

Corrigé exercice 115 :

- Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = m$. Ainsi y_0 est solution de $2y' + y = x + 1$ si, et seulement si, $2y'_0 + y_0 = x + 1 \Leftrightarrow 2m + mx + p = x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ 2m + p = 1 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ p = 1 - 2m = -1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = x - 1$ est une solution particulière de l'équation $2y' + y = x + 1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $2y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{2}y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-\frac{x}{2}}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $2y' + y = x + 1$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-\frac{x}{2}} + x - 1$, où k est un réel.
- Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est affine. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = m$. Ainsi y_0 est solution de $y' + 3y = 2x - 1$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Leftrightarrow m + 3mx + 3p = 2x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 2 \\ m + 3p = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ p = \frac{-1-m}{3} = -\frac{5}{9} \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 3y = 2x - 1$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-3x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 3y = 2x - 1$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-3x} + \frac{2}{3}x - \frac{5}{9}$, où k est un réel.
- Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est une fonction trinôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = 2ax + b$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $y'_0(x) - 3y_0(x) = -3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 2ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = -3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ 2a - 3b = -1 \\ b - 3c = -2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = x^2 + x + 1$ est une solution particulière de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{3x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' - 3y = -3x^2 - x - 2$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{3x} + x^2 + x + 1$, où k est un réel.
- Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = ax^2 + bx + c$, où a , b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ car la fonction y_0 est une fonction trinôme. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = 2ax + b$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $2y'_0(x) - 3y_0(x) = 3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow 4ax + b - 3ax^2 - 3bx - 3c = 3x^2 - x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 3 \\ 4a - 3b = -1 \\ 2b - 3c = -2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 0 \end{cases}$. Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = -x^2 - x$ est une solution particulière de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $2y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = \frac{3}{2}y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{\frac{3x}{2}}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{\frac{3x}{2}} - x^2 - x$, où k est un réel.

Corrigé exercice 116 :

1. Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = (mx + p)e^{-2x}$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = me^{-2x} - 2(mx + p)e^{-2x} = (-2mx + m - 2p)e^{-2x}$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $y' + 3y = (2 + 2x)e^{-2x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) + 3y_0(x) = (2 + 2x)e^{-2x} \Leftrightarrow (-2mx + m - 2p + 3mx + 3p)e^{-2x} = (2 + 2x)e^{-2x}$
- $$\Leftrightarrow (mx + m + p)e^{-2x} = (2 + 2x)e^{-2x} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m + p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = 0 \end{cases} .$$

Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = 2xe^{-2x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 3y = (2 + 2x)e^{-2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -3y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-3x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 3y = (2 + 2x)e^{-2x}$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-3x} + 2xe^{-2x}$, où k est un réel.

2. Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = (mx + p)e^x$, où m et p sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction affine par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = me^x + (mx + p)e^x = (mx + m + p)e^x$. Ainsi, y_0 est solution de l'équation $y' + y = (3 - 2x)e^x$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) + y_0(x) = (3 - 2x)e^x \Leftrightarrow (2mx + m + 2p)e^x = (3 - 2x)e^x \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -2 \\ m + 2p = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ p = 2 \end{cases} .$

Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = (2 - x)e^x$ est une solution particulière de l'équation $y' + y = (3 - 2x)e^x$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + y = (3 - 2x)e^x$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-x} + (2 - x)e^x$, où k est un réel.

3. Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$, où a , b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = (2ax + b)e^{-x} - (ax^2 + bx + c)e^{-x} = (-ax^2 + (2a - b)x + b - c)e^{-x}$. Ainsi y_0 est solution de l'équation $y' - 2y = -(3x^2 + x + 2)e^{-x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) - 2y_0(x) = -(3x^2 + x + 2)e^{-x}$
- $$\Leftrightarrow (-3ax^2 + (2a - 3b)x + b - 3c)e^{-x} = -(3x^2 + x + 2)e^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ 2a - 3b = -1 \\ b - 3c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} .$$

Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$ est une solution particulière de l'équation $y' - 2y = -(3x^2 + x + 2)e^{-x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' - 2y = 0 \Leftrightarrow y' = 2y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{2x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' - 2y = -(3x^2 + x + 2)e^{-x}$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{2x} + (x^2 + x + 1)e^{-x}$, où k est un réel.

4. Soit y_0 la fonction définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$, où a , b et c sont des réels à déterminer. Alors $\mathcal{D}_{y_0} = \mathcal{D}_{y'_0} = \mathbb{R}$ comme produit d'une fonction trinôme par la composée d'une fonction affine par la fonction exponentielle. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c)e^{2x}$. Ainsi la fonction y_0 est solution de l'équation $y' + 2y = -(2x^2 - x + \frac{1}{2})e^{2x}$ si, et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y'_0(x) + 2y_0(x) = -(2x^2 - x + \frac{1}{2})e^{2x} \Leftrightarrow$
- $$(4ax^2 + (2a + 4b)x + b + 4c)e^{2x} = (-2x^2 + x - \frac{1}{2})e^{2x} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = -2 \\ 2a + 4b = 1 \\ b + 4c = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{4} \end{cases} .$$

Ainsi, la fonction y_0 définie sur \mathbb{R} par $y_0(x) = \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$ est une solution particulière de l'équation $y' + 2y = -(2x^2 - x + \frac{1}{2})e^{2x}$. D'autre part, comme l'équation homogène associée $y' + 2y = 0 \Leftrightarrow$

$y' = -2y$ a pour solutions les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-2x}$, où k est un réel, alors les solutions de l'équation $y' + 2y = -(2x^2 - x + \frac{1}{2})e^{2x}$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{-2x} + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x}$, où k est un réel.