Universidade Federal do ABC
Centro de Matemática, Computação e Cognição

Sobrevivência Forte em Passeios Aleatórios com Ramificação em Grafos Finitos

Santo André - SP
2022

RESUMO

Neste projeto pretendemos estudar o comportamento de um passeio aleatório com ramificação em um grafo finito. Em particular, queremos mostrar que quando o total de partículas é um processo de nascimento e morte supercrítico, então com probabilidade tão alta quanto se queira, dado um total de partículas inicial de partículas suficientemente grande, o processo eventualmente ocupará todos os sítios e jamais desocupará nenhum sítio do grafo.

Palavras chave: Processos de Nascimento e Morte, Passeios Aleatórios com Ramificação, Sistemas de Partículas, Acoplamento.

1 INTRODUÇÃO, OBJETIVOS E DESCRIÇÃO DO PROJETO

1.1 Introdução

Passeios aleatórios com ramificação podem ser vistos como uma evolução dos conhecidos processos de ramificação, onde partículas se reproduzem e morrem (independentes uma das outras) de acordo com alguma lei de probabilidade. Processos de ramificação são caracterizados em qualquer instante de tempo pelo total de partículas no processo.

Passeios aleatórios com ramificação incluem estrutura espacial à este processo. Agora a lei de reprodução de uma partícula (que pode depender da localização da partícula) diz não apenas quantos filhos são gerados, mas também onde tais filhos devem nascer.

Apesar das partículas não se moverem ao longo do tempo, se seguirmos um ramo qualquer de descendentes de uma partícula observamos uma trajetória de um passeio aleatório no espaço considerado. Por esta razão o processo é conhecido como **passeio aleatório com ramificação**.

Quando tratamos de processos de ramificação, uma das perguntas básicas a ser respondida trata da probabilidade de sobrevivência do processo. Ou seja, qual a probabilidade do processo ter ao menos uma partícula viva em cada instante de tempo. Tal pergunta ainda é válida no caso de passeios aleatórios com ramificação, e neste caso incluímos também a questão de localização destas partículas. Podemos perguntar por exemplo, se condicionado a sobrevivência do processo, uma dado sítio será visitado infinitas vezes ao longo do tempo, ou se após um certo número de visitas o sítio permanece vazio para sempre.

Neste projeto veremos que para grafos finitos e irredutíveis, a sobrevivência de um passeio aleatório com ramificação é sempre forte. Ou seja, caso o processo sobreviva então existe um momento a partir do qual todos sítios estão sempre ocupados.

Os resultados estudados aqui estão estão associados à um problema ainda não resolvido, que vem sendo estudado pelo orientador e colaboradores, sobre sobrevivência e coexistência em um passeio aleatório com ramificação multi-tipo com iterações.

Resultados preliminares do projeto acima, assim como simulações computacionais de situações ainda não estudadas, assim como simulações computacionais de situações ainda não resolvidas, podem ser estudados pelo aluno em um segundo projeto de IC.

1.2 Objetivos

Este projeto pretende introduzir o aluno ao mundo dos processos de ramificação e dos passeios aleatórios com ramificação, onde ele será exposto à ferramentas importantes no estudo de processos estocásticos, como processos markovianos à tempo discreto e contínuo, martingais, funções geradoras, dentre outros.

Nosso objetivo final será entender a sobrevivência de um passeio aleatório com ramificação em um espaço finito, e mostraremos que com probabilidade positiva, o processo eventualmente ocupará o espaço inteiro, e nenhum sítio ficará vazio a partir de um dado instante. Para isso será necessário um estudo mais aprofundado dos processos de ramificação, que servirá como base para demonstrar o resultado final.

1.3 Processos de Ramificação

Vamos agora descrever mais formalmente o que entendemos por processos de ramificação, elencando alguns resultados principais que estudaremos ao longo deste projeto.

1.3.1 Processo de Galton-Watson

O processo de ramificação à tempo discreto é também conhecido como processo de ramificação de Galton-Watson, e pode ser descrito da seguinte maneira.

