

Chapitre 2 - Suites numériques

Terminales Spé Maths

1 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence ne peut être utilisé que lorsque que l'on souhaite montrer qu'une propriété \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Théorème 1.1.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ On considère la proposition \mathcal{P}_n définie pour tout $n \geq n_0$.

Si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

1. \mathcal{P}_n est vraie pour n_0 (Initialisation)
2. Pour tout $k \geq n_0$ si la proposition (\mathcal{P}_k vraie) implique que (\mathcal{P}_{k+1} vraie) (Hérédité)

Alors \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Remarque .

la proposition (\mathcal{P}_k vraie) est appelée **Hypothèse de récurrence**

Exemple :

On considère une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} = 0.3u_n + 7$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 10$.

La proposition \mathcal{P}_n est $u_n \leq 10$.

1. **Initialisation** : $n_0 = 0$; $u_0 = 2 \leq 10$ donc la propriété est vraie pour $n_0 = 0$
2. **Hypothèse de récurrence** : Supposons qu'il existe $k \geq n_0$ tel que \mathcal{P}_k est vraie, c'est à dire $u_k \leq 10$.
3. **Hérédité** : Alors $u_{k+1} = 0.3u_k + 7 \leq 0.3 \times 10 + 7 \Leftrightarrow u_{k+1} \leq 10$ donc on a montré que si \mathcal{P}_k est vraie alors \mathcal{P}_{k+1} est vraie.
4. **Conclusion** : La propriété $u_n \leq 10$ est vraie pour tout $n \geq 0$

EXERCICE 1

Démontrer une égalité par récurrence

EXERCICE 2

La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout n de \mathbb{N} .

Démontrer par récurrence, que, pour tout n de \mathbb{N} : $u_n = 2^n - 1$.

EXERCICE 3

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Propriété 1.1.

Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel $a > 0$; Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $(1 + a)^n \geq 1 + na$

Démonstration. Initialisation : Pour $n = 0$; on a l'égalité $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. La propriété est vraie.

Hypothèse de récurrence : On suppose qu'il existe $k > 0$ tel que $(1 + a)^k \geq 1 + ka$

Hérédité : On veut montrer que $(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$

Partant de $(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k(1 + a) \geq (1 + ka)(1 + a)$ d'après H.R.

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + ka + a + ka^2$$

Or $ka^2 > 0$ donc

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + ka + a$$

et en factorisant a

$$(1 + a)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)a$$

On a montré l'hérédité.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$; $(1 + a)^n \geq 1 + na$

CQFD

2 Limites finies et suites convergentes

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.

Soit l un réel. Une suite (u_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0 . On dit alors que la suite (u_n) est **convergente** et qu'elle converge vers l .

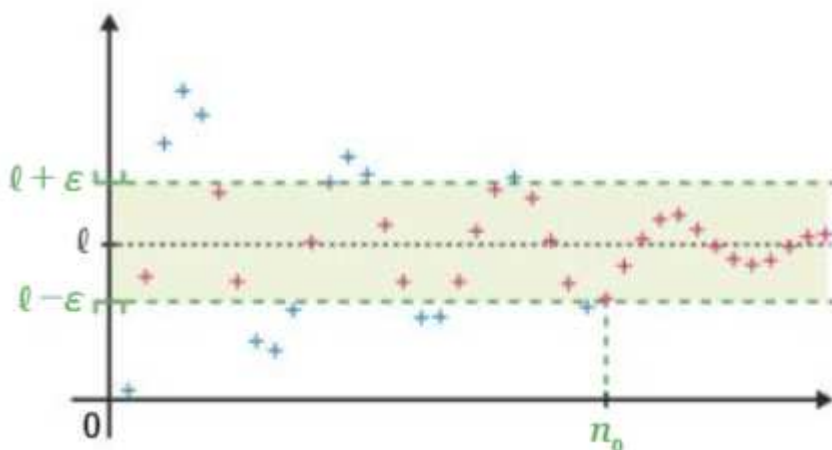
Cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$.

Remarque .

Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas.

Exemple :

Sur le graphique ci-dessous, on voit qu'à partir d'un rang n_0 , tous les termes de la suite sont à une distance ε aussi petite que l'on veut de la limite l .



Propriété 2.1.

