



Fundação Universidade Federal do ABC

Pró reitoria de pesquisa

Av. dos Estados, 5001, Santa Terezinha, Santo André/SP, CEP 09210-580

Bloco L, 3ºAndar, Fone (11) 3356-7617

iniciacao@ufabc.edu.br

Projeto de Iniciação Científica submetido  
para avaliação no Edital: PIBIC 04/2022

**Título do projeto:** Estudo da Estatística fractal e Análise do DCM para Aglomerados de Estrelas Jovens

**Palavras-chave do projeto:** Aglomerados abertos: Física do meio interestelar; aglomerados de estrelas; Interpolação Cúbica; Diagrama Cor-Magnitude.

**Área do conhecimento do projeto:** Astrofísica estelar, Astrofísica do meio interestelar

## Sumário

1 Resumo.....	2
2 Introdução e Justificativa .....	2
3 Objetivos .....	8
4 Metodologia .....	9
5 Viabilidade (Opcional) .....	9
6 Cronograma de atividades .....	9
Referências.....	10

## 1 Resumo

Uma questão importante ao se tratar dos estudos de grupos de estrelas jovens é a mistura de possíveis membros do aglomerado com componentes do fundo da galáxia, bem como o estudo de parâmetros de massa e idade para os membros. Em trabalhos anteriores (Gregorio-Hetem 2015, 2019) foram desenvolvidos algoritmos que utilizaram de técnicas de inteligência artificial (como os algoritmos genéticos) para atribuir para cada uma das estrelas estudada uma probabilidade de pertinência ao grupo, ou possíveis subgrupos, utilizando como critério os parâmetros de velocidade e posição das fontes. Em posse dos valores de pertinência é possível medir o parâmetro fractal  $Q$  (Cartwright & Whitworth 2004) e investigar sua relação com as propriedades de agrupamento e evolução dos membros, bem como realizar o estudo das massas e idades das estrelas através da construção do diagrama cor-magnitude (DCM) para os aglomerados. Anteriormente, pesquisas já publicadas (Gregorio-Hetem 2019, Yamanaki & Hetem 2020) derivaram os parâmetros de massa e idade das estrelas através do método de ajuste (*fitting*) no DCM proposto por Bonatto (2019), que se baseia na sobreposição e comparação do diagrama de cor-magnitude (plotado para os membros) e os modelos teóricos evolutivos e isócronas providenciados pelo modelo PARSEC, por Bressan et al (2012) e Marigo et al (2017). Neste projeto, pretende-se realizar uma análise de um conjunto de aglomerados, que passaram por análises semelhantes em Gregorio-Hetem (2019), com o propósito de investigar propriedades de agrupamento e evolução dinâmica de seus membros estelares. Além do parâmetro  $Q$  medido para os grupos, e suas respectivas correlações com a dimensão fractal, pretende-se otimizar o processo de ajuste dos dados aos modelos evolutivos PARSEC através do método de interpolação de *splines* cúbicas para derivação de valores mais precisos de massa e idade para os membros no DCM. As propriedades acima discutidas podem levar a conclusões sobre as condições iniciais de formação dos aglomerados, evolução inicial e evolução dinâmica galáctica, bem como idade e massa ( $M_{total}$ ) para os aglomerados, além da segregação de massa dinâmica  $\Lambda_{MSR}$ .

## 2 Introdução e Justificativa

Os aglomerados jovens podem ser encontrados em duas formas, sendo estas a de conjuntos espalhados com grande número de membros ou ainda concentrações mais densas de estrelas, que ainda se encontram imersas nas regiões de formação estelar. Quando realizadas análises acerca de uma gama de aglomerados jovens em diferentes escalas e regiões estelares fica evidente a existência de uma hierarquia na organização estrutural destas

estrelas, que por sua vez, pode fornecer informações relevantes acerca da evolução de um cluster, como visto em Elmegreen 2018. Desta forma, levando em consideração este e outros estudos (Elmegreen 2011), (Hetem & Lépine 1993, Gregorio-Hetem 2019) evidencia-se a necessidade do estudo sobre a conexão entre as variadas escalas de grupos e aglomerados.

