Функции нескольких переменных
Основные утверждения

Математический анализ, 3 семестр

ММФ НГУ

2019 год

Оглавление

Глава 1

Нормированные векторные пространства

Определение 1.1. $\mathcal{V}$ – в. п-во над $\mathbb{R}$, если

$$\forall x, y \in \mathcal{V}\ x + y = y + x, \tag{ВП.1}$$

$$\forall x, y, z \in \mathcal{V}\ (x + y) + z = x + (y + z), \tag{ВП.2}$$

$$\exists \vec{0}\ \forall x \in \mathcal{V}\ \vec{0} + x = x + \vec{0} = x, \tag{ВП.3}$$

$$\forall x \in \mathcal{V}\ \exists -x \in \mathcal{V}:\ x + (-x) = \vec{0}, \tag{ВП.4}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \tag{ВП.5}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \tag{ВП.6}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in \mathcal{V}\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \tag{ВП.7}$$

$$\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ 1 \cdot x = x. \tag{ВП.8}$$

Определение 1.2. $\|\cdot\| \colon \mathcal{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ – норма, если

$$\forall x \in \mathcal{V}\ \|x\| \geq 0, \tag{Н.1}$$

$$\forall x, y \in \mathcal{V}\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \tag{Н.2}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{V}\ \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \tag{Н.3}$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \tag{Н.4}$$

Замечание 1.1. *На нормированном в. п-ве можно определить метрику следующим образом:*

$$\rho(x, y) = \|x - y\|.$$

И это действительно будет метрикой.

Определение 1.3. Банахово пространство – полное (относительно метрики из предыдущего замечания) нормированное векторное пространство.

Определение 1.4. $(\cdot,\cdot) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ – скалярное произведение, если

$$\forall x \in \mathcal{V}\ (x,x) \geq 0, \tag{СП.1}$$
$$\forall x,y \in \mathcal{V}\ (x,y) = (y,x), \tag{СП.2}$$
$$\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}\ \forall x,y,z \in \mathcal{V}\ (\alpha x + \beta y, z) = (\alpha x, z) + (\beta y, z), \tag{СП.3}$$
$$(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}. \tag{СП.4}$$

Определение 1.5. Если $\mathcal{V}$ – в. пр-во и $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение, то $(\mathcal{V}, (\cdot,\cdot))$ – евклидово пространство.

Утверждение 1.2. *В евклидовом пространстве можно ввести норму следующим образом:*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}.$$

Определение 1.6. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ билипшицево эквивалентны, если

$$\exists C > 0 :\ \frac{1}{C}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1, \quad \forall x \in \mathcal{V}$$

Теорема 1.3. *Все нормы в $\mathbb{R}^n$ билипшицево эквивалентны.*

Следствие 1.4. *Последовательность точек*

$$v^m = \begin{pmatrix} v_1^m \\ \vdots \\ v_n^m \end{pmatrix}$$

сходится к точке

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

при $m \to \infty$ тогда и только тогда, когда $v_i^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$.

Определение 1.7. Введем понятие отображения $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

$$F(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix},$$

где $x \in U$ и U – область в $\mathbb{R}^n$.

Следствие 1.5.

$$\lim_{x \to a} F(x) = u \Leftrightarrow \lim_{\eta \to a_i} f_i(\eta) = u_i \quad \textit{для всех } i = 1, \ldots, m,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Глава 2

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Определение 2.1. Функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ – область в $\mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k h_k + o(\|h\|),$$

где A_k – константы и $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$.

Аналогичное определение:

$$f(a+h) = f(a) + \mathcal{L}\langle h \rangle + o(\|h\|),$$

где $\mathcal{L}$ – линейное отображение.

