Parametrización de Feynman a temperatura finita

Basado en la Ref. [1]

Daniel González Velázquez
Teoría Térmica de Campos
PCF

2022-2

1. Introducción

En teoría de campos a temperatura finita, las funciones de Green dependen por separado de la energía y el momento externos (p_0 y $p \equiv |\boldsymbol{p}|$). De hecho, en el límite de alta temperatura (e.g. *hard thermal loops* en QED y QCD), a menudo aparece la función

$$F(p_0, p) \equiv \frac{p_0}{p} Q_0(p_0, p) = \frac{p_0}{2p} \ln\left(\frac{p_0 + p}{p_0 - p}\right), \tag{1.1}$$

que posee puntos rama* en $p_0 = \pm p$. Es directo ver que $F(0, p) = 1$ y $F(p_0, 0) = 0$, i.e., la función es discontinua en $P^\mu \equiv (p_0, \boldsymbol{p}) = 0$. Ambos resultados son físicamente relevantes; por ejemplo, del límite $\{p_0 \to 0, p \to 0\}$ se obtiene el apantallamiento de potenciales electrostáticos, mientras que el límite $\{p \to 0, p_0 \to 0\}$ da una expresión para la frecuencia de plasma de una teoría dada [2].

Diversos autores han argumentado que la no conmutatividad de los límites de bajo momento en diagramas con loops desaparece mediante cálculos alternativos que hacen uso de la parametrización de Feynman. En particular, se ha utilizado dicha técnica para calcular la autoenergía Π de un campo escalar en la teoría $\lambda\phi^3$ en formalismo de tiempo real [3] y en formalismo de tiempo imaginario [2]. Sin embargo, en estos ejemplos no se consideraron ciertas sutilezas que surgen al emplear parametrización de Feynman a temperatura finita. Dichas sutilezas son examinadas a profundidad en el presente trabajo.

En la Sección 2 se comienza con la autoenergía $\Pi(p_{0l}, p)$ en tiempo imaginario (donde p_{0l} son frecuencias de Matsubara bosónicas) [4]. Se muestra que la parte real de Π adquiere dos valores distintos en el límite de bajo momento y se obtiene una expresión que comprende ambos resultados. En la Sección 3 se prueba que la no conmutatividad de los límites tiene su origen en una contribución cinemática que se manifiesta únicamente a temperatura finita. En la Sección 4 se demuestra la equivalencia entre el formalismo de tiempo real y de tiempo imaginario. El cálculo en tiempo real requiere de la correcta aplicación de la parametrización de Feynman, lo que da lugar a una contribución que se obvió en la Ref. [3], y que explica la discontinuidad de $\mathrm{Re}(\Pi)$. En contraste, el cálculo en tiempo imaginario exige realizar una continuación analítica a valores continuos de la energía, lo que aparentemente da resultados en los que los límites $p_0 \to 0$ y $p \to 0$ conmutan. Sin embargo, una reflexión más cuidadosa revela que la extensión analítica no consiste en la simple identificación $p_{0l} \to p_0$. De forma casi prodigiosa, la extensión apropiada da resultados que coinciden con los del cálculo en tiempo real y que reafirman que los límites de bajo momento no son intercambiables.

*Un número complejo z tiene infinitas representaciones polares: $z = Re^{i\theta'}$, donde $\theta' \in \{\theta + 2\pi n | n \in \mathbb{Z}\}$. Para valores de $z_0 \neq 0$, la función $\ln(z_0 + z)$ es univaluada. Sin embargo, en $z_0 = 0$ se tiene $\ln(z_0 + z) = \ln(z) = \ln(R) + i(\theta + 2\pi n)$. En este sentido, $z_0 = 0$ es un *punto rama* de la función logaritmo.

2. Autoenergía del campo escalar en la teoría cúbica

Consideramos un sistema descrito por el lagrangiano

$$\mathcal{L}(B,\phi) = \mathcal{L}_0(B) + \mathcal{L}_0(\phi) - \frac{\lambda}{2}B\phi^2, \tag{2.1}$$

donde $\mathcal{L}_0$ es el lagrangiano de Klein-Gordon libre. Nos interesa calcular la autoenergía Π del campo B a partir del término de interacción $-\frac{\lambda}{2}B\phi^2$. Usando el formalismo del tiempo imaginario hemos visto que [4]

$$\begin{aligned}\Pi(p_{0l},p) = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega\tilde{\omega}}\Bigg[(1+n+\tilde{n})\left(\frac{1}{p_{0l}-\omega-\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_{0l}+\omega+\tilde{\omega}}\right)\\ -(n-\tilde{n})\left(\frac{1}{p_{0l}-\omega+\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_{0l}+\omega-\tilde{\omega}}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $\omega \equiv \sqrt{k^2+m^2}$, $\tilde{\omega} \equiv \sqrt{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2+m^2}$, $n \equiv n(\omega) = (e^{\beta\omega}-1)^{-1}$ y $\tilde{n} \equiv n(\tilde{\omega}) = (e^{\beta\tilde{\omega}}-1)^{-1}$. La función $\Pi(p_{0l},p)$ está definida para valores de p_{0l} iguales a $i2\pi lT$ (frecuencias de Matsubara). Se realiza una continuación analítica para obtener la autoenergía retardada ($p_{0l}\to p_0+i\epsilon$), avanzada ($p_{0l}\to p_0-i\epsilon$), o temporalmente ordenada ($p_{0l}\to p_0+i\epsilon p_0$). Notamos que $\frac{1}{p_{0l}+\alpha}\to\frac{1}{p_0+i\epsilon+\alpha}$ tiene parte real

$$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{p_0+i\epsilon+\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_0+i\epsilon+\alpha}+\frac{1}{p_0-i\epsilon+\alpha}\right) = \frac{p_0+\alpha}{(p_0+\alpha)^2+\epsilon^2} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0+\alpha}\right), \tag{2.3}$$

que no depende del signo de ϵ. En este sentido, es irrelevante cuál de las tres autoenergías se utiliza para calcular parte real. Tras efectuar la continuación analítica tenemos

$$\begin{aligned}\Pi_R(p_0,p) = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega\tilde{\omega}}\Bigg[(1+n+\tilde{n})\left(\frac{1}{p_0+i\epsilon-\omega-\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+i\epsilon+\omega+\tilde{\omega}}\right)\\ -(n-\tilde{n})\left(\frac{1}{p_0+i\epsilon-\omega+\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+i\epsilon+\omega-\tilde{\omega}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{2.4}$$

Podemos separar la autoenergía en dos contribuciones, una que típicamente corresponde a $T=0$ y otra que se manifiesta a temperatura finita: $\Pi = \Pi_{T=0}(p^2)+\Pi'(p_0,p)$. De este modo,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,p) = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega\tilde{\omega}}\Bigg[(n+\tilde{n})\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega-\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega+\tilde{\omega}}\right)\\ -(n-\tilde{n})\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega+\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega-\tilde{\omega}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{2.5}$$

Agrupando independientemente los términos que multiplican a n y a $\tilde{n}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,p) &= -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega\tilde{\omega}}\Bigg[n\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega-\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega+\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0-\omega+\tilde{\omega}}+\frac{1}{p_0+\omega-\tilde{\omega}}\right)\\ &\quad+\tilde{n}\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega-\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega+\tilde{\omega}}+\frac{1}{p_0-\omega+\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega-\tilde{\omega}}\right).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Definimos

$$I \equiv \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega\tilde{\omega}}n\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega-\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega+\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0-\omega+\tilde{\omega}}+\frac{1}{p_0+\omega-\tilde{\omega}}\right), \tag{2.7}$$

$$\tilde{I} \equiv \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega\tilde{\omega}}\tilde{n}\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega-\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega+\tilde{\omega}}+\frac{1}{p_0-\omega+\tilde{\omega}}-\frac{1}{p_0+\omega-\tilde{\omega}}\right), \tag{2.8}$$

de suerte que $\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,p) = -\frac{\lambda^2}{2}(I+\tilde{I})$. Realizando el cambio de variable $\boldsymbol{k} \to -(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})$,

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{k^2+m^2} \to \sqrt{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2+m^2} = \tilde{\omega}, && (2.9)\\ \tilde{\omega} &= \sqrt{(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2+m^2} \to \sqrt{(-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}+\boldsymbol{p})^2+m^2} = \sqrt{k^2+m^2} = \omega. && (2.10) \end{aligned}$$

De esto,

$$\tilde{I} \equiv \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{4\omega\tilde{\omega}} n\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega-\tilde{\omega}} - \frac{1}{p_0+\omega+\tilde{\omega}} - \frac{1}{p_0-\omega+\tilde{\omega}} + \frac{1}{p_0+\omega-\tilde{\omega}}\right) = I. \tag{2.11}$$

Por consiguiente, $\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,p) = -\lambda^2 I$. Explícitamente,

$$\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,p) = -\lambda^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n}{4\omega\tilde{\omega}} \mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0-\omega-\tilde{\omega}} - \frac{1}{p_0+\omega+\tilde{\omega}} - \frac{1}{p_0-\omega+\tilde{\omega}} + \frac{1}{p_0+\omega-\tilde{\omega}}\right), \tag{2.12}$$

$$\boxed{\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,p) = -\lambda^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n}{\omega} \mathcal{P}\left(\frac{p_0^2-(\tilde{\omega}^2-\omega^2)}{(p_0^2-(\omega-\tilde{\omega})^2)(p_0^2-(\omega+\tilde{\omega})^2)}\right).} \tag{2.13}$$

2.1. Límite de momento nulo

De la Eq. (2.13) se deduce que los límites $p_0 \to 0$ y $p \to 0$ no conmutan. Comenzamos evaluando en $p_0 = 0$, para luego calcular $p \to 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,\Pi'(0,p) &= \lambda^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n}{\omega}\mathcal{P}\left(\frac{(\tilde{\omega}^2-\omega^2)}{(\omega-\tilde{\omega})^2(\omega+\tilde{\omega})^2}\right) = \lambda^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n}{\omega}\mathcal{P}\left(\frac{1}{(\tilde{\omega}^2-\omega^2)}\right) && (2.14)\\ &= \lambda^2 \int \frac{k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi}{(2\pi)^3}\frac{n}{\omega}\mathcal{P}\left(\frac{1}{p^2+2kp\cos\theta}\right). && (2.15) \end{aligned}$$

