C.1

1. Considérons pour tout entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$ définie par :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n \leqslant 7$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
On a : $u_0 = 5 \leqslant 7$
La propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n \leqslant 7$
Partons de la comparaison suivante :
$$u_n \leqslant 7$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n \leqslant \frac{7}{3}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 \leqslant \frac{7}{3} + 4$$
$$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3}$$
$$u_{n+1} \leqslant \frac{19}{3} \leqslant 7$$
$$u_{n+1} \leqslant 7$$
On vient d'établir la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$.
- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel n.

2. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{Q}_n$: "$u_n \leqslant u_{n+1}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
Le terme de rang 1 a pour valeur :
$u_1 = \frac{1}{3}\times 5 + 4 = \frac{5}{3} + 4 = \frac{17}{3}$
On a la comparaison :
$5 < \frac{17}{3}$
$u_0 < u_1$
Ainsi, la propriété $\mathcal{Q}_0$ est vérifiée.
- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
$u_n \leqslant u_{n+1}$
Partons de la comparaison :
$$u_n < u_{n+1}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1}$$
$$\frac{1}{3}\cdot u_n + 4 < \frac{1}{3}\cdot u_{n+1} + 4$$
$$u_{n+1} < u_{n+2}$$
On vient détablir la propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$.
- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée. D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

C.2

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$0 < u_n \leqslant 2$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que cette propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.
- **Initialisation :**
De l'encadrement $0<1\leqslant 2$, on en déduit que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
$$0 < u_n \leqslant 2$$
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$:
$$0 < 2\cdot u_n \leqslant 4$$
$$\sqrt{0} < \sqrt{2\cdot u_n} \leqslant \sqrt{4}$$
$$0 < u_{n+1} \leqslant 2$$
On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n+1$.
- **Conclusion :**
La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Etudions le signe de la différence suivante :
$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n$
Le facteur $\sqrt{2u_n}+u_n$ est strictement postif :
$$= \frac{\left(\sqrt{2u_n} - u_n\right)\left(\sqrt{2u_n} + u_n\right)}{\sqrt{2u_n} + u_n}$$
$$= \frac{\left(\sqrt{2u_n}\right)^2 - \left(u_n\right)^2}{\sqrt{2u_n} + u_n} = \frac{2u_n - u_n^2}{\sqrt{2u_n} + u_n} = \frac{u_n\cdot(2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n}$$
De l'encadrement obtenu à la question 1, on a :

$u_n > 0$	$u_n \leqslant 2$	$\sqrt{2\cdot u_n}+u_n > 0$
	$-u_n \geqslant -2$	
	$2 - u_n \geqslant 2 - 2$	
	$2 - u_n \geqslant 0$	

Ainsi, la différence de deux termes consécutifs de la suite (u_n) a pour signe :
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n\cdot(2 - u_n)}{\sqrt{2u_n} + u_n} > 0$$
On en déduit que la suite (u_n) est croissante sur $\mathbb{N}$.

Autre démonstration : étudier le signe de $u_{n+1}-u_n$ via la transformation algébrique :
$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2\cdot u_n} - u_n = \sqrt{2}\cdot\sqrt{u_n} - \left(\sqrt{u_n}\right)^2$$
$$= \sqrt{u_n}\cdot\left(\sqrt{2} - \sqrt{u_n}\right)$$

3. La suite (u_n) est croissante et majorée par 2.
D'après le théorème de convergence des suites mono-

tones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.