Chap 5-Graphes et Suites de matrices

Maths expertes

1 Représenter une situation à l'aide de graphes

1.1 Définitions

Le schéma ci-dessous est appelé **graphe**.
Les points A, B, C, D et E sont les **sommets** de ce graphe.
Les segments reliant deux sommets sont appelés **arêtes**.

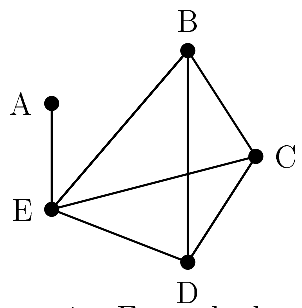


Figure 1 – Exemple de graphe

L'ordre d'un graphe est égal au nombre total de sommets. Le graphe ci-dessus est d'ordre 5.
On dit que deux sommets sont **adjacents** s'ils sont reliés par une arête.
Les sommets A et E sont adjacents mais les sommets A et B ne sont pas adjacents.

Un graphe est **complet** si deux sommets quelconques sont reliés par une arête.

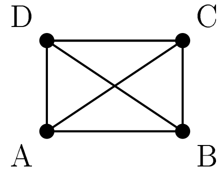


Figure 2 – graphe complet d'ordre 4

Une **boucle** est une arête reliant un sommet à lui-même.
Un graphe **simple** est un graphe sans boucle et tel qu'entre deux sommets il y a au plus une arête.

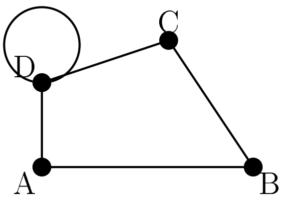


Figure 3 – boucle

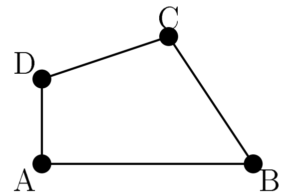


Figure 4 – graphe simple

Un graphe **orienté** est un graphe tel que les arêtes ont un sens de parcours : le sens de la flêche nous donne le sens de parcours. On parle dans ce cas d'arcs.

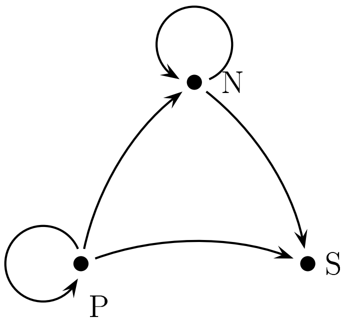


Figure 5 – graphe orienté

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes qui partent de ce sommet.

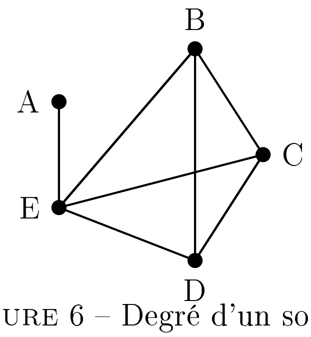


Figure 6 – Degré d'un sommet

Dans la figure 6, Le sommet A est de degré 1. Le sommet B est de degré 3.

Propriété 1.1.
La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes de ce graphe.

Exemple : Reprenons la figure 6.

Sommet	A	B	C	D	E
Degré	1	3	3	3	4

La somme des degré est de 14 qui correspond au double du nombre d'arêtes (ici 7).

2 Graphes connexes, Chaîne eulérienne

2.1 Définitions

Une **chaîne** est une liste ordonnée de sommets telle que chaque sommet de la liste est adjacent au suivant.

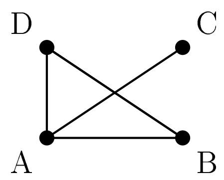


Figure 7 – chaîne : A-D-B

La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent. La chaîne de l'exemple précédent est de longueur 2.
Une chaine **fermée** est une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues.
Dans la figure 7, la chaîne A-D-B-A est fermée.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne contenant toutes les arêtes du graphe une fois et une seule fois.
Dans la figure 7, la chaîne A-D-B-A-C est eulérienne.

