



Fundação Universidade Federal do ABC
Pró reitoria de pesquisa

Av. dos Estados, 5001, Santa Terezinha, Santo André/SP, CEP 09210-580
Bloco L, 3º Andar, Fone (11) 3356-7617
iniciacao@ufabc.edu.br

Projeto de Iniciação Científica submetido para avaliação no Edital: 04/2022

Título do projeto: Aerofólio Fino Bidimensional em um Canal - Solução via Relação Integral e Expansão em Termos de Auto-Funções.

Palavras-chave do projeto: Aerofólio Fino em um Canal, Esforços aerodinâmicos, Expansão em auto-funções, Efeito Solo

Área do conhecimento do projeto: Aerodinâmica

Sumário

1	Resumo	2
2	Introdução	3
3	Objetivos	5
4	Metodologia	5
5	Viabilidade	9
6	Cronograma de atividades	9

1 Resumo

Escoamento ao redor de aerofólio fino com pequeno ângulo de ataque em relação a uma corrente uniforme e confinada em um canal é abordado utilizando-se relação integral envolvendo as condições de contorno e o método das expansões em termos de auto-funções. Assume-se fluido incompressível e irrotacional, de modo que o campo de velocidades pode ser escrito como o gradiente de uma função potencial que satisfaz a equação de Laplace no domínio do escoamento. Este domínio é subdividido em sub-regiões, e em parte das sub-regiões a solução do problema de contorno específico pode ser escrita em termos de auto-funções da equação de Laplace. Utilizando-se relação integral envolvendo as condições e contorno e fronteiras entre sub-regiões, obtém-se conjunto de equações algébricas cuja solução são os coeficientes de cada auto-função presente nas expansões em subdomínios específicos. O potencial de velocidades é subdividido em uma parcela que representa o problema de espessura e em uma parcela circulatória, no intuito de satisfazer a condição de Kutta-Joukowski no bordo de fuga do aerofólio e determinar a circulação do escoamento. A força de sustentação é determinada via teorema de Kutta-Joukowski e o momento aerodinâmico é avaliado via integração do momento do campo de pressão ao redor da placa plana em relação a um polo conveniente. A performance do método proposto é avaliada comparando-se resultados para os coeficientes de sustentação e de momento aerodinâmico em função da distância da placa plana à parede e em função da distância entre paredes com resultados proveniente de métodos presentes na literatura.

2 Introdução

O presente trabalho aborda o escoamento ao redor de um aerofólio fino bidimensional de corda c com ângulo de ataque α em relação a uma corrente uniforme com velocidade U em um canal, como ilustrado na figura 1 abaixo. Quando a distância h entre paredes paralelas é bem maior que a corda c , a solução desse problema permite estudar o efeito da distância d do aerofólio à uma das paredes na força de sustentação e no momento aerodinâmico. Esse efeito já é bem conhecido na literatura e é chamado de efeito solo. O outro limite de interesse é quando a distância h entre paredes paralelas é menor que ou da ordem da corda c . A solução a ser obtida permite estudar o efeito desse limite na força de sustentação e momento aerodinâmico que o fluido aplica no aerofólio.

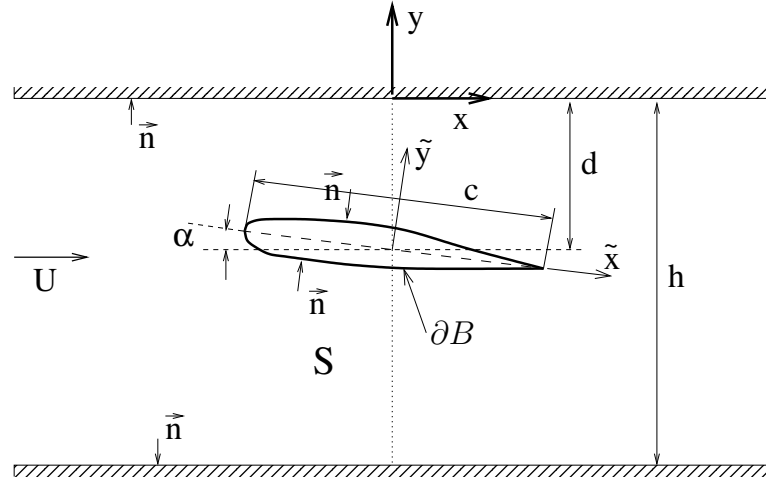


Figura 1: Aerofólio bidimensional de corda c com ângulo de ataque α sob ação de uma corrente de velocidade \vec{U} . A Distância entre placas paralelas é h , a distância da placa plana em relação à parede superior é d e ∂B representa o contorno do aerofólio.

