Chapitre 4- Compléments sur la dérivation

Terminales - Spécialité Maths

Table des matières

1 Histoire des Mathématiques **2**

2 Rappels **2**
2.1 Propriétés de dérivation 2
2.2 Formulaire des dérivées des fonctions usuelles 4
2.3 Calculs de dérivées 5

3 Dérivées **5**
3.1 Dérivée d'une fonction composée 5

4 Dérivée Seconde **6**
4.1 Convexité 6

1 Histoire des Mathématiques

Extrait de Wikipédia

L'histoire du calcul infinitésimal remonte à l'Antiquité. Sa création est liée à une polémique entre deux mathématiciens Isaac Newton et Gottfried Wilhelm Leibniz. Néanmoins, on retrouve chez des mathématiciens plus anciens les prémices de ce type de calcul : Archimède, Pierre de Fermat et Isaac Barrow notamment. La notion de nombre dérivé a vu le jour au XVIIe siècle dans les écrits de Gottfried Wilhelm Leibniz et d'Isaac Newton qui le nomme fluxion et qui le définit comme « le quotient ultime de deux accroissements évanescents ».
Le domaine mathématique de l'analyse numérique connut dans la seconde moitié du XVIIe siècle une avancée prodigieuse grâce aux travaux de Newton et de Leibniz en matière de calcul différentiel et intégral, traitant notamment de la notion d'infiniment petit et de son rapport avec les sommes dites intégrales. C'est cependant Blaise Pascal qui, dans la première moitié du XVIIe siècle, a, le premier, mené des études sur la notion de tangente à une courbe - lui-même les appelait « touchantes ». Le marquis de l'Hospital contribuera à diffuser le calcul différentiel de Leibniz à la fin du XVIIe siècle grâce à son livre sur l'analyse des infiniment petits.Wallis, mathématicien anglais (surtout connu pour la suite d'intégrales qui porte son nom) contribua également à l'essor de l'analyse différentielle.Néanmoins cette théorie tout juste éclose n'est pas encore, à l'époque, pourvue de toute la rigueur mathématique qu'elle aurait exigée, et notamment la notion d'infiniment petit introduite par Newton,qui tient plus de l'intuitif, et qui pourrait engendrer des erreurs dès lors que l'on ne s'entend pas bien sur ce qui est ou non négligeable. C'est au XVIIIe siècle que d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème : $\mathbb{R}$ n'est pas encore construit formellement. C'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIXè siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.C'est à Lagrange (fin du XVIIIe siècle) que l'on doit la notation $f'(x)$, aujourd'hui usuelle, pour désigner le nombre dérivé defenx. C'est aussi à lui qu'on doit le nom de « dérivée » pour désigner ce concept mathématique.

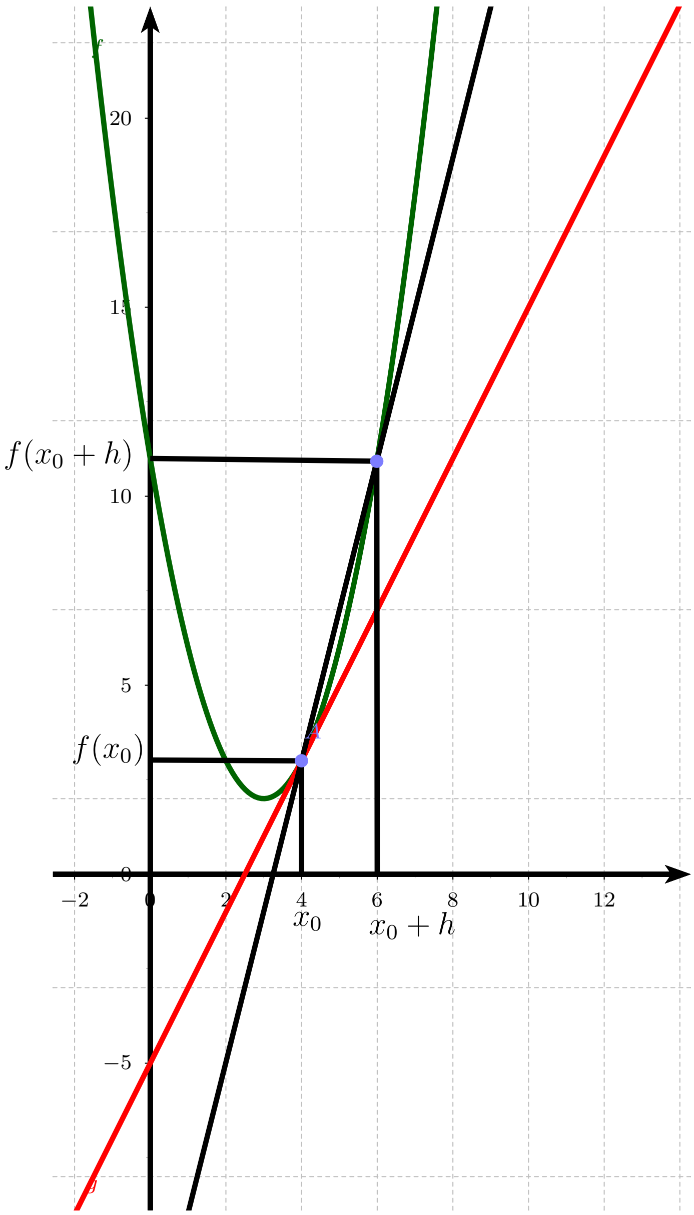
2 Rappels

2.1 Propriétés de dérivation

On dit que f est dérivable en x_0 de nombre dérivé l si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une unique limite finie, l.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = l$$

Cette dérivée se note $f'(x_0)$ et on a $f'(x_0) = l$.



