E.1 On considère la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

1. Déterminer la valeur des cinq premiers termes de cette suite.
2. Donner la formule explicite de (u_n) donnant la valeur d'un terme en fonction de son rang.
3. Déterminer la valeur de la suite suivante :
   $S = u_5 + u_6 + \cdots + u_{12}$

E.2 En identifiant chacune des sommes comme une somme des termes d'une suites arithmétiques ou géométriques, déterminer chacune de leurs valeurs :

a. $12 + 7 + 2 + (-3) + \cdots + (-28)$

b. $27 + 3 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{243}$

c. $\frac{2}{3} + \frac{8}{3} + \frac{14}{3} + \cdots + \frac{62}{3}$

d. $\frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^8} + \cdots + \frac{1}{2^{24}}$

E.3 Un coureur se lance un défi : il souhaite faire le tour de l'Europe.
Le premier jour, il parcourt $50\,km$. Par la fatigue, de jour en jour, sa distance parcourue quotidiennement se réduit de $1\,\%$.

On note u_n la longueur parcourue par le coureur le n-ième jour. En supposant ue le coureur poursuit indéfiniment sa course, on obtient une suite (u_n) définie pour tout entier naturel non-nul.

1. Déterminer la valeur des quatre permiers termes de la suite (u_n).
2. a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Donner les élèments caractéristiques de la suite (u_n).
   b. Exprimer le terme u_n en fonction du rang n.
   c. Quelle distance sera parcourue par le coureur le 100^e jour ? On arrondira la valeur au dixième de kilomètre.
3. On note S la somme des n premiers termes de la suite (u_n) : $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$
   a. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.
   b. Compléter le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième de kilomètres :

n	10	100	500	750	1000
S_n					

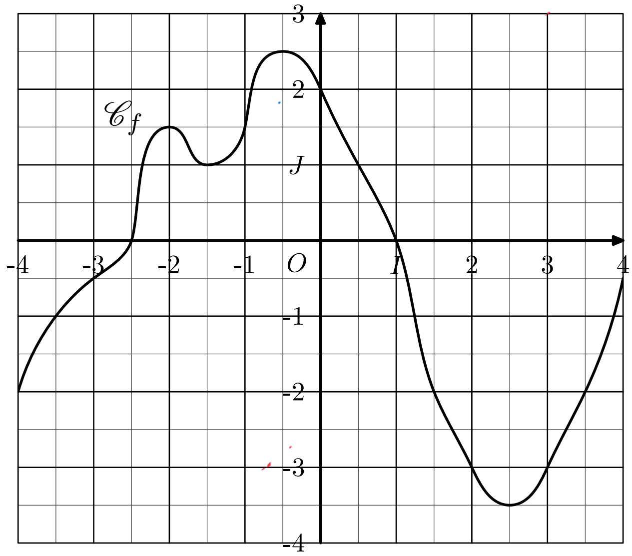
   c. Quelle conjecture peut-on faire sur la limite de la somme S_n quand la valeur de n devient de plus en plus grand ?

E.4 Un globe-trotter a parié de parcourir $5\,000\,km$ à pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir $50\,km$ en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de $1\,\%$ tous les jours.

On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.
2. Quelle est précisément la nature de la suite ?
   Déterminer la valeur de d_n en fonction de n.
3. On note L_n la distance en kilomètres parcourus au bout de n jours.
   $L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$
   a. Déterminer l'expression de L_n en fonction de n.
   b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend verse $+\infty$.
   Le globe-trotter peut-il gagner ?
   c. A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir $4\,999\,km$

E.5 On considère la fonction f définie sur $[-4\,;4]$ dont la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est donnée ci-dessous :



On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation :
$u_0 = 2 \quad ; \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrer que le terme u_1 est égal à -3.
2. Justifier les égalités suivantes :
   a. $u_2 = -0{,}5$ b. $u_3 = 2{,}5$
3. Compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n										

4. Que peut-on dire de la limite des termes de la suite (u_n) ?

E.6 On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0 = 8 \quad ; \quad u_{n+1} = 0{,}95\cdot u_n + 0{,}5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
   $v_n = u_n - 10 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
   a. Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95. On précisera la valeur de son premier terme.
   b. Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.
2. En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n
3. Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.7 On considère la suite (u_n) définie par la relation :
$u_0 = -2 \quad ; \quad u_{n+1} = 2\cdot u_n + 0{,}5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1. On définit la suite (v_n) définie par la relation :
   $v_n = u_n + 0{,}5 \quad$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Justifier que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera les élèments caractéristiques

b) Exprimer les termes de la suite (v_n) en fonction de n.