Нетрудно понять, что $\mathcal{L}\langle h \rangle = df(a)\langle h \rangle$ и

$$A_k = \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}\right|_{x=a} \quad \text{для всех } k = 1, \ldots, n.$$

Определение 2.2. Пусть $\vec{v}$ – некоторый фиксированный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Производная функции f в точке $a \in \mathcal{D}$ по направлению $\vec{v}$ определяется следующим образом:

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}.$$

Если положить $\varphi(t) = f(a + t\vec{v})$, то

$$\partial_{\vec{v}} f(a) = \frac{d\varphi(0)}{dt}.$$

Если $\vec{v} = \vec{e_i}$, то

$$\partial_{\vec{e_i}} f(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} = f'_{x_i}(a).$$

Утверждение 2.1. *Если функция f дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, то для любого вектора $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ существует $\partial_{\vec{v}} f(a)$, которую можно вычислить следующими способами:*

$$\begin{aligned}
&\partial_{\vec{v}} f(a) = \left((f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_n}(a))^T, (v_1, \dots, v_n)^T\right), \\
&\partial_{\vec{v}} f(a) = (gradf(a), \vec{v})
\end{aligned}$$

Лемма 2.2. *Пусть функция $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, где $\mathcal{D}$ – выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, имеет в $\mathcal{D}$ ограниченные константой K частные производные, тогда*

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \leq nK\|b - a\|_2$$

или

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad |f(b) - f(a)| \leq K\|b - a\|_1.$$

Замечание 2.3. *Далее полагается, что множество определения функций – выпуклая область, если не оговорено другое.*

Теорема 2.4. *Пусть все частные производные функции $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ существуют в $\mathcal{D}$ и непрерывны в точке $a \in \mathcal{D}$, тогда f дифференцируема в точке a.*

Теорема 2.5. *Пусть $f, g \in D(a)$.*
Тогда $f + g, fg \in D(a)$

$$\begin{aligned}
&d(f + g)(a) = df(a) + dg(a), \\
&d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a).
\end{aligned}$$

Определение 2.3. Вектор-функция (векторное поле) $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, если

$$f(a + h) = f(a) + df(a)\langle h\rangle + o(\|h\|).$$

Определение 2.4. Введем понятие матрицы Якоби отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, в точке $a \in U$:

$$\frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \frac{\partial f(x)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}\Bigg|_{x=a} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

и понятие Якобиана отображения в точке $a \in U$:

$$\mathcal{J}_f(a) = \left| \frac{\partial f(a)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \right|.$$

Теорема 2.6. *Если функция $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируема в точке $a \in U$, и функция $g\colon V \to \mathbb{R}^k$, где $V \subset R^m$, дифференцируема в точке $f(a)$, тогда $g \circ f$ дифференцируема в точке $a \in U$ и*

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \cdot df(a).$$

Следствие 2.7. *Пусть отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, где $U \subset \mathbb{R}^n$, дифференцируемо в точке $a \in U$ и имеет обратное отображение f^{-1}.*

Тогда $f^{-1} \in D(f(a))$ и

$$df^{-1}(f(a)) = (df(a))^{-1}.$$

2.1 Производные высших порядков

Определение 2.5. Функция f k-раз дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$, если любая n-ая частная производная, где $n = 1, \ldots, k-1$, дифференцируема в точке $a \in \mathcal{D}$.

Замечание 2.8. *Используют также понятие гладкости функции f.*

Функция f класса $\mathcal{C}^r$ в точке $a \in \mathcal{D}$, если каждая ее k-ая производная, где $k = 1, \ldots, r$, непрерывна.

По достаточному условию дифференцируемости, функция $f \in D^r$.

Теорема 2.9. *Пусть $u = f(x, y) \in D^2(M_0)$, $M_0 = (x_0, y_0) \in U$ и M_0 – внутренняя точка U. Тогда*

$$\frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(M_0)}{\partial y \partial x}.$$

Теорема 2.10. *Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}^2$ в некоторой окрестности точки $M_0 = (x_0, y_0)$ имеет частные производные f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx} и при этом вторые производные непрерывны в M_0. Тогда*

$$f''_{xy}(M_0) = f''_{yx}(M_0).$$

Следствие 2.11. *Пусть $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ – m-раз дифференцируемая функция в точке M_0, при этом $M_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда в точке M_0 любые смешанные производные равны, то есть*

$$\frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\pi(1)} \ldots \partial x_{\pi(k)}} = \frac{\partial^k f(M_0)}{\partial x_{\sigma(1)} \ldots \partial x_{\sigma(k)}},$$

где $\pi, \sigma \in \mathbb{S}_k$ такие, что $\pi \neq \sigma$.

2.2 Формула Тейлора

Определение 2.6. Определим понятие мультииндекса.

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

где $\alpha_i \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ для всех $i \in \mathbb{N}$.

Так же определим следующие операции:

$$\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!,$$
$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

Пусть $h \in \mathcal{V} : h = (h_1, \ldots, h_n)^T$, то $h^\alpha = \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i}$.

