C.1

1. Réponse b

Il y a deux solutions à cette équation :

- L'image de l'intervalle $[0;2]$ est :
  $f([0;2]) = [-5;4]$
  De plus, f est strictement croissante sur cet intervalle ; on en déduit que la valeur -2 est atteinte une fois.
- L'image de l'intervalle $[2;+\infty[$ est :
  $f([2;+\infty[) =]-4{,}5;4]$
  La fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle ; on en déduit que la valeur -2 est atteinte une fois.

2. Réponse b

Le tableau de variations montre que la fonction atteint son maximum 4 pour la valeur $x=2$.

La fonction f n'admet pas de maximum mais deux maximums locaux ; le maximum d'un fonction doit être global sur son ensemble de définition.

3. Réponse a

La fonction f admet un maximum en 2 ; la fonction étant dérivable en 2, on en déduit la valeur suivante du nombre dérivée :
$f'(2) = 0$

La courbe $\mathscr{C}$ admet pour tangente au point d'abscisse 2, la droite d'équation :
$y = f'(2)\cdot(x-2) + f(2)$

$y = 0\cdot(x-2) + 4$

$y = 4$

C.2

1. **Faux :**

Respectivement, les intervalles :
$]-\infty;-2[\quad ; \quad]-2;1[\quad ; \quad]\alpha;+\infty[$
ont pour images les intervalles
$]-\infty;+\infty[\quad ; \quad]-1;+\infty[\quad ; \quad]0;+\infty[$.

On remarque que la valeur 1 appartient aux trois intervalles images : on peut conjecturer que la fonction f admet au moins 3 antécédents du nombre 1.

2. **On ne peut pas conclure :**

La donnée d'un tableau n'est pas suffisamment précis pour savoir à partir de quelle valeur β, la fonction devient négative ; rien ne nous indique qu'à partir de -5 *(ou avant)* la fonction f devient négative ou nulle.

3. **Faux :**

- Prouvons l'existence de $a\in]-2;1]$ tel que $f(a)=2$.
  On a les limites aux bornes de $]-2;1[$:
  $\lim_{x\mapsto -2^+} f(x) = +\infty \quad ; \quad f(1) = -1$
  De plus :
  - la fonction f est continue sur $]-2;1]$
  - la fonction f est strictement décroissante sur $]-2;1]$
  - le nombre 2 est compris entre les limites aux bornes de l'intervalle $]-2;1]$

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on l'existence d'un réel a tel que :
  $f(a)=2$
- On a : $f(\alpha) = 0$

On a : $-2<a<1 \quad ; \quad a<\alpha \quad ; \quad f(a)>f(\alpha)$

4. **Vrai :**

D'après le tableau de variation, la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty;-2[$; on en déduit que pour tout nombre x appartenant à $]-\infty;-2[$, le nombre dérivée de f est négatif :
$x\in]-\infty;-2[\implies f'(x)\leqslant 0.$

C.3

a. L'expression $3x^2+4x+1$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times3\times1 = 16-12 = 4$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2}{2\times3} = \frac{-6}{6} = -1 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2}{2\times3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \left\{-1\,;-\frac{1}{3}\right\}$

b. L'expression $3x^2-4x+2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times3\times2 = 16-24 = -8$

Le discriminantétant strictement négative, cette équation n'admet pas de solution.

c. L'expression $-x^2+2x+3$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 2^2-4\times(-1)\times3 = 4+12 = 16$
On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2\times(-1)} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2\times(-1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :
$\mathcal{S} = \{-1\,;3\}$

d. L'expression $2x^2-4x+2$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times2\times2 = 16-16 = 0$

Ainsi, l'équation admet une unique solution :
$-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2\times2} = 1$

e. L'expression $-3x^2+3x+3$ admet pour discriminant :
$\Delta = b^2-4ac = 3^2-4\times(-3)\times3 = 9+36 = 45$
On a la simplification suivante :
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = 3\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-3\sqrt{5}}{2\times(-3)} = \frac{-3-3\sqrt{5}}{-6} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+3\sqrt{5}}{2\times(-3)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

f) L'expression $-x^2+4x+3$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2-4ac = 4^2-4\times(-1)\times3 = 16+12 = 28$$

On a la simplification suivante :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{28} = \sqrt{4\times7} = 2\sqrt{7}$$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-2\sqrt{7}}{2\times(-1)} = \frac{-4-2\sqrt{7}}{-2} = 2+\sqrt{7}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+2\sqrt{7}}{2\times(-1)} = \frac{-4+2\sqrt{7}}{-2} = 2-\sqrt{7}$$

Ainsi, cette équation admet pour ensemble de solutions :

$$\mathcal{S}=\left\{2-\sqrt{7}\ ;\ 2+\sqrt{(7}\right\}$$

C.4

1) a) La fonction f admet pour dérivée la fonction f' dont l'expression est :

$$f'(x) = 3x^2-4x+1$$

b) Pour déterminer le signe de f', il est nécessaire d'obtenir les racines de ce polynôme du second degré ; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = (-4)^2-4\times3\times1 = 16-12 = 4$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{4} = 2$

