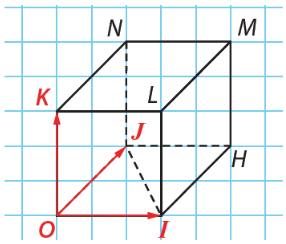
Chapitre 7 - Produit scalaire dans l'espace

Terminale Spé maths

1 Produit scalaire

Définition 1.1.
(O,I,J,K), un **repère** de l'espace est **orthonormé** lorsque les droites (OI), (OJ) et (OK) sont **deux à deux perpendiculaires** et qu'on a l'égalité des distances **OI=OJ=OK=1**.

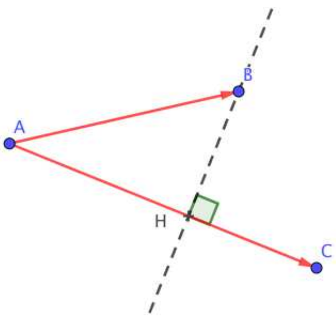


$OM = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$

Propriété 1.1.
Soit M un point de coordonnées $(x; y; z)$ dans un repère orhonormé (O,I,J,K)
La longueur OM et la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$ vérifient :

$$OM = \parallel \overrightarrow{OM} \parallel = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Définition 1.2.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. A,B et C trois points de l'espace tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
Il existe au moins un plan **P** contenant les points A,B et C.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan **P**.



Remarque .
Ce produit scalaire est indépendant du choix des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et du choix du plan **P**.
En effet, il peut s'exprimer sous la forme :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\parallel \vec{u}+\vec{v} \parallel^2 - \parallel \vec{u} \parallel^2 - \parallel \vec{v} \parallel^2\right)$$

Pour calculer le produit scalaire, on choisit deux représentants des vecteurs situés dans un même plan. En plus des formules des normes, on dispose des autres méthodes vues en classe de première :

1. $\vec{u}\cdot\vec{v} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = \parallel \vec{u} \parallel \times \parallel \vec{v} \parallel \times \cos(\vec{u},\vec{v})$
2. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (AC)

Définition 1.3.
Le **carré scalaire** de $\vec{u}$, noté $\vec{u}^2$, est défini par : $\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$

Propriété 1.2.

1. Le produit scalaire est commutatif : $\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}}$
2. Pour tout nombre réel k : $\boxed{\vec{u}\cdot(k\vec{v}) = (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})}$
3. Pour trois vecteurs $\vec{u}$,$\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace : $\boxed{\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}}$
4. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace $\boxed{\vec{u}^2 = \vec{u}\cdot\vec{u} = \parallel \vec{u} \parallel^2 = AB^2}$
5. Pour tous points A et B de l'espace $\boxed{\overrightarrow{AB}^2 = \parallel \overrightarrow{AB} \parallel^2 = AB^2}$

1.1 Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère **orthonormé**,
si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x;y;z)$ et le vecteur $\vec{v}$ $(x';y';z')$ alors on a :

$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

Démonstration. En Exercice CQFD

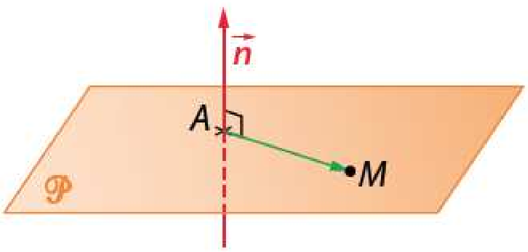
2 Orthogonalité dans l'espace

Définition 2.1.
Deux vecteurs non nuls de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** lorsque, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

