Chapitre 2 - Suites numériques

Terminales Spé Maths

1 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence ne peut être utilisé que lorsque que l'on souhaite montrer qu'une propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Théorème 1.1.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ On considère la proposition $\mathcal{P}_n$ définie pour tout $n \geqslant n_0$.
Si les deux propositions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{P}_n$ est vraie pour n_0 (Initialisation)
2. Pour tout $k \geqslant n_0$ si la proposition ($\mathcal{P}_k$ vraie) implique que ($\mathcal{P}_{k+1}$ vraie) (Hérédité)

Alors $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

Remarque .
la proposition ($\mathcal{P}_k$ vraie) est appelée **Hypothèse de récurrence**

Exemple :
On considère une suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel $n; u_{n+1} = 0.3u_n + 7$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n, u_n \leqslant 10$.
La proposition $\mathcal{P}_n$ est $u_n \leqslant 10$.

1. **Initialisation** : $n_0 = 0; u_0 = 2 \leqslant 10$ donc la propriété est vraie pour $n_0 = 0$
2. **Hypothèse de récurrence** : Supposons qu'il existe $k \geq n_0$ tel que $\mathcal{P}_k$ est vraie, c'est à dire $u_k \leqslant 10$.
3. **Hérédité** : Alors $u_{k+1} = 0.3u_k + 7 \leqslant 0.3 \times 10 + 7 \Leftrightarrow u_{k+1} \leqslant 10$ donc on a montré que si $\mathcal{P}_k$ est vraie alors $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.
4. **Conclusion** : La propriété $u_n \leqslant 10$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$

EXERCICE 1
La suite (u_n) est définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
Démontrer par récurrence, que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = 2^n - 1$.

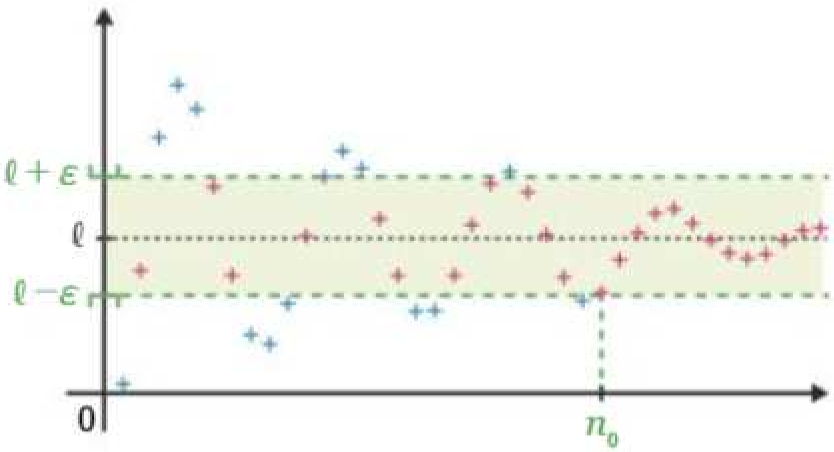
EXERCICE 2
Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}; 1 + 2 + 3 + \ldots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

2 Limites finies et suites convergentes

2.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.
Soit l un réel. Une suite (u_n) a pour limite l quand n tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0. On dit alors que la suite (u_n) est **convergente** et qu'elle converge vers l.
Cela revient à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $|u_n - l| < \varepsilon$.

Remarque .
Une suite **divergente** est une suite qui ne converge pas.
Exemple :
Sur le graphique ci-dessous, on voit qu'à partir d'un rang n_0, tous les termes de la suites sont à une distance ε aussi petite que l'on veut de la limite l.



Propriété 2.1.
La limite d'une suite (u_n) convergente est unique. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$

Démonstration. **Inégalité triangulaire** : on part du résultat suivant pour démontrer cette propriété : pour tous réels a et b on a $|a+b| < |a| + |b|$
Supposons que la suite u_n tendent vers deux limites l et l' différentes.
pour tout $\varepsilon > 0$; il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$; $|u_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

pour tout $\varepsilon > 0 > 0$ il existe un entier n_1 tel que pour tout $n > n_1$; $|u_n - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Donc pour tout $n > max(n_0; n_1)$, on a $|l - l'| = |l - u_n + u_n - l'| < |l - u_n| + |u_n - l'|$ d'après l'inégalité triangulaire et donc
$|l - l'| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.
On a montré que pour tout $\varepsilon > 0$ aussi petit que souhaité, $|l - l'| < \varepsilon$ donc $l = l'$. CQFD

Propriété 2.2.

1. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$
2. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$
3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$
4. pour $k \geqslant 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$
5. Si $-1 < q < 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

Démonstration. Faite en classe. CQFD

Exemple :
Etudier l'application - méthode 1 p131.

2.2 Théorème de convergence monotone

Définition 2.2.

- Une suite (u_n) est majorée par un réel M lorsque pour tout entier $n; u_n \leqslant M$. On dit que M est un majorant de (u_n)
- Une suite (u_n) est minorée par un réel m lorsque pour tout entier $n; u_n \geqslant m$. On dit que m est un minorant de (u_n)
- Une suite (u_n) majorée et minorée est dite bornée.

Théorème 2.1 (admis).

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

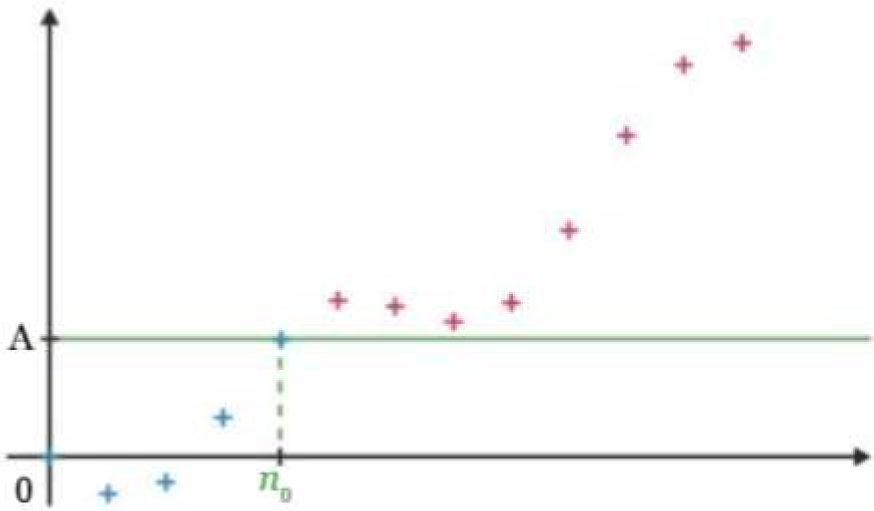
Exemple :

Etudier l'application - méthode 2 p132.

3 Limites infinies

Définition 3.1.
Une limite (u_n) a pour limite $+\infty$ lorsque, pour pour tout réel A ; l'intervalle $[A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. C'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \geqslant A$.

Exemple :
Sur le graphique ci-dessous, on voit que pour tout A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieurs à A.



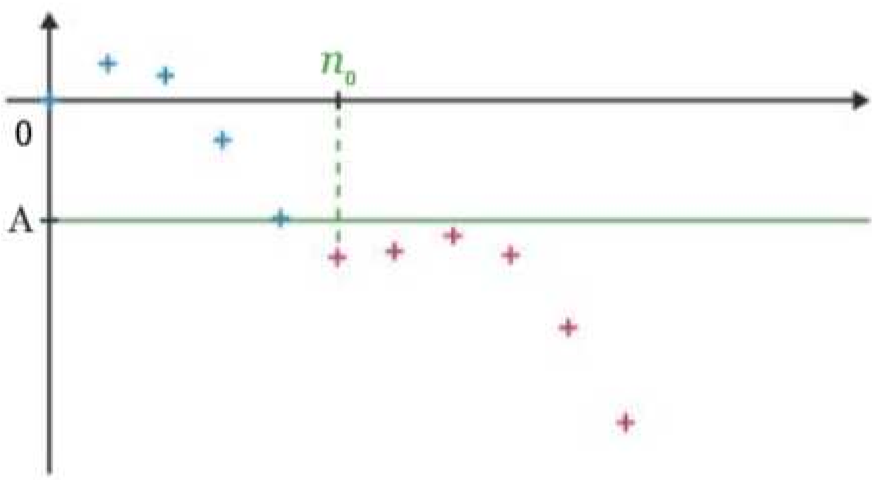
Propriété 3.1.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$
- Pour $k \geqslant 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n^k = +\infty$
- Si $q > 1$; $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

Démonstration. Faite en classe.