Le discriminant de ce polynôme est strictement positif ; on en déduit qu'elle admet deux racines :

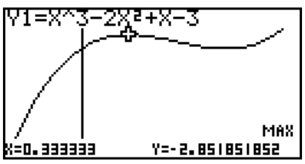
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)-2}{2\times3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

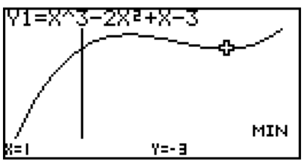
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-4)+2}{2\times3} = \frac{6}{6} = 1$$

Le coefficient du terme du second degré est positif ; on en déduit le tableau de signes suivant de $f'(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2) La calculatrice permet d'obtenir les valeurs approchées suivantes :





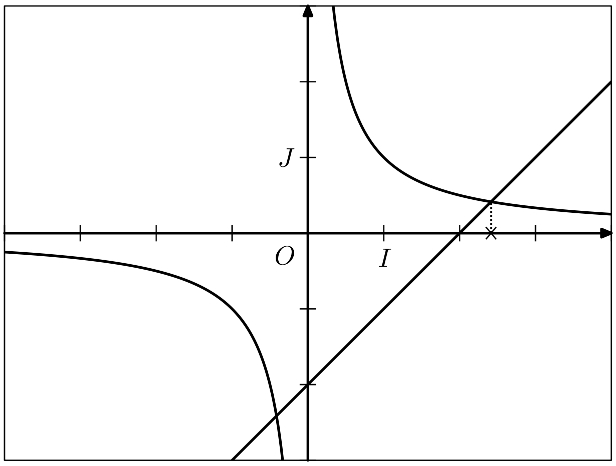
Ainsi, on obtient le tableau de variations suivant :

x	-∞		$\frac{1}{3}$		1		+∞
Variation de f	-∞	↗	$-2,85$	↘	-3	↗	+∞

3) D'après le tableau de variation, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

C.5

1) Graphiquement, il semblerait que l'équation (E) admette une unique solution sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$: c'est l'abscisse du point d'intersection de l'hyperbole représentative de la fonction inverse avec la droite d'équation $y=x-2$.



2) a) La fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$g'(x) = 1-\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1+\frac{1}{x^2}$$

g' est défini par la somme de deux termes strictement positifs sur $]0\,;+\infty[$: g' est strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

On en déduit que g' est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

b) On a les deux valeurs :

- $g(1) = 1-2-\frac{1}{1} = 1-2-1 = -2$
- $g(4) = 4-2-\frac{1}{4} = 4-2-0{,}25 = 1{,}75$

Ainsi, la fonction g admet le tableau de variations suivant :

x	0		1		4		$+\infty$
Variation de g	‖	↗	-2	↗	1,75	↗	

D'après le tableau de variations, on peut conjecturer que la fonction g ne s'annule qu'une fois $]0\,;+\infty[$:

- Sur $]0\,;1]$: la fonction a pour maximum -2 et ne peut s'annuler.
- Sur $[1\,;4]$: la fonction passe d'une valeur négative à une valeur positive. On peut conjecturer qu'elle s'annule une fois.

- Sur $\left[4\,;+\infty\right]$: la fonction a pour minimum 1,75 et ne peut s'annuler.

Ainsi, il existe une seule solution α à l'équation :

$$g(x)=0$$
$$x-2-\frac{1}{x}=0$$
$$x-2=\frac{1}{x}$$

Ainsi, l'équation (E) admet une unique solution.

(3) Résolvons l'équation suivante sur $\left]0\,;+\infty\right[$:

$$\frac{1}{x}=x-2$$
$$x\cdot\frac{1}{x}=x\cdot\left(x-2\right)$$
$$1=x^2-2{\cdot}x$$
$$0=x^2-2{\cdot}x-1$$

Cherchons les racines de ce polynôme du second degré ; son discriminant a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-2)^2-4{\times}1{\times}(-1)=4+4=8$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux solutions suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)-2\sqrt{2}}{2\cdot 1}=\frac{2-2\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-2)+2\sqrt{2}}{2\cdot 1}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$$

Or, ne travaillant que sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$, on en déduit que l'équation (E) n'admet qu'une seule solution :

$$\mathcal{S}=\left\{1+\sqrt{2}\right\}$$

C.6

(a) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=1$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=1$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto1^+}f(x)=+\infty$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}g(x)=\frac{1}{2}$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=\frac{1}{2}$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto-1^+}g(x)=+\infty$

C.7

(a) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=2$ (b) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=0$

(c) $\lim\limits_{x\mapsto1^-}f(x)=-\infty$ (d) $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}g(x)=0$

(e) $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)=2$ (f) $\lim\limits_{x\mapsto-1^-}g(x)=-1$

C.8

(a) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto1^+}x^2-3x+5=3\quad;\quad\lim_{x\mapsto1^+}x-1=0^+$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto1^+}\frac{x^2-3x+5}{x-1}=+\infty$$

