C.1

1. Une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ vérifie la relation :

$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$

Ainsi, on obtient la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = \frac{3}{4}$
- $u_1 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
- $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$
- $u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$
- $u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

2. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$; ainsi, le terme u_n de rang n vérifie explicitement la formule suivante :

$u_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}{\cdot}n$

3. D'après la formule explicite du terme u_n de rang n, on obtient :

- $u_5 = \frac{3}{4} + 5{\times}\frac{1}{2} = \frac{13}{4}$
- $u_{12} = \frac{3}{4} + 12{\times}\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$

La somme S est la somme des termes conséctuif de la suite de u_5 à u_{12} ; c'est donc la somme de $12{-}5{+}1{=}8$ termes consécutifs de cette suite ; ainsi, la valeur de S est donnée par la formule :

$$S = \frac{(u_5 + u_{12}){\times}8}{2} = \frac{\left(\frac{13}{4} + \frac{27}{4}\right){\times}8}{2}$$
$$= \left(\frac{13}{4} + \frac{27}{4}\right){\times}4 = \frac{40}{4}{\times}4 = 40$$

C.2

a. $12 + 7 + 2 + (-3) + \cdots + (-28)$

On reconnait dans les premiers termes de cette somme, les termes d'une suite arithmétique de premier terme 12 et de raison (-5).

La suite étant arithmétique de premier terme 12 et de raison (-5), son terme de rang n s'écrit :

$u_n = u_0 + n{\cdot}r = 12 + n{\cdot}(-5) = 12 - 5n$

Déterminons le rang du terme valant -28 :

$$\begin{aligned} u_n &= -28 \\ 12 - 5n &= -28 \\ -5n &= -28 - 12 \\ -5n &= -40 \\ n &= \frac{-40}{-5} \\ n &= 8 \end{aligned}$$

On en déduit que la somme recherchée est la somme des neufs premiers termes d'une suite arithmétique.

Ainsi, la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique permet d'écrire :

$$S = \frac{(u_0 + u_8){\cdot}(n+1)}{2} = \frac{[12 + (-28)]{\cdot}(8+1)}{2}$$
$$= \frac{-16{\times}9}{2} = -\frac{144}{2} = -72$$

b. On reconnaît dans les premiers termes de cette somme, les termes d'une suite géométrique de premier terme 27 et de raison $\frac{1}{9}$; ainsi, le terme de rang n admet pour expression l'écriture suivant :

$u_n = u_0 \cdot q^n = 27 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$

Déterminons le rang du dernier terme de cette somme :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{243} \\ 27 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n &= \frac{1}{243} \\ \left(\frac{1}{9}\right)^n &= \frac{1}{6561} \\ \frac{1}{9^n} &= \frac{1}{6561} \\ 9^n &= 6561 \end{aligned}$$

La calculatrice permet d'obtenir les puissances successives du nombre 9 :

9 ; 81 ; 729 ; 6561

On en déduit que $n{=}4$; ainsi, on a : $u_4 = \frac{1}{243}$

La raison de la suite géométrique (u_n) étant différente de 1, la somme de ces termes est donnée par la formule :

$$S = 27 + \cdots + \frac{1}{243} = u_0 + u_1 + \cdots + u_4$$
$$= 27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^5}{1 - \frac{1}{9}} = 27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^5}{\frac{8}{9}}$$
$$= 27{\times}\frac{9}{8} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^5\right] = \frac{243}{8} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^5\right]$$

c. On remarque facilement que les termes de cette somme sont les termes d'une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $\frac{2}{3}$. Ainsi, le rang n du dernier terme de la somme admet pour écriture :

$u_n = u_0 + r{\cdot}n = \frac{2}{3} + 2n$

Déterminons le rang du dernier terme de cette somme :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{62}{3} \\ \frac{2}{3} + 2n &= \frac{62}{3} \\ 2n &= \frac{60}{3} \\ 2n &= 20 \\ n &= 10 \end{aligned}$$

Ainsi, cette somme comprend 11 termes.

