Chapitre 1 - Limites de fonctions

Terminales Spé Maths

1 Histoire des mathématiques

On peut considérer que le concept de limite est né avec le philosophe grec **Zénon d'Elée** au 4$^{\text{ème}}$ siècle avant notre ère. Il est l'auteur de célèbres paradoxes dont celui d'Achille et la tortue.
Aux 17$^{\text{ème}}$ et au 18$^{\text{ème}}$ siècles, les mathématiques ont une intuition claire de la notion de limite. Par exemple, Gottfried Leibniz, utilise des écritures telles que :

$$\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - ....).$$

Au 19$^{\text{ème}}$ siècle, le besoin de définir rigoureusement le concept de limite se fait sentir. Le mathématicien français **Augustin Cauchy** donne une place centrale à la notion de limite en analyse. Plus tard, le mathématicien allemand **Karl Weierstrass** surnommé le père de l'analyse moderne en donne la première définition précise et introduit la notation $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pour la limite d'une fonction f en x_0.

EXERCICE 1
Grand Oral Rechercher le paradoxe d'Achille et la tortue (un des **Paradoxes de Zénon**)

2 Limites de fonctions : définitions et premières propriétés

2.1 Limites en $+\infty$ et en $-\infty$

Définition 2.1.
Limite infinie à l'infini

- Une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

- Une fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty, A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

- On définit de façon analogue les limites infinies en $-\infty$. On les note

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty; \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

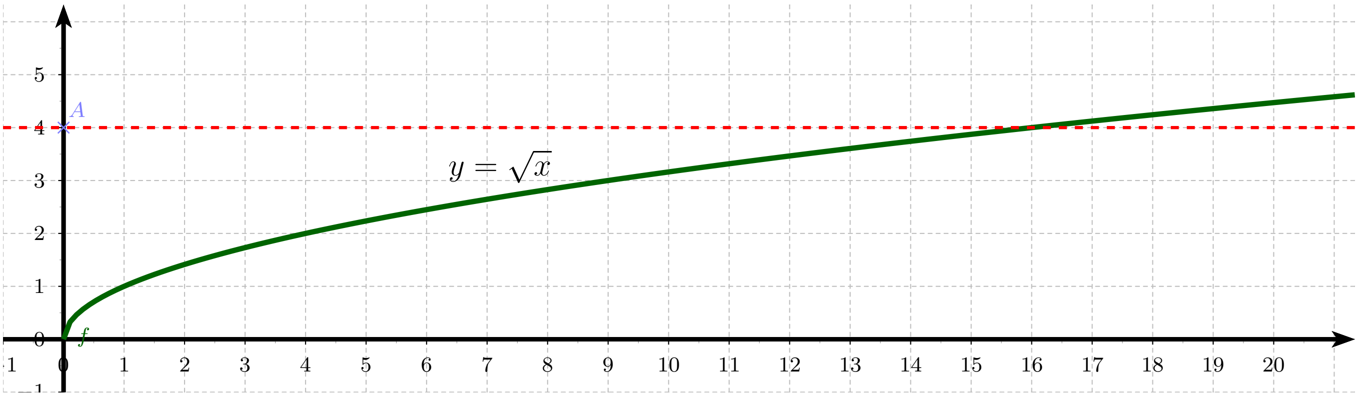
Remarque .
Ces définitions sont formalisées dans un langage mathématique :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$: Pour tout $A > 0$, il existe un réel m réel (dépendant de A à chercher) tel que si $x > m$ alors $f(x) > A$

Dans certains livres vous pouvez voir les notations suivantes (non demandées en terminale, mais anticipons sur vos études supérieures) :

$$\forall A > 0; \exists m > 0 : (x > m) \Rightarrow f(x) > A$$

- N° 37 p 178 : écrire dans le même formalisme les autres limites en $+\infty$ ou $-\infty$.



Propriété 2.1.
Soit n en entier supérieur ou égal à 1. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Démonstration. Montrons la limite de $\sqrt{x}$ en l'infini. Soit A un réel strictement positif.
A partir d'un rang $x > A^2$ alors $\sqrt{x} > A$ donc $\sqrt{x} \in]A; +\infty[$. Donc