Considere uma distribuição de probabilidades $(p_k)_{k\geq 0}$, e uma sequência de variáveis aleatórias $\{\xi_{n,m}; n, m \geq 1\}$ independentes e identicamente distribuídas, tais que

$$\mathbb{P}(\xi_{n,m} = k) = p_k.$$

A variável $\xi_{n,m}$ representa o total de filhos do $m-$ésimo membro da $n-$ésima geração, e processo de Galton-Watson é então definido como a sequência $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que $X_0 = 1$ e para $n \geq 1$

$$X_n = \begin{cases} \xi_{n,1} + \cdots + \xi_{n,k} & ; \text{se } X_{n-1} = k \\ 0 & ; \text{se } X_{n-1} = 0 \end{cases}.$$

Pela segunda linha da definição acima, uma vez que o processo atinge o estado 0, ele permanece neste estado para sempre. Tal evento é conhecido como *extinção* do processo, enquanto o evento complementar é conhecido como *sobrevivência*.

O problema principal neste ponto é caracterizar as distribuições $(p_k)_{k\geq 0}$ para as quais a probabilidade de sobrevivência é positiva. Mais formalmente, estamos interessados em calcular o valor de

$$\mathbf{s} = \mathbb{P}(X_n > 0, \forall n \geq 0) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > 0).$$

Tal resultado pode ser encontrado no seguinte teorema.

Teorema 1. *Seja $(X_n)_{n\geq 0}$ um processo de Galton-Watson e*

$$m = \mathbb{E}[\xi_{1,1}] = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k,$$

o número médio de filhos de um indivíduo.

Nestas condições, se $m \leq 1$ então o processo é extinto com probabilidade 1 $(\mathbf{s} = 0)$, e se $m > 1$ então o processo sobrevive com probabilidade positiva $(\mathbf{s} > 0)$.

Com base neste resultado, diremos que o processo é *subcrítico* quando $m < 1$, *crítico* para $m = 1$ e *supercrítico* quando $m > 1$.

A demonstração clássica deste resultado, presente na maior parte da literatura, consiste em estudar as *funções geradoras de probabilidade* de $\xi_{1,1}$ e de X_n, relacionando as duas. Mais exatamente, estudam-se as funções

$$\phi_n(s) = \mathbb{E}[s^{X_n}]$$

e

$$\phi(s) = \mathbb{E}[s^{\xi_{1,1}}],$$

mostrando que $\phi_n = \phi \circ \cdots \circ \phi =: \phi^n(s)$, onde a composição de ϕ ocorre n vezes.

Assim, usando o fato de que

$$1 - \mathbf{s} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(0) = \lim_{n\to\infty} \phi(\phi_{n-1}(0)) = \phi(1 - \mathbf{s}),$$

conclui-se que $1 - \mathbf{s}$ é ponto fixo de ϕ. O resultado segue de uma análise mais aprofundada do comportamento de ϕ em função de $m = \phi'(1)$, caracterizando os pontos fixos de ϕ e a convergência para tais valores após composições sucessivas.

Os resultados sobre o comportamento do processo de Galton-Watson são vastos, mas para nossos propósitos o teorema acima, junto com alguns outros elencados nas próximas seções, é suficiente.

1.4 Processo de Nascimento e Morte

Vamos agora tentar construir um processo em tempo contínuo que seja similar ao processo de Galton-Watson descrito acima.

Uma ideia possível é colocar como aleatório o tempo de vida de cada partícula. Para isso consideramos que cada partícula que nasce no processo possui um tempo de vida com distribuição exponencial de média 1, independente das demais partículas. Quando uma partícula morre ela dá lugar a uma quantidade aleatória de filhos com distribuição $(p_k)_{k\geq 0}$.