Un graphe est **connexe** s'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de ce graphe.

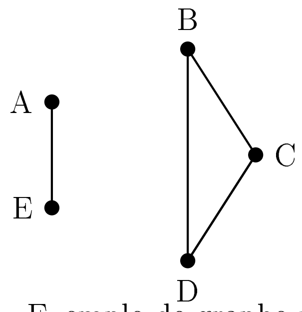


Figure 8 – Exemple de graphe non connexe

2.2 Propriétés

Théorème 2.1.
Théorème d'Euler : Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.

- Si il n'y a aucun sommet de degré impair, la chaîne est fermée.
- Si il y a deux sommets de degré impair, l'origine de la chaîne est l'un de ces sommets et l'extrémité est l'autre sommet.

Exemples :

1. Exemple 1 :
   - Dans le graphe G_1 ci-dessous, expliquer pourquoi A-B-C-E est une chaîne.
   - Expliquer pourquoi A-B-C-E-B-A est une chaîne fermée de G_1.
   - Expliquer pourquoi B-A-D-C-B-E-C est une chaîne eulérienne. Donner un autre exemple de chaîne eulérienne.

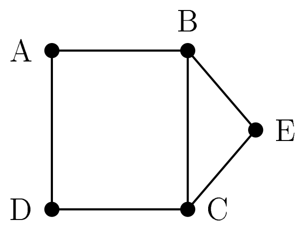


FIGURE 9 – graphe G_1

2. Exemple 2 : Le graphe G_2 ci-dessous est-il connexe ? Le graphe G_3 est-il connexe ?

FIGURE 10 – graphe G_2 et G_3

3. Vérifier que chacun des graphes G_4,G_5,G_6 ci-dessous sont connexes. Dites s'ils admettent une chaîne eulérienne. Dans ce cas, précisez les extrémités de la chaîne.

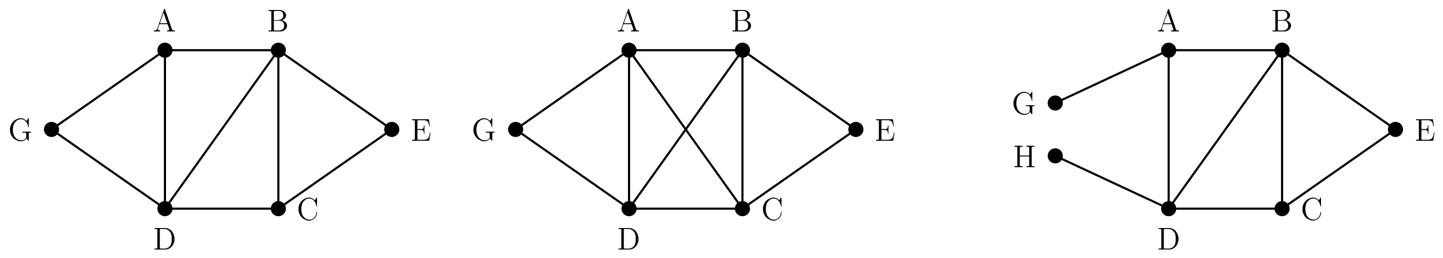


FIGURE 11 – Graphes G_4,G_5,G_6

2.3 Colorier un graphe

Définition 2.1.
Colorier les sommets d'un graphe, c'est leur attribuer une couleur afin que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur

Algorithme de Welsh-Powell :

