Chap 3- Calcul matriciel

Maths expertes

1 Matrices

1.1 Définition

Définition 1.1.
Une matrice $\mathbf{M}(n \times m)$ est un tableau de nombres possédant n lignes et m colonnes. On écrit :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Exemple :

Soit A la matrice (2×3) définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

On a par exemple $a_{21} = 4$ et $a_{13} = 0$

1.2 Matrices particulières

1. Si $n = 1$ alors
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \end{pmatrix}$$
M est appelée matrice ou **vecteur ligne**
2. Si $m = 1$ alors
$$M = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
M est appelée matrice ou **vecteur colonne**
3. Si $n = m$ alors M est appelée **matrice carrée**.
4. Si M est une matrice carrée, on dit que M est symétrique si $a_{ij} = a_{ji}$ pour $i \neq j$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

5. On définit la **matrice unité** I_n d'ordre n la matrice carrée qui possède des 1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6. On définit la matrice diagonale D_3 d'ordre 3 la matrice qui ne contient des éléments non nuls que sur sa diagonale.

$$D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

7. On définit une matrice triangulaire d'ordre m par une matrice carré qui possède un triangle composé de 0. Si la diagonale est également composée de 0 on dit que la diagonale est strictement triangulaire.

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

T_3 est triangulaire supérieure.

$$T_3' = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

T_3' est triangulaire strictement triangulaire.

1.3 Opérations sur les matrices

Addition
L'addition ou la soustraction de deux matrices de même dimension A et B est égale à la matrice C dont chaque coefficient est obtenu en additionnant les coefficient de la matrice A au coefficient correspondant de la matrice B.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

Multiplication d'une matrice par un scalaire
Le produit d'une matrice A par un scalaire λ est égale à une matrice B dont chaque coefficient est obtenu en multipliant les coefficients de A par λ.
$2.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 8 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Transposition d'une matrice
La transposée ${}^tM$ d'une matrice $M(n \times m)$ est la matrice $(m \times n)$ obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de la matrice M $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$
Alors ${}^tM = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Produit de matrices
Le produit d'un vecteur ligne par un vecteur colonne est égale à la somme des produits de chaque coefficient du vecteur ligne avec le coefficient correspondant du vecteur colonne.
$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 \times 5 + 3 \times 2 + (-1) \times 3 = 23$

Remarque : il s'agit du produit scalaire de deux vecteurs.

Le produit de la matrice $A(n \times m)$ avec la matrice $B(m \times p)$ est égale à la matrice $C(n \times p)$ où chaque coefficient c_{ij} est égal au produit scalaire de la ligne i de la matrice A avec la colonne j de la matrice B.
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 5 + 2 \times 2 + 0 \times 3 & 1 \times 1 + 2 \times 3 + 0 \times 5 \\ 4 \times 5 + 3 \times 2 - 1 \times 3 & 4 \times 1 + 3 \times 3 - 1 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 23 & 8 \end{pmatrix}$
Si A est une matrice de taille $n \times m$ et B une matrice de taille $(m \times p)$, alors les coefficients de la matrice $C = AB$ de taille $n \times p$ sont donnés par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Remarque : Le produit de matrices est :
- Elément neutre $A \times I_n = I_n \times A = A$
- Associatif : $A(B \times C) = (A \times B)C = A \times B \times C$
- Distributif : $A(B + C) = A \times B + A \times C$
- NON COMMUTATIF : $AB \neq BA$ en général.

Ecriture matricielle d'un système linéaire
Soit le système S linéaire d'ordre n
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
On pose $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$
$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$
et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$
On a l'écriture matricielle du système (S) est $MX = B$.

Inversion de matrice

Une matrice carrée M est **inversible** ou régulière si et seulement si il existe une matrice carrée, appelée matrice inverse notée M^{-1} telle que

$$M \times M^{-1} = M^{-1} \times M = I$$

où I est la matrice unité.
Si M n'est pas inversible on dit que M est singulière.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Montrer que $B = \begin{pmatrix} -0.5 & 1.5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Alors $A \times B = \begin{pmatrix} -2+3 & 6-6 \\ -1+1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On a le même résultat avec $B \times A$.

Définition : Soit une matrice carrée d'ordre 2 M. On appelle le determinant de la matrice le nombre réel det(M).

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors det($M$)$=ad - bc$

Propriété : Une matrice M est inversible si et seulement si son déterminant est différent de 0.

$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et det(M)$\neq 0$ alors $M^{-1} = \dfrac{1}{det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Puissance n-ième de matrice

On appelle puissance n-ième de matrice carrée M, la matrice M^n telle que

$$M^n = \overbrace{M \times M \cdots \times M}^{nfois}$$

Transformations du plan

Une translation $\vec{t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x; y)$ du pl ;an associe une image $M'(x'; y')$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$ se définit comme somme matriciel de deux matrices colonnes $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Propriété 1.1.
Pour les transformations géométriques planes suivantes, on définit la matrice de transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x,y)$ du plan, associe son point image $M'(x';y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisse on a $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- Pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées on a $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Pour une rotation de centre O d'angle θ on a $T = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
- Pour une homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}$,on a $T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Exemple :
Voir Application et méthode p 182