PRÓ-REITORIA DE PESQUISA
Universidade Federal do ABC

.

Classificação Topológica de Superfícies

Projeto de Iniciação Científica - PIBIC

submetido para avaliação no

Edital Nº 04/2022

Título do projeto: Superfícies topológicas

Palavras-chave: Esfera, Toro, Faixa de Mobius, Plano Projetivo, Garrafa de Klein.

Área de conhecimento do projeto: Matemática - Topologia

Sumário

1 Resumo

Neste projeto, propomos estudar superfícies a partir de um ponto de vista topológico, explorando alguns invariantes topológicos, bem como estudar a classificação de superfícies fechadas e suas implicações. No estudo de superfícies fechadas (compacta sem bordo), três superfícies básicas são usadas como blocos básicos: a esfera, o toro e o plano projetivo. Como, essencialmente, qualquer superfície pode ser construída a partir desses blocos básicos, faz se necessário ter um bom entendimento desses blocos.

2 Introdução e Justificativa

Uma aplicação entre espaços topológicos é um homeomorfismo se é uma aplicação contínua que possui uma inversa contínua. Uma superfície S é um espaço topológico compacto no qual pontos distintos têm vizinhanças distintas, e cada ponto tem uma vizinhança que é homeomorfa ao plano $\mathbb{R}^2$ ou ao semiplano superior $\mathbb{R}^2_+$. Se cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa ao plano, S é uma superfície fechada, caso contrário é chamada de superfície com bordo. Note que superfícies não precisam ser conexas e, por definição, superfícies são compactas. Superfícies são estudadas a menos de homeomorfismo.

Alguns exemplos de superfícies são mostrados na figura abaixo.

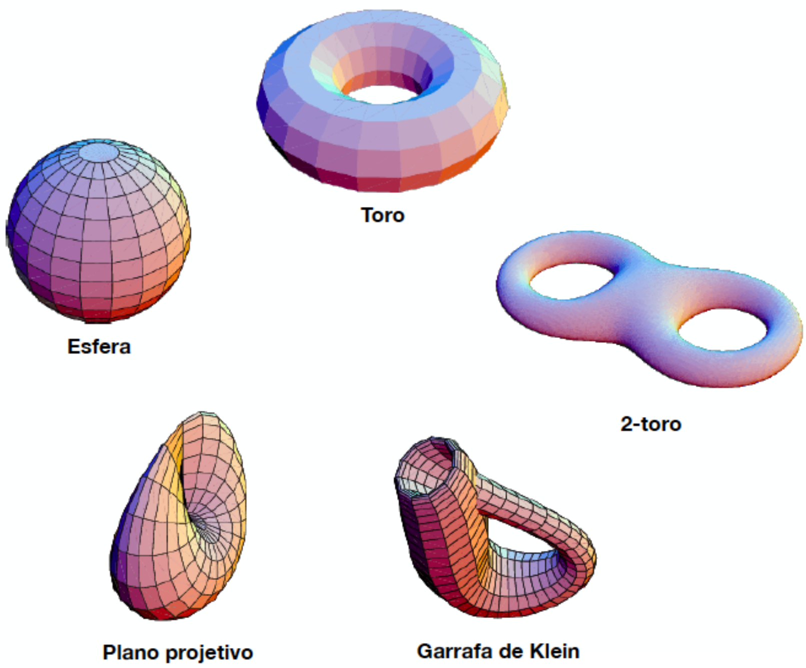

Figura 1: *Algumas superfícies fechadas*

Uma superfície é dita orientável se todo caminho fechado preserva orientação, e é não orientável se existe um caminho fechado que inverte a orientação na superfície. O plano projetivo real e a garrafa de Klein são não-orientáveis, enquanto todos as outras superfícies mostradas na Figura 1 são orientáveis.

A esfera S^2, o toro T^2 e o plano projetivo real $\mathbb{R}P^2$ formam blocos básicos para a construção de todas as outras superfícies. A soma conexa de duas superfícies S_1 e S_2, $S_1 \# S_2$, é obtida excluindo-se o interior de um disco em cada superfície e identificando-se os dois bordos que foram criados. Na Figura 1, o 2-toro corresponde à soma conexa de dois toros. Pode-se mostrar que $\mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ é a garrafa de Klein,

$$S^2 \# S = S \quad \text{e} \quad \mathbb{R}P^2 \# T^2 \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2.$$

O teorema da classificação de superfícies fechadas (compacta sem bordo) afirma que qualquer superfície fechada é homeomorfa à uma esfera ou a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos.

Um poderoso invariante topológico para superfícies é a característica de Euler, uma generalização da famosa fórmula de Euler

$$V - A + f = 2,$$

válida no caso de poliedros convexos. Para generalizar essa fórmula para superfícies S mais gerais, considera-se uma triangularização da superfície, ou seja, um homeomorfismo de um 2-complexo simplicial K em S. Daí, a característica de Euler de S é naturamlente definida por

$$\chi(S) = V - A + F,$$

em que A é o número de arestas de K, V é o número de vértices de K e F é o número de faces de K.

