Chapitre 1 - Limites de fonctions

Terminales Spé Maths

1 Histoire des mathématiques

On peut considérer que le concept de limite est né avec le philosophe grec **Zénon d'Elée** au 4ème siècle avant notre ère. Il est l'auteur de célèbres paradoxes dont celui d'Achille et la tortue.
Aux 17ème et au 18ème siècles, les mathématiques ont une intuition claire de la notion de limite. Par exemple, Gottfried Leibniz, utilise des écritures telles que :

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - ....).$$

Au 19ème siècle, le besoin de définir rigoureusement le concept de limite se fait sentir. Le mathématicien français **Augustin Cauchy** donne une place centrale à la notion de limite en analyse. Plus tard, le mathématicien allemand **Karl Weierstrass** surnommé le père de l'analyse moderne en donne la première définition précise et introduit la notation $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pour la limite d'une fonction f en x_0.

EXERCICE 1

Grand Oral Rechercher le paradoxe d'Achille et la tortue (un des **Paradoxes de Zénon**)

2 Limites de fonctions : définitions et premières propriétés

2.1 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Définition 2.1.
Limite infinie à l'infini

- Une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty, A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

- On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$. On les note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

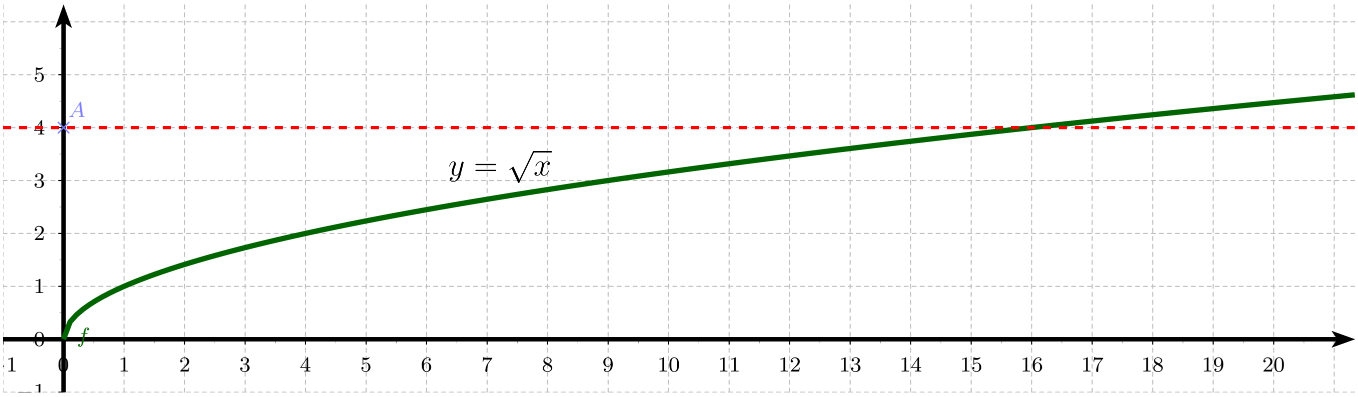
Remarque .
Ces définitions sont formalisées dans un langage mathématique :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: Pour tout $A > 0$, il existe un réel m réel (dépendant de A à chercher) tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$

Dans certains livres vous pouvez voir les notations suivantes (non demandées en terminale, mais anticipons sur vos études supérieures) :

$$\forall A > 0; \exists m > 0 : (x > m) \Rightarrow f(x) > A$$

- N° 37 p 178 : écrire dans le même formalisme les autres limites en $+\infty$ ou $-\infty$.