Esse problema físico já foi abordado na literatura por diversos autores. [10] utilizou transformada conforme para obter a força de sustentação que o fluido aplica sobre uma placa plana bidimensional quando esta faz ângulo de ataque β em relação a corrente uniforme em um canal. O resultado desse trabalho foi validado comparando-se o caso limite onde a parede superior (inferior) do canal tende ao infinito com resultados para força de sustentação apresentado em [9] (em [7]). O momento aerodinâmico para o presente problema foi obtido em [8] via transformada conforme.

O efeito sobre a força de sustentação e momento aerodinâmico que age sobre um aerofólio em movimento perto de uma parede, denominado efeito solo, possui características interessantes, que levam a aplicações como veículos que aproveitem esse efeito para melhorar a sua aderência ao solo ou para planar próximo ao solo ou sobre a superfície do

mar. Essas potenciais aplicações estimularam pesquisadores a desenvolverem diferentes métodos para abordar esse fenômeno.

Em [8] utilizou a técnica de transformada conforme e o método de Blasius para obter a dependência da força de sustentação e do momento aerodinâmico sobre uma placa plana bidimensional com ângulo de ataque β em relação a uma corrente uniforme em função da distância desta em relação a uma superfície plana.

Em [12] desenvolveu-se solução analítica para asas bidimensionais e tridimensionais em efeito de solo utilizando o método das expansões assintóticas casadas. Uma solução analítica simples foi obtida para uma asa plana com uma bordo de fuga reto e arrasto induzido mínimo. Em primeira ordem, esta asa tem geometria elíptica e distribuição parabólica de circulação ao longo da envergadura. Uma expressão para o coeficiente de sustentação para pequena folga entre a asa e a parede e o ângulo de ataque, válida para razão de aspecto moderado, foi obtida. Os resultados analíticos mostram concordância razoável quando comparada com os resultados numéricos via teoria de superfície de sustentação para razões entre corda e a distância à parede de até ordem $1/2$. Extensão dessa abordagem é apresentada em [11], que inclui efeitos transientes e de espessura.

Burr [2] apresenta uma abordagem variacional para o problema de uma placa plana bidimensional com pequeno ângulo de ataque em relação a uma corrente uniforme sob efeito solo, onde é mostrado que a força de sustentação e o momento aerodinâmico são valores estacionários de funcionais bem definidos. Por exemplo, aproximação grosseira da solução com erro de ordem 10%, resulta na aproximação dos coeficientes de sustentação e de momento aerodinâmico com erro da ordem de 1%.

No presente trabalho, a solução do problema físico em questão será obtida utilizando-se de uma abordagem diferente, no caso relação integral envolvendo as condições de contorno e o método da expansão em autofunções da equação de governo do escoamento. O método das expansões em auto-funções já foi utilizado em hidrodinâmica, na análise da interação de ondas lineares e não lineares com placas submersas rígidas (veja [5]) ou elásticas (veja por exemplo [6]), com ou sem espessura (veja [3] para o caso com espessura), e interação de ondas com barreiras submersas. Mais recentemente, [4] utilizou o método da expansão em autofunções para estudar interação de ondas com placa horizontal sob fundo de topografia não uniforme. Já, a relação integral envolvendo as condições de contorno foi aplicado em [1] para obter formulação não-local para ondas de mar.

3 Objetivos

O principal objetivo desse trabalho é aplicar relação integral envolvendo as condições de contorno em conjunto com o método de expansão em autofunções para problemas em aerodinâmica, mais especificamente, aplicá-lo à interação de um aerofólio fino bidimensional com pequeno ângulo de ataque em relação a uma corrente uniforme com as paredes de um canal, como ilustrado na figura 1. A utilização dessa abordagem para problemas em aerodinâmica é possível pois na vizinhança do bordo de fuga de um aerofólio fino a solução do escoamento em termos de auto-funções pode ser construída e utilizada para impor a condição de Kutta-Joukowski, necessária para obter a circulação e consequentemente a força de sustentação.

