Функции нескольких переменных
Основные теоремы (без доказательств)

Математический анализ, 3 семестр

ММФ НГУ

2019 год

Оглавление

Глава 1

Нормированные векторные пространства

Определение 1.1. $\mathcal{V}$ – в. п-во над $\mathbb{R}$, если

$$\forall x, y \in \mathcal{V} \; x + y = y + x, \tag{ВП.1}$$
$$\forall x, y, z \in \mathcal{V} \; (x + y) + z = x + (y + z), \tag{ВП.2}$$
$$\exists \vec{0} \; \forall x \in \mathcal{V} \; \vec{0} + x = x + \vec{0} = x, \tag{ВП.3}$$
$$\forall x \in \mathcal{V} \; \exists - x \in \mathcal{V} : \; x + (-x) = \vec{0}, \tag{ВП.4}$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathcal{V} \; (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \tag{ВП.5}$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathcal{V} \; (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \tag{ВП.6}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x, y \in \mathcal{V} \; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \tag{ВП.7}$$
$$\exists 1 \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathcal{V} \; 1 \cdot x = x. \tag{ВП.8}$$

Определение 1.2. $\| \cdot \| \colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ – норма, если

$$\forall x \in \mathcal{V} \; \|x\| \geq 0, \tag{Н.1}$$
$$\forall x, y \in \mathcal{V} \; \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{Н.2}$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathcal{V} \; \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \tag{Н.3}$$
$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \tag{Н.4}$$

Замечание 1.1. *На нормированном в. п-ве можно определить метрику следующим образом:*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

И это действительно будет метрикой.

Определение 1.3. Банахово пространство – полное (относительно метрики из предыдущего замечания) нормированное векторное пространство.

Определение 1.4. $(\cdot,\cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

$$\forall x \in \mathcal{V}\ (x,x) \geq 0, \tag{СП.1}$$
$$\forall x, y \in \mathcal{V}\ (x,y) = (y,x), \tag{СП.2}$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x, y, z \in \mathcal{V}\ (\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z), \tag{СП.3}$$
$$(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \tag{СП.4}$$

Определение 1.5. Если $\mathcal{V}$ – в. пр-во и $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, то $(\mathcal{V}, (\cdot,\cdot))$ – евклидово пространство.

Утверждение 1.2. *В евклидовом пространстве можно ввести норму следующим образом:*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Определение 1.6. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ билипшицево эквивалентны, если

$$\exists C > 0 : \ \frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathcal{V}$$

Теорема 1.3. *Все нормы в $\mathbb{R}^n$ билипшицево эквивалентны.*

Следствие 1.4. *Последовательность точек*

$$v^m = \begin{pmatrix} v_1^m \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix}$$

сходится к точке

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

при $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда $v_i^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.7. Введем понятие отображения $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

где $x \in U$ и U – область в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 1.5.

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(x) \Leftrightarrow \lim_{\eta\to a_i} f_i(\eta) = f(a_i) \quad \textit{для всех } i = 1, \ldots, m.$$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Определение 2.1. Функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + o(\|h\|),$$

где A_k – константы и $h = (h_1, \dots, h_n)^T$.

Аналогичное определение:

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}\left\langle h \right\rangle + o(\|h\|),$$

где $\mathcal{L}$ – линейное отображение.

Нетрудно понять, что $\mathcal{L}\left\langle h \right\rangle = df(a)\left\langle h \right\rangle$ и

$$A_k = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=a} \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n.$$

Определение 2.2. Пусть $\vec{v}$ – некоторый фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Производная функции f в точке $a \in \mathcal{D}$ по направлению $\vec{v}$ определяется следующим образом:

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Если положить $\varphi(t) = f(a + t\vec{v})$, то

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \frac{d\varphi(0)}{dt}.$$

Если $\vec{v} = \vec{e_i}$, то

$$\partial_{\vec{e_i}} f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(a).$$

Утверждение 2.1. *Если функция f дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, то для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ существует $\partial_{\vec{v}} f(a)$, которую можно вычислить следующими способами:*

$$\begin{aligned}
&\partial_{\vec{v}} f(a) = \left((f'_{x_1}(a), \ldots, f'_{x_n}(a))^T, (v_1, \ldots, v_n)^T\right), \\
&\partial_{\vec{v}} f(a) = (grad f(a), \vec{v})
\end{aligned}$$

Лемма 2.2. *Пусть функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, имеет в $\mathcal{D}$ ограниченные константой K частные производные, тогда*

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \le nK\|b - a\|_2$$

или

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \le K\|b - a\|_1.$$

Замечание 2.3. *Далее полагается, что множество определения функций – выпуклая область, если не оговорено другое.*

Теорема 2.4. *Пусть все частные производные функции $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ существуют в $\mathcal{D}$ и непрерывны в точке $a \in \mathcal{D}$, тогда f дифференцируема в точке a.*

Теорема 2.5. *Пусть $f, g \in D(a)$.*

Тогда $f + g, fg \in D(a)$

$$\begin{aligned}
&d(f+g)(a) = df(a) + dg(a), \\
&d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a).
\end{aligned}$$

Определение 2.3. Вектор-функция (векторное поле) $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, если

$$f(a+h) = f(a) + df(a)\langle h \rangle + o(\|h\|).$$

Определение 2.4. Введем понятие матрицы Якоби отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, в точке $a \in U$:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}\right|_{x=a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

и понятие Якобиана отображения в точке $a \in U$:

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right|.$$

Тогда $df(a) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$.