Um estudo sobre as características dinâmicas e estruturais de um grupo de aglomerados jovens foi realizado por Gregorio-Hetem et al (2015,2019) com objetivo de investigar propriedades do agrupamento e evolução dinâmica, bem como a relação entre os aglomerados e a dimensão fractal estimada para nuvens moleculares projetadas (Hetem & Lépine 1993). Nestes estudos, foco especial foi dado para o parâmetro estatístico fractal  $Q$  (Cartwright & Whitworth 2004) medido para os clusters, além da construção do diagrama de cor-magnitude para as populações através do uso dos modelos teóricos e isócronas de PADOVA (Bressan et al. 2012, Marigo et al.) a fim da obtenção das idades e massas para comparação entre os parâmetros estruturais e dinâmicos.

As conclusões destes trabalhos apontam que mais da metade dos grupos estudados apresentam subagrupamentos que, quando analisados do ponto de vista estatístico e geométrico têm a tendência de reproduzir distribuições semelhantes às observadas em simulações artificiais (Lomax, Whitworth & Cartwright 2011). No que se refere às massas e idades, ao expressar o parâmetro estatístico  $Q$  encontrado para os membros em função das idades, Gregorio-Hetem (2019) sugere que a estrutura dos aglomerados não tenha sofrido alterações significativas nos últimos 10 milhões de anos.

### Aglomerados selecionados

O presente estudo propõe-se a dar continuidade às análises da estrutura e dinâmica evolutiva de clusters que foram previamente estudados em Gregorio-Hetem (2019), de maneira que seja possível comparar os métodos utilizados e resultados alcançados em ambos os trabalhos. Na tabela 1 estão presentes informações principais dos aglomerados selecionados para o estudo, retiradas do catálogo de informações para aglomerados abertos (WEBDA page for open cluster).

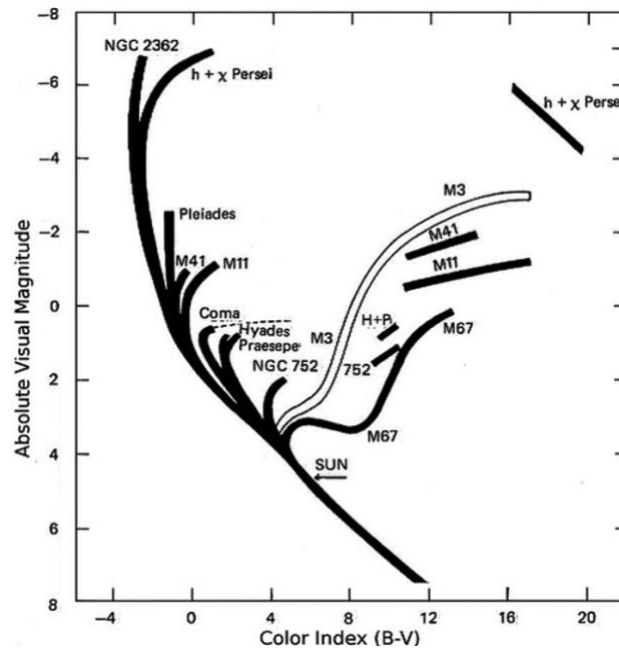
**Tabela 1.** Parâmetros para os aglomerados. As duas primeiras colunas indicam parâmetros de posição do aglomerado em coordenadas galácticas: Ascensão reta ( $\alpha$ ) e declinação ( $\delta$ ). Além disso estão presentes os valores da distância (em parsecs) e avermelhamento para cada um dos aglomerados, bem como a distância espectroscópica (dada pela diferença entre magnitude aparente e magnitude absoluta) e a idade estimada para os aglomerados (em escala logarítmica). Dados disponíveis on-line em *WEBDA open clusters page* ( <https://webda.physics.muni.cz>)

