Universidade Federal do ABC
CENTRO DE MATEMÁTICA, COMPUTAÇÃO E COGNIÇÃO

PROJETO DE PESQUISA – INICIAÇÃO CIENTÍFICA

Colorações Aditivas

Resumo

Este é um projeto de iniciação científica em Teoria dos Grafos. Uma *coloração aditiva* de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $f : V \to \mathbb{N}_k$ tal que, para toda aresta $uv \in E$, temos que $S(u) \neq S(v)$, onde $S(u) = \sum_{x \in N_G(u)} f(x)$, sendo k um inteiro positivo e $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. O *número da sorte* de um grafo G, denotado por $\eta(G)$, é definido como o menor valor de k tal que f seja uma coloração aditiva. Em 2008, Chartrand, Okamoto, Zhang (*The sigma chromatic number of a graph*, Graphs Combin. **26** (2010), no. 6, 755-773) introduziram uma outra métrica para a coloração aditiva. O *número cromático sigma* de um grafo G, denotado por $\sigma(G)$, é definido como o menor valor de $|\mathrm{Im}(f)|$ tal que f seja uma coloração aditiva, onde $\mathrm{Im}(f)$ é o conjunto imagem de f. Este projeto de iniciação científica objetiva dar continuidade aos estudos de uma iniciação cientifica anterior sobre colorações aditivas, propondo encontrar limitantes de σ para determinadas famílias de grafos e melhorar o limitante atual de η para grafos planares livres de triângulo.

1 Introdução

Este é um projeto de pesquisa de iniciação científica em Teoria dos Grafos, que é o campo da matemática encarregado do estudo de estruturas chamadas *grafos*.

Um *grafo* é um par ordenado (V, E), onde V é um conjunto finito de elementos chamados de *vértices* e E é um multiconjunto finito de pares não ordenados de elementos de V chamados de *arestas*. Se $e = \{u, v\}$ é uma aresta de um grafo G, então dizemos que os vértices u e v são *adjacentes*, que u é *vizinho* de v, e que e é uma aresta *incidente* aos vértices u e v. Por simplicidade, vamos escrever uv para denotar uma aresta $\{u, v\}$.

Podemos representar um grafo visualmente através de um *desenho*, onde os vértices são representandos por pontos (ou círculos) e as arestas, por linhas conectando esses pontos. Mais especificamente, uma aresta incidente aos vértices u e v é representada por uma linha conectando as representações desses vértices. A Figura 1 ilustra o exemplo de um grafo.

Grafos são úteis para modelar relações par a par entre objetos, o que o torna uma estrutura adequada para modelar diversas situações práticas. Por exemplo, vértices podem representar cruzamentos de uma cidade e arestas que existe uma rua ligando tais cruzamentos. Ou então, vértices podem representar antenas de telecomunicações e uma aresta ligando dois vértices pode representar pares de antenas que devem operar em frequências distintas, caso contrário causariam interferência entre si. Além disso, não precisamos nos restringir a um único objeto a ser representado pelos vértices, por exemplo, podemos ter vértices que representam máquinas e outros que representam tarefas. Assim, podemos usar uma aresta conectando um vértice "máquina" e um vértice "tarefa" para representar quais tarefas podem ser executadas em quais máquinas. Para ampliar ainda mais o espectro de problemas que podem ser modelados com grafos,

$$
\begin{gathered}
G = (V, E), \text{onde} \\
V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} \\
E = \big\{v_0v_1, v_0v_3, v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 \\
v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\big\}
\end{gathered}
$$

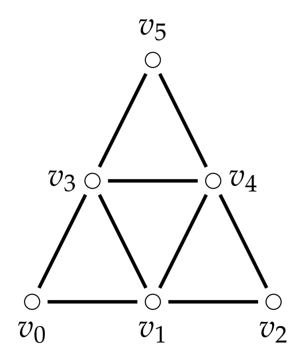

Figura 1: Exemplo de um grafo. À esquerda vemos a definição formal de um grafo, enquanto que à direita vemos um desenho desse.

podemos associar atributos tais como pesos, cores, direções aos seus vértices e/ou arestas. Isso permite que problemas importantes, tais como roteamento de veículos [11], alocação de tarefas [4], projeto de *layout* de circuito [2] e sequenciamento de tarefas [6], possam ser modelados como problemas em grafos.