(b) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto1^+}5-x=4\quad;\quad\lim_{x\mapsto1^+}1-x=0^-$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto1^+}\frac{5-x}{1-x}=-\infty$$

(c) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto0^-}x^2+x+1=1\quad;\quad\lim_{x\mapsto0^-}x=0^-$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto0^-}\frac{x^2+x+1}{x}=-\infty$$

(d) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto0^+}x-1=-1\quad;\quad\lim_{x\mapsto0^+}-x^3=0^-$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{x-1}{-x^3}=+\infty$$

C.9

(a) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}2{\cdot}x^2=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}3{\cdot}x=+\infty$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}2{\cdot}x^2+3{\cdot}x=+\infty$$

(b) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}-3{\cdot}x^3=-\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{x}=0$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}-3{\cdot}x^2+\frac{2}{x}=-\infty$$

(c) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}5{\cdot}x^2=+\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}-3{\cdot}x^3=+\infty$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}5{\cdot}x^2-3{\cdot}x^3=+\infty$$

(d) On a les transformations algébriques suivantes :

$$x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2=x^2+2{\cdot}x-\left(x^2+4{\cdot}x+4\right)$$
$$=x^2+2{\cdot}x-x^2-4{\cdot}x-4=-2{\cdot}x-4$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}-2{\cdot}x=-\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}-4=-4$$

On a en déduit la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2=\lim_{x\mapsto+\infty}-2{\cdot}x-4=-\infty$$

(e) On a la factorisation suivante :

$$x^2+3{\cdot}x=x{\cdot}(x+3)$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}x=-\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}x+3=-\infty$$

On a en déduit la valeur de la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}x^2+3{\cdot}x=\lim_{x\mapsto+\infty}x{\cdot}(x+3)=+\infty$$

(f) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}x^3=-\infty\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}-2{\cdot}x^2=-\infty$$

On a en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}x^3-2{\cdot}x^2=-\infty$$

C.10

(1) (a) On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}=\frac{x^2{\cdot}\left(3+\frac{5}{x}\right)}{x^3{\cdot}\left(3+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{3+\frac{5}{x}}{x{\cdot}\left(3+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}$$

(b) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}3+\frac{5}{x}=3\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}x{\cdot}\left(3+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{x{\cdot}\left(3+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=0$$

(2) Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :

$$\frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2} = \frac{x^3\cdot\left(4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(2-\dfrac{2}{x}\right)} = \frac{4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{2}{x}}$$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 4+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}=4$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2-\frac{2}{x}=2$

On a en déduit la limite de la fonction g en $+\infty$:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{2}{x}} = \frac{4}{2} = 2$$

C.11

1 Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :

- $f(x)=\dfrac{2x^3-x}{x^3+2x^2}=\dfrac{x^3\cdot\left(2-\dfrac{x}{x^3}\right)}{x^3\cdot\left(1+\dfrac{2x^2}{x^3}\right)}=\dfrac{x^3\cdot\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3\cdot\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}$
- $f(x)=\dfrac{2x^3-x}{x^3+2x^2}=\dfrac{x\cdot\left(2x^2-1\right)}{x\cdot\left(x^2+2x\right)}=\dfrac{2x^2-1}{x^2+2x}=\dfrac{2x^2-1}{x\cdot(x+2)}$

2 L'expression initiale de $f(x)$ représente une forme indéterminée pour les deux limites demandées. Il faut utiliser pour chacune des limites une des deux expressions proposées ne présentant de forme indéterminée pour la limite considérée :

- On a les deux limites suivantes :
  $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2-\frac{1}{x^2}=2$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1+\frac{2}{x}=1$
  On en déduit la limite suivante :
  $$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$
- On a les deux limites suivantes :
  $\lim\limits_{x\mapsto0^+} 2x^2-1=-1$; $\lim\limits_{x\mapsto0^+} x\cdot(x+1)=0^+$
  On en déduit la limite suivante :
  $$\lim_{x\mapsto0^+} f(x) = \lim_{x\mapsto0^+} \frac{2x^2-1}{x\cdot(x+2)} = -\infty$$

C.12

a Le dénominateur du quotient étudié est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=(-1)^2-4\times2\times(-6)=1+48=49$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{49}=7$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)-7}{2\times2}=\frac{1-7}{4}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-(-1)+7}{2\times2}=\frac{1+7}{4}=\frac{8}{4}=2$$

Ce polynôme admet la forme factorisée suivante :
$2\cdot x^2-x-6=2\cdot\left(x+\dfrac{3}{2}\right)\cdot(x-2)$
$=(2x+3)(x-2)$

On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}=\frac{2-x}{(2x+3)(x-2)}=\frac{-(x-2)}{(2x+3)(x-2)}$$
$$=\frac{-1}{2x+3}$$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto2^+} -1=-1$; $\lim\limits_{x\mapsto2^+} 2x+3=7$

