

Exo 27 p177

Dans cet exercice, les limites peuvent être indéterminées, on factorise par la plus grande puissance de x

1. Pour tout $x \neq 0, f(x) = x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2})$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$

Et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

Par somme : $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$

Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$

Donc, par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

2. Pour tout $x \neq 0, g(x) = -x^5(1 - \frac{10}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4})$ Or :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

Donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{10}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}) = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^5 = -\infty$

Donc par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

De même :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{10}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} = 0$

Donc par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \frac{10}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}) = 1$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^5 = +\infty$

Donc par produit $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

3. Pour tout $x \neq 0, h(x) = \frac{x^2(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})}{x(1 + \frac{1}{x})} = \frac{x(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})}{1 + \frac{1}{x}}$

Décomposons chaque terme pour étudier la limite.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2} = 1$

donc, par produit le numérateur tend vers $+\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

Par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$, les autres limites sont les mêmes en $-\infty$ qu'en $+\infty$

Donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$

$$4. \text{ Pour tout } x \neq 0; k(x) = \frac{x^2(3 - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 - \frac{2}{x^2})} = \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\text{Donc par somme : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = 3$$

$$\text{Soit } \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = 3$$

On obtient le même résultat en $-\infty$.

Exo 28 p177

$$1. \text{ Pour tout } x \neq 0, f(x) = x^4(3 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 = +\infty$$

Chaque terme $\frac{a}{x^n}$ tend vers 0 en ∞ donc par somme $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{1}{x^4} = 3$

Par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

On obtient le même résultat en $-\infty$.

$$2. \text{ Pour tout } x \neq 0, g(x) = \frac{-x^3(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{x(2 + \frac{1}{x})} = \frac{-x^2(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})}{2 + \frac{1}{x}}$$

Par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$.

De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$

Par produit $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}) = -\infty$

et par quotient $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

On obtient le même résultat en $-\infty$.