1 Квадратичные поля

Введём необходимые определения. Пусть, L, K — поля, причём $K \subset L$.

Определение 1. Элемент $\alpha \in L$ называется *алгебраическим над* K, если:

$$\exists (f \in K[x], f \neq 0) \colon f(\alpha) = 0.$$

Пусть α — алгебраичен над K. Рассмотрим множество всех многочленов из $K[x]$, корнем которых он является: $I = f \in K[x] : f(\alpha) = 0$. Это множество является идеалом в кольце многочленов $K[x]$. Этот идеал является главным с образующей — $m(x)$ — *минимальным многочленом для* α

Определение 2. Расширение L поля K называется *алгебраическим*, если каждый элемент L алгебраичен над K.

Мы можем рассматривать расширение числового поля как векторное пространство над самим этим полем. Предположим, что мы хотим расширить поле K*, добавив в него некоторый элемент* α*, и, тем самым, получив расширение* L*. В таком случае, каждый элемент* l *расширения можно представить в виде:* $l = a + b \cdot \alpha$*, где* $a, b \in K$*. Очевидно, что базисом* L *будет* $(1, \alpha)$*, а размерность такого векторного пространства будет 2.*

Определение 3. *Степенью расширения* L *над полем* K называется размерность L как векторного пространства над K.

$$(L \colon K) = \dim_K L = \dim L, \text{ где } L =< 1, \alpha >$$

Определение 4. *Квадратичным полем* называется любое расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ степени 2.

Пусть рациональное, свободное от квалратов число $d \neq 1$*, тогда многочлен* $x^2 - d = 0$ *неприводим над полем* $\mathbb{Q}$ *и поле* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$*, полученное из* $\mathbb{Q}$ *присоединением корня этого многочлена, является квадратичным.*

Предметный указатель