Chap1- Limites de fonctions

Activités

EXERCICE 1
Limite de x^2 en $+\infty$

1. Résoudre $x^2 > 10^4$ dans $\mathbb{R}$
2. Résoudre $x^2 > 10^{2n}$ pour n entier naturel.
3. Conclure.

EXERCICE 2

On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcccc} f & : &]0\,;+\infty[& \to &]0\,;+\infty[\\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

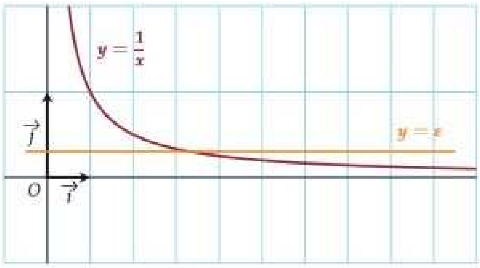
1. Calculer $f(x)$ pour $x = 10\,;\,100\,;\,1\ 000\,;\,10^4\,;\,10^5\,;$ etc.
2. Que peut-on conjecturer quant à $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$?
3. De la question précédente, déduire le complètement des notations équivalentes suivantes :

$$f(x) \to \ldots \text{ lorsque } x \to \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to \ldots} f(x) = \ldots$$

On vient de remarquer la propriété suivante, que l'on va par la suite chercher à démontrer :

« $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut
dès que
x est suffisamment grand. »

1. Dans cette proposition, quelle est l'hypothèse ? la conclusion ?
2. On considère la locution « x est suffisamment grand ». Parmi les quatre locutions données ci-dessous, deux la traduisent : lesquelles ?
   — x est plus grand qu'un certain réel
   — x est plus grand que tout réel
   — il existe un réel x_0 tel que $x > x_0$
   — pour tout réel x_0, $x > x_0$
3. Même consigne avec la locution « $f(x)$ prend des valeurs aussi proches de 0 que l'on veut ». On notera $\varepsilon > 0$ le réel utilisé.
4. Détermination graphique de x_0.
   (a) Ci-dessous, on a représenté graphiquement la fonction inverse sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et on fixe $\varepsilon > 0$, un réel quelconque (de préférence petit).
   Sur l'axe des abscisses, représenter le plus petit réel x_0 à partir duquel on a $f(x) < \varepsilon$.



(b) Pourquoi peut-on affirmer que, dès que $f(x) < \varepsilon$ pour un certain x, alors $f(t) < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant x$?

5. Détermination algébrique de x_0.
Fixons $\varepsilon > 0$. En résolvant l'inéquation $f(x) < \varepsilon$, déterminer le plus petit réel x_0 (que l'on exprimera en fonction de ε) tel que, si $x > x_0$, alors $f(x) < \varepsilon$.

EXERCICE 3 Asymptote oblique

On donne la fonction f définie sur $I =]-5; +\infty[$ par $\dfrac{5x - x^2}{5 + x}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative-.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
2. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = -x + 10 - \dfrac{50}{5 + x}$
3. Déterminer la dérivée f' de f.
4. Etudier le sens de variation de f. Dresser le tableau de variation de f.
5. On donne $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -x + 10$. Résoudre $f(x) = -x + 10$ et interpréter graphiquement le résultat.
6. On note M et N les points de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$ de même abscisse x.
   (a) Montrer que pour tout $x \in I$,
   $$MN = |f(x) - (-x + 10)| = \frac{50}{5 + x}$$
   (b) Déterminer le réel x_0, tel que pour tout $x > x_0$, on a $MN < 10^{-1}$.
   (c) Déterminer le réel x_1, tel que pour tout $x > x_1$, on a $MN < 10^{-2}$.
   (d) Déterminer le réel x_2, tel que pour tout $x > x_2$, on a $MN < 10^{-3}$.
   (e) Justifier que la distance MN peut être rendue aussi petite que l'on le souhaite dès que x est supérieure à une certaine valeur.

Conclusion : La distance MN tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini. La droite $\mathcal{D}$ est appelée asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en l'infini.