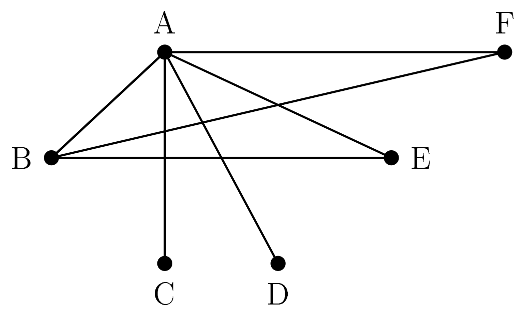


FIGURE 12 – Graphes algorithme Welsh-Powell

1. On range les sommets du plus haut degré au plus petit :
   — Sommet A : degré 5
   — Sommet B : degré 3
   — Sommet F : degré 2
   — Sommet E : degré 2
   — Sommet D : degré 1
   — Sommet C : degré 1
2. On choisit une couleur pour le premier sommet, ici A
3. On colorie de la même couleur tous les sommets non adjacents au sommet A et qui ne sont pas adjacents entre eux. Ici, il n'y en a pas.
4. On recommence avec une autre couleur pour le premier sommet non colorié, ici le sommet B. On peut colorier de la même couleur les sommets C et D.
5. On continue jusqu'à ce que tous les sommets soient coloriés. Ici, on colorie le sommet F et on peut prendre la même couleur pour le sommet E.
   Nous avons pu colorier ce graphe avec 3 couleurs.

3 Matrice d'adjacence associée à un graphe

3.1 Graphe non orienté

Définition 3.1.
La matrice d'adjacence associée à un graphe non orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n est la matrice carrée d'ordre n dont le terme figurant en ligne i et en colonne j est égal au nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j.

Exemple :

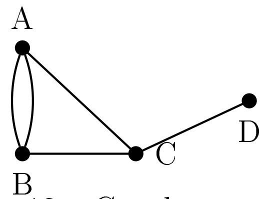


FIGURE 13 – Graphe non orienté

La matrice d'adjacence associée à ce graphe non orienté est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.2 Graphe orienté

Définition 3.2.
La matrice d'adjacence associée à un graphe orienté d'ordre n dont les sommets sont numérotés est la matrice carrée d'ordre n dont le terme figurant en ligne i et en colonne j est égal à 1 s'il existe une arête menant de i à j et 0 sinon.

Exemple :
La matrice d'adjacence associée à ce graphe orienté est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

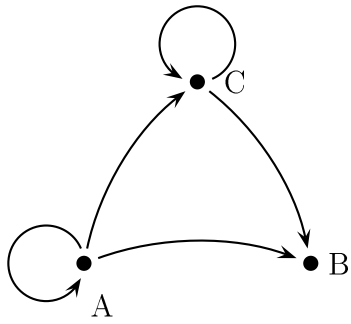


FIGURE 14 – graphe orienté

3.2.1 Puissance d'une matrice

Théorème 3.1.
Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe. Soit p un nombre entier, alors la matrice A^p est la matrice puissance p-ième de A telle que

$$A^p = A \times A \times A ... \times A.$$

L'élément p_{ij} de la matrice A^p est égal au nombre de chaîne de longueur p reliant le sommet i au sommet j.

Soit la matrice du graphe de la figure 13 ;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors

$$A^3 = \begin{pmatrix} 4 & 12 & 7 & 2 \\ 12 & 4 & 7 & 2 \\ 7 & 7 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi il y a 12 chemins pour aller de A à B contenant des chaînes de longueur 3

4 Suites de matrices

Propriété 4.1.
Soient A une matrice carrée d'ordre k et U_n la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie pour tout n entier par : $\begin{cases} & U_0 \\ U_{n+1} & = A.U_n \end{cases}$ Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_n = A^n U_0$

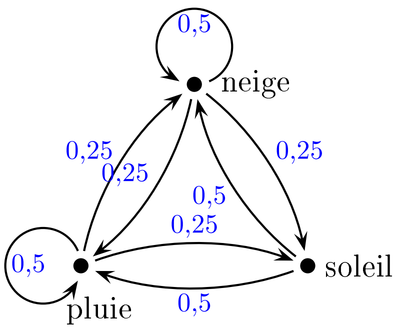
Propriété 4.2.
Soit U_n la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie pour tout n entier par : $\begin{cases} & U_0 \\ U_{n+1} & = A.U_n + B \end{cases}$
On définit la matrice $C = -(A - I_k)^{-1}B$ et pour tout entier naturel n, la matrice $V_n = U_n - C$ Alors la suite V_n vérifie $\begin{cases} & V_0 = U_0 - C \\ V_{n+1} & = A.V_n \end{cases}$. Par la propriété, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n = A^n V_0$ et $U_n = A^n(U_0 - C) + C$

5 Chaine de Markov

5.1 Graphe pondéré et chaine de Markov

Définition 5.1.
— Un graphe est dit pondéré lorsque chaque arête est affectée d'un nombre réel (appelé poids).
— Un graphe probabiliste est un graphe orienté et pondéré par des réels compris entre 0 et 1. La somme des pondérations des arêtes issues d'un même sommet vaut 1.