Ahora llevamos a cabo la integración angular:

$$\mathcal{P}\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{p^2+2kp\cos\theta} = -\frac{1}{2kp}\,\mathrm{Re}\ln\left(\frac{p^2-2kp}{p^2+2kp}\right) \approx \frac{1}{2kp}\frac{p}{k} = \frac{1}{2k^2}. \tag{2.16}$$

Se ha expandido el logaritmo a primer orden en p. Así,

$$\boxed{\lim_{p\to 0}\mathrm{Re}\,\Pi'(0,p) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{dk}{\omega} n(\omega).} \tag{2.17}$$

Partiendo nuevamente de la Eq. (2.13), evaluamos la parte real de la autoenergía en $p = 0$, para posteriormente calcular el límite $p_0 \to 0$:

$$\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,0) = -\lambda^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n}{\omega}\mathcal{P}\left(\frac{p_0^2}{p_0^2(p_0^2-4\omega^2)}\right) = -\lambda^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n}{\omega}\mathcal{P}\left(\frac{1}{p_0^2-4\omega^2}\right). \tag{2.18}$$

En consecuencia,

$$\lim_{p_0\to 0}\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,0) = \lambda^2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{n}{\omega}\mathcal{P}\left(\frac{1}{4\omega^2}\right) = \lambda^2 \int \frac{k^2 dk \sin\theta d\theta d\varphi}{(2\pi)^3}\frac{n}{4\omega^3}. \tag{2.19}$$

Observamos que $4\omega^2 = 4(k^2+m^2)$ no se anula cuando $k \in \mathbb{R}$, por lo que $\mathcal{P}\left(\frac{1}{4\omega^2}\right) = \frac{1}{4\omega^2}$. Llevando a cabo la integración angular llegamos a

$$\boxed{\lim_{p_0\to 0}\mathrm{Re}\,\Pi'(p_0,0) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\omega^3} n(\omega).} \tag{2.20}$$

Los límites dados en las Eqs. (2.17) y (2.20) no son iguales. Sin embargo, introducimos el parámetro α mediante la relación

$$p_0 = \alpha p \qquad (0 \leq \alpha \leq \infty), \tag{2.21}$$

con lo que en general se tiene

$$\boxed{\lim_{p \to 0} \operatorname{Re} \Pi'(\alpha p, p) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega} n(\omega) \frac{k^2(1-\alpha^2)}{k^2 - \alpha^2\omega^2}.} \tag{2.22}$$

Si $\alpha = 0$, recuperamos el resultado de la Eq. (2.17). Si $\alpha \to \infty$, entonces $\frac{k^2(1-\alpha^2)}{k^2-\alpha^2\omega^2} \to \frac{k^2}{\omega^2}$, i.e., recobramos el resultado de la Eq. (2.20).

3. Origen de la no conmutatividad

3.1. Relación de dispersión a primer orden

Partiendo de la Eq. (2.4), y usando que en el límite $\epsilon \to 0$,

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{p_0 + i\epsilon + \alpha}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p_0 + i\epsilon + \alpha} - \frac{1}{p_0 - i\epsilon + \alpha}\right) = \frac{-\epsilon}{(p_0+\alpha)^2 + \epsilon^2} = -\pi\delta(p_0 + \alpha), \tag{3.1}$$

obtenemos la parte imaginaria de la autoenergía retardada:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \Pi_R(p_0, p) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{4\omega\tilde{\omega}} \Big[&(1 + n + \tilde{n}) \left(\delta(p_0 - \omega - \tilde{\omega}) - \delta(p_0 + \omega + \tilde{\omega})\right) \\ &- (n - \tilde{n}) \left(\delta(p_0 - \omega + \tilde{\omega}) - \delta(p_0 + \omega - \tilde{\omega})\right) \Big]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Calculamos la siguiente integral:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\operatorname{Im} \Pi'_R(u, p)}{u - p_0} = -\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\omega\tilde{\omega}} \Big[&(n + \tilde{n}) \left(\frac{1}{p_0 - \omega - \tilde{\omega}} - \frac{1}{p_0 + \omega + \tilde{\omega}} \right) \\ &- (n - \tilde{n}) \left(\frac{1}{p_0 - \omega + \tilde{\omega}} - \frac{1}{p_0 + \omega - \tilde{\omega}} \right) \Big]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Comparando con la Eq. (2.5) observamos que, a primer orden en la autoenergía, se obtiene la relación de dispersión

$$\boxed{\operatorname{Re} \Pi'(p_0, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \frac{\operatorname{Im} \Pi'_R(u, p)}{u - p_0}.} \tag{3.4}$$

3.2. Parte imaginaria de la autoenergía: dos contribuciones

La integral de la Eq. (3.2) tiene dos contribuciones principales. Para identificarlas más fácilmente, hacemos el cambio de variable $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{p}}{2}$, que se traduce en

$$\omega = \sqrt{k^2 + m^2} \quad \to \quad \omega_- \equiv \sqrt{\left(k^2 + m^2 + \frac{p^2}{4}\right) - kp\cos\theta}, \tag{3.5}$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{p})^2 + m^2} \quad \to \quad \omega_+ \equiv \sqrt{\left(k^2 + m^2 + \frac{p^2}{4}\right) + kp\cos\theta}. \tag{3.6}$$

Con esto, la parte imaginaria de la autoenergía retardada adquiere la forma

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\Pi_R(p_0,p) = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega_-\omega_+}\Big[&(1+n(\omega_-)+n(\omega_+))\,(\delta(p_0-\omega_--\omega_+)-\delta(p_0+\omega_-+\omega_+)) \\ &-(n(\omega_-)-n(\omega_+))\,(\delta(p_0-\omega_-+\omega_+)-\delta(p_0+\omega_--\omega_+))\Big].\end{aligned} \tag{3.7}$$

El término asociado a $-(n(\omega_-)-n(\omega_+))$ contribuye a la integral cuando $p_0=\pm(\omega_--\omega_+)$, o bien

$$\begin{aligned} p_0^2 &= (\omega_--\omega_+)^2 = 2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)-2\sqrt{\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)^2-k^2p^2\cos^2\theta} && (3.8)\\ &\leq 2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)-2\sqrt{\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)^2-k^2p^2} && (3.9)\\ &= 2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)-2\sqrt{\left(k^2+m^2-\frac{p^2}{4}\right)^2+m^2p^2} && (3.10)\\ &< 2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)-2\sqrt{\left(k^2+m^2-\frac{p^2}{4}\right)^2}=p^2. && (3.11)\end{aligned}$$

Esto se satisface en tanto $m^2>\frac{p^2}{4}$, que es consistente con el límite de momento nulo. Esta región espacialoide, $p_0^2-p^2<0$, es relevante sólo a temperatura finita, y se debe a la absorción de un campo virtual por una partícula real (en capa de masa) del plasma.

En contraste, el término asociado a $1+n(\omega_-)+n(\omega_+)$ sólo es no nulo cuando $p_0=\pm(\omega_-+\omega_+)$, o bien

$$\begin{aligned} p_0^2 &= (\omega_-+\omega_+)^2 = 2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)+2\sqrt{\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)^2-k^2p^2\cos^2\theta} && (3.12)\\ &\geq 2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)+2\sqrt{\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)^2-k^2p^2}. && (3.13)\end{aligned}$$

Sea $p_{0,min}^2(k)=2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)+2\sqrt{\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)^2-k^2p^2}$. Vemos que $\frac{dp_{0,min}^2(k)}{dk}=0 \iff k=0$. Más aún, $\frac{d^2p_{0,min}^2(k)}{dk^2}=\frac{4\left(4m^2-p^2\right)}{\sqrt{(4m^2+p^2)^2}}+4>0$, por lo que $k=0$ es un mínimo global. En este sentido,

$$p_0^2\geq p_{0,min}^2(k)=2\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)+2\sqrt{\left(k^2+m^2+\frac{p^2}{4}\right)^2-k^2p^2}\geq p_{0,min}^2(0)=4m^2+p^2. \tag{3.14}$$

Es decir, que el primer término es no nulo cuando $p_0\geq\sqrt{4m^2+p^2}$. Esto constituye una región temporaloide $p_0^2-p^2\geq 4m^2$, que también juega un papel en la teoría a temperatura cero.

Habiendo identificado las regiones importantes, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty}du\frac{\operatorname{Im}\Pi_R'(u,p)}{u-p_0}=\int_{-p}^{p}du\frac{\operatorname{Im}\Pi_R'(u,p)}{u-p_0}+\left(\int_{-\infty}^{-\sqrt{p^2+4m^2}}+\int_{\sqrt{p^2+4m^2}}^{\infty}\right)du\frac{\operatorname{Im}\Pi_R'(u,p)}{u-p_0}. \tag{3.15}$$

De la Eq. (3.2) es evidente que $\operatorname{Im}\Pi_R'(u,p)=-\operatorname{Im}\Pi_R'(-u,p)$. Así,

$$\int_{-\infty}^{\infty}du\frac{\operatorname{Im}\Pi_R'(u,p)}{u-p_0}=\int_{-\infty}^{0}du\frac{\operatorname{Im}\Pi_R'(u,p)}{u-p_0}+\int_{0}^{\infty}du\frac{\operatorname{Im}\Pi_R'(u,p)}{u-p_0} \tag{3.16}$$

$$= \int_0^\infty du \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(-u,p)}{-u-p_0} + \int_0^\infty du \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)}{u-p_0} = 2\int_0^\infty udu \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)}{u^2-p_0^2}. \tag{3.17}$$

Este resultado se aplica independientemente a los cortes espacialoide y temporaloide (dado que en ambos casos el intervalo de integración es simétrico), de manera que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty du \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)}{u-p_0} = \frac{2}{\pi}\int_0^p udu \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)}{u^2-p_0^2} + \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{p^2+4m^2}}^\infty udu \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)}{u^2-p_0^2}. \tag{3.18}$$