Propriété 2.1.
Soit n en entier supérieur ou égal à 1. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Démonstration. Montrons la limite de $\sqrt{x}$ en l'infini. Soit A un réel strictement positif.
A partir d'un rang $x > A^2$ alors $\sqrt{x} > A$ donc $\sqrt{x} \in]A; +\infty[$. Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

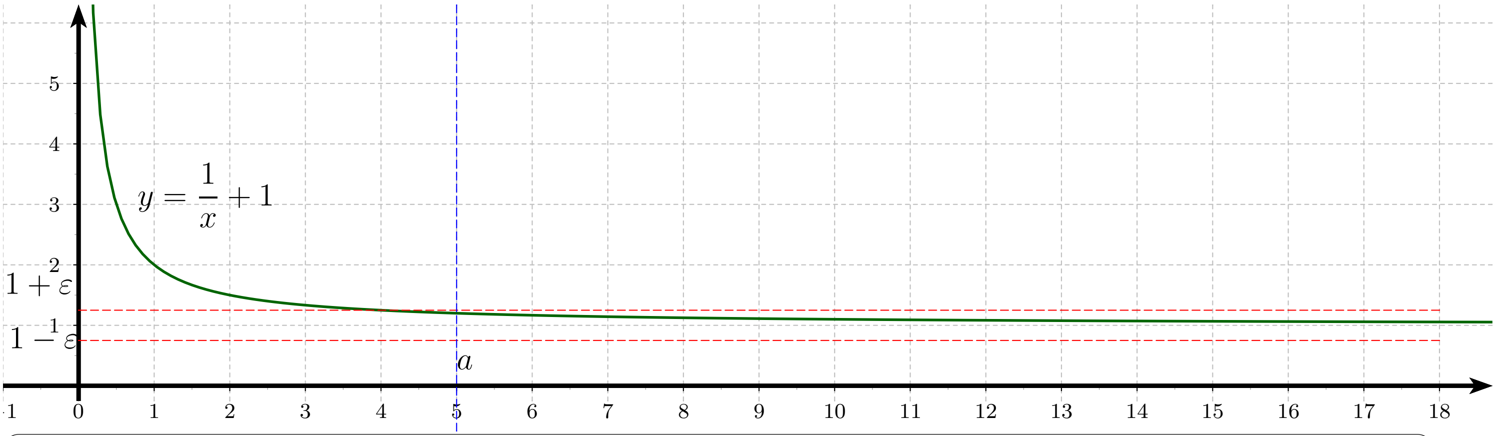
Les autres limites sont démontrées sur le cahier.

CQFD

Définition 2.2.
Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ telle qu'il existe un réel a pour lequel $[a; +\infty[\subset \mathcal{D}_f$
Soit l un nombre réel, dire que f tend vers la limite l quand x tend vers $+\infty$ signifie que quelque soit un ε donné strictement positif, il existe un rang $x_0 \geqslant a$ tel que pour tout x de $\mathcal{D}_f$, si $x > x_0$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

On définit de façon analogue la limite réelle de f en $-\infty$



Définition 2.3.
Lorsqu'une fonction f a pour limite un réel l en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la courbe représentation de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'équation $y = l$.

Remarque .
Dans l'exemple précédent, la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$

Propriété 2.2.
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

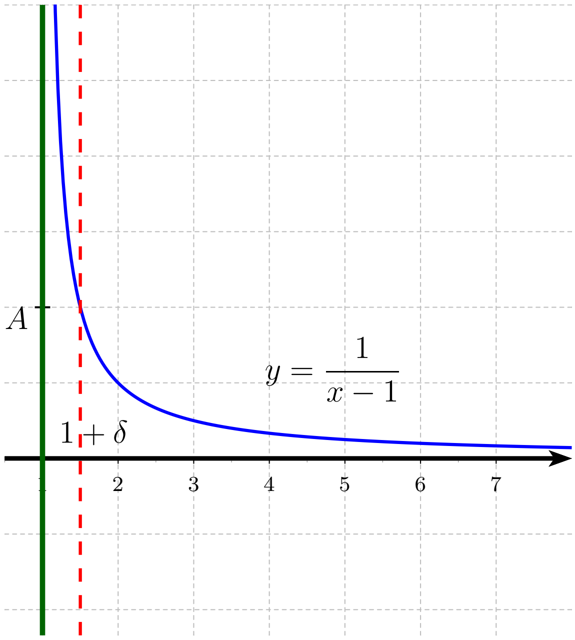
Démonstration. Démonstration en cours

CQFD

2.2 Limite en un réel

Définition 2.4.
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$. La fonction f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.
Quel que soit A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ si $|x-a| < \delta$ alors $f(x) > A$.

