# Chapitre 12 -Somme de variables aléatoires-Loi des grands nombres

Terminales Spé Maths

## 1 Modéliser à l'aide d'une somme de variables aléatoires

### 1.1 Loi de couple

**Définition 1.1.**
Pour deux variables aléatoires $X$ et $Y$, la loi du couple $(X;Y)$ est définie pour tous nombres $k$ et $l$ par $P(X=k;Y=l)=P(X=k\cap Y=l)$.

Deux variables aléatoires sont indépendantes si pour tous nombres $k$ et $l$, les événements $X=k$ et $Y=l$ sont indépendants.

**Propriété 1.1.**
Pour toutes variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendants, et pour tous nombres $k$ et $l$, $P(X=k;Y=l)=P(X=k)\times P(Y=l)$

On peut définir une loi de probabilité de la variable aléatoire $X+Y$ : pour tout réel $s$, $P(X+Y=s)$ est la somme des probabilités $P(X=k;Y=l)$ où les réels $k$ et $l$ vérifient $k+l=s$.

$$P(X+Y=s)=\sum_{k+l=s}P(X=k)\times P(Y=l)$$

**Exemple :**

$B_1$ et $B_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $p$. On note $S=B_A+B_2$ la variable aléatoire qui prend les valeurs 0,1 et 2. On a :
$P(S=2)=P(B_1=1;B_2=1)=p^2$
$P(S=0)=P(B_1=0;B_2=0)=(1-p)^2$
$P(S=1)=P(B_1=1;B_2=0)+P(B_1=0;B_2=1)=p(1-p)+(1-p)p=2p(1-p)$

### 1.2 Application à la loi Binomiale

**Définition 1.2.**
Un échantillon de taille $n$,$(n\in\mathbb{N}^*)$ d'une loi de probabilité est une liste de $n$ variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

**Propriété 1.2.**
Si $(B_1; B_2; ...B_n)$ est un échantillon de taille $n \geq 2$ de la loi de Bernoulli de paramètre $p$ alors la loi

$$\sum_{k=1}^{n} B_k$$

suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$

**Exemple :**

Dans l'exemple précédent, $B_1 + B_2$ suit une loi binomiale de paramètres 2 et $p$.

**Propriété 1.3.**
Si $X_1$ et $X_2$ sont deux variables aléatoires indépendantes telles que $X_1$ suit une loi binomiale de paramètres $m$ et $p$ et $X_2$ suit une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$ alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale de paramètres $m + n$ et $p$

**Exemple :**

Les variables aléatoires $X$ et $Y$ modélisent le nombre de DEL défectueuses produites par deux usines. $X$ suit une loi binomiale de paramètres 300 et 0.021 et $Y$ suit une loi binomiale de paramètres 500 et 0.021. $X$ et $Y$ sont indépendantes donc $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres 800 et 0.021

# 2 Indicateurs d'une combinaison de variables aléatoires

**Propriété 2.1.**
Pour toutes variables aléatoires $X$ et $Y$ et pour tout réel $b$ :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X + b) = E(X) + b$
- $E(aX) = aE(X)$
  On dit que l'espérance est linéaire.

**Propriété 2.2.**
Pour toutes variables aléatoires $X$ et $Y$ indépendantes et pour tout réel $b$ :

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $V(X + b) = V(X)$
- $V(aX) = a^2V(X)$

**Exemple :**
On lance deux dés, l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4 et l'autre cubique numéroté de 1 à 6.

$X$ et $Y$ sont les variables aléatoires associées respectivement aux résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.
$E(X) = \dfrac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2.5$ et $E(Y) = \dfrac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$ alors $E(X + Y) = 2.5 + 3.5 = 6$ et $E(2X) = 2 \times 2.5 = 5$

$V(X)=\frac{1}{4}[(1-2.5)^2+(2-2.5)^2+(3-2.5)^2+(4-2.5)^2]=1.25$ et
$V(Y)=\frac{1}{6}[(1-3.5)^2+(2-3.5)^2+(3-3.5)^2+(4-3.5)^2+(5-3.5)^2+(6-3.5)^2]=2.92$
Donc $V(X+Y)=V(X)+V(Y)=4.17$ et $V(2X)=4\times 1.25=5$

# 3 Echantillon de n variables aléatoires identiques et indépendantes

On considère un entier $n\geq 1$ et $X_1,X_2,...,X_n$ n variables aléatoires identiques et indépendantes. On note $S_n=X_1+X_2+...X_n$ la somme de ces variables aléatoires et $M_n=\frac{S_n}{n}$ la moyenne de ces variables aléatoires.

