
Projeto de Pesquisa – PIBIC-EM

Simulação Numérica do Movimento Orbital

Resumo

O presente projeto visa introduzir ao aluno métodos numéricos de resolução de equações diferenciais, incluindo as noções de erros numéricos, ordem de convergência e execução de testes, visando adicionar à sua formação uma visão crítica dos modelos matemáticos concretos ao mesmo tempo que lhe apresenta técnicas úteis para seu futuro acadêmico. Usaremos como motivação soluções de problemas Newtonianos, culminando com o movimento orbital de um objeto gravitando uma massa central.

1 Introdução

A Mécânica Newtoniana representou uma mudança de paradigma no entendimento dos movimentos dos corpos celestes, descrevendo suas órbitas como resultados de equações diferenciais. Em oposição a teorias anteriores que tentavam encaixar as órbitas em curvas pré-definidas, nas equações diferenciais, o estado presente do objeto determina o seu movimento no momento seguinte, que determina o próximo e assim por diante, gerando a trajetória. A partir daí, tal abordagem foi levada para todos os ramos da Física.

No entanto, a resolução de equações diferenciais é ainda hoje um tópico de difícil compreensão e para muitas classes de equações dependemos fortemente de métodos numéricos para obter uma solução. Em oposição aos métodos analíticos, que produzem soluções exatas, métodos numéricos são aproximativos, produzem um resultado com uma margem de erro que precisa ser estudada e controlada a fim de se obter um resultado rigoroso.

Por isto, este projeto visa introduzir o aluno a métodos numéricos de resolução de equações diferenciais, incluindo as noções de erros numéricos, ordem de convergência e execução de testes, visando adicionar à sua formação uma visão crítica dos modelos do mundo real ao mesmo tempo que lhe apresenta técnicas úteis para seu futuro acadêmico. Como motivação e tornar o projeto mais atraente para o estudante, aplicaremos as técnicas à solução de problemas de Mecânica Newtoniana, começando com problemas unidimensionais e culminando com a simulação e análise do movimento orbital de um objeto sob a ação da força gravitacional de uma massa central.

2 Objetivos e Metas

O objetivo geral do projeto é conectar o estudante de uma maneira acessível aos fundamentos da integração numérica.

Resumimos os objetivos mais específicos nos seguintes pontos:

- I. A fase preliminar de nosso projeto consiste no aprendizado de linguagem Octave, que será usada para a solução de pequenos problemas propostos, que também servirão de introdução à noções matemáticas necessárias, como limites, tangentes, áreas e ordem de convergência. Paralelamente o aluno estudará fundamentos do Cálculo.
- II. Uma vez familiarizado com a linguagem Octave e o significado de uma equação diferencial, o estudante começará a estudar métodos básicos de integração numérica, como o de Euler, suas modificação, finalizando com o método de Runge-Kutta de quarta ordem.
- III. Finalmente usaremos os métodos para simular e desenhar órbitas de objetos sob ação da gravitação de uma massa central, explorando as quantidades conservadas energia e momento angular, e relacionando-as com os movimentos hiperbólico, elíptico e parabólico que descreveremos através de gráficos produzidos pelo nosso programa.

3 Metodologia

Pretendemos iniciar lentamente, com a resolução de exercícios numéricos intuitivos, como cálculo de áreas e volumes conhecidos para a apresentação dos métodos tradicionais, para finalmente adaptarmos ao nosso problema específico. Seguiremos o seguinte programa:

- Faremos pequenos problemas baseados em laços e iterações.
- Depois passaremos para problemas que exigem uma discretização de um segmento para obter aproximações sucessivamente maiores a partir do aumento do número N de partições
- Estudaremos o comportamento dos erros numéricos com o valor de N e discutiremos a noção de ordem de convergência.
- Introduziremos os métodos de integração numérica, com atenção especial aos métodos de Euler e Runge-Kutta, usando a linguagem Octave [1], que torna o código fácil de elaborar e possui ferramentas gráficas acessíveis para representação das soluções.
- Passaremos ao cálculo numérico soluções de trajetórias de objetos sob ação da gravitação de uma massa central, usando as ferramentas numéricas desenvolvidas, e executando testes de confiabilidade das soluções obtidas, para demonstrar conceitos de Mecânica Newtoniana assim como de cálculo numérico.
- Durante todo esse processo, será cobrado que o aluno produza textos regularmente sobre o conteúdo aprendido, que servirão de prévia para o relatório final.

4 Viabilidade

O projeto foi elaborado para ser concluído em 12 meses com uma jornada de 20 horas semanais e leva em conta em seus estágios a progressão de conhecimento do estudante neste período. Todos os requisitos necessários para a conclusão serão fornecidos ao estudante ao longo do projeto, através de reuniões com o orientador.

Não é exigido nenhum conhecimento anterior de cálculo ou programação, que serão providos na medida do necessário ao longo do desenvolvimento do projeto.

À medida em que o estudante aprende Cálculo, novos conceitos tornam-se disponíveis, como movimentos acelerados, e serão apresentados na medida do possível. A prioridade é a aquisição de entendimento intuitivo e habilidade operacional em problemas não-lineares através do cálculo numérico, que são importantes em inúmeras questões científicas. A construção dos movimentos orbitais é uma motivação para o desenvolvimento de tal habilidade.

O entendimento conceitual do problema e do significado dos resultados serão discutidos ao longo do andamento do projeto e através das leituras indicadas.

5 Cronograma

Nesta seção, descrevemos o tempo esperado de início, duração e conclusão para cada objetivo do projeto, segundo a tabela abaixo:

CRONOGRAMA

	Meses					
	1-2	3-4	5-6	7-8	9-10	11-12
Aprendizado da linguagem Octave	✓	✓				
Estudo da Mecânica Newtoniana		✓	✓			
Estudo dos métodos numéricos de integração			✓	✓		
Cálculo numérico das órbitas				✓	✓	
Produção do relatório final						✓

Referências

- [1] John W. Eaton. *GNU Octave Manual*. Network Theory Limited, 2002.