Ainsi, le dernier terme de la somme est le terme de rang 10 ; la formule donnant la somme des termes d'une suite arithmétique permet d'écrire :

$$\frac{2}{3} + \cdots + \frac{62}{3} = \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{62}{3}\right) \cdot 11}{2} = \frac{\frac{64}{3}{\times}11}{2} = \frac{352}{3}$$

d. Cettte suite est une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2^4}$ et de raison $\frac{1}{2^2}$; ainsi, le rang n du dernier terme de la somme vérifie :

$u_n = u_0 \cdot q^n = \dfrac{1}{2^4} \cdot \left(\dfrac{1}{2^2}\right)^n = \dfrac{1}{2^4} \times \dfrac{1}{2^{2n}}$

Recherchons le rang du dernier terme de cette somme :

$$u_n = \frac{1}{2^{24}}$$
$$\frac{1}{2^4} \times \frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{24}}$$
$$\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{24}} \times 2^4$$
$$\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{20}}$$
$$2^{2n} = 2^{20}$$

Ainsi, on en déduit que ce terme est le terme de rang 10 ; ainsi, cette somme comprend 11 termes.

La raison de la suite (u_n) étant différent de 1, la somme de ces termes s'expriment par la formule :

$$\frac{1}{2^4} + \cdots \frac{1}{2^{24}} u_0 + u_1 + \cdots + u_{10} = u_0 \cdot \frac{1-q^{11}}{1-q}$$
$$= \frac{1}{2^4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{2^2}} = \frac{1}{2^4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{11}}{1 - \frac{1}{4}}$$
$$= \frac{1}{2^4} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{11}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^4} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{11}\right] \cdot \frac{4}{3}$$
$$= \frac{1}{12} \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{11}\right]$$

C.3

1. Pour réduire un nombre de 1 %, il est nécessaire de le multiplier par :

$$1 - \frac{1}{100} = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$$

Voici les quatre premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_1 = 50$
- $u_2 = 50 \times 0{,}99 = 49{,}5$
- $u_3 = 49 \times 0{,}99 = 49{,}005$
- $u_4 = 49 \times 0{,}99 = 48{,}51495$

2. a. Deux termes de la suite (u_n) vérifient la relation : $u_{n+1} = u_n \times 0{,}99$.

Ainsi, la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,99 et de premier terme 50.

b. Les termes d'une suite géométrique vérifient la relation suivante en fonction de leur rang n :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = 50 \times (0{,}99)^{n-1}$$

c. Voici l'expression donnant la valeur du 100^e terme de la suite (u_n) :

$$u_{100} = 50 \times (0{,}99)^{100-1} = 50 \times (0{,}99)^{99} \approx 18{,}5\,km$$

3. a. La suite (u_n) étant une suite géométrique de premier terme 50 et de raison 0,99, on en déduit l'expression de la somme de ses n premiers termes :

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= 50 \cdot \frac{1-0{,}99^n}{1-0{,}99} = 50 \cdot \frac{1-0{,}99^n}{0{,}01}$$
$$= 50 \cdot (1-0{,}99^n) \times 100 = 5\,000 \cdot (1-0{,}99^n)$$

b. On a le tableau de valeurs suivants :

n	10	100	500	750	1000
S_n	478,1	3169,8	4967,1	4997,3	4999,8

c. On peut conjecturer que la distance parcourue par le coureur va se stabiliser vers 5 000 km lorsque la valeur de n deviendra de plus en plus grande.

C.4

1. Voici les trois premières distances parcourue par le globe-trotter :

- L'énoncé dit que le premier jour, il parcourt 50 km : $d_1 = 50$.
- Le second jour, cette distance baisse de 1 %. Cette évolution est associée à un coefficient multiplicateur de 0,99 : $d_2 = d_1 \times 0{,}99 = 49{,}5$
- On obtient : $d_3 = d_2 \times 0{,}99 = 49{,}005$

2. Cette suite est une suite géométrique de premier terme 50 et de raison 0,99.

Ainsi, le terme de rang n de la suite (d_n) a pour expression :

$$d_n = d_1 \cdot q^{n-1}$$
$$d_n = 50 \times 0{,}99^{n-1}$$

3. a. La raison de la suite (d_n) géométrique étant différent de 1, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique permet d'obtenir l'égalité :

$$L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = d_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$
$$= 50 \times \frac{1-0{,}99^n}{1-0{,}99} = 50 \times \frac{1-0{,}99^n}{0{,}01}$$
$$= 50 \times (1-0{,}99^n) \cdot 100 = 5\,000 \cdot (1-0{,}99^n)$$

b. Puisque $0 \leqslant 0{,}99 \leqslant 1$, on a la limite :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} 0{,}99^n = 0$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} L_n = \lim_{n \mapsto +\infty} 5\,000 \cdot (1-0{,}99^n) = 5\,000$$

c. A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$L_{847} \approx 4998{,}995 \quad ; \quad L_{848} \approx 4999{,}005$$