**Propriété 3.1.**
Pour tout $k\in\{1,2,...,n\}$ :
- $E(S_n)=nE(X_k)$
- $V(S_n)=nV(X_k)$
- $E(M_n)=E(X_k)$
- $V(M_n)=\frac{V(X_k)}{n}$

**Exemple :**

On lance cinq dés à 6 faces et on note $X$ la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
Pour tout $k\in\{1,2,...,5\}$, on note $X_k$ le résultat donné par le lancer du dé $k$.
$X=X_1+X_2+X_3+X_4+X_5$ et $E(X)=5E(X_1)$ par exemple.

Or $E(X_1)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=3.5$
Donc $E(x)=5\times 3.5=17.5$

$V(X)=5V(X_1)$. Or $V(X_1)=\frac{1}{6}\times(1-3.5)^2+\frac{1}{6}\times(2-3.5)^2+\frac{1}{6}\times(3-3.5)^2+\frac{1}{6}\times(4-3.5)^2+\frac{1}{6}\times(5-3.5)^2+\frac{1}{6}\times(6-3.5)^2=\frac{35}{12}$ Donc $V(X)=5\times\frac{35}{12}=\frac{175}{12}$

**Propriété 3.2.**
Application à la loi Binomiale :
Si $X$ suit une loi Binomiale de paramètres $n$ et $p$. Alors
- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$

# 4 Inégalités de concentration

**Propriété 4.1.**
**Inégalité de Markov** Soit $X$ une variable aléatoire à valeurs positives et $a$ un réel strictement positif. On a :
$$P(X\geq a)\leq\frac{E(X)}{a}$$

**Interprétation** : La probabilité que $X$ prenne des valeurs de plus en plus grande et d'autant plus petite que $a$ est grand.
**Exemple :**
Soit $X$ une variable aléatoire d'espérance 1. $P(X \geq 100) \leq 0.01$.

**Propriété 4.2.**
**Inégalité de Bienaymé-Tchebychev** Soit $X$ une variable aléatoire et $a$ un réel strictement positif. On a :

$$P(|X - E(x)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

**Interprétation** : La probabilité que $X$ prenne des valeurs de plus en plus éloignées de sa moyenne et d'autant plus petite que $a$ est grand.
**Remarque .**
- $1 - P(|X - E(x)| \geq a) = P(E(X) - a \leq X \leq E(X) + a)$
- $[E(X) - a; E(X) + a]$ est appelé l'intervalle de fluctuation de $X$.
- $P(E(X) - a \leq X \leq E(X) + a) = P(|X - E(X)| < a) \geq 1 - \dfrac{V(X)}{a^2}$

**Exemple :**

Si $a = 2\sigma(X)$ l'écart-type de $X$. Alors $P(|X - E(x)| \geq 2\sigma(X)) \leq \dfrac{V(X)}{4\sigma(X)^2} = \dfrac{1}{4}$

# 5 Loi des grands nombres

**Théorème 5.1.**
**Inégalité de concentration**
Soit $X$ une variable aléatoire. On pose $M_n$ la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille $n$ de $X$, $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ où les $X_i$ sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité ( celle de X). Alors pour tout $a > 0$ :

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$$

**Exemple :**
On effectue $n$ lancers successifs supposés indépendants d'une pièce équilibrée. On associe chaque tirage $i$ à une variable aléatoire $X_i$ prenant la valeur 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile.
$S_n = X_1 + X_2 + ... X_n$ est le nombre de piles obtenus. On a $M_n = \dfrac{S_n}{n}$ et pour tout $i$ entre 1 et $n$, $E(X_i) = \dfrac{1}{2}$ et $V(X_i) = \dfrac{1}{4}$

Pour $n = 10000$ ; $P(|M_n - \dfrac{1}{2}| \geq 0.01) \leq \dfrac{\frac{1}{4}}{10000 \times 0.01^2} \leq \dfrac{1}{4}$ Pour 10 000 lancers, la proportion de pile obtenue s'écarte de plus d'un centième de 0.5 est inférieure à 0.25.

**Propriété 5.1.**
**Loi faible des grands nombres**
Soit $X_n$ un échantillon d'une variable aléatoire. On pose $M_n = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$. Alors pour tout $a > 0$ :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$