

Chapitre 10- Combinatoire et dénombrement

Terminales - Spécialité Maths

1 Cardinal d'ensembles

- Définition 1.1.**
1. Le cardinal d'un ensemble E est le nombre d'éléments de E . On le note $card(E)$.
 2. Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ sont p ensembles finis deux à deux disjoints alors :
 $card(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = card(E_1) + card(E_2) + \dots + card(E_p)$
 3. on appelle couple, triplet, p-uplet une collection respectivement de deux objets, de trois objets, de p-uplets.

1.1 Produit cartésien

Définition 1.2.

Soient A et B deux ensembles non vides. Le produit cartésien de A et B est l'ensemble noté $A \times B$ constitué des couples (x, y) où x est un élément de A et y un élément de B.

$$A \times B = \{(x, y), x \in A, y \in B\}$$

Exemple :

Si $E = \{a; b; c\}$ et $F = \{1; 2\}$ alors $E \times F = \{(a, 1); (a, 2); (b, 1); (b, 2); (c, 1); (c, 2)\}$

$\{b; a; c; c; a\}$ est un 5-uplet d'éléments de E. $\{b; a; c; c; a\} \in E^5$

$$E \times E = \{(a, a); (a, b); (a, c); (b, a); (b, b); (b, c); (c, a); (c, b); (c, c)\}$$

1.2 Principe multiplicatif

Propriété 1.1.

1. Si $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ sont p ensembles finis alors :

$$card(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = card(E_1) \times card(E_2) \times \dots \times card(E_p)$$

2. Si E est un ensemble de cardinal n et si $k \in \mathbb{N}^*$ alors $card(E^k) = n^k$

Reprenons les ensembles E et F de l'exemple précédent :

$$card(E \times F) = card(E) \times card(F) = 3 \times 2 = 6$$

$$card(E \times E) = card(E)^2 = 9$$

$$card(E^5) = 3^5 = 243 \text{ c'est le nombre de 5-uplets d'éléments de E.}$$

2 Arrangements et permutations

2.1 Arrangements d'un ensemble

Définition 2.1.

Soit n un entier naturel non nul. On appelle factorielle de n le nombre :

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Définition 2.2.

Soit A un ensemble non vide à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n .

Un arrangement de k éléments de A (ou k -arrangement) est un k -uplet d'éléments **distincts** de A .

Exemple :

Soit $A = \{b; j; n; o; r; u\}$ alors (j, o, n) et (r, u, j) sont des arrangements de 3 élément de A . (b, j, n, o, j) n'est pas un arrangement de A car l'élément j est répété.

Propriété 2.1.

Le nombre de k -arrangements de A est donné par la formule :

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Démonstration. Pour construire un k -uplet d'éléments distincts de A , on choisit le 1^{er} élément parmi n élément de A . Le deuxième est choisi parmi $n - 1$ éléments de A ..., le $k^{\text{ième}}$ est choisi parmi $n - k + 1$.

Ainsi, le nombre d'arrangements est $n \times (n - 1) \times \dots \times (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$ CQFD

Définition 2.3.

Soit A un ensemble fini non vide à n éléments. Une permutation de A est le n -uplet d'éléments distincts de A .

Propriété 2.2.

Le nombre de permutation d'un ensemble fini non vide à n éléments est $n!$

Exemple :

Si $A = \{a; b; c\}$

$(a, b, c), (b, c, a), (c, a, b), (b, a, c), (a, c, b), (c, b, a)$ sont les 6 permutations de A .

3 Combinaisons d'un ensemble fini

3.1 Parties d'un ensemble fini

Définition 3.1.

Une partie d'un ensemble A est un sous-ensemble de A . On la note $\mathcal{P}(A)$

Propriété 3.1.

Le nombre de parties de A est égale à 2^n .

3.2 Nombre de combinaisons**Définition 3.2.**

Soit A une ensemble fini à n éléments et k un entier naturel inférieur ou égal à n . Une combinaison de k éléments de A est une partie de A de cardinal k .

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$

Propriété 3.2.

Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$. Alors :

1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
2. Symétrie : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. Relation de Pascal : $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Démonstration. Relation de Pascal :

$$(k+1)! = (k+1) \times k! \text{ et } (n-k)! = (n-k) \times (n-k-1)!$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

Le dénominateur commun est $(k+1)!(n-k)!$

On a

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} = \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \binom{n+1}{k+1}$$

CQFD

Propriété 3.3.

$$n \text{ entier naturel } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

Démonstration. Soit A un ensemble fini à n éléments. Pour tout entier $k \leq n$, on note A_k l'ensemble des parties de A composées de k éléments.

$$\text{Card}(A_k) = \binom{n}{k}$$

Les A_k sont deux à deux disjoints et leur réunions est $\mathcal{P}(A)$

$$\text{On a : } 2^n = \text{Card}(\mathcal{P}(A)) = \text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(A_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

CQFD

3.3 Triangle de Pascal

Propriété 3.4 (Triangle Pascal).

Pour $0 \leq k \leq n$ on peut construire le tableau suivant :

n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
	0	1	2	3	4	5	6
	k						

Le nombre $\binom{n}{k}$ est donné par ce triangle. Par exemple $\binom{5}{3} = 10$

Propriété 3.5 (Formule du binôme).

Pour tous nombres complexes u et v et pour n entier naturel, on a

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Démonstration. **Initialisation** : pour $n = 1$ on a $u + v$ d'une part et

$$\sum_{k=0}^1 \binom{n}{k} u^{n-k} v^k = \binom{1}{0} u^1 v^0 + \binom{1}{1} u^0 v^1 = u + v \text{ d'autre part. Donc, la propriété est vraie pour } n = 1.$$

HR : On suppose que la propriété est vraie pour un rang $n > 1$ (pour alléger l'écriture et éviter les confusions, je garde le n et ne choisis pas de k qui est le compteur de la somme).

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^k$$

Donc on veut montrer que

$$(u + v)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{n+1-k} v^k$$

Or

$$(u + v)^{n+1} = (u + v)(u + v)^n = (u + v) \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^k \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k+1} v^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^{k+1}$$

On voit que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} v^{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{n-k+1} v^k = \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} u^{n-k+1} v^k \right) + v^{n+1}$ (remplacez k par 0 et k par 1 dans les sommes pour voir l'égalité puis remplacez k par n et k par $n+1$ pour voir l'égalité.)

$$\text{D'autre part } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k+1} v^k = \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u^{n-k+1} v^k \right) + u^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } (u+v)^{n+1} &= \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} u^{n-k+1} v^k \right) + u^{n+1} + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} u^{n-k+1} v^k \right) + v^{n+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u^{n-k+1} v^k + (u^{n+1} + v^{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} u^{n-k+1} v^k + (u^{n+1} + v^{n+1}) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{n-k+1} v^k \end{aligned}$$

On a montré l'hérédité, la propriété est vraie pour tout n .

CQFD