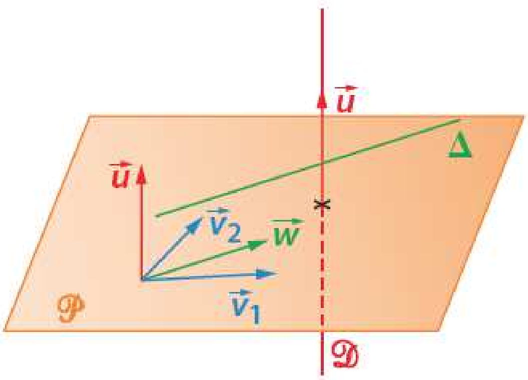
Remarque .
Le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Propriété 2.1.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Propriété 2.2.
Vecteur normal à un plan
Un vecteur non nul $\vec{n} = \overrightarrow{AB}$ est **normal au plan P** lorsque la droite (AB) est perpendiculaire au plan **P**



Rappel
Si une droite **D** est orthogonale à deux droites sécantes $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ d'un plan **P** alors la droite **D** est orthogonale au plan **P**.



Démonstration. Soit $\vec{u}$,$\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs directeurs respectivement des droites $\mathbf{D}$,$\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$.
Puisque **D** est orthogonale à $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$,
$\vec{u} \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$

Soit Δ une droite du plan **P** et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ.
Les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires, d'après la propriété 5 du cours sur la géométrie vectorielle,il existe deux réels x et y tels que : $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2$.
On a $\vec{u} \cdot \vec{w} = x\vec{u} \cdot \vec{v}_1 + y\vec{u} \cdot \vec{v}_2 = 0$
On en déduit que la droite **D** est orthogonale à Δ qui est une droite quelconque du plan **P**. CQFD

Propriété 2.3.
Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.
L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$

2.1 Equation cartésienne de plan

Propriété 2.4.
Dans un repère orthonormé,

1. Si le plan $\mathbf{P}$ a pour vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$ alors $\mathbf{P}$ a une équation de la forme :
$$ax + by + cz + d = 0$$
2. Réciproquement, l'ensemble des points $M(x;y;z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a;b;c)$.

Démonstration. Soit $A(x_A;y_A;z_A)$ un point du plan.
$M(x;y;z)$ appartient au plan $\mathbf{P}$ équivaut à $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$
soit à : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$
puis : $ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$
qui donne : $ax + by + cz + d = 0$ avec $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$

Réciproque en exercice CQFD

Propriété 2.5.
Deux droites Δ et Δ' sont **orthogonales** lorsque leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.

Définition 2.2.
Deux plans $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P'}$ de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont **perpendiculaires** lorsque les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont orthogonaux.

Exercice
Dans un repère orthonormé, $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P'}$ sont les plans d'équations respectives :
$$2x + y - 7 = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}x + y + \frac{3}{2}z - 6 = 0$$
Démontrer que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P'}$ sont perpendiculaires.

2.2 Equation Cartesienne d'une sphère

Propriété 2.6.
Dans un repère orhonormé, une équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon R est
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

3 Projection orthogonale

Définition 3.1.
On considère un plan **P** de l'espace dont on connait un vecteur normal $\vec{n}$ et un point M extérieur à **P** . Le projeté orthogonal de M sur **P** est l'intersection du plan est de la droite ayant pour vecteur directeur $\vec{n}$.

Définition 3.2.
On considère une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un point M extérieur à cette droite. Le projeté orthogonal de M sur d est l'intersection du plan normal à $\vec{u}$ passant par M et la droite d.

Définition 3.3.
Soit **P** un plan de l'espace et A un point. La distance de A à **P** est la plus petite des distances AM où M appartient à **P**.

Propriété 3.1.
Si H est le projeté orthogonal de A sur **P** alors d(A,**P**)=AH.

Démonstration. Soit M un point de **P**. Pour tout M différent de H, le triangle AHM est rectangle en H donc AM>AH ainsi AH est bien la plus petite longueur et d(A,**P**)=AH. CQFD

Propriété 3.2.
Soient **P** le plan d'équation cartésienne $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_A,y_A,z_A)$ un point. Si $\vec{n}$ un vecteur normal de **P** et $M(x,y,z)$ un point de **P**. Alors : $d(A,\mathbf{P}) = \dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\parallel \vec{n} \parallel}$

$$= \frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Remarque .
Les définitions et propriétés sont analogues pour le projeté orthogonal sur une droite.