C.1

1. a. Deux conditions sont nécessaires à vérifier pour que la fonction f soit définie :

- Pour que la racine carrée soit définie, il faut que l'expression se trouvant sous le radical soit positif ou nul ; on a la factorisation suivante :
  $x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$
  Le coefficient du terme du second degré étant positif, on en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

  On en déduit que l'expression $\sqrt{x^2-1}$ est définie sur : $\mathcal{D}=\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[1\,;+\infty\right[$
  Le dénominateur de l'expression de f ne s'annulant pas sur $\mathcal{D}$, on en déduit que la fonction f admet l'ensemble $\mathcal{D}$ comme ensemble de définition.

- De plus, pour qu'un quotient soit défini, il est nécessaire que son quotient soit non nul ; ainsi, la fonction f n'est pas définie en -1.

L'ensemble de définition de la fonction f est :
$\mathcal{D}_f=\left]-\infty\,;-1\right[\cup\left[1\,;+\infty\right[$

b. - La fonction f est continue en 1, on a :

$$\lim_{x\mapsto 1^+} f(x)=\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}=\frac{\sqrt{1^2-1}-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

- On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto -1^-}\sqrt{x^2-1}-1=0-1=-1\quad;\quad\lim_{x\mapsto -1^-}x+1=0^-$$

On en déduit la valeur limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto -1^-}f(x)=\lim_{x\mapsto -1^-}\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}=+\infty$$

On utilisera dans les deux limites suivantes, la transformation algébrique suivante pour tout $x\in\mathcal{D}_f$ $(0\notin\mathcal{D}_f)$:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-1}{x+1}=\frac{\sqrt{x^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}-1}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{|x|\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-1}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{|x|\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

- Sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$, on a :

$$f(x)=\frac{|x|\cdot\left[\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right]}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}=1\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}1+\frac{1}{x}=1$$

Ainsi, on a la limite suivante du quotient :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=\frac{1}{1}=1$$

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right[$, on a :

$$f(x)=\frac{|x|\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{|x|}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{-x\cdot\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}-\dfrac{1}{-x}\right)}{x\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}$$

$$=-\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}=1\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}1+\frac{1}{x}=1$$

Ainsi, on a la limite suivante du quotient :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}-\frac{\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=-\frac{1}{1}=-1$$

c. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet trois asymptôtes :

- En $+\infty$, elle admet une asymptôte horizontale d'équation : $y=1$
- En $-\infty$, elle admet une asymptôte horizontale d'équation : $y=-1$
- En -1 à gauche, elle admet une asymptôte verticale d'équation : $x=-1$

2. a. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme $f(x)=\dfrac{u(x)-1}{v(x)}$ où :

$u(x)=\sqrt{x^2-1}\quad;\quad v(x)=x+1$

Déterminons les expressions des dérivées de ces deux fonctions :

- La fonction u est définie par la composée de la fonction w par la fonction racine carrée où :
  $w(x)=x^2-1\quad;\quad w'(x)=2x$
  La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction racine carrée permet d'écrire :
  $$u'(x)=\frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$
- $v'(x)=1$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-\big[u(x)-1\big]\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\cdot(x+1)-\left(\sqrt{x^2-1}-1\right)\cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2-1}}-\sqrt{x^2-1}+1}{(x+1)^2}=\frac{\dfrac{x^2+x-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x^2+x-x^2+1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\dfrac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}}}{(x+1)^2}=\frac{x+1+\sqrt{x^2-1}}{(x+1)^2\cdot\sqrt{x^2-1}}$$

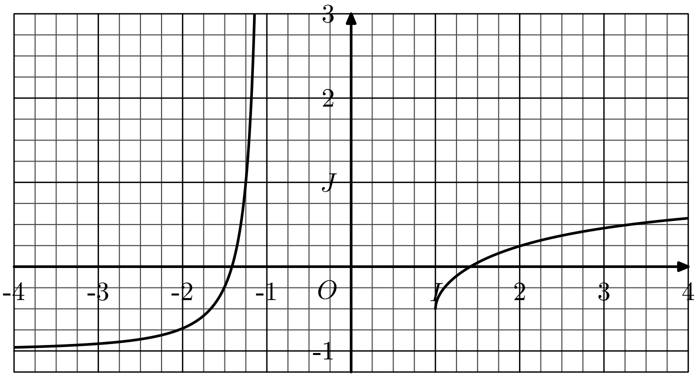
b. On remarque facilement que sur l'intervalle $\left[1\,;+\infty\right[$, le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs : f' est strictement positive sur cet intervalle. La fonction f est strictement croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.