Introducimos las siguientes funciones, que codifican la dependencia en cada corte:

$$A(p_0,p) \equiv \frac{2}{\pi}\int_0^p udu \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)}{u^2-p_0^2}, \qquad B(p_0,p) \equiv \frac{2}{\pi}\int_{\sqrt{p^2+4m^2}}^\infty udu \frac{\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)}{u^2-p_0^2}. \tag{3.19}$$

De acuerdo con la Eq. (3.4),

$$\mathrm{Re}\,\Pi'_R(p_0,p) = A(p_0,p) + B(p_0,p). \tag{3.20}$$

3.2.1. Corte espacialoide

En la región $p_0^2 - p^2 < 0$, hemos visto que la contribución a la parte imaginaria de la autoenergía es

$$\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)\Big|_{u^2<p^2} = \frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega\tilde{\omega}}\Big[(\tilde{n}-n)\delta(u-\omega+\tilde{\omega}) + (n-\tilde{n})\delta(u+\omega-\tilde{\omega})\Big]. \tag{3.21}$$

Hacemos un cambio de variable $\boldsymbol{k} \to -(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})$ en el término que acompaña al factor $\delta(u-\omega+\tilde{\omega})$. Como se ha hecho evidente, el efecto neto de esto es la modificación $\omega \leftrightarrow \tilde{\omega}$, por lo que

$$\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)\Big|_{u^2<p^2} = \lambda^2\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega\tilde{\omega}}(n-\tilde{n})\delta(u+\omega-\tilde{\omega}). \tag{3.22}$$

En coordenadas esféricas la medida es $d^3k = k^2dk\sin\theta d\theta d\varphi$, de modo que debemos calcular

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta\delta(u+\omega-\tilde{\omega}) = \int_0^\pi \sin\theta d\theta\delta(u+\sqrt{k^2+m^2}-\sqrt{k^2+2pk\cos\theta+p^2+m^2}). \tag{3.23}$$

Definimos $f(\theta) \equiv u+\sqrt{k^2+m^2}-\sqrt{k^2+2pk\cos\theta+p^2+m^2}$, con lo que se obtiene

$$|f'(\theta)| = \frac{pk\sin\theta}{\sqrt{k^2+2pk\cos\theta+p^2+m^2}} = \frac{pk\sin\theta}{\tilde{\omega}(\theta)}. \tag{3.24}$$

La función $f(\theta)$ tiene dos raíces con signos opuestos. Sea θ_0 la raíz positiva. Aplicando la propiedad $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$, donde $f(x_i)=0$,

$$\sin\theta\delta(u+\omega-\tilde{\omega}) = \sin\theta\frac{\tilde{\omega}(\theta)\delta(\theta-\theta_0)}{pk\sin\theta_0}. \tag{3.25}$$

Por lo tanto, al integrar resulta

$$\int_0^\pi \sin\theta\delta(u+\omega-\tilde{\omega}) = \frac{\tilde{\omega}(\theta_0)}{pk}. \tag{3.26}$$

Sustituimos lo obtenido en la Eq. (3.22):

$$\mathrm{Im}\,\Pi'_R(u,p)\Big|_{u^2<p^2} = \lambda^2\int \frac{kdk}{(2\pi)^2}\frac{\pi}{4\omega p}(n-\tilde{n}) = \frac{\lambda^2}{16\pi}\int \frac{kdk}{\omega p}(n-\tilde{n}), \tag{3.27}$$

donde $\tilde{n} = n(\tilde{\omega}(\theta_0))$. Para p pequeño (y por consiguiente u pequeño),

$$f(\theta) \approx u + \sqrt{k^2 + m^2} - \sqrt{k^2 + m^2 + 2pk\cos\theta} \approx u + \omega - \omega - \frac{kp\cos\theta}{\omega} = u - \frac{kp\cos\theta}{\omega}. \tag{3.28}$$

Ergo, $u - \frac{kp\cos\theta_0}{\omega} = 0 \implies \cos\theta_0 = \frac{\omega u}{kp}$. Hacemos el cambio de variable $v = u/p$. Ya que $0 \leq u \leq p$, está claro que $0 \leq v \leq 1$. Así, $\cos\theta_0 = \frac{v\omega}{k} = v\frac{\sqrt{k^2+m^2}}{k} \geq v$, lo que implica $\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \leq k$. De esto, se tiene

$$\operatorname{Im}\Pi'_R(vp,p)\Big|_{u^2<p^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi}\int_{\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}}^{\infty} \frac{kdk}{\omega p}(n(\omega)-n(\omega+vp)) = -\frac{\lambda^2}{16\pi}v\int_{\frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}}^{\infty} \frac{kdk}{\omega}\frac{n(\omega+vp)-n(\omega)}{vp}. \tag{3.29}$$

Cambiamos la variable de integración a ω. Considerando que $kdk = \omega d\omega$ y que $k_{min} \equiv \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}} \implies \omega_{min} \equiv \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}$, se llega a

$$\operatorname{Im}\Pi'_R(vp,p)\Big|_{u^2<p^2} = -\frac{\lambda^2}{16\pi}v\int_{\omega_{min}}^{\infty} d\omega\frac{n(\omega+vp)-n(\omega)}{vp}. \tag{3.30}$$

En el límite en que p es pequeño, $\frac{n(\omega+vp)-n(\omega)}{vp} \to \frac{dn(\omega)}{d\omega}$. Por ende,

$$\lim_{p\to 0}\operatorname{Im}\Pi'_R(vp,p)\Big|_{u^2<p^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi}vn(\omega_{min}). \tag{3.31}$$

Regresamos a la expresión para $A(p_0,p)$ dada en la Eq. (3.19). Tras efectuar el cambio de variable $u = vp$, queda

$$A(p_0,p) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 vdv\frac{\operatorname{Im}\Pi'_R(vp,p)}{v^2-(p_0/p)^2}, \implies A(\alpha p,p) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 vdv\frac{\operatorname{Im}\Pi'_R(vp,p)}{v^2-\alpha^2}. \tag{3.32}$$

En el límite de momento nulo se obtiene, mediante la Eq. (3.31),

$$\lim_{p\to 0} A(\alpha p,p) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^1 \frac{v^2dvn(\omega_{min})}{v^2-\alpha^2} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^1 \frac{v^2dvn\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2}}\right)}{v^2-\alpha^2}. \tag{3.33}$$

Cambiando de variable de integración a $k = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}$, observamos que $v = \frac{k}{k^2+m^2} = \frac{k}{\omega}$. De esto, y usando que $\frac{d\omega}{dk} = \frac{k}{\omega}$,

$$\frac{dv}{dk} = \frac{\omega - k\frac{d\omega}{dk}}{\omega^2} = \frac{\omega-\frac{k^2}{\omega}}{\omega^2} = \frac{m^2}{\omega^3}. \tag{3.34}$$

Finalmente,

$$\boxed{\lim_{p\to 0} A(\alpha p,p) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^{\infty} \frac{k^2dk}{\omega^3}n(\omega)\frac{m^2}{k^2-\alpha^2\omega^2}.} \tag{3.35}$$

3.2.2. Corte temporaloide

En la región $p_0^2 - p^2 \leq 4m^2$, la contribución a la parte imaginaria de la autoenergía es

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\Pi_R(u,p)\Big|_{u^2\leq p^2+4m^2} &= \frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega\tilde{\omega}}(n+\tilde{n})\left(\delta(u-\omega-\tilde{\omega})-\delta(u+\omega+\tilde{\omega})\right) \\ &= \frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega\tilde{\omega}}n\left(\delta(u-\omega-\tilde{\omega})-\delta(u+\omega+\tilde{\omega})\right)\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$+\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega\tilde{\omega}}\tilde{n}\left(\delta(u-\omega-\tilde{\omega})-\delta(u+\omega+\tilde{\omega})\right). \tag{3.37}$$

En el segundo término modificamos $\boldsymbol{k}\to-\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p}$, lo que da lugar a

$$\operatorname{Im}\Pi_R(u,p)\Big|_{u^2\leq p^2+4m^2}=\lambda^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega\tilde{\omega}}n\left(\delta(u-\omega-\tilde{\omega})-\delta(u+\omega+\tilde{\omega})\right). \tag{3.38}$$

Usando la antisimetría de $\operatorname{Im}\Pi_R(u,p)$, encontramos que $B(p_0,p)$ puede escribirse como una integral que va de $\sqrt{p^2+4m^2}$ a ∞. Por esto, en la Eq. (3.38) sólo nos interesa el término $\delta(u-\omega-\tilde{\omega})$. Evaluando en $p=0$ se llega a

$$\operatorname{Im}\Pi_R(u,0)\Big|_{u^2\leq p^2+4m^2}=\lambda^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{4\omega^2}n(\omega)\delta(u-2\omega)=\frac{\lambda^2}{16\pi}\left[1-\frac{4m^2}{u^2}\right]^{1/2}n(u/2). \tag{3.39}$$

Por consiguiente,

$$B(p_0,0)=\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_{2m}^{\infty}udu\frac{\left[1-\frac{4m^2}{u^2}\right]^{1/2}n(u/2)}{u^2-p_0^2}\implies B(0,0)=\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_{2m}^{\infty}du\frac{\left[1-\frac{4m^2}{u^2}\right]^{1/2}n(u/2)}{u}. \tag{3.40}$$

Mediante el cambio de variable $u=2\sqrt{k^2+m^2}$ se tiene $\frac{du}{dk}=\frac{2k}{\omega}$, y en consecuencia,

$$du\frac{\left[1-\frac{4m^2}{u^2}\right]^{1/2}}{u}=\frac{\frac{2k}{\omega}dk\left[\frac{k^2}{\omega^2}\right]^{1/2}}{2\omega}=\frac{k^2}{\omega^3}dk. \tag{3.41}$$

Concluimos que el corte temporaloide en el límite de momento nulo produce la contribución

$$\boxed{B(0,0)=\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{k^2dk}{\omega^3}n(\omega).} \tag{3.42}$$

Notamos que, de acuerdo con las Eqs. (3.35) y (3.42),

$$\lim_{p\to0}\operatorname{Re}\Pi'(\alpha p,p)=\lim_{p\to0}A(\alpha p,p)+B(0,0)=\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{k^2dk}{\omega^3}n(\omega)\left(\frac{m^2}{k^2-\alpha^2\omega^2}+1\right), \tag{3.43}$$

$$\boxed{\lim_{p\to0}\operatorname{Re}\Pi'(\alpha p,p)=\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{dk}{\omega}n(\omega)\frac{k^2(1-\alpha^2)}{k^2-\alpha^2\omega^2}.} \tag{3.44}$$

Este resultado coincide con el de la Eq. (2.22). Encontramos que el corte espacialoide, aquel que no está presente a temperatura igual a cero, es el que acarrea la dependencia en $\alpha=\frac{p_0}{p}$. Anteriormente vimos que la no conmutatividad de los límites $p_0\to0$ y $p\to0$ está relacionada con dicha dependencia. En contraste, el corte temporaloide no presenta este problema, pues en $p^\mu\to0$ la función $B(p_0,p)$ toma un único valor.

