Estrutura de Dados II

3ª parte

Prof. Jobson Massollar

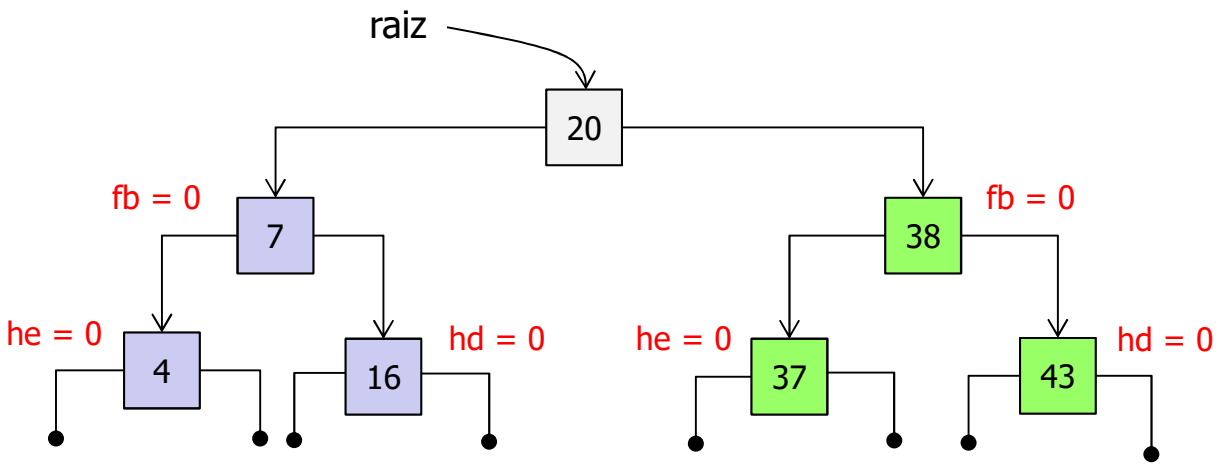
jobson.silva@uva.br

Árvores AVL

- Criadas por **A**delson-**V**elskii e **L**andis em 1962.
- São um tipo de Árvore Binária de Busca Balanceada.
- Solução para o desbalanceamento:
  - ✓ Modificar os algoritmos de inclusão e exclusão para balancear a árvore sempre que essas operações causam a degeneração.
  - ✓ Para tal, cada nó da árvore está associado a um fator de balanceamento (FB), que é a diferença de altura entre as subárvores esquerda e direita de um nó.
  - ✓ Quando é identificado um nó com fator de balanceamento >= 2 são aplicados algoritmos para correção do desbalanceamento.

Árvores AVL

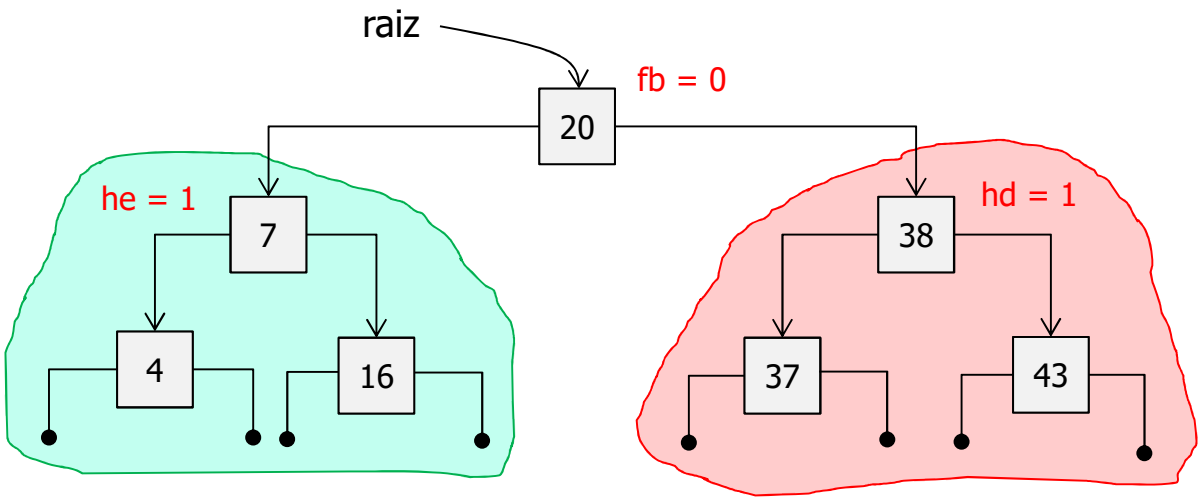
- Exemplo 1: As subárvores de raizes 7 e 38 estão balanceadas.



fb = | he – hd |

Árvores AVL

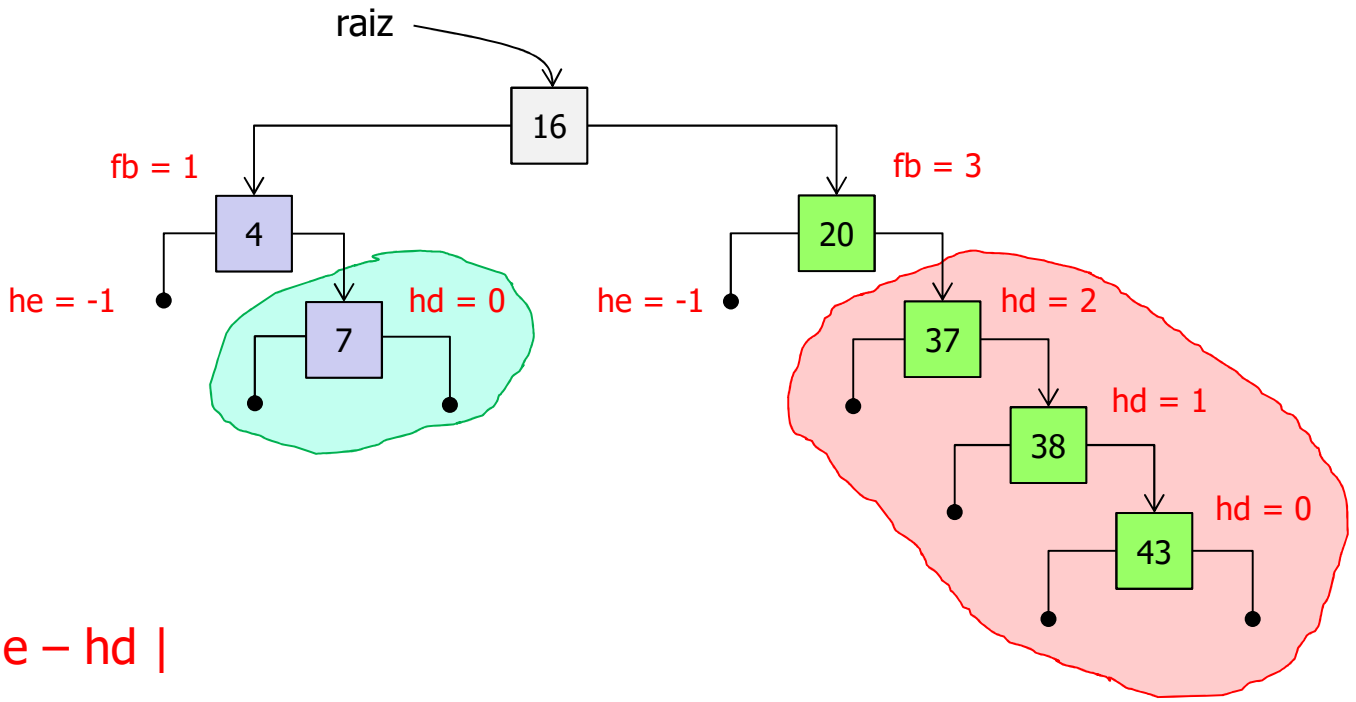
- Exemplo 1: A árvore de raiz 20 está balanceada.



fb = | he – hd |

Árvores AVL

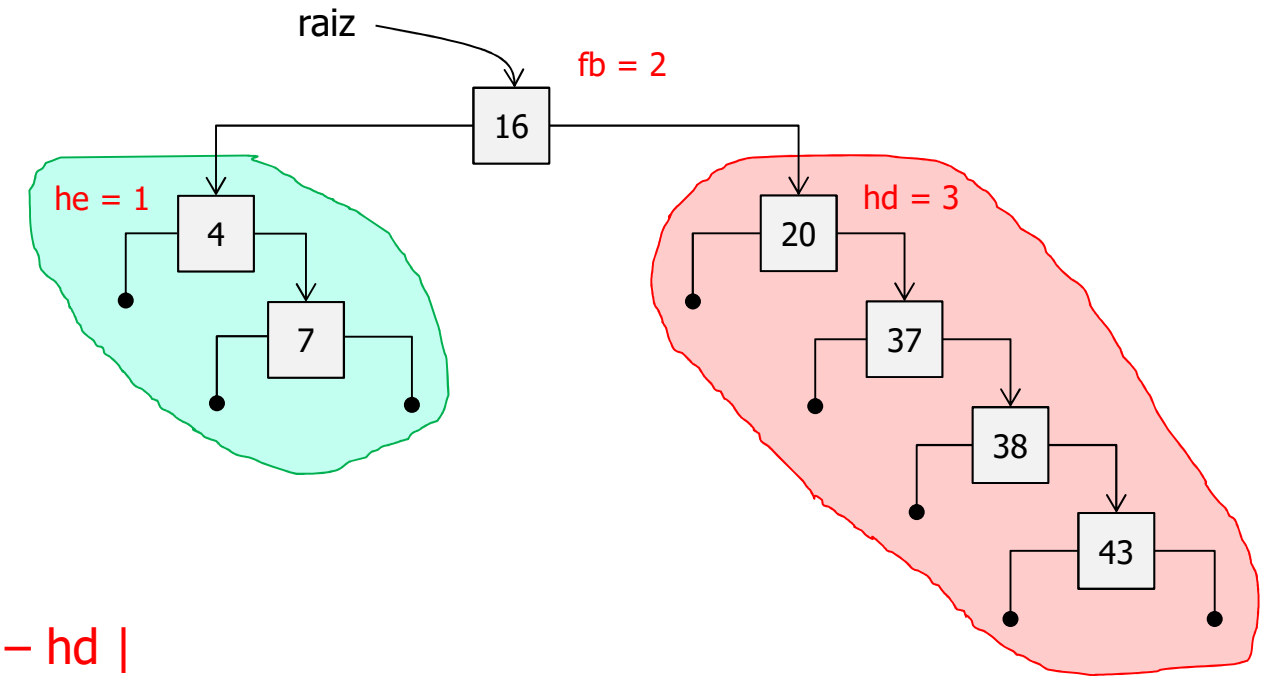
- Exemplo 2: A subárvore de raiz 4 está balanceada, mas a subárvore de raiz 20 está desbalanceada (fb >= 2).



fb = | he – hd |

Árvores AVL

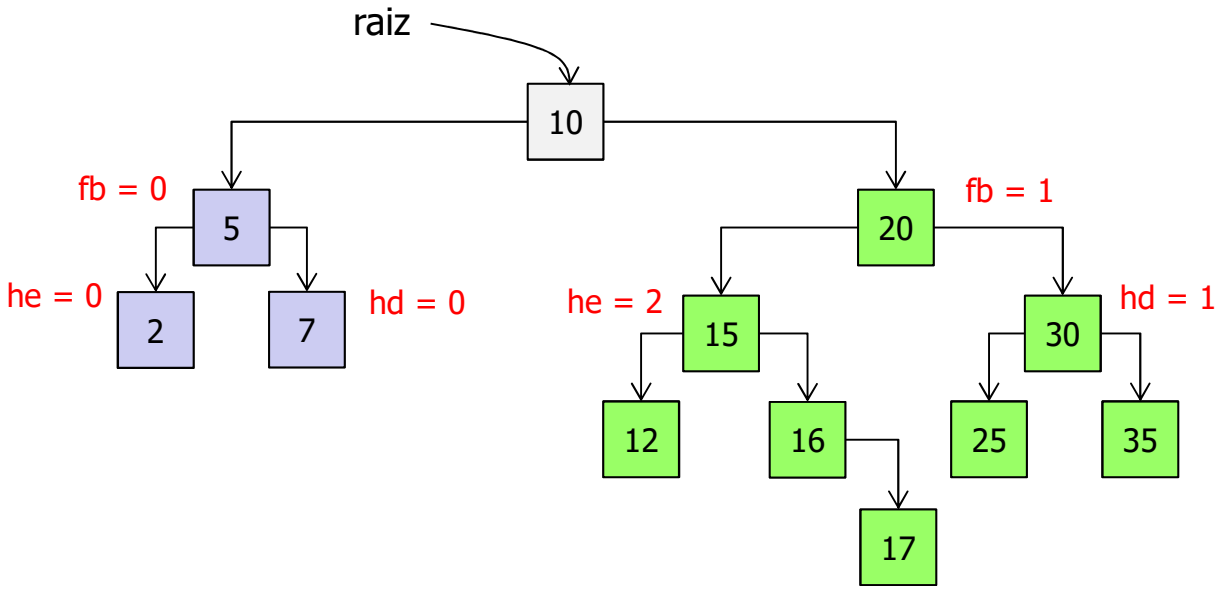
- Exemplo 2: A árvore de raiz 16 está desbalanceada.



fb = | he – hd |

Árvores AVL

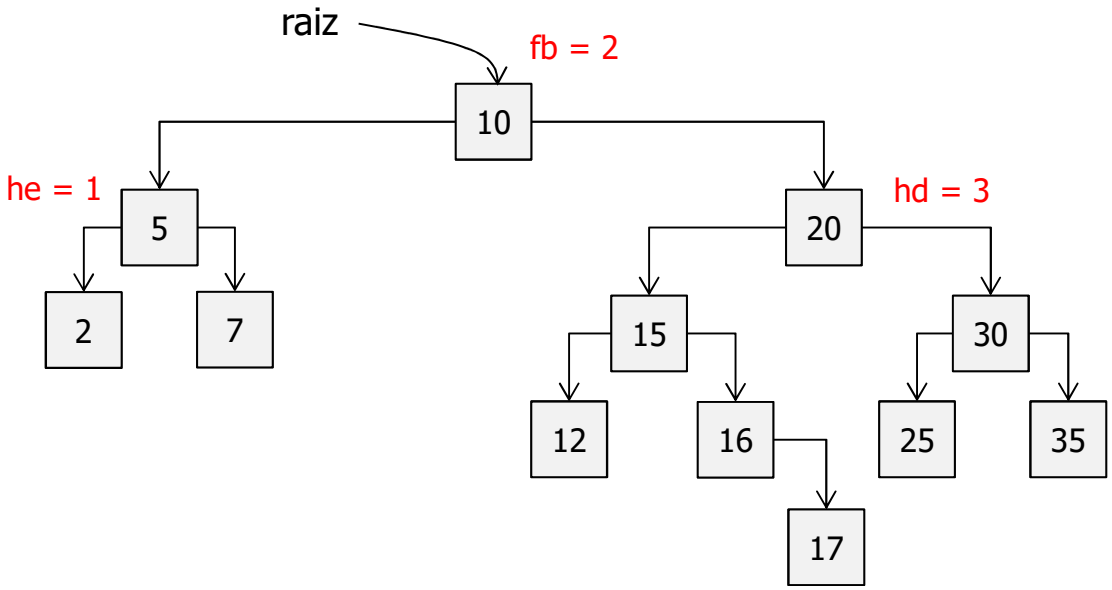
- Exemplo 3: As subárvores de raízes 5 e 20 estão balanceadas.