Propriété 2.1.
Si la fonction f admet en x_0 la dérivée $f'(x_0)$ alors la courbe représentative de f admet une tangente au point d'abscisse x_0 dont le coefficient directeur vaut $f'(x_0)$.

Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0

$$T_x0 : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

EXERCICE 1
Soit f la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 2.

EXERCICE 2
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

1. Déterminer, en fonction de h le taux d'accroissement de f entre 0 et 0+h.
2. Démontrer que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$
3. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en O.

2.2 Formulaire des dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	**f est définie sur**	**f est dérivable sur**	**Fonction dérivée f'**
$f(x) = k$ où k est un nombre réel	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriété 2.2.
- Soit f et g deux fonctions définies sur I, alors la fonction $f + g$ est dérivable sur I et $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Soit f une fonction définie sur I, et k un nombre réel alors la fonction $k.f$ est dérivable sur I et $(k.f)'(x) = k.f'(x)$

2.3 Calculs de dérivées

Propriété 2.3.
Soient u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I. Alors la fonction $f = u \times v$ est dérivable sur I, on a :

$$f' = u'.v + u.v'$$

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I. Alors la fonction $f = \frac{1}{u}$ est dérivable sur I, on a :

$$f' = -\frac{u'}{u^2}$$

Soient u et v deux fonctions dérivables sur le même intervalle I. Si la fonction v ne s'annule pas sur I alors la fonction $f = \frac{u}{v}$ est dérivable sur I, on a :

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$f(x) = g(ax+b)$ avec g une fonction dérivable sur I et J un intervalle tel que pour tout $x \in J$,$ax+b \in I$ alors la fonction f est dérivable sur J et

$$f'(x) = ag'(ax+b)$$

EXERCICE 3
Rappels dérivées 1ere : INDISPENSABLE!!
Calculs de dérivées

3 Dérivées

3.1 Dérivée d'une fonction composée

Définition 3.1.
La fonction composée de u par g, notée $g \circ u$ est définie pour tout $x \in I$ par $g \circ u(x) = g(u(x))$

Propriété 3.1.
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et g une fonction définie et dérivable sur un intervalle J.
Alors la fonction $g \circ u$ est dérivable sur I et $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$. C'est à dire que pour tout $x_0 \in I$ $(g \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times (g' \circ u)(x_0)$

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. On veut montrer que $g \circ u$ est dérivable en x_0. C'est à dire que $\frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0}{x - x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0.
$\frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0)}{x - x_0} = \frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0} \times \frac{(g \circ u)(x) - (g \circ u)(x_0)}{u(x) - u(x_0)}$

u est dérivable en x_0 donc $\dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}$ tend vers $u'(x_0)$ lorsque x tend vers x_0.

De plus, u est continue en x_0 (car dérivable sur I) donc $u(x)$ tend vers $u(x_0)$) lorsque x tend vers x_0, et comme g est dérivable sur J, on a :
$\dfrac{(g\circ u)(x)-(g\circ u)(x_0)}{u(x)-u(x_0)}$ tend vers $g'(u(x_0)) = (g'\circ u)(x_0)$
Donc $\dfrac{(g\circ u)(x)-(g\circ u)(x_0)}{x-x_0} = \dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} \times \dfrac{(g\circ u)(x)-(g\circ u)(x_0)}{u(x)-u(x_0)}$ tend vers $u'(x_0)\times(g'\circ u)(x_0)$

CQFD

Propriété 3.2.
Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

1. $(e^u)' = u'e^u$
2. Pour tout entier n non nul : $(u^n)' = nu'u^{n-1}$
3. Si u ne s'annule pas sur I : $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
4. Si u est strictement positive sur I : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
5. Si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas sur I. $\dfrac{1}{u^n} = \dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$

Exemple :

1. $(u^2)' = 2u'u$
2. $(u^3)' = 3u'u^2$
3. $(\dfrac{1}{u^2})' = \dfrac{-2u'}{u^3}$
4. $(\mathrm{e}^{5x^2})' = 10x\mathrm{e}^{5x^2}$
5. $(\sqrt{3x^2+1})' = \dfrac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}$

4 Dérivée Seconde

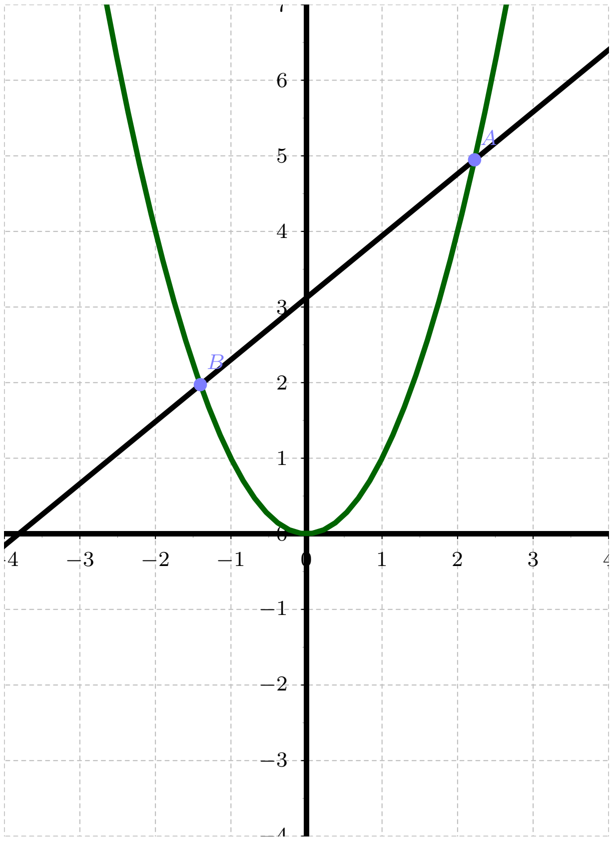
Définition 4.1.
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. On note f' sa fonction dérivée.
Lorsque f' est dérivable sur I, on note f'' sa dérivée.
f'' est appelée dérivée seconde de f.

4.1 Convexité

Définition 4.2.
Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative. On dit que f est **convexe** sur I lorsque sa courbe est située en dessous de toutes les droites sécantes entre 2 points d'intersection.

Exemple :

La fonction carrée dont la courbe est tracée ci-dessous, est convexe.



Remarque .
Si la courbe représentative de f est au-dessus des sécantes alors f est **concave.**

Propriété 4.1.
Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle I. Les propositions ci-dessous sont équivalentes :

1. f est convexe sur I.
2. La courbe $\mathcal{C}_f$ est situé au-dessus de toutes ses tangentes.
3. f' est croissante sur I
4. f'' est positive sur I.

Démonstration.

- $1 \Leftrightarrow 2$ par définition de la convexité.
- $3 \Leftrightarrow 4$ car f'' est la dérivée de f'.
- Montrons que $4 \Rightarrow 1$.
  Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I et $a \in I$. $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative et $\mathcal{T}$ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a dont l'équation est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Supposons que pour tout $x \in I, f''(x) > 0$. Soit ϕ la fonction définie sur I par $\phi(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$
  f est dérivable deux fois donc ϕ l'est aussi.

  $\phi'(x) = f'(x) - f'(a)$ et $\phi''(x) = f''(x)$.
  Donc, comme pour tout $x \in I, f''(x) > 0$, on a $\phi''(x) > 0$ et donc ϕ' croissante sur I.

— Si $x > a$ alors $\phi'(x) > phi'(a)$ avec $\phi'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$. Donc $\phi'(x) > 0$, donc ϕ est croissante sur I. On a $\phi(x) > \phi(a)$.
$\phi(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$ donc pour tout $x \in I$,$\phi(x) > 0$.
Ainsi $f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) > 0$ donc $f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$ c'est à dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$

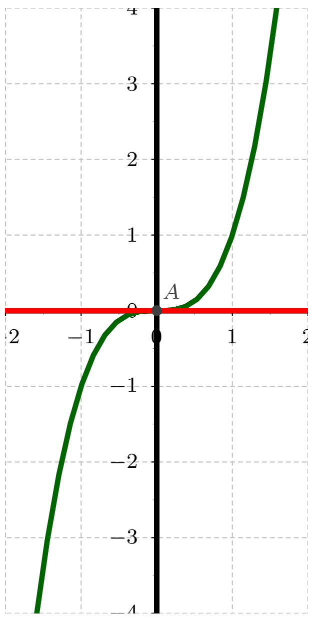
— Si $x < a$, alors $\phi'(x) < 0$ donc ϕ est décroissante sur I. Donc $\phi(x) > \phi(a) \Rightarrow \phi(x) > 0$, on obtient également que pour tout x; $f(x) > f'(a)(x-a) + f(a)$ c'est à dire que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{T}$

CQFD

Définition 4.3.
Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative de f traverse sa tangente. Si une courbe admet un point d'inflexion, alors la fonction change de convexité.

Exemple :

La courbe de la fonction $f(x) = x^3$ admet un point d'inflexion en O.



Propriété 4.2.
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Sa courbe admet un point d'inflexion au point d'abscisse a si et seulement si f'' s'annule en a et change de signe dans un voisinage de a.

Démonstration. $f''(a) = 0$ et f'' change de signe, si et seulement si f' change de sens de variation si et seulement si f change de convexité $\Leftrightarrow \mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse a. CQFD