Aglomerado	$\alpha$ (2000)	$\delta$ (2000)	Dist (pc)	AV (mag)	(m-M) (mag)	Idade (log)
Collinder 205	09 00 32	-48 59 00	1853	0.75	13.66	7.20
Berkeley 86	20 20 24	+38 42 00	1112	0.898	13.01	7.116
NGC 2244	06 31 55	+ 04 56 30	1445	0.463	12.23	6.896
NGC 2362	07 18 41	-24 57 18	1389	0.095	11.01	6.914
NGC 3532	11 05 39	-58 45 12	486	0.037	8.55	8.492
NGC 6475	17 53 51	-34 47 36	301	0.103	7.71	8.8475
NGC 6613	18 19 58	-17 06 06	1296	0.450	11.96	7.223
STOCK 13	11 13 05	-58 53 00	1577	0.218	11.66	7.222
STOCK 16	13 19 29	-62 38 00	1640	0.491	12.60	6.915
IC 2391	08 40 32	-53 02 00	175	0.008	6.24	7.661

Alguns dos aglomerados acima foram amplamente estudados e possuem parâmetros estruturais e dinâmicos bem estabelecidos em trabalhos anteriores (Gregorio-Hetem 2019, Yamanaki-Hetem 2020). O aglomerado IC 2391 teve um total de membros estimados  $N_m=114$  pelo processo de pertinências, parâmetro  $Q = 0.88$  e massa total (em massas solares,  $M_\odot$ ) de  $31\pm1$ , e Gregorio-Hetem (2019) sugere que o aglomerado apresenta claramente sinais de segregação de massa dinâmica  $\Lambda_{MSR}^1$ , ao levar em consideração membros muito massivos i.e.  $M \geq 2 M_\odot$ . Enquanto isso, para o aglomerado Collinder 205 obteve-se  $N_m= 143$ ,  $Q = 0.87$  e massa total de  $156 \pm 2 M_\odot$ . Ao contrário de IC 2391, Collinder não apresentou indícios de segregação de massa dinâmica  $\Lambda_{MSR}$ .

### Diagrama Cor-Magnitude: Massas e Idades

O diagrama de Hertzsprung-Russel foi criado a partir de formulações independentes por Ejnar Hertzsprung (1873-1967) e Henry Norris Russel (1877-1957) em 1911 e 1913, respectivamente, e se trata de um gráfico de dispersão que estabelece uma relação entre a luminosidade e a temperatura superficial das estrelas. De maneira resumida, ao subir pelo eixo vertical estão as estrelas maiores e mais luminosas enquanto, para o eixo horizontal, estrelas mais quentes se encontram à esquerda e estrelas mais frias se encontram na extremidade direita. Em algumas versões é comum ter o eixo horizontal em função das classes espectrais das estrelas, seguindo a classificação espectral de Harvard. Uma variação do diagrama é dada através do uso da relação entre os índices de cor, dispostos no eixo horizontal, e magnitude absoluta ou magnitude aparente (no caso de aglomerados com estrelas de distâncias conhecidas), disposta no eixo vertical do diagrama (Figura 1).



**Figura 1.** Diagrama cor-magnitude indicando trilhas evolutivas para aglomerados abertos. Magnitude absoluta em função dos índices de cor (B-V) do sistema de Johnson-Morgan. Diagrama publicado por Alan Sandage em 1957 (Astrophysical Journal).

<sup>1</sup> Medidas de  $\Lambda_{MSR} > 1$  indicam segregação de massa dinâmica, já valores de  $\Lambda_{MSR} \cong 1$  são esperados para o caso em que as estrelas mais massivas se encontram distribuídas da mesma maneira que as demais (Gregorio-Hetem 2019)

O diagrama de cor-magnitude é baseado inteiramente em parâmetros fotométricos estimados para as estrelas e se trata de um ponto de partida observacional para o estudo de populações estelares (Bonatto, 2019). Um exemplo de diagrama de cor-magnitude está presente na figura 1 e foi publicado pela primeira vez em 1957 por Alan Sandage (1957).