x	1	$+\infty$
Variation de f	$-\frac{1}{2}$ ↗	1

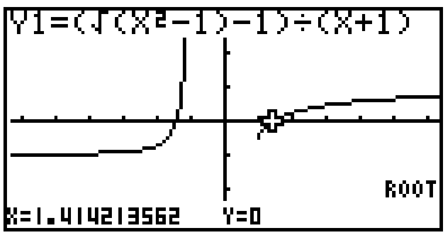
3. a. On a les limites aux bornes de $\big[1\,;+\infty\big[$:
$$f(1)=-\frac{1}{2} \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} f(x)=1$$
De plus, on sait que :
- la fonction f est continue sur $\big[1\,;+\infty\big[$
- la fonction f est strictemetn croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$
- e nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha\in\big[1\,;+\infty\big[$ telle que : $f(\alpha)=0$

b. La courbe représentative de cette fonction a pour allure :



A l'aide de la calculatrice, on obtient une valeur approchée de cette racine :
$$\alpha\approx 1{,}4142$$



C.2

1.
- La fonction f peut être écrite sous la forme :
$$f(x)=x-1+2\times\frac{1}{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x)=x^2+1 \quad ; \quad u'(x)=2x$$
La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction inverse donne l'expression de la fonction f' :
$$f'(x)=1+2\times\left[-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\right]$$
$$=1+2\times\left[-\frac{2x}{\big(x^2+1\big)^2}\right]=1-\frac{4x}{\big(x^2+1\big)^2}$$
- L'expression de la fonction f' est donnée sous la forme :
$$f'(x)=1-\frac{u(x)}{v(x)}$$
où les fonctions u et v sont définies par :
$$u(x)=4x \quad ; \quad v(x)=\big(x^2+1\big)^2$$
qui admettent pour dérivées :
  - $u'(x)=4$
  - L'expression de la fonction v est définie par le carré de la fonction w où :
$$w(x)=x^2+1 \quad ; \quad w'(x)=2x$$
La formule de dérivation de la puissance n-ième d'une fonction donne :
$$v'(x)=2\times w'(x)\cdot w(x)=2\times(2x)\big(x^2+1\big)$$
$$=4x\cdot\big(x^2+1\big)$$

La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f :
$$f''(x)=0-\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$=0-\frac{4\cdot\big(x^2+1\big)^2-4x\cdot\big[4x\cdot\big(x^2+1\big)\big]}{\Big[\big(x^2+1\big)^2\Big]^2}$$
$$=0-\frac{4\cdot\big(x^2+1\big)^2-16x^2\cdot\big(x^2+1\big)}{\big(x^2+1\big)^4}$$
$$=-\frac{\big(x^2+1\big)\big[4\cdot\big(x^2+1\big)-16x^2\big]}{\big(x^2+1\big)^4}$$
$$=-\frac{4\cdot\big(x^2+1\big)-16x^2}{\big(x^2+1\big)^3}=-\frac{4x^2+4-16x^2}{\big(x^2+1\big)^3}$$
$$=-\frac{4-12x^2}{\big(x^2+1\big)^3}=\frac{12x^2-4}{\big(x^2+1\big)^3}$$

2. a. Le polynôme $12x^2-4$ admet la factorisation :
$$12x^2-4=4\cdot\big(3x^2-1\big)=4\cdot\big(\sqrt{3}\cdot x+1\big)\big(\sqrt{3}\cdot x-1\big)$$
Ce polynôme admet les deux racines $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Le numérateur du quotient définissant la fonction f'' est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est positif.
On a le tableau de signes de la fonction f'' :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$12x^2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. On a les deux valeurs approchées des deux images suivantes :
$$f'\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\approx 2{,}3 \quad ; \quad f'\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)\approx -0{,}3$$
On a la transformation algébrique suivante :
$$f'(x)=1-\frac{4\cdot x}{\big(x^2+1\big)^2}=1-\frac{4\cdot x}{\Big[x^2\cdot\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)\Big]^2}$$
$$=1-\frac{4\cdot x}{x^4\cdot\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^2}=1-\frac{4}{x^3\cdot\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^2}$$
qui permet d'obtenir les deux limites suivantes :
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} f'(x)=\lim_{x\mapsto-\infty} 1-\frac{4}{x^3\cdot\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^2}=1$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f'(x)=\lim_{x\mapsto+\infty} 1-\frac{4}{x^3\cdot\Big(1+\frac{1}{x^2}\Big)^2}=1$