On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto2^+}\frac{2-x}{2\cdot x^2-x-6}=\lim_{x\mapsto2^+}\frac{-1}{2x+3}=\frac{-1}{7}=-\frac{1}{7}$$

b On remarque que le dénominateur du quotient étudié s'annule en 3 :
$2\times3^2-15\times3+27=2\times9-45+27=18-45+27$
$=45-45=0$

Pour établir la factorisation :
$2\cdot x^2-15\cdot x+27=(x-3)(2x-9)$
Il suffit de développer l'expression :
$(x-3)(2x-9)=2x^2-9x-6x+27$
$=2x^2-15x+27$

On a les manipulations algébriques suivantes :
$$\frac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}=\frac{x-3}{(x-3)(2x-9)}=\frac{1}{2x-9}$$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto3^-} 1=1$; $\lim\limits_{x\mapsto3^-} 2x-9=-3$

On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto3^-}\frac{x-3}{2\cdot x^2-15\cdot x+27}=\lim_{x\mapsto3^-}\frac{1}{2x-9}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3}$$

c Le numérateur du quotient étudié est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4\cdot a\cdot c=7^2-4\times(-3)\times(-4)=49-48=1$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-7-1}{2\times(-3)}=\frac{-8}{-6}=\frac{4}{3}$$
$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}=\frac{-7+1}{2\times(-3)}=\frac{-6}{-6}=1$$

Le numérateur admet la factorisation suivante :
$-3\cdot x^2+7\cdot x-4=-3\cdot\left(x-\dfrac{4}{3}\right)\cdot(x-1)$
$=(4-3x)(x-1)$

On a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}=\frac{(4-3x)(x-1)}{(x-1)^2}=\frac{4-3x}{x-1}$$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto1^-} 4-3x=1$; $\lim\limits_{x\mapsto1^-} x-1=0^-$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto1^-}\frac{-3\cdot x^2+7\cdot x-4}{(x-1)^2}=\lim_{x\mapsto1^-}\frac{4-3x}{x-1}=-\infty$$

d Les deux polynômes définissant le numérateur et le quotient du numérateur s'annule en -2 : $(x+2)$ est un facteur commun à ces deux polynômes.

Etablissons les deux factorisations suivantes :
- $3\cdot x^2+5\cdot x-2=(x+2)(3x-1)$
  On a le développement :
  $(x+2)(3x-1)=3x^2-x+6x-2=3x^2+5x-2$

- $x^2+7{\cdot}x+10=(x+2)(x+5)$

  On a le développement suivant :
  $(x+2)(x+5)=x^2+5x+2x+10=x^2+7x+10$

On a la simplification du quotient :
$\dfrac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x-2}{x^2+7{\cdot}x+10}=\dfrac{(x+2)(3x-1)}{(x+2)(x+5)}=\dfrac{3x-1}{x+5}$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-2^+}3x-1=-7\ \ ;\ \ \lim\limits_{x\mapsto-2^+}x+5=3$

On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto-2^+}\dfrac{3{\cdot}x^2+5{\cdot}x-2}{x^2+7{\cdot}x+10}=\lim\limits_{x\mapsto-2^+}\dfrac{3x-1}{x+5}=\dfrac{-7}{3}=-\dfrac{7}{3}$

C.13

1. Le dénominateur du quotient définissant l'image $f(x)$ d'un nombre x par la fonction f est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-2)^2-4{\times}1{\times}5=4-20=-16$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme n'admet aucun racine.

Le dénominateur de ce quotient ne s'annulant jamais, on a : $\mathcal{D}_f=\mathbb{R}$.

2. a. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x)=\frac{x^2+4x-1}{x^2-2x+5}=\frac{x^2{\cdot}\Big(1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}\Big)}{x^2{\cdot}\Big(1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}\Big)}=\frac{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}$$

Déterminons la limite de la fonction f en $+\infty$:
On a les deux limites :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}=1\ \ ;\ \ \lim\limits_{x\mapsto+\infty}1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}=1$

On en déduit la valeur de la limite :
$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{5}{x^2}}=\frac{1}{1}=1$$

On en déduit la limite de la fonction f en $-\infty$:
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}f(x)=1$

b. La fonction f admet une seule asymptote : la droite $y=1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. a. L'expression de la fonction f est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x^2+4x-1\ \ ;\ \ v(x)=x^2-2x+5$
qui admettent pour dérivées les fonctions :
$u'(x)=2x+4\ \ ;\ \ v'(x)=2x-2$
Ainsi, la dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{u'(x){\cdot}v(x)-u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}\\
&=\frac{(2x+4){\cdot}(x^2-2x+5)-(x^2+4x-1){\cdot}(2x-2)}{\big(x^2-2x+5\big)^2}\\
&=\frac{\big(2x^3-4x^2+10x+4x^2-8x+20\big)-\big(2x^3-2x^2+8x^2-8x-2x+2\big)}{\big(x^2-2x+5\big)^2}\\
&=\frac{\big(2x^3+2x+20\big)-\big(2x^3+6x^2-10x+2\big)}{\big(x^2-2x+5\big)^2}\\
&=\frac{2x^3+2x+20-2x^3-6x^2+10x-2}{\big(x^2-2x+5\big)^2}\\
&=\frac{-6x^2+12x+18}{\big(x^2-2x+5\big)^2}\end{aligned}$$

b. Pour dresser le tableau de signes de $f'(x)$, il suffit d'étudier le signe du numérateur du quotient définissant son expression car le dénominateur est strictement positif.
Le polynôme définissant son numérateur a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=12^2-4{\times}(-6){\times}18$
$144+432=576$
On a la simplification suivante : $\sqrt{576}=24$
Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\dfrac{-12-24}{2{\times}(-6)}=\dfrac{-36}{-12}=3$

