

Функции нескольких переменных

Основные теоремы (без доказательств)

Математический анализ, 3 семестр

ММФ НГУ

2019 год

Оглавление

1	Нормированные векторные пространства	2
2	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	5
2.1	Производные высших порядков	7
2.2	Формула Тейлора	8
2.3	Дифференциалы высших порядков	10
2.4	Экстремумы функций нескольких переменных	10
2.5	Теорема о неявной функции	10
2.6	Диффеоморфизмы	10
2.7	Условные экстремумы	10
3	Многообразия	11
3.1	Способы задания многообразий	11
3.2	Касательные векторы и пространства, нормальные подпространства	11
3.3	Карты, атласы	11

Глава 1

Нормированные векторные пространства

Определение 1.1. \mathcal{V} – в. п-во над \mathbb{R} , если

$$\forall x, y \in \mathcal{V} \quad x + y = y + x, \quad (\text{ВП.1})$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{V} \quad (x + y) + z = x + (y + z), \quad (\text{ВП.2})$$

$$\exists \vec{0} \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad \vec{0} + x = x + \vec{0} = x, \quad (\text{ВП.3})$$

$$\forall x \in \mathcal{V} \quad \exists -x \in \mathcal{V} : x + (-x) = \vec{0}, \quad (\text{ВП.4})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (\text{ВП.5})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad (\text{ВП.6})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in \mathcal{V} \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\text{ВП.7})$$

$$\exists 1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad 1 \cdot x = x. \quad (\text{ВП.8})$$

Определение 1.2. $\|\cdot\|: \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – норма, если

$$\forall x \in \mathcal{V} \quad \|x\| \geq 0, \quad (\text{Н.1})$$

$$\forall x, y \in \mathcal{V} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad (\text{Н.2})$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{V} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, \quad (\text{Н.3})$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \quad (\text{Н.4})$$

Замечание 1.1. На нормированном в. п-ве можно определить метрику следующим образом:

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

И это действительно будет метрикой.

Определение 1.3. Банахово пространство – полное (относительно метрики из предыдущего замечания) нормированное векторное пространство.

Определение 1.4. $(\cdot, \cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

$$\forall x \in \mathcal{V} \quad (x, x) \geq 0, \quad (\text{СП.1})$$

$$\forall x, y \in \mathcal{V} \quad (x, y) = (y, x), \quad (\text{СП.2})$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall x, y, z \in \mathcal{V} \quad (\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z), \quad (\text{СП.3})$$

$$(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \quad (\text{СП.4})$$

Определение 1.5. Если \mathcal{V} – в. пр-во и (\cdot, \cdot) – скалярное произведение, то $(\mathcal{V}, (\cdot, \cdot))$ – евклидово пространство.

Утверждение 1.2. В евклидовом пространстве можно ввести норму следующим образом:

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Определение 1.6. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ билипшицево эквивалентны, если

$$\exists C > 0 : \frac{1}{C} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C \|x\|_1, \quad \forall x \in \mathcal{V}$$

Теорема 1.3. Все нормы в \mathbb{R}^n билипшицево эквивалентны.

Следствие 1.4. Последовательность точек

$$v^m = \begin{pmatrix} v_1^m \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix}$$

сходится к точке

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

при $m \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $v_i^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} u_i$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Определение 1.7. Введем понятие отображения $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

где $x \in U$ и U – область в \mathbb{R}^n .

Следствие 1.5.

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = u \Leftrightarrow \lim_{\eta \rightarrow a_i} f_i(\eta) = u_i \quad \text{для всех } i = 1, \dots, m,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Определение 2.1. Функция $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, где \mathcal{D} – область в \mathbb{R}^n , дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^n A_k h_k + o(\|h\|),$$

где A_k – константы и $h = (h_1, \dots, h_n)^T$.

Аналогичное определение:

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L} \langle h \rangle + o(\|h\|),$$

где \mathcal{L} – линейное отображение.

Нетрудно понять, что $\mathcal{L} \langle h \rangle = df(a) \langle h \rangle$ и

$$A_k = \left. \frac{\partial f(x)}{\partial x_k} \right|_{x=a} \quad \text{для всех } k = 1, \dots, n.$$

Определение 2.2. Пусть \vec{v} – некоторый фиксированный вектор из \mathbb{R}^n .

Производная функции f в точке $a \in \mathcal{D}$ по направлению \vec{v} определяется следующим образом:

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Если положить $\varphi(t) = f(a + t\vec{v})$, то

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \frac{d\varphi(0)}{dt}.$$

Если $\vec{v} = \vec{e}_i$, то

$$\partial_{\vec{e}_i} f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(a).$$

Утверждение 2.1. Если функция f дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, то для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ существует $\partial_{\vec{v}} f(a)$, которую можно вычислить следующими способами:

$$\begin{aligned} \partial_{\vec{v}} f(a) &= ((f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a))^T, (v_1, \dots, v_n)^T), \\ \partial_{\vec{v}} f(a) &= (\text{grad} f(a), \vec{v}) \end{aligned}$$

Лемма 2.2. Пусть функция $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, где \mathcal{D} – выпуклая область в \mathbb{R}^n , имеет в \mathcal{D} ограниченные константой K частные производные, тогда

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \leq nK \|b - a\|_2$$

или

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \leq K \|b - a\|_1.$$

Замечание 2.3. Далее предполагается, что множество определения функций – выпуклая область, если не оговорено другое.

Теорема 2.4. Пусть все частные производные функции $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ существуют в \mathcal{D} и непрерывны в точке $a \in \mathcal{D}$, тогда f дифференцируема в точке a .

