аффинное подпространство $a + T_a(M)$ называется контингенцией.*

Утверждение 3.7. *Контингенция любого аффинного подпространства $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ в любой его точке совпадает с $\mathcal{A}$.*

Утверждение 3.8. *Пусть M – элементарное k-мерное $\mathcal{C}^r$ гладкое многообразие, то есть $M = \varphi((-1,1)^k \times 0^{n-k})$, где φ – некоторый $\mathcal{C}^r$ гладкий диффеоморфизм, и $a \in (-1,1)^k \times 0^{n-k}$.*

Тогда $T_{\varphi(a)}(M) = d\varphi(A) \left\langle \mathbb{R}^k \times 0^{n-k} \right\rangle$.

Следствие 3.9. *Если M – гладкое k-мерное многообразие, то $T_a(M)$, где $a \in M$ – линейное k-мерное подпространство.*

3.2.2 Нормальное подпространство к многообразию

Определение 3.7. Пусть M – некоторое множество.

Вектор $\vec{w}$ – нормаль к M в точке $a \in M$, если $\forall \vec{v} \in T_a(M)$ верно, что

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Совокупность всех таких нормалей обозначим $N_a(M)$.

Очевидно, что $N_a(M)$ – линейное подпространство.

Определение 3.8. Пусть $f\colon U \to R$, $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, $a \in U$.

Вектор u – градиент функции f в точке a, если для любого v

$$df(a) \langle v \rangle = \langle u, v \rangle$$

Утверждение 3.10. *Пусть $M = \{x \mid f_1(x) = 0, \dots f_{n-k}(x) = 0\}$ – k-мерное $\mathcal{C}^r$ гладкое многообразие.*

И отображение

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_{n-k}(x) \end{pmatrix}$$

имеет постоянный ранг $\operatorname{rank} f = n - k$.

Тогда $\forall a \in M$ векторы $\operatorname{grad} f_1(a), \dots, \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$ – базис $N_a(M)$.

3.3 Карты, атласы

Определение 3.9. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное множество. Картой в $\mathcal{X}$ называется пара (U, h), где U – подмножество в $\mathbb{R}^n$, а h – отображение U, биективно отображающее U на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.10. Две карты (U, h), (V, k) называются пересекающимися, если $V \cap U \neq \varnothing$.

Определение 3.11. Пусть (U, h) и (V, k) – две пересекающиеся карты в $\mathcal{X}$.

Карты (U, h), (V, k) называются согласованными, если они либо не пересекаются, либо

1. оба множества $h(W)$, $k(W)$, где $W = U \cap V$, открыты в $\mathbb{R}^n$;

2. отображение
$$(k|_W) \circ (h|_W)^{-1} : h(W) \to k(W)$$
является диффеоморфизмом класса $\mathcal{C}^r$, где $r \geq 0$.

Определение 3.12. Множество карт $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ называется атласом на $\mathcal{X}$, если

1. любые две карты этого множества согласованы;

2. $$\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathcal{X}.$$

Для любого атласа A обозначим за $A_{\max}$ множество всех карт, согласованных с каждой картой атласа A.

Теорема 3.11. *Множество $A_{\max}$ – атлас.*

Следствие 3.12. *Каждый атлас A содержится в единственном максимальном атласе $A_{\max}$.*

Доказательство. Если A, B – атласы и $A \subset B$, то $B_{\max} \subset A_{\max}$, поэтому $(A_{\max})_{\max} \subset A_{\max}$ и, значит, $(A_{\max})_{\max} = A_{\max}$. Если $A_{\max} \subset B$, то $B_{\max} \subset (A_{\max})_{\max} = A_{\max}$, поэтому $B \subset A_{\max}$.

То есть атлас $A_{\max}$ максимален в частино упорядоченном множестве всех атласов. И если B – произвольный максимальный атлас такой, что $A \subset B$, то $B \subset B_{\max} \subset A_{\max}$ и, значит, $B = A_{\max}$. $\square$

Определение 3.13. Максимальные атласы на $\mathcal{X}$ называются гладкими структурами. Множество $\mathcal{X}$ с заданной на нем гладкой структурой $A_{\max}$ называется гладким многообразием, то есть гладкое многообразие – пара $(\mathcal{X}, A_{\max})$.

По определению два многообразия $(\mathcal{X}, A_{\max})$ и $(\mathcal{Y}, B_{\max})$ совпадают тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и $A_{\max} = B_{\max}$.

Определение 3.14. Два атласа называются эквивалентными, если они содержатся в одном и том же максимальном атласе. Для этого необходимо и достаточно того, что бы для атласов A, B их объединение $A \cup B$ было атласом.

Для задания многообразия достаточно задать произвольный атлас $A \subset A_{\max}$, то есть гладкими многообразиями считать пары $(\mathcal{X}, A)$, где A – произвольный атлас на $\mathcal{X}$.

Два многообразия $(\mathcal{X}, A_{\max})$ и $(\mathcal{Y}, B_{\max})$ одинаковы тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и атласы A, B эквивалентны.

Определение 3.15. Число n – размерность пространства $\mathbb{R}^n$, содержащего образы $h(U)$ носителей карт, называется размерностью многообразия $\mathcal{X}$ и обозначается $\dim \mathcal{X}$.

Определение 3.16. Число r – класс гладкости отображений $(k|_W) \circ (h|_W)^{-1}$ будем называть классом гладкости многообразия $\mathcal{X}$.

Литература

[1] А. В. Грешнов, Лекции по математическому анализу, 3 семестр, ММФ НГУ.

[2] В. Н. Потапов, Электронные лекции по математическому анализу, ММФ НГУ.

[3] С. К. Водопьянов, Дифференциальное исчисление функций многих переменных, ММФ НГУ.

[4] А. М. Красносельский, Конспект лектора, математический анализ, 1 курс, 4 модуль, 2017 год.

[5] И. А. Шведов, Компактный курс математического анализа, часть 2.

[6] Ю. Г. Решетняк, Курс математического анализа.

[7] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1.

[8] У. Рудин, Основы математического анализа.

[9] Ж. Дьедонне, Основы современного анализа.

[10] М. Спивак, Математический анализ на многобразиях.

[11] М. М. Постников, Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.