On obtient le tableau de valeur suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$+\infty$
Variation de f'	1 ↗	$\simeq 2,3$ ↘	$\simeq -0,3$ ↗	1

3 a Etudions l'équation $f'(x)=0$ sur les trois intervalles suivants :

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right[$:
  La fonction f' admet un minimum valant 1 : la fonction f' ne s'annule pas sur ce minimum.

- Sur l'intervalle $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$:
  On a les deux images aux bornes de cet intervalle :
  $f'\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) \approx 2{,}3 \quad ; \quad f'\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) \approx -0{,}3$
  De plus :
  - la fonction f' est continue sur $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
  - la fonction f' est strictement décroissante sur $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$
  - le nombre 0 est compris entre les images des bornes de cet intervalle.

  D'après le corollaire des valeurs intermédiaire, il existe, une unique valeur $\alpha\in\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}\,;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ vérifiant :
  $f'(\alpha) = 0$
  De plus, des valeurs approchées des images suivantes :
  $f'(0{,}2) \approx 0{,}26 > 0 \quad ; \quad f'(0{,}3) = -0{,}01 < 0$
  la fonction f' étant continue et changeant de signe sur $\big[0{,}2\,;\,0{,}3\big]$, on en déduit :
  $\alpha\in\big[0{,}2\,;0{,}3\big]$

- Sur l'intervalle $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$:
  On a les limites aux bornes de l'intervalle :
  $f'\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) \approx -0{,}3 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x) = +\infty.$
  De plus :
  - la fonction f' est continue sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$
  - la fonction f' est strictement croissante sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$
  - le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de cet intervalle.

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe, une unique valeur $\beta\in\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$.
  En observant que $f'(1)=0$, on en déduit : $\beta=1$

b Ainsi, la fonction f' admet le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4 a On a les deux limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-1+\frac{2}{x^2+1} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1+\frac{2}{x^2+1} = +\infty$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)\simeq 1,13$ ↘	1 ↗	$+\infty$

C.3

1 a Le polynôme P admet pour dérivée le polynôme P' défini par :
$P'(x) = 6{\cdot}x^2 - 6x = 6x{\cdot}(x-1)$
Le coefficient du second degré du polynôme P' est positif ; ainsi, le polynôme P' a pour tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour $x\neq0$, on a la transformation algébrique suivante :
$P(x) = x^3{\cdot}\Big(2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\Big)$
Ainsi, on a les deux limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} P(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3{\cdot}\Big(2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\Big) = -\infty$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} P(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^3{\cdot}\Big(2-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\Big) = +\infty$

La fonction P admet les deux valeurs suivantes :

- $P(0) = 2\times3^3 - 3\times0^2 - 1 = -1$
- $P(1) = 2\times1^3 - 3\times1^2 - 1 = 2-3-1 = -2$

Ainsi, on a le tableau de vaiation suivant :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Variation de P	$-\infty$ ↗	-1 ↘	-2 ↗	$+\infty$

b Pour montrer que la fonction f ne s'annule qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, décomposons notre raisonnement sur les deux intervalles :

- Sur l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$:
  D'après le tableau de variation, sur l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$, la fonction f est majorée par -1 : la fonction f n'admet aucune racine sur l'intervalle $\big]-\infty\,;1\big]$.

- Sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$:
  On a : $P(1) = -2 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} P(x) = +\infty$
  De plus :
  - la fonction f est continue sur $\big[1\,;+\infty\big[$
  - la fonction f est strictement croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$
  - Le nombre 0 ést entre les limites aux bornes de l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre α antécédent du nombre 0 sur cet intervalle :
  $f(\alpha) = 0$

Pour montrer que le nombre α appartient à l'intervalle $\big[1{,}6\,;1{,}7\big]$, on remarque que :

$P(1{,}6) \approx -0{,}49 < 0 \quad ; \quad P(1{,}7) \approx 0{,}16 > 0$

De plus, on a :

- la fonction f est continue sur $[1{,}6\,;1{,}7]$
- la fonction f est strictement croissante sur $[1{,}6\,;1{,}7]$
- le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $[1{,}6\,;1{,}7]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique α appartenant à l'intervalle $[1{,}6\,;1{,}7]$ vérifiant :

$f(\alpha) = 0.$

2 a L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient $\dfrac{u}{v}$ où :

$u(x) = 1 - x \quad ; \quad v(x) = 1 + x^3$

qui admettent pour dérivée :

$u'(x) = -x \quad ; \quad v'(x) = 3{\cdot}x^2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{-1{\cdot}(1+x^3) - (1-x){\cdot}3{\cdot}x^2}{(1+x^3)^2}$$

$$= \frac{-1 - x^3 - 3{\cdot}x^2 + 3{\cdot}x^3}{(1+x^3)^2} = \frac{2{\cdot}x^3 - 3{\cdot}x^2 - 1}{(1+x^3)^2} = \frac{P(x)}{(1+x^3)^2}$$

Le dénominateur de ce quotient est positif sur $\mathbb{R}$: le signe de la fonction f' ne dépend que du signe de P.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$P(x)$		$-$	0	$+$	

La fonction f, définie sur $\mathcal{D} =]-1\,;+\infty[$, admet le tableau de signes suivant :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	

On a les limites suivantes :

- Déterminons la limite en -1 :
  On a les deux limites suivantes :
  $\lim\limits_{x\mapsto -1^+} 1 - x = 2 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto -1^+} 1 + x^3 = 0^+$
  Ainsi, par quotient, on a :
  $$\lim_{x\mapsto -1^+} f(x) = \lim_{x\mapsto -1^+} \frac{1-x}{1+x^3} = +\infty$$
- Déterminons la limite en $+\infty$:
  Pour $x \neq 0$, on a la transformation algébrique suivante :
  $$f(x) = \frac{1-x}{1+x^3} = \frac{x{\cdot}\left(-1 + \frac{1}{x}\right)}{x{\cdot}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{-1 + \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{x}}$$
  On a les deux limites suivantes :
  $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -1 + \dfrac{1}{x} = -1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2 + \dfrac{1}{x} = +\infty$
  On en déduit la limite suivante :
  $$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{1}{x}} = 0$$

Une valeur approchée du minimum de la fonction f obtenue à l'aide de la calculatrice permet d'affirmer :

$f(\alpha) \approx -0{,}12$

On a le tableau de variations suivant :

x	-1	α	$+\infty$
Variation de f	|| $+\infty$ ↘	$f(\alpha) \simeq -0,12$	↗ 0

b On a les deux valeurs suivantes :

- $f(0) = \dfrac{1-0}{1+0^3} = \dfrac{1}{1} = 1$
- $f'(0) = \dfrac{2{\times}0^3 - 3{\times}0^2 - 1}{(1+0^3)^2} = -1$

Ainsi, la droite (Δ), tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y = f'(0){\cdot}(x-0) + f(0)$

$y = -1{\cdot}(x-0) + 1$

$y = -x + 1$

Pour étudier la position relative de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite (Δ), on étudie le signe de la différence suivante :

$$f(x) - (-x+1) = \frac{1-x}{1+x^3} - (-x+1)$$

$$= \frac{1-x}{1+x^3} + x - 1 = \frac{1 - x + (x-1){\cdot}(1+x^3)}{1+x^3}$$

$$= \frac{1 - x + x + x^4 - 1 - x^3}{1+x^3} = \frac{x^4 - x^3}{1+x^3}$$

$$= \frac{x^3{\cdot}(x-1)}{1+x^3}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	-1		0		1
x^3		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0
$1+x^3$		$+$		$+$	
$f(x)-(-x+1)$	||	$+$	0	$-$	0

On en déduit :

- La courbe $(\mathscr{C})$ est au dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $]-1\,;0]$.
- La courbe $(\mathscr{C})$ est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $[0\,;1]$.

c On a les deux valeurs suivantes :

