Uma Introdução à Topologia Algébrica no contexto de Variedades Topológicas

Bacharelado em Ciência & Tecnologia
Universidade Federal do ABC

Santo André, 20 de junho de 2022

Resumo

Este projeto faz uma introdução às variedades topológicas com enfoque em dois invariantes topológicos da topologia algébrica: o grupo fundamental e os grupos de homologia. O objetivo é introduzir o conceito de variedade, abordar as teorias de homotopia e de homologia neste contexto, apresentar suas principais propriedades e exemplos.

1 Introdução e Justificativa

Um problema fundamental da topologia é determinar se dois espaços topológicos são ou não homeomorfos, ou seja, se existe ou não um homeomorfismo entre eles. Para mostrar que dois espaços são homeomorfos, é preciso construir um homeomorfismo entre eles e, para mostrar que tais espaços não são homeomorfos, é necessário mostrar que tal aplicação não existe. Esta tarefa em geral é difícil. Uma forma para resolver este problema é encontrar propriedades invariantes por homeomorfismos. Mais precisamente, se uma tal propriedade é satisfeita por um espaço X, então é válida para todo espaço homeomorfo a X. Estas propriedades são chamadas *propriedades topológicas*. Assim, se um espaço satisfaz uma propriedade topológica e o outro não, então tais espaços não podem ser homeomorfos. A topologia algébrica surgiu a partir da motivação de matemáticos como Poincaré e Betti em criar tais invariantes topológicos. Como as estruturas algébricas são, em geral, mais simples do que as estruturas topológicas, surgiu a ideia de introduzir invariantes topológicos que fossem elementos algébricos, como grupos, anéis ou módulos. Por exemplo, determinar se dois grupos abelianos dados são ou não isomorfos (principalmente quando eles são finitamente gerados) é, quase sempre, um problema mais simples do que o de determinar se dois espaços topológicos dados são homeomorfos ou não. Os exemplos mais conhecidos de invariantes topológicos que são elementos algébricos são os *grupos de homologia*, introduzidos por Betti e o *grupo fundamental*, introduzido por Poincaré. Apesar deste campo ter se originado no século XX, pode-se rastrear suas origens e conexões nos primórdios da matemática. Por exemplo, se quisermos determinar o número de sólidos regulares possíveis, usamos um invariante chamado de característica de Euler, que foi originalmente inventado para estudar um problema clássico na teoria dos grafos chamado *As Sete Pontes de Königsberg*.

O objetivo deste projeto é fazer um estudo das *variedades* com abordagem introdutória, focando em tópicos de topologia algébrica.

Variedades são as generalizações matemáticas das curvas e superfícies para dimensões arbitrárias e tem um papel fundamental em quase todas as áreas da matemática. A noção de variedade diferenciável formaliza o conceito de um espaço que localmente é como um espaço euclidiano, quer do ponto de vista topológico, quer do ponto de vista da sua estrutura diferenciável. Assim, este projeto pretende familiarizar a aluna com a intuição geométrica e as propriedades essenciais das variedades.

Para isso, começaremos introduzindo o conceito de variedade topológica e suas principais propriedades. Abordaremos brevemente o conceito de variedades diferenciáveis. Em seguida estudaremos o grupo fundamental e também os grupos de homologia singular nesse contexto.

Além solidificar e aprofundar os seus conhecimentos em três grandes áreas da matemática - geometria/topologia, análise e álgebra - este é um assunto que permite que um estudante, ainda na graduação, veja todas estas áreas trabalhando juntas para resolver importantes problemas.

A principal bibliografia utilizada será [1], [2], [4] e [8]. Também usaremos [3], [5], [6], [7] e [9] como bibliografia complementar.

2 Objetivos

2.1 Objetivos Gerais

- Desenvolver uma rotina de estudo individual.
- Aprimorar o raciocínio lógico-matemático.
- Aprender a isolar um problema em sua essência matemática para então poder associar problemas vindos de diferentes áreas e encontrar soluções mais simples e mais gerais para os mesmos.
- Familiarizar-se com a pesquisa em Matemática, aprender a questionar e buscar soluções novas e/ou já existentes de problemas.
- Estimular o rigor matemático como uma forma natural de formular e pensar sobre problemas matemáticos.

2.2 Objetivos Específicos

- Aprender o conceito de variedades e suas principais propriedades.
- Aprender os principais conceitos e propriedades de uma importante área da matemática: Topologia Algébrica.
- Aprender a elaborar relatórios das atividades, os quais serão escritos em LaTeX.
- Aprender a elaborar apresentações e posters em LaTeX.

3 Metodologia

A metodologia a ser empregada é a usual na área de Matemática: estudo individual (leitura e resolução de exercícios), discussões semanais com a orientadora e apresentações de seminários periodicamente sobre o conteúdo estudado.

4 Plano de Trabalho e Cronograma

- **Parte I: Variedades**
  - Variedades topológicas, exemplos e propriedades;
  - Complexos CW e suas propriedades topológicas;
  - Complexos simpliciais;
  - Variedades diferenciáveis.
- **Parte II: Teoria de Homotopia**
  - Caminhos, homotopia, tipo de homotopia, equivalência homotópica, retratos por deformação;
  - Grupo fundamental;
  - Homomorfismos induzidos;
- **Relatório parcial sobre as atividades desenvolvidas no âmbito do projeto.**
- **Parte III: Teoria de Homologia**
  - Grupos de Homologia Singular;
  - Sequências Exatas;
  - Invariância Homotópica;
  - Teoremas de Mayer-Vietoris e da Excisão;
  - Homologia de CW complexos.
- **Relatório final sobre as atividades desenvolvidas no âmbito do projeto;**
- Apresentação da pesquisa desenvolvida no Simpósio de Iniciação Científica da UFABC.

Na Tabela 1 é apresentada a atribuição de cada atividade para o ano de estudo.

Tabela 1: *Cronograma de atividades do projeto.*

	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul
Parte I	X	X	X									
Parte II			X	X	X	X						
Relatório Parcial				X	X	X						
Parte III							X	X	X	X	X	X
Relatório Final										X	X	X

Referências

[1] Lee, J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Graduated texts in Mathematics, Springer, Seattle, 2nd edition, 2011.

[2] Lee, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Graduated texts in Mathematics, Springer, Seattle, 2nd edition, 2013.

[3] Lima, E. L., *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Rio de Janeiro, IMPA, 2006.

[4] Hatcher, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] Massey, W. S., *A Basic Course in Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, 1991.

[6] Munkres, J.R., *Topology*, Prentice Hall, New Jersey, 2nd edition, 2000.

[7] Munkres, J.R., *Elements of algebraic topology*, Westview Press, Revised edition, 1993.

[8] Vick, J. W. Homology Theory, an introduction to Algebraic Topology, 2nd edition, Springer-Verlag, 1994.

[9] Tu, L.W., *An Introction to Manifolds*, 2nd edition, Springer, New York, 2010.