Chap8- Logarithme népérien

Terminale Spécialité Mathématiques

1. **Remarque**

   La fonction exponentielle est une fonction continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.
   Pour tout réel b de $]0;+\infty[$, il existe donc un unique réel a tel que $\mathrm{e}^a = b$

   On dit que a est le **logarithme népérien** de b et on note : $a = \ln(b)$.

2. **Définition**

   La fonction, définie sur $]0;+\infty[$, qui à x associe $\ln(x)$ est appelée **fonction logarithme népérien**.

3. **Remarques**

   D'après la définition :

   (a) $b > 0$ et $a = \ln(b)$ équivaut à $\mathrm{e}^a = b$

   (b) Pour tout réel $x > 0$, $\boxed{\mathrm{e}^{\ln(x)} = x}$

   (c) Pour tout réel x, $\boxed{\ln(\mathrm{e}^x) = x}$

   (d) $\ln(1) = 0$ et $\ln(\mathrm{e}) = 1$

4. **Propriétés algébriques de la fonction ln**

   Pour tous réels a et b strictement positifs

   (a) $\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$

   Démonstration. $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = a \times b$ et $\mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)} \times \mathrm{e}^{\ln(b)} = a \times b$
   donc : $\mathrm{e}^{\ln(a\times b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}$ et par conséquent : $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

   CQFD

   (b) $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)}$

   Démonstration. $\ln(1) = \ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{a}\right) = 0$ donc : $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$

   CQFD

   (c) $\boxed{\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)}$

   Démonstration. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

   CQFD

(d) Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\boxed{\ln(a^n) = n\ln(a)}$

Démonstration. Pour $n \geq 0$ on fait une démonstration par récurrence.
Si $n < 0$, on pose $p = -n$. On a : $\ln(a^n) = \ln\left(\dfrac{1}{a^p}\right) = -\ln(a^p) = -p\ln(a) = n\ln(a)$

CQFD

(e) $\boxed{\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln(a)}$

Démonstration. $\ln\left((\sqrt{a})^2\right) = 2\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)$ donc $\ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$ CQFD

5. **Étude de la fonction logarithme népérien**

(a) Propriété (admise) : La fonction **ln est continue** sur $]0;+\infty[$

(b) La fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout x de $]0;+\infty[$, on a :

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Démonstration. On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0;+\infty[$. Soit f la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f(x) = \mathrm{e}^{ln(x)} - x$
Par définition pour tout $x > 0, \mathrm{e}^{ln(x)} = x$ donc f est nulle sur $]0,+\infty[$. Donc sa dérivée est nulle également. Soit u la dérivée de $ln(x)$ alors par composition de fonctions $f'(x) = u(x)\mathrm{e}^{ln(x)} - 1 = 0$ donc $u(x) = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{ln(x)}} = \dfrac{1}{x}$.

CQFD

(c) La fonction ln est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$

(d) $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty}$

Démonstration. Soit $A > 0$. Peut-on déterminer un réel x_0 tel que si $x > x_0, \ln(x) > A$?
$\ln(x) > A \Leftrightarrow \mathrm{e}^{\ln x} > \mathrm{e}^A \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^A$. Il suffit de prendre : $x_0 = \mathrm{e}^A$

CQFD

(e) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty}$

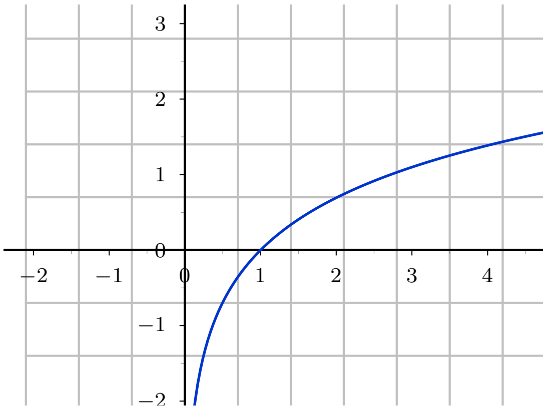
Démonstration.
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \\ \text{et} \lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty \end{array}\right\} \text{alors} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \text{ mais } \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$$
$$\text{donc} \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

CQFD

(f) **Tableau de variation de la fonction ln** :

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$ln'(x)$	$+$
$ln(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

(g) **Représentation graphique**



(h) **Remarque** D'après ce qui précède, pour a et b réels strictement positifs :

i. $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$

ii. $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$

6. **Théorème des croissances comparées**

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0}$$

cas particulier

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\qquad$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

Démonstration. ► ROC

1) Soit f définie par : $f(x) = \sqrt{x} - \ln x, x \in I =]0;+\infty[$; $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2x}$. On a le tableau de variation de f suivant :

x	0	4	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$	$2 - ln4 \approx 0,61$	$\nearrow$

Sur I, $f(x) > 0$. Sur $[1;+\infty[$: $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \geq \dfrac{\ln x}{x} \geq 0$.

D'après le théorème des gendarmes : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2) En posant $y = \dfrac{1}{x}$ on a $x\ln x = \dfrac{\ln(\frac{1}{y})}{y} = -\dfrac{\ln y}{y}$ avec y tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

D'après le 1) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{y\to+\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0$

CQFD

7. **Dérivée de la fonction composée** $x \longmapsto \ln(u(x))$
Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et pour tout x de I :

$$\boxed{[\ln(u(x))]' = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$