C.5

1. La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Ainsi, on a : $u_1 = f(u_0) = f(2) = -3$

2. a. $u_2 = f(u_1) = f(-3) = -0{,}5$

b. $u_3 = f(u_2) = f(-0{,}5) = 2{,}5$

3. On a le tableau complété :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
u_n	2	-3	$-0{,}5$	2,5	$-3{,}5$	-1	1,5	-2	1,5	-2

4. La suite (u_n) n'est pas convergente car à partir du rang 6, les termes valent alternativement 1,5 et -2.

C.6

1. a. Etudions la différence de deux termes consécutifs de la suite (v_n) :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 10 = (0{,}95 \cdot u_n + 0{,}5) - 10 = 0{,}95 \cdot u_n - 9{,}5$$
$$= 0{,}95 \cdot \left(u_n - \frac{9{,}5}{0{,}95}\right) = 0{,}95 \cdot (u_n - 10) = 0{,}95 \cdot v_n$$

On vient de montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

Le premier terme de la suite a pour valeur : $v_0 = u_0 - 10 = 8 - 10 = -2$

b La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme -2 et de raison 0,95.
La formule explicite des suites géométriques permet d'obtenir l'expression des termes de la suite (v_n) en fonction de n :
$v_n = -2 \times 0{,}95^n$

2 De la définition de la suite (v_n), on en déduit l'égalité :
$v_n = u_n - 10$
$u_n = v_n + 10$
$u_n = -2 \times 0{,}95^n + 10$

3 De l'encadrement $0 \leqslant 0{,}95 < 1$, on a la limite :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 0{,}95^n = 0$

On en déduit :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} -2 \times 0{,}95^n + 10 = -2 \times 0 + 10 = 10$

C.7

1 a Par définition de la suite (v_n), on a la relation :
$v_{n+1} = u_{n+1} + 0{,}5 = (2 \cdot u_n + 0{,}5) + 0{,}5 = 2 \cdot u_n + 1$
$= 2 \cdot (u_n + 0{,}5) = 2 \cdot v_n$
On vient d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont le premier terme vaut :
$v_0 = u_0 + 0{,}5 = -2 + 0{,}5 = -1{,}5$

b L'expression explicite d'une suite de termes explicites donne :
$v_n = -1{,}5 \times 2^n$

2 La définition des termes de la suite (v_n) permet d'obtenir :
$v_n = u_n + 0{,}5$
$u_n = v_n - 0{,}5$
$u_n = -1{,}5 \times 2^n - 0{,}5$

3 De la comparaison $2 > 1$, on en déduit :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 2^n = +\infty$
On en déduit :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} -1{,}5 \times 2^n - 0{,}5 = -\infty$

C.8

1 a La définition de la suite (w_n) permet d'écrire la relation :
$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = (-3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n) - (2 \cdot u_n - v_n)$
$= -3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n - 2 \cdot u_n + v_n = -5 \cdot u_n + 5 \cdot v_n$
$= 5 \cdot (v_n - u_n) = 5 \cdot w_n$
La suite (w_n) est géométrique de raison 5.

b Le premier terme de la suite (w_n) a pour valeur :
$w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 5 = -1$
La formule de l'expression des termes d'une suite géométrique permet d'écrire :
$w_n = -1 \times 5^n = -5^n$

2 a Le premier terme de la suite (t_n) a pour valeur :
$t_0 = 3 \cdot u_0 + v_0 = 3 \times 5 + 4 = 15 + 4 = 19$

b On a la relation :
$t_{n+1} = 3 \cdot u_{n+1} + v_{n+1} = 3 \cdot (2 \cdot u_n - v_n) + (-3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n)$
$= 6 \cdot u_n - 3 \cdot v_n - 3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n = 3 \cdot u_n + v_n = t_n$

3 D'après les question 1 et 2, on a :

$$\begin{cases} w_n = -5^n \\ t_n = 19 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_n - u_n = -5^n \\ 3 \cdot u_n + v_n = 19 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -u_n + v_n = -5^n \\ 3 \cdot u_n + v_n = 19 \end{cases}$$