- $f(1) = \dfrac{1-1}{1+1^3} = \dfrac{0}{2} = 0$
- $f'(1) = \dfrac{2{\times}1^3 - 3{\times}1^2 - 1}{(1+1^3)^2} = \dfrac{2-3-1}{(1+1)^2}$
  $= \dfrac{-2}{2^2} = -\dfrac{1}{2}$

Ainsi, la tangente au point d'abscisse 1 a pour équation réduite :

$y = f'(1){\cdot}(x-1) + f(1)$

$y = -\dfrac{1}{2}{\cdot}(x-1) + 0$

$y = -\dfrac{1}{2}{\cdot}x + \dfrac{1}{2}$

Etudions la différence suivante :

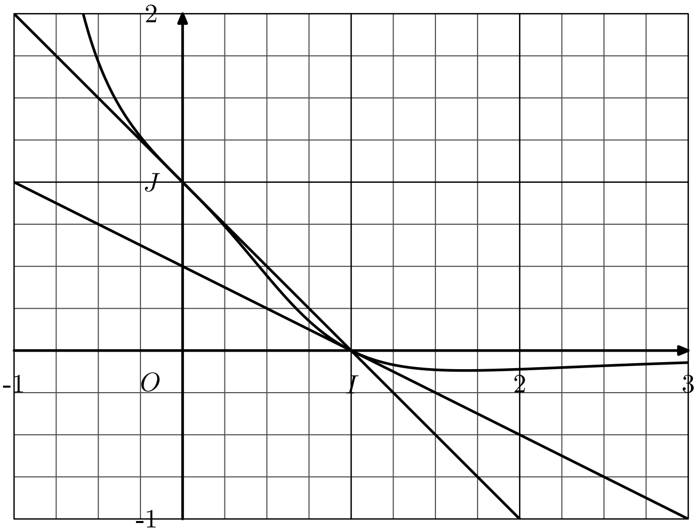
$$f(x)-\left(-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1-x}{1+x^3}+\frac{x-1}{2}$$
$$=\frac{2-2x}{2\cdot(1+x^3)}+\frac{(x-1)(1+x^3)}{2(1+x^3)}$$
$$=\frac{-2(x-1)+(x-1)(1+x^3)}{2(1+x^3)}$$
$$=\frac{(x-1)\big(-2+1+x^3\big)}{2(1+x^3)}=\frac{(x-1)(x^3-1)}{2(1+x^3)}$$

On a le tableau de signes suivant :

x	-1		1		$+\infty$
x^3-1		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
$1+x^3$	0	$+$		$+$	
$f(x)-\left(-\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{2}\right)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

Ainsi, la courbe $(\mathscr{C})$ est située au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 1.

Voici la représentation demandée :



C.4

1 a La fonction f admet pour dérivée :
$f'(x)=3x^2+3$

La fonction f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$; on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus, la factorisation suivante :
$f(x)=x\cdot\big(x^2+3\big)$
permet d'obtenir les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$

Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$	$+\infty$

b Sur $\mathbb{R}$, on a les limites aux bornes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=+\infty$

De plus :

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
- la fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}$
- le nombre 5 est compris entre les limites de f aux bornes de $\mathbb{R}$

D'après le corollaire des valeurs intermédiaires, il existe une unique valeur α vérifiant :
$f(\alpha)=5$.

2 a On a le tableau :

	a_n	c_n	b_n	$f(a_n)$	$f(c_n)$	$f(b_n)$
$n=0$	0	1	2	-5	$-1{,}5$	5
$n=1$	1	1,5	2	$-1{,}5$	1,188	5
$n=2$	1	1,25	1,5	$-1{,}5$	$-0{,}273$	1,188
$n=3$	1,25	1,375	1,5	$-0{,}273$	0,425	1,188
$n=4$	1,25	1,313	1,375	$-0{,}273$	0,068	0,425
$n=5$	1,25	1,281	1,313	$-0{,}105$	$-0{,}019$	0,068
$n=6$	1,281	1,297	1,313	$-0{,}105$	$-0{,}019$	0,068

b Ainsi, la valeur α appartient à l'intervalle :
$\big[1{,}281\,;1{,}313\big]$

Cet intervalle a une amplitude de :
$1{,}313-1{,}281=0{,}032$

C'est la précision qu'on a sur α au rang 6.