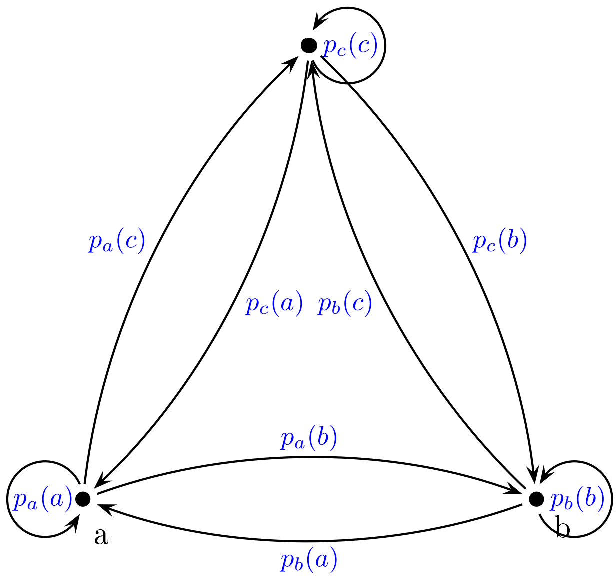
Exemple :



Définition 5.2.
Une suite X_n de variables aléatoires est une chaine de Markov à deux états a et b (resp. à trois états a,b,c) lorsque pour tous x_0,x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1} dans a,b (resp. dans a,b,c), on a : $p_{X_0=x_0,X_1=x_1,\ldots X_k=x_k}(X_{k+1} = x_{k+1}) = p_{X_k=x_k}(X_{k+1} = x_{k+1})$

La probabilité $p_{X_k=x_k}(X_{k+1} = x_{k+1})$ est appelé probabilité de transition de l'état k à l'état $k + 1$.
Une distribution initiale d'une chaine de Markov (X_n) est la loi de probabilité X_0

Exemple :



5.2 Matrice de transition d'une chaine de Markov

Définition 5.3.
On considère une chaine de Markov à n états notés de 1 à n et on note $E = 1,....,n$. La matrice de transition P associée à cette chaine est la matrice carrée d'ordre n telle que pour tout $i \in E$ et pour tout $j \in E$ le coefficient p_{ij} est la probabilité de transition d'un état i à un état j.

Définition 5.4.
On dit qu'un vecteur ligne ou colonne est stochastique si ces composantes sont des réels strictement positif et que leur somme est égale à 1.
On dit qu'une matrice est stochastique selon les lignes (resp. colonnes) si chaque vecteur ligne (resp. colonne) est stochastique.

Propriété 5.1.
La matrice P est stochastique selon ses lignes.

5.3 Limites de matrices

Propriété 5.2.
On considère une chaine de Markov et sa matrice de transition associée. On note π_0 la distribution initiale et π_n la loi de probabilité de X_n. Alors pour tout entier naturel n, on a $\pi_{n+1} = \pi_n.P$ et $\pi_n = \pi_0.P^n$

Propriété 5.3.
Soit (X_n) une chaine de Markov à 2 ou 3 états et sa matrice de transition P. Il existe une distribution initiale π telle que $\pi.P = \pi$ On dit que cette distribution est invariante.
On parle également d'état stable.

Propriété 5.4.
Soit (X_n) une chaine de Markov à 2 ou 3 états et sa matrice de transition P, et π_0 sa distribution initiale. Pour tout entier naturel n on note π_n la distribution de X_n. Si P ne contient aucun 0, la suite de π_n converge vers la distribution invariante de la chaine de Markov.