Outro objetivo é estudar o efeito da proximidade da parede (efeito solo) e da distância entre paredes na força de sustentação e momento que o fluido aplica no aerofólio fino bidimensional.

4 Metodologia

Considere um aerofólio fino com ângulo de ataque α sob ação de uma corrente uniforme de intensidade U paralela às paredes superior e inferior de um canal bidimensional, como ilustrado na figura 1 acima, sob hipótese de que o fluido é incompressível e o escoamento é irrotacional. Nesse contexto o campo de velocidades do escoamento pode ser escrito como o gradiente de um potencial de velocidades $\Phi(x, y)$ que satisfaz a equação de Laplace

$$\nabla^2 \Phi(x, y) = 0 \text{ para } (x, y) \in S, \quad (1)$$

onde S é o domínio do escoamento. O potencial $\Phi(x, y)$ é sujeito a condição de contorno de que não há escoamento através do aerofólio e das superfícies sólidas inferior e superior do canal, que é dada por

$$\vec{\nabla} \Phi \cdot \vec{n} = 0 \text{ para } (x, y) \in \partial B, \text{ em } y = 0 \text{ e em } y = -h \quad (2)$$

onde ∂B é a superfície do aerofólio e h é a distância entre as placas. Note que a superfície do aerofólio pode ser expressa pelas equações

$$\tilde{y} - \eta_u(\tilde{x}) = 0 \quad (3)$$

e

$$\tilde{y} - \eta_l(\tilde{x}) = 0, \quad (4)$$

onde $\eta_u(\tilde{x})$ representa a superfície do dorso do aerofólio e $\eta_l(\tilde{x})$ representa a face do aerofólio. Veja na figura 1 ilustração do sistema de coordenadas auxiliar (\tilde{x}, \tilde{y}) .

Distante do aerofólio o efeito do mesmo no escoamento desaparece, e a velocidade é igual a velocidade da corrente uniforme, que implica que

$$\vec{\nabla}\Phi \rightarrow U\vec{i} \text{ para } x \rightarrow \pm\infty. \quad (5)$$

No bordo de fuga, o problema físico apresenta velocidade finita no bordo apesar deste ser uma quina. Isso ocorre devido à viscosidade do fluido, que permite somente valores finitos do vetor velocidade. Logo, no bordo de fuga temos que

$$\vec{\nabla}\Phi \text{ finito no bordo de fuga,} \quad (6)$$

que é denominada de condição de Kutta-joukowski.

Para simplificar a dependência em relação à parametros como a corda c da placa, como a distância d desta em relação à parede superior e como a distância h entre as paredes, o problema de contorno para Φ será adimensionalizado. Vamos definir as variáveis adimensionais

$$\bar{x} = \frac{x}{c}, \quad \bar{y} = \frac{y}{c}, \quad \bar{\Phi} = \frac{\Phi}{Uc}, \quad (7)$$

e linearizar o problema de contorno dado pelas equações (1)-(6) em relação ao ângulo de ataque de modo que

$$\bar{\Phi} = \bar{x} + \bar{\varphi}^+(\bar{x}, \bar{y}) - \gamma\bar{\varphi}^-(\bar{x}, \bar{y}). \quad (8)$$

