

Chapitre 12 -Somme de variables aléatoires-Loi des grands nombres

Terminales Spé Maths

1 Modéliser à l'aide d'une somme de variables aléatoires

1.1 Loi de couple

Définition 1.1.

Pour deux variables aléatoires X et Y , la loi du couple $(X; Y)$ est définie pour tous nombres k et l par $P(X = k; Y = l) = P(X = k \cap Y = l)$.

Deux variables aléatoires sont indépendantes si pour tous nombres k et l , les événements $X = k$ et $Y = l$ sont indépendants.

Propriété 1.1.

Pour toutes variables aléatoires X et Y indépendants, et pour tous nombres k et l , $P(X = k; Y = l) = P(X = k) \times P(Y = l)$

On peut définir une loi de probabilité de la variable aléatoire $X + Y$: pour tout réel s , $P(X + Y = s)$ est la somme des probabilités $P(X = k; Y = l)$ où les réels k et l vérifient $k + l = s$.

$$P(X + Y = s) = \sum_{k+l=s} P(X = k) \times P(Y = l)$$

Exemple :

B_1 et B_2 sont deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p . On note $S = B_1 + B_2$ la variable aléatoire qui prend les valeurs 0, 1 et 2. On a :

$$P(S = 2) = P(B_1 = 1; B_2 = 1) = p^2$$

$$P(S = 0) = P(B_1 = 0; B_2 = 0) = (1 - p)^2$$

$$P(S = 1) = P(B_1 = 1; B_2 = 0) + P(B_1 = 0; B_2 = 1) = p(1 - p) + (1 - p)p = 2p(1 - p)$$

1.2 Application à la loi Binomiale

Définition 1.2.

Un échantillon de taille n , ($n \in \mathbb{N}^*$) d'une loi de probabilité est une liste de n variables aléatoires indépendantes suivant cette loi.

Propriété 1.2.

Si $(B_1; B_2; \dots B_n)$ est un échantillon de taille $n \geq 2$ de la loi de Bernoulli de paramètre p alors la loi

$$\sum_{k=1}^n B_k$$

suit une loi binomiale de paramètres n et p

Exemple :

Dans l'exemple précédent, $B_1 + B_2$ suit une loi binomiale de paramètres 2 et p .

Propriété 1.3.

Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que X_1 suit une loi binomiale de paramètres m et p et X_2 suit une loi binomiale de paramètres n et p alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit une loi binomiale de paramètres $m + n$ et p

Exemple :

Les variables aléatoires X et Y modélisent le nombre de DEL défectueuses produites par deux usines. X suit une loi binomiale de paramètres 300 et 0.021 et Y suit une loi binomiale de paramètres 500 et 0.021. X et Y sont indépendantes donc $X + Y$ suit une loi binomiale de paramètres 800 et 0.021

2 Indicateurs d'une combinaison de variables aléatoires

Propriété 2.1.

Pour toutes variables aléatoires X et Y et pour tout réel b :

- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(X + b) = E(X) + b$
- $E(aX) = aE(X)$

On dit que l'espérance est linéaire.

Propriété 2.2.

Pour toutes variables aléatoires X et Y indépendantes et pour tout réel b :

- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$
- $V(X + b) = V(X)$
- $V(aX) = a^2V(X)$

Exemple :

On lance deux dés, l'un tétraédrique numéroté de 1 à 4 et l'autre cubique numéroté de 1 à 6.

X et Y sont les variables aléatoires associées respectivement aux résultats du dé tétraédrique et du dé cubique.

$E(X) = \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + 4) = 2.5$ et $E(Y) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5$ alors $E(X + Y) = 2.5 + 3.5 = 6$
et $E(2X) = 2 \times 2.5 = 5$

$$V(X) = \frac{1}{4}[(1 - 2.5)^2 + (2 - 2.5)^2 + (3 - 2.5)^2 + (4 - 2.5)^2] = 1.25 \text{ et}$$

$$V(Y) = \frac{1}{6}[(1 - 3.5)^2 + (2 - 3.5)^2 + (3 - 3.5)^2 + (4 - 3.5)^2 + (5 - 3.5)^2 + (6 - 3.5)^2] = 2.92$$

$$\text{Donc } V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 4.17 \text{ et } V(2X) = 4 \times 1.25 = 5$$

3 Echantillon de n variables aléatoires identiques et indépendantes

On considère un entier $n \geq 1$ et X_1, X_2, \dots, X_n n variables aléatoires identiques et indépendantes. On note $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la somme de ces variables aléatoires et $M_n = \frac{S_n}{n}$ la moyenne de ces variables aléatoires.