Por definição (Oliveira-Saraiva 2004), a cor associada à uma estrela é dada pela diferença entre as magnitudes medidas em dois filtros diferentes para a mesma estrela. Tal definição vem da razão entre os fluxos<sup>2</sup> em diferentes bandas de um sistema de magnitudes. No diagrama presente na Figura 1, por exemplo, utiliza-se o sistema fotométrico de Johnson-Morgan (Johnson-Morgan 1953) que se baseia no uso de três filtros que permitem a passagem de bandas específicas do espectro eletromagnético emitido pelas estrelas. Os filtros são posicionados na banda do ultravioleta (U), na região do azul (B) e no visível (V). Após medir a magnitude para cada banda espectral é possível encontrar os índices de cor U-B e B-V para uma estrela.

Outros fenômenos importantes no processo de detecção da luz proveniente das estrelas são a extinção atmosférica e extinção interestelar. Denomina-se extinção o processo de atenuação da luz das estrelas pela poeira interestelar ou ainda por outros meios. Nestes fenômenos, ao atravessar a poeira interestelar ou a atmosfera terrestre, parte da luz emitida pelas estrelas é refletida, absorvida ou espalhada. Neste contexto é comum ocorrer a atenuação da luz emitida em menores comprimentos de onda, em especial para a luz azul, que é amplamente absorvida pela poeira interestelar, resultando em um excesso de cor para o vermelho, ou ainda, o avermelhamento ( $A_v$ ) da luz. Assim, é útil considerar a correção das medidas de magnitude para o excesso de cor.

### Trilhas evolutivas e isócronas

Além de apresentar informações pontuais de luminosidade e temperatura para uma estrela, o diagrama H-R também permite traçar um “caminho” de evolução para as estrelas, acompanhando seu processo de envelhecimento e como tal processo influencia em alterações na luminosidade (e consequentemente em sua temperatura). Os traços evolutivos dependem diretamente da massa e seu estudo permite determinar informações importantes acerca da composição química e idade das estrelas, na Figura 1 é possível observar algumas trilhas evolutivas estimadas para os aglomerados indicados.

O ponto inicial desta evolução é comumente apelidado “*turn-off point*” e indica o momento em que uma estrela já consumiu todo seu hidrogênio e deixa a sequência principal podendo migrar para as outras regiões do diagrama, discutidas aqui brevemente. O caminho que determinada estrela realiza a partir deste ponto depende de sua massa, de maneira que estrelas mais massivas deixam o estágio da SP antes que as estrelas menos massivas.

Além das trilhas de evolução tem-se outra característica importante a ser derivada para o DCM. As isócronas são definidas como curvas que representam estágios de mesma idade para diferentes massas e se demonstram úteis na determinação das idades de membros em aglomerados jovens.

### Os modelos Teóricos e o Método de Interpolação Cúbica

Em seu trabalho sobre o assunto, Bonatto (2019) discute o estudo de parâmetros fundamentais para os aglomerados de estrelas, avaliados sob diferentes estados dinâmicos, é

---

<sup>2</sup> Define-se fluxo como a energia por unidade de área e unidade de tempo, medida pelo detector.

de importante contribuição para os mais diversos trabalhos envolvendo aglomerados, bem como trabalhos envolvendo a taxa de formação de estrelas na galáxia. Desta forma, fica evidente que os parâmetros fotométricos oferecem o caminho mais simples e dinâmico para a coleta de dados de populações estelares, e que, uma vez construídos os DCM, tais dados podem ser evoluídos e utilizados a fim de derivar características fundamentais. O método empregado neste trabalho para a derivação dos valores de massa e idade para os membros dos aglomerados deverá consistir no uso das trilhas evolutivas e isócronas providenciados pelo modelo teórico de PARSEC proposto por Bressan et al (2012) e Marigo et al (2017).