Essa riqueza de aplicações fez de grafos uma importante estrutura de dados para a Ciência da Computação. Para o desenvolvimento de algoritmos eficientes para lidar com grafos é fundamental compreender as leis que governam essa estrutura. O campo que estuda essas leis é chamado de *Teoria dos Grafos*, ramo de pesquisa no qual esse projeto se enquadra.

O principal objetivo desse projeto é dar continuidade aos estudos de uma iniciação cientifica anterior sobre colorações aditivas, propondo encontrar limitantes de σ para determinadas famílias de grafos e melhorar o limitante atual de η para grafos planares livres de triângulo.

Encerramos essa seção apresentando algumas definições básicas de Teoria dos Grafos. Na Seção 2, definimos colorações aditivas e discutimos alguns resultados conhecidos na literatura. Além de apresentar os resultados obtidos na iniciação cientifica precedente. Na Seção 3, esclarecemos quais são os objetivos e resultados esperados desse projeto de pesquisa. Na Seção 4, relatamos como o trabalho será desenvolvido e justificamos a viabilidade da execução do projeto. Finalmente, na Seção 5, apresentamos um cronograma esperado da execução do projeto.

Definições Básicas

Dados um grafo $G = (V, E)$ e um vértice $u \in V$, definimos a *vizinhança* de u em G, denotado por $N_G(u)$, como sendo o conjunto de todos os vizinhos de u em G, i.e., $N_G(u) = \{v \in V : uv \in E\}$.

Dados um grafo $G = (V, E)$, um *caminho* é uma sequencia de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$, onde $v_i \neq v_j$ para todo $i \neq j$ (não há repetição de vértices), e $v_i v_{i+1} \in E$, para todo $0 \leqslant i \leqslant k-1$. Em particular, se $P = v_0, v_2, \ldots, v_k$ é um caminho, também dizemos que P é um (v_0, v_k)-*caminho*.

Dados um grafo $G = (V, E)$, um *ciclo* é uma caminho fechado, ou seja, um (v_0, v_k)-caminho onde $v_0 = v_k$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um conjunto $S \subseteq V$ é *independente* se $uv \notin E$ para qualquer par de vértices $u, v \in S$. Uma *coloração (própria)* de G é uma partição $\{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ de V tal que, para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, o conjunto V_i é independente. O *número cromático* de G, denotado por $\chi(G)$, é a menor cardinalidade de uma coloração de G.

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *cacto* se toda aresta $e \in E$ de G, pertence a no máximo um ciclo $C \subseteq G$.

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *cúbico* se $d(u) = 3$ para todo $u \in V$. Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *completo* se $uv \in E$ para todo par de vértices $u, v \in V$. Um grafo completo com n vértices é denotado por K_n. Em particular, o grafo K_3 também é chamado de *triângulo*.

Uma *família de grafo* é o conjunto de todos os grafos que satisfazem uma dada característica, por exemplo, a família dos grafos cúbicos é o conjunto que contém todos os grafos cúbicos.

2 Colorações Aditivas de Grafos

A coloração aditiva é um problema de rotulação de grafos. De forma geral, uma *rotulação* de um grafo é um função que mapeia os elementos do grafo, vértices e/ou arestas, aos elementos de um conjunto, denominado *conjunto de rótulos*, de tal forma que tal mapeamento satisfaça alguma restrição. Tradicionalmente, o conjunto de rótulos é um subconjunto dos inteiros positivos ou de um conjunto de cores.

Uma *coloração aditiva* de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $f : V \to \mathbb{N}_k$ tal que, para toda aresta $uv \in E$, temos que $S(u) \neq S(v)$, onde $S(u) = \sum_{x \in N_G(u)} f(x)$, sendo k um inteiro positivo e $\mathbb{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. O *número da sorte* de um grafo G, denotado por $\eta(G)$, é definido como o menor valor de k tal que f seja uma coloração aditiva [7].

Em 2008, Chartrand, Okamoto, e Zhang [5] introduziram uma outra métrica para a coloração aditiva. O *número cromático sigma* de um grafo G, denotado por $\sigma(G)$, é definido como o menor valor de $|\mathrm{Im}(f)|$ tal que f seja uma coloração aditiva, onde $\mathrm{Im}(f)$ é o conjunto imagem de f.