fb = | he – hd |

Árvores AVL

- Exemplo 3: Entretanto, a árvore de raiz 10 está desbalanceada.



fb = | he – hd |

Árvores AVL

- Para verificar se determinada subárvore está balanceada ou não, é preciso acrescentar uma informação em cada nó: a altura (h) dessa subárvore.

$$h = \max(he, hd) + 1$$

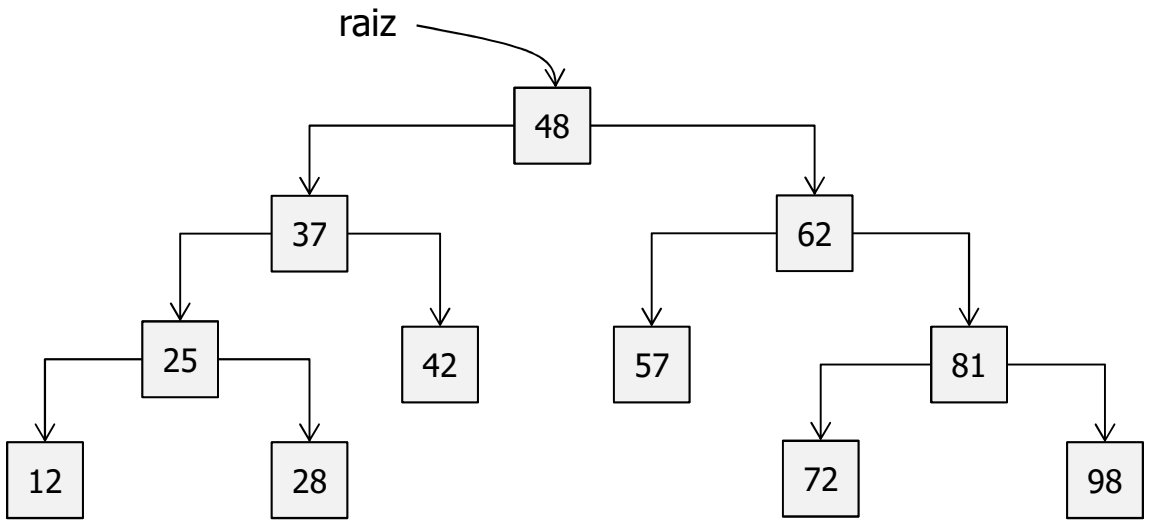
```
struct NoAVL {
    int valor;
    int h;
    struct NoAVL *esq;
    struct NoAVL *dir;
};
```

Árvores AVL

- Quando inserimos ou excluímos um nó, devemos recalcular a altura e, como consequência, o fator de balanceamento dos nós afetados por essa operação.
- Quando um nó desbalanceado é detectado deve ser aplicada uma operação de rotação para balancear a árvore.
- Existem dois tipos de rotação:
  - ✓ Rotação simples
  - ✓ Rotação dupla

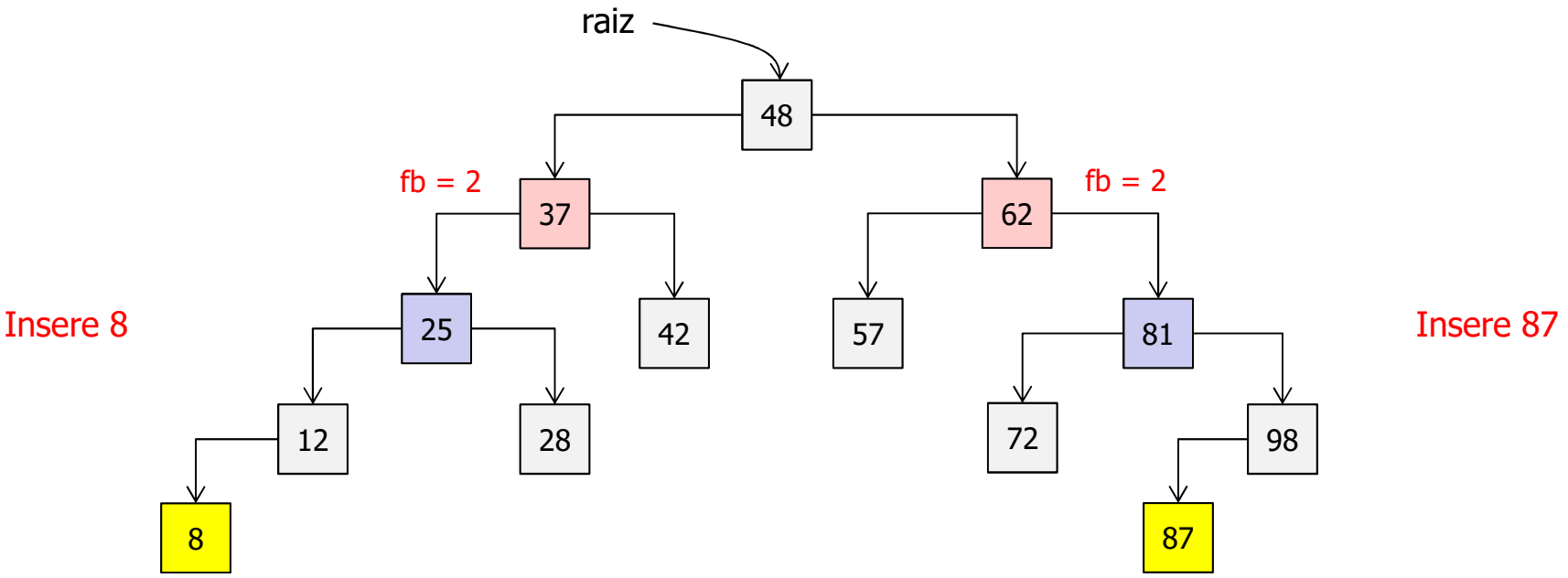
Árvores AVL

- Rotação Simples
  - ✓ O nó inserido está à esquerda do filho esquerdo OU à direita do filho direito do nó desbalanceado.
  - ✓ Pode ser uma rotação simples à esquerda ou à direita.



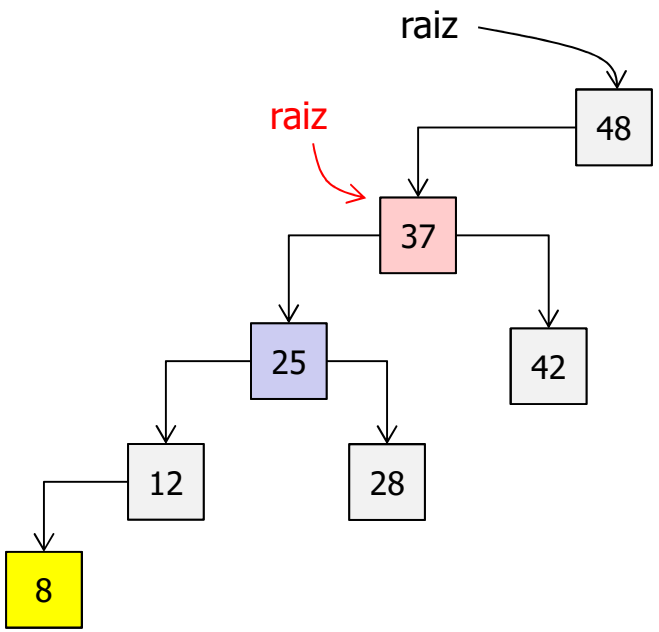
Árvores AVL

- Rotação Simples
  - ✓ O nó inserido está à esquerda do filho esquerdo OU à direita do filho direito do nó desbalanceado.
  - ✓ Pode ser uma rotação simples à esquerda ou à direita.



Árvores AVL

- Rotação Simples à Direita: nó inserido está à esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LL

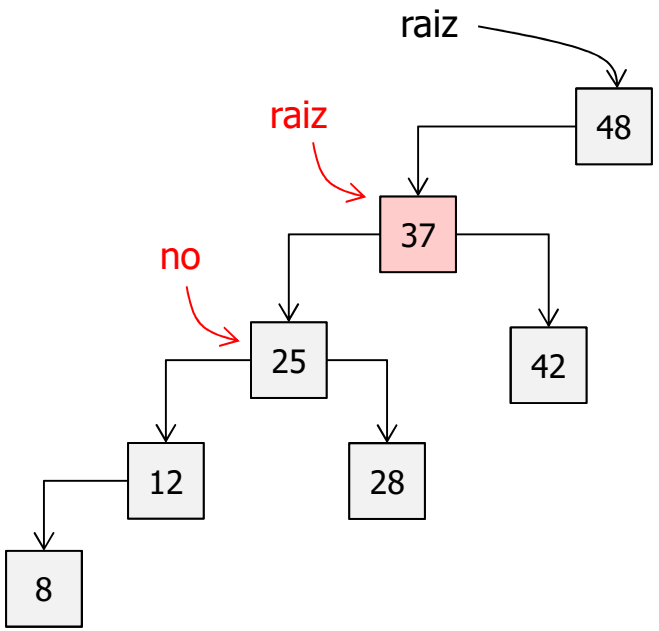
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

no = raiz->esq
raiz->esq = no->dir
no->dir = raiz

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Simples à Direita: nó inserido está à esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LL

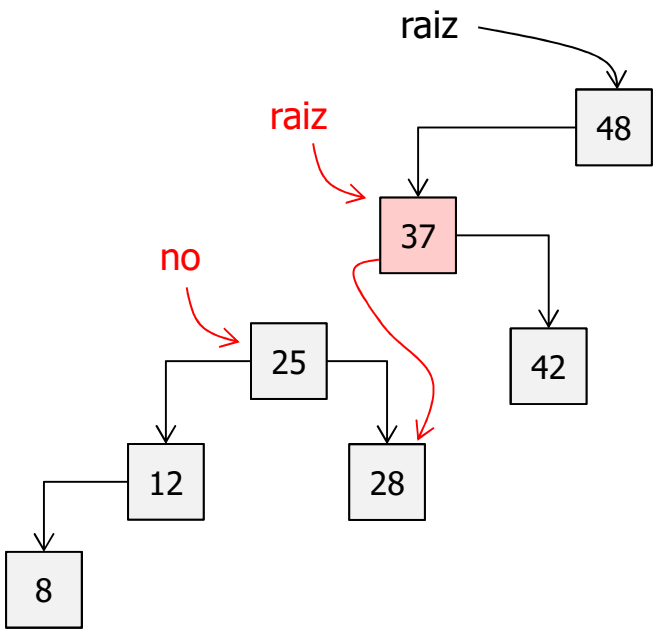
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

no = raiz->esq
raiz->esq = no->dir
no->dir = raiz

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Simples à Direita: nó inserido está à esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LL

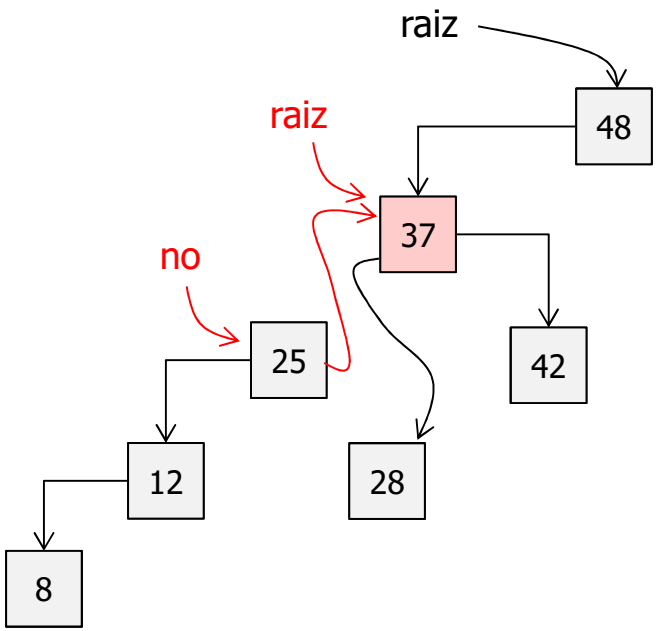
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

no = raiz->esq
raiz->esq = no->dir
no->dir = raiz

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Simples à Direita: nó inserido está à esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LL

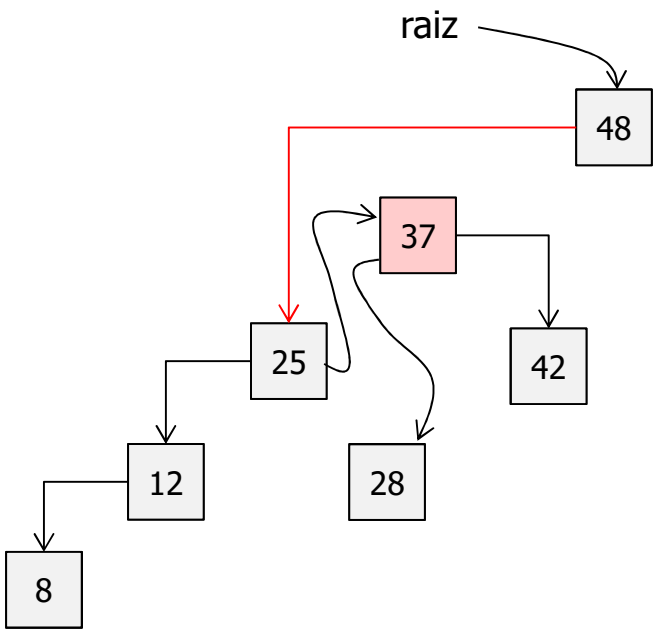
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

no = raiz->esq
raiz->esq = no->dir
no->dir = raiz

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Simples à Direita: nó inserido está à esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LL