Удобство мультииндекса заключается в компактности обозначений. Далее под

$$\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}$$

будем подразумевать

$$\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \ldots \left(\frac{\partial^{\alpha_n} f}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) \ldots \right).$$

Теорема 2.12.

$$(x_1 + \ldots + x_n)^k = \sum_{\substack{\alpha_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n \\ \alpha_1 + \ldots \alpha_n = k}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}.$$

Пример 2.1. *Обозначим за $\mathfrak{D}$ следующее отображение:*

$$\mathfrak{D} = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

где h_i – i-ая компонента фиксированного вектора $h = (h_1, \ldots, h_n)^T$.

Если функция $f \in D^k$, то

$$\mathfrak{D}^k f = \left(\sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k f =$$

$$= \left(\sum_{\substack{\alpha_i \geq 0,\ i=1,\ldots,n \\ \alpha_1+\ldots\alpha_n=k}} \frac{k!}{\alpha_1!\ldots\alpha_n!} \prod_{i=1}^{n} h_i^{\alpha_i} \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}}\right) f =$$

$$= \left(\sum_{|\alpha|=k} \frac{|\alpha|!}{\alpha!} h^\alpha \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\right) f.$$

Теорема 2.13 (Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано)**.** *Пусть $f \in D^k(a)$, где $a \in U \subset \mathbb{R}^n$.*

Тогда

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{k} \left(\sum_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha\right) + o(\|h\|^k),$$

где $o(\|h\|^k) \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Определение 2.7. $\sum\limits_{i=0}^{k} \left(\sum\limits_{|\alpha|=i} \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} h^\alpha\right)$ – полином Тейлора порядка k в точке $a \in U$ функции $f \in D^k(a)$.

Лемма 2.14. *$h^\alpha = o(\|h\|^k)$ при $\|h\| \to 0$ тогда и только тогда, когда $k < |\alpha|$.*

Теорема 2.15 (Единственность полинома Тейлора)**.** *Пусть существует полином*

$$P = \sum_{i=0}^{k} \sum_{|\alpha|=i} P_\alpha h^\alpha$$

такой, что

$$f(a+h) - P = o(\|h\|^k)$$

при $\|h\| \to 0$.

Тогда P – полином Тейлора.

Следствие 2.16. *Пусть $f \in D^k(a)$ и*

$$\frac{\partial^\alpha f(a)}{\partial x^\alpha} = 0$$

при $|\alpha| \le k$.

Тогда $f(a+h) = o(\|h\|^k)$ *при* $\|h\| \to 0$.

2.3 Дифференциалы высших порядков

Пусть $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ – дифференцируемая функция. Тогда дифференциал функции f имеет вид

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Обозначим за δ приращение.

Определение 2.8. Значение $\delta(df)$ при $\delta x_i = dx_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$ называется вторым дифференциалом функции f и обозначается $d^2 f$.

$$d^2 f = \delta \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) \Bigg|_{\substack{\delta x_i = dx_i, \\ i=1,\ldots,n}}$$

Определение 2.9. k-кратный дифференциал функции f определяется следующим образом:

$$\delta(d^{k-1} f)\big|_{\substack{\delta x_i = dx_i, \\ i=1,\ldots,n}} = d^k f.$$

Теорема 2.17. *Пусть функция $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ дважды дифференцируема, тогда ее второй дифференциал имеет вид*

1. *Если $x_1, \ldots, x_n$ – независимые переменные, то*

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i.$$

2. *Если $x_i = x_i(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ для всех $i = 1, \ldots, n$ дважды дифференцируемые функции, и $f(x_1, \ldots, x_n)$ – дважды дифференцируемая функция, тогда*

$$d^2 f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j dx_i + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 x_k}{\partial \xi_j \partial \xi_i} d\xi_j d\xi_i,$$

в более компактной форме:

$$d^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right)^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} d^2 x_k.$$

Замечание 2.18. *Второй дифференциал функции f от независимых переменных $x_1, \dots, x_n$*

$$d^2 f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n\right)^2$$

является симметричной квадратичной формой.