Par soustraction de ces deux lignes, on obtient :
$-u_n - 3 \cdot u_n = -5^n - 19$
$-4 \cdot u_n = -5^n - 19$
$u_n = \dfrac{-5^n - 19}{-4}$
$u_n = \dfrac{5^n + 19}{4}$
$u_n = \dfrac{5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$

De la première équation, on obtient :
$v_n - u_n = -5^n$
$v_n = -5^n + u_n$
$v_n = -5^n + \dfrac{5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$
$v_n = \dfrac{-4 \times 5^n}{4} + \dfrac{5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$
$v_n = \dfrac{-3 \times 5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$

4 De l'encadrement $5 > 1$, on a la limite : $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 5^n = +\infty$
On en déduit les limites :
$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = -\infty$

C.9

1 a D'après la définition de la suite (w_n), on a la relation suivante :
$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = (-u_n + 2 \cdot v_n) - (3 \cdot u_n - 2 \cdot v_n)$
$= -u_n + 2 \cdot v_n - 3 \cdot u_n + 2 \cdot v_n = -4 \cdot u_n + 4 \cdot v_n$
$= 4 \cdot (v_n - u_n) = 4 \cdot w_n$
On en déduit que la suite (w_n) est géométrique de raison 4.

b Le premier terme de la suite (w_n) a pour valeur :
$w_0 = v_0 - u_0 = -1 - 3 = -4$
L'expression des termes d'une suite géométrique en fonction de leur rang donne :
$w_n = w_0 \cdot q^n$
$w_n = -4 \times 4^n$
$w_n = -4^{n+1}$

2 a Le premier terme de la suite (t_n) a pour valeur :
$t_0 = 4 \cdot u_0 + 8 \cdot v_0 = 4 \times 3 + 8 \times (-1) = 12 - 8 = 4$

b La définition de la suite (t_n) permet d'écrire :
$t_{n+1} = 4 \cdot u_{n+1} + 8 \cdot v_{n+1} = 4 \cdot (3 \cdot u_n - 2 \cdot v_n) + 8 \cdot (-u_n + 2 \cdot v_n)$
$= 12 \cdot u_n - 8 \cdot v_n - 8 \cdot u_n + 16 \cdot v_n = 4 \cdot u_n + 8 \cdot v_n = t_n$

3 De la question 1 et 2, on obtient les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} v_n - u_n = -4 \times 4^n \\ 4 \cdot u_n + 8 \cdot v_n = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -u_n + v_n = -4 \times 4^n \\ 4 \cdot u_n + 8 \cdot v_n = 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -4 \cdot u_n + 4 \cdot v_n = -16 \times 4^n \\ 4 \cdot u_n + 8 \cdot v_n = 4 \end{cases}$$

Par addition des deux équations, on obtient la relation :

$$4\cdot v_n + 8\cdot v_n = -16\times4^n + 4$$
$$12\cdot v_n = -16\times4^n + 4$$
$$v_n = \frac{-16\times4^n + 4}{12}$$
$$v_n = \frac{-16\times4^n}{12} + \frac{4}{12}$$
$$v_n = \frac{-4\times4^n}{3} + \frac{1}{3}$$

En utilisant la première équation, on obtient :
$$v_n - u_n = -4\times4^n$$
$$-u_n = -4\times4^n - v_n$$
$$u_n = 4\times4^n + v_n$$
$$u_n = 4\times4^n + \frac{-4\times4^n}{3} + \frac{1}{3}$$
$$u_n = \frac{12\times4^n - 4\times4^n}{3} + \frac{1}{3}$$
$$u_n = \frac{8\times4^n}{3} + \frac{1}{3}$$

4 De la comparaison $4>1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 4^n = +\infty$.

On en déduit les deux limites des suites :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = -\infty$

C.10

1 Par définition des termes de la suite (v_n), on a :
$$v_{n+1} = 0{,}1\cdot u_{n+1} - 0{,}1\cdot(n+1) + 0{,}5$$
$$= 0{,}1\cdot\big(0{,}5\cdot u_n + 0{,}5\cdot n - 1{,}5\big) - 0{,}1\cdot n - 0{,}1 + 0{,}5$$
$$= 0{,}05\cdot u_n + 0{,}05\cdot n - 0{,}15 - 0{,}1\cdot n + 0{,}4$$
$$= 0{,}05\cdot u_n - 0{,}05\cdot n + 0{,}25 = 0{,}5\cdot\Big(\frac{0{,}05}{0{,}5}\cdot u_n - \frac{0{,}05}{0{,}5}\cdot n + \frac{0{,}25}{0{,}5}\Big)$$
$$= 0{,}5\cdot\big(0{,}1\cdot u_n - 0{,}1\cdot n + 0{,}5\big) = 0{,}5\cdot v_n$$