On définit de la même manière $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.



Dans cet exemple la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

Propriété 2.3.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si n est pair $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si n est impair $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si n est impair $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Remarque .
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ est appelée limite à droite en a.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ est appelée limite à gauche en a.

Définition 2.5.
Lorsque la limite de f en a réel a est $+\infty$ ou$-\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote horizontale de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque .
Dans l'exemple ci-dessus, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe.

Définition 2.6.
Soit l un nombre réel. Une fonction a pour limite l en a si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ si $|x - a| < \delta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Propriété 2.4.
Soit a un réel,

- Si $a \geqslant 0$; $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si P est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$
- Si F est une fonction rationnelle, (quotient de deux polynômes) définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$

3 Opérations sur les limites

Propriété 3.1.

— Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée

— Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell \neq 0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	Forme Indéterminée

— Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell' \neq 0$	ℓ/ℓ'
$\ell \neq 0$	0	∞
ℓ	∞	0
0	0	Forme Indéterminée
∞	∞	Forme Indéterminée

Remarque .
- ∞ peut signifier $+\infty$ ou $-\infty$. Les règles du signe d'un produit ou d'un quotient demeurent.
- Pour la limite de la différence $f-g$, on considère la limite de la somme $f+(-g)$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto (1-x)\left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^3 + \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

4 Limites de composée de fonctions

4.1 Fonctions composées

Une composée de deux fonctions correspond à un enchaînement de deux fonctions l'une après l'autre.
Par exemple, composons la fonction $f : x \mapsto 1 - x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$. On peut ainsi schématiser :

$$x \underset{f}{\mapsto} 1 - x \underset{g}{\mapsto} \sqrt{1-x}.$$

Cependant, on voit que la fonction g ne peut s'appliquer que si l'ensemble des images par la fonction f est inclus dans l'ensemble de définition de g.
Ainsi, pour appliquer ici la racine carrée, il faut que $1 - x \geqslant 0$ c'est-à-dire que $x \leqslant 1$.
La composée existe donc dans le schéma suivant où on précise les ensembles de départ et d'arrivée pour f :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty\ ;\ 1] & \to & [0\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \underset{f}{\mapsto} & 1-x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{1-x} \end{array}$$

En composant f suivie de g, on a ainsi défini sur $]-\infty\ ;\ 1]$ la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

Définition 4.1.
Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.
La composée de f suivie de g est la fonction notée $\boldsymbol{g \circ f}$ définie sur E par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque .
Il ne faut pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$ qui sont, en général, différentes.

Exemple :

En reprenant f et g de l'exemple précédent, définissons $f \circ g$.
La composée de g suivie de f est possible en partant de l'ensemble de définition de g :

$$\begin{array}{ccccc} [0\ ;\ +\infty[& \to & [0\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{x} & \underset{f}{\mapsto} & 1-\sqrt{x} \end{array}$$

En composant g suivie de f, on a ainsi défini sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{x}$.

4.2 Théorème de composition des limites

Théorème 4.1.
Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β et γ trois réels ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \gamma$.

Exemple :

Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $g \circ f$ de l'exemple précédent.
La composée de $f : x \mapsto 1 - x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est $h : x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty\ ;\ 1]$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1 - x) = +\infty$ (par somme) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ (limite de référence).
Donc, d'après le théorème de composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$.

Déterminer une limite de fonction

On applique les propriétés d'opérations sur les limites.