CQFD

Définition 3.2.
Une limite (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque, pour pour tout réel A ; l'intervalle $]-\infty; A]$[contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang. C'est à dire que pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ on a $u_n \leqslant A$.

Exemple :
Sur le graphique ci-dessous, on voit que pour tout A choisi, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont inférieurs à A.



Propriété 3.2.
- Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$
- Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$

Démonstration.
- Soit (u_n) une suite croissante non majorée et A un réel.
  u_n est non majorée, donc il existe un rang n_0 tel que $u_{n_0} > A$.
  u_n est croissante donc pour tout $n \geqslant n_0$ alors $u_n \geqslant u_{n_0} > A$ donc $u_n > A$.
  On a montré que pour A réel, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$ $u_n > A$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- En exercice.

CQFD

Exemple :
Etudier Application et méthode 3 p 134.

4 Opérations sur les limites

4.1 Limite d'une somme de suites

Si (u_n) a pour limite	l	l ou $+\infty$	l ou $-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

4.2 Limite d'un produit de suites

Si (u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	∞	0
et si (v_n) a pour limite	l'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$l \times l'$	∞ *	∞ *	Forme indéterminée

* le signe est déterminé par la règle des signes d'un produit.

4.3 Limite d'un quotient de suites

Limite d'un quotient si la limite du dénominateur n'est pas nulle

Si (u_n) a pour limite	l	l	∞	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	∞	$l' \neq 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0 *	∞ *	Forme Indéterminée

* : on détermine le signe avec la règle des signes

Limite d'un quotient si la limite du dénominateur est nulle

Si (u_n) a pour limite	$l \neq 0$ ou ∞	0
et si (v_n) a pour limite	0 en gardant un signe constant	0
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	∞	Forme indéterminée

Exemple :
Etudier les Applications et méthodes 4-5-6-7 p135-136-137

5 Limites et comparaison

Théorème 5.1 (Théorème de comparaison).
Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un rang n_0.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

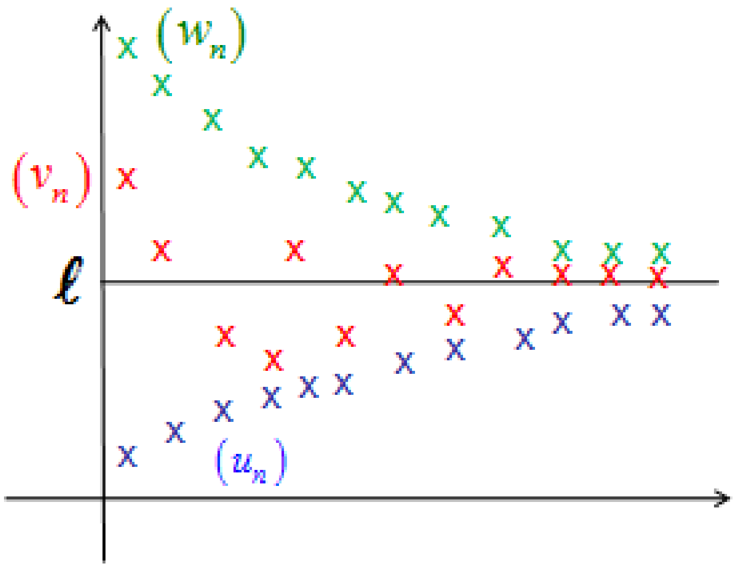
Démonstration. Il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0; u_n \leqslant v_n$

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$ alors $u_n > A$.
  Donc en prenant $N = max(n_0; n_1)$ pour tout $n \geqslant N; v_n \geqslant u_n > A$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ il existe un rang n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$ alors $v_n < A$.
  Donc en prenant $N = max(n_0; n_1)$ pour tout $n \geqslant N; u_n \leqslant v_n < A$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

CQFD

Exemple :
Etudier l'application et méthode 8 p 139

Théorème 5.2 (Théorème des gendarmes).
Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que à partir d'un certain rang on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Si (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l, alors (v_n) converge aussi vers l.



Exemple :

Etudier l'Application et méthode 9 p 139