On vient d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
Son premier terme a pour valeur :
$$v_0 = 0{,}1\cdot u_0 - 0{,}1\times0 + 0{,}5 = 0{,}1\times5 - 0 + 0{,}5$$
$$= 0{,}5 + 0{,}5 = 1$$

Ainsi, les termes de la suite (v_n) ont pour expression en fobnction de n :
$$v_n = 1\times0{,}5^n$$

2 De la définition des termes de la suite (u_n), on a :
$$v_n = 0{,}1\cdot u_n - 0{,}1\cdot n + 0{,}5$$
$$v_n + 0{,}1\cdot n - 0{,}5 = 0{,}1\cdot u_n$$
$$u_n = 10\cdot\big(v_n + 0{,}1\cdot n - 0{,}5\big)$$
$$u_n = 10\cdot v_n + n - 5$$
$$u_n = 10\cdot 0{,}5^n + n - 5$$

3 De l'encadrement $0\leqslant 0{,}5<1$, on en déduit :
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 0{,}5^n = 0$.

On a les limites suivantes : $\begin{cases} \lim\limits_{n\mapsto+\infty} 10\times0{,}5^n = 0 \\ \lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty \end{cases}$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} 10\times0{,}5^n + n - 5 = +\infty$$

C.11

1 Voici les trois premiers termes de la suite (u_n)

- $u_0 = 6$
- $u_1 = 2\cdot u_0 - 3\times0 + 5 = 2\times6 - 0 + 5 = 17$
- $u_2 = 2\cdot u_1 - 3\times1 + 5 = 2\times17 - 3 + 5 = 34 + 2 = 36$

2 a En utilisant la définition des termes de la suite (v_n) :
$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3\cdot(n+1) + 2$$
$$= \big(2\cdot u_n - 3\cdot n + 5\big) - 3\cdot n - 3 + 2 = 2\cdot u_n - 6\cdot n + 4$$
$$= 2\cdot\big(u_n - 3\cdot n + 2\big) = 2\cdot v_n$$

On vient d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2.

b Le premier terme de la suite (v_n) a pour valeur :
$$v_0 = u_0 - 3\times0 + 2 = 6 - 0 + 2 = 8$$

Ainsi, les termes de la suite (v_n) admettent pour expression :
$$v_n = 8\times2^n$$

3 a De la définition des termes de la suite (v_n) :
$$v_n = u_n - 3\cdot n + 2$$
$$8\times2^n = u_n - 3\cdot n + 2$$
$$u_n = 8\times2^n + 3\cdot n - 2$$

b On a les limites suivantes :

- Puisque $2>1$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 2^n = +\infty$.
  On en déduit : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 8\times2^n = +\infty$
- $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 3\cdot n - 2 = +\infty$

On en déduit la limite :
$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} 8\times2^n + 3\cdot n - 2 = +\infty$$

C.12

1 Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0 = 0$
- $u_1 = 1$
- $u_2 = 7\cdot u_1 + 8\cdot u_0 = 7\times1 + 8\times0 = 7 + 0 = 7$
- $u_3 = 7\cdot u_2 + 8\cdot u_1 = 7\times7 + 8\times1 = 49 + 8 = 57$
- $u_4 = 7\cdot u_3 + 8\cdot u_2 = 7\times57 + 8\times7 = 399 + 56$
  $= 455$

2 La formule de récurrence de la suite (u_n) permet d'écrire la relation suivante :
$$u_{n+2} = 7\cdot u_{n+1} + 8\cdot u_n$$

Par définition de la suite (s_n), on peut écrire :
$$s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = \big(7\cdot u_{n+1} + 8\cdot u_n\big) + u_{n+1}$$
$$= 8\cdot u_{n+1} + 8\cdot u_n = 8\cdot\big(u_{n+1} + u_n\big) = 8\cdot s_n$$

La relation précédente montre que la suite (s_n) est une suite géométrique de raison 8.