Neste projeto usaremos uma forma alternativa, e um pouco mais simples, de construir o processo em tempo contínuo. Para isso usaremos o chamado *processo de nascimento e morte*. Neste processo, a exemplo da construção anterior, cada partícula, de maneira independente das demais, morre de acordo com uma variável exponencial de taxa 1. Mas durante o seu tempo de vida ela dá origem a novas partículas com uma taxa $\lambda > 0$. Mais precisamente, um processo de nascimento e morte X_t é uma cadeia de Markov X_t a tempo continuo com taxas de transição

$$c_{k,k+1} = \lambda k, \quad c_{k,k-1} = k$$

e

$$\mathbb{P}(X_{t+h} = 0 | X_t = 0) = 1.$$

Da definição acima, se $P_n(t) = \mathbb{P}(X_t = n)$, as equações progressivas de Kolmogorov nos dão que

$$\begin{cases} P_n'(t) = -(\lambda+1)nP_n(t) + \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + (n+1)P_{n+1}(t) \\ P_0'(t) = P_1(t) \end{cases}, \tag{1}$$

enquanto as regressivas dizem que

$$\begin{cases} P_n'(t) = -(\lambda+1)P_n(t) + \lambda\sum_{k=0}^{n} P_k(t)P_{n-k}(t) \\ P_0'(t) = 1 - (\lambda+1)P_0(t) + \lambda P_0^2(t) \end{cases}. \tag{2}$$

Uma análise cuidadosa as equações acima, junto com a função geradora de probabilidades de X_t, mostra que

Teorema 2. *Se* $(X_t)_{t\geq 0}$ *um processo de nascimento e morte com taxa de nascimento* $\lambda > 0$*, então vale que:*

- *se* $\lambda \leq 1$ *o processo se extinguirá com probabilidade 1;*

- *se* $\lambda > 1$ *o processo sobreviverá com probabilidade positiva.*

A demonstração do teorema acima é similar ao do teorema de sobrevivência do processo de Galton-Watson. Aqui a função geradora de probabilidade,

$$\phi(s,t) = \mathbb{E}[s^{X_t}],$$

depende continuamente de dois parâmetros, mas usando as equações em (2), é possível mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(s,t) = 1 - (\lambda+1)\phi(s,t) + \lambda\phi^2(s,t),$$

com $\phi(s,0) = s$.

Esta equação de Ricatti em t tem solução explícita, que nos permite concluir a demonstração do teorema.

É interessante observar que o total de filhos gerados por uma partícula antes de morrer tem distribuição geométrica de parâmetro $\lambda/(\lambda+1)$. Ou seja,

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^k \frac{1}{\lambda+1}.$$

O número médio de filhos de um indivíduo é portanto λ, e portanto o parâmetro que define a sobrevivência do processo é o mesmo do caso discreto,

A exemplo do caso discreto, diremos que o processo é *subcrítico* quando $\lambda < 1$, *crítico* para $\lambda = 1$ e *supercrítico* quando $\lambda > 1$.

1.5 Fase Supercrítica e Crescimento Exponencial

Agora que temos bem determinadas as transições de fases dos processos de ramificação, é possível investigar um pouco mais a fundo o comportamento do processo em cada uma destas fases.

Para este projeto estaremos interessados na *fase supercrítica*, que acontece quando o número médio de filhos é superior à 1 ($m > 1$ no caso discreto e $\lambda > 1$ no contínuo).

Olhando primeiro para o processo de Galton-Watson, e nos valendo de sua estrutura recursiva, concluímos que

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{X_{n-1}} \xi_{n,k}\right] = m\mathbb{E}[X_{n-1}] = m^n.$$

O crescimento exponencial da média de indivíduos dá uma primeira pista do comportamento do processo, principalmente quando condicionado à sobrevivência. Para entendermos ainda melhor tal comportamento devemos explorar um pouco mais a fundo a estrutura recursiva do processo. Para isso defina $Z_n = m^{-n}X_n$ e note que

$$\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}] = m^{-n}\mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{X_{n-1}} \xi_{n,k}|Z_{n-1}\right] = m^{-(n-1)}\mathbb{E}[X_{n-1}|Z_{n-1}] = m^{-(n-1)}X_{n-1} = Z_{n-1}.$$

Isso mostra que o processo Z_n é um martingal, e nos dá o seguinte teorema.

