E.1 **Questionnaire à choix multiples :**

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 *point une mauvaise réponse enlève* 0,25 *point ; l'absence de réponse donne* 0 *point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est* 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5	-1	0	2	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	-3 ↘	-5 ↗	4 ↘	-4,5

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f :

1. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, l'équation $f(x)=-2$:
   - a. admet une seule solution
   - b. admet deux solutions
   - c. admet quatre solutions.
2. Sur l'intervalle $]-5\,;+\infty[$, la fonction f :
   - a. admet pour minimum la valeur -5 ;
   - b. admet pour maximum la valeur 4 ;
   - c. admet deux maximuns.
3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

   a. $y=4$ b. $y=4(x-2)$ c. $x=4$

E.2 On considère une fonction f définie et dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-2[$ et $]-2\,;+\infty[$.
La fonction f admet le tableau de varition ci-dessous :

x	$-\infty$	-2		1	α	$+\infty$
Variation de f	$+\infty$ ↘	$-\infty$ ‖	$+\infty$ ↘	-1 ↗	0 ↗	$+\infty$

où α est le nombre réel strictement supérieur à 1 tel que $f(\alpha)=0$.

On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Dire pour chacune des cinq affirmations suivantes si elle est "*vraie*" ou si elle est "*fausse*" ou si "*on ne peut pas conclure*". Aucune justification n'est demandée.

Le barème est le suivant :
- 0,5 point par réponse exacte ;
- 0,25 point par réponse fausse ;
- 0 point pour absence de réponse.

Il n'y aura pas de note globale négative.

1. L'équation $f(x)=1$ admet exactement deux solutions.
2. $f(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in]-5\,;-2[$.
3. Si $-2<x<1$ et $x<x'$ alors $f(x)<f(x')$.
4. $f'(x)\leqslant 0$ pour tout $x\in]-\infty\,;-2[$.

E.3 Résoudre les équations suivantes :

a. $3x^2+4x+1=0$ b. $3x^2-4x+2=0$

c. $-x^2+2x+3=0$ d. $2x^2-4x+2=0$

e. $-3x^2+3x+3=0$ f. $-x^2+4x+3=0$

E.4 On considère la fonction f dont l'image de $x\in\mathbb{R}$ est défini par le polynôme suivant du second degré :
$f(x)=x^3-2x^2+x-3$

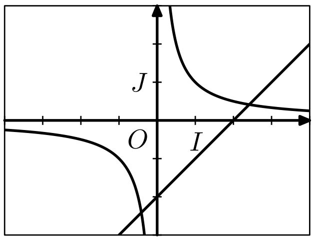
1. a. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f.

   b. Déterminer le tableau de signes de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f *(on complétera le tableau de variations à l'aide de valeurs approchées)*.
3. A l'aide du tableau de variation, justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution.

E.5 Soit l'équation (E) : $\dfrac{1}{x}=x-2$ où l'inconnue est un réel de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Un élève a représenté sur sa calculatrice l'hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ et la droite d'équation $y=x-2$.

   Au vu du graphique ci-dessus obtenu à l'écran de sa calculatrice, combien l'équation (E) semble-t-elle admettre de solutions sur $]0\,;+\infty[$

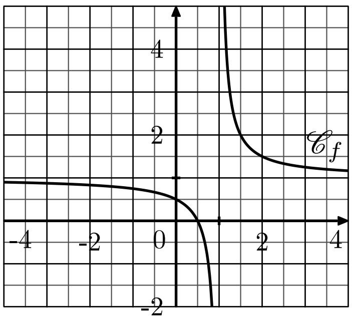


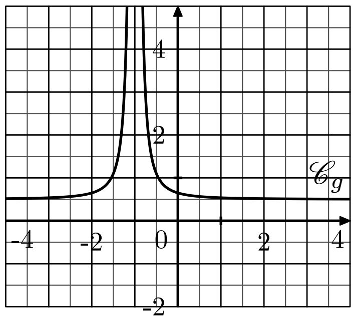
2. Un second élève considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
   $g(x)=x-2-\dfrac{1}{x}$

   a. On note g' la fonction dérivée de g. Calculer $g'(x)$. Montrer que g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

   b. Déterminer les images, par la fonction g, des nombres 1 et 4.
   Conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).
3. Un troisième élève dit : "Je peux résoudre l'équation (E) algébriquement". Justifier, en résolvant l'équation (E), que ce troisième élève a raison.

