Edital 04/2022 - ProPes

Projeto de pesquisa para iniciação científica

Estudo de caos em osciladores via seções de Poincaré

24 de Junho de 2022

Resumo

Osciladores harmônicos, tanto amortecidos quanto forçados, são descritos por equações diferenciais ordinárias lineares que podem ser resolvidas analiticamente, mostrando sempre comportamento regular. No entanto, sabe-se que são apenas uma aproximação para modelos mais realistas (mesmo unidimensionais). Neste projeto pretendemos analisar o comportamento de osciladores não-lineares na presença de forças externas periódicas no tempo, estudando o comportamento qualitativo das órbitas no espaço de fase e a emergência de caos nesses sistemas, por meio da técnica das seções de Poincaré (mapas estroboscópicos).

Palavras-chave: Mecânica Clássica – Osciladores – Caos

1 Introdução

O estudo do movimento é um dos pilares da física clássica. Das leis de Newton, é conhecido que ao saber as condições iniciais de um sistema é possível descrever unicamente a sua evolução para todos os instantes de tempo posteriores, acentuando o tom determinístico que o universo clássico apresenta. No entanto, o fato de as equações de movimento serem determinísticas não as torna simples de resolver, e na maioria dos casos ocorre uma grande sensibilidade às condições iniciais do movimento (caracterizada por uma divergência exponencial de trajetórias próximas [1]). Assim, mesmo que o sistema seja determinístico, essa sensibilidade implica que incertezas em quantidades medidas podem levar a uma impossibilidade de prever o estado do sistema para tempos longos. Sistemas com esse tipo de propriedade são ditos *caóticos* e são amplamente presentes em Física, em particular em mecânica clássica [2].

Há diversas maneiras de abordar a caracterização de órbitas ou regiões caóticas em sistemas mecânicos, como por exemplo seções de Poincaré para sistemas com 1 grau de liberdade dependentes do tempo ou sistemas conservativos com dois graus de liberdade [2], expoentes de Lyapunov para medir o desvio exponencial de trajetórias próximas [3], métodos numéricos espectrais [1, 4], e métodos analíticos como o método de Melnikov [5] e a análise de Painlevé [2]. A maioria dos métodos para detecção de caos, no entanto, é numérica, ou seja, consiste na integração numérica das equações diferenciais que descrevem o sistema por meio de algoritmos de computador. Neste projeto focaremos no estudo e aplicação do método das seções de Poincaré para a detecção de regiões caóticas no espaço de fases de sistemas unidimensionais com forças externas dependentes do tempo, em particular osciladores não-lineares com forças externas periódicas.

Dessa forma, descrevemos brevemente abaixo os sistemas correspondentes a osciladores (não-lineares) unidimensionais e posteriormente comentamos sobre a descrição da dinâmica no espaço de fase e o método das seções de Poincaré para a análise qualitativa da dinâmica do sistema, em particular na detecção de regiões caóticas.

1.1 Osciladores

Um dos casos mais simples em que o comportamento caótico de trajetórias aparece é o de osciladores unidimensionais na presença de forças externas periódicas no tempo. O oscilador é um sistema físico com características periódicas, cuja causa do movimento é geralmente atribuída a uma força restauradora. Ele pode ser amortecido por forças dissipativas como o atrito ou a resistência do ar, consequentemente, a energia total do oscilador reduz em função do tempo. Um oscilador será forçado caso exista uma força externa agindo sobre ele (comumente na forma de equações senoidais) e também é o caso mais encontrado na natureza [6].

O caso mais simples de oscilador é o oscilador harmônico [6], amortecido e/ou forçado. Esse sistema, no entanto, nos fornece equações diferenciais lineares

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = \frac{F(t)}{m}\,. \tag{1}$$

O caso harmônico tem soluções analíticas bem conhecidas mesmo na presença de forças externas e amortecimento. A linearidade do sistema implica que este possui somente soluções regulares no caso geral, portanto, não há presença de caos [7]. Assim, não é o foco do projeto.