$x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\dfrac{-12+24}{2{\times}(-6)}=\dfrac{12}{-12}=-1$

Ainsi, on obtient le tableau de signes de la fonction dérivée f' :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	-∞		-1		3		$+\infty$
Variation de f	1	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	1

4. On a les deux valeurs :

- $f(1)=\dfrac{1^2+4{\times}1-1}{1^2-2{\times}1+5}=\dfrac{1+4-1}{1-2+5}=\dfrac{4}{4}=1$
- $f'(1)=\dfrac{-6{\times}1+12{\times}1+18}{\big(1^2-2{\times}1+5\big)^2}=\dfrac{-6+12+18}{(1-2+5)^2}$
  $=\dfrac{24}{4^2}=\dfrac{24}{16}=\dfrac{3}{2}$

L'équation (Δ) a pour équation réduite :

$y = f'(1)\cdot(x-1) + f(1)$

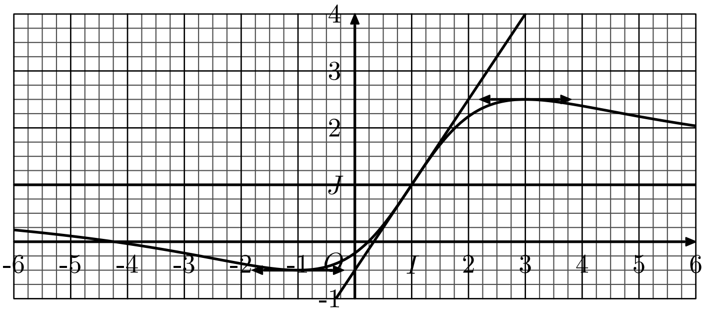
$y = \dfrac{3}{2}\cdot(x-1)+1$

$y = \dfrac{3}{2}\cdot(x-1)+1$

$y = \dfrac{3}{2}\cdot x - \dfrac{3}{2}+1$

$y = \dfrac{3}{2}\cdot x - \dfrac{1}{2}$

5. Voici la représentation de la droite (Δ), de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de son asymptote :



C.14

1. Pour que ce quotient soit définit, il faut que son dénominateur soit non-nul ; cherchons les valeurs annulant le dénominateur :

$e^x - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad e^x = 1 \quad\Longrightarrow\quad x = 0$

L'ensemble de définition est :

$\mathcal{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\} = \mathbb{R}^*$

2. La fonction f est écrit sous la forme $\dfrac{1}{u}$ où :

$u(x) = e^x - 1 \quad ; \quad u'(x) = e^x$

La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$f'(x) = -\dfrac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = -\dfrac{e^x}{\big(e^x-1\big)^2}$

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur de la fonction est strictement positif ; on en déduit que la fonction f' est strictement négative sur $\mathcal{D}$: la fonction f est strictement décroissante sur son ensemble de définition.

On a les limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty} \frac{1}{e^x-1} = -1$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{e^x-1} = 0$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} f(x) = \lim_{x\mapsto0^-} \frac{1}{e^x-1} = -\infty$
- $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^+} f(x) = \lim_{x\mapsto0^+} \frac{1}{e^x-1} = +\infty$

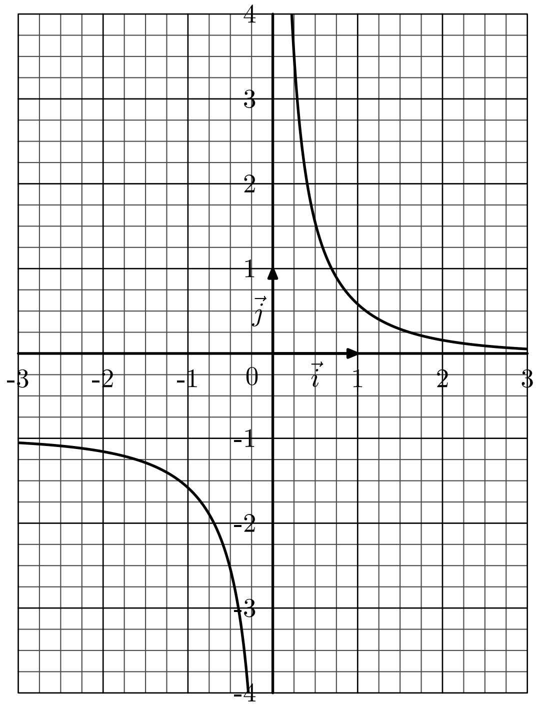
On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Variation de f	-1	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3. La courbe $\mathscr{C}$ possède de trois asymptotes :

- Une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y=0$.
- Une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y=-1$.
- Une asymptote verticale d'équation $x=0$.