Теорема 2.5. Пусть $f, g \in D(a)$.

Тогда $f + g, fg \in D(a)$

$$\begin{aligned} d(f + g)(a) &= df(a) + dg(a), \\ d(fg)(a) &= g(a)df(a) + f(a)dg(a). \end{aligned}$$

Определение 2.3. Вектор-функция (векторное поле) $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, если

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \langle h \rangle + o(\|h\|).$$

Определение 2.4. Введем понятие матрицы Якоби отображения $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, в точке $a \in U$:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial f(x)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{x=a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

и понятие Якобиана отображения в точке $a \in U$:

$$\mathcal{J} = \left| \frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|.$$

$$\text{Тогда } df(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Теорема 2.6. Если функция $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, и функция $g: V \rightarrow \mathbb{R}^k$, где $V \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке $a \in U$ и

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot df(a).$$

Следствие 2.7. Пусть отображение $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо в точке $a \in U$ и имеет обратное отображение f^{-1} .

Тогда $f^{-1} \in D(f(a))$ и

$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$

2.1 Производные высших порядков

Определение 2.5. Функция f k -раз дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если любая n -ая частная производная, где $n = 1, \dots, k-1$, дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$.

Замечание 2.8. Используют также понятие гладкости функции f .

Функция f класса C^r в точке $a \in \mathcal{D}$, если каждая ее k -ая производная, где $k = 1, \dots, r$, непрерывна.

По достаточному условию дифференцируемости, функция $f \in D^r$.

Теорема 2.9. Пусть $u = f(x, y) \in D^2(M_0)$, $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ и M_0 – внутренняя точка U . Тогда

$$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y \partial x}.$$

Теорема 2.10. Пусть $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$ имеет частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ и при этом вторые производные непрерывны в M_0 . Тогда

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Следствие 2.11. Пусть $u = f(x_1, \dots, x_n)$ – m -раз дифференцируемая функция в точке M_0 , при этом $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$. Тогда в точке M_0 любые смешанные производные равны, то есть

$$\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\pi(1)} \dots \partial x_{\pi(k)}} = \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\sigma(1)} \dots \partial x_{\sigma(k)}},$$

где $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_k$ такие, что $\pi \neq \sigma$.

2.2 Формула Тейлора

Определение 2.6. Определим понятие мультииндекса.

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Так же определим следующие операции:

$$\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!,$$

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k,$$

$$\text{Пусть } h \in \mathcal{V} : h = (h_1, \dots, h_n)^T, \text{ то } h^\alpha = \prod_{i=1}^n h_i^{\alpha_i}.$$

Удобство мультииндекса заключается в компактности обозначений. Далее под

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$$

будем подразумевать

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \dots \left(\frac{\partial^{\alpha_n} f}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) \dots \right).$$

Теорема 2.12.

$$(x_1 + \dots + x_n)^k = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0, \ i=1, \dots, n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}.$$

Пример 2.1. Обозначим за \mathfrak{D} следующее отображение:

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где h_i – i -ая компонента фиксированного вектора $h = (h_1, \dots, h_n)^T$.

Если функция $f \in D^k$, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}^k f &= \left(\sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f = \\ &= \left(\sum_{\substack{\alpha_i \geq 0, \ i=1, \dots, n \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_n = k}} \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \prod_{i=1}^n h_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right) f = \\ &= \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} h^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} \right) f. \end{aligned}$$

Теорема 2.13 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть $f \in D^k(a)$, где $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.

Тогда

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^k \left(\sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha \right) + o(\|h\|^k),$$

где $o(\|h\|^k) \rightarrow 0$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

Определение 2.7. $\sum_{i=0}^k \left(\sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha \right)$ – полином Тейлора порядка k в точке $a \in U$ функции $f \in D^k(a)$.

Лемма 2.14. $h^\alpha = o(\|h\|^k)$ при $\|h\| \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $k < |\alpha|$.

Теорема 2.15 (Единственность полинома Тейлора). Пусть существует полином

$$P = \sum_{i=0}^k \sum_{|\alpha|=i} P_\alpha h^\alpha$$

такой, что

$$f(a+h) - P = o(\|h\|^k)$$

при $\|h\| \rightarrow 0$.

Тогда P – полином Тейлора.

Следствие 2.16. Пусть $f \in D^k(a)$ и

$$\frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} = 0$$

при $|\alpha| \leq k$.

Тогда $f(a+h) = o(\|h\|^k)$ при $\|h\| \rightarrow 0$.

2.3 Дифференциалы высших порядков

2.4 Экстремумы функций нескольких переменных

2.5 Теорема о неявной функции

2.6 Диффеоморфизмы

2.7 Условные экстремумы

Глава 3

Многообразия

3.1 Способы задания многообразий

3.2 Касательные векторы и пространства, нормальные подпространства

3.3 Карты, атласы

Литература

- [1] А. В. Грешнов, Лекции по математическому анализу, 3 семестр, ММФ НГУ.
- [2] В. Н. Потапов, Электронные лекции по математическому анализу, ММФ НГУ.
- [3] С. К. Водопьянов, Дифференциальное исчисление функций многих переменных, ММФ НГУ.
- [4] Ю. Г. Решетняк, Курс математического анализа.
- [5] У. Рудин, Основы математического анализа.
- [6] Ж. Дьедонне, Основы современного анализа.
- [7] М. Спивак, Математический анализ на многообразиях.
- [8] М. М. Постников, Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.