Para tal, pretende-se utilizar o método de ajuste proposto por Bonatto (2019) e utilizado previamente em Gregorio-Hetem (2019) para estimação das massas estelares  $M_*$  e idades para os aglomerados. Tal método consiste na extração dos parâmetros fundamentais buscados por meio das informações presentes no diagrama cor-magnitude plotado para os dados. Deve-se então encontrar uma versão artificial (teórica) do diagrama que melhor se aproxime dos dados reais. De acordo com Gregorio-Hetem (2019) este método oferece a possibilidade de determinação de uma gama variada de parâmetros e é ideal para o caso de grande número de membros.

A técnica a ser aplicada é a interpolação via *splines* cúbicas. De forma geral, o que será feito é obter uma função interpolante do 3º grau a cada intervalo entre os pontos de dados que representa uma isócrona. A ideia básica das *splines* cúbicas é representar os dados através de uma função cúbica própria a cada intervalo entre os pontos de dados. Ou seja, se houver  $n$  pontos de dados, então a *spline*  $S(x)$  é a função

$$S(x) = \begin{cases} C_1(x), & x_0 \leq x \leq x_1 \\ C_i(x), & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ C_n(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

Onde cada  $C_i$  é uma função cúbica. A forma desta função é um polinômio do tipo

$$C_i(x) = a_i + b_i x + c_i x^2 + d_i x^3$$

Para determinar o *spline* devemos determinar os coeficientes,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  e  $d_i$  para cada  $i$ . Como existem  $n$  intervalos, existem  $4n$  coeficientes a serem determinados. Primeiro, exigimos que o *spline* interpole, exigindo

$$C_i(x_{i-1}) = y_{i-1} \quad \text{e} \quad C_i(x_i) = y_i$$

para cada ponto dos dados. OU seja,

$$a_i + b_i x_{i-1} + c_i x_{i-1}^2 + d_i x_{i-1}^3 = y_{i-1} \quad \text{e} \quad a_i + b_i x_i + c_i x_i^2 + d_i x_i^3 = y_i$$

Notamos que existem  $2n$  dessas condições. Assim, para tornar  $S(x)$  o mais suave possível, deve ser imposto que

$$C'_i(x_i) = C'_{i+1}(x_i) \quad \text{e} \quad C''_i(x_i) = C''_{i+1}(x_i)$$

para todos os pontos internos  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}$ . Em termos de pontos, essas condições podem ser escritas como

$$b_i + 2c_i x_i + 3d_i x_i^2 = b_{i+1} + 2c_{i+1} x_i + 3d_{i+1} x_i^2$$

e

$$2c_i + 6d_i x_i = b_{i+1} + 2c_{i+1} + 6d_{i+1} x_i$$

Existem  $2(n - 1)$  dessas condições. Como cada  $C_i$  é uma função cúbica, há um total de  $4n$  coeficientes no formalismo de  $S(x)$ . Portanto, temos  $4n - 2$  equações, e nos faltam 2 equações para determinar todos os coeficientes. Neste momento temos que fazer uma escolha. A escolha usual é exigir condições especiais nos pontos das bordas,

$$C_i''(x_0) = C_n''(x_n) = 0$$

denominadas condições de condições de contorno naturais ou simples. A outra opção comum é chamada de condições de contorno “grampeadas”:

$$C_i'(x_0) = C_n'(x_n) = 0$$

Observe-se que estas equações são todas equações lineares em relação às incógnitas (coeficientes). Esse recurso facilita o cálculo de *splines*, sendo notório o uso de técnicas numéricas para a sua resolução.