Teorema 3. *Se X_n é um processo de Galton-Watson supercrítico, então existe uma variável aleatória Z, com $\mathbb{E}[Z] = 1$ e $\mathbb{P}(Z = 0) = 1 - \mathbf{s}$, tal que*

$$\frac{X_n}{m^n} \to Z, \quad \text{em } L^2 \text{ e q.c..}$$

Este resultado segue quase diretamente do teorema de convergência de martingais, e nos dá a ordem de grandeza do processo de ramificação quando condicionado a sobrevivência.

Como esperado, tal resultado tem seu similar no caso contínuo. Neste caso, se X_t é um processo de nascimento e morte com taxa de nascimento $\lambda > 1$, então

$$\mathbb{E}[X_t] = e^{(\lambda-1)t},$$

e

$$Z_t = e^{-(\lambda-1)t}X_t,$$

é o martingal que nos interessa estudar.

1.6 Passeios Aleatórios com Ramificação

A última fase deste projeto consistirá em juntar os resultados acima para estudar o entender os chamados *Passeios Aleatórios com Ramificação.*

Como descrito na introdução, tais processos surgem ao introduzirmos uma estrutura espacial aos processos de ramificação. Para isso, generalizamos a lei de nascimento do processo para dizer não apenas quantas partículas nascem, mas onde no espaço elas devem nascer.

Seja então $\mathbb{X}$ um conjunto finito ou infinito enumerável, que fará as vezes do espaço onde vivem as partículas. Cada partícula vive então em algum sítio $x \in \mathbb{X}$, e as regras que regem a reprodução desta partícula dependerão de x.

Com isso, o passeio aleatório com ramificação dever ser visto como um processo $\eta_t := (\eta_t(x))_{x\in\mathbb{X}}$ no conjunto $\Omega_{\mathbb{X}} = \{(\eta(x))_{x\in\mathbb{X}} : \eta(x) \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{X}\}$. Ou seja, $\eta_t(x)$ representa o total de partículas em $x \in \mathbb{X}$ no instante t.

Assim como o processo de ramificação, os passeios aleatórios com ramificação também podem ser construídos de diversas maneiras, tanto em tempo discreto quanto em tempo contínuo. Para este projeto decidimos trabalhar apenas no processo em tempo contínuo, introduzindo uma estrutura espacial ao processo de nascimento e morte descrito acima.

A exemplo do processo de nascimento e morte, cada partícula vive um tempo exponencial de taxa 1, e durante o seu tempo de vida dá origem a novas partículas à uma taxa constante $\lambda_x = \lambda k_x$, onde $k_x > 0$ é uma constante que depende do sítio $x \in \mathbb{X}$ onde vive a partícula. Sempre que uma partícula em x se reproduz, a nova partícula é imediatamente enviada para um sítio $y \in \mathbb{X}$ com probabilidade $p_{x,y}$.

Assim, se denotarmos por $\mathbf{0} \in \Omega_{\mathbb{X}}$ a configuração com todos os sítios vazios, e por δ_x a configuração com um 1 partícula em x é 0 nos demais sítios, podemos definir o passeio aleatório com ramificação como o processo markoviano $\eta_t := (\eta_t(x))_{x\in\mathbb{X}}$ com taxas de transição dadas por

$$c_{\eta,\eta'} = \begin{cases} \sum_x \eta(x)\lambda_x p_{x,y}, & \text{se } \eta' = \eta + \delta_y \text{ e } \eta \neq \mathbf{0} \\ \eta(y), & \text{se } \eta' = \eta - \delta_y \text{ e } \eta \neq \mathbf{0} \end{cases},$$

e absorção no estado $\mathbf{0}$.