Os potenciais $\bar{\varphi}^\pm(\bar{x}, \bar{y})$ satisfazem as equações

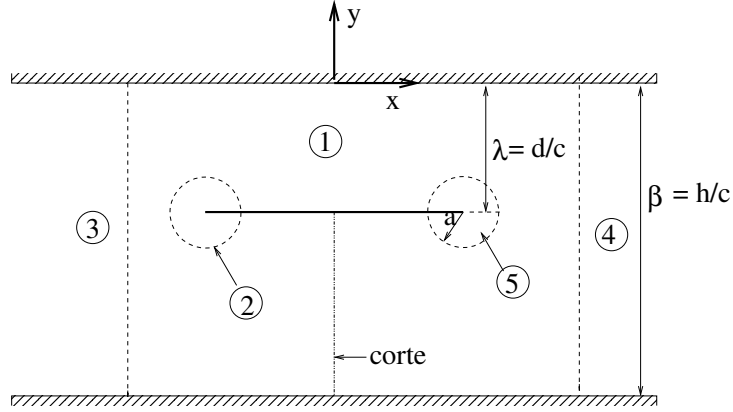


Figura 2: Geometria do aeorfólio fino pós-linearização. Divisão do domínio \bar{S} em subdomínios.

$$\frac{\partial^2 \bar{\varphi}^\pm}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\varphi}^\pm}{\partial \bar{y}^2} = 0 \text{ para } (\bar{x}, \bar{y}) \in \bar{S} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^+}{\partial \bar{y}} = -\alpha + \frac{d}{d\bar{x}} \eta_u \text{ em } \bar{y} = -\lambda^+ \quad (10)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^+}{\partial \bar{y}} = \alpha + \frac{d}{d\bar{x}} \eta_l \text{ em } \bar{y} = -\lambda^- \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^-}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ em } \bar{y} = -\lambda^\pm \quad (12)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^\pm}{\partial \bar{y}} = 0 \text{ em } \bar{y} = 0 \text{ e em } \bar{y} = -\beta \quad (13)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^\pm}{\partial \bar{x}} \rightarrow 0 \text{ para } \bar{x} \rightarrow \pm\infty \quad (14)$$

onde $\lambda = d/c$ e $\beta = h/c$. O domínio \bar{S} é ilustrado na figura 2. A condição de Kutta-Joukowski em termos das variáveis adimensionais assume a forma

$$|\nabla \bar{\varphi}| < \infty \text{ em } \bar{y} = -\lambda \text{ e } \bar{x} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (15)$$

e a circulação adimensional γ é determinada de modo que a singularidade do potencial $\bar{\varphi}^-$ cancele a singularidade do potencial $\bar{\varphi}^+$ no bordo de fuga. Isso resulta em campo de velocidades finito no bordo de fuga, satisfazendo a condição de Kutta-Joukowski.

A função potencial $\bar{\varphi}^-(\bar{x}, \bar{y})$ é multivaluada em \bar{S} , e para evitarmos isso é necessário restringir essa função a uma única folha de Riemann introduzindo-se um corte no domínio \bar{S} , que será ao longo da linha $\bar{x} = 0$ e $-\lambda > \bar{y} > -\beta$ como ilustrado na figura 2. Ao longo do corte a função $\bar{\varphi}^-(x, y)$ apresenta um salto, como especificado pela equação

$$\bar{\varphi}^-(0^+, \bar{y}) - \bar{\varphi}^-(0^-, \bar{y}) = -1 \text{ para } -\lambda > \bar{y} > -\beta, \quad (16)$$

mas a velocidade ao longo do corte é contínua, então

$$\frac{\partial \bar{\varphi}^-}{\partial \bar{x}}(0^-, \bar{y}) = \frac{\partial \bar{\varphi}^-}{\partial \bar{x}}(0^+, \bar{y}) \text{ para } -\lambda > \bar{y} > -\beta. \quad (17)$$

Como pode-se constatar na figura 2 o domínio \bar{S} foi subdividido nas regiões 1 a 5. As regiões de 3 e 4 são retangulares e a solução do problema de contorno para os potenciais $\bar{\varphi}^\pm$ pode ser obtida em termos das auto-funções da equação de Laplace nessas regiões. Nas regiões 2 e 5 circulares, a solução do problema de contorno para os potenciais $\bar{\varphi}^\pm$ também pode ser expressa em termos de auto-funções da equação de Laplace para essas regiões. Na região 1 vamos considerar relação integral envolvendo os potenciais $\bar{\varphi}^\pm$ e uma função ψ arbitrária que satisfaz a equação de Laplace, dada pela equação

$$\int_{\partial 1} [\psi \vec{\nabla} \bar{\varphi}^\pm - \bar{\varphi}^\pm \vec{\nabla} \psi] \cdot \vec{n} d\partial 1 = 0, \quad (18)$$