4. Voici le tracé de la courbe $\mathscr{C}_f$.



C.15

1. a. La fonction f admet pour dérivée :

$f'(x) = 2 - 2\cdot\big(-e^{-x}\big) + 0 = 2 + 2\cdot e^{-x} = 2\cdot\big(1+e^{-x}\big)$

La fonction exponentielle étant positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $\big[0\,;1\big]$: la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

On a les deux valeurs suivantes pour la fonction f :

- $f(0) = 2\times0 - 2\cdot e^{-0} + \dfrac{1}{e} = -2 + \dfrac{1}{e} = -2 + e^{-1}$
- $f(1) = 2\times1 - 2\cdot e^{-1} + \dfrac{1}{e} = 2 - 2\cdot e^{-1} + e^{-1} = 2 - e^{-1}$

Ainsi, on a le tableau de variations suivant de la fonction f sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$:

x	0		1
Variation de f	$-2+e^{-1}$	↗	$2-e^{-1}$

b. Sur l'intervalle $\big[0\,;1\big]$:

On a les deux images aux bornes de l'intervalle :

$f(0) \approx -1{,}6 < 0 \quad ; \quad f(1) \approx 1{,}6 > 0$

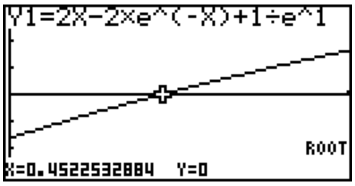
De plus :

- la fonction f est continue sur $\big[0\,;1\big]$
- la fonction f est strictement croissante sur $\big[0\,;1\big]$
- le nombre 0 est compris entre les images par la fonction f aux bornes de l'intervalle $\big[0\,;1\big]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $\big[0\,;1\big]$ solution de l'équation :

$f(\alpha) = 0.$

Voici la capture d'écran de la calculatrice :



On obtient la valeur approchée de α au centième :
$\alpha \approx 0{,}45$

(2) On a les transformations suivantes :

$$x - \mathrm{e}^{-x} + 1 = \mathrm{e}^{-x} - x - \mathrm{e}^{-1} + 1$$
$$x - \mathrm{e}^{-x} + 1 - \mathrm{e}^{-x} + x + \mathrm{e}^{-1} - 1 = 0$$
$$2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-1} = 0$$
$$2x - 2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{e} = 0$$
$$f(x) = 0$$

D'après la question (1)(b), cette équation admet sur l'intervalle $[0\,;1]$ le nombre α pour unique solution.

C.16

(a) $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3x-2)$
$= 2\cdot(3x-2)^2 - (3x-2) + 1$
$= 2\cdot(9x^2 - 12x + 4) - 3x + 2 + 1$
$= 18x^2 - 24x + 8 - 3x + 3 = 18x^2 - 27x + 11$

(b) $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(4x^2+12x+11)$
$= \sqrt{(4x^2+12x+11) - 2} = \sqrt{4x^2+12x+9}$

(c) $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\Big(\dfrac{3x+1}{2-x}\Big)$
$= \dfrac{1}{\dfrac{3x+1}{2-x}} = \dfrac{2-x}{3x+1}$

(d) $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(\sqrt{x})$
$= (\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + 1 = x - \sqrt{x} + 1$

(e) $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f\Big(\dfrac{1}{x}\Big) = \dfrac{\dfrac{1}{x}+1}{\dfrac{1}{x}-1} = \dfrac{\dfrac{1+x}{x}}{\dfrac{1-x}{x}}$
$= \dfrac{1+x}{x}\cdot\dfrac{x}{1-x} = \dfrac{1+x}{1-x}$

C.17

(a) On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto 3} 2x^2-5x-3=0$

En remarquant qu'on a le dénominateur x^2 est toujours positif, on a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 0} 5 - x = 5$; $\lim\limits_{x\mapsto 0} x^2 = 0^+$

On en déduit la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto 0} \dfrac{5-x}{x^2} = +\infty$

D'après le théorème de la limite d'une fonction composée, on a :
$\lim\limits_{x\mapsto 3} (g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0} g(x) = +\infty$

(b) La fonction f est définie sur $]-3\,;+\infty[$, on en déduit que la limite recherchée est la limite en 3^+.
On a les limites :
$\lim\limits_{x\mapsto -3^+} \dfrac{1}{x+3} = +\infty \implies \lim\limits_{x\mapsto -3^+} \sqrt{\dfrac{1}{x+3}} = +\infty$

On a la transformation suivante :

$g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

L'expression $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ est non-nulle :

$$= \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Or, on a la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$