A estrutura espacial introduzida no processo trás a tona novas questões quanto à sobrevivência do processo. Agora, além de saber se o processo sobrevive, queremos saber onde as partículas se encontram. Assim, supondo uma configuração inicial η_0 com um número finito de partículas, estamos interessados em estudar

$$\mathbb{P}\left(\sum_x \eta_t(x) > 0\right) \tag{3}$$

e

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \eta_t(x_0) > 0\right). \tag{4}$$

O evento presente em (3) é conhecido por *sobrevivência global*, e é similar ao evento de sobrevivência considerado em processos de ramificação simples. Já o evento em (4), conhecido como *sobrevivência local*, trata da sobrevivência do processo em um sítio $x_0 \in \mathbb{X}$ específico.

Assim como em processos de ramificação, estamos interessados em estudar sob que condições tais probabilidades são positivas. Isso nos leva a dois novos parâmetros de interesse.

$$\lambda_w(\eta) := \inf\left\{\lambda > 0 : \mathbb{P}\left(\sum_x \eta_t(x) > 0 \middle| \eta_0 = \eta\right) > 0\right\}$$

e

$$\lambda_s(x_0;\eta) := \inf\left\{\lambda > 0 : \mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \eta_t(x_0) > 0 \middle| \eta_0 = \eta\right) > 0\right\}$$

É interessante observar que

$$\mathbb{P}\left(\limsup_{t\to\infty} \eta_t(x_0) > 0\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_x \eta_t(x) > 0\right),$$

uma vez que sobrevivência local do processo implica em sobrevivência global. Isso implica, trivialmente, que $\lambda_w(\eta) < \lambda_s(x_0; \eta)$, para quaisquer x_0 e qualquer $\eta \in \Omega_{\mathbb{X}}$.

É fácil mostrar também que se o operador $P = (p_{x,y})_{x,y \in \mathbb{X}}$ for irredutível, então as probabilidades em (3) e (4) não dependem da configuração inicial η_0, desde que esta seja finita, nem do sítio x_0, de modo que os parâmetros λ_w e λ_s são também independentes de tais informações.

O estudo do plano de fases de um processo, apesar de interessante, não seria possível de ser feito no tempo disponível para este projeto, além de se valer de novas ferramentas, não necessariamente similares àquelas usadas no caso do processo de ramificação.

Deste modo decidimos nos concentrar em um caso mais simples, mas que faz uso dos ferramentais estudados nas seções passadas. Vamos nos concentrar no caso onde $\mathbb{X}$ é finito, e o operador $P = (p_{x,y})_{x,y \in \mathbb{X}}$ é irredutível.

Para este processo pretendemos mostrar o seguinte resultado.

Teorema 4. *Se $\mathbb{X}$ é finito e a matriz $P = (p_{x,y})_{x,y \in \mathbb{X}}$ é irredutível, então sobrevivência local e global são equivalentes. Ou seja,*

$$\mathbb{P}\left(\sum_x \eta_t(x) > 0\right) = \mathbb{P}\left(\limsup_{t \to \infty} \eta_t(x_0) > 0\right),$$

para qualquer configuração inicial η_0 e $x_0 \in \mathbb{X}$.

Para chegar à tal resultado vamos nos valer da seguinte teorema.

Teorema 5. *Seja $\mathbb{X}$ finito com matriz $P = (p_{x,y})_{x,y \in \mathbb{X}}$ irredutível e $k_x = 1$ para todo $x \in \mathbb{X}$. Assim, para qualquer $\lambda > 1$ o processo sobrevive fortemente, no sentido que, para todo $\alpha > 0$, existe um $N := N(\alpha) > 0$ e uma função positiva $m : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ (independente de α), tais que se $\eta_0(x) \geq m(x)N$ para todo $x \in \mathbb{X}$, então*

$$\mathbb{P}\left(\eta_t(x) \geq m(x)N(1-\delta)e^{(\lambda-1)t}, \text{ para todo } x \in \mathbb{X} \text{ e para todo } t > 0\right) \geq 1 - \alpha.$$

A demonstração de tal resultado será uma simples adaptação do argumento em [6], que se vale de um acoplamento sítio à sítio do processo $\eta_t(x)$ com um processo de ramificação X_t^x, supercrítico, tal que $X_t^x \leq \eta_t(x)$ enquanto $\eta_t(x) \geq m(x)N(1-\delta)e^{(\lambda-1)t}$.