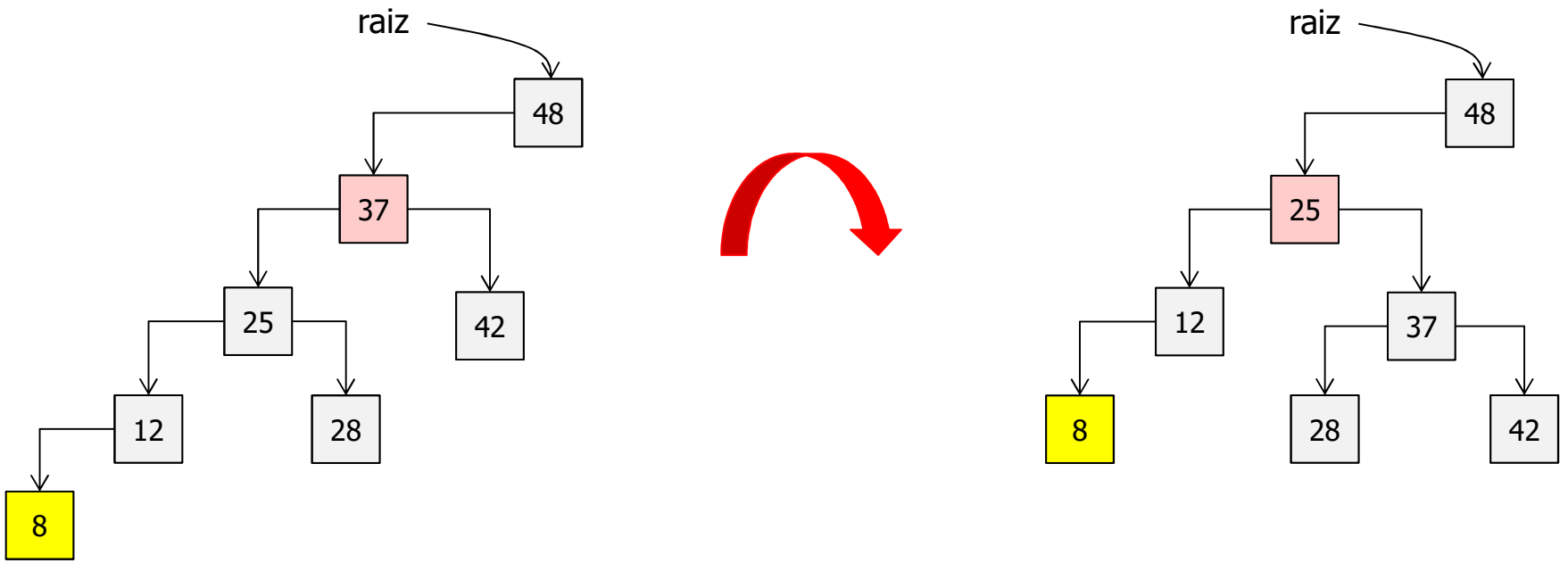
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

no = raiz->esq
raiz->esq = no->dir
no->dir = raiz

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.
```

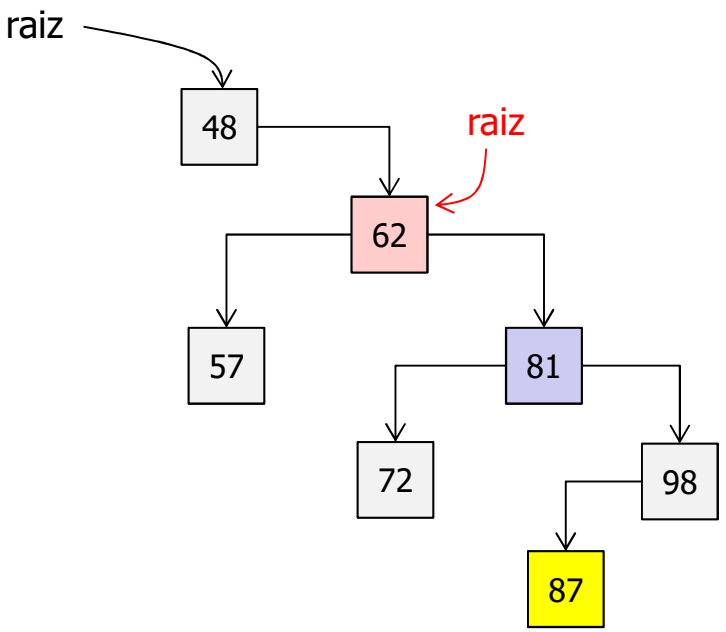
Árvores AVL

- Rotação Simples à Direita: nó inserido está à esquerda do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda: nó inserido está à direita do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RR

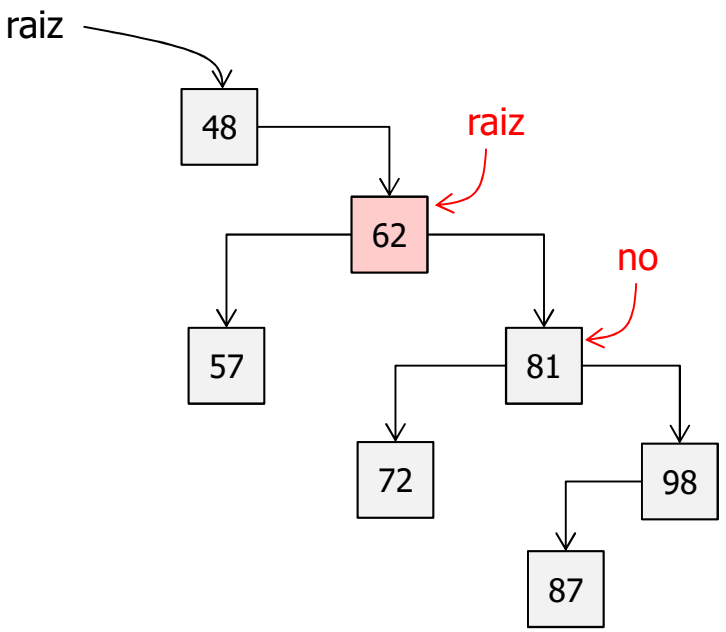
Raiz referencia o nó desbalanceado:

```
no = raiz->dir
raiz->dir = no->esq
no->esq = raiz
```

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.

Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda: nó inserido está à direita do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RR

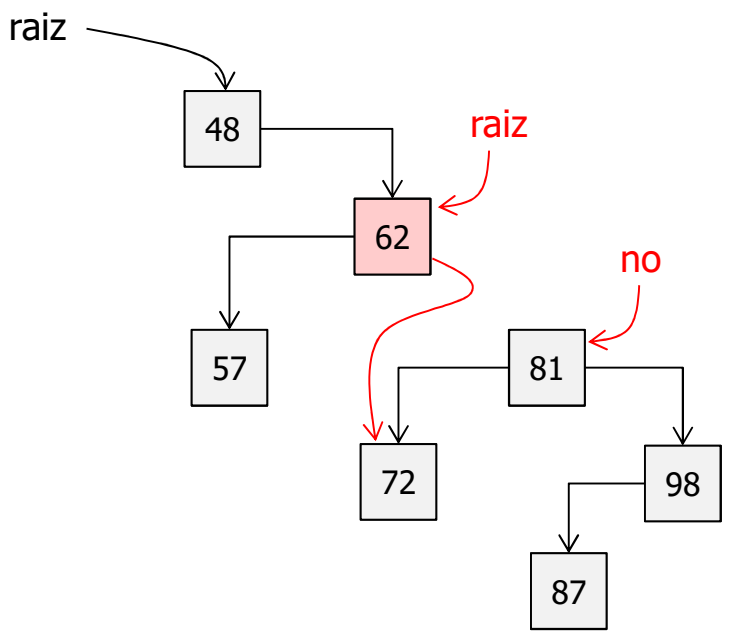
Raiz referencia o nó desbalanceado:

```
no = raiz->dir
raiz->dir = no->esq
no->esq = raiz
```

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.

Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda: nó inserido está à direita do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RR

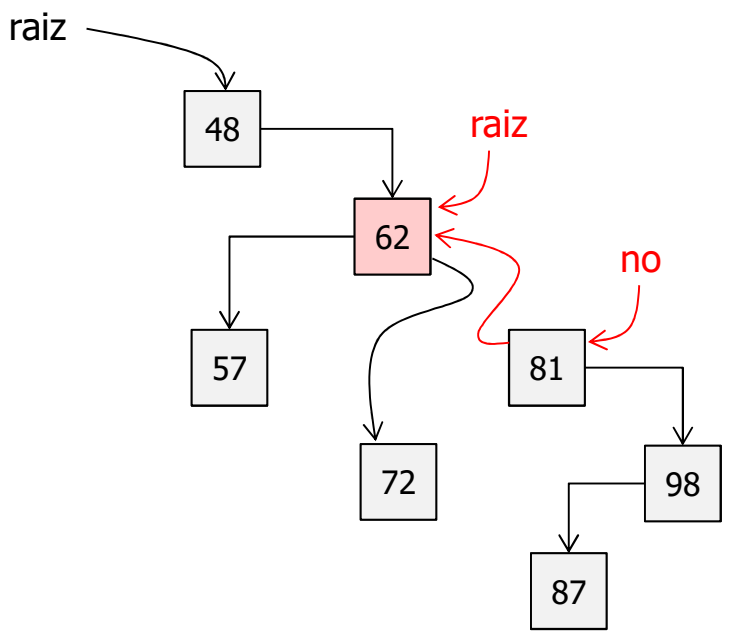
Raiz referencia o nó desbalanceado:

```
no = raiz->dir
raiz->dir = no->esq
no->esq = raiz
```

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.

Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda: nó inserido está à direita do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RR

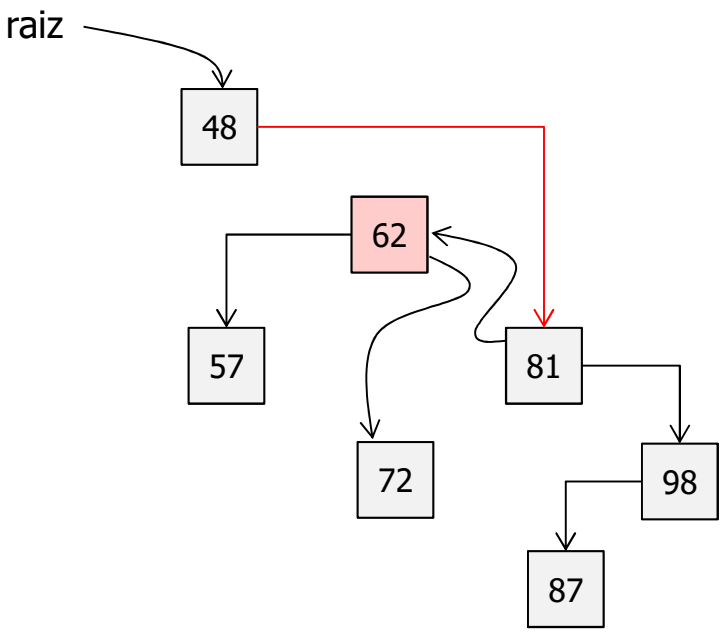
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

no = raiz->dir
raiz->dir = no->esq
no->esq = raiz

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda: nó inserido está à direita do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RR

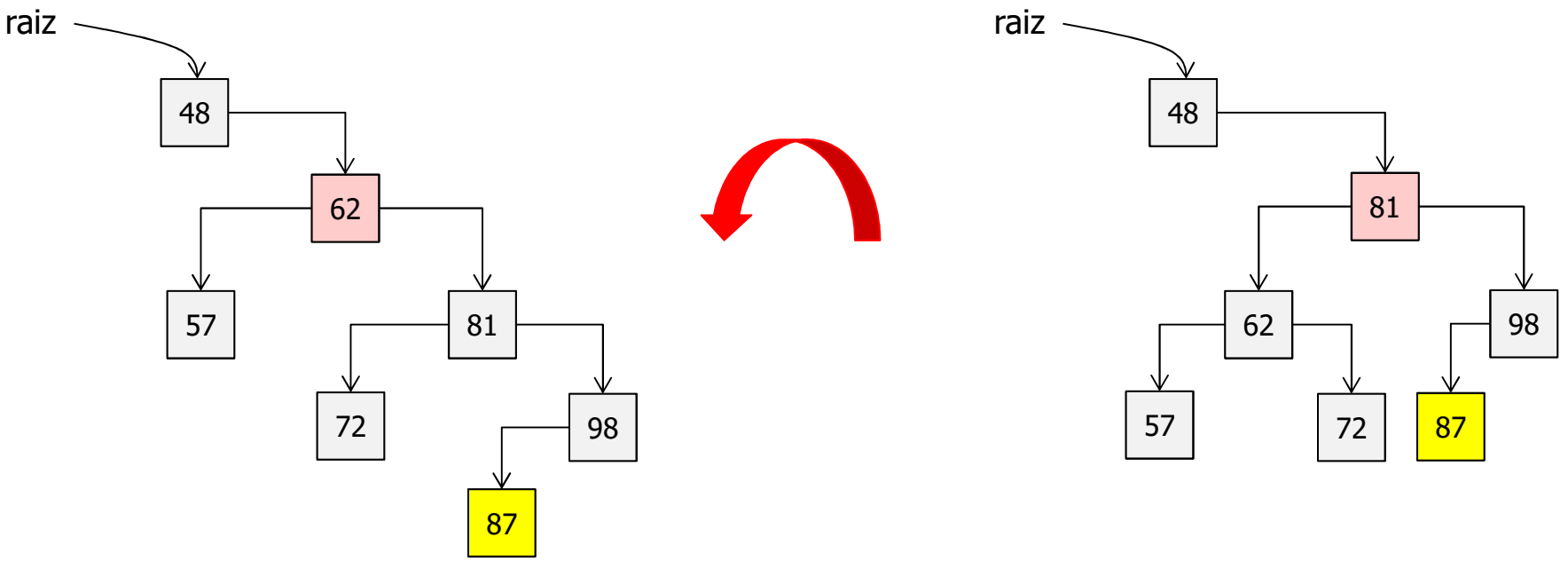
Raiz referencia o nó desbalanceado:

```
no = raiz->dir
raiz->dir = no->esq
no->esq = raiz
```

Por fim, o nó passa a ser a nova raiz.

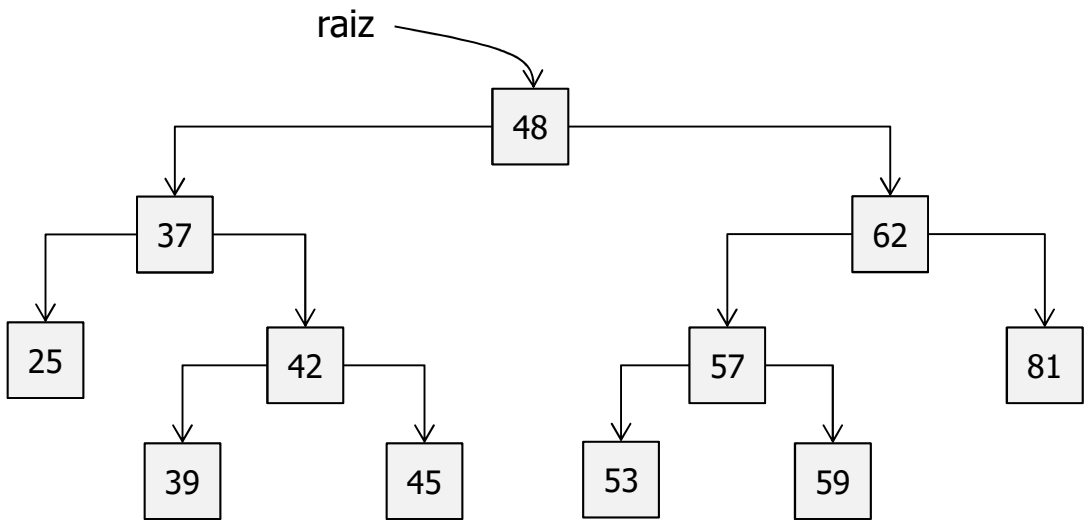
Árvores AVL

- Rotação Simples à Esquerda: nó inserido está à direita do filho direito do nó desbalanceado.



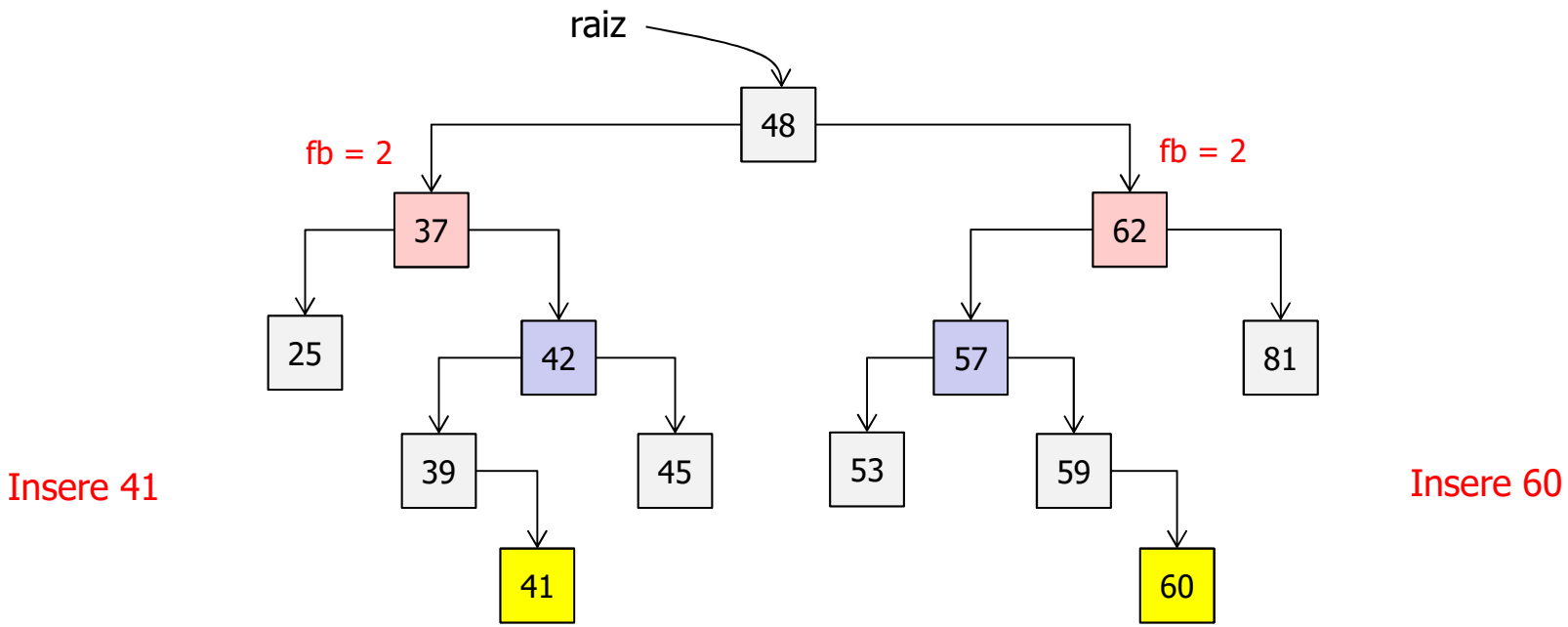
Árvores AVL

- Rotação Dupla
  - ✓ O nó inserido está à esquerda do filho direito OU à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.
  - ✓ Pode ser uma rotação dupla à esquerda ou à direita.



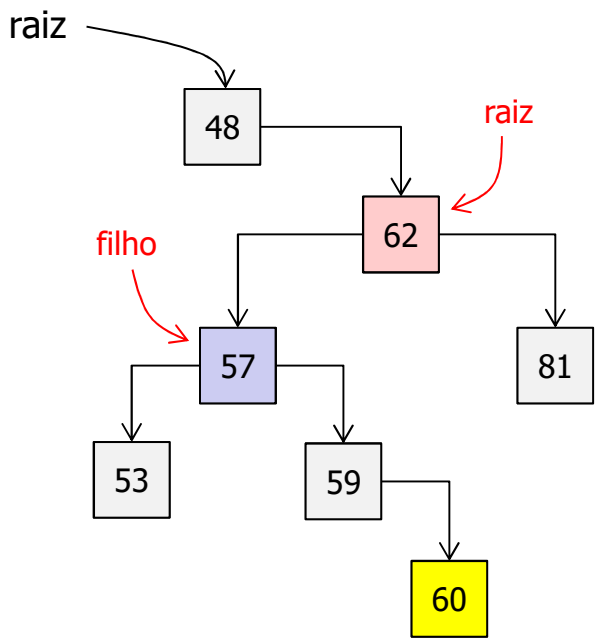
Árvores AVL

- Rotação Dupla
  - ✓ O nó inserido está à esquerda do filho direito OU à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.
  - ✓ Pode ser uma rotação dupla à esquerda ou à direita.



Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

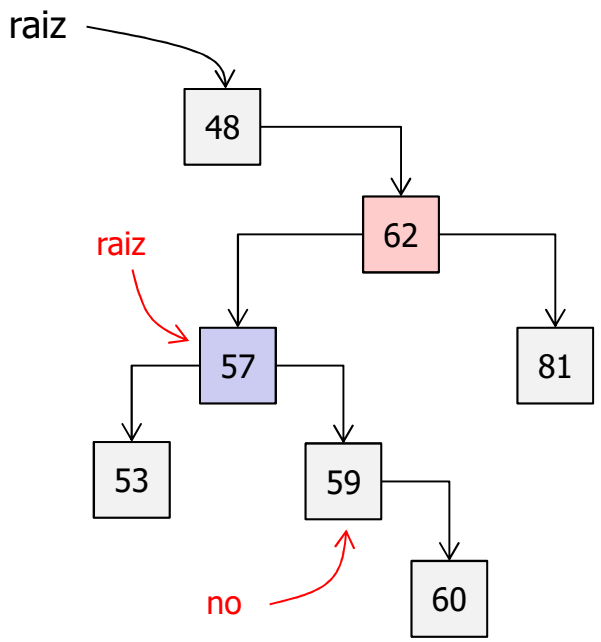
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho

Rotação LL na raiz

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

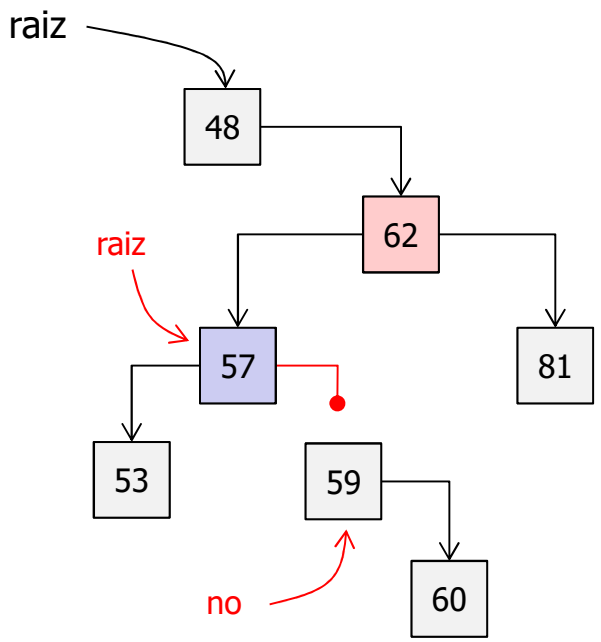
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação LL na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

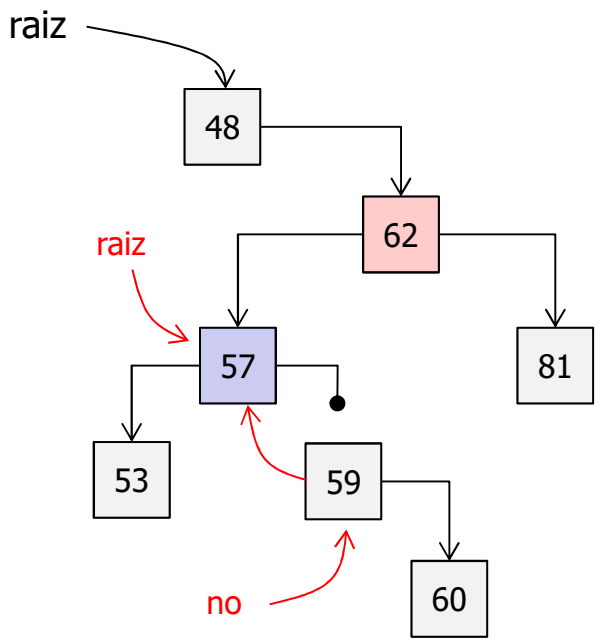
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação LL na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

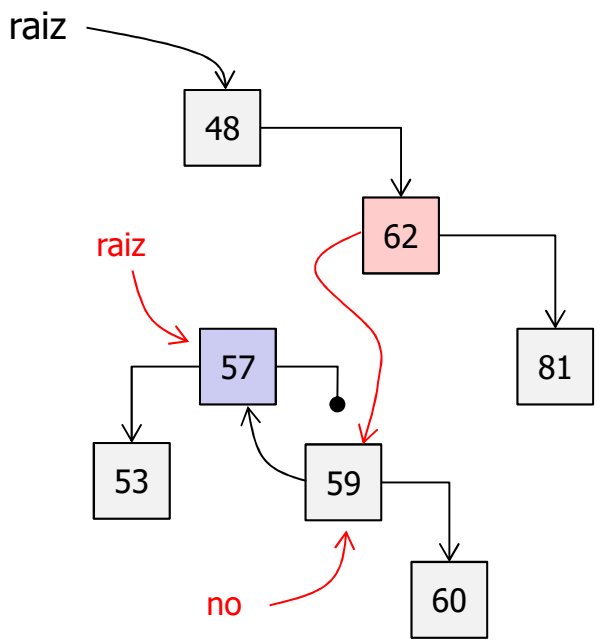
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação LL na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

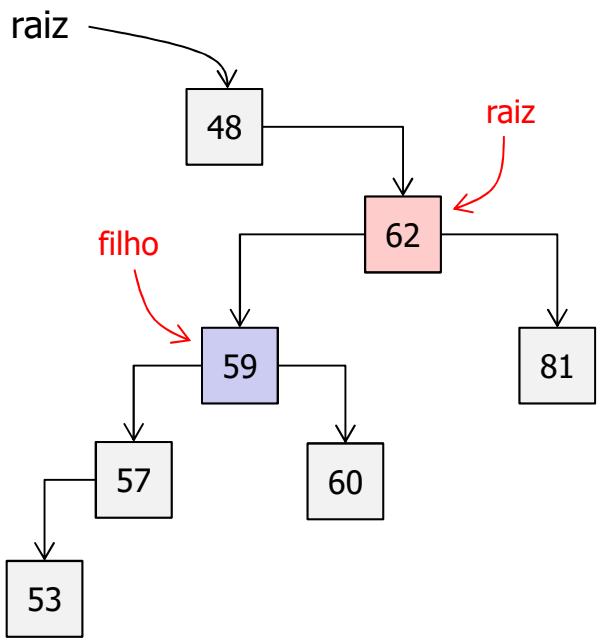
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação LL na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

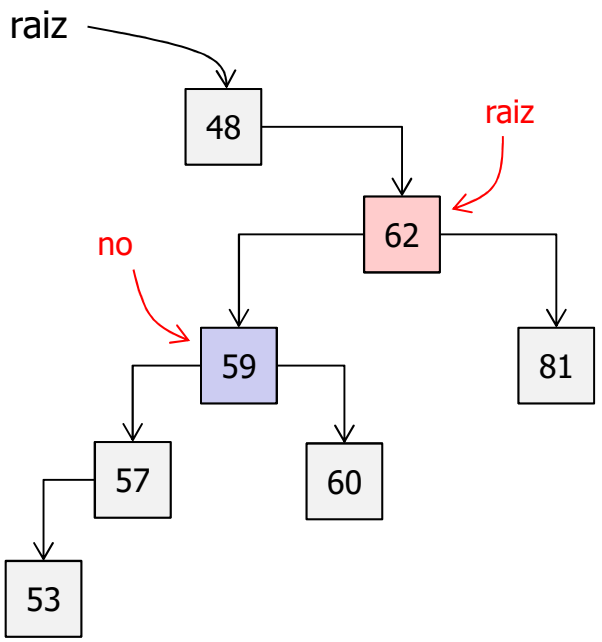
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho

Rotação LL na raiz

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

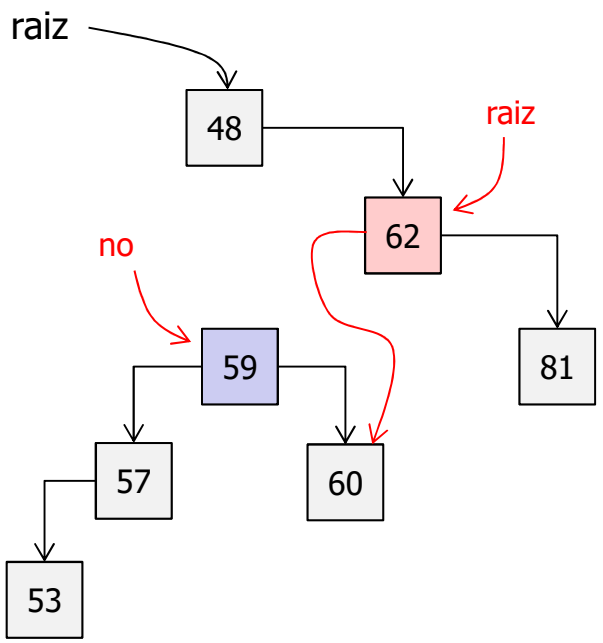
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho

Rotação LL na raiz
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

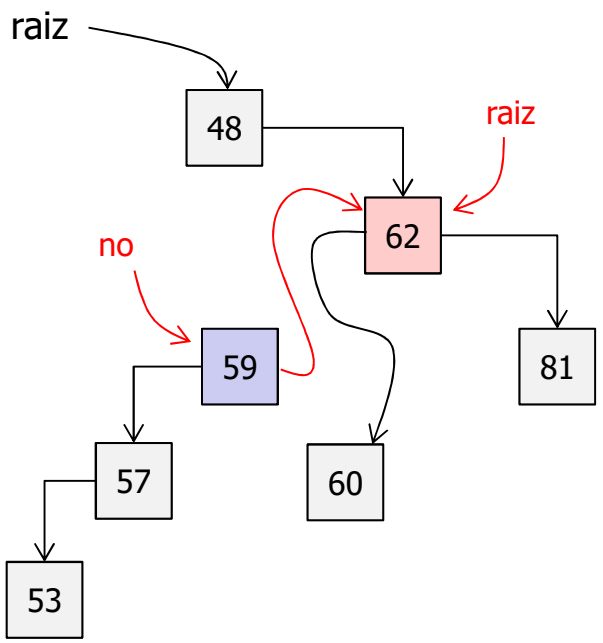
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho

Rotação LL na raiz
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

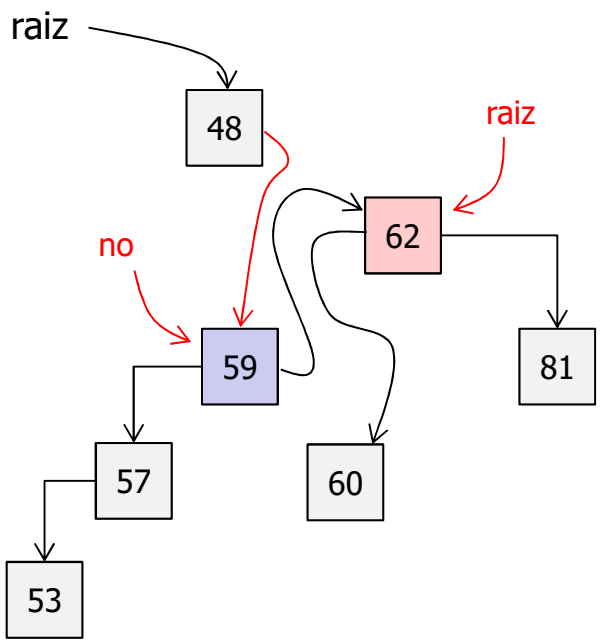
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho

Rotação LL na raiz
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