### A Geometria Fractal – o parâmetro $Q$

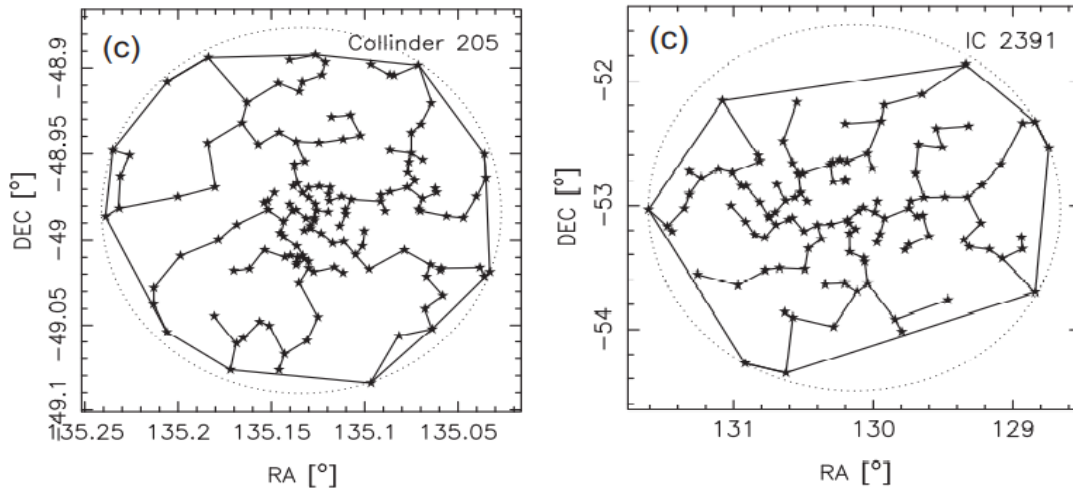
A geometria presente nas relações de distribuições de extensão e massa do gás interestelar apresenta caráter fractal e vem sendo descrita em diversos estudos (Hetem & Lépine 1993; Elmegreen & Falgarone 1996). Sua determinação ocorre através de levantamentos de imageamento de nuvens presentes na literatura ou ainda através de estudos mais aprofundados (Girichidis et al. 2012) que se utilizam de simulações hidrodinâmicas. Desta forma, com o objetivo de identificar a existência de subestruturas em grupos estelares, estudos acerca da evolução dinâmica em regiões de formação estelar, como Parker & Dale 2015; Alfaro & Gonzalez 2016; Jaffa, Whitworth & Lomax 2017, foram realizados tomando diferentes condições iniciais, baseando-se no parâmetro estatístico fractal  $Q$  proposto por Cartwright & Whitworth (2004).

O valor do parâmetro  $Q$  é utilizado para diferenciar as subestruturas com caráter fractal ( $Q < 0,8$ ) de perfis de densidade radial ( $Q > 0,8$ ). Enquanto isso, estruturas que apresentam  $Q \sim 0,8$  se trata de clusters com densidade uniforme Gregorio-Hetem (2019). Um método para reproduzir clusters sintéticos, baseado no movimento Browniano fracionário proposto por Lomax, Bates & Whitworth (2018) oferece resultados mais variados ao se tratar das morfologias estruturais dos aglomerados. Este método utiliza a comparação de diferentes agrupamentos de estrelas em função de  $m$ - $s$ , ambos parâmetros estatísticos utilizados para estimar  $Q$ .

Técnicas da estatística fractal foram utilizadas na comparação dos parâmetros estruturais entre membros de aglomerados (Gregorio-Hetem et al 2015, 2019) e uma fração significativa de clusters apresentou um perfil de densidade radial com uma correlação de índice positivo entre o parâmetro  $\bar{s}$  (Gregorio-Hetem et al 2015) e a densidade estelar superficial média  $\bar{m}$ . De acordo com o trabalho apresentado por Portegies Zwart (2010), resultados similares foram observados, existindo uma relação entre o raio do núcleo das amostrass em função da idade dos clusters. Tal relação é semelhante em várias escalas, indo até os valores observados em grupos estelares da Via Láctea e em galáxias próximas.

Nos estudos discutidos acima, a principal ferramenta para análise da geometria fractal utilizada se tratou do parâmetro  $Q$ , grandeza adimensional definida em função de outros dois parâmetros geométricos  $\bar{m}$  e  $\bar{s}$ . Foi utilizado o parâmetro  $Q$  como uma das principais medidas da geometria fractal. A árvore de expansão mínima (Minimal Spanning Tree) é definida como a única rede de linhas retas capaz de conectar um conjunto de pontos sem que haja ciclos

fechados, de forma que a soma de todos os comprimentos dessas linhas (ou arestas) seja a menor possível. Um exemplo de árvore de abrangência mínima é apresentado na Figura 2.