No entanto, sabemos que o sistema de oscilador harmônico corresponde apenas ao caso de pequenas oscilações em torno de pontos de equilíbrio estáveis. Sendo a energia potencial do sistema não forçado e sem dissipação dada por $U(x)$, a aproximação de pequenas oscilações corresponde à expansão em série de Taylor de $U(x)$ (uma aproximação polinomial da função $U(x)$) até segunda ordem em torno do ponto de equilíbrio [6]. Ao analisarmos oscilações com amplitudes cada vez maiores (ou energias mais altas), termos adicionais de ordem mais alta na expansão em série da energia potencial $U(x)$ precisam ser considerados na descrição da dinâmica. Um exemplo é a inclusão de termos quárticos na energia potencial, levando a uma equação da forma

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x + \alpha\,x^3 = \frac{F(t)}{m}. \tag{2}$$

A não-linearidade do sistema implica que as soluções dessa equação já não são mais possíveis de ser obtidas como combinações lineares de soluções fundamentais (mesmo no caso em que a força externa é nula), e em particular o movimento não será mais harmônico. De fato, a solução geral não pode ser obtida analiticamente para uma força arbitrária (o que, por outro lado, pode ser feito na ausência do termo quártico [6]). Técnicas de análise de sistemas dinâmicos têm sido aplicadas para a resolução desse tipo de problema (como por exemplo em [8, 9]), com um dos resultados sendo o de que o sistema apresenta caos no caso geral de uma força externa dependente do tempo agindo no sistema (embora na ausência de forças externas e dissipação o movimento seja sempre regular).

Além disso, é possível considerar o termo quadrático na energia potencial como negativo, correspondendo a um ponto de equilíbrio instável. Esse sistema, o *oscilador de Duffing*, tem também sido muito estudado na literatura (ver por exemplo [1] e referências lá citadas). Osciladores harmônicos, quárticos e de Duffing aparecem como modelagem de diversos sistemas físicos em diferentes áreas de estudo, como eletrônica, optomecânica, etc [10]. Também aparecem como aproximações para o movimento de estrelas em galáxias próximo a órbitas circulares [4], e para potenciais galácticos [11].

Vale ressaltar que a análise desse tipo de problema admite diversas variantes. Além das diferentes forças externas $F(t)$ que podem ser estudadas (já que não vale o princípio de sobreposição), também é possível considerar formas mais gerais – não-polinomiais – da energia potencial, descrevendo sistemas físicos de interesse (como por exemplo o pêndulo simples na presença de forças externas e amortecimento). A comparação entre a dinâmica nos sistemas polinomiais e o caso não-aproximado pode levar a resultados interessantes sobre o grau de aproximação necessário para descrever corretamente o comportamento qualitativo das soluções em uma determinada região do espaço de fase.

Dessa forma, a análise de termos de ordem superior na energia potencial do sistema (e portanto de termos não-lineares nas equações de movimento) nos leva a descrições mais realistas das oscilações em torno de um ponto de equilíbrio quando a amplitude de movimento não pode ser considerada "pequena", além de abrir a possibilidade de estudos mais aprofundados em diversas áreas da física.

1.2 Diagrama de fase e seções de Poincaré

A maneira mais eficaz de se analisar a dinâmica dos osciladores é trabalhando no espaço de fase $(x, \dot{x})$. É sabido que na ausência de forças externas (e sem amortecimento) os osciladores, mesmo os não-lineares, terão órbitas representadas por curvas suaves fechadas nesse plano [7]. É possível então traçar um diagrama de fase apresentando as órbitas do sistema, que serão então dadas por superfícies de energia mecânica $E(x, \dot{x})$ constante.

No entanto, na presença de forças periódicas no tempo a energia não é mais conservada. Isso implica que as órbitas das partículas no espaço de fase não serão mais curvas simples, mas essas curvas poderão (e em geral vão) se intersectar inúmeras vezes, mesmo para as órbitas não caóticas. Dessa maneira, na presença de forças externas é necessário um método mais eficaz para avaliar qualitativamente a regularidade/caoticidade das órbitas.

Nesse sentido é interessante discretizar o sistema. Se a frequência angular da força (senoidal, por exemplo) é Ω, $F(t) = F_0\, sen(\Omega\, t)$, então pode-se plotar os pontos no espaço de fases $(x, \dot{x})$ tais que $t_n = 2n\pi/\Omega$. Isto é, a cada período plota-se um ponto nesse plano. Esse é o chamado *mapa estroboscópico* de período $2\pi/\Omega$ para o sistema (também chamado de *seção de Poincaré* a tempo constante para o sistema). Os pontos $(x_n, \dot{x}_n)$ correspondentes aos t_n são chamados de *consequentes* da seção de Poincaré [5].