E.6 On munit le plan d'un repère $(O\,;I\,;J)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :



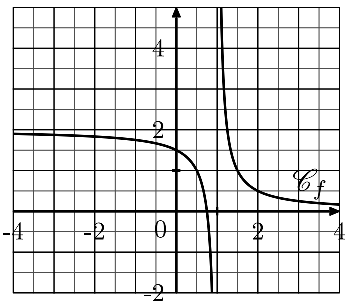


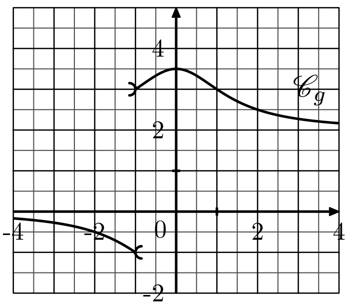
Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\mapsto1^+} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto-1^+} g(x)$

E.7 On munit le plan d'un repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé dans lequel sont représentées les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentatives des fonctions f et g :





Graphiquement, donner, si possible, la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ (c) $\lim\limits_{x\mapsto1^-} f(x)$

(d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$ (e) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto-1^-} g(x)$

E.8 Déterminer les limites ci-dessous :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{x^2-3x+5}{x-1}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto1^+} \dfrac{5-x}{1-x}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{x^2+x+1}{x}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto0^+} \dfrac{x-1}{-x^3}$

E.9 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2\cdot x^2+3\cdot x$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -3\cdot x^3+\dfrac{2}{x}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 5\cdot x^2-3\cdot x^3$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2+2\cdot x-(x+2)^2$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2+3\cdot x$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3-2\cdot x^2$

E.10

(1) On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x\longmapsto \frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}$$

(a) Etablir l'égalité suivante :

$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1} = \frac{3+\dfrac{5}{x}}{x\cdot\Big(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\Big)}$$

(b) En déduire la valeur de la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$.

(2) On considère la fonction g définie par :

$$g\colon x\longmapsto \frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}$$

Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=2$

E.11 On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{2\cdot x^3-x}{x^3+2\cdot x^2}$

(1) Etablir les identités suivantes :

$$f(x) = \frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}} = \frac{2\cdot x^2-1}{x\cdot(x+2)}$$

(2) Déterminer la valeur des limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x)$

E.12 Déterminer la valeur des limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\mapsto2^+} \dfrac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto3^-} \dfrac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto1^-} \dfrac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto-2^+} \dfrac{3\cdot x^2+5\cdot x-2}{x^2+7\cdot x+10}$

E.13 On considère la fonction f définie par :

$$f\colon x\longmapsto \frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}$$

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) (a) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

(b) Quelles asymptotes admet la fonction f?

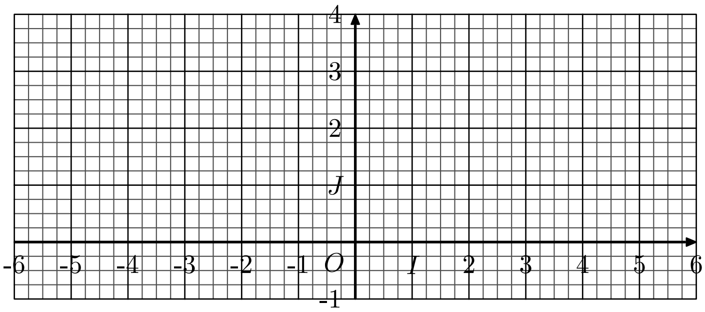
(3) (a) Etablir que la fonction f' dérivée de la fonction f admet l'expression :

$$f'(x) = \frac{-6x^2+12x+18}{\big(x^2-2x+5\big)^2}$$

(b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

(4) Déterminer l'équation réduite de la tangente (Δ) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.

(5) Tracer la droite (Δ), les asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$ puis la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\big(O\,;I\,;J\big)$ orthonormé ci-dessous :



E.14 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{1}{e^x-1}$$

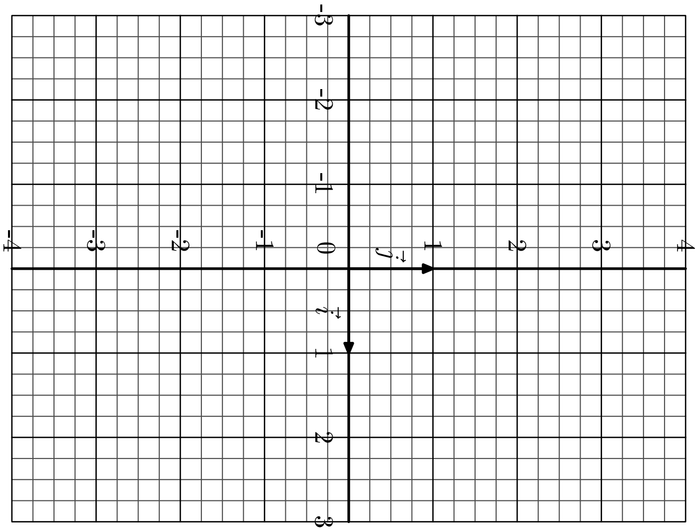
On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

(2) Etablir le tableau de variations de la fonction f.