4. Parametrización de Feynman

Sean $a\equiv K^2-m^2=k_0^2-\omega^2$ y $b\equiv(K+P)^2-m^2$. Desarrollamos:

$$\int\frac{d^4K}{(2\pi)^3}n(|k_0|)\delta(a)\mathcal{P}\frac{1}{b}\;=\;\int\frac{d^4K}{(2\pi)^3}n(|k_0|)\mathcal{P}\frac{\delta(k_0^2-\omega^2)}{(K+P)^2-m^2} \tag{4.1}$$

$$= \int \frac{d^4K}{(2\pi)^3} n(|k_0|) \mathcal{P} \frac{\delta(k_0-\omega)+\delta(k_0+\omega)}{(2\omega)((k_0+p_0)^2-(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2-m^2)} \tag{4.2}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n}{2\omega} \mathcal{P}\left[\frac{1}{(p_0+\omega)^2-\tilde{\omega}^2} + (p_0 \to -p_0)\right] \tag{4.3}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n}{\omega} \mathcal{P}\left(\frac{p_0^2-(\tilde{\omega}^2-\omega^2)}{(p_0^2-(\omega-\tilde{\omega})^2)(p_0^2-(\omega+\tilde{\omega})^2)}\right). \tag{4.4}$$

Comparando con la Eq. (2.13), concluimos que

$$\boxed{\operatorname{Re}\Pi'(p_0,p) = -\lambda^2 \int \frac{d^4K}{(2\pi)^3} n(|k_0|)\delta(a)\mathcal{P}\frac{1}{b}, \qquad \left\{a = K^2-m^2, \quad b = (K+P)^2-m^2\right\}.} \tag{4.5}$$

Usamos la parametrización de Feynman para escribir

$$\frac{1}{(a+i\epsilon)(b+i\epsilon)} = \int_0^1 \frac{dx}{C^2}, \qquad \left\{C \equiv a(1-x)+bx+i\epsilon\right\}. \tag{4.6}$$

Cuando los factores del denominador tienen parte imaginaria con signo distinto, es necesario usar la siguiente expresión, demostrada en el Apéndice A:

$$\boxed{\frac{1}{(a+i\epsilon)(b-i\epsilon)} = \mathcal{P}\int_0^1 \frac{dx}{D^2} + \frac{4\pi i\delta(a+b)}{a-b+2i\epsilon}, \qquad \left\{D \equiv a(1-x)+bx+i\epsilon(1-2x)\right\}.} \tag{4.7}$$

El término proporcional a la delta de Dirac se obvió en la Ref. [3]. No obstante, es esencial para comprender por qué los límites de bajo momento no son intercambiables

4.1. Cálculo en tiempo real

Contamos con una expresión para la parametrización de Feynman que nos permite calcular la parte real de la autoenergía usando un método alternativo a la integración directa. En concreto, tenemos que

$$\delta(a)\mathcal{P}\frac{1}{b} = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{a+i\epsilon}-\frac{1}{a-i\epsilon}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+i\epsilon}+\frac{1}{b-i\epsilon}\right) \tag{4.8}$$

$$= \frac{i}{4\pi} 2i \operatorname{Im}\left(\frac{1}{(a+i\epsilon)(b+i\epsilon)}+\frac{1}{(a+i\epsilon)(b-i\epsilon)}\right) \tag{4.9}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dx \operatorname{Im}\left(\mathcal{P}\frac{1}{C^2}+\mathcal{P}\frac{1}{D^2}+\frac{4\pi i\delta(a+b)(a-b-2i\epsilon)}{(a-b)^2+(2\epsilon)^2}\right) \tag{4.10}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\mathcal{P}\int_0^1 dx \operatorname{Im}\left(\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right) - \mathcal{P}\frac{2\delta(a+b)}{a-b}, \tag{4.11}$$

donde $C = a(1-x)+bx+i\epsilon$ y $D = a(1-x)+bx+i\epsilon(1-2x)$. De este modo, identificamos dos contribuciones en la Eq. (4.5), que escribimos como

$$\operatorname{Re}\Pi'(p_0,p) = \Pi_x(p_0,p)+\Pi_\delta(p_0,p), \tag{4.12}$$

$$\Pi_x(p_0,p) = \lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0|)\mathcal{P}\int_0^1 dx \operatorname{Im}\left(\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right), \qquad \Pi_\delta(p_0,p) = \lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0|)\mathcal{P}\frac{4\pi\delta(a+b)}{(a-b)}.$$

En el Apéndice B, basado en la Ref. [3], se muestra explícitamente que

$$\boxed{\Pi_x(p_0,p) = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int_0^{1/2} dx \frac{\partial}{\partial m^2}J, \qquad J \equiv \frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k} + (p_0 \to -p_0),} \tag{4.13}$$

donde $\phi_k = \left[(\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2 + m^2 - x(1-x)P^2\right]^{1/2}$. En el límite $p \to 0$, la función J no depende de x, por lo que la integración sólo resulta en un factor de $1/2$. Por otro lado, $\phi_k \to \omega$. En consecuencia,

$$\Pi_x(0,0) = -\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial k^2}\frac{n(\omega)}{\omega} = -\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{k^2dk}{2\pi^2}\frac{\partial}{\partial k^2}\frac{n(\omega)}{\omega} \tag{4.14}$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2}\int \frac{k^2dk}{2\pi^2}\frac{1}{2k}\frac{\partial}{\partial k}\frac{n(\omega)}{\omega} = -\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int dkk\frac{\partial}{\partial k}\frac{n(\omega)}{\omega}. \tag{4.15}$$

Integrando por partes, concluimos que

$$\boxed{\Pi_x(0,0) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int dk\frac{n(\omega)}{\omega}.} \tag{4.16}$$

Falta calcular el término de corrección

$$\Pi_\delta(p_0,p) = \lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0|)\mathcal{P}\frac{4\pi\delta(a+b)}{(a-b)} = \lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0|)\mathcal{P}\frac{4\pi\delta((K+P)^2+K^2-2m^2)}{K^2-(K+P)^2}, \tag{4.17}$$

que surge al aplicar correctamente la parametrización de Feynman. Tras hacer el cambio de variable $K^\mu \to K^\mu - P^\mu/2$,

$$\Pi_\delta(p_0,p) = \lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0-p_0/2|)\mathcal{P}\frac{4\pi\delta((K+P/2)^2+(K-P/2)^2-2m^2)}{(K-P/2)^2-(K+P/2)^2} \tag{4.18}$$

$$= -\lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0-p_0/2|)\mathcal{P}\frac{\pi\delta(K^2-m_{eff}^2)}{K\cdot P}, \tag{4.19}$$

donde $m_{eff} = [m^2 - P^2/4]^{1/2}$. Definimos $\Omega = [k^2+m_{eff}^2]^{1/2}$, de suerte que $K^2 - m_{eff}^2 = k_0^2 - \Omega^2$. Así,

$$\Pi_\delta(p_0,p) = -\lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0-p_0/2|)\mathcal{P}\frac{\pi\delta(k_0^2-\Omega^2)}{k_0p_0-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{p}} \tag{4.20}$$

$$= -\lambda^2\int\frac{d^4K}{(2\pi)^4}n(|k_0-p_0/2|)\mathcal{P}\pi\frac{\delta(k_0-\Omega)+\delta(k_0+\Omega)}{2\Omega(k_0p_0-kp\cos\theta)} \tag{4.21}$$

$$= -\lambda^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^4}\frac{\pi}{2\Omega}\mathcal{P}\left(n(|\Omega-p_0/2|)\frac{1}{\Omega p_0-kp\cos\theta} - n(|\Omega+p_0/2|)\frac{1}{\Omega p_0+kp\cos\theta}\right). \tag{4.22}$$

Llevando a cabo la integración angular,

$$\Pi_\delta = -\lambda^2\int\frac{k^2dk}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{2\Omega}\left(n(|\Omega-p_0/2|)\mathcal{P}\int_0^\pi\frac{\sin\theta d\theta}{\Omega p_0-kp\cos\theta} - n(|\Omega+p_0/2|)\mathcal{P}\int_0^\pi\frac{\sin\theta d\theta}{\Omega p_0+kp\cos\theta}\right)$$

$$= -\lambda^2\int\frac{kdk}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{2\Omega p}\operatorname{Re}\ln\left(\frac{\Omega p_0+kp}{\Omega p_0-kp}\right)(n(|\Omega-p_0/2|)-n(|\Omega+p_0/2|)) \tag{4.23}$$

$$= \lambda^2\alpha\int\frac{kdk}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{2\Omega}\operatorname{Re}\ln\left(\frac{\Omega\alpha+k}{\Omega\alpha-k}\right)\frac{n(|\Omega+\alpha p/2|)-n(|\Omega-\alpha p/2|)}{\alpha p}. \tag{4.24}$$

En el último renglón hicimos la sustitución $p_0 = \alpha p$. En el límite $p \to 0$ tenemos $\Omega \to \omega$, mientras que el último factor es una derivada:

$$\lim_{p\to 0}\Pi_\delta(\alpha p,p) = \lambda^2\alpha\int\frac{kdk}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{2\omega}\operatorname{Re}\ln\left(\frac{\omega\alpha+k}{\omega\alpha-k}\right)\frac{dn}{d\omega} = \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\alpha\int kdk\frac{1}{\omega}\frac{dn}{d\omega}\operatorname{Re}\ln\left(\frac{\omega\alpha+k}{\omega\alpha-k}\right). \tag{4.25}$$