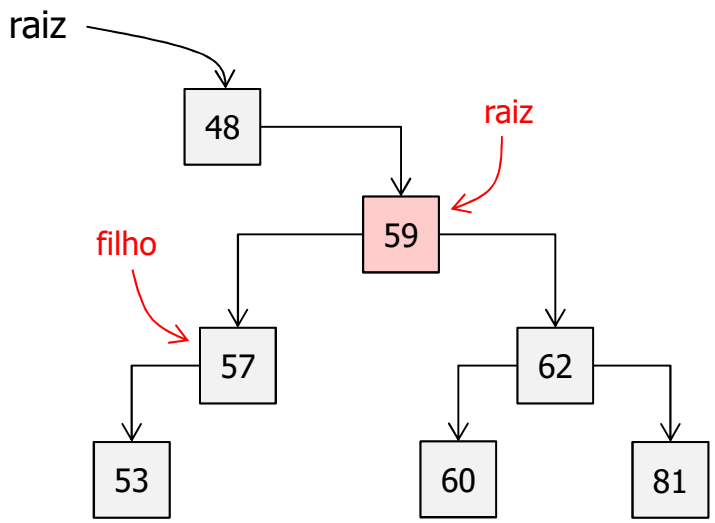
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho

Rotação LL na raiz
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Rotação LR

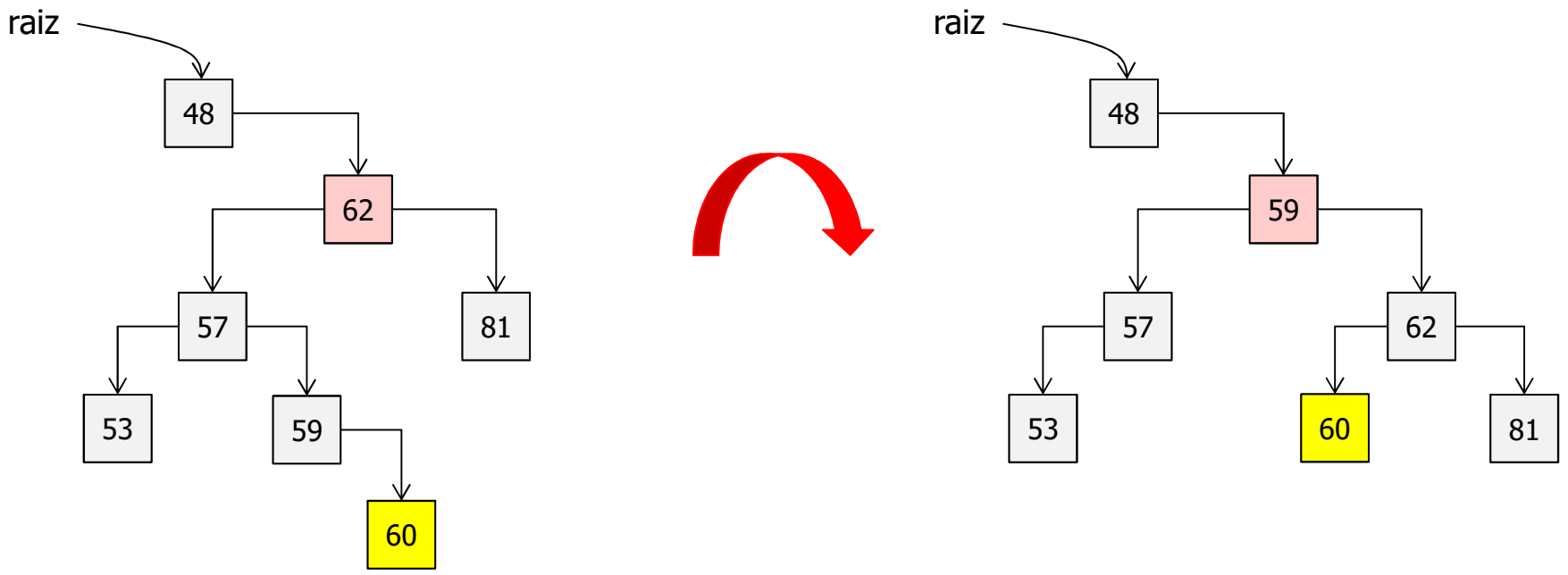
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação RR no filho

Rotação LL na raiz

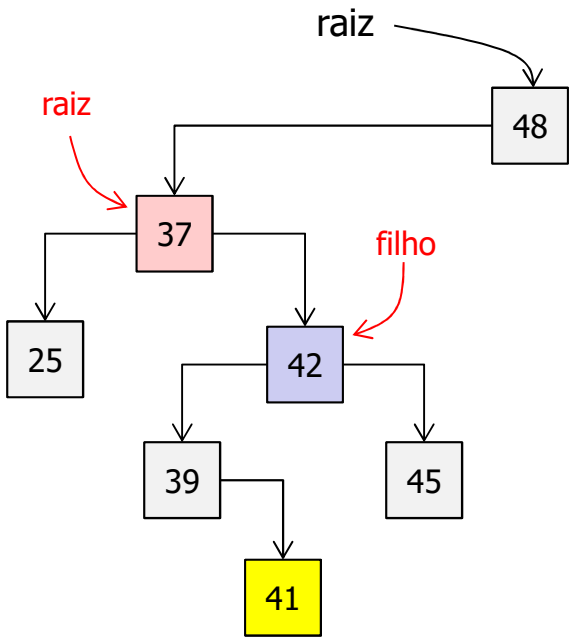
Árvores AVL

- Rotação Dupla à Direita: nó inserido está à direita do filho esquerdo do nó desbalanceado.



Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

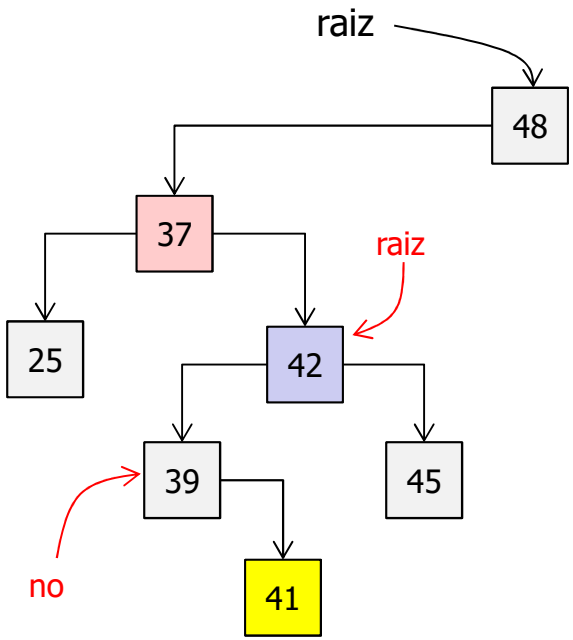
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho

Rotação RR na raiz

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

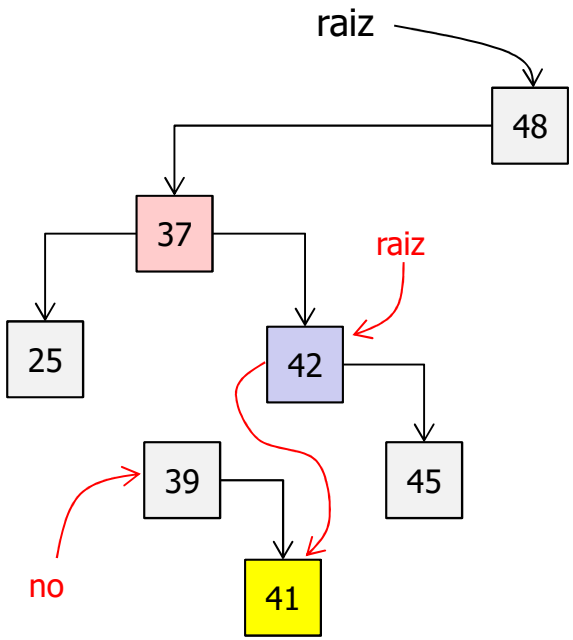
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação RR na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

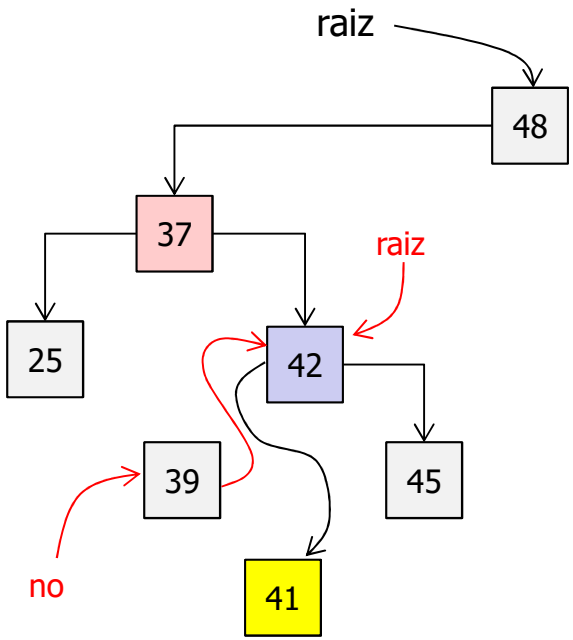
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação RR na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

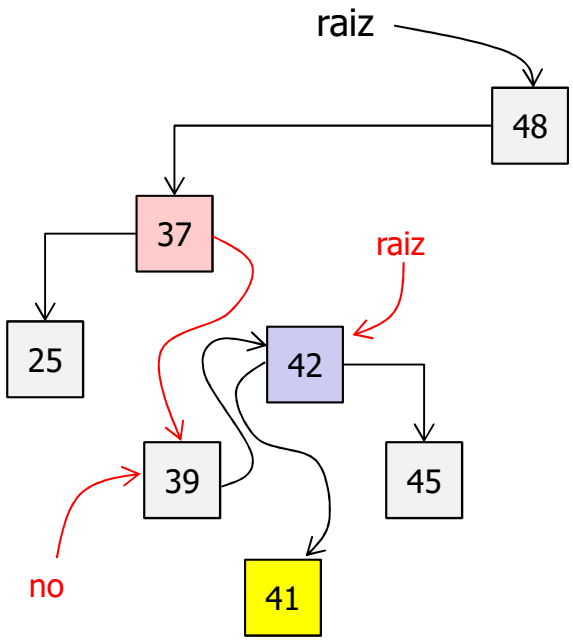
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação RR na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

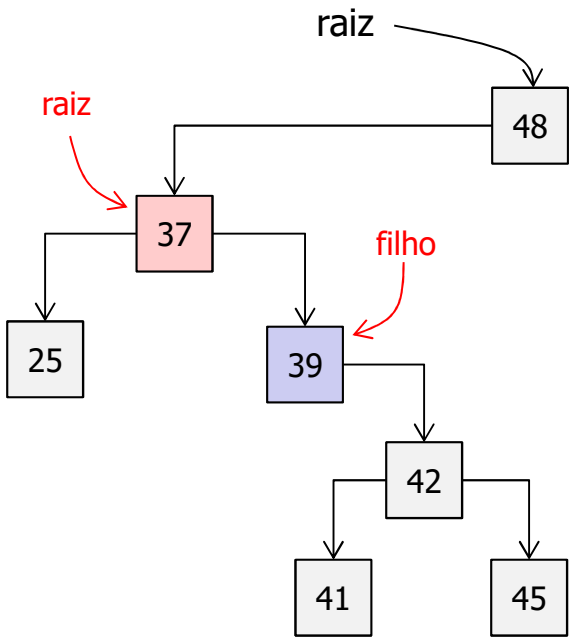
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho
  no = raiz->esq
  raiz->esq = no->dir
  no->dir = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.

Rotação RR na raiz
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

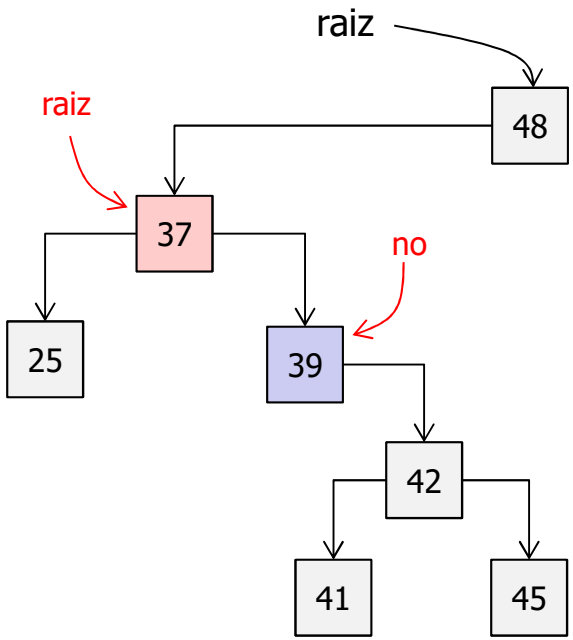
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho

Rotação RR na raiz

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

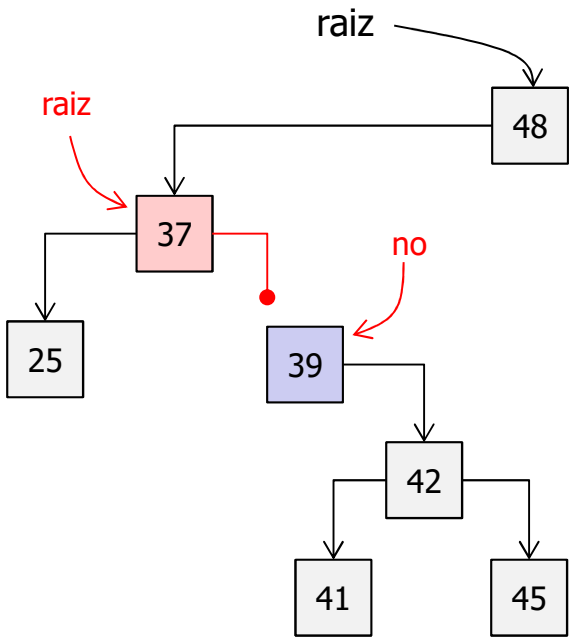
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho

Rotação RR na raiz
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

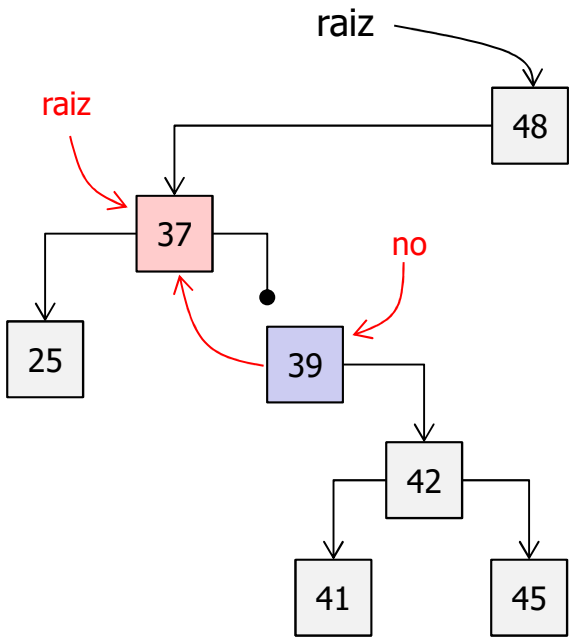
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho

Rotação RR na raiz
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

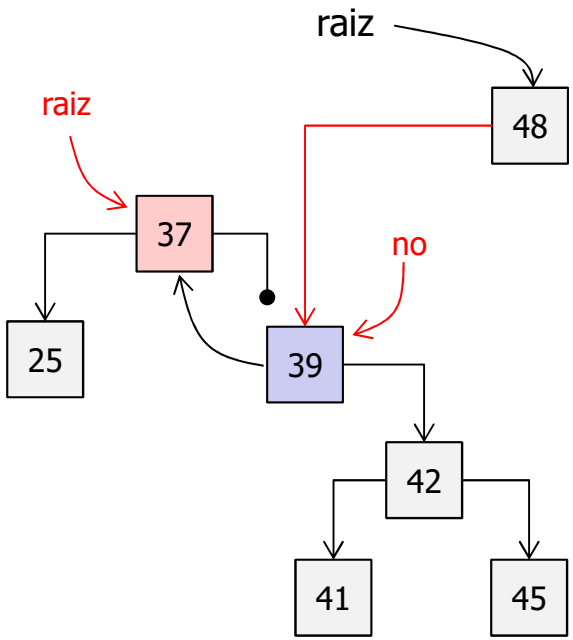
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho

Rotação RR na raiz
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

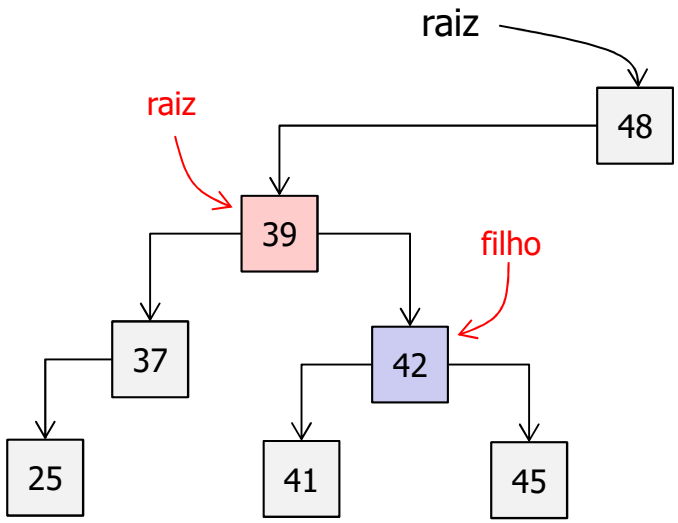
```
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho

Rotação RR na raiz
  no = raiz->dir
  raiz->dir = no->esq
  no->esq = raiz
  Por fim, nó passa a ser a raiz.
```

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Rotação RL

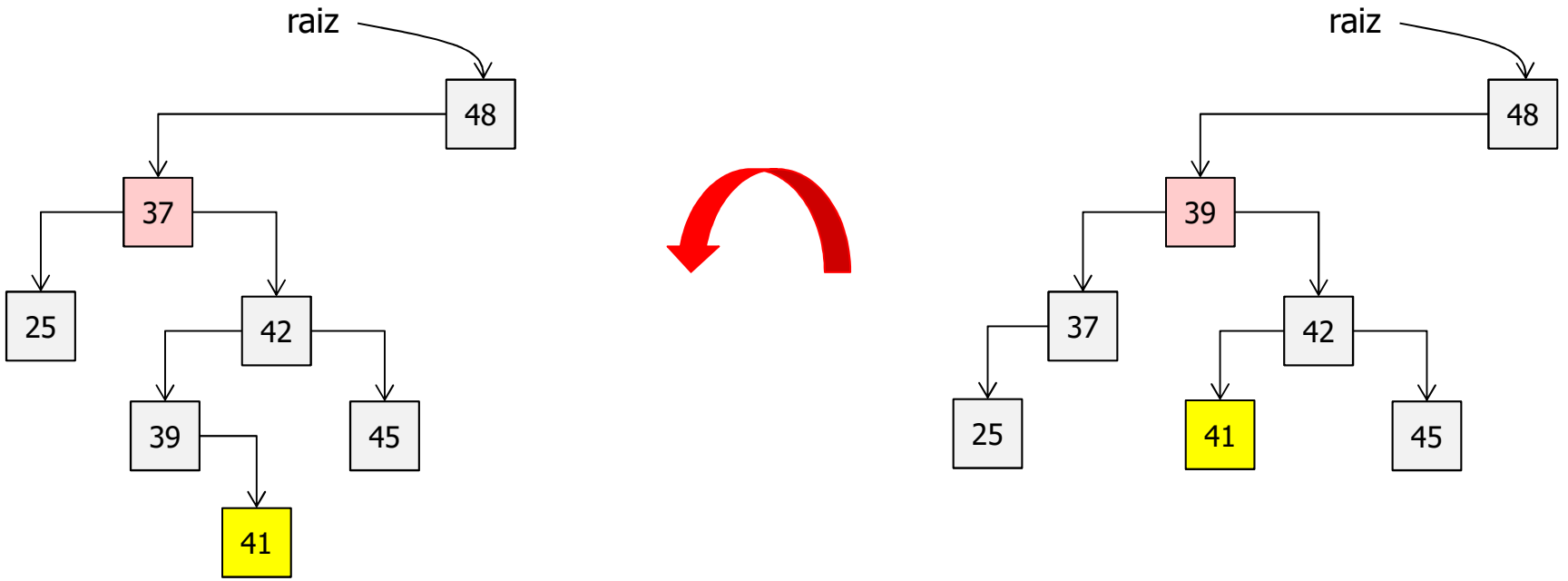
Raiz referencia o nó desbalanceado:

Rotação LL no filho

Rotação RR na raiz

Árvores AVL

- Rotação Dupla à Esquerda: nó inserido está à esquerda do filho direito do nó desbalanceado.



Inserção em Árvores AVL

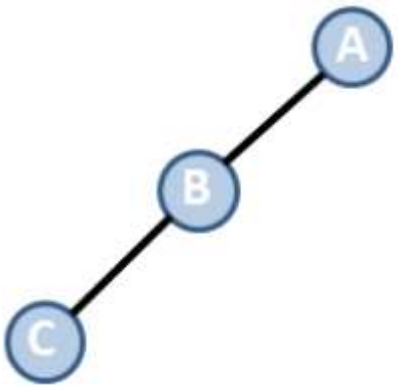
- A inserção em árvores AVL usa o mesmo algoritmo das Árvores Binárias de Busca. A mudança está na verificação do fator de balanceamento e a tomada de decisão de qual rotação aplicar.

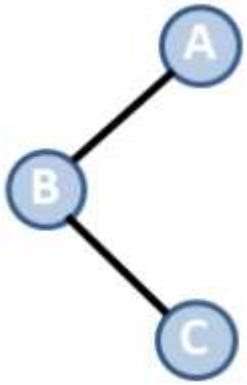
```
se se valor < raiz.valor então
   Insere raiz.esquerda
   se o fator de balanceamento da raiz >= 2 então
      se valor < raiz.esquerda.valor então
         Rotação LL
      senão
         Rotação LR
      fim-se
   fim-se
senão se valor > raiz.valor então
   Insere raiz.direita
   se o fator de balanceamento da raiz >= 2 então
      se valor > raiz.direita.valor então
         Rotação RR
      senão
         Rotação RL
      fim-se
   fim-se
fim-se
```

Inserção em Árvores AVL

- Trecho do código em C/C++: inclusão à esquerda