On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée, on a :
$\lim\limits_{x\mapsto 3} (g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x) = 0$

(c) On a l'encadrement suivant :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-3 \leqslant \cos x - 2 \leqslant -1$$

Travaillons sur $]0\,;+\infty[$:

$$\frac{1}{x}\cdot(-3) \leqslant \frac{1}{x}\cdot(\cos x - 2) \leqslant \frac{1}{x}\cdot(-1)$$
$$-\frac{3}{x} \leqslant \frac{\cos x - 2}{x} \leqslant -\frac{1}{x}$$
$$-\frac{3}{x} \leqslant f(x) \leqslant -\frac{1}{x}$$

On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -\dfrac{3}{x} = 0^-$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0^-$

D'après le théorème des gendarmes, on a :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0^-$

Pour la fonction g et pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques suivantes :
$g(x) = \dfrac{x^3+2x}{x^3+x^2} = \dfrac{x\cdot(x^2+2)}{x\cdot(x^2+x)} = \dfrac{x^2+2}{x^2+x}$
On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x^2+2 = 2$; $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x^2+x = 0^-$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} g(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^2+2}{x^2+x} = -\infty$

Par le théorème de la limite d'une fonction composée :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} (g\circ f)(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-} g(x) = -\infty$

C.18

(1) L'encadrement suivant montre que le dénominateur de la fraction définissant f ne s'annule pas :

$$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$$
$$-1 \leqslant -\cos x \leqslant 1$$
$$1 \leqslant 2-\cos x \leqslant 3$$
$$0 < x^2+1 \leqslant x^2+2-\cos x \leqslant x^2+3$$

On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$:
$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

(2) (a) Reprenons l'encadrement précédent :

$$0 < x^2+1 \leqslant x^2+2-\cos x \leqslant x^2+3$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{x^2+1} \geqslant \frac{1}{x^2+2-\cos x} \geqslant \frac{1}{x^2+3}$$
$$\frac{1}{x^2+3} \leqslant \frac{1}{x^2+2-\cos x} \leqslant \frac{1}{x^2+1}$$
$$\frac{5}{x^2+3} \leqslant \frac{5}{x^2+2-\cos x} \leqslant \frac{5}{x^2+1}$$
$$\frac{5}{x^2+3} \leqslant \qquad f(x) \qquad \leqslant \frac{5}{x^2+1}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{5}{x^2+1} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{5}{x^2+3} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on a la valeur suivante de la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$$

C.19

(a) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} -x+1 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

Les formules de composition des limites permet d'obtenir :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x+1} = 0$$

(b) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} 2x+1 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

La composition des limites permet d'obtenir :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^{2x+1} = 0$$

(c) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} -x^2+1 = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

L'étude de la limite de la composée de fonctions permet d'obtenir :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{-x^2+1} = 0$$

(d) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad ; \quad \lim_{x\mapsto0^+} \mathrm{e}^x = 1$$

On en déduit la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$

(e) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} \mathrm{e}^x = 0$$

On obtient la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$

(f) On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$$

Ainsi, on a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto0^-} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = +\infty$

C.20

(1) (a) Etudions les limites en $-\infty$ et en $\dfrac{9}{2}$:

- On a la transformation algébrique suivante :

$$f(x) = \frac{x-8}{2x-9} = \frac{x\cdot\left(1-\dfrac{8}{x}\right)}{x\cdot\left(2-\dfrac{9}{x}\right)} = \frac{1-\dfrac{8}{x}}{2-\dfrac{9}{x}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} 1-\frac{8}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} 2-\frac{9}{x} = 2$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{1-\dfrac{8}{x}}{2-\dfrac{9}{x}} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2}$.

- On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto\frac{9}{2}^-} x-8 = \frac{9}{2}-8 = -\frac{7}{2} \quad ; \quad \lim_{x\mapsto\frac{9}{2}^-} 2\cdot x-9 = 0^-$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto\frac{9}{2}^-} f(x) = \lim_{x\mapsto\frac{9}{2}^-} \frac{x-8}{2x-9} = +\infty$$

On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = \dfrac{9}{2}$

(b) L'expression de la fonction f est donnée sous la forme des quotients des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x-8 \quad ; \quad v(x) = 2x-9$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = 2$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{1\cdot(2x-9)-(x-8)\cdot2}{(2x-9)^2}$$
$$= \frac{2x-9-2x+16}{(2x-9)^2} = \frac{7}{(2x-9)^2}$$

On remarque facilement que la fonction f' est positive sur $\left]-\infty\,;\frac{9}{2}\right[$; on en déduit que la fonction f est strictement croissante sur son ensemble de définition.