La limite d'une suite (u_n) convergente est unique. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

Démonstration. Inégalité triangulaire : on part du résultat suivant pour démontrer cette propriété : pour tous réels a et b on a $|a + b| < |a| + |b|$

Supposons que la suite u_n tendent vers deux limites l et l' différentes.

pour tout $\varepsilon > 0$; il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$; $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.

pour tout $\varepsilon > 0 > 0$ il existe un entier n_1 tel que pour tout $n > n_1$; $|u_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Donc pour tout $n > \max(n_0; n_1)$, on a $|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| < |l - u_n| + |u_n - l'|$ d'après l'inégalité triangulaire et donc

$$|l - l'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que souhaité, $|l - l'| < \varepsilon$ donc $l = l'$.

CQFD

Propriété 2.2. 1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$

4. pour $k \geq 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$

5. Si $-1 < q < 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$ Démonstration en fin de chapitre

Démonstration. Faite en classe.

CQFD

Remarque .

Limite finie

Limite infinie

Exemple :

Etudier l'application - méthode 1 p131.

2.2 Théorème de convergence monotone

Définition 2.2. • Une suite (u_n) est majorée par un réel M lorsque pour tout entier n ; $u_n \leq M$.
On dit que M est un majorant de (u_n)

- Une suite (u_n) est minorée par un réel m lorsque pour tout entier n ; $u_n \geq m$. On dit que m est un minorant de (u_n)
- Une suite (u_n) majorée et minorée est dite bornée.

Théorème 2.1 (admis). • Toute suite croissante et majorée est convergente.

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Exemple :

Etudier l'application - méthode 2 p132.

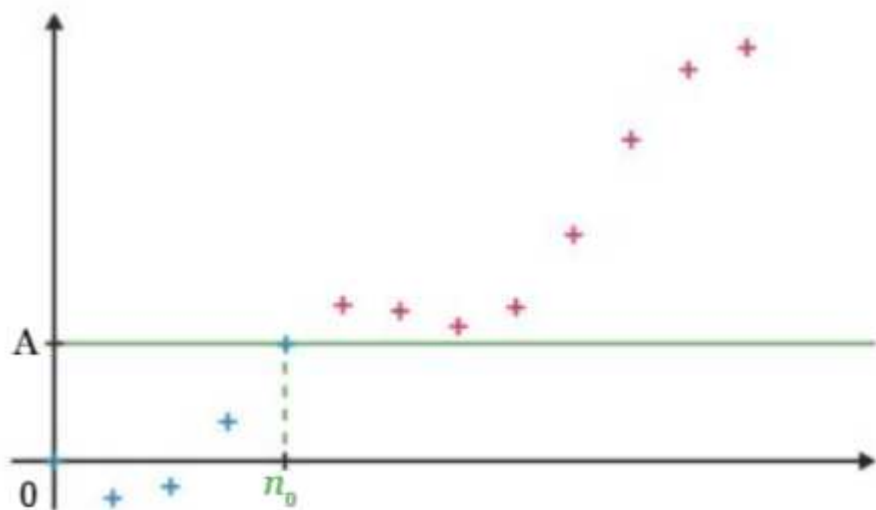
3 Limites infinies

Définition 3.1.

Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour tout réel A , l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. C'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \geq A$.

Exemple :

Sur le graphique ci-dessous, on voit que pour tout A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A .



Propriété 3.1.

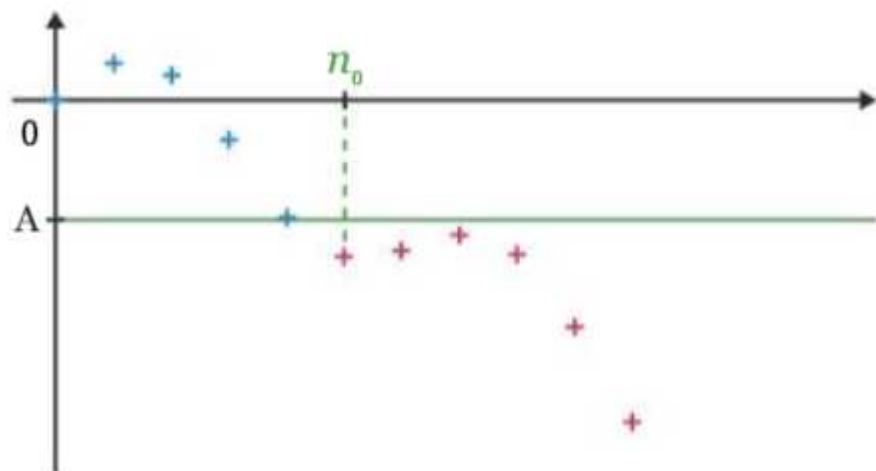
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- Pour $k \geq 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$
- Si $q > 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$ Démonstration en fin de chapitre

Définition 3.2.