Cambiando la variable de integración a ω,

$$\lim_{p\to 0}\Pi_\delta(\alpha p,p) = \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\alpha\int_m^\infty d\omega\frac{dn}{d\omega}\operatorname{Re}\ln\left(\frac{\omega\alpha+k}{\omega\alpha-k}\right). \tag{4.26}$$

Integramos por partes, usando que

$$\frac{d}{d\omega}\,\mathrm{Re}\ln\left(\frac{\omega\alpha+k}{\omega\alpha-k}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{\omega\alpha-k}{\omega\alpha+k}\right)\frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega\alpha+k}{\omega\alpha-k}\right)=\frac{2k\alpha}{k^2-\alpha^2\omega^2},\tag{4.27}$$

y obteniendo

$$\boxed{\lim_{p\to 0}\Pi_\delta(\alpha p,p)=-\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int\frac{dk}{\omega}n\frac{k^2\alpha^2}{k^2-\alpha^2\omega^2}.}\tag{4.28}$$

Es claro, de las Eq. (4.16) y (4.28) que

$$\boxed{\lim_{p\to 0}\mathrm{Re}\,\Pi'(\alpha p,p)=\Pi_x(0,0)+\lim_{p\to 0}\Pi_\delta(\alpha p,p)=\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int\frac{dk}{\omega}n\frac{k^2(1-\alpha^2)}{k^2-\alpha^2\omega^2}.}\tag{4.29}$$

Si bien las contribuciones Π_x y Π_δ no son independientemente iguales a A y B en el límite de momento nulo, el resultado coincide con el de las Eqs. (2.22) y (3.44). Dicho de otro modo, la parametrización de Feynman adecuada da lugar al mismo resultado que se obtiene, mediante un cálculo más directo, usando la relación de dispersión de la Eq. (3.4).

4.2. Cálculo en tiempo imaginario

La autoenergía a un loop está dada por

$$\Pi(p_{0l},p) = \frac{\lambda^2 T}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{D_1D_2},\tag{4.30}$$

$$D_1=(2\pi nT)^2+k^2+m^2,\qquad D_2=(2\pi(n+l)T)^2+(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2+m^2,\tag{4.31}$$

donde $p_{0l}=i2\pi lT$. A diferencia de lo que sucede en el caso real, D_1 y D_2 son positivos y no se anulan, por lo que es posible usar la parametrización de Feynman usual. Se define $D=(1-x)D_1+xD_2$, de manera que

$$\Pi(p_{0l},p)=\frac{\lambda^2T}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_0^1\frac{dx}{D^2}.\tag{4.32}$$

El Apéndice C muestra que la contribución térmica es

$$\boxed{\Pi'(p_{0l},p)=-\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial m^2}\int_0^{1/2}dxJ,\qquad J\equiv\frac{n(\phi_k+xp_{0l})}{\phi_k}+(p_{0l}\to -p_{0l}),}\tag{4.33}$$

donde $\phi_k=\left[(\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2+m^2-x(1-x)P_l^2\right]^{1/2}$. Podemos realizar el cambio de variable $\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{k}$, lo que no modifica nada más que $\phi_k=\left[k^2+m^2-x(1-x)P_l^2\right]^{1/2}$. Comparando con la Eq. (4.13), es claro que si reemplazamos $p_{0l}\to p_0\in\mathbb{R}$, entonces $\Pi'(p_{0l},p)\to\Pi_x(p_0,p)$. Sin embargo, $\Pi_x(p_0,p)$ no es la continuación analítica correcta de $\Pi'(p_{0l},p)$. El motivo es que Π_x tiene una infinidad de puntos rama. Para saldar este problema tenemos que sumar una función que cancele los puntos rama de Π_x y que se anule en $p_0=i2\pi lT$, es decir, en valores de p_0 iguales a frecuencias de Matsubara, de manera que la función total coincida con Π' en el formalismo de tiempo imaginario.

Primero encontraremos los puntos rama de Π_x, usando nuevamente que $\frac{\partial}{\partial m^2}J=\frac{\partial}{\partial k^2}J$ e integrando por partes:

$$\Pi_x(p_0,p)=-\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\int k^2dk\int_0^{1/2}dx\frac{\partial}{\partial k^2}J=\frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^\infty dk\int_0^{1/2}dxJ.\tag{4.34}$$

Aislamos los polos $\hat{x}(p_0,k)$ de J:

$$J \to \frac{N(p_0,k)}{x-\hat{x}(p_0,k)}, \tag{4.35}$$

donde la función $N(p_0,k)$ es analítica y no posee polos. Ya que $n(x)=(e^{\beta x}-1)^{-1}$, los puntos singulares de esta función están en $-i2\pi sT$, con s entero. Los polos $\hat{x}$ entonces satisfacen

$$\hat{\phi}_k \pm \hat{x}p_0 \equiv \phi_k(p_0,k,\hat{x}) \pm \hat{x}p_0 = -i2\pi sT. \tag{4.36}$$

Nos interesa el comportamiento de Π_x en los puntos singulares. Para la mayoría de valores de p_0 los polos no son problemáticos porque los contornos de integración de k y x pueden distorsionarse para evitarlos. Sin embargo, los límites de integración no son afectados por la forma del contorno. Es por ello que nos interesan los extremos de la integral sobre x (y posteriormente k). Vemos que si $x=0$, $\phi \to \omega \in \mathbb{R}$; por consiguiente, la ecuación anterior no tiene solución para p_0 real. En cambio, si $x=\frac{1}{2}$,

$$\Pi_x \to \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^\infty dkN(p_0,k)\int^{1/2}\frac{dx}{x-\hat{x}(p_0,k)} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^\infty dkN(p_0,k)\ln\left(\frac{1}{2}-\hat{x}(p_0,k)\right). \tag{4.37}$$

El punto rama es $\hat{x}(p_0,\hat{k})=\frac{1}{2}$. $\hat{k}$ corresponde al valor de k para el cual x adquiere el valor $1/2$. La serie de Laurent de la distribución de Bose-Einstein es [5]

$$n(z) = \frac{1}{\beta z} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z}{-(p_{0l}^2)+z^2}. \tag{4.38}$$

En este sentido, cerca de los polos

$$J = \frac{n(\phi_k + xp_0) + n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k} \to \frac{1}{\hat{\phi}_k}\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{(\phi_k \pm xp_0) - (\hat{\phi}_k \pm \hat{x}p_0)}\right). \tag{4.39}$$

Además, mediante la expansión $\phi_k \approx \hat{\phi}_k + \mathcal{O}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$, que no tiene términos lineales alrededor de $x=1/2$, aseguramos que las singularidades quedan descritas por

$$J \to \frac{1}{\beta p_0 \hat{\phi}_k}\left(\frac{1}{x-\hat{x}}\right). \tag{4.40}$$

A partir de esto, identificamos $N(p_0,k)=\frac{1}{\beta p_0\hat{\phi}_k}$. Cerca del punto rama, la serie de Taylor de $\hat{x}(p_0,k)$ es

$$\hat{x}(p_0,k) - \hat{x}(p_0,\hat{k}) = (k-\hat{k}(p_0))\frac{\partial \hat{x}}{\partial \hat{k}}. \tag{4.41}$$

Ignorando el término finito proporcional a $\ln\left(\frac{\partial\hat{x}}{\partial\hat{k}}\right)$, a partir de la Eq. (4.37) tenemos

$$\Pi_x \to \frac{\lambda^2}{8\pi^2}\int_0^\infty dkN(p_0,k)\ln\Big(\hat{k}(p_0)-k\Big). \tag{4.42}$$

En este caso, hay dos posibilidades relevantes, que son $k=0$ y $k\to\infty$. La segunda no produce singularidades porque $N(p_0,k\to\infty)$ tiende a 0 como $k^{1/2}$, más rápido de lo que el logaritmo tiende a infinito. En contraste, $k=0$ corresponde a una singularidad, cerca de la cual podemos sustituir $N(p_0,k)\to N(p_0,0)$, de modo que

$$\boxed{\Pi_x \to \frac{\lambda^2}{8\pi^2}N(p_0,0)\int_0 dk\ln\Big(\hat{k}(p_0)-k\Big).} \tag{4.43}$$

En tiempo real, habíamos encontrado una contribución dada por

$$\Pi_\delta = \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\int_0^\infty kdk\frac{L}{p}\,\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{\Omega p_0 + kp}{\Omega p_0 - kp}\right)\right], \qquad L = \frac{1}{\Omega}[n(\Omega + p_0/2) - n(\Omega - p_0/2)]. \tag{4.44}$$

Veremos que esta es la función que debemos sumar a Π_x para cancelar sus puntos rama. Es claro que

$$L(p_0 = i2\pi lT) = \frac{1}{\Omega}\left(\frac{1}{\exp(\beta\Omega)\exp(i\pi l) - 1} - \frac{1}{\exp(\beta\Omega)\exp(-i\pi l) - 1}\right) = 0, \tag{4.45}$$

lo que implica $(\Pi_x + \Pi_\delta)(p_0 = i2\pi lT, p) = \Pi_x(p_0 = i2\pi lT, p) = \Pi'(p_{0l}, p)$. Utilizando que $\frac{1}{\exp(u)-1} = \frac{d}{du}\ln[1-\exp(-u)]$ y $\frac{dk}{d\Omega} = \frac{\Omega}{k}$, podemos expresar

$$kL = \frac{k}{\Omega}\frac{d}{d\beta\Omega}\ln\left(\frac{1-\exp(-\beta(\Omega + p_0/2))}{1-\exp(-\beta(\Omega - p_0/2))}\right) = \frac{1}{\beta}\frac{d}{dk}\ln\left(\frac{1-\exp(-\beta(\Omega + p_0/2))}{1-\exp(-\beta(\Omega - p_0/2))}\right). \tag{4.46}$$