(3) Préciser les différentes asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

(4) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$.



E.15 Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;1]$ par :

$$f(x) = 2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{e}$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;1]$. On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

   b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0\,;1]$ en un réel α. Donner la valeur de α arrondie au centième.

2. Résoudre l'équation suivante dans l'intervalle $[0\,;1]$: $x - \mathrm{e}^{-x} + 1 = \mathrm{e}^{-x} - x - \mathrm{e}^{-1} + 1$

E.16 Pour chaque question, déterminer une expression "*simplifiée*" de l'expression de la composée $f\circ g$ de la fonction g par la fonction f :

a. $f(x) = 2x^2 - x + 1$; $g(x) = 3x - 2$

b. $f(x) = \sqrt{x-2}$; $g(x) = 4x^2 + 12x + 11$

c. $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $g(x) = \dfrac{3x+1}{2-x}$

d. $f(x) = x^2 - x + 1$; $g(x) = \sqrt{x}$

e. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$; $g(x) = \dfrac{1}{x}$

E.17 Pour chaque question, déterminer la limite de $g\circ f$ en a :

a. $f(x) = 2x^2 - 5x - 3$; $g(x) = \dfrac{5-x}{x^2}$; $a = 3$

b. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x+3}}$; $g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$; $a = -3$

c. $f(x) = \dfrac{\cos x - 2}{x}$; $g(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{x^3 + x^2}$; $a = +\infty$

E.18 On considère la fonction f définie par la relation :

$$f(x) = \frac{5}{x^2 + 2 - \cos x}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. a. Etablir l'encadrement suivant :
   $$\frac{5}{x^2+3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{5}{x^2+1}$$

   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
   $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$$

E.19 Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x+1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{2x+1}$ c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+1}$

d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$

E.20 On se propose de montrer que les relations :

$$u_0 = -3 \;\; ; \;\; u_n = \frac{u_{n-1} - 8}{2\cdot u_{n-1} - 9} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*$$

définissent bien une suite et que cette suite est convergente.

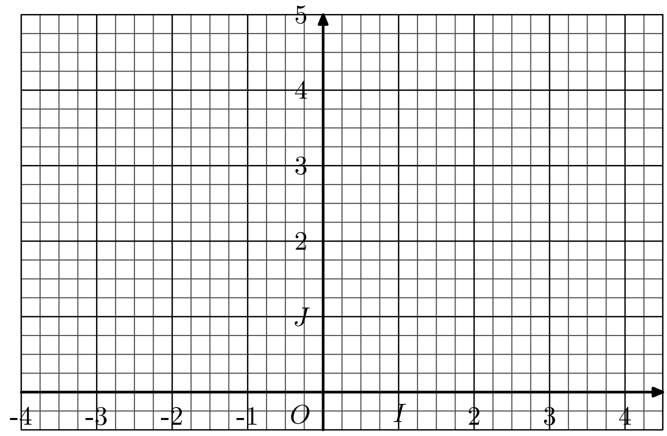
1. On considère la fonction f définie sur $\left]-\infty\,;\frac{9}{2}\right[$ par :
   $$f(x) = \frac{x-8}{2x-9}$$
   On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

   a. Etudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
   Citer les asymptotes de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   b. Déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f.
   En déduire le tableau de variations de la fonction f.

   c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 1.

   d. Effectuer le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-dessous, ainsi que de la droite d'équation $y=x$:



   e. En se servant de ce graphique, faire une conjecture sur le comportement de la suite (u_n).

2. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n < 1$.

3. Démontrer que la suite est croissante et qu'elle converge. *(On ne demande pas la valeur de la limite)*

E.21 On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = 1{,}4\cdot v_n - 0{,}05\cdot {v_n}^2 \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $f(x) = 1{,}4x - 0{,}05\cdot x^2$

   a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;8]$.

   b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$

2. Etablir la convergence de la suite (v_n) *(on ne demandera pas la valeur de la limite)*.