Vale notar que pela definição de coloração aditiva, para todo grafo $G = (V, E)$ temos que $\sigma(G) \leqslant \eta(G)$. A Figura 2 apresenta um exemplo de coloração aditiva com $\sigma(G) = \eta(G) = 3$.

Uma definição alternativa para o número cromático sigma, talvez até mais natural que a anterior, diz que o número cromático sigma de um grafo $G = (V, E)$ é o menor valor $k \in \mathbb{N}$ tal que V pode ser particionado em k conjuntos $V_1, V_2, \ldots, V_k$ de forma que, para todo $uv \in E(G)$, exista um $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ com $|N_G(u) \cap V_i| \neq |N_G(v) \cap V_i|$, ou seja, existe uma parte V_i na qual o número de vizinhos de u e v nessa parte difere.

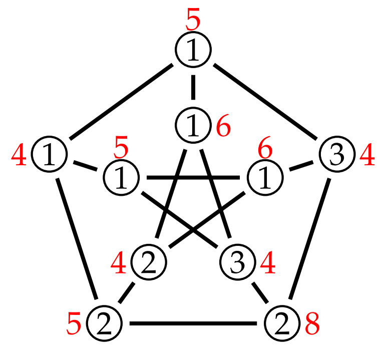

Figura 2: Exemplo de coloração Aditiva com $\sigma = \eta = 3$. Circunscrito dentro de cada vértice, podemos ver o rótulo atribuído pela coloração aditiva. Os números em vermelho apresentam a soma dos rótulos dos vizinhos de cada vértice.

A partir desta definição alternativa é fácil perceber que o número cromático é um limitante superior para o número cromático sigma, i.e., $\sigma(G) \leqslant \chi(G)$ para qualquer grafo G [5]. Além de provar o limitante anterior e caracterizar o número cromático sigma para algumas classes simples de grafos, tais como ciclos, grafos completos e grafos completos bipartidos; Chartrand, Okamoto, e Zhang [5] apresentaram o seguinte teorema, que demonstra que o número cromático sigma de um grafo arbitrário não pode ser limitado por uma constante.

Teorema 1 (Chartrand, Okamoto, e Zhang [5])**.** *Para todo par de inteiros positivos a, b, com $a \leqslant b$, existe um grafo G tal que $\sigma(G) = a$ e $\chi(G) = b$.*

Gonzaga e Almeida [8] apresentaram limitantes superiores para o número cromático sigma de grafos potência de caminho. O grafo *potência de caminho* P_n^k, onde $n > 0$ e $0 < k < n$, é o grafo (V, E) tal que $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ e $E = \{v_i v_j \colon 0 < |i - j| \leqslant k\}$. Mais especificamente, Gonzaga e Almeida [8] demonstraram que $\sigma(P_n^k) \leqslant 3$, quando $2 \leqslant k \leqslant \frac{n}{3} - 1$, e determinaram o número cromático sigma dos tipos restantes de grafo potência de caminhos. Ademais, os autores também encontraram o número cromático sigma de algumas famílias de *snarks*.

Em 2018, Dehghan, Sadeghi e Ahadi [9] apresentaram alguns resultados com respeito à dificuldade computacional do número cromático sigma. Eles demonstraram que decidir se $\sigma(G) = 2$ para um dado grafo cúbico G é um problema NP-completo. Uma implicação desse resultado diz que decidir se $\sigma(G) = \chi(G)$, para um dado grafo cúbico G, é um problema NP-completo. Ademais, os autores provaram que, para qualquer $k \geqslant 3$, é NP-completo decidir se $\sigma(G) = k$ para um dado grafo G.

Além dos resultados computacionais supracitados, Dehghan, Sadeghi e Ahadi [9] forneceram um limitante superior para o número cromático sigma do $G(n,p)$. O $G(n,p)$ é o grafo aleatório com n vértices no qual cada aresta existe com probabilidade p, com $0 \leqslant p \leqslant 1$.