**Figura 2:** Árvore de abrangência mínima e *convex hull* calculados para os clusters Collinder 205 e IC2391 (Gregorio-Hetem 2019). O resultado consiste na “árvore” cuja soma dos segmentos que ligam as estrelas é a menor possível.

Para a construção da árvore e obtenção do *convex hull*, são utilizados os algoritmos apresentados por Gower & Ross (1969) e Graham (1972). O parâmetro  $\bar{m}$  representa do comprimento do segmento médio normalizado para a árvore de expansão mínima e relaciona a posição projetada de densidade superficial dos membros do aglomerado, sendo definido por

$$\bar{m} = \frac{1}{(A_N N)^{1/2}} \sum_{i=1}^{N-1} m_i$$

onde que  $N$  é o número de estrelas consideradas do aglomerado,  $m_i$  é o comprimento do segmento  $i$  da árvore de expansão mínima, e  $A_N$  é a área do envoltório convexo (ou menor círculo) que engloba todos os pontos projetados no plano do cluster.

O parâmetro  $\bar{s}$  representa a separação média dos pontos, sendo dado por

$$\bar{s} = \frac{2}{N(N-1)R_N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1+1}^N |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$$

onde  $N$  é o número de estrelas,  $R_N$  é o raio do *convex hull* que contém as estrelas; e  $\vec{r}_i$  é a posição da estrela  $i$ .

### 3 Objetivos

São objetivos deste projeto:

- Desenvolver uma ferramenta computacional que execute a interpolação de idades e massas de um grande número de estrelas no diagrama HR;



- Utilizar as idades obtidas em conjunto com o movimento próprio e aprimorar o conjunto de pertinências das estrelas do aglomerado;
- Calcular os parâmetros globais do aglomerado com as estrelas selecionadas;
- despertar vocação científica e incentivar o aluno no desenvolvimento de um projeto científico;
- estimular uma maior articulação entre a graduação e pós-graduação;
- contribuir para a formação de recursos humanos para a pesquisa.

## 4 Metodologia

A metodologia a ser seguida envolverá os seguintes passos (Figura 3):

1. Aquisição dos dados do repositório GAIA DR3 através de solicitações via SQL.
  - a. Os dados serão inicialmente definidos pela posição, raio e distância conhecidos do aglomerado em estudo.
2. Aquisição dos dados para a construção das isócronas no diagrama HR.
3. Desenvolvimento da ferramenta de interpolação de massas e idades.
  - a. Utilização da linguagem *python* e da biblioteca *matplotlib* para a geração de gráficos e histogramas.
4. Aplicação dos algoritmos de agrupamento e cálculo de pertinência.
5. Cálculo dos parâmetros globais dos aglomerados.
6. Avaliação dos resultados e conclusão.

## 5 Viabilidade (Opcional)

Este projeto foi concebido para ser desenvolvido inteiramente com ferramentas disponíveis na Internet e uso de computadores pessoais, sem necessidade de laboratórios ou visitas externas para coleta de dados.

## 6 Cronograma de atividades

**Etapa 1:** Levantamento e estudo da bibliografia sobre os aglomerados e sobre técnicas de interpolação via *splines* cúbicas.

**Etapa 2:** Aquisição de dados.

**Etapa 3:** Desenvolvimento das ferramentas de interpolação.

**Etapa 4:** Cálculos e gráficos de diagnóstico e visualização.

**Etapa 5:** Testes e avaliações.

**Tabela 2** – Cronograma das atividades previstas

Etapa	Mês											
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Etapa 1	X	X	X									
Etapa 2		X										
Etapa 3		X	X	X	X							
Etapa 4			X	X	X	X	X	X	X	X		
Etapa 5								X	X	X	X	X

