

Chap 11 - Equations différentielles

Terminales Spé Maths

Définition 0.1.

Une équation différentielle d'ordre n est une équation :

- dont l'inconnue est une fonction y de variable x , n fois dérivable.
- liant y et certaines de ses dérivées : $y'; y''; \dots; y^{(n)}$

Résoudre une équation différentielle c'est déterminer l'ensemble des fonctions y dérivables sur un intervalle I inclus dans \mathbb{R} qui vérifient l'équation.

Exemple :

- Equation du premier ordre : $y' = 2y + 5$; $y' = y^2$
- Equation du second ordre $y'' + 4y = 0$; $x^2 y'' - 2y' - 3y + 2x = 0$.

1 Equation homogène $y' = ay$

Théorème 1.1.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme $y(x) = ke^{ax}$; $k \in \mathbb{R}$
Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$

Démonstration. Les fonctions de la forme $y(x) = ke^{ax}$ sont bien solutions de l'équation car $y'(x) = kae^{ax} = ay(x)$.

Réciproquement supposons qu'il existe g solution de l'équation différentielle, posons $h(x) = g(x)e^{-ax}$, h est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ; $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - g(x)ae^{-ax} = ag(x)e^{-ax} - g(x)ae^{-ax} = 0$

Donc $h(x) = k$ constante $\Leftrightarrow g(x)e^{-ax} = k \Leftrightarrow g(x) = ke^{ax}$

De plus, $f(x_0) = y_0$ donc $ke^{ax_0} = y_0 \Leftrightarrow k = y_0 e^{-ax_0}$ est unique $f(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$

CQFD

2 Equation linéaire $y' = ay + b$

Théorème 2.1.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont de la forme $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$; $k \in \mathbb{R}$
Soient $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ il existe une unique solution f qui vérifie $f(x_0) = y_0$

Exemple :

Déterminer la solution y de l'équation $y' = -0.5y + 1$ et $y_0 = 3$ pour $x_0 = 0$

f est de la forme $f(x) = ke^{-0.5x} - \frac{-1}{-0.5} = ke^{-0.5x} + 2$
 $f(0) = 3 \Leftrightarrow ke^0 + 2 = 3 \Leftrightarrow k = 1$.

Donc la solution est $f(x) = e^{-0.5x} + 2$.

3 Equation de la forme $y' = ay + f(x)$

Théorème 3.1.

Pour résoudre une équation du type $y' = ay + f(x)$ où f est une fonction continue sur I

- On cherche une solution particulière
- On détermine l'ensemble des solutions en se ramenant à l'équation homogène $y' = ay$

Exemple :

Soit (E) l'équation différentielle $y' - 2y = 1 - 6x$

1. Le second membre de l'équation (E) est une fonction affine donc la solution particulière s'écrit $y_0 = ax + b$ donc $y'_0 - 2y_0 = 1 - 6x \Leftrightarrow a - 2(ax + b) = 1 - 6x \Leftrightarrow -2ax + a - 2b = 1 - 6x$.

Par identification, on a $-2a = -6 \Leftrightarrow a = 3$ et $a - 2b = 1 \Leftrightarrow b = 1$ donc $y_0(x) = 3x + 1$ est une solution particulière de (E).

2. y et y_0 solution de (E) donc $y' - 2y = 1 - 6x$ et $y'_0 - 2y_0 = 1 - 6x$ donc par soustraction $(y' - y'_0) - 2(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow (y' - y'_0) = 2(y - y_0)$
D'après la partie précédente $y(x) - y_0(x) = ke^{2x} \Leftrightarrow y(x) = ke^{2x} + 3x + 1$