Ya que $\frac{d}{dk}\beta\frac{p_0}{2} = 0$, sumamos un cero conveniente:

$$kL = \frac{1}{\beta}\frac{d}{dk}\left[\ln\left(\frac{1-\exp(-\beta(\Omega + p_0/2))}{1-\exp(-\beta(\Omega - p_0/2))}\right) + \ln(\exp(\beta p_0/2))\right] \tag{4.47}$$

$$= \frac{1}{\beta}\frac{d}{dk}\ln\left(\exp(\beta p_0/2)\frac{1-\exp(-\beta(\Omega + p_0/2))}{1-\exp(-\beta(\Omega - p_0/2))}\right) = \frac{1}{\beta}\frac{d}{dk}\ln\left(\frac{\sinh(\beta(\Omega + p_0/2)/2)}{\sinh(\beta(\Omega - p_0/2)/2)}\right). \tag{4.48}$$

Definimos $Q \equiv \frac{\sinh(\beta(\Omega + p_0/2)/2)}{\sinh(\beta(\Omega - p_0/2)/2)}$. Al integrar por partes llegamos a

$$\Pi_\delta = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 p\beta}\int_0^\infty dk\frac{d}{dk}\ln(Q)\,\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{\Omega p_0 + kp}{\Omega p_0 - kp}\right)\right] \tag{4.49}$$

$$= \frac{\lambda^2}{16\pi^2 p\beta}\left\{\left[\ln(Q)\,\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{\Omega p_0 + kp}{\Omega p_0 - kp}\right)\right]\right]_0^\infty - \int_0^\infty dk\ln(Q)\frac{d}{dk}\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{\Omega p_0 + kp}{\Omega p_0 - kp}\right)\right]\right\}. \tag{4.50}$$

Calculamos

$$M(p_0, k) \equiv -\frac{1}{p\beta}\frac{d}{dk}\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{\Omega p_0 + kp}{\Omega p_0 - kp}\right)\right] = -\frac{1}{p\beta}\frac{\Omega p_0 - kp}{\Omega p_0 + kp}\frac{d}{dk}\frac{\Omega p_0 + kp}{\Omega p_0 - kp} \tag{4.51}$$

$$= -\frac{1}{p\beta}\frac{2p_0 p}{\Omega^2 p_0^2 - k^2p^2}\left(\Omega - \frac{k^2}{\Omega}\right) = -\frac{2p_0\left(\Omega^2 - k^2\right)}{\beta\Omega(\Omega^2p_0^2 - k^2p^2)}. \tag{4.52}$$

Queda

$$\Pi_\delta = \frac{\lambda^2}{16\pi^2 p\beta}\left[\ln(Q)\,\mathrm{Re}\left[\ln\left(\frac{\Omega p_0 + kp}{\Omega p_0 - kp}\right)\right]\right]_0^\infty + \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\int_0^\infty dk\ln(Q)\,M(p_0, k) \tag{4.53}$$

$$= \frac{\lambda^2}{32\pi^2}\frac{p_0}{p}\ln\left(\frac{p_0 + p}{p_0 - p}\right) + \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\int_0^\infty dk\ln(Q)M(p_0, k), \tag{4.54}$$

donde usamos que $\lim_{k\to\infty} Q = \exp(\beta p_0/2)$. Los puntos rama ocurren en los ceros de las funciones $\sinh(\beta(\Omega + p_0/2)/2)$ y $\sinh(\beta(\Omega - p_0/2)/2)$; es decir, en los puntos $\hat{k}(p_0)$ tales que

$$\Omega(p_0, \hat{k}) \pm \frac{1}{2}p_0 = -i2\pi sT. \tag{4.55}$$

Es notable que $\Omega(p_0, \hat{k}) = \phi_k(p_0, k, 1/2) = [k^2 + m^2 - P^2/4]^{1/2}$. En este sentido, las Eqs. (4.36) y (4.55) son equivalentes, por lo que las singularidades de Π_x y Π_δ coinciden. Específicamente, la parte singular de Π_δ es

$$\Pi_\delta \to \frac{\lambda^2}{16\pi^2}\int_0^\infty dkM(p_0, k)\ln\Big(\hat{k}(p_0) - k\Big). \tag{4.56}$$

Ya que $M(p_0, k \to \infty) = 0$, la única divergencia ocurre en $k = 0$. Es decir,

$$\boxed{\Pi_\delta \to \frac{\lambda^2}{16\pi^2} M(p_0, 0) \int_0 dk \ln\Big(\hat{k}(p_0) - k\Big).} \tag{4.57}$$

Además,

$$N(p_0, 0) = \frac{1}{\beta p_0 \hat{\phi}_k} = \frac{1}{\beta p_0 \Omega}, \qquad M(p_0, 0) = -\frac{2p_0\Omega^2}{\beta\Omega^3 p_0^2} = -\frac{2}{\beta p_0 \Omega} = -2N(p_0, 0). \tag{4.58}$$

De acuerdo con la Eq. (4.43), concluimos que las singularidades de Π_δ cancelan a las de Π_x.

En resumen, obtuvimos la contribución térmica a la autoenergía, Π', utilizando parametrización de Feynman en el formalismo de tiempo imaginario. La continuación analítica $\Pi' \to \Pi_x$ no es correcta, pues Π_x posee una infinidad de puntos rama. Sin embargo, al sumar Π_δ se sigue cumpliendo $(\Pi_x + \Pi_\delta)(p_0 = i2\pi lT, p) = \Pi'(p_{0l}, p)$ y, más aún, se cancelan las singularidades de Π_x, lo que indica que $\Pi' \to \Pi_x + \Pi_\delta$ es la continuación analítica adecuada. Esto coincide con el cálculo mediante parametrización de Feynman en tiempo real, como se deduce de la Eq. (4.12).

5. Conclusiones

Se analizaron dos cálculos de la autoenergía del campo escalar en la teoría cúbica, uno en tiempo real y otro en tiempo imaginario, desarrollados en las Refs. [3, 2]. Los autores argumentan que los límites $p_0 \to 0$ y $p \to 0$ de la autoenergía térmica Π' son intercambiables. Sin embargo, al usar parametrización de Feynman, el cálculo en tiempo real pasó por alto el término proporcional a la delta de Dirac en la Eq. (4.7); por su parte, en el cálculo en tiempo imaginario no se consideraron algunos aspectos importantes al realizar la continuación analítica de la autoenergía. Es precisamente el término tipo delta el que (i) origina la no conmutatividad de los límites de momento nulo y (ii) cancela los términos no deseados de la continuación analítica errónea, dando resultados consistentes.

En general, podemos expresar la parte real de la autoenergía cuando $p_0, p \to 0$ como

$$\lim_{p \to 0} \operatorname{Re} \Pi'(\alpha p, p) = \frac{\lambda^2}{8\pi^2} \int_0^\infty \frac{dk}{\omega} n(\omega) \frac{k^2(1-\alpha^2)}{k^2 - \alpha^2\omega^2}. \tag{5.1}$$

Los casos $\alpha = 0$ y $\alpha \to \infty$ corresponden, respectivamente, a $\lim_{p\to 0} \operatorname{Re}\Pi'(0, p)$ y $\lim_{p_0 \to 0} \operatorname{Re}\Pi'(p_0, 0)$. Desde el punto de vista cinemático, la no conmutatividad de los límites surge de la contribución espacialoide $P^2 < 0$, que sólo se manifiesta en la teoría térmica (en contraste con la contribución temporaloide $P^2 > 4m^2$, presente incluso a $T = 0$). Esto es de esperarse, pues a $T = 0$ la autoenergía depende del 4-momento p^μ, y no de p_0 y p independientemente.

Referencias

[1] H. A. Weldon, *Mishaps with Feynman parametrization at finite temperature*, Phys. Rev. D **47**, 594 (1993).

[2] P. S. Gribosky & B. R. Holstein, *The zero momentum limit of the vacuum polarization at finite temperature*, Z. Phys. C - Particles and Fields **47**, 205–214 (1990).

[3] P. F. Bedaque & A. Das, *Zero-momentum limit of Feynman amplitudes at finite temperature*, Phys. Rev. D **45**, 2906 (1992).

[4] M. Le Bellac, *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press (2010).

[5] A. M. Schakel, *Zeta function regularization of infrared divergences in Bose-Einstein condensation*, Zhurnal Fyizichnikh Doslyidzhen **2**, 140 (2003).

Apéndices

A. Prueba: Parametrización de Feynman

A temperatura cero, el cálculo de amplitudes mediante diagramas de Feynman (e.g. autoenergías, que dan resultados finitos tras algún tipo de regularización) involucra cantidades de la forma $\frac{1}{(a+i\epsilon)(b+i\epsilon)}$, que pueden reescribirse en términos de parámetros de Feynman:

$$\frac{1}{(a+i\epsilon)(b+i\epsilon)} = \int_0^1 \frac{dx}{[(a+i\epsilon)(1-x)+(b+i\epsilon)x]^2} = \int_0^1 \frac{dx}{[a(1-x)+bx+i\epsilon]^2}, \tag{A.1}$$

siendo a y b polinomios del momento externo p^μ. La parte real e imaginaria de las amplitudes queda determinada por una única función del momento. Sin embargo, a temperatura finita es necesario realizar un cálculo para la parte real y otro para la parte imaginaria de la amplitud. En la Eq. (4.5), observamos, como es usual a $T \neq 0$, que la parte real involucra un factor de la forma $\delta(a)\mathcal{P}\frac{1}{b}$. Expresamos estas cantidades en términos de límites $\epsilon \to 0$:

$$\delta(a)\mathcal{P}\frac{1}{b} = \frac{i}{2\pi}\left(\frac{1}{a+i\epsilon} - \frac{1}{a-i\epsilon}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{b+i\epsilon} + \frac{1}{b-i\epsilon}\right). \tag{A.2}$$

De este producto, dos combinaciones tienen partes imaginarias con signos opuestos. En consonancia con la Eq. (A.1), podríamos esperar que

$$\frac{1}{(a+i\epsilon)(b-i\epsilon)} = \mathcal{P}\int_0^1 \frac{dx}{[(a+i\epsilon)(1-x)+(b-i\epsilon)x]^2} = \mathcal{P}\int_0^1 \frac{dx}{[a(1-x)+bx+i\epsilon(1-2x)]^2}. \tag{A.3}$$