Propriété 3.1.

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$:

- $E(S_n) = nE(X_k)$
- $V(S_n) = nV(X_k)$
- $E(M_n) = E(X_k)$
- $V(M_n) = \frac{V(X_k)}{n}$

Exemple :

On lance cinq dés à 6 faces et on note X la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats obtenus. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 5\}$, on note X_k le résultat donné par le lancer du dé k .

$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ et $E(X) = 5E(X_1)$ par exemple.

$$\text{Or } E(X_1) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} = 3.5$$

$$\text{Donc } E(X) = 5 \times 3.5 = 17.5$$

$$V(X) = 5V(X_1).$$

$$\text{Or } V(X_1) = \frac{1}{6} \times (1 - 3.5)^2 + \frac{1}{6} \times (2 - 3.5)^2 + \frac{1}{6} \times (3 - 3.5)^2 + \frac{1}{6} \times (4 - 3.5)^2 + \frac{1}{6} \times (5 - 3.5)^2 + \frac{1}{6} \times (6 - 3.5)^2 = \frac{35}{12}$$

$$\text{Donc } V(X) = 5 \times \frac{35}{12} = \frac{175}{12}$$

Propriété 3.2.

Application à la loi Binomiale :

Si X suit une loi Binomiale de paramètres n et p . Alors

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1 - p)$

4 Inégalités de concentration

Propriété 4.1.

Inégalité de Markov Soit X une variable aléatoire à valeurs positives et a un réel strictement positif.

On a :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Interprétation : La probabilité que X prenne des valeurs de plus en plus grande et d'autant plus petite que a est grand.

Exemple :

Soit X une variable aléatoire d'espérance 1. $P(X \geq 100) \leq 0.01$.

Propriété 4.2.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev Soit X une variable aléatoire et a un réel strictement positif.

On a :

$$P(|X - E(x)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Interprétation : La probabilité que X prenne des valeurs de plus en plus éloignées de sa moyenne et d'autant plus petite que a est grand.

Remarque . • $1 - P(|X - E(x)| \geq a) = P(|X - E(x)| < a) = P(E(X) - a < X < E(X) + a)$

• $[E(X) - a; E(X) + a]$ est appelé l'intervalle de fluctuation de X .

• $P(E(X) - a < X < E(X) + a) = P(|X - E(X)| < a) \geq 1 - \frac{V(X)}{a^2}$

Exemple :

Cas particulier :

Si $a = 2\sigma(X)$ l'écart-type de X . Alors $P(|X - E(x)| \geq 2\sigma(X)) \leq \frac{V(X)}{4\sigma(X)^2} = \frac{1}{4}$

5 Loi des grands nombres

Théorème 5.1.

Inégalité de concentration

Soit X une variable aléatoire. On pose M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X , $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ où les X_i sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité (celle de X). Alors pour tout $a > 0$:

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$$

Exemple :

On effectue n lancers successifs supposés indépendants d'une pièce équilibrée. On associe chaque tirage i à une variable aléatoire X_i prenant la valeur 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile.

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est le nombre de piles obtenus. On a $M_n = \frac{S_n}{n}$ et pour tout i entre 1 et n , $E(X_i) = \frac{1}{2}$ et $V(X_i) = \frac{1}{4}$

Pour $n = 10000$; $P(|M_n - \frac{1}{2}| \geq 0.01) \leq \frac{\frac{1}{4}}{10000 \times 0.01^2} \leq \frac{1}{4}$ Pour 10 000 lancers, la proportion de pile obtenue s'écarte de plus d'un centième de 0.5 est inférieure à 0.25.

Propriété 5.1.**Loi faible des grands nombres**

Soit X_n un échantillon d'une variable aléatoire. On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$. Alors pour tout $a > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$$