Утверждение 2.19. *Пусть функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ k раз дифференцируема в точке $a \in U$. Тогда*

$$d^k f(a) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha}(a)(dx)^\alpha, \quad \text{где } (dx)^\alpha = (dx_1)^{\alpha_1}\cdots(dx_n)^{\alpha_n}$$

Следствие 2.20. *Пусть функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ k раз дифференцируема в точке $a \in U$. Тогда*

$$f(a+h) = f(a) + \frac{1}{1!}df(a)\langle h\rangle + \frac{1}{2!}d^2 f(a)\langle h\rangle^2 + \dots + \frac{1}{k!}d^k f(a)\langle h\rangle^k + o(\|h\|^k)$$

2.4 Экстремумы функций нескольких переменных

2.5 Теорема о неявной функции

Для функции $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, то есть запись $(a,b) \in U$ означает, что $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$. Определим $F_a\colon U_a \to \mathbb{R}^m$, где $U_a = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (a,y) \in U\}$, то есть $F_a(y) = F(a,y)$ и $F_b\colon U_b \to \mathbb{R}^m$ аналогично $(F_b(x) = F(x,b))$.

Теорема 2.21 (О неявной функции). *Пусть $F\colon U \to \mathbb{R}^m$, где $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$, $U \in \mathcal{N}[(a,b)]$ – некоторая окрестность точки (a,b).*

Если выполнены следующие условия:

1. *$F(a,b) = 0$,*

2. *$F \in \mathcal{C}^1[(a,b)]$, то есть F непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (a,b),*

3. *$dF_a(b)$ – невырожденный оператор ($\det(dF_a(b)) \neq 0$),*

то найдутся окрестности $V \in \mathcal{N}(a)$, $V \subset \mathbb{R}^n$, и $W \in \mathcal{N}(b)$, $W \subset \mathbb{R}^m$, и функция $f\colon V \to \mathbb{R}^m$, $f \in \mathcal{D}(V)$, что

1. $F(x,y)=0 \Longleftrightarrow y=f(x)$ *для* $x\in V, y\in W$,

2. $df(x)=-(dF_x(y))^{-1}dF_y(x)$, *где* $y=f(x)$.

Следствие 2.22 (О гладкости неявной функции)**.** *Если при выполнении условий теоремы о неявной функции потребовать, что бы* $F\in\mathcal{C}^r[(a,b)]$, *то и неявная функция* f *будет принадлежать классу* $\mathcal{C}^r$ *в области определения* V.

Следствие 2.23 (Теорема об обратной функции)**.** *Пусть* $f\colon U\to\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}^n$, $U\in\mathcal{N}(b)$, $b\in\mathbb{R}^n$.

Если верно, что

1. $f\in\mathcal{C}^1(b)$,

2. $df(b)$ *– невырожденный оператор,*

то найдется $V\in\mathcal{N}(f(b))$, $V\subset\mathbb{R}^n$ *в которой определена обратная функция* $f^{-1}\colon V\to U$ *такая, что* $f^{-1}\in\mathcal{D}(V)$ *и* $df^{-1}(x)=(df(y))^{-1}$, *где* $x=f(y)$.

2.6 Диффеоморфизмы

2.7 Условные экстремумы

Глава 3

Многообразия

3.1 Определения и способы задания многообразий

Определение 3.1. $M \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерное многообразие без края класса $\mathcal{C}^r$, если Существует диффеоморфизм класса $\mathcal{C}^r$

$$\varphi\colon (-1,1)^n \to \mathbb{R}^n$$

такой, что $\varphi\left((-1,1)^k \times 0^{n-k}\right) = M$.

Определение 3.2. $M \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерное многообразие с краем класса $\mathcal{C}^r$, если Существует диффеоморфизм класса $\mathcal{C}^r$

$$\varphi\colon (-1,1)^n \to \mathbb{R}^n$$

такой, что $\varphi\left((-1,1)^{k-1} \times [0,1) \times 0^{n-k}\right) = M$.

Определение 3.3. Сужение диффеоморфизма $\varphi\colon (-1,1)^n \to \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\widetilde{\varphi}\colon (-1,1)^k \to \mathbb{R}^n$$

и $\widetilde{\varphi}(t_1, \ldots, t_k) = \varphi(t_1, \ldots, t_k, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-k})$ называется параметризацией элементарного многообразия.