## Referências

- Alessandro Bressan, Paola Marigo, Léo Girardi, Bernardo Salasnich, Claudia Dal Cero, Stefano Rubele, Ambra Nanni, PARSEC: stellar tracks and isochrones with the Padova and TRIeste Stellar Evolution Code, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Volume 427, Issue 1, 21 November 2012, Pages 127–145
- Alfaro, E. J., & González, M., 2016, MNRAS 456, 2900–2906
- Cartwright, A., & Whitworth, A.P., 2004, MNRAS Volume 348, Issue 2, pp. 589-598.
- Dale, J. E., Ercolano, B., Bonnell, I. A., 2012, MNRAS, 424, 377
- Dale, J. E., Ercolano, B., Bonnell, I. A., 2013, MNRAS, 430, 234
- Davidge, T. J., 2017, ApJ 837:178
- Elmegreen, B. G., 2011, EAS Publications Series, 51, 31
- Elmegreen, B. G., Falgarone, E., 1996, ApJ, 471, 816.
- Fernandes, B. Gregorio-Hetem, J.; Hetem, A. 2012, “Probing the anomalous extinction of four young star clusters: the use of colour-excess, main-sequence fitting and fractal analysis”. A&A, v. 541, p. A95.
- Gieles, M., & Portegies Zwart, S. F., 2011, MNRAS, 410, L6
- Girichidis, P., Federrath, C., Allison, R., Banerjee, R., Klessen, R. S., 2012, MNRAS, 420, 3264
- Gower, J.C., Ross, G.J.S., 1969, Appl. Stat., 18, 54
- Graham R. L., 1972, Inf. Processing Lett., 1, 132
- Gregorio-Hetem, J., 2008, “The Canis Major Star Formation Region”, Handbook of Star Forming Regions Vol. II, Astronomical Society of the Pacific, Bo Reipurth, ed.
- Gregorio-Hetem, J.; Hetem, A.; Santos-Silva, T.; Fernandes, B., 2015, “Statistical fractal analysis of 25 young star clusters”. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, v. 448, p. 2504-2513
- Hetem, A. & Lépine, J. R. D., 1993, A&A 270, 451
- Hetem, A., The Search for Parameters and Solutions: Applying Genetic Algorithms on Astronomy and Engineering. In: Shangce Gao. (Org.). Bio-Inspired Computational Algorithms and Their Applications. 1ed. Rijeka, Croatia: InTech, 2012, v. 1, p. 161-186.
- Jaffa, S. E., Whitworth, A. P., Lomax, O., 2017, MNRAS 466, 1082–1092
- Johnson, H. L.; Morgan, W. W. (1953), Fundamental stellar photometry for standards of spectral type on the revised system of the Yerkes spectral atlas, The Astrophysical Journal, vol. 117, pp. 313–352
- Lada, C. J., & Lada, E. A. 2003, ARA&A, 41, 57
- Lomax, O., Whitworth, P., & Cartwright, A. 2011, MNRAS, 412-627
- Oliveira Filho, Kepler de Souza; SARAIVA, Maria de Fátima Oliveira. Astronomia e Astrofísica. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2004.
- Paola Marigo *et al* 2017 *ApJ* 835 77
- Parker, R. J., & Dale, J. E., 2013, MNRAS, 432-986
- Parker, R. J., & Dale, J. E., 2015, MNRAS 451, 3664–3670
- Parker, R. J., Andersen M., 2014, MNRAS, 441, 784
- Portegies Zwart, S. F., McMillan, S. L. W., Gieles, M., 2010, ARA&A 48, 431
- Sandage, A. 1957. Astrophysical Journal 126, 326.
- Schmeja, S., Klessen, R.S., 2006, “Evolving Structures of Star-Forming Clusters”, A&A 449, 151 – 159.
- Walker, D. L., Longmore, S. N., Bastian, N., Kruijssen, J. M. D., Rathborne, J. M., Galván-Madrid, R., Liu, H. B., 2016, MNRAS 457, 4536.
- Yamanaki, G.E.S., Hetem, A., 2020, JPAUT, v.3, n.2, p.2-20, ISSN:2595-9573.