Introduciendo la cantidad $D \equiv a(1-x)+bx+i\epsilon(1-2x)$, la ecuación anterior queda

$$\frac{1}{(a+i\epsilon)(b-i\epsilon)} = \mathcal{P}\int_0^1 \frac{dx}{D^2} = \mathcal{P}\int_0^1 \mathrm{Re}\,\frac{dx}{D^2} + i\mathcal{P}\int_0^1 \mathrm{Im}\,\frac{dx}{D^2}, \tag{A.4}$$

donde la integral se define a partir del valor principal puesto que la parte imaginaria de $\frac{1}{D^2}$ se anula en $x = \frac{1}{2}$, lo cual no sucede cuando ambos factores tienen parte imaginaria con el mismo signo. La Eq. (A.3) es válida cuando $b \neq -a$, lo cual es fácil de probar integrando directamente. Si $b = -a$, $\frac{1}{(a+i\epsilon)(b-i\epsilon)} = -\frac{1}{(a+i\epsilon)^2}$. Por otra parte, $D = (a+i\epsilon)(1-2x)$, lo que implica

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\int_0^1 \frac{dx}{D^2} =& \frac{1}{(a+i\epsilon)^2}\mathcal{P}\int_0^1 \frac{dx}{(1-2x)^2}\\ =& \frac{1}{(a+i\epsilon)^2}\lim_{\eta\to 0}\left(\int_0^{\frac{1}{2}-\eta}\frac{dx}{(1-2x)^2} + \int_{\frac{1}{2}+\eta}^1 \frac{dx}{(1-2x)^2}\right) = \frac{1}{(a+i\epsilon)^2}\lim_{\eta\to 0}\left(-1+\frac{2}{\eta}\right).\end{aligned} \tag{A.5}$$

Ciertamente las expresiones no coinciden, y esto se debe a que la integral diverge incluso tomando el valor principal $\mathcal{P}\frac{1}{(1-2x)^2}$. Esto sugiere que falta considerar un término extra que sólo influya en el caso $-b = a$, cancelando la divergencia en la integral y proporcionando el resultado correcto. Demostraremos explícitamente que el cálculo adecuado involucra la presencia de dicho término. Notamos que si $E \equiv (a-b+2i\epsilon)s + (a+b)r/2$, entonces

$$I \equiv \int_0^\infty ds \int_{-2s}^{2s} dr \exp(iE) = \int_0^\infty ds \int_{-2s}^{2s} dr \exp(i(a-b+2i\epsilon)s)\exp(i(a+b)r/2) \tag{A.6}$$

$$= \int_0^\infty ds \exp(i(a-b+2i\epsilon)s)\left[\frac{\exp(i(a+b)s)}{i(a+b)/2} - \frac{\exp(i(a+b)s))}{i(a+b)/2}\right] \tag{A.7}$$

$$= \frac{1}{i(a+b)/2}\int_0^\infty ds\Big[\exp(2i(a+i\epsilon)s)-\exp(-2i(b-i\epsilon)s)\Big] \tag{A.8}$$

$$= \frac{1}{i(a+b)/2}\left[-\frac{1}{2i(a+i\epsilon)}-\frac{1}{2i(b-i\epsilon)}\right]=\frac{1}{(a+b)}\left[\frac{1}{(a+i\epsilon)}+\frac{1}{(b-i\epsilon)}\right]. \tag{A.9}$$

Por lo tanto, $I=\frac{1}{(a+i\epsilon)(b-i\epsilon)}$. Sea

$$F_\eta \equiv \int_0^{\frac{1}{2}-\eta}\frac{dx}{D^2}+\int_{\frac{1}{2}+\eta}^1\frac{dx}{D^2}. \tag{A.10}$$

Cuando $\eta\to 0$, F_η es igual a $\mathcal{P}\int_0^1\frac{dx}{D^2}$. De 0 a $\frac{1}{2}-\eta$, la parte imaginaria de D es positiva, por lo que $\lim_{r\to\infty}e^{iDr}=0$ y entonces

$$-\int_0^\infty rdr\exp(iDr)=-\left[\frac{e^{iDr}(-1+iDr)}{(iD)^2}\right]_0^\infty=\frac{1}{D^2}. \tag{A.11}$$

En cambio, de $\frac{1}{2}+\eta$ a 1 la parte imaginaria de D es negativa, por lo que $\lim_{r\to-\infty}e^{iDr}=0$ y

$$\int_{-\infty}^0 rdr\exp(iDr)=\left[\frac{e^{iDr}(-1+iDr)}{(iD)^2}\right]_{-\infty}^0=\frac{1}{D^2}. \tag{A.12}$$

En consecuencia,

$$F_\eta=-\int_0^\infty rdr\int_0^{\frac{1}{2}-\eta}dx\exp(iDr)+\int_{-\infty}^0 rdr\int_{\frac{1}{2}+\eta}^1 dx\exp(iDr). \tag{A.13}$$

Cambiamos de variables a $s=r(-x+1/2)$, lo que permite identificar

$$E = (a-b+2i\epsilon)r(-x+1/2)+(a+b)r/2=[(a-b+2i\epsilon)(-x+1/2)+(a+b)1/2]\,r \tag{A.14}$$

$$= [a(1-x)+bx+i\epsilon(1-2x)]\,r=Dr. \tag{A.15}$$

Asimismo, $rdx=-ds$, de suerte que

$$F_\eta=\int_0^\infty dr\int_{\frac{r}{2}}^{\eta r}ds\exp(iE)-\int_{-\infty}^0 dr\int_{-\eta r}^{-\frac{r}{2}}ds\exp(iE)=-\int_0^\infty dr\int_{\eta r}^{\frac{r}{2}}ds\exp(iE)-\int_{-\infty}^0 dr\int_{-\eta r}^{-\frac{r}{2}}ds\exp(iE). \tag{A.16}$$

Cambiando el orden de la integración,

$$F_\eta=-\int_0^\infty ds\int_{2s}^{\frac{s}{\eta}}dr\exp(iE)-\int_0^\infty ds\int_{-\frac{s}{\eta}}^{-2s}dr\exp(iE), \tag{A.17}$$

pues son equivalentes las regiones $\left\{0<r<\infty,\frac{r}{2}<s<\eta r\right\}$ y $\left\{0<s<\infty,\frac{s}{\eta}<r<2s\right\}$. Comparamos esta expresión con la definición de I dada en la Eq. (A.6). Si bien no coinciden, es claro que

$$I-F_\eta=\int_0^\infty ds\int_{-s/\eta}^{s/\eta}dr\exp(iE). \tag{A.18}$$

En el límite $\eta\to 0$,

$$\lim_{\eta\to 0}(I-F_\eta)=\int_0^\infty ds\int_{-\infty}^\infty dr\exp(iE)=\int_0^\infty ds\exp(i(a-b+2i\epsilon)s)\int_{-\infty}^\infty dr\exp(i(a+b)r/2). \tag{A.19}$$

Concluimos que

$$I=\lim_{\eta\to 0}F_\eta+\lim_{\eta\to 0}(I-F_\eta)=\mathcal{P}\int_0^1\frac{dx}{D^2}+\frac{i}{a-b+2i\epsilon}2\pi\delta\left(\frac{a+b}{2}\right), \tag{A.20}$$

$$\frac{1}{(a+i\epsilon)(b-i\epsilon)}=\mathcal{P}\int_0^1\frac{dx}{D^2}+\frac{4\pi i\delta(a+b)}{a-b+2i\epsilon}. \tag{A.21}$$

B. Complemento: Cálculo en tiempo real

Desarrollando,

$$\begin{aligned} C &= (K^2-m^2)(1-x)+((K+P)^2-m^2)x+i\epsilon && \text{(B.1)}\\ &= (K+xP)^2-m^2+x(1-x)P^2+i\epsilon && \text{(B.2)}\\ &= (k_0+xp_0)^2-\left[(\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2+m^2-x(1-x)P^2\right]+i\epsilon. && \text{(B.3)}\end{aligned}$$

Definimos $\phi_k=\left[(\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2+m^2-x(1-x)P^2\right]^{1/2}$, de modo que

$$C=(k_0+xp_0)^2-\phi_k^2+i\epsilon, \qquad D=(k_0+xp_0)^2-\phi_k^2+i\epsilon(1-2x). \tag{B.4}$$

Es claro que $\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{1}{C}\right)=\frac{-i}{C^2}$, de manera que podemos escribir

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{C^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\operatorname{Im}\left(\frac{i}{C}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{1}{(k_0+xp_0)^2-\phi_k^2+i\epsilon}+\frac{1}{(k_0+xp_0)^2-\phi_k^2-i\epsilon}\right) && \text{(B.5)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{1}{k_0+xp_0+\phi_k-\frac{i\epsilon}{2\phi_k}}\frac{1}{k_0+xp_0-\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}}+(\epsilon\to-\epsilon)\right). && \text{(B.6)}\end{aligned}$$

Análogamente, usando que $\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(\frac{1}{D}\right)=\frac{-i(1-2x)}{D^2}$, llegamos a

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{D^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{1}{1-2x}\operatorname{Im}\left(\frac{i}{D}\right) && \text{(B.7)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{1}{1-2x}\left(\frac{1}{k_0+xp_0+\phi_k-\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}\frac{1}{k_0+xp_0-\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}+(\epsilon\to-\epsilon)\right). && \text{(B.8)}\end{aligned}$$

Estas expresiones son útiles porque nos permiten utilizar teorema del residuo. Sin embargo, la función $n(|k_0|)$ no es analítica dada la presencia del valor absoluto. Esto se soluciona al separar la integral y cambiar de variable $k_0\to-k_0$ en la integral de $-\infty$ a 0:

$$\begin{aligned} \Pi_x(p_0,p) &= \lambda^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{\infty}dk_0 n(|k_0|)\mathcal{P}\int_0^1 dx\operatorname{Im}\left(\frac{1}{C^2}+\frac{1}{D^2}\right) && \text{(B.9)}\\ &= \lambda^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^4}\left[\int_0^{\infty}dk_0 n(k_0)\mathcal{P}\int_0^1 dx\operatorname{Im}\left(\frac{1}{C^2}+\frac{1}{C'^2}+\frac{1}{D'^2}+\frac{1}{D^2}\right),\right. && \text{(B.10)}\end{aligned}$$

donde C' y D' son C y D tras el cambio $k_0\to-k_0$. La integral total es

$$\begin{aligned} \Pi_x(p_0,p)=\lim_{\mu\to0^+}\frac{\lambda^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^4}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathcal{P}\int_0^1 dx\int_\mu^\infty dk_0 n(k_0)&\\ \times\Bigg[\frac{1}{k_0+xp_0+\phi_k-\frac{i\epsilon}{2\phi_k}}\frac{1}{k_0+xp_0-\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}}&\\ +\frac{1}{k_0+xp_0+\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}}\frac{1}{k_0+xp_0-\phi_k-\frac{i\epsilon}{2\phi_k}}&\\ +\frac{1}{1-2x}\frac{1}{k_0+xp_0+\phi_k-\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}\frac{1}{k_0+xp_0-\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}&\\ +\frac{1}{1-2x}\frac{1}{k_0+xp_0+\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}\frac{1}{k_0+xp_0-\phi_k-\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}&\\ +(k_0\to-k_0)\Bigg].& \end{aligned} \tag{B.11}$$