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

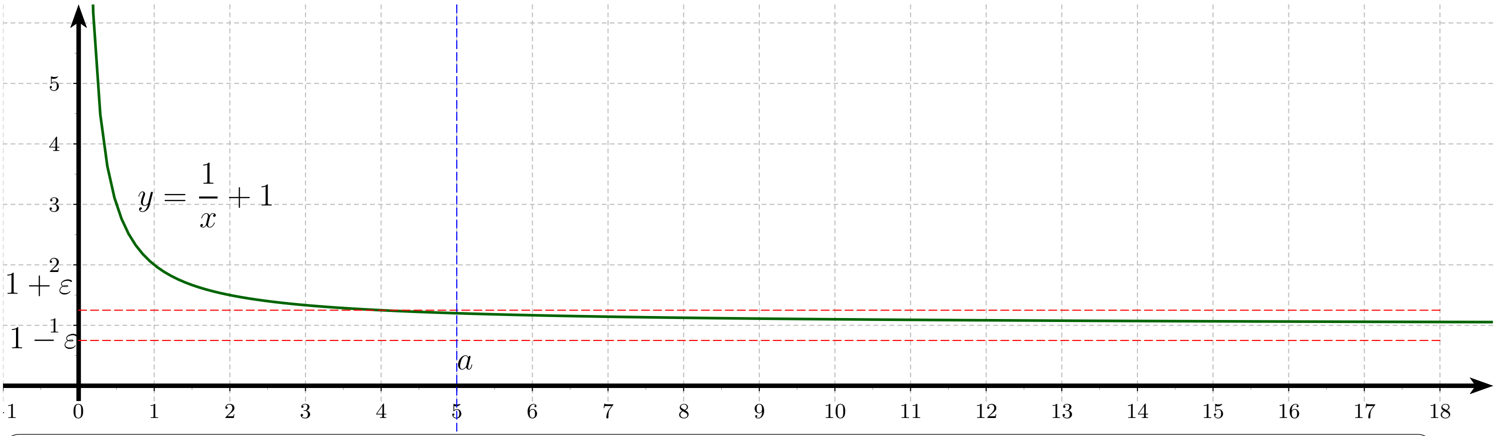
Les autres limites sont démontrées sur le cahier.

CQFD

Définition 2.2.
Soit une fonction f définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ telle qu'il existe un réel a pour lequel $[a; +\infty[\subset \mathcal{D}_f$
Soit l un nombre réel, dire que f tend vers la limite l quand x tend vers $+\infty$ signifie que quelque soit un ε donné strictement positif, il existe un rang $x_0 \geqslant a$ tel que pour tout x de $\mathcal{D}_f$, si $x > x_0$ alors $|f(x) - l| \leq \varepsilon$ On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

On définit de façon analogue la limite réelle de f en $-\infty$



Définition 2.3.
Lorsqu'une fonction f a pour limite un réel l en $+\infty$ ou en $-\infty$, on dit que la courbe représentation de f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'équation $y = l$.

Remarque .
Dans l'exemple précédent, la courbe représentative de f admet une asymptote en $+\infty$ d'équation $y = 1$

Exemple : :l'animation permet de comprendre la notion d'asymptote horizontale.

Propriété 2.2.
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

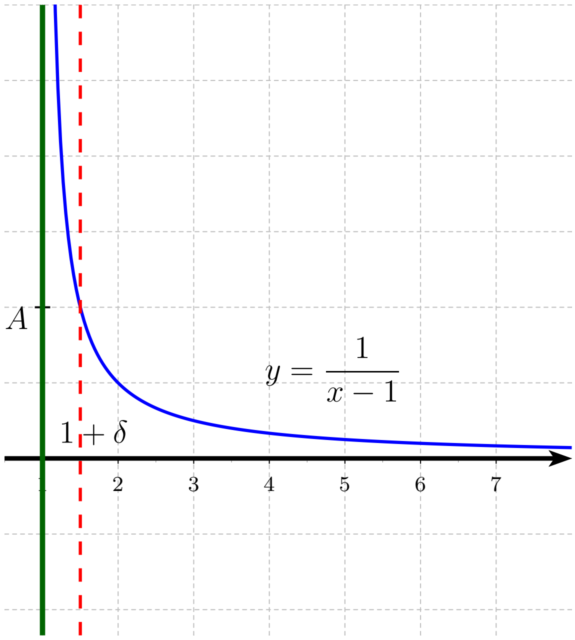
Démonstration. Démonstration en cours

CQFD

2.2 Limite en un réel

Définition 2.4.
Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$. La fonction f a pour limite $+\infty$ en a si tout intervalle de $\mathbb{R}$ du type $]A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a. On note alors : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
Quel que soit A, il existe un réel $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ si $|x - a| < \delta$ alors $f(x) > A$.

On définit de la même manière $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



Dans cet exemple la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

Propriété 2.3.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si n est pair $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si n est impair $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si n est impair $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.

Remarque .
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x)$ est appelée limite à droite en a.
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x)$ est appelée limite à gauche en a.

Définition 2.5.
Lorsque la limite de f en a réel a est $+\infty$ ou$-\infty$, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Remarque .
Dans l'exemple ci-dessus, la droite d'équation $x = 1$ est une asymptote à la courbe.

Exemple : L'animation permet de comprendre la notion d'asymptote verticale.