```
else if (valor < r->valor) {
   r->esq = insere(r->esq, valor);
   r->h = alturaNo(r);
   if (fatorBalanceamento(r) >= 2) {
      if (valor < r->esq->valor)
         r = rotacaoLL(r);
      else
         r = rotacaoLR(r);
   }
}
```

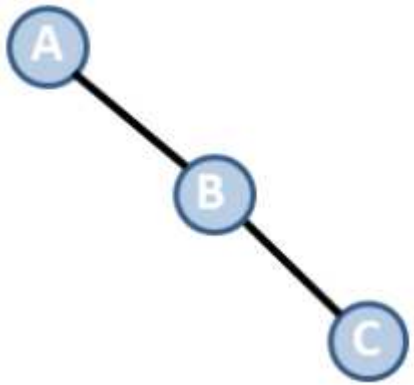


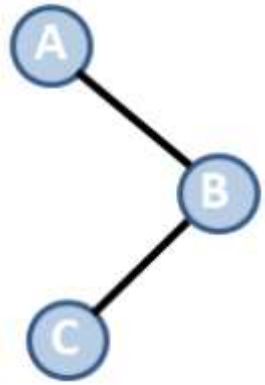


Inserção em Árvores AVL

- Trecho do código em C/C++: inclusão à direita

```
else if (valor > r->valor) {
   r->dir = insere(r->dir, valor);
   r->h = alturaNo(r);
   if (fatorBalanceamento(r) >= 2) {
      if (valor > r->dir->valor)
         r = rotacaoRR(r);
      else
         r = rotacaoRL(r);
   }
}
```



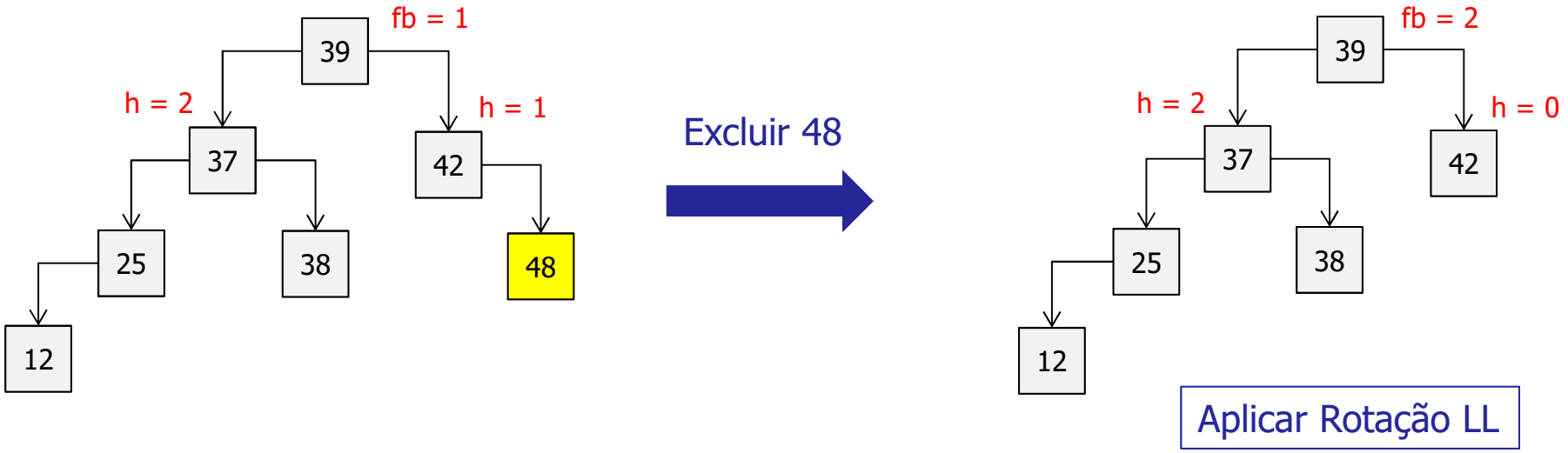


Exclusão em Árvores AVL

- A exclusão em árvores AVL usa o mesmo algoritmo das Árvores Binárias de Busca.
- A mudança está na verificação do fator de balanceamento e a tomada de decisão de qual rotação aplicar.
- As rotações LL, RR, LR e RL apresentadas anteriormente também são aplicadas na exclusão, porém a ordem deve ser invertida:
  1. Excluir um nó da subárvore à direita equivale a inserir um nó na subárvore à esquerda.
  2. Excluir um nó da subárvore à esquerda equivale a inserir um nó na subárvore à direita.

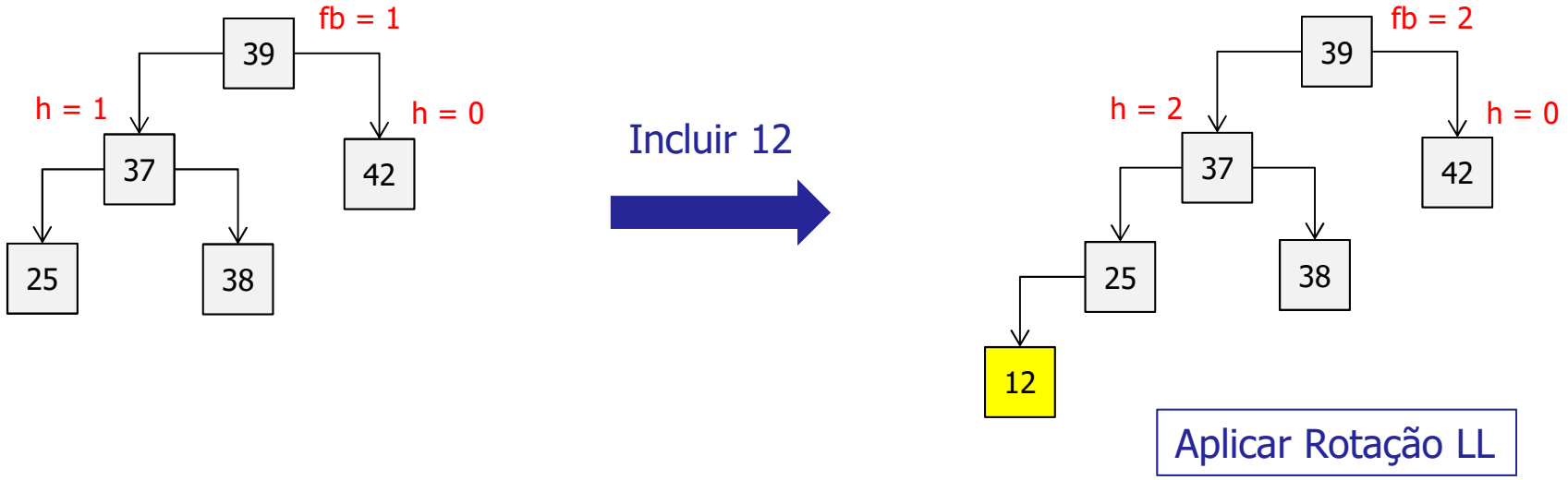
Exclusão em Árvores AVL

1. Excluir um nó da subárvore à direita equivale a inserir um nó na subárvore à esquerda.



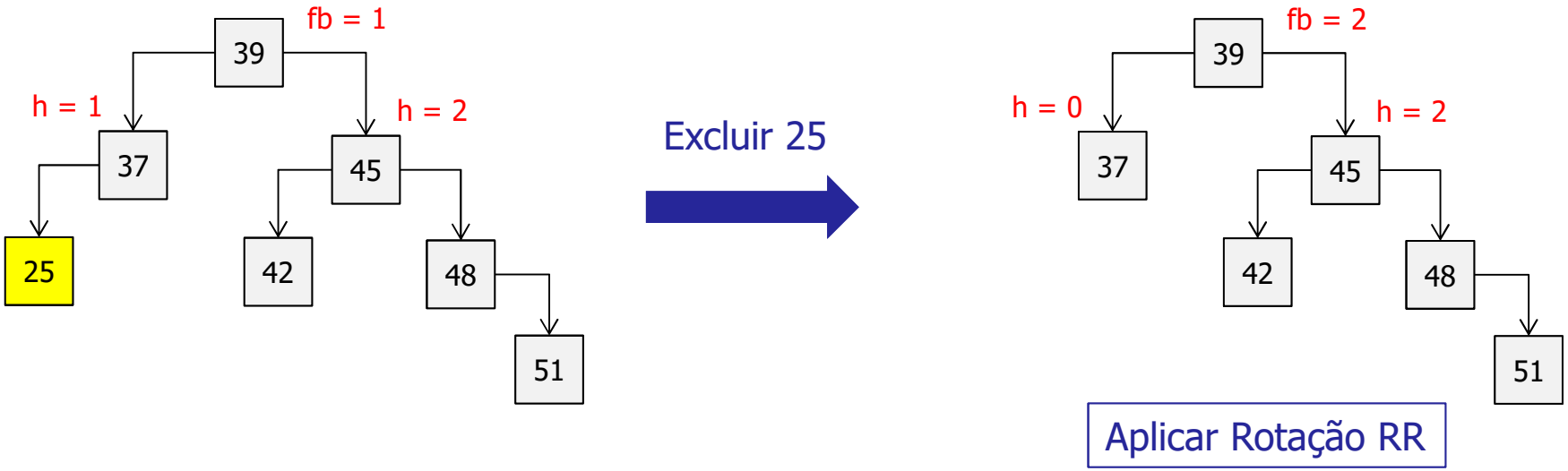
Exclusão em Árvores AVL

1. Excluir um nó da subárvore à direita equivale a inserir um nó na subárvore à esquerda.



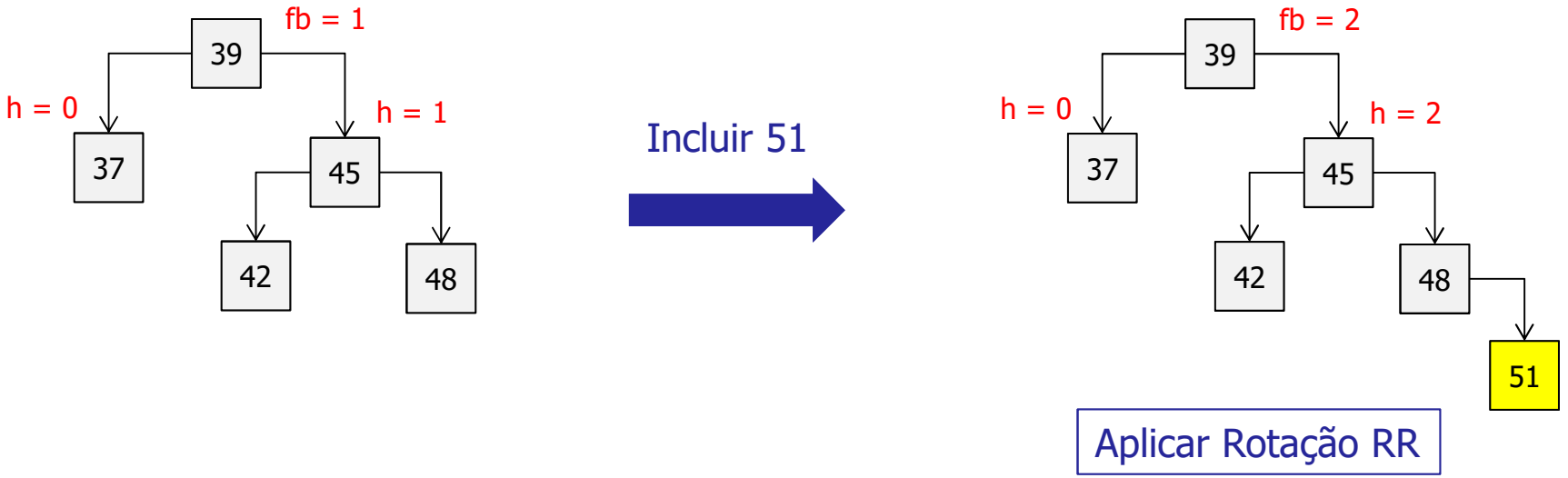
Exclusão em Árvores AVL

2. Excluir um nó da subárvore à esquerda equivale a inserir um nó na subárvore à direita.



Exclusão em Árvores AVL

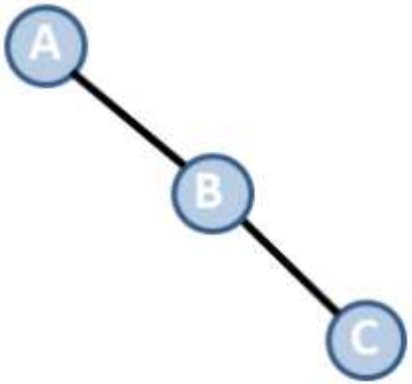
2. Excluir um nó da subárvore à esquerda equivale a inserir um nó na subárvore à direita.

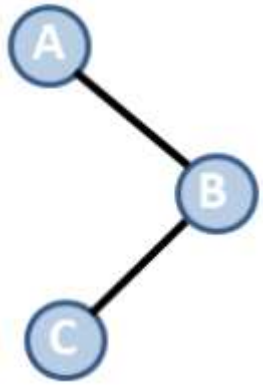


Exclusão em Árvores AVL

- Trecho do código em C/C++: exclusão à esquerda

```
else if (valor < r->valor) {
   r->esq = exclui(r->esq, valor);
   r->h = altura(r);
   if (fatorBalanceamento(r) >= 2) {
      if (alturaNo(r->dir->dir) > alturaNo(r->dir->esq))
         r = rotacaoRR(r);
      else
         r = rotacaoRL(r);
   }
}
```





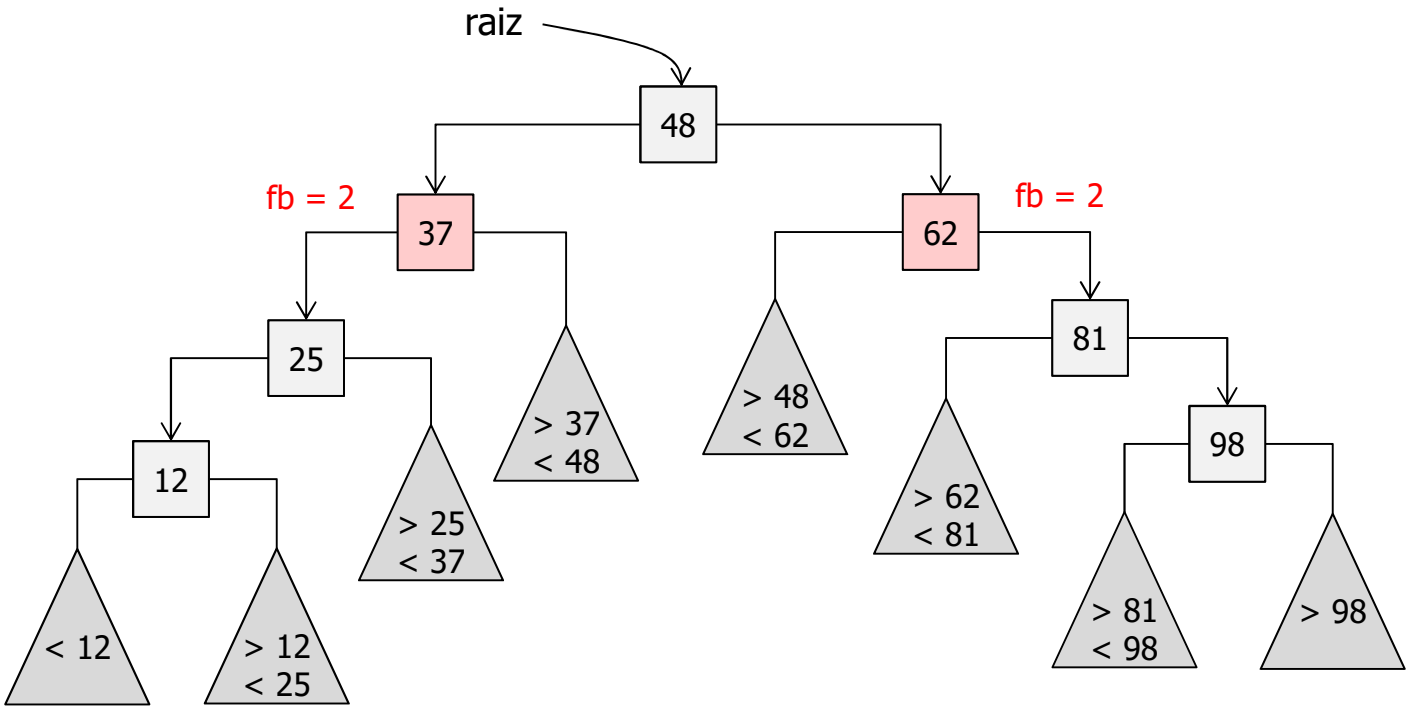
Exclusão em Árvores AVL

- Trecho do código em C/C++: exclusão à direita

