1. Si $q > 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. Si $-1 < q < 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Inégalité de Bernoulli : pour tout $a > 0$ et pour tout entier $n \neq 0$; $(1+a)^n \geq 1 + na$

Démonstration.

1. $q > 1$ donc il existe $a > 0$ tel que $q = 1 + a$, d'après l'inégalité de Bernoulli, $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$
   Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + na = +\infty$
   Donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$
2. $-1 < q < 1 \Leftrightarrow |q| < 1$ donc $\dfrac{1}{|q|} > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{|q|}\right)^n = +\infty$.
   Par inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$

CQFD

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un rang n_0. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Démonstration. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ donc pour tout $A > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, on a $u_n > A$.
Donc pour tout $n > n_0 ; v_n \geqslant u_n > A$.

Autrement dit, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

CQFD