Teorema 2 (Dehghan, Sadeghi e Ahadi [9])**.** *Para qualquer constante p com $0 < p < 1$, vale que $\sigma(G(n,p)) \leqslant 5$.*

Através das definições de η e σ, é fácil perceber que $\sigma(G) \leqslant \eta(G)$ para qualquer grafo G. Porém, o próximo resultado nos mostra que a distância entre $\sigma(G)$ e $\eta(G)$ pode ser arbitrariamente grande.

Teorema 3 (Dehghan, Sadeghi e Ahadi [9])**.** *Seja G um grafo, a distância entre $\sigma(G)$ e $\eta(G)$, calculada por $\eta(G) - \sigma(G)$ pode ser arbitrariamente grande.*

Czerwinski, Grytczuk e Zelazny [7] conjecturaram que todo grafo G satisfaz que $\eta(G) \leqslant \chi(G)$. Essa afirmação continua amplamente aberta, sendo confirmada somente para classes de grafos bem restritas, como árvores e grafos bipartidos planares [3]. Entretanto, limitantes constastes de η foram encontrados para grafos planares. No desenvolvimento desse resultado Bartnicki *et al.*[3] utilizaram o celebrado Combinatorial Nullstellensatz de Alon [1], para abordar o problema de forma algébrica.

Teorema 4 (Bartnicki, Bosek, Czerwinski, Grytczuk, Matecki e Zelazny [3])**.** *Para todo G grafo planar, $\eta(G) \leqslant 468$.*

Teorema 5 (Bartnicki, Bosek, Czerwinski, Grytczuk, Matecki e Zelazny [3])**.** *Para todo G grafo planar com $\chi(G) \leqslant 3$, $\eta(G) \leqslant 36$.*

Em uma iniciação científica anterior, o proponente obteve os seguintes resultados. O primeiro se baseia numa aplicação refinada do método algébrico que Bartnicki *et al.* usaram em [3].

Teorema 6. *Seja G um grafo cacto livre de triângulos, então $\eta(G) \leqslant 6$.*

Em 1976, F. Loupekine introduziu uma técnica de construção de Snarks [10]. Através desse procedimento, duas famílias infinitas de grafos foram exibidas, denotaremos por LO_k^1 a primeira e LO_k^2 a segunda. Os *snarks de Loupekine* LO_k^i, onde $i \in \{1,2\}$, possuem $n = 7k + 1$ vértices e estão definidos para $k \geqslant 3$ ímpar.

Teorema 7. *Para todo LO_k^i, onde $i \in \{1,2\}$ e $k \geqslant 3$ ímpar, vale que $\eta(LO_k^i) \leqslant 2$.*

Corolário 8. *Para todo LO_k^i, onde $i \in \{1,2\}$ e $k \geqslant 3$ ímpar, vale que $\sigma(LO_k^i) \leqslant 2$.*

3 Objetivos

Neste projeto pretendemos dar continuidade no estudo de colorações aditivas iniciado em uma iniciação cientifica anterior.

Esse trabalho será norteado pelas seguintes questões.

Problema 1. *Dada uma família $\mathcal{F}$ de grafos, existe uma constante C tal que, para todo grafo $G \in \mathcal{F}$, vale que $\sigma(G) \leqslant C$?*

Pelo Teorema 1, sabemos que tal constante C não existe para um grafo arbitrário. Entretanto, pelo Teorema 2, sabemos que quase todos os grafos admitem tal constante. Assim, nossa pesquisa objetiva identificar famílias para as quais podemos garantir a existência de tal constante.

Problema 2. *Seja $\mathcal{T}$ a família dos grafos planares livres de triângulo, existe uma constante $C < 36$ tal que, para todo grafo $G \in \mathcal{T}$, vale que $\eta(G) \leqslant C$?*

Note que essa pergunta foi parcialmente respondida pelo Teorema 6, já que todo cacto é um grafo planar. Assim, almejamos generalizar o resultado anterior objetivando resolver o Problema 2, melhorando assim o limitante superior dado pelo Teorema 5. No desenvolvimento do Teorema 6 encontramos algumas propriedades interessantes acerca de $\mathcal{T}$, que nos levam a acreditar que para tais grafos podemos melhorar o limitante de η tornando $C = 9$.