Par définition des termes de la suite (s_n), son premier terme a pour valeur :
$$s_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$$

Ainsi, on obtient l'expression des termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 1 et de raison 8 en fonction de n :
$$s_n = s_0\cdot q^n = 1\times8^n = 8^n$$

3 a Pour tout entier naturel n, on a la relation :
$$t_n = v_{n+1} - v_n = (-1)^{n+1}\cdot u_{n+1} - (-1)^n\cdot u_n$$
$$= (-1)^{n+1}\cdot u_{n+1} + (-1)^{n+1}\cdot u_n$$
$$= (-1)^{n+1}\cdot\big(u_{n+1} + u_n\big) = (-1)^{n+1}\cdot s_n$$

b La suite (s_n) étant géométrique de raison 8, on a :
$$s_n = s_0\cdot q^n = s_0\cdot 8^n$$

Ainsi, on peut exprimer les termes de la suite (t_n) par :

$$t_n = (-1)^{n+1}\cdot s_n = (-1)^{n+1}\cdot s_0\cdot 8^n$$
$$= (-1)^n\cdot(-s_0)\cdot 8^n = (-1\times 8)^n\cdot(-s_0)$$
$$= (-8)^n\cdot(-s_0)$$

Cette dernière expression montre que la suite (t_n) est une suite géométrique de premier terme $-s_0$ et de raison -8.

4 a Les deux prermiers termes de la suite (v_n) ont pour valeur : $v_0 = (-1)^0\cdot u_0 = 0$; $v_1 = (-1)^1\cdot u_1 = -1$

On en déduit la valeur du premier terme de la suite (t_n) :

$$t_0 = v_1 - v_0 = -1$$

Notons T_n la somme : $T_n = t_0 + t_1 + \cdot + t_{n-2} + t_{n-1}$

- $T_n = t_0 + t_1 + \cdot + t_{n-2} + t_{n-1}$

  qui peut s'écrire :

  $$=(v_1\text{-}v_0)+(v_2\text{-}v_1)+\cdots+(v_{n-1}\text{-}v_{n-2})+(v_n\text{-}v_{n-1})$$
  $$= -v_0 + v_n$$

- La suite (t_n) est une suite géométrique de premier terme -1 et de raison -8. On en déduit l'expression de la somme T_n :

  $$T_n = t_0\cdot\frac{1-q^n}{1-q} = -1\times\frac{1-(-8)^n}{1-(-8)}$$
  $$= -1\times\frac{1-(-8)^n}{1+8} = -1\times\frac{1-(-8)^n}{9}$$
  $$= -\frac{1}{9}\cdot\left[1-(-8)^n\right]$$

Des deux expressions de la somme T_n, on en déduit l'égalité :

$$-v_0 + v_n = -\frac{1}{9}\cdot\left[1-(-8)^n\right]$$
$$v_n = -\frac{1}{9}\cdot\left[1-(-8)^n\right] + v_0$$
$$v_n = -\frac{1}{9}\cdot\left[1-(-8)^n\right] + 0$$
$$v_n = -\frac{1}{9} + \frac{(-8)^n}{9}$$

On en déduit l'expression des termes de la suite (u_n) :

$$v_n = (-1)^n\cdot u_n$$
$$(-1)^n\cdot v_n = \left[(-1)^n\right]^2\cdot u_n$$
$$(-1)^n\cdot v_n = 1\cdot u_n$$
$$u_n = (-1)^n\cdot v_n$$
$$u_n = (-1)^n\cdot\left[-\frac{1}{9} + \frac{(-8)^n}{9}\right]$$
$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{9} + \frac{(-1)^n\cdot(-8)^n}{9}$$
$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{9} + \frac{8^n}{9}$$

b On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{u_n}{8^n} = \frac{\frac{(-1)^{n+1}}{9} + \frac{8^n}{9}}{8^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} + \frac{8^n}{9\times 8^n}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} + \frac{1}{9}$$

En remarquant l'encadrement suivant pour tout entier naturel n :

$$-1 \leqslant (-1)^{n+1} \leqslant 1$$
$$\frac{-1}{9\times 8^n} \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} \leqslant \frac{1}{9\times 8^n}$$

et les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{-1}{9\times 8^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{9\times 8^n} = 0$$

Le théorème des gendarmes permet d'obtenir la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} = 0$$

