Corrigé exercice 83 :

1. On a, par exemple, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}$.
2. On constate que les vecteurs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont donc sécants.
3. En posant $x = t$ et en utilisant les équations des deux plans on obtient le système : $\begin{cases} x = t \\ y - 3z = -4t - 1 \\ -3y + 2z = -2t - 4 \end{cases}$, d'où $\begin{cases} x = t \\ y - 3z = -4t - 1 \\ -7z = -14t - 7 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}$.
4. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t; 2t + 2; 2t + 1)$ appartient aux deux plans. Une représentation paramétrique de la droite d'intersection est donc $\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 2 \\ z = 2t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Corrigé exercice 106 :

Partie A

1. Soit $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ deux vecteurs respectivement normaux aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

   On a $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$. Les coordonnées de ces vecteurs ne sont pas proportionnelles. Les vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$ ne sont pas colinéaires à ceux du plan $\mathcal{P}'$ et donc les plans sont sécants.
2. (a) Les coordonnées d'un point situé à l'intersection des deux plans doivent vérifier les deux équations à la fois.

   On obtient donc le système $\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 6 = 0 \end{cases}$.

   (b) On a :

   $\begin{cases} 2x - 3y - 2z + 1 = 0 \\ x - 2y + z - 6 = 0 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z = 3t - 1 \\ x + z = 2t + 6 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2t + 6 \\ 2x - 2z = 3t - 1 \\ y = t \end{cases}$. En soustrayant deux fois la ligne 1 à la ligne 2, on obtient bien :

   $\begin{cases} x + z = 2t + 6 \\ -4z = -t - 13 \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2t + 6 \\ z = \dfrac{t}{4} + \dfrac{13}{4} \\ y = t \end{cases}$.

   (c) En remplaçant z dans la ligne 1 par la valeur de la ligne 2, on obtient :

   $\begin{cases} x + \dfrac{t}{4} + \dfrac{13}{4} = 2t + 6 \\ z = \dfrac{t}{4} + \dfrac{13}{4} \\ y = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{4}t + \dfrac{11}{4} \\ z = \dfrac{t}{4} + \dfrac{13}{4} \\ y = t \end{cases}$ donc une représentation paramétrique de la droite d'intersection est $\begin{cases} x = \dfrac{7}{4}t + \dfrac{11}{4} \\ y = t \\ z = \dfrac{t}{4} + \dfrac{13}{4} \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Partie B

En utilisant la même méthode que dans la partie A on obtient les équations paramétriques suivantes.

1. $\begin{cases} x = t \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}.$

2. $\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t - 3 \\ z = 1 \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}.$

3. $\begin{cases} x = 129t \\ y = 86t - \dfrac{5}{3} \\ z = 172t - \dfrac{1}{3} \end{cases}$ $,t \in \mathbb{R}.$

Partie C

1. Si $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$, cela signifie que $\begin{cases} \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \\ \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases}$ donc :

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}.$$

2. (a) Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étaient colinéaires, il existerait un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v}$.
Les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles, donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

(b) On a le système $\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases}$.

(c) En choisissant $y = t$, on obtient $\begin{cases} y = t \\ 3x + 2z = t \\ z = -4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = t \\ x = 3t \\ z = -4t \end{cases}$.

(d) Les vecteurs normaux à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de la forme $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ -4t \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.