Tal resultado dará ao aluno a oportunidade de unir todos os resultados estudados anteriores em uma só prova, fechando o projeto.

2 METODOLOGIA E VIABILIDADE

O primeiro passo será o estudo das técnicas e resultados preliminares, necessárias para a compreensão completa dos resultados que pretendemos atacar.

Em um primeiro momento o aluno deverá entender a definição e principais propriedades de processos de Poisson em 1 e 2 dimensões. Em particular o aluno deverá estudar sobre o emagrecimento de processos, a união de processos independentes e a projeção de processos em 2 dimensões.

Estas são ferramentas necessárias no entendimento da construção de processos Markovianos de salto, e posteriormente na construção gráfica do passeio aleatório com ramificação. Além de serem essenciais para entender diversos argumentos apresentados durante as demonstrações dos resultados principais.

Assim, ao terminar com o estudo de processos de poisson, o aluno passará a estudar conceitos fundamentais sobre processos markovianos de saltos, focando principalmente em sua construção.

O passo seguinte é o estudo de martingais, chegando até o teorema de convergência de martingais. Este passo é importante para entender o crescimento exponencial de processos de ramificação supercríticos, além de alguns dos cálculos e estimativas presentes na demonstração do resultado final.

Neste momento o aluno estará pronto para passar ao estudo dos processos em si.

Iniciaremos com o processo de Galton-Watson, focando no teorema sobre sobrevivência do processo. Neste momento o aluno terá contato com a ideia de funções geradoras, e algumas de suas aplicações.

A seguir passaremos para o processo de nascimento e morte. Este passo deverá ser rápido, uma vez que as principais ideias para o estudo da sobrevivência já foram estudadas no caso discreto.

Para finalizar, estudaremos o passeio aleatório com ramificação apenas no caso finito, chegando finalmente ao resultado sobre sobrevivência forte de tais processos.

O estudo se dará por encontros semanais entre o aluno e o orientador. Nestes encontros o aluno deverá apresentar o progresso feito na semana anterior, tentando resolver as dúvidas que permaneceram.

O aluno tem uma boa formação matemática anterior, que permitirá passar rapidamente pelos conceitos iniciais mais simples. O aluno já cursou disciplinas de probabilidade e vai cursar mais uma antes do início do projeto. Por esta razão, acreditamos ser possível cumprir com o cronograma proposto.

3 CRONOGRAMA

O projeto terá a duração de um ano, sendo dividido em cinco fases

- Meses 1 e 2: Processos de Poisson e suas propriedades.
- Mês 3: Processos markovianos de salto.
- Meses 4 e 5: Martingais.
- Mês 6: Redação do relatório parcial.
- Meses 7 e 8: Processo de Galton-Watson e Processo de Nascimento e Morte.
- Meses 9, 10 e 11: Passeios Aleatórios com Ramificação em espaços finitos, e demostração do resultado final.
- Mês 12: Encerramento do trabalho e produção do relatório final.

Referências

[1] ATHREYA, K.B., NEY, P.E. (1972) *Branching processes*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Vol 196, Springer-Verlag.

[2] DURRETT, R. (2003) *Probability: Theory and Examples.* 4th edition, Cambridge U. Press, Cambridge.

[3] FERRARI, P. A., GALVES, J. A. (1997) *Aclopamento em Processos Estocásticos*, SBM - IMPA

[4] FERRARI, P. A., MARTIN, J. B. (2012) *How to squeeze the toothpaste back into the tube*, arXiv:1203.0176 [math.PR].

[5] LIGGETT, T. (1985) *Interacting Particle Systems*, Springer-Verlag.

[6] MOUNTFORD, T., SCHINAZI, R. (2005) *A Note on Branching Random Walks on Finite Sets.* Journal of Applied Probability, N.42,pg 287-294.

[7] ROSS, S. (2010) *Introduction to Probability Models.* 9th edition, Elsevier, Boston.

[8] SPITZER, F. (1970), *Interaction of Markov Processes*, Advances in Mathematics 5, 246-290.