```
else if (valor > r->valor) {
   r->dir = exclui(r->dir, valor);
   r->h = altura(r);
   if (fatorBalanceamento(r) >= 2) {
      if (alturaNo(r->esq->esq) > alturaNo(r->esq->dir))
         r = rotacaoLL(r);
      else
         r = rotacaoLR(r);
   }
}
```

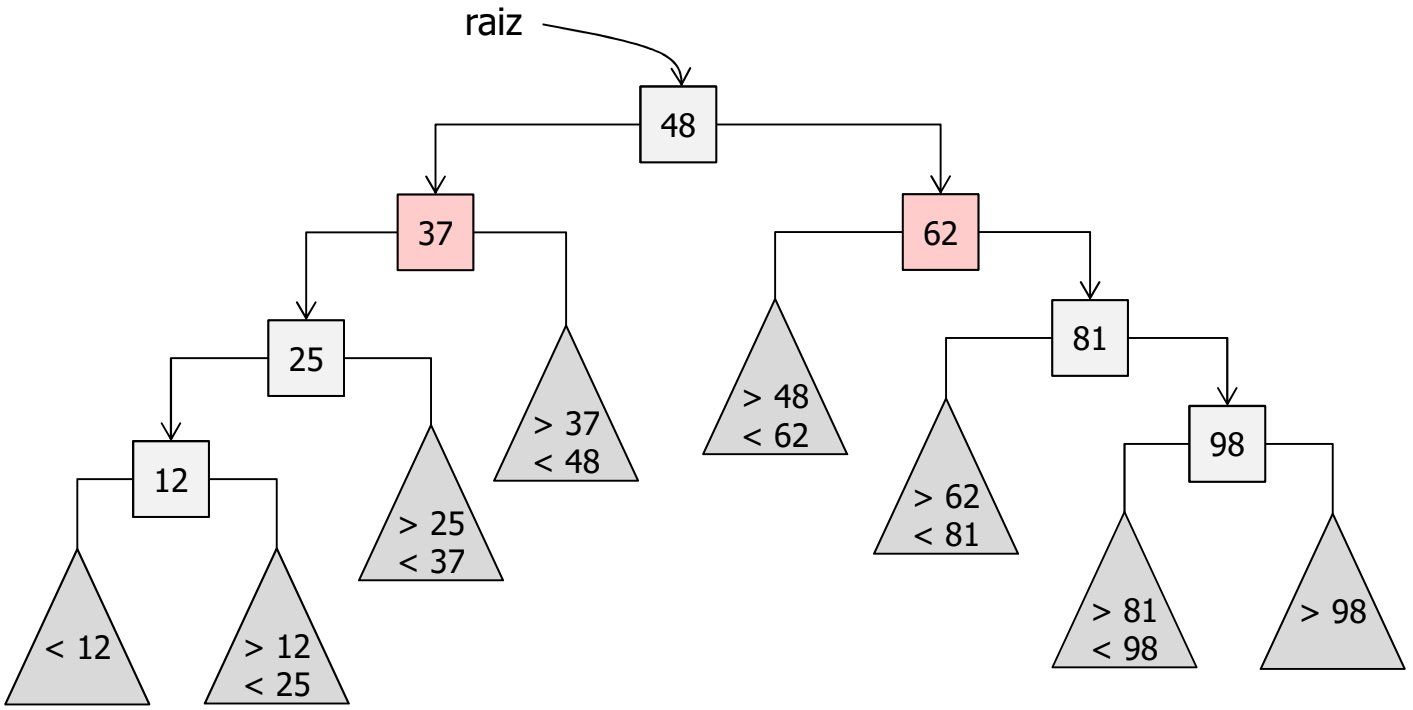
Árvores AVL

- Rotação Simples: o nó desbalanceado, seu filho e neto estão todos no mesmo sentido (ou todos para esquerda ou todos para direita).



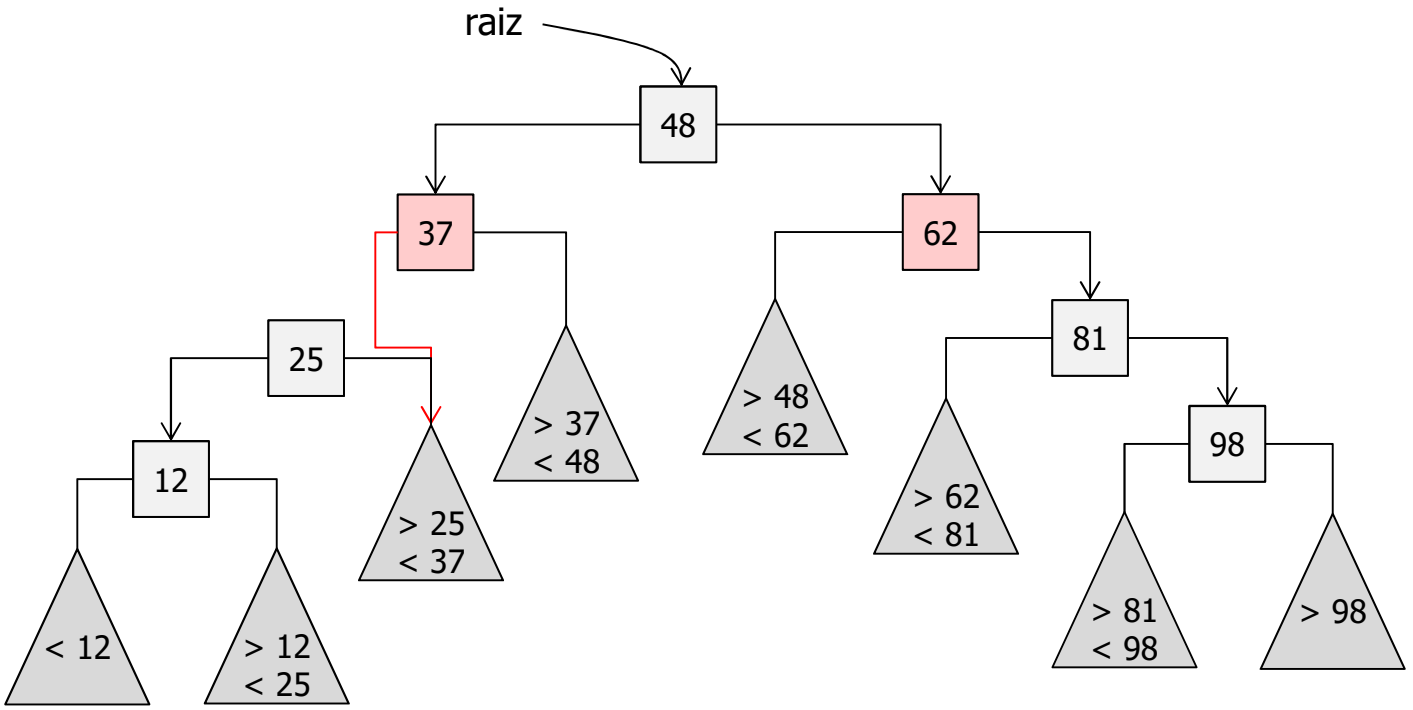
Árvores AVL

- Rotação Simples: o nó desbalanceado, seu filho e neto estão todos no mesmo sentido (ou todos para esquerda ou todos para direita).



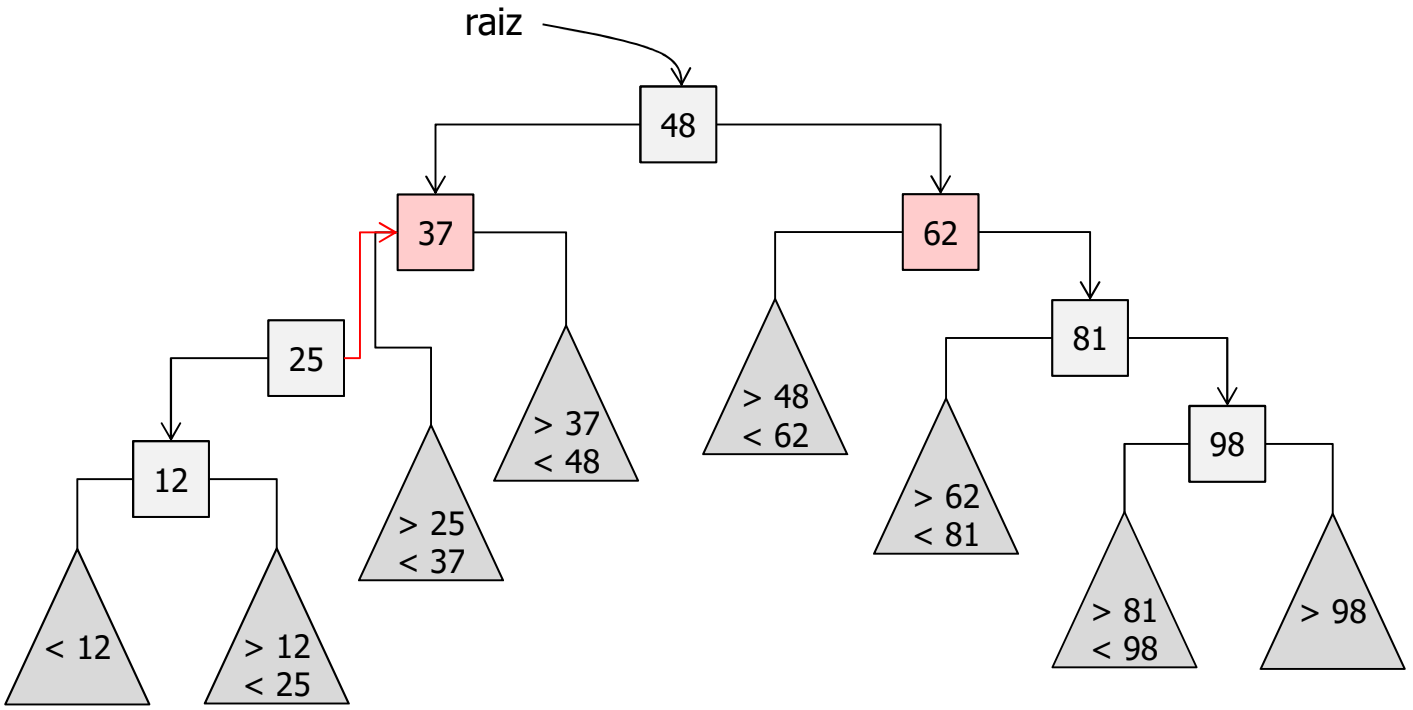
Árvores AVL

- Rotação Simples: o nó desbalanceado, seu filho e neto estão todos no mesmo sentido (ou todos para esquerda ou todos para direita).



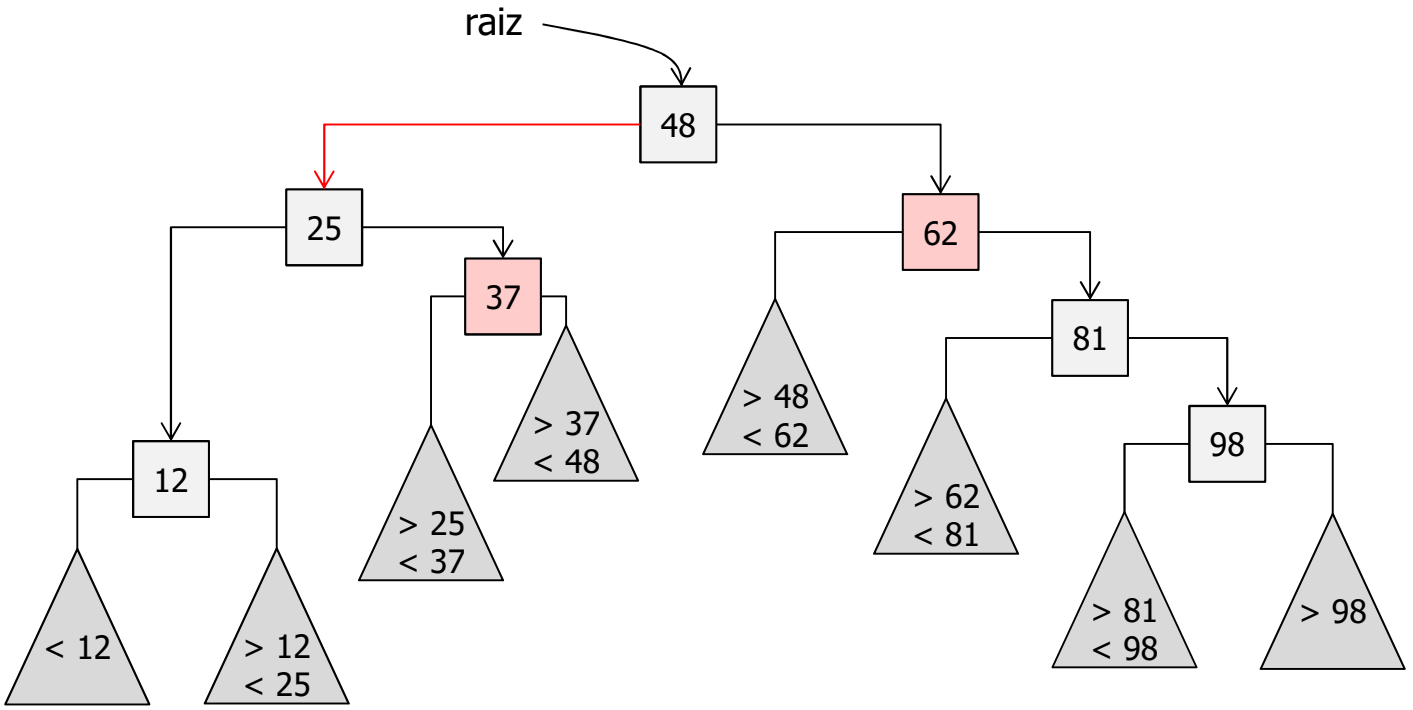
Árvores AVL

- Rotação Simples: o nó desbalanceado, seu filho e neto estão todos no mesmo sentido (ou todos para esquerda ou todos para direita).



Árvores AVL

- Rotação Simples: o nó desbalanceado, seu filho e neto estão todos no mesmo sentido (ou todos para esquerda ou todos para direita).



Árvores AVL

- Rotação Simples: o nó desbalanceado, seu filho e neto estão todos no mesmo sentido (ou todos para esquerda ou todos para direita).