Sejam S_1 e S_2 superfícies fechadas e homeomorfas, então $\chi(S_1) = \chi(S_2)$. Por outro lado, se $\chi(S_1) = \chi(S_2)$ e ambas são orientáveis ou ambas são não-orientáveis, então S_1 é homeomorfa a S_2. Portanto, a característica de Euler é um invariante topológico completo para superfícies fechadas.

Além disso, a característica de Euler está diretamente relacionada à quantidade de "buracos" na superfície. Mais precisamente, se g é o gênus de uma superfície fechada e conexa S, então

i) $\chi(S) = 2 - 2g,$ se S é orientável,

ii) $\chi(S) = 2 - g,$ se S é não-orientável.

As principais referências bibliográficas previstas para serem utilizadas durante a execução do projeto estão descritas na seção de referências.

3 Objetivos

Propomos estudar superfícies a partir de um ponto de vista topológico, explorando alguns invariantes topológicos, bem como estudar a classificação de superfícies fechadas e suas implicações.

3.1 Objetivos Específicos

- Estudar as noções básicas sobre superfícies.
- Estudo topológico da esfera e toro.
- Estudo da faixa de Mobius.

- Estudo topológico do $\mathbb{R}P^2$:
  - Descrição do $\mathbb{R}P^2$ como o espaço das retas intersectam a origem de $\mathbb{R}^3$.
  - Descrição do $\mathbb{R}P^2$ como um espaço quociente da esfera S^2.
  - Descrição do $\mathbb{R}P^2$ como um espaço de identificação de um disco.
- Estudo da garrafa de Klein.
- Elaborar exemplos de superfícies mais gerais construídas a partir dos blocos básicos.
- Aplicar os conceitos e resultados obtidos para compreender a classificação de superfícies fechadas.
- Aprender a elaborar relatórios das atividades, os quais serão escritos em LaTeX.
- Aprender a elaborar apresentações e pôster em LaTeX.

3.2 Objetivos Gerais

- Proporcionar uma iniciação à pesquisa com perspectiva de continuidade na graduação.
- Estimular o desenvolvimento do pensar cientificamente e da criatividade.
- Aprender a isolar um problema em sua essência matemática para então poder associar problemas vindos de diferentes áreas e encontrar soluções mais simples e mais gerais para os mesmos.
- Familiarizar-se com a pesquisa em Matemática, aprender a questionar e buscar soluções novas e/ou já existentes de problemas.

- Estimular o rigor matemático como uma forma natural de formular e pensar sobre problemas matemáticos.

4 Metodologia

A metodologia a ser empregada é a usual na área de Matemática: pesquisa da literatura, estudo individual, discussões semanais com a orientadora e apresentações de seminários periodicamente sobre o conteúdo estudado.

5 Viabilidade da Execução do Projeto

Este projeto é teórico e pode ser executado mesmo que remotamente.

Vale ressaltar que o(a) orientador(a) possui experiência na área de Topologia e também que o(a) candidato(a) irá cursar a disciplina Topologia no terceiro quadrimestre de 2022. Com o acompanhamento do(a) orientador(a), o(a) aluno(a) terá plenas condições de executar o projeto proposto.

6 Cronograma de atividades

O projeto está previsto para ser realizado em 3 períodos:

Etapa I

1. Breve revisão bibliográfica.

2. Estudo do material bibliográfico pesquisado sobre as primeiras noções de superfícies.

3. Noção sobre homeomorfismo e equivalência topológica.

4. Propriedades básicas da esfera e do toro.

Etapa II

1. Estudo da faixa de Mobius.
2. Estudo do plano projetivo.
3. Descrições topológicas do plano projetivo.
4. Estudo da garrafa de Klein.
5. Relatório parcial sobre as atividades desenvolvidas no âmbito do projeto.

Etapa III

1. Estudar o teorema de classificação de superfícies.
2. Criar exemplos de superfícies através dos blocos básicos.
3. Relatório final sobre as atividades desenvolvidas no âmbito do projeto;
4. Apresentação da pesquisa desenvolvida no Simpósio de Iniciação Científica da UFABC.

Na Tabela 1 é apresentada a atribuição de cada atividade para o ano de estudo.

Tabela 1: *Cronograma de atividades do projeto.*

Etapas	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago
Etapa I	•	•	•	•	•	•						
Etapa II				•	•	•	•	•	•			
Relatório Parcial					•	•	•					
Etapa III									•	•	•	•
Relatório Final										•	•	•

Referências

[1] Armstrong, M. A., *Basic Topology*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer; 1997.

[2] Babinec, T. and etc., *Introduction to Topology*, Renzo's Math 490, 2007.

[3] Ellis-Monaghan, J.A. and Moffatt, I. *Graphs on surfaces: dualities, polynomials, and knots* (Vol. 84). Berlin: Springer, 2013.

[4] Malaguetta, P. C., *Geometria e Topologia das Superfícies através de Recorte e Colagem.* Dissertação de Mestrado - Profmat. Universidade Estadual Paulista, 2010.

[5] Richeson, D., *Euler's gem - the polyhedron formula and the birth of topology.* Princeton University Press, 2008.

[6] Vilches, M. A., *Topologia Geral*, Departamento de Análise - IME UERJ.