4 Metodologia e viabilidade

Sobre a metodologia, serão realizadas reuniões semanais presenciais entre o candidato e o orientador para que haja exposição e discussão dos conteúdos estudados, bem como o estabelecimento dos caminhos a serem seguidos.

Com relação a viabilidade, o candidato já efetuou uma iniciação cientifica em Teoria dos Grafos, portanto encontra-se apto para avançar nos trabalhos de uma nova iniciação científica nesse ramo. O mesmo também possui um bom nível de conhecimento da língua inglesa, que será necessário na leitura dos artigos científicos.

5 Cronograma de Execução

Podemos dividir a execução desse projeto em quatro atividades, detalhadas a seguir:

- *Levantamento bibliográfico*: nesta etapa, o candidato fará o levantamento bibliográfico sobre a coloração aditiva e problemas relacionados.
- *Estudo dos resultados selecionados*: após fazer o levantamento bibliográfico, os trabalhos mais interessantes serão estudados objetivando compreender as técnicas empregadas e identificar suas limitações (os pontos que impedem o resultado de ser generalizado).
- *Investigação do Problema 1*: nesta etapa, o candidato buscará responder a questão do Problema 1 para alguma(s) classe(s) simples de grafo(s).
- *Investigação do Problema 2*: nesta etapa, o candidato buscará responder a questão do Problema 2 para alguma(s) subclasse(s) simples de grafo(s) planares livres de triangulo.
- *Escrita do relatório*: nesta etapa, o candidato redigirá a redação do relatório final de iniciação científica.

O cronograma de execução dessas atividades ao longo dos dez meses de duração desse projeto pode ser visto na Tabela 1.

Tabela 1: Cronograma esperado de execução do projeto.

Atividades	**Meses**									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Levantamento bibliográfico	•									
Estudo dos resultados selecionados		•	•							
Investigação do Problema 1			•	•	•	•	•	•	•	
Investigação do Problema 2			•	•	•	•	•	•	•	
Escrita do relatório	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Referências

[1] N. ALON, *Combinatorial nullstellensatz*, Combinatorics, Probability and Computing **8** (1999), no. 1-2, 729. ↑6

[2] C. J. Augeri and H. H. Ali, *New graph-based algorithms for partitioning vlsi circuits*, 2004 ieee international symposium on circuits and systems (ieee cat. no.04ch37512), 2004, pp. IV–IV. ↑3

[3] T. Bartnicki, B. o. Bosek, S. Czerwiński, J. a. Grytczuk, G. Matecki, and W. Żelazny, *Additive coloring of planar graphs*, Graphs Combin. **30** (2014), no. 5, 1087–1098. MR3248491 ↑6

[4] A. Billionnet, M. C. Costa, and A. Sutter, *An efficient algorithm for a task allocation problem*, J. ACM **39** (July 1992), no. 3, 502518. ↑3

[5] G. Chartrand, F. Okamoto, and P. Zhang, *The sigma chromatic number of a graph*, Graphs Combin. **26** (2010), no. 6, 755–773. MR2729020 ↑4, 5

[6] R. C. Correa, A. Ferreira, and P. Rebreyend, *Scheduling multiprocessor tasks with genetic algorithms*, IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems **10** (1999), no. 8, 825–837. ↑3

[7] S. Czerwiski, J. Grytczuk, and W. elazny, *Lucky labelings of graphs*, Information processing letters **109** (2009), no. 18, 1078–1081 (eng). ↑4, 6

[8] L. G. da Soledade Gonzaga and S. M. de Almeida, *Sigma coloring on powers of paths and some families of snarks*, Electronic Notes in Theoretical Computer Science **346** (2019), 485–496. The proceedings of Lagos 2019, the tenth Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2019). ↑5

[9] A. Dehghan, M.-R. Sadeghi, and A. Ahadi, *Sigma partitioning: complexity and random graphs*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. **20** (2018), no. 2, Paper No. 19, 14. MR3896844 ↑5, 6

[10] R Isaacs, *Loupekhines snarks: a bifamily of non-tait-colorable graphs*, J. Combin. Theory B (1976). ↑6

[11] G. Laporte, *The vehicle routing problem: An overview of exact and approximate algorithms*, European Journal of Operational Research **59** (1992), no. 3, 345–358. ↑3