Теорема 2.6. *Если функция $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, и функция $g\colon V \to \mathbb{R}^k$, где $V \subset R^m$, дифференцируема в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке $a \in U$ и*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot df(a).$$

Следствие 2.7. *Пусть отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо в точке $a \in U$ и имеет обратное отображение f^{-1}.*

Тогда $f^{-1} \in D(f(a))$ и

$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$

2.1 Производные высших порядков

Определение 2.5. Функция f k-раз дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если любая n-ая частная производная, где $n = 1, \ldots, k-1$, дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$.

Замечание 2.8. *Используют также понятие гладкости функции f.*

Функция f класса $\mathcal{C}^r$ в точке $a \in \mathcal{D}$, если каждая ее k-ая производная, где $k = 1, \ldots, r$, непрерывна.

По достаточному условию дифференцируемости, функция $f \in D^r$.

Теорема 2.9. *Пусть $u = f(x, y) \in D^2(M_0)$, $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ и M_0 – внутренняя точка U. Тогда*

$$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y \partial x}.$$

Теорема 2.10. *Пусть $f : U \to \mathbb{R}^2$ в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$ имеет частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} и при этом вторые производные непрерывны в M_0. Тогда*

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Следствие 2.11. *Пусть $u = f(x_1, \dots, x_n)$ – m-раз дифференцируемая функция в точке M_0, при этом $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда в точке M_0 любые смешанные производные равны, то есть*

$$\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\pi(1)} \dots \partial x_{\pi(k)}} = \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\sigma(1)} \dots \partial x_{\sigma(k)}},$$

где $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_k$ такие, что $\pi \neq \sigma$.

2.2 Формула Тейлора

Определение 2.6. Определим понятие мультииндекса.

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Так же определим следующие операции:

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

Пусть $h \in \mathcal{V} : h = (h_1, \dots, h_n)^T$, то $h^\alpha = \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i}$.

Удобство мультииндекса заключается в компактности обозначений. Далее под

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$$

будем подразумевать

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n} f}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) \dots \right).$$

Теорема 2.12.

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0,\ i=1,\dots,n \\ \alpha_1 + \dots \alpha_n = k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}.$$

Пример 2.1. *Обозначим за* $\mathfrak{D}$ *следующее отображение:*

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где h_i *–* i*-ая компонента фиксированного вектора* $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$*.*

Если функция $f \in D^k$*, то*

$$\mathfrak{D}^k f = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f =$$

$$= \left(\sum_{\substack{\alpha_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n \\ \alpha_1 + \ldots \alpha_n = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!} \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right) f =$$

$$= \left(\sum_{|\alpha| = k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} h^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) f.$$

Теорема 2.13 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Пусть* $f \in D^k(a)$*, где* $a \in U \subset \mathbb{R}^n$*.*

Тогда

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha \right) + o(\|h\|^k),$$

где $o(\|h\|^k) \to 0$ *при* $\|h\| \to 0$*.*

Определение 2.7. $\sum\limits_{i=0}^{k} \left(\sum\limits_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha \right)$ – полином Тейлора порядка k в точке $a \in U$ функции $f \in D^k(a)$.

Лемма 2.14. $h^\alpha = o(\|h\|^k)$ *при* $\|h\| \to 0$ *тогда и только тогда, когда* $k < |\alpha|$*.*

Теорема 2.15 (Единственность полинома Тейлора)**.** *Пусть существует полином*

$$P = \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|=i} P_\alpha h^\alpha$$

такой, что

$$f(a+h) - P = o(\|h\|^k)$$

при $\|h\| \to 0$.

Тогда P *– полином Тейлора.*

Следствие 2.16. *Пусть* $f \in D^k(a)$ *и*

$$\frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} = 0$$

при $|\alpha| \leq k$.

Тогда $f(a+h) = o(\|h\|^k)$ *при* $\|h\| \to 0$.

2.3 Дифференциалы высших порядков

2.4 Экстремумы функций нескольких переменных

2.5 Теорема о неявной функции

2.6 Диффеоморфизмы

2.7 Условные экстремумы

Глава 3

Многообразия

Литература

[1] М. Спивак, Математический анализ на многобразиях