Définition 2.6.
Soit l un nombre réel. Une fonction a pour limite l en a si tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ si $|x - a| < \delta$ alors $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Propriété 2.4.
Soit a un réel,

- Si $a \geqslant 0$; $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$
- Si P est un polynôme, alors $\lim\limits_{x \to a} P(x) = P(a)$
- Si F est une fonction rationnelle, (quotient de deux polynômes) définie en a, alors $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} \cos(x) = \cos(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$
- $\lim\limits_{x \to a} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a$

EXERCICE 2
En vous aidant du graphique, donnez les équations réduites des asymptotes à la courbe.

EXERCICE 3
asymptote et limite 1

EXERCICE 4
asymptote et limite 2

EXERCICE 5
Limite de fonctions usuelles niveau 1 La fonction ln sera étudiée plus tard dans l'année

EXERCICE 6
Limite de fonctions usuelles niveau 2 La fonction ln sera étudiée plus tard dans l'année

EXERCICE 7
Limite d'autres fonctions usuelles La fonction ln sera étudiée plus tard dans l'année

EXERCICE 8
Limite d'autres fonctions usuelles La fonction ln sera étudiée plus tard dans l'année

3 Opérations sur les limites

Propriété 3.1.

— Limite d'une somme :

f	g	$f+g$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$
ℓ	∞	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Forme Indéterminée

— Limite d'un produit :

f	g	fg
ℓ	ℓ'	$\ell\ell'$
$\ell\neq0$	∞	∞
∞	∞	∞
0	∞	Forme Indéterminée

— Limite d'un quotient :

f	g	f/g
ℓ	$\ell'\neq0$	ℓ/ℓ'
$\ell\neq0$	0	∞
∞	0	∞
ℓ	∞	0
0	∞	0
0	0	Forme Indéterminée
∞	∞	Forme Indéterminée

Remarque .
- ∞ peut signifier $+\infty$ ou $-\infty$. Les règles du signe d'un produit ou d'un quotient demeurent.
- Pour la limite de la différence $f-g$, on considère la limite de la somme $f+(-g)$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto (1-x)\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

EXERCICE 9

calcul de limites à l'infini

EXERCICE 10

calcul de limites en un réel

4 Limites de composée de fonctions

4.1 Fonctions composées

Une composée de deux fonctions correspond à un enchaînement de deux fonctions l'une après l'autre. Par exemple, composons la fonction $f : x \mapsto 1-x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$. On peut ainsi schématiser :

$$x \underset{f}{\mapsto} 1-x \underset{g}{\mapsto} \sqrt{1-x}.$$

Cependant, on voit que la fonction g ne peut s'appliquer que si l'ensemble des images par la fonction f est inclus dans l'ensemble de définition de g.
Ainsi, pour appliquer ici la racine carrée, il faut que $1-x \geqslant 0$ c'est-à-dire que $x \leqslant 1$.
La composée existe donc dans le schéma suivant où on précise les ensembles de départ et d'arrivée pour f :

$$\begin{array}{ccccc}]-\infty\ ;\ 1] & \to & [0\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \underset{f}{\mapsto} & 1-x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{1-x} \end{array}$$

En composant f suivie de g, on a ainsi défini sur $]-\infty\ ;\ 1]$ la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x}$.

Définition 4.1.
Soit f une fonction définie sur E et à valeurs dans F, et soit g une fonction définie sur F.
La composée de f suivie de g est la fonction notée $\boldsymbol{g \circ f}$ définie sur E par $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Remarque .
Il ne faut pas confondre $g \circ f$ et $f \circ g$ qui sont, en général, différentes.

Exemple :

En reprenant f et g de l'exemple précédent, définissons $f \circ g$.
La composée de g suivie de f est possible en partant de l'ensemble de définition de g :

$$\begin{array}{ccccc} [0\ ;\ +\infty[& \to & [0\ ;\ +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \underset{g}{\mapsto} & \sqrt{x} & \underset{f}{\mapsto} & 1-\sqrt{x} \end{array}$$

En composant g suivie de f, on a ainsi défini sur $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction $x \mapsto 1-\sqrt{x}$.

4.2 Théorème de composition des limites

Théorème 4.1.
Soit h la composée de la fonction f suivie de g et α, β et γ trois réels ou $\pm\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \beta$ et $\lim\limits_{x\to\beta} g(x) = \gamma$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} h(x) = \gamma$.

Exemple :

Déterminons la limite en $-\infty$ de la fonction $g \circ f$ de l'exemple précédent.
La composée de $f : x \mapsto 1-x$ suivie de $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est $h : x \mapsto \sqrt{1-x}$ définie sur $]-\infty\ ;\ 1]$.
Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} (1-x) = +\infty$ (par somme) et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ (limite de référence).
Donc, d'après le théorème de composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$.

Déterminer une limite de fonction

On applique les propriétés d'opérations sur les limites.