2) En déduire une expression de la suite (u_n) en fonction de n

3) Déterminer la limite des termes de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

E.8 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ v_0 = 4 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 2\cdot u_n - v_n \\ v_{n+1} = -3\cdot u_n + 4\cdot v_n \end{cases} \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) On considère la suite (w_n) définie par la relation :
$w_n = v_n - u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Etablir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 5.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :
$w_n = -5^n$

2) On considère la suite (t_n) définie par :
$t_n = 3\cdot u_n + v_n$

a) Montrer que : $t_0 = 19$

b) Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :
$t_{n+1} = t_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

On admettra que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $t_n = 19$

3) Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

4) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

E.9 On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies conjointement par les relations suivantes :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ v_0 = -1 \end{cases} ; \begin{cases} u_{n+1} = 3\cdot u_n - 2\cdot v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2\cdot v_n \end{cases}$$

1) On considère la suite (w_n) définie par la relation :
$w_n = v_n - u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Etablir que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 4.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, le terme de rang n s'exprime par :
$w_n = -4\times 4^n$

2) On considère la suite (t_n) définie par :
$t_n = 4\cdot u_n + 8\cdot v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Donner la valeur du terme t_0.

b) Etablir que pour tout entier naturel, on a l'égalité :
$t_{n+1} = t_n$

On admettra que la suite (t_n) est constante.

3) Déduire une expression des termes des suites (u_n) et (v_n) en fonction de n.

4) En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

E.10 Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par :
$u_{n+1} = 0{,}5\cdot u_n + 0{,}5\cdot n - 1{,}5$

1) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :
$v_n = 0{,}1\cdot u_n - 0{,}1\cdot n + 0{,}5$

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

2) En déduire que, pour tout entier naturel n :
$u_n = 10\times 0{,}5^n + n - 5$

3) Déterminer alors la limite de la suite (u_n)

E.11 On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 6$; $u_{n+1} = 2\cdot u_n - 3\cdot n + 5$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

1) Donner les trois premiers termes de la suite (u_n).

2) On considère la suite (v_n) définie par :
$v_n = u_n - 3\cdot n + 2$

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b) En déduire une expression des termes de la suite (v_n) en fonction de leur rang.

3) a) Justifier que pour tout entier naturel n, on a :
$u_n = 8\times 2^n + 3\cdot n - 2$

b) En déduire la limite de suite (u_n).

E.12 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} ; u_{n+1} = 7\cdot u_n + 8\cdot u_{n-1} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}$$

1) Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).

2) Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
est une suite géométrique dont on précisera la raison.
En déduire s_n en fonction de n.

3) a) On pose $v_n = (-1)^n\cdot u_n$ et on considère la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $t_n = v_{n+1} - v_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$
Exprimer t_n en fonction de s_n.

b) Quel est la nature de la suite (t_n).

4) a) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n *(on pourra calculer, de deux manières, la somme $t_0+\cdots+t_{n-1}$).*

b) Déterminer : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

E.13 Déterminer les limites des suites (u_n) définies ci-dessous :

a) $n^3\times 5^n$ b) $n - \left(\frac{2}{7}\right)^n$ c) $\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n$

d) $8^n - 3^n$ e) $\dfrac{5^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ f) $\left(\frac{31}{7}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{8}\right)^n$

E.14 On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation explicite : $u_n = \dfrac{3n+(-1)^n}{2n-1}$

1) Déterminer les trois premiers termes de la suite (u_n).

2) Etablir l'encadrement suivant :

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{3n-1}{2n-1} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{3n+1}{2n-1}$

3) En déduire la valeur de convergence de (u_n).

E.15 Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous définies explicitement :

a $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{n + 1}$ b $u_n = \dfrac{n - 3}{n^2 + 1}$

c $u_n = \dfrac{2\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 1}$ d $u_n = 1 + n - 2n^2 + 3n^3$