Определение 3.4. $M \subset \mathbb{R}^n$ – k-мерное многообразие без края (с краем), если

$$\forall x \in M\ \exists U \in \mathcal{N}(x):\ U \cap M \text{ – элементарное многообразие без края (с краем).}$$

Замечание 3.1. *Дальнейшие факты приводятся для многообразий без края.*

Теорема 3.2. *Если* $\forall x \in M$ $\exists U \in \mathcal{N}(x)$ *и* $F\colon U \to \mathbb{R}^n$ *–* $\mathcal{C}^r$ *гладкий диффеоморфизм такой, что* $F(U \cap M) = F(U) \cap (\mathbb{R}^k \times 0^{n-k})$.

Тогда M *–* k*-мерное многообразие.*

Теорема 3.3. $f\colon U \to \mathbb{R}^m$*, где* $U \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое множество,* $f \in \mathcal{C}^r$ *и* $\forall a \in U$ $\operatorname{rank} f(a) = k$.

Тогда $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$ *–* $\mathcal{C}^r$ *гладкое* $(n-k)$*-мерное многообразие.*

Следствие 3.4. *Пусть* $f(x,y,z) = 0$, $f \in \mathcal{C}^r$ *и* $df(a) \neq 0$. *Тогда* $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z) = 0$ *–* $\mathcal{C}^r$ *гладкое двумерное многообразие в некоторой окрестности точки* a.

Теорема 3.5. *Пусть* $e\colon U \to \mathbb{R}^n$*, где* $U \subset \mathbb{R}^k$*, отображение класса* $\mathcal{C}^r$ *и* $\operatorname{rank} f = k$ *в любой точке* U.

Тогда $y(U)$ *–* k*-мерное* $\mathcal{C}^r$ *гладкое многообразие.*

3.2 Касательные векторы и пространства, нормальные подпространства

3.2.1 Касательные векторы и пространства

Определение 3.5. Пусть $\gamma(t)$– некоторая гладкая параметризированная кривая.

Определим касательный вектор к γ в точке t_0 следующим образом:

$$\dot\gamma(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}.$$

Определение 3.6. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ – Касательный вектор к множеству M в точке $a \in M$, если найдется $\varepsilon > 0$ и гладкая кривая $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ такая, что $\gamma(0) = a$, и при этом $\dot\gamma(0) = \vec{v}$.

Совокупность всех касательных векторов к множеству M в точке $a \in M$ будем обозначать $T_a(M)$.

Замечание 3.6. *Аффинное подпространство* $a + T_a(M)$ *называется контингенцией.*

Утверждение 3.7. *Контингенция любого аффинного подпространства* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ *в любой его точке совпадает с* $\mathcal{A}$.

Утверждение 3.8. *Пусть* M *– элементарное* k*-мерное* $\mathcal{C}^r$ *гладкое многообразие, то есть* $M = \varphi((-1,1)^k \times 0^{n-k})$*, где* φ *– некоторый* $\mathcal{C}^r$ *гладкий диффеоморфизм, и* $a \in (-1,1)^k \times 0^{n-k}$.

Тогда $T_{\varphi(a)}(M) = d\varphi(A) \left\langle \mathbb{R}^k \times 0^{n-k} \right\rangle$.

Следствие 3.9. *Если M – гладкое k-мерное многообразие, то $T_a(M)$, где $a \in M$ – линейное k-мерное подпространство.*

3.2.2 Нормальное подпространство к многообразию

Определение 3.7. Пусть M – некоторое множество.

Вектор $\vec{w}$ – нормаль к M в точке $a \in M$, если $\forall \vec{v} \in T_a(M)$ верно, что

$$\langle \vec{w}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Совокупность всех таких нормалей обозначим $N_a(M)$.

Очевидно, что $N_a(M)$ – линейное подпространство.

Определение 3.8. Пусть $f\colon U \to R$, $U \subset \mathbb{R}^n$ – открытое подмножество, $a \in U$.

Вектор u – градиент функции f в точке a, если для любого v

$$df(a)\langle v \rangle = \langle u, v \rangle$$

Утверждение 3.10. *Пусть $M = \{x \mid f_1(x) = 0, \dots f_{n-k}(x) = 0\}$ – k-мерное $\mathcal{C}^r$ гладкое многообразие.*

И отображение

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_{n-k}(x) \end{pmatrix}$$

имеет постоянный ранг $\operatorname{rank} f = n - k$.