Si la limite est indéterminée, « $+\infty + (-\infty)$ », « $0 \times \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » ou « $\dfrac{0}{0}$ », on essaye de :

- factoriser par le terme prépondérant ;
- multiplier par la quantité conjuguée [1] si des racines carrées interviennent ;
- effectuer un changement de variable (voir théorème de composition des limites).

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1}$
3. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2}$

Ces limites sont indéterminées (respectivement formes « $\infty - \infty$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $\dfrac{0}{0}$ »).

1. On multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjuguée de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$:
$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \dfrac{\left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$.
Or, par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.
Et, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}\right) = +\infty$. Donc, par inverse : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = 0$.
2. Divisons le numérateur et le dénominateur par x^2. Alors, $\dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 1} = \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}}$.
Or, par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right) = 1$.
Donc, par quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = 2$.
3. Changeons de variable en posant $u = \sqrt{x}$. Si x tend vers 4, alors u tend vers 2.
$\dfrac{x-4}{\sqrt{x} - 2} = \dfrac{u^2 - 4}{u - 2} = \dfrac{(u+2)(u-2)}{u-2} = u + 2$ pour $u \neq 2$. Donc, par somme : $\lim\limits_{u\to 2}(u+2) = 4$.

EXERCICE 11

1. limites en $+\infty$ et $-\infty$ des Fonctions polynômes
   (a) $5x^3 + 2x^2 - 6x + 5$
   (b) $-4x^5 + 2x^2 + 10$
2. Fonctions rationnelles
   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2 + x - 3}{3x + 4}$
   (b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{8x^3 - 5x + 4}{3x^3 + 2x^2 - 1}$

EXERCICE 12

Limites de fonctions composées

1. on désigne généralement par $a - b\sqrt{c}$ la quantité conjuguée de $a + b\sqrt{c}$

5 Limites et comparaison

5.1 Théorème de comparaison

Théorème 5.1.
Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ +\infty[$ de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]-\infty\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Soit f et g deux fonctions telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur un intervalle $]\alpha\ ;\ \beta[$ de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in]\alpha\ ;\ \beta[$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

Exemple
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^4+1}$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.

Pour tout x,$x^4 < x^4+1$
La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $\sqrt{x^4} < \sqrt{x^4+1} \Leftrightarrow x^2 < h(x)$.
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$

5.2 Théorème d'encadrement dit « des gendarmes »

Théorème 5.2.
Soit deux réels α et ℓ et trois fonctions f, g et h telles que, pour $x > \alpha$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

Remarque .
On a, comme pour le théorème de comparaison précédent, deux théorèmes analogues lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers un réel x_0.

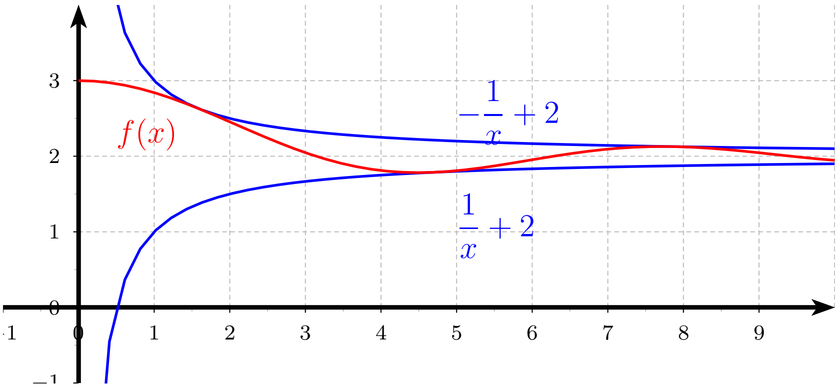
Démonstration. Par hypothèse, les fonctions f et h ont pour limite ℓ.
Considérons un intervalle ouvert I qui contient ℓ. Il contient toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x > a$ et toutes les valeurs $h(x)$ dès que $x > b$. Notons $c = \max(a; b)$, I contient donc toutes les valeurs $f(x)$ et $h(x)$ dès que $x > c$.
Comme pour tout $x \in I$,$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, J contient toutes les valeurs $g(x)$ dès que $x > c$. C'est vrai pour tout intervalle ouvert contenant ℓ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.

CQFD

Exemple
Soit la fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ telle que pour tout $x \in I$,

$$-\frac{1}{x} + 2 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x} + 2$$

Sachant que, par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x} + 2 = 2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} + 2 = 2$; on a d'après le théorème d'encadrement "des gendarmes" $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$



EXERCICE 13

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin(x) + 3}{x}$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + \cos(x)}{x - 1}$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2 + \cos(x)}{x - \sin(2x)}$

corrigé

5.3 Théorème des croissances comparées

Théorème 5.3.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0$

Démonstration. Démonstration faite en cours. CQFD

EXERCICE 14

Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + x}{e^x - x^2}$

Corrigé