onde $\partial 1$ é a fronteira da região 1 (veja figura 2). Na fronteira entre as regiões 1 e as regiões 2, 3, 4 e 5 podemos utilizar a solução via auto-funções da equação de Laplace para representar as funções $\bar{\varphi}^\pm$ e suas derivadas. Em $y = -\lambda^\pm$ a derivada da função φ^\pm na direção do vetor normal exterior a região 1 é especificada pelas equações (10)-(12). Em $y = 0$ e em $y = -\beta$, a derivada da função φ^\pm na direção do vetor normal exterior a região 1 é especificada pela equação (13). No caso da função φ^- temos de levar em conta o corte presete na região 1, cuja condição sobre φ^- e sua derivada na direção da normal exterior a região 1 são dadas pela equações (16) e (17). Logo, a relação integral dada pela equação (18) leva a uma relação entre os coeficientes das expansões em termos das auto-funções nas regiões 2, 3, 4 e 5. Truncando a expansão em termos de autofunções em, por exemplo, N termos em cada uma das regiões 2, 3, 4 e 5 e escolhendo a função ψ como sendo as auto-funções primeiras N auto-funções das regiões 2, 3, 4 e 5 leva a um conjunto de $4N$ equações algébricas com $4N$ incógnitas, que pode ser resolvido numericamente.

Solução para os potenciais $\bar{\varphi}^\pm$ via série de auto-funções da equação de Laplace é construída na região 5 e os coeficientes das autofunções nessa série são determinados via solução do sistema de equações algébricas gerado com o uso da relação integral expressa pela equação (18). A solução para os potenciais $\bar{\varphi}^\pm$ assim obtida na região 5 apresenta comportamento singular quando na vizinhança do bordo de fuga. Impõe-se a condição de Kutta-Joukowski (veja equação (15)) de forma que a singularidade do potencial $\bar{\varphi}^+$ cancele com a singularidade do potencial $\bar{\varphi}^-$ na região 5, determinando a circulação adimensional γ .

A força de sustentação é determinada via teorema de Kutta-Joukowski e o momento aerodinâmico é obtido via integração do momento do campo de pressão em relação a um polo conveniente. O campo de pressão é obtido a partir do potencial de velocidades via equação de Bernoulli.

5 Viabilidade

O trabalho a ser realizado pelo aluno de IC no projeto é basicamente computacional, de pesquisa bibliográfica, um pouco de análise matemática, escrita de relatórios e possível artigo. Para a parte computacional será utilizado o programa MATLAB, utilizando-se suas bibliotecas de métodos numéricos para solução de sistema de equações lineares. A linguagem de programação Python também poderá ser utilizada da mesma maneira.

A complexidade computacional do problema não será elevada, o que facilita a execução por computadores comuns, não havendo a necessidade de máquinas além de um computador de uso doméstico. Enfim, não haverá necessidade de acesso intenso ao campus da universidade, pois a pesquisa bibliográfica pode ser realizada de forma remota via portal de periódicos do CAPES. A literatura para estudo dirigido pode ser obtida na biblioteca do campus de São Bernardo. A parte computacional será realizada com o computador pessoal do aluno de IC.

A presente abordagem pode ser estendida para problemas com geometria mais complexa como aerofólios não esbeltos utilizando-se transformada conforme. Outra extensão é substituir a parede superior por uma superfície livre e estudar a geração de ondas pelo aerofólio e também a interação de ondas com o aerofólio. Problemas que quero abordar em futuro próximo.

6 Cronograma de atividades

1. **Pesquisa bibliográfica.** Pesquisa bibliográfica utilizando bases de dados do Portal de Periódicos CAPES e sites de busca como www.scholar.google.com sobre temas relacionados, como por exemplo, aerofólio em efeito solo e o método da expansão em auto-funções.
2. **Estudo dirigido.** O aluno de IC provavelmente não está familiarizado com os tópicos necessários para a adequada compreensão do projeto. Logo, estudo dirigido sobre a visão diferencial da mecânica dos fluidos, sobre aerodinâmica de aerofólios

e sobre o método de separação de variáveis para a equação de Laplace e sobre o problema de Sturm-Liouville.

3. **Desenvolvimento do algoritmo.** O trabalho computacional consiste de duas partes: A) Implementação e solução numérica das equações algébricas para as amplitudes das auto-funções provenientes da relação integral representada pela equação (18); B) Implementação numérica da condição de Kutta-Joukowski e do cálculo numérico do momento aerodinâmico.
4. **Comparação de resultados com dados da literatura.** A fim de validar a solução numérica obtida, os resultados numéricos obtidos para o coeficiente de sustentação e o coeficiente de momento aerodinâmico serão comparados com soluções alternativas do problema encontradas na literatura, como por exemplo [8].
5. **Redação de Relatório e Artigo Científico.** O aluno de IC deverá escrever relatório de atividades na metade e final do período de bolsa de IC, relatando o desenvolvimento do projeto. Além disso, é desejável que o trabalho a ser desenvolvido resulte em uma publicação em periódico científico adequado ao tema do projeto, ou pelo menos artigo a ser apresentado em congresso.

Etapa	Mês											
	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12
1	**	*	*			*	*				*	
2	**	**	**	**	*		*	*	*	*		
3		*	*	**	**	*	*	*	*	*		
4							*	**	**	*		
5					*	**				*	***	

Referências

- [1] M. J. Ablowitz, A. S. Fokas, and Z. H. Musslimani. On a new non-local formulation of water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 562:313–343, September 2006. Publisher: Cambridge University Press.
- [2] Karl Peter Burr. Método variacional aplicado a teoria de fôlios: estudo do efeito solo. Master’s thesis, Universidade de São Paulo, 1993.
- [3] Hin-Fatt Cheong, N. Jothi Shankar, and S Nallayarasu. Analysis of submerged platform breakwater by Eigenfunction expansion method. *Ocean Engineering*, 23(8):649–666, November 1996.

- [4] Jie Dong, Benlong Wang, Xi Zhao, and Hua Liu. Wave Forces Exerted on a Submerged Horizontal Plate over an Uneven Bottom. *Journal of Engineering Mechanics*, 144(6):04018030, June 2018. Publisher: American Society of Civil Engineers.
- [5] Haruyuki Kojima, Akinori Yoshida, and Tetuya Nakamura. Haruyuki Kojima, Akinori Yoshida, Tetuya Nakamura. Linear and Nonlinear Wave Forces Exerted on a Submerged Horizontal Plate. 24th International Conference on Coastal Engineering, October 23-28, 1994, Kobe, Japan. American Society of Civil Engineers.
- [6] Mahmood-Ul-Hassan, Michael H. Meylan, and Malte A. Peter. Water-wave scattering by submerged elastic plates. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 62(3):321–344, August 2009.
- [7] S. TOMOTIKA. The Lift on a Flat Plate Placed Near a Plane Wall, with Special Reference to the Effect of the Ground upon the Lift of a Monoplane Aerofoil. *Report of the Aeronautical Research Institute*, 8(97), 1933. Publisher: Tokyo Imperial University.
- [8] Susumu TOMOTIKA. On the Moment of the Force acting on a Flat Plate placed in a Stream between Two Parallel Walls. *Report of the Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University*, 7(94):357–393, March 1933. Publisher: Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University.
- [9] Susumu TOMOTIKA. The Lift acting on a Flat Plate in a Stream bounded by an Infinite Plane Wall. *Report of the Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University*, 8(100):115–156, January 1934. Publisher: Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University.
- [10] Susumu TOMOTIKA. The Lift on a Flat Plate placed in a Stream between Two Parallel Walls and Some Allied Problems. *Report of the Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University*, 8(101):157–227, January 1934. Publisher: Aeronautical Research Institute, Tokyo Imperial University.
- [11] E. O. Tuck. A nonlinear unsteady one-dimensional theory for wings in extreme ground effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 98(1):33–47, May 1980. Publisher: Cambridge University Press.
- [12] Sheila E. Widnall and Timothy M. Barrows. An analytic solution for two- and three-dimensional wings in ground effect. *Journal of Fluid Mechanics*, 41(4):769–792, May 1970. Publisher: Cambridge University Press.