Si la limite est indéterminée, « $+\infty + (-\infty)$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ou « $\dfrac{0}{0}$ », on essaye de :

— factoriser par le terme prépondérant ;
— multiplier par la quantité conjuguée [1] si des racines carrées interviennent ;
— effectuer un changement de variable (voir théorème de composition des limites).

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$
3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

Ces limites sont indéterminées (respectivement formes « $\infty - \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ »).

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$:
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.
Or, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.
Et, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = +\infty$. Donc, par inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.

2. Divisons le numérateur et le dénominateur par x^2. Alors, $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$.
Or, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.
Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$.

3. Changeons de variable en posant $u = \sqrt{x}$. Si x tend vers 4, alors u tend vers 2.
$\dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2} = \dfrac{u^2 - 4}{u - 2} = \dfrac{(u+2)(u-2)}{u-2} = u + 2$ pour $u \neq 2$. Donc, par somme : $\lim\limits_{u\to 2}(u+2) = 4$.

1. on désigne généralement par $a - b\sqrt{c}$ la quantité conjuguée de $a + b\sqrt{c}$

5 Limites et comparaison

5.1 Théorème de comparaison

Théorème 5.1.
Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ +\infty[$ de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]-\infty\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in]\alpha\ ;\ \beta[$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^4+1}$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Pour tout x,$x^4 < x^4 + 1$
La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$, donc $\sqrt{x^4} < \sqrt{x^4+1} \Leftrightarrow x^2 < h(x)$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

5.2 Théorème d'encadrement dit « des gendarmes » ou « sandwich »

Théorème 5.2.
Soit deux réels α et ℓ et trois fonctions f, g et h telles que, pour $x > \alpha$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Remarque .
On a, comme pour le théorème de comparaison précédent, deux théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel x_0.

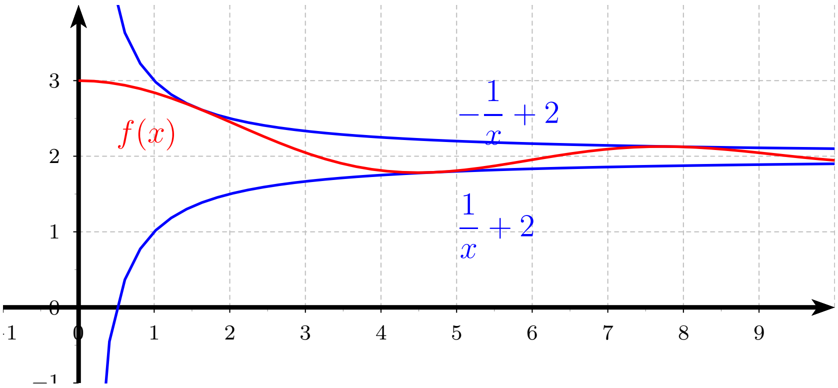
Démonstration. Par hypothèse, les fonctions f et h ont pour limite ℓ.
Considérons un intervalle ouvert I qui contient ℓ. Il contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x > a$ et toutes les valeurs $h(x)$ dès que $x > b$. Notons $c = \max(a;b)$, I contient donc toutes les valeurs $f(x)$ et $h(x)$ dès que $x > c$.
Comme pour tout $x \in I$,$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, J contient toutes les valeurs $g(x)$ dès que $x > c$. C'est vrai pour tout intervalle ouvert contenant ℓ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

CQFD

Exemple
Soit la fonction f définie sur $I =]0;+\infty[$ telle que pour tout $x \in I$,

$$-\frac{1}{x} + 2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x} + 2$$

Sachant que, par somme, $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x}+2 = 2$ et que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}+2 = 2$; on a d'après le théorème d'encadrement "des gendarmes" $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$



5.3 Théorème des croissances comparées

Théorème 5.3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration. Démonstration faite en cours. CQFD