

Table des matieres

Introduction	2
Creation du code	2
Creation et maillage du conduit	2
Modelisation du liquide circulant dans le conduit	2
Modelisation de la circulation de l'agent polluant	3
Resultat final	4
Images de la simulation numerique	4
Observations et interpretations	5
Conclusion : ou doit se cacher le poisson?	5

Introduction

L'objectif de ce TP est de modéliser la diffusion d'un agent polluant au sein d'un conduit, dans lequel s'écoule un liquide. Nous utiliserons le logiciel *FreeFem* ainsi que les éléments théoriques appris en cours de MIE. Ce document présentera les étapes de construction du code ainsi que les interprétations du résultat final.

Creation du code

Creation et maillage du conduit

La première étape est de modéliser le conduit en respectant la géométrie donnée par l'énoncé. En procédant avec des équations paramétriques, on y arrive sans grandes difficultés. Ces lignes de codes sont suivies par quelques lignes permettant d'effectuer le maillage du domaine. Voici le code ainsi que son résultat :

Figure 1 { Creation et maillage du conduit

Modelisation du liquide circulant dans le conduit

A l'intérieur de ce conduit circule un liquide. L'écoulement de ce liquide est supposé permanent, laminaire et est donc régi par les lois de Stokes. On impose un profil parabolique à l'entrée du conduit et on impose une vitesse nulle sur tous les autres bords sauf celui à la sortie. Les lignes de code correspondantes sont disponibles dans la littérature *FreeFem* (inutile de les présenter ici). Le champ de vitesse obtenu est le suivant :

Figure 2 { Champ de vitesse régnant dans le conduit

Modelisation de la circulation de l'agent polluant

Il faut à présent modéliser la circulation de l'agent polluant au sein du conduit. La concentration du polluant est régie par des équations d'advection-diffusion données dans l'énoncé. On effectue une discrétisation en temps par la méthode d'Euler implicite : $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{u^{n+1} - u^n}{dt}$ avec dt constant tel que $t_{n+1} = t_n + dt$. On obtient alors le problème suivant :

$$u^{n+1} + dt \nabla \cdot (u^{n+1} \nabla u^{n+1}) = u^n$$

On traduit ce problème avec une approche variationnelle grâce à la méthode de Galerkin. On cherche alors une solution approchée u_h appartenant à l'espace d'approximation V_h tel que pour tout $v_h \in V_h$:

$$\int_{\Omega} u_h^{n+1} v_h + dt \int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} u_h^n v_h$$

En utilisant la formule de Green et sachant que sur le bord du domaine, on a $\nabla u_h \cdot \mathbf{n} = 0$, on obtient :

$$\int_{\Omega} u_h^{n+1} v_h + dt \int_{\Omega} \nabla u_h^{n+1} \cdot \nabla v_h = \int_{\Omega} u_h^n v_h$$

Ces étapes sont traduites dans le logiciel *FreeFem* grâce aux lignes de code suivantes :

Figure 3 { Formulation variationnelle dans le logiciel *FreeFem*

On impose une concentration de polluant nulle sur tout les bords excepte ceux de droite et de gauche (on considère que le conduit est fermé).

Il ne reste plus qu'à introduire la concentration à $t = 0$, puis à écrire la boucle de temps :

Figure 4 { Boucle de temps

Resultat final

Images de la simulation numerique

On lance la modelisation avec $dt = 0.05$ et $v_{max} = 1$. Voici quelques images de la progression de l'agent polluant, en fonction de differentes valeurs du coefficient de diffusion :

Figure 5 { Evolution de la concentration de l'agent polluant au sein du conduit ($\alpha = 0.001$)

Figure 6 { Evolution de la concentration de l'agent polluant au sein du conduit ($\alpha = 0.01$)

Figure 7 { Evolution de la concentration de l'agent polluant au sein du conduit ($\alpha = 0.1$)

Observations et interpretations

On peut faire plusieurs observations suite a ces modelisations :

Plus l'on augmente la valeur de v_{max} , plus le polluant se deplace a une grande vitesse. Ceci est normal puisque cette valeur correspond a la valeur maximale de l'ecoulement du uide qui circule dans le conduit.

Plus on augmente la valeur du coefficient de diffusion, plus l'agent polluant se diffusera, et donc prendra de la place dans le conduit. Ceci confirme l'exactitude du terme de diffusion dans l'equation d'advection-diffusion : plus il est grand, plus la diffusion sera importante.

Le polluant garde une trajectoire similaire quelle que soit la valeur du coefficient de diffusion. Ceci s'explique par la nature de l'ecoulement au sein du conduit : puisqu'il est laminaire et permanent, il ne varie pas au cours du temps, et donc le polluant garde sa trajectoire même s'il se diffuse de maniere plus importante.

On remarque que dans tout les cas, les coins inferieurs droit et gauche du conduit sont epargnes par l'agent polluant : ces zones ne sont pas atteintes par ce dernier. Ceci s'explique par la presence de tourbillons dans ces coins ; consequences des equations de Stokes qui regissent l'ecoulement, ainsi que les conditions de vitesse nulles sur les bords.

Figure 8 { Tourbillons presents dans le coin du conduit

Conclusion : ou doit se cacher le poisson ?

Ainsi, forts de ces observations, nous pouvons repondre a la question posee par l'enonce :

Le poisson doit se cacher dans les coins inferieurs droit et gauche du conduit pour avoir le plus de chances de survivre.

En effet, c'est a ces endroits precis que l'agent polluant ne passe pas.