Se a força for nula, para qualquer valor de Ω escolhido teremos que os t_n cairão sobre uma curva, dada pela energia mecânica constante. No entanto, caso a amplitude da força seja não-nula, esses pontos mencionados no parágrafo anterior podem ou não cair sobre uma curva fechada (já que a energia mecânica não é mais uma constante do movimento). É um fato, e será estudado em detalhes durante o projeto, que uma órbita regular terá suas consequentes caindo sobre uma única curva, ou um número finito de curvas disjuntas. Mas existem também órbitas cujas consequentes preencherão uma área no espaço de fases, não podendo ficar restritas a uma curva simples. Essas últimas têm então comportamento caótico, já que a região no espaço de fase disponível para o movimento tem dimensão maior que 1 (o que reflete a sensibilidade às condições iniciais).

Dessa maneira, o estudo e entendimento dos mapas estroboscópicos e seções de Poincaré, assim como de sua implementação numérica, permite analisar de maneira direta o comportamento caótico de osciladores forçados com forças periódicas no tempo. Vale citar que o método das seções de Poincaré pode ser implementado com o auxílio de recursos computacionais, assim como o estudo das trajetórias de partículas do sistema.

2 Objetivos e Metas

O objetivo principal do projeto é estudar o comportamento de osciladores não-lineares (em particular osciladores quárticos, mas também analisando a inclusão de termos de ordens superiores à quártica e formas mais gerais) na presença de forças externas periódicas no tempo. Espera-se identificar a presença de caos na dinâmica desses osciladores por meio da construção e análise de mapas estroboscópicos (seções de Poincaré, ver acima). Dessa maneira, com uma análise abrangente do espaço de parâmetros, será possível desenvolver uma perspectiva "visual" que permita classificar se regiões do espaço de fases (assim como órbitas específicas) são caóticas ou regulares.

Com isso espera-se que o aluno (atualmente iniciando o segundo ano do Bacharelado em Ciência e Tecnologia no Q3-2022) estude sistemas mais complexos que os apresentados no início da graduação (e no próprio Bacharelado Interdisciplinar – BI), assim criando uma base sólida para o pós-BI, e também aplique métodos numéricos para solucionar as equações diferenciais ordinárias provenientes desses modelos, focando na detecção de caos. A aplicação desses métodos e ferramentas a osciladores não-lineares forçados (conforme ressaltado nas seções anteriores) dará então ao aluno uma visão da dinâmica newtoniana além daquela comumente tratada em cursos de graduação, em particular no Bacharelado em Ciência e Tecnologia. Também, o projeto atual servirá de base para estudos posteriores mais avançados, como por exemplo na análise de caos em sistemas astrofísicos [12], em osciladores relativísticos [13, 14, 15], dentre diversas outras possibilidades.

3 Metodologia

A parte inicial do projeto consistirá no estudo de mecânica clássica, assim como de métodos numéricos para resolução de equações diferenciais ordinárias. Após isso será estudada a dinâmica de osciladores forçados, com foco na estrutura do espaço de fases e na caracterização do comportamento caótico por meio de mapas estroboscópicos (seções de Poincaré). Juntamente a isso será feito um levantamento bibliográfico sobre o assunto. Por fim, as técnicas e métodos aprendidos serão utilizados para analisar o espaço de fase de osciladores forçados.

Em tópicos, podemos listar os passos como:

– Estudo de mecânica clássica e equações diferenciais ordinárias [6].

– Estudo do oscilador harmônico (amortecido + forçado) [6, 7].

– Estudo de métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais ordinárias [16].

– Estudo teórico de mapas estroboscópicos e sua relação com as seções de Poincaré via livros especializados e artigos da literatura.

– Levantamento bibliográfico do conteúdo sobre caos em osciladores na literatura.

– Aplicação dos conceitos aprendidos na análise de mapas estroboscópicos em osciladores não-lineares na presença de forças externas periódicas.