On en déduit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{u_n}{8^n} = \lim_{n\mapsto+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{9\times 8^n} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

C.13

a On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty} 5^n = +\infty$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} n^3\times 5^n = +\infty$$

b On a les deux limites suivantes :

- $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{7}<1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} n - \left(\frac{2}{7}\right)^n = +\infty$$

c On a les deux limites suivantes :

- Puisque $0\leqslant\frac{1}{3}<1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$
- Puisque $\frac{3}{2}>1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$$

d On a la transformation algébrique suivante :

$$8^n - 3^n = 8^n\cdot\left(1-\frac{3^n}{8^n}\right) = 8^n\cdot\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $8>1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 8^n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{3}{8}<1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 1-\left(\frac{3}{8}\right)^n = 1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 8^n - 3^n = \lim_{n\mapsto+\infty} 8^n\cdot\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right] = +\infty$$

e On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n} = \frac{5^n\cdot\left(1-\frac{2^n}{5^n}\right)}{3^n\cdot\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{5^n}{3^n}\cdot\frac{1-\frac{2^n}{5^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}}$$
$$= \left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $\frac{5}{3}>1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{5}<1$ et $0\leqslant\frac{2}{3}<1$, on a :

  $$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad ; \quad \lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

  On en déduit la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n} = 1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=+\infty$$

(f) On a les transformations algébriques suivantes :

$$\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{31}{7}\times\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{62}{56}\right)^n$$

De la comparaison $\dfrac{62}{56}>1$, on en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{62}{56}\right)^n=+\infty$$

C.14

(1) Voici les trois premiers termes de la suite (u_n) :

- $u_0=\dfrac{3\times0+(-1)^0}{2\times0-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$
- $u_1=\dfrac{3\times1+(-1)^1}{2\times1-1}=\dfrac{3-1}{2-1}=\dfrac{2}{1}=2$
- $u_2=\dfrac{3\times2+(-1)^2}{2\times2-1}=\dfrac{6+1}{4-1}=\dfrac{7}{3}$

(2) On a les encadrements suivants pour tout entier naturel n :

$$-1\leqslant\quad(-1)^n\quad\leqslant1$$
$$3n-1\leqslant3n+(-1)^n\leqslant3n+1$$

$2n-1$ est positif pour tout entier naturel n non-nul :

$$\frac{3n-1}{2n-1}\leqslant\frac{3n+(-1)^n}{2n-1}\leqslant\frac{3n+1}{2n-1}$$

(3) On a la transformation algébrique suivante :

$$\frac{3n-1}{2n-1}=\frac{n\cdot\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(2-\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{3-\dfrac{1}{n}}{2-\dfrac{1}{n}}$$

On a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{3-\dfrac{1}{n}}{2-\dfrac{1}{n}}=\frac{3}{2}$

Par la même démarche, on en déduit la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{3n+1}{2n-1}=\frac{3}{2}$$

De l'encadrement obtenu à la question (2) et des deux limites précédentes, le théorème des gendarmes permet d'obtenir la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\frac{3}{2}$

C.15

(a) Pour tout entier naturel n non-nul, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{2n^2-3n+1}{n+1}=\frac{n^2\cdot\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}=\frac{n\cdot\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{1+\dfrac{1}{n}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}n\cdot\left(2-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}1+\frac{1}{n}=1$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{n\cdot\left(2-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{1+\dfrac{1}{n}}=+\infty$$

(b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a les transformations algébriques :

$$\frac{n-3}{n^2+1}=\frac{n\cdot\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}{n^2\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{1-\dfrac{3}{n}}{n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}1-\frac{3}{n}=1\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}n\cdot\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=+\infty$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\dfrac{3}{n}}{n\cdot\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=0$$

(c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a les transformations algébriques :

$$u_n=\frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1}=\frac{\sqrt{n}\cdot\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\cdot\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}=\frac{2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}2+\frac{1}{\sqrt{n}}=2\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}1+\frac{1}{\sqrt{n}}=1$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{2+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{2}{1}=2$$

(d) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a la transformation algébrique suivante :

$$1+n-2n^2+3n^3=n^3\cdot\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3\right)$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}n^3=+\infty\quad;\quad\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3=3$$

On en déduit la limite du produit :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}u_n=\lim_{n\mapsto+\infty}n^3\cdot\left(\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n}+3\right)=+\infty$$