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque, pour tout réel A , l'intervalle $] -\infty; A]$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. C'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $u_n \leq A$.

Exemple :

Sur le graphique ci-dessous, on voit que pour tout A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à A .



Propriété 3.2.

- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$

Démonstration. • Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel.

u_n est non majorée, donc il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$.

u_n est croissante donc pour tout $n \geq n_0$ alors $u_n \geq u_{n_0} > A$ donc $u_n > A$.

On a montré que pour A réel, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $u_n > A$. Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

- En exercice.

CQFD

Exemple :

Etudier Application et méthode 3 p 134.

4 Opérations sur les limites

4.1 Limite d'une somme de suites

Si (u_n) a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

4.2 Limite d'un produit de suites

Si (u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	∞	0
et si (v_n) a pour limite	l'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$l \times l'$	∞^*	∞^*	Forme indéterminée

* le signe est déterminé par la règle des signes d'un produit.

4.3 Limite d'un quotient de suites

Limite d'un quotient si la limite du dénominateur n'est pas nulle

Si (u_n) a pour limite	l	l	∞	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	∞	$l' \neq 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0^*	∞^*	Forme Indéterminée

* : on détermine le signe avec la règle des signes

Limite d'un quotient si la limite du dénominateur est nulle

Si (u_n) a pour limite	$l \neq 0$ ou ∞	0
et si (v_n) a pour limite	0 en gardant un signe constant	0
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	∞	Forme indéterminée

Exemple :

Etudier les Applications et méthodes 4-5-6-7 p135-136-137

5 Limites et comparaison

Théorème 5.1 (Théorème de comparaison).

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un rang n_0 .

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Démonstration. Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$; $u_n \leq v_n$

- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ alors $u_n > A$.
Donc en prenant $N = \max(n_0; n_1)$ pour tout $n \geq N$; $v_n \geq u_n > A$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$ alors $v_n < A$.
Donc en prenant $N = \max(n_0; n_1)$ pour tout $n \geq N$; $u_n \leq v_n < A$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

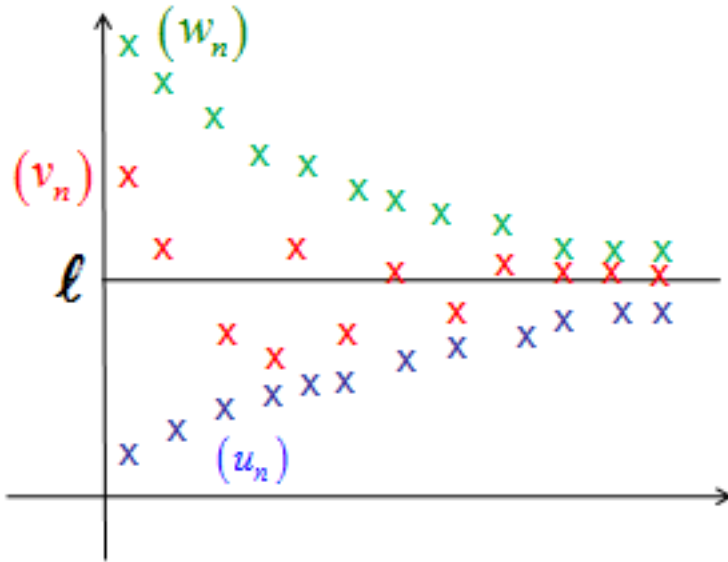
CQFD

Exemple :

Etudier l'application et méthode 8 p 139

Théorème 5.2 (Théorème des gendarmes).

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang on a : $u_n \leq v_n \leq w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l , alors (v_n) converge aussi vers l .



Exemple :

Etudier l'Application et méthode 9 p 139

Démonstration. **Pté 2.2 et Pté 3.1**

Si $q > 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Si $-1 < q < 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

1. $q > 1$ donc il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$, d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$
Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + na = +\infty$

Donc par comparaison $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

2. $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$ donc $\frac{1}{|q|} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$.

Par inverse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} |q|^n = 0$

CQFD