4 Viabilidade do projeto

O projeto foi elaborado para execução em um ano. O aluno iniciará o segundo ano da graduação em setembro. No quadrimestre atual (Q2) o aluno está cursando Funções de Várias Variáveis e no terceiro quadrimestre (Q3) de 2022 cursará, dentre as disciplinas, Álgebra Linear e Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias, de modo que terá os pré-requisitos matemáticos para o projeto. No início do projeto também estudará individualmente, como parte do projeto, fundamentos de Mecânica Clássica, tendo assim toda a fundamentação teórica para iniciar os estudos de caos.

O material para estudo de caos pode ser encontrado na internet por meio da Revista Brasileira de Ensino de Física (ver por exemplo [17]) e de artigos científicos a serem pesquisados pelo aluno, assim como em livros disponíveis na biblioteca (por exemplo [1, 18]).

Serão realizadas reuniões periódicas, via videoconferência e presenciais conforme os protocolos de segurança da UFABC, para o acompanhamento e orientação do aluno.

Os programas de computador desenvolvidos ao longo da execução do projeto exigirão como recurso computacional apenas o computador pessoal do candidato.

5 Cronograma

Como mencionado na seção de viabilidade, o projeto foi elaborado para a execução em 1 ano. O projeto pode ser dividido em 5 etapas, como a seguir. O cronograma para execução do projeto é apresentado na tabela logo após a descrição das etapas.

– Etapa 1: estudo de mecânica clássica, equações diferenciais ordinárias e osciladores.

– Etapa 2: estudo de métodos de integração numérica de equações diferenciais ordinárias.

– Etapa 3: estudo teórico de mapas estroboscópicos em osciladores forçados e identificação de regiões caóticas no espaço de fases.

– Etapa 4: levantamento bibliográfico de caos em osciladores não-lineares.

– Etapa 5: aplicação das ferramentas aprendidas à análise de regularidade e caos em osciladores não-lineares forçados.

Mês	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
Etapa 1	X	X	X	X	X							
Etapa 2			X	X	X	X	X	X				
Etapa 3				X	X	X	X	X	X	X		
Etapa 4							X	X	X	X		
Etapa 5									X	X	X	X

Referências

[1] A. Lichtenberg and M. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics*, Applied Mathematical Sciences Vol. 38 (Springer, New York, US, 1992).

[2] M. Tabor, *Chaos and integrability in nonlinear dynamics* (John Wiley & Sons, New York, US, 1989).

[3] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 2: Numerical application, Meccanica **15**, 21 (1980).

[4] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Second ed. (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2008).

[5] P. Holmes, Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and "chaos", Physics Reports **193**, 137 (1990).

[6] K. Watari, Mecânica clássica, vol. 1, São Paulo: Livraria da Física (2004).

[7] J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems* (Academic Press, 2013).

[8] P. Holmes, A nonlinear oscillator with a strange attractor, Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A **292**, 419 (1979).

[9] P. J. Holmes and D. A. Rand, Phase portraits and bifurcations of the non-linear oscillator, International Journal of Non-linear Mechanics **15**, 449 (1980).

[10] L. Jin, J. Mei, and L. Li, Chaos control of parametric driven duffing oscillators, Applied Physics Letters **104**, 134101 (2014).

[11] M. Henon and C. Heiles, The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments, Astron. J. **69**, 73 (1964).

[12] G. Contopoulos, *Order and chaos in dynamical astronomy* (Springer-Verlag, 2002).

[13] J.-H. Kim and H.-W. Lee, Relativistic chaos in the driven harmonic oscillator, Phys. Rev. E **51**, 1579 (1995).

[14] J.-H. Kim, S.-W. Lee, H. Maassen, and H.-W. Lee, Relativistic oscillator of constant period, Phys. Rev. A **53**, 2991 (1996).

[15] J.-H. Kim and H.-W. Lee, Nonlinear resonance and chaos in the relativistic phase space for driven nonlinear systems, Phys. Rev. E **52**, 473 (1995).

[16] M. A. G. Ruggiero and V. L. d. R. Lopes, *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais* (Makron Books do Brasil, 1997).

[17] M. A. de Aguiar, Caos em sistemas clássicos conservativos, Revista brasileira de ensino de física **16**, 3 (1994).

[18] M. A. de Aguiar, *Tópicos de Mecânica Clássica* (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2011).