Escogiendo como contorno un sector circular en el cuadrante superior derecho del plano complejo, sólo los polos con parte imaginaria positiva son relevantes. Tras integrar k_0,

$$
\begin{aligned}
\Pi_x(p_0,p) =& \frac{i\lambda^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\mathcal{P}\Bigg[\int_0^1 dx n\left(\phi_k - xp_0 + \frac{i\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}} \\
&+\int_0^1 dx n\left(\phi_k + xp_0 + \frac{i\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}} \\
&+\int_{1/2}^1 dx\frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k - xp_0 - \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k-\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}} \\
&+\int_{1/2}^1 dx\frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k + xp_0 - \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k-\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}} \\
&+\int_0^{1/2} dx\frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k - xp_0 + \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}} \\
&+\int_0^{1/2} dx\frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k + xp_0 + \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{B.12}
$$

En el límite $\epsilon\to 0$,

$$
\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[n\left(\phi_k - xp_0 + \frac{i\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}}\right] = -\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[\frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k - xp_0 - \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k-\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}\right], \tag{B.13}
$$

y lo mismo al cambiar $p_0\to -p_0$. Esto implica que en la expresión para Π_x las integrales $\int_{1/2}^1$ se cancelan con la parte correspondiente de las integrales $\int_0^1 = \int_0^{1/2}+\int_{1/2}^1$, reduciendo el resultado a

$$
\begin{aligned}
\Pi_x =& \frac{i\lambda^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int_0^{1/2}dx\frac{\partial}{\partial\epsilon}\Bigg[n\left(\phi_k - xp_0 + \frac{i\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}} + n\left(\phi_k + xp_0 + \frac{i\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}} \\
&+\frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k - xp_0 + \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}} + \frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k + xp_0 + \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{B.14}
$$

Se pueden juntar el primer y el tercer término, reexpresándose como

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial}{\partial\epsilon}\left[n\left(\phi_k - xp_0 + \frac{i\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i\epsilon}{2\phi_k}} + \frac{1}{1-2x}n\left(\phi_k - xp_0 + \frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}\right)\frac{1}{\phi_k+\frac{i(1-2x)\epsilon}{2\phi_k}}\right] \\
&= \frac{2i}{2\phi_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\left[\frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k}\right].
\end{aligned}
\tag{B.15}
$$

Lo mismo sucede con el segundo y cuarto término tras el cambio $p_0\to -p_0$, lo que da lugar a

$$
\begin{aligned}
\Pi_x(p_0,p) &= \frac{i\lambda^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int_0^{1/2}dx\left[\frac{2i}{2\phi_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\left[\frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k}\right] + (p_0\to -p_0)\right] \\
&= -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int_0^{1/2}dx\left[\frac{1}{2\phi_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\left[\frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k}\right] + (p_0\to -p_0)\right].
\end{aligned}
\tag{B.16}
$$

Por otro lado, puesto que $\phi_k^2 = \left[(\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2 + m^2 - x(1-x)p^2\right]^{1/2}$ entonces $\frac{\partial\phi_k}{\partial m^2} = \frac{1}{2\phi_k}$. De tal modo,

$$
\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k} = \frac{\partial\phi_k}{\partial m^2}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k} = \frac{1}{2\phi_k}\frac{\partial}{\partial\phi_k}\frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k}. \tag{B.17}
$$

Este es precisamente el integrando de la Eq. (B.16). Por lo tanto,

$$\Pi_x(p_0,p) = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int_0^{1/2}dx\frac{\partial}{\partial m^2}\left[\frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k} + (p_0\to -p_0)\right] = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int_0^{1/2}dx\frac{\partial}{\partial m^2}J, \quad \text{(B.18)}$$

$$J \equiv \frac{n(\phi_k - xp_0)}{\phi_k} + (p_0\to -p_0). \quad \text{(B.19)}$$

Es directo ver que $\frac{\partial J}{\partial m^2} = \frac{\partial J}{\partial k^2}$, de manera que

$$\Pi_x(p_0,p) = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\mathcal{P}\int_0^{1/2}dx\frac{\partial}{\partial k^2}J. \quad \text{(B.20)}$$

C. Complemento: Cálculo en tiempo imaginario

Desarrollando,

$$\begin{aligned} D &= (1-x)[(2\pi nT)^2 + k^2 + m^2] + x[(2\pi(n+l)T)^2 + (\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})^2 + m^2] & \text{(C.1)}\\ &= (2\pi T)^2\left[(n+xl)^2 + x(1-x)l^2\right] + (\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2 + m^2 + x(1-x)p^2 & \text{(C.2)}\\ &= -(k_{0n}+xp_{0l})^2 + (\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2 + m^2 - x(1-x)P_l^2 = -(k_{0n}+xp_{0l})^2 + \phi_k^2. & \text{(C.3)}\end{aligned}$$

Como en el cálculo en el formalismo de tiempo real, hemos definido $\phi_k = [(\boldsymbol{k}+x\boldsymbol{p})^2+m^2-x(1-x)P_l^2]^{1/2}$, con $P_l = p_{0l}^2 - p^2$. El resultado de la suma $\sum_n \frac{1}{D^2}$ es:

```
$Assumptions = {Element[l, Integers], T > 0, x > 0, x < 1, φ > 0};
|asunciones      |pertenece a  |números enteros
D1 = (2 * Pi * T) ^2 (n + l * x) ^2 + φ^2;
          |número pi
Simplify[Sum[1 / D1^2, {n, -Infinity, Infinity}]]
|simplifica |suma          |infinito   |infinito
```

$$-\frac{2\,i\,T\,\mathrm{Cot}\left[l\,\pi\,x - \frac{i\,\phi}{2\,T}\right] - 2\,i\,T\,\mathrm{Cot}\left[l\,\pi\,x + \frac{i\,\phi}{2\,T}\right] + \phi\left(\mathrm{Csc}\left[l\,\pi\,x - \frac{i\,\phi}{2\,T}\right]^2 + \mathrm{Csc}\left[l\,\pi\,x + \frac{i\,\phi}{2\,T}\right]^2\right)}{16\,T^2\,\phi^3}$$

Usando las propiedades $\cot(ix) = -i\coth(x)$ y $\csc(ix) = -i\,\mathrm{csch}(x)$ queda

$$T\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{D^2} = \frac{1}{16T\phi_k^3}\left(2T\coth\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right) + \phi_k\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right) + (p_{0l}\to -p_{0l})\right). \quad \text{(C.4)}$$

Así,

$$\Pi(p_{0l},p) = \frac{\lambda^2}{8}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_0^1 dx\frac{1}{4T\phi_k^3}\left(2T\coth\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right) + \phi_k\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right) + (p_{0l}\to -p_{0l})\right). \quad \text{(C.5)}$$

Ahora usamos la relación

$$\frac{1}{4T\phi_k^3}\left(2T\coth\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right) + \phi_k\,\mathrm{csch}^2\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right)\right) = -\frac{1}{2\phi_k}\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{\coth\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right)}{\phi_k} = -\frac{\partial}{\partial m^2}\frac{\coth\left(\frac{\phi_k+xp_{0l}}{2T}\right)}{\phi_k}. \quad \text{(C.6)}$$

Esta forma es conveniente porque permite separar la contribución térmica ($\coth\left(\frac{x}{2T}\right) = 1 + 2n(x)$) y comparar el resultado con el formalismo en tiempo real.

$$\Pi'(p_{0l},p) = -\frac{\lambda^2}{8}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\int_0^1 dx\frac{\partial}{\partial m^2}\left(2\frac{n(\phi_k+xp_{0l})}{\phi_k} + (p_{0l}\to -p_{0l})\right) \quad \text{(C.7)}$$

$$= \quad -\frac{\lambda^2}{4}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial m^2}\int_0^1 dxJ, \tag{C.8}$$

$$J = \frac{n(\phi_k + xp_{0l})}{\phi_k} + (p_{0l} \to -p_{0l}). \tag{C.9}$$

Notamos que

$$\int_0^1 dxJ = \int_0^{1/2} dxJ + \int_{1/2}^1 dxJ = \int_0^{1/2} dx\frac{n(\phi_k + xp_{0l}) + n(\phi_k - xp_{0l})}{\phi_k} + \int_{1/2}^1 dx\frac{n(\phi_k + xp_{0l}) + n(\phi_k - xp_{0l})}{\phi_k}. \tag{C.10}$$

En la segunda integral hacemos el cambio $x \to 1 - x$, lo cual no modifica el valor de ϕ_k, pero da lugar a

$$n(\phi_k + xp_{0l}) = \frac{1}{e^{\beta(\phi + xp_{0l})} - 1} \to \frac{1}{e^{\beta(\phi_k + (1-x)p_{0l})} - 1} = \frac{1}{e^{\beta(\phi_k - xp_{0l})} - 1} = n(\phi_k - xp_{0l}), \tag{C.11}$$

y a la inversa, por lo que $J \to J$. Es decir,

$$\int_0^1 dxJ = \int_0^{1/2} dxJ - \int_{1/2}^0 dxJ = 2\int_0^{1/2} dxJ. \tag{C.12}$$

Por lo tanto,

$$\Pi'(p_{0l}, p) = -\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\partial}{\partial m^2}\int_0^{1/2} dxJ. \tag{C.13}$$