On a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\frac{9}{2}$
Variation de f	$\frac{1}{2}$ ↗	$+\infty$

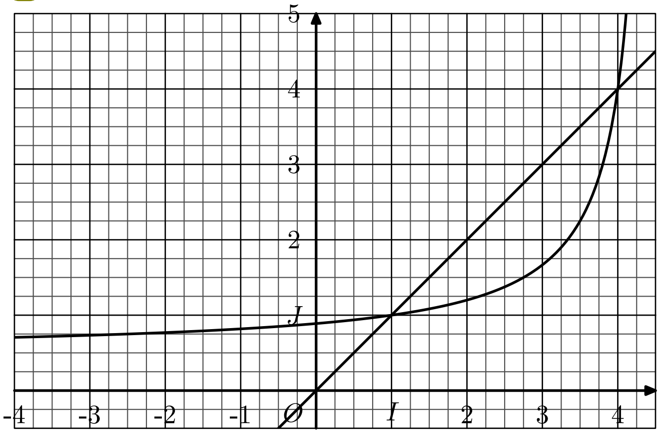
(c) On a les valeurs suivantes :

$$f(1) = \frac{1-8}{2\times1-9} = \frac{-7}{-7} = 1 \quad ; \quad f'(1) = \frac{7}{(2\times1-9)^2} = \frac{1}{7}$$

Ainsi, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation :

$$y = f'(1)\cdot(x-1)+f(1) = \frac{1}{7}\cdot(x-1)+1$$
$$= \frac{1}{7}\cdot x - \frac{1}{7} + 1 = \frac{1}{7}\cdot x + \frac{6}{7}$$

(d) On a la représentation suivante :



(e) Comme conjecture, on peut dire que la suite (u_n) est croissante et qu'elle va converger vers la valeur 1.

(2) Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier na-

turel n par la relation :
$\mathcal{P}_n$: "$u_n < 1$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  Au rang 0, on a : $u_0 = -3 < 1$
  On en déduit que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
  On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a pour hypothèse par récurrence :
  $u_n < 1$
  On a :
  $u_n < 1$
  La fonction f est croissante :
  $f(u_n) < f(1)$
  $u_{n+1} < 1$
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisé au rang 0 et vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

3. Considérons la propriété $\mathcal{Q}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
$\mathcal{Q}_n$: "$u_{n+1} < u_n$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  On a :
  $$u_1 = \frac{u_0 - 8}{2{\cdot}u_0 - 9} = \frac{-3-8}{2{\cdot}(-3)-9} = \frac{-11}{-6-9} = \frac{-11}{-15} = \frac{11}{15}$$
  Ainsi, on a : $-3 < \frac{11}{15}$
  $u_0 < u_1$
  La propriété $\mathcal{Q}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on l'hypothèse de récurrence suivante :
  $u_n < u_{n+1}$
  On a :
  $u_n < u_{n+1}$
  La fonction f est croissante :
  $f(u_n) < f(u_{n+1})$
  $u_{n+1} < u_{n+2}$
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{Q}_n$ est initialisé au rang 0 et vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

On vient donc de montrer qu'on a la relation suivante pour tout entier naturel n : $u_n \leqslant u_{n+1}$
On en déduit que la suite (u_n) est croissante.

La suite (u_n) est croissante et majorée par 1.

D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

C.21

1. a. L'expression de $f(x)$ est un polynôme du second degré dont le coefficient du second degré est négatif ; la fonction f admet donc un maximum pour la valeur :
$$-\frac{b}{2{\cdot}a} = -\frac{1{,}4}{2{\cdot}(-0{,}05)} = -\frac{1{,}4}{-0{,}1} = 14$$
L'image de 14 par la fonction f a pour valeur :
$$f(14) = 1{,}4\times14 - 0{,}05\times14^2 = 19{,}6 - 9{,}8 = 9{,}8 = \frac{49}{5}$$
Ainsi, la fonction f admet le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	14	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ ↗	$\frac{49}{5}$	↘ $-\infty$

On en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;8]$.
De plus, on a les deux images suivantes par la fonction f :
$f(0) = 0$; $f(8) = 1{,}4\times8 - 0{,}05\times8^2 = 11{,}2 - 3{,}2 = 8$
On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;8]$:

x	0	8
Variation de f	0 ↗	8

b. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la propriété :
$\mathcal{P}_n$: "$0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$"
Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**
  On a les deux premiers termes de la suite (v_n) :
  - $v_0 = 6$
  - $v_1 = 1{,}4{\cdot}v_n - 0{,}05{\cdot}v_n^2 = 1{,}4\times6 - 0{,}05\times6^2$
    $= 8{,}4 - 1{,}8 = 6{,}6$

  On obtient la comparaison suivante :
  $0 \leqslant v_0 \leqslant v_1 \leqslant 8$
  On vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence suivante :
  $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 8$
  La fonction f étant croissante sur $[0;8]$:
  $f(0) \leqslant f(v_n) \leqslant f(v_{n+1}) \leqslant f(8)$
  $0 \leqslant v_{n+1} \leqslant v_{n+2} \leqslant 8$
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ s'initialise au rang 0 et elle vérifie la propriété de l'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. L'encadrement obtenu, pour tout entier naturel n, à la question 1 b, montre que la suite $\left(v_n\right)$ est croissante et majorée par la valeur 8.

   D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite $\left(v_n\right)$ est convergente.