Тогда $\forall a \in M$ векторы $\operatorname{grad} f_1(a), \dots, \operatorname{grad} f_{n-k}(a)$ – базис $N_a(M)$.

3.3 Карты, атласы

Определение 3.9. Пусть $\mathcal{X}$ – произвольное множество. Картой в $\mathcal{X}$ называется пара (U, h), где U – подмножество в $\mathbb{R}^n$, а h – отображение U, биективно отображающее U на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

Определение 3.10. Две карты (U, h), (V, k) называются пересекающимися, если $V \cap U \neq \varnothing$.

Определение 3.11. Пусть (U, h) и (V, k) – две пересекающиеся карты в $\mathcal{X}$.

Карты (U, h), (V, k) называются согласованными, если они либо не пересекаются, либо

1. оба множества $h(W)$, $k(W)$, где $W = U \cap V$, открыты в $\mathbb{R}^n$;

2. отображение
$$(k|_W) \circ (h|_W)^{-1} : h(W) \to k(W)$$
является диффеоморфизмом класса $\mathcal{C}^r$, где $r \geq 0$.

Определение 3.12. Множество карт $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ называется атласом на $\mathcal{X}$, если

1. любые две карты этого множества согласованы;
2. $$\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathcal{X}.$$

Для любого атласа A обозначим за $A_{\max}$ множество всех карт, согласованных с каждой картой атласа A.

Теорема 3.11. *Множество $A_{\max}$ – атлас.*

Следствие 3.12. *Каждый атлас A содержится в единственном максимальном атласе $A_{\max}$.*

Доказательство. Если A, B – атласы и $A \subset B$, то $B_{\max} \subset A_{\max}$, поэтому $(A_{\max})_{\max} \subset A_{\max}$ и, значит, $(A_{\max})_{\max} = A_{\max}$. Если $A_{\max} \subset B$, то $B_{\max} \subset (A_{\max})_{\max} = A_{\max}$, поэтому $B \subset A_{\max}$.

То есть атлас $A_{\max}$ максимален в частино упорядоченном множестве всех атласов. И если B – произвольный максимальный атлас такой, что $A \subset B$, то $B \subset B_{\max} \subset A_{\max}$ и, значит, $B = A_{\max}$. □

Определение 3.13. Максимальные атласы на $\mathcal{X}$ называются гладкими структурами. Множество $\mathcal{X}$ с заданной на нем гладкой структурой $A_{\max}$ называется гладким многообразием, то есть гладкое многообразие – пара $(\mathcal{X}, A_{\max})$.

По определению два многообразия $(\mathcal{X}, A_{\max})$ и $(\mathcal{Y}, B_{\max})$ совпадают тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и $A_{\max} = B_{\max}$.

Определение 3.14. Два атласа называются эквивалентными, если они содержатся в одном и том же максимальном атласе. Для этого необходимо и достаточно того, что бы для атласов A, B их объединение $A \cup B$ было атласом.

Для задания многообразия достаточно задать произвольный атлас $A \subset A_{\max}$, то есть гладкими многообразиями считать пары $(\mathcal{X}, A)$, где A – произвольный атлас на $\mathcal{X}$.

Два многообразия $(\mathcal{X}, A_{\max})$ и $(\mathcal{Y}, B_{\max})$ одинаковы тогда и только тогда, когда $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ и атласы A, B эквивалентны.

Определение 3.15. Число n – размерность пространства $\mathbb{R}^n$, содержащего образы $h(U)$ носителей карт, называется размерностью многообразия $\mathcal{X}$ и обозначается $\dim \mathcal{X}$.

Определение 3.16. Число r – класс гладкости отображений $(k|_W) \circ (h|_W)^{-1}$ будем называть классом гладкости многообразия $\mathcal{X}$.

Литература

[1] А. В. Грешнов, Лекции по математическому анализу, 3 семестр, ММФ НГУ.

[2] В. Н. Потапов, Электронные лекции по математическому анализу, ММФ НГУ.

[3] С. К. Водопьянов, Дифференциальное исчисление функций многих переменных, ММФ НГУ.

[4] Ю. Г. Решетняк, Курс математического анализа.

[5] У. Рудин, Основы математического анализа.

[6] Ж. Дьедонне, Основы современного анализа.

[7] М. Спивак, Математический анализ на многобразиях.

[8] М. М. Постников, Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия.