Núcleo y función de Shapley en juegos difusos

David Orlando Alejandro Alemán Espinosa

Universidad de los Andes

Departamento de matemáticas

Asesor: Luis Jorge Ferro Casas

Junio, 2015

Firma

Asesor: Luis Ferro

Índice general

Abstract

En esta tesis extenderemos los conceptos de la teoría cooperativa de juegos clásica a los juegos cooperativos difusos, los cuales permiten participaciones parciales de los jugadores en las coaliciones. Estudiaremos en particular los juegos difusos con función de peso y los juegos difusos con forma de integral de Choquet. Veremos como se extienden los conceptos clásicos de función de Shapley y de núcleo a los mismos, bajo nuevas axiomatizaciones.

CAPÍTULO 1

Introducción

Los aspectos más importantes que se buscan solucionar en la teoría cooperativa de juegos son responder a las preguntas de cómo se forman las coaliciones en relación a cómo estas mismas distribuyen su valor generado, entre sus integrantes [1]. En esta tesis veremos dos de las soluciones más fundamentales a la pregunta de cómo los integrantes de una coalición deberían dividirse las ganancias. La primera de ellas es el núcleo; una solución que se asegura de que si el pago de los jugadores pertenece a este conjunto, entonces ninguna subcoalición de la coalición en cuestión puede separarse de esta y beneficiarse en el proceso. El núcleo puede ser tanto puntual, o no enumerable, o vacío, dependiendo del juego que se esté considerando. Probaremos en particular que el núcleo no es vacío para un tipo especial de juegos, llamados juegos convexos. En particular, la segunda solución que consideraremos va a pertenecer a este si el juego es convexo. Esta segunda solución recibe el nombre de valor de Shapley, la cual es la solución puntual más popular en los juegos cooperativos. El valor de Shapley, propuesto por primera vez por Lloyd Shapley en 1953 en un artículo titulado .A value for n-persons games"[2], es una solución que está basada en un conjunto de axiomas lógicos que la determinan. Se basa en la importancia de cada jugador en las coaliciones de las cuales puede hacer parte.

Clásicamente, la teoría cooperativa de juegos considera que los jugadores en una coalición solo pueden tener participación total o nula. En esta tesis consideraremos los juegos cooperativos difusos, que son aquellos que consideran también que un jugador pueda tener una participación parcial en una coalición. Extenderemos los conceptos básicos de la teoría clásica a los juegos difusos. Daremos un nuevo concepto de núcleo, propuesto por Xiaohui Yu y Qiang Zhang en ”The fuzzy core in games with fuzzy coalitions”[3] y veremos que la convexidad del juego implica nuevamente la no nulidad del núcleo. Estudiaremos dos modelos para este tipo de juegos: Juegos difusos con función de peso y juegos difusos en forma de integral de Choquet, propuestos en el 2007 por Dan Butnariu y Tomás Kroupa en ”Shapley mappings and the cumulative value for n-person games with fuzzy coalitions”[4] y por Masayo Tsurumi et al. en .A shapley function on a class of cooperative fuzzy games”[5], respectivamente. Daremos nuevas axiomatizaciones en ambos casos, similares a la contraparte clásica, para encontrar los nuevos valores de Shapley. Finalmente, mostraremos que en los juegos difusos convexos el valor de Shapley de estos últimos dos juegos pertenece a el núcleo, mostrando así que la relación más importante entre las dos soluciones se sigue manteniendo.

En el capítulo 2 veremos los conceptos básicos en la teoría cooperativa de juegos clásica. Llamaremos juegos nítidos a estos juegos para evitar ambigüedad. Definiremos el concepto de núcleo y demostraremos que la serie de axiomas de Shapley implican que el valor de Shapley existe y es único. Demostraremos también la contenencia de este en el núcleo si el juego es convexo; En el capítulo 3, definiremos los juegos cooperativos difusos y extenderemos las nociones básicas de los juegos nítidos, incluido el concepto del núcleo; En el capítulo 4 estudiaremos el modelo de juegos difusos con función de peso, daremos una nueva caracterización para el valor de Shapley, veremos la forma explícita del núcleo y su relación con el valor de Shapley; En el capítulo 5 estudiaremos el modelo de juegos difusos con forma de integral de Choquet, cuya función característica es monótona no decreciente y continua con respecto a la tasa de participación de los jugadores, las cuales son dos propiedades de enorme valor que hacen que este modelo pueda ser aplicado de manera natural al extender un juego nítido a uno difuso.

CAPÍTULO 2

Preliminares de juegos cooperativos

Comenzamos este capítulo con unas definiciones básicas correspondientes a la teoría cooperativa de juegos clásica.

Definición 2.1. *Un juego cooperativo nítido es una pareja* (N, ν) *donde* $N = \{1, \ldots, n\}$ *denota el conjunto de jugadores y* $\nu : P(N) \mapsto \mathbb{R}_+$ *denota la función característica del juego, que le asigna un valor a cada subconjunto de* N*, que llamaremos coalición nítida. Donde en particular se tiene que* $\nu(\emptyset) = 0$.

Definición 2.2. *Un juego cooperativo nítido superaditivo es un juego* (N, ν) *tal que* $\nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T)\ \forall S, T \in P(N)$*, tal que* $S \cap T = \emptyset$.

En esta tesis se considerarán solo los juegos superaditivos ya que se asume que todos los jugadores son racionales y que por lo tanto dos coaliciones nítidas disjuntas S, T lograrán siempre el máximo entre $\nu(S \cup T)$ y $\nu(S) + \nu(T)$.

Lo que quiere decir que cualquier juego cooperativo nítido (N, ν) se puede volver superaditivo haciendo la transformación $\nu(S \cup T) \longrightarrow \max\{\nu(S \cup T), \nu(S) + \nu(T)\}$, para todo $S, T \in P(N)$ disjuntos.

Denotaremos por $G_0(N)$ el conjunto de los juegos nítidos superaditivos con n jugadores.

Definición 2.3. *Un juego cooperativo nítido convexo es un juego* (N, ν) *tal que* $\nu(S \cup T) + \nu(S \cap T) \geq \nu(S) + \nu(T)\ \forall S, T \in P(N)$.

Estos últimos son usados en una amplia variedad de aplicaciones. Como veremos en el lema 2.4 son básicamente juegos en los que el incentivo de que los jugadores se unan a una coalición aumenta a medida que el tamaño de la misma aumenta.

2.1. El núcleo

Dado que solo consideramos los juegos superaditivos, tenemos que es más eficiente para los jugadores formar la coalición N, llamada también *Gran Coalición*.

El interrogante ahora está en cómo dividir el valor $\nu(N)$ entre los N jugadores. Antes que nada hay que recalcar que estos pagos deben pertenecer al conjunto de imputaciones definido por $I(\nu) := \{x \in \mathbb{R}_+ | \sum_{i=1}^n x_i = \nu(N), x_i \geq \nu(\{i\})\}$.

La primera condición, $\sum_{i=1}^n x_i = \nu(N)$, nos dice que la suma de los pagos debe ser igual a $\nu(N)$ como es de esperarse. La segunda condición nos dice que el pago del jugador i debe ser mayor a $\nu(\{i\})$ porque de lo contrario este se vería forzado a abandonar la gran coalición.

Una de las soluciones más conocidas es la del núcleo, definido por:

$$\mathcal{C} := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^n \middle| x \in I(\nu), \sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S)\ \forall S \in P(N) \right\}.$$

La condición $\sum_{i \in S} x_i \geq \nu(S), \forall S \in P(N)$ nos dice que ninguna coalición se opondría en principio a la formación de la gran coalición ya que no hay manera de dividir $\nu(S)$ entre los miembros de S, de tal manera que todos reciban un mayor pago en comparación con el pago recibido al formar la gran coalición.

Note que el núcleo está definido por un número finito de desigualdades no estrictas. Por lo tanto el núcleo es un conjunto cerrado. Está contenido en la bola cerrada de radio $\nu(N)$ centrada en el origen y por lo tanto es acotado. Es también compacto como consecuencia de estas dos últimas propiedades. Es además convexo ya que si $x, y \in \mathcal{C}$ y $t \in [0, 1]$ entonces

$$\sum_{i \in N} x_i t + y_i(1-t) = t \sum_{i \in N} x_i + (t-1) \sum_{i \in N} y_i = t\nu(N) + (t-1)\nu(N) = \nu(N),$$

donde también se tiene que

$$tx_i + (1-t)y_i \geq t\nu(\{i\}) + (1-t)\nu(\{i\}) = \nu(\{i\}),$$

y por último si $S \in P(N)$ entonces

$$\begin{aligned}\sum_{i\in S} tx_i + (1-t)y_i &= t\sum_{i\in S} x_i + (1-t)\sum_{i\in S} y_i \\ &\geq t\nu(S) + (1-t)\nu(S) \\ &= \nu(S),\end{aligned}$$

concluyendo que $xt + y(1-t) \in \mathcal{C}$, y por lo tanto $\mathcal{C}$ es convexo. Por esto último se tiene que el núcleo o es vacío, o es puntual, o es no enumerable. El siguiente teorema nos da una importante condición para el cual el núcleo no es vacío.

Teorema 2.1. *Si (N, ν) es un juego cooperativo nítido convexo, entonces $\mathcal{C} \neq \emptyset$.*

Probaremos este teorema al final de la siguiente sección.

Ahora, en la práctica el proceso de formación de coaliciones puede ser complicado y es factible que la formación de la gran coalición no tenga lugar. En este caso estaríamos interesados en encontrar los pagos de los jugadores para cualquier coalición $S \in P(N)$. Basados en esto definimos la restricción de $\nu \in G_0(N)$ a S de la siguiente manera.

Definición 2.4. *Sean $\nu \in G_0(N), S \in P(N)$ y $S \neq \emptyset$. La restricción de ν a S es el juego (S, ν^S) donde $\nu^S(T) = \nu(T)$ $\forall T \subseteq S$.*

En este caso, y de manera análoga a lo anterior, estaríamos buscando los pagos en el conjunto de imputaciones restringido a S,

$$I^S(\nu) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \middle| \sum_{i\in S}^{n} x_i = \nu(S), x_i = 0 \text{ si } i \notin S, x_i \geq \nu(\{i\})\ \forall i \in S \right\}.$$

Notemos que S puede ser vista como la gran coalición relativa a $T \subseteq S$. El núcleo de (S, ν^S) se define análogamente como

$$\mathcal{C}(\nu^S) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \middle| x \in I^S(\nu), \sum_{i\in T} x_i \geq \nu(T)\ \forall T \subseteq S \right\}.$$

2.2. Función de Shapley

Lloyd Shapley propuso un concepto de solución puntual [2], conocido como el valor de Shapley, para el pago de los jugadores en la gran coalición que fuera lo más equilibrado posible y se basara en la importancia de cada jugador en el juego. En esta sección haremos unas ligeras modificaciones a las definiciones y axiomas hechos por Shapley ya que buscaremos también el valor de Shapley para todos los juegos restringidos (S, ν^S) de $\nu \in G_0(N)$. Primero necesitaremos una definición:

Definición 2.5. *Sean $\nu \in G_0(N)$ y $S \in P(N)$. Decimos que $T \in P(S)$ es un portador en la coalición S si $\nu(T \cap W) = \nu(W)$ $\forall W \in P(S)$. Se denotará por $\mathcal{C}(S|\nu)$ al conjunto de portadores en S para $\nu \in G_0(N)$*

Introducimos ahora la función de Shapley en $G_0(N)$ que le asigna una solución, conocida como el valor de Shapley, a cada juego restringido de $\nu \in G_0(N)$.

Definición 2.6. *[5] Se dice que una función $\varphi : G_0(N) \mapsto (\mathbb{R}^n_+)^{P(N)}$ es de Shapley en $G_0(N)$ si satisface los siguientes axiomas.*

- *Axioma C_1: Si $\nu \in G_0(N)$ y $S \in P(N)$, entonces $\sum_{i \in N} \varphi_i(\nu)(S) = \nu(S)$ y $\varphi_i(\nu)(S) = 0$ si $i \notin S$, donde $\varphi_i(\nu)(S)$ es la i-ésima coordenada de $\varphi(\nu)(S) \in \mathbb{R}^n_+$.*
- *Axioma C_2: Si $\nu \in G_0(N), S \in P(N)$ y $T \in \mathcal{C}(S|\nu)$, entonces $\varphi_i(\nu)(S) = \varphi_i(\nu)(T)$ $\forall i \in N$.*
- *Axioma C_3: Si $\nu \in G_0(N), S \in P(N)$, $i, j \in S$ y se tiene que $\nu(T \cup \{i\}) = \nu(T \cup \{j\})$ para todo $T \in P(S \backslash \{i, j\})$ entonces $\varphi_i(\nu)(S) = \varphi_j(\nu)(S)$.*
- *Axioma C4: Para todo $\nu_1, \nu_2 \in G_0(N)$, defina el juego $\nu_1 + \nu_2 \in G_0(N)$ por $(\nu_1 + \nu_2)(S) = \nu_1(S) + \nu_2(S)$ para todo $S \in P(N)$. Si $\nu_1, \nu_2 \in G_0(N)$ y $S \in P(N)$ entonces $\varphi_i(\nu_1 + \nu_2)(S) = \varphi_i(\nu_1)(S) + \varphi_i(\nu_2)(S)$ $\forall i \in N$.*

El axioma C_1 nos dice simplemente que las soluciones para el juego restringido de $\nu \in G_0(N)$ a $S \in P(N)$, se deben buscar como es de esperar en el conjunto de imputaciones restringido a S, $I^S(\nu)$. El axioma C_2 nos dice que si $T \in \mathcal{C}(S|\nu)$ y $i \notin T$, entonces $\varphi_i(\nu)(S) = 0$ usando el axioma C_1 y el hecho de que $\nu(S) = \nu(T)$. Este axioma es importante ya que si $T \in \mathcal{C}(S|\nu)$ entonces los jugadores $i \in S, i \notin T$, no tienen relevancia alguna en el valor de las coaliciones de (S, ν^S) y por lo tanto su pago debe ser cero. El axioma C_3 indica que si el valor de cada coalición en (S, ν^S) es simétrico con respecto a los dos jugadores $i, j \in S$ entonces sus pagos deben ser iguales. El axioma C_4 nos da una condición de linealidad, como es de esperar, entre dos juegos distintos $\nu_1, \nu_2 \in G_0(N)$.

Es interesante ver que la función de Shapley existe siempre para todo $\nu \in G_0(N)$ y que además es única, como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.2. *[2][5] Defina la función* $\varphi : G_0(N) \mapsto (\mathbb{R}^n_+)^{P(N)}$ *por*

$$\varphi_i(\nu)(S) := \begin{cases} \sum_{T \in P_i(S)} \frac{(|T|-1)!(|S|-|T|)!}{|S|!}(\nu(T) - \nu(T \backslash \{i\})) & si\ i \in S \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases},$$

donde $P_i(S) = \{T \in P(S) | i \in T\}$*. Esta función* φ *es la única función de Shapley en* $G_0(N)$*.*

Probaremos este resultado para el caso de $\varphi(\nu)(N)$ primero, siguiendo una serie de lemas. Seguiremos la prueba de Owen [6].

Lema 2.1. *Sea* $S \in P(N), S \neq \emptyset$ *y sea* $w_S \in G_0(N)$ *definido por*

$$w_S(T) := \begin{cases} 0 & si\ S \nsubseteq T \\ 1 & si\ S \subseteq T. \end{cases}$$

Se tiene entonces que el único valor de Shapley $\varphi_i(w_S)(N)$ *viene dado por*

$$\varphi_i(w_S)(N) := \begin{cases} \frac{1}{|S|} & si\ i \in S \\ 0 & si\ i \notin S. \end{cases}.$$

Prueba. *Es claro que los únicos portadores de* w_S *en* N *son los superconjuntos de* S*. En consecuencia, por el axioma* C_2 *tenemos que* $\varphi_i(w_S)(N) = 0$ *si* $i \notin S$*. Ahora, por el axioma* C_3 *se tiene que* $\varphi_i(w_S)(N) = \varphi_j(w_S)(N)$ *si* $i, j \in S$*. Por el axioma* C_1 *concluimos que*

$$\varphi_i(w_S)(N) := \begin{cases} \frac{1}{|S|} & si\ i \in S \\ 0 & si\ i \notin S. \end{cases}.$$

Es además claro que $\varphi_i(w_S)(N)$ *satisface el axioma* C_4*. Concluimos que este es el único valor de Shapley de* w_S *en* N*.*

□

Tenemos como corolario inmediato que para todo $c > 0$,

$$\varphi_i(cw_S)(N) := \begin{cases} \frac{c}{|S|} & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{si } i \notin S. \end{cases}.$$

El siguiente lema nos dice que las funciones w_S generan el espacio lineal $G_0(N)$.

Lema 2.2. *Si $\nu \in G_0(N)$, entonces existen $2^n - 1$ reales c_S para todo $S \subseteq N, S \neq \emptyset$, tales que $\nu = \sum_{S \subseteq N} c_S w_S$, donde $c_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \nu(T)$.*

Prueba. *Sean $U \in P(N)$ y $c_S = \sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \nu(T)$ para todo $S \in P(N)$. Tenemos que*

$$\begin{aligned}
\sum_{S \subseteq N} c_S w_S(U) &= \sum_{S \subseteq U} c_S \\
&= \sum_{S \subseteq U} \left(\sum_{T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \nu(T) \right) \\
&= \sum_{T \subseteq U} \left(\sum_{\substack{S \subseteq U \\ T \subseteq S}} (-1)^{|S|-|T|} \right) \nu(T). \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Ahora, si fijamos U y T vemos que para cada c, $|T| \leq c \leq |U|$, hay $\binom{|U|-|T|}{|U|-c}$ conjuntos S con c elementos tales que $T \subseteq S \subseteq U$. Por lo tanto, concluimos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{S \subseteq U \\ T \subseteq S}} (-1)^{|S|-|T|} &= \sum_{c=|T|}^{|U|} \binom{|U|-|T|}{|U|-c} (-1)^{c-|T|} \\
&= \sum_{c=|T|}^{|U|} \binom{|U|-|T|}{|U|-|T|-(|U|-c)} (-1)^{c-|T|} \\
&= \sum_{c=|T|}^{|U|} \binom{|U|-|T|}{c-|T|} (-1)^{c-|T|} \\
&= \sum_{i}^{|U|-|T|} \binom{|U|-|T|}{i} (-1)^{i}.
\end{aligned}$$

Esta última expresión es la expansión binomial de $(1-1)^{|U|-|T|}$, que es igual a cero para $|T| < |U|$ e igual a 1 para $|U| = |T|$. Tomando esto en cuenta en la ecuación (2.1) concluimos que $\sum_{S \subseteq N} c_S w_S(U) = \nu(U)$.

$\square$

Ya podemos encontrar el valor de Shapley $\varphi(\nu)(N)$.

Teorema 2.3. *Sea $\nu \in G_0(N)$. El único valor de Shapley $\varphi(\nu)(N)$ viene dado por la* *ecuación*

$$\varphi_i(\nu)(N) = \sum_{T\in P(N);i\in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(\nu(T)-\nu(T\backslash\{i\})).$$

Prueba. *Por el axioma C_4 y los lemas anteriores tenemos que el valor de Shapley es único, donde*

$$\begin{aligned}
\varphi_i(\nu)(N) &= \sum_{S\subseteq N} \varphi_i(c_S w_S) \\
&= \sum_{S\subseteq N, i\in S} \frac{c_S}{|S|} \\
&= \sum_{S\subseteq N, i\in S} \frac{\sum_{T\subseteq S}(-1)^{|S|-|T|}\nu(T)}{|S|} \\
&= \sum_{T\subseteq N}\left(\sum_{T\subseteq S, i\in S}\frac{(-1)^{|S|-|T|}}{|S|}\right)\nu(T) \\
&= \sum_{T\subseteq N} f_i(T)\nu(T),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

donde $f_i(T) := \sum_{T\subseteq S, i\in S}\frac{(-1)^{|S|-|T|}}{|S|}$*. Ahora, fije* $i\in N$*. Sea* $S\in P(N)$ *tal que* $i\in S$ *y elija* $T'\subseteq S\backslash\{i\}$ *donde denotamos* $T := T'\cup\{i\}$*. Es fácil ver que* $f_i(T') = -f_i(T)$ *ya que* $|S|-|T|+1 = |S|-|T'|$ *y* $\{S|T'\subseteq S, i\in S\} = \{S|T\subseteq S, i\in S\}$*. Luego, tomando la suma sobre* T *y* $T' = T\backslash\{i\}$*, tenemos que* $\varphi_i(\nu)(N) = \sum_{T\subseteq N, i\in T} f_i(T)(\nu(T)-\nu(T\backslash\{i\}))$*. Además, tenemos que*

$$\begin{aligned}
f_i(T) &= \frac{\sum_{T\subseteq S, i\in S}(-1)^{|S|-|T|}}{|S|} \\
&= \sum_{|S|=|T|}^{n}(-1)^{|S|-|T|}\binom{n-|T|}{|S|-|T|}\int_0^1 x^{|S|-1}dx \\
&= \int_0^1 \sum_{|S|=|T|}^{n}(-1)^{|S|-|T|}\binom{n-|T|}{|S|-|T|}x^{|S|-1}dx \\
&= \int_0^1 x^{|T|-1}\sum_{|S|=|T|}^{n}(-1)^{|S|-|T|}\binom{n-|T|}{|S|-|T|}x^{|S|-|T|}dx \\
&= \int_0^1 x^{|T|-1}\left(\sum_{i=0}^{n-|T|}\binom{n-|T|}{i}(-x)^i\right)dx
\end{aligned}$$

$$= \int_0^1 x^{|T|-1}(1-x)^{n-|T|}dx,$$

donde esta integral es la función Beta $B(|T|, n-|T|+1)$*, cuyo valor es*

$$f_i(T) = \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}.$$

Concluimos que

$$\varphi_i(\nu)(N) = \sum_{T\subseteq N, i\in T} \frac{(|T|-1)!(n-|T|)!}{n!}(\nu(T)-\nu(T\backslash\{i\})).$$

$\square$

Por el axioma C_1 vemos que para encontrar los valores de Shapley $\varphi_i(\nu)(S), S \in P(N)$, se debe hacer una prueba exactamente igual a la anterior, aplicada al juego restringido (S, ν^S). Concluimos que existe una función de Shapley $\varphi : G_0(N) \mapsto (\mathbb{R}^n_+)^{P(N)}$, dada por

$$\varphi_i(\nu)(S) := \begin{cases} \sum_{T\in P_i(S)} \frac{(|T|-1)!(|S|-|T|)!}{|S|!}(\nu(T)-\nu(T\backslash\{i\})) & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases},$$

donde $P_i(S) = \{T \in P(S) | i \in T\}$. Es interesante notar que si $\nu \in G_0(N)$ es convexo, entonces el valor de Shapley pertenece al núcleo como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Sean* $\nu \in G_0(N)$ *convexo y* $S \in P(N)$*. Se tiene que* $\varphi(\nu)(S) \in \mathcal{C}(\nu^S)$*.*

Probaremos esto para el caso $S = N$. La generalización de la prueba para $S \in P(N)$ es inmediata y exactamente análoga. Seguiremos parcialmente a R.Branzei[7] y M.Maschler[8] en esta demostración. Para probar esto primero definimos para cualquier permutación σ de N y para todo $i \in N$ el conjunto $P^\sigma(i)$ dado por

$$P^\sigma(i) := \{r \in N | \sigma^{-1}(r) < \sigma^{-1}(i)\},$$

que es el conjunto de los predecesores de i con respecto al nuevo ordenamiento de los jugadores dado por σ. Definimos también $\nu \in G_0(N)$, el *vector de contribución marginal* $m^\sigma(\nu) \in \mathbb{R}^n$ con respecto a σ y ν de la siguiente manera:

$$m_i^\sigma(\nu) := \nu(P^\sigma(i) \cup \{i\}) - \nu(P^\sigma(i)) \; \forall i \in N,$$

que representa la ganancia adicional que el jugador i le aporta a la coalición $P^\sigma(i)$. Probamos ahora los siguientes lemas.

Lema 2.3. *Sea $\nu \in G_0(N)$. El valor de Shapley $\varphi(\nu)(N)$ también viene dado por*

$$\varphi(\nu)(N) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\pi(N)} m^\sigma(\nu),$$

donde denotamos por $\pi(N)$ al conjunto de permutaciones de N.

Prueba. *Tenemos que*

$$\frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\pi(N)} m^\sigma(\nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\pi(N)} (\nu(P^\sigma(i) \cup \{i\}) - \nu(P^\sigma(i))).$$

Note que en la sumatoria estamos considerando términos de la forma $\nu(T \cup \{i\}) - \nu(T), T \in P(N\backslash\{i\})$. Donde tenemos que hay $|T|!(n-1-|T|)!$ permutaciones para las cuales $P^\sigma(i) = T$. El primer factor $|T|!$ corresponde al número de ordenamientos de T y el segundo factor $(n-1-|T|)!$ corresponde al número de ordenamientos de $N\backslash(T \cup \{i\})$. Con esta consideración en mente tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\pi(N)} m^\sigma(\nu) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma\in\pi(N)} (\nu(P^\sigma(i) \cup \{i\}) - \nu(P^\sigma(i))) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{T\in P(N);i\notin T} |T|!(n-1-|T|)!(\nu(T\cup\{i\}) - \nu(T)) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{T\in P(N);i\in T} (|T|-1)!(n-|T|)!(\nu(T) - \nu(T\backslash\{i\})) \\
&= \varphi_i(\nu)(N).
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.4. *Sean $\nu \in G_0(N)$ convexo, entonces para todo $i \in N$ y $S, T \in P(N)$ tales que $S \subseteq T \subseteq N\backslash\{i\}$ se tiene que $\nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) \leq \nu(T \cup \{i\}) - \nu(T)$.*

Prueba. *Sean $\nu \in G_0(N)$ convexo, $i \in N$ y $S, T \in P(N)$ tales que $S \subseteq T \subseteq N\backslash\{i\}$. Por la definición de estos se tiene que $(S \cup \{i\}) \cap T = S$ y $(S \cup \{i\}) \cup T = T \cup \{i\}$. La* *convexidad de ν implica que*

$$\begin{aligned} & \nu(T \cup \{i\}) + \nu(S) \geq \nu(S \cup \{i\}) + \nu(T) \\ \Longrightarrow \quad & \nu(S \cup \{i\}) - \nu(S) \leq \nu(T \cup \{i\}) - \nu(T) \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.5. *Sean $\nu \in G_0(N)$ convexo y $\sigma \in \pi(N)$. Tenemos entonces que $m^\sigma(\nu) \in \mathcal{C}(\nu)$.*

Prueba. *Note que la $\sigma(i)-$ésima coordenada de $m^\sigma(\nu)$ viene dada por $m^\sigma_{\sigma(i)}(\nu) = \nu(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(i)\}) - \nu(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(i-1)\})$. Veamos primero que $\sum_{i \in N} m_i^\sigma(\nu) = \nu(N)$. Tenemos que*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} m_i^\sigma(\nu) &= \sum_{i \in N} m^\sigma_{\sigma(i)}(\nu) \\ &= \nu(\{\sigma(1)\}) + (\nu(\{\sigma(1), \sigma(2)\}) - \nu(\{\sigma(1)\})) + \cdots + \\ & \quad (\nu(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}) - \nu(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n-1)\})) \\ &= \nu(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}) \\ &= \nu(N). \end{aligned}$$

Ahora, probemos que para todo $S \in P(N)$ se tiene $\sum_{i \in S} m_i^\sigma(\nu) \geq \nu(S)$. Sea $S = \{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_{|S|})\}$ para algunos $i_1, \ldots, i_{|S|} \in N$. Sin pérdida de generalidad suponga que $i_1 < i_2 < \ldots < i_{|S|}$. Se tiene entonces que $\{\sigma(i_1), \ldots, \sigma(i_{j-1})\} \subseteq \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i_j - 1)\}$ para $j \in \{1, 2, \ldots, |S|\}$. Por el lema 2.4 se tiene que

$$\begin{aligned} & \nu(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i_j)\}) - \nu(\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(i_j - 1)\}) \\ \geq \quad & \nu(\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_j)\}) - \nu(\{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \ldots, \sigma(i_{j-1})\}). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in S} m_i^\sigma(\nu) &= \sum_{\sigma(i)\in S} m_{\sigma(i)}^\sigma(\nu) \\
&= (\nu(\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i_1)\}) - \nu(\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i_1-1)\})) + \\
&\quad (\nu(\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i_2)\}) - \nu(\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i_2-1)\})) + \cdots + \\
&\quad (\nu(\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i_{|S|})\}) - \nu(\{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i_{|S|}-1)\})) \\
&\geq (\nu(\{\sigma(i_1)\}) - \nu(\emptyset) + (\nu(\{\sigma(i_1),\sigma(i_2)\}) - \nu(\{\sigma(i_1)\})) + \cdots + \\
&\quad (\nu(\{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_{|S|})\}) - \nu(\{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_{|S|-1})\})) \\
&= \nu(\{\sigma(i_1),\sigma(i_2),\ldots,\sigma(i_{|S|})\}) \\
&= \nu(S).
\end{aligned}$$

Concluimos que $m^\sigma(\nu) \in \mathcal{C}(\nu)$.

□

Ya tenemos las herramientas para probar el teorema 2.4.

Prueba (del teorema 2.4)**.** *Por el lema 2.3 el valor de Shapley* $\varphi(\nu)(N)$ *es igual a* $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} m^\sigma(\nu)$. *Por el lema 2.5* $m^\sigma(\nu) \in \mathcal{C}(\nu)$ *para todo* $\sigma \in \pi(N)$. *Note que* $|\pi(N)| = n!$ *y por lo tanto* $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} m^\sigma(\nu)$ *es una combinación convexa de los vectores* $m^\sigma(\nu)$. *Por lo probado anteriormente, el núcleo es un conjunto convexo. Concluimos que*

$$\varphi(\nu)(N) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\pi(N)} m^\sigma(\nu) \in \mathcal{C}(\nu).$$

□

CAPÍTULO 3

Juegos difusos y extensión del núcleo

Como mencionamos en la introducción, los juegos cooperativos difusos fueron introducidos con la idea de que los jugadores pudieran tener participaciones parciales en las coaliciones. En este sentido, una coalición difusa en un juego de n jugadores es cualquier $S \in [0,1]^n$, donde S_i denota el grado de participación del jugador i en la coalición U. Denotaremos por $F(N) := [0,1]^n$ a el conjunto de todas las coaliciones difusas. Con esto en mente tenemos la siguiente definición.

Definición 3.1. *Un juego cooperativo difuso es una pareja (N, ν) donde $N = \{1, \dots, n\}$ denota el conjunto de jugadores y $\nu : F(N) \mapsto \mathbb{R}_+$ denota la función característica del juego, que le asigna un valor a cada coalición difusa de N. Donde en particular se tiene que $\nu(\vec{0}) = 0$.*

La unión e intersección de dos coaliciones difusas se define de la manera natural como

$$\begin{aligned} (S \cup T)_i &= \max\{S_i, T_i\}, \forall i \in N. \\ (S \cap T)_i &= \min\{S_i, T_i\}, \forall i \in N. \end{aligned}$$

De manera análoga a los juegos cooperativos nítidos, solo consideraremos los juegos cooperativos difusos superaditivos, donde estos vienen dados por la siguiente definición.

Definición 3.2. *Decimos que un juego cooperativo difuso (N, ν) es superaditivo si $\nu(S \cup T) \geq \nu(S) + \nu(T), \forall S, T \in F(N)$, tales que $S \cap T = \vec{0}$.*

Denotaremos por $G_F(N)$ al conjunto de los juegos cooperativos difusos superaditivos. También, y de manera análoga a los juegos nítidos, tenemos la siguiente definición.

Definición 3.3. *Decimos que un juego cooperativo difuso* (N, ν) *es convexo si* $\nu(S \cup T) + \nu(S \cap T) \geq \nu(S) + \nu(T), \forall S, T \in F(N)$.

De nuevo el problema ahora radica en encontrar la mejor forma de dividir $\nu(U)$ entre los jugadores para todo $U \in F(N)$. Así que definiremos el núcleo de un juego difuso que serviría como posible conjunto de soluciones a este problema, y en los siguientes dos capítulos encontraremos las funciones de Shapley a los modelos de juegos difusos definidos por M.Tsurumi y D.Butnairu.

3.1. Núcleo de los juegos difusos

En esta sección seguiremos a X.Yu y Q.Zhang [3]. Antes de definir el núcleo de $\nu \in G_F(N)$, necesitaremos definir unos cuantos conceptos.

Considere dos coaliciones $U, K \in F(N)$. Decimos que K está contenido en U ($K \subseteq U$), si $K_i \leq U_i \; \forall i \in N$. Denotaremos por $F(U)$ al conjunto de los subconjuntos de U. Definimos también el soporte de U como $\text{Supp}(U) := \{i \in N | U_i > 0\}$. Por último, definimos $S_U \in F(U)$ como

$$S_{Ui} = \begin{cases} U_i & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases},$$

para todo $U \in F(N)$ y $S \in P(N)$.

Note que podemos restringir $\nu \in G_F(N)$ a una coalición difusa $U \in F(N)$ de la manera natural como (ν^U, U) donde $\nu^U : F(U) \mapsto \mathbb{R}_+$ viene dada por $\nu^U(S) = \nu(S), \forall S \in F(U)$. Esto con el fin de buscar cómo dividir $\nu(U)$ entre los jugadores en $\text{Supp}(U)$, en el caso de que se forme la coalición difusa U. Con esto en mente tenemos finalmente la siguiente definición.

Definición 3.4. *Sea* $U \in F(N)$*. El núcleo difuso del juego* $\nu \in G_F(N)$ *en la coalición difusa* U *se define como el conjunto*

$$\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \middle| \sum_{i \in N} x_i = \nu(U), \sum_{i \in \text{Supp}(S_U)} x_i \geq \nu(S_U) \text{ para todo } S \in P(N) \right\}$$

.

La primera condición $\sum_{i \in N} x_i = \nu(U)$, nos dice como es de esperar que al buscar un pago de los jugadores cuando se forma la coalición difusa U, se debe tener que la suma de los pagos debe ser igual a $\nu(U)$. La segunda condición $\sum_{i \in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i \geq \nu(S_U)$, nos dice que no hay un subconjunto de jugadores del soporte de U para los cuales sea beneficioso formar una coalición difusa con solo ellos en el soporte.

Es importante recalcar que en la práctica el cálculo de este conjunto es un problema complicado para el caso nítido y mucho más para el caso difuso. En las siguientes dos secciones daremos la forma explícita del núcleo difuso para los modelos de Butnariu y Tsurumi, bajo ciertas condiciones.

Al igual que en los juegos nítidos, el núcleo difuso puede ser vacío. Es interesante el hecho que al igual que en estos el núcleo difuso no es vacío si el juego es convexo. Para demostrar esto primero mostramos el siguiente lema.

Lema 3.1. *Si $\nu \in G_F(N)$ es convexo, entonces para todo $i \in N$ y todo $U \in F(N)$, tenemos que $\nu(S_U \cup \{i\}_U) - \nu(S_U) \leq \nu(T_U \cup \{i\}_U) - \nu(T_U)$ para $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$.*

Prueba. *Si $S \subseteq T \subseteq N \backslash \{i\}$, entonces $(S \cup \{i\})_U \cap T_U = S_U$ y $(S \cup \{i\})_U \cup T_U = T_U \cup \{i\}_U$. Ahora, dado que $\nu \in G_F(N)$ es convexo, tenemos que $\nu(T_U \cup \{i\}_U) + \nu(S_U) \geq \nu(S \cup \{i\}_U) + \nu(T_U)$.*

□

Teorema 3.1. *Sean $\nu \in G_F(N)$ y $U \in F(N)$. Si ν es convexo, entonces $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) \neq \emptyset$.*

Prueba. *Considere el conjunto de jugadores $N = \{1, \ldots, n\}$. Sea σ una permutación de N. Recordemos que P_i^σ se definía como $P_i^\sigma = \{j \in N | \sigma(j) < \sigma(i)\}$, i.e., el conjunto de los jugadores que preceden a i en el orden dado por σ. Defina también $x_i^\sigma \in \mathbb{R}_+$ por*

$$x_i^\sigma := \nu((P_i^\sigma \cup \{i\})_U) - \nu((P_i^\sigma)_U), \forall i \in N$$

.

Veamos que $x^\sigma := (x_1^\sigma, \ldots, x_n^\sigma) \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$.

Tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N} x_i^\sigma &= \sum_{i\in N} \nu((P_i^\sigma \cup \{i\})_U) - \nu((P_i^\sigma)_U)\\ &= \nu(N_U) - \nu(\emptyset_U)\\ &= \nu(N_U)\\ &= \nu(U). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Por otro lado, sean $i_1, \ldots, i_s$ tales que $S = \{i_1, \ldots, i_s\}$ y $\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \ldots < \sigma(i_s)$, para $S \in P(N)$, donde $s = |S|$. Tenemos por lo tanto que $\{i_1, \ldots, i_{j-1}\} \subseteq P_{i_j}^\sigma$ para $j = 1, \ldots, s$.

Por el lema anterior tenemos que

$$\nu((P_{i_j}^\sigma \cup \{i_j\})_U) - \nu((P_{i_j}^\sigma)_U) \geq \nu(\{i_1, \ldots, i_j\}_U) - \nu(\{i_1, \ldots, i_{j-1}\}_U), \tag{3.2}$$

para $j = 1, \ldots, s$.

Sumando las desigualdades en (3.2) y usando la ecuación (3.1), tenemos que $\sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i^\sigma \geq \nu(S_U)$ y que $\sum_{i\in N} x_i^\sigma = \nu(U)$. Concluimos que $x^\sigma \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$.

□

CAPÍTULO 4

Modelo de D.Butnariu, su núcleo y su función de Shapley

Es la práctica, es un problema complicado establecer una función característica $\nu \in G_F(N)$ para un juego difuso. Por esta razón se suelen construir las funciones características a partir de la restricción de las mismas en el juego nítido, para luego extenderlas al juego difuso [3]. Con este ánimo estudiaremos en este capítulo una función característica extendida desde $P(N)$ a $F(N)$, definida por D.Butnairu y T.Kroupa, y veremos sus propiedades relativas al núcleo difuso y una nueva función de Shapley basada en ciertos axiomas. En las siguientes dos secciones seguiremos a [4].

4.1. Juegos difusos con función de peso

Antes de definir estos juegos vamos a denotar por $A^t := \{i \in N | A_i = t\}, t \in [0,1], A \in F(N)$, el conjunto (nítido) de los jugadores de N cuya participación en la coalición difusa de A es igual a t. Ahora, si tenemos un juego nítido $\nu \in G_0(N)$ y una función $\Psi : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ tal que $(\Psi(t) = 0 \iff 0)$ y $\Psi(1) = 1$ podemos extender ν a $G_F(N)$ de la siguiente manera

$$\nu^{\Psi}(A) := \sum_{t \in [0,1]} \Psi(t)\nu(A^t), A \in F(N)$$

.

Note primero que la sumatoria está bien definida ya que $A^t = \emptyset$ para todo $t \in [0,1]$ excepto finitos valores, y por lo tanto $\nu(A^t) = \nu(\emptyset) = 0$ para todo $t \in [0,1]$ excepto finitos valores. Note también que la condición $\Psi(1) = 1, \Psi(0) = 0$ debe ser cierto para que el valor de $\nu(A)$ coincida con el del juego restringido a $P(N)$. La condición $(\Psi(t) = 0 \longrightarrow t = 0)$ se da para que no hayan niveles de participación $t \in (0,1)$ en los jugadores, que no tengan valor; que en principio no sería lógico.

Llamaremos funciones de peso a las funciones $\Psi : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ tales que $(\Psi(t) = 0 \iff t = 0)$ y $\Psi(1) = 1$. Denotaremos a su vez como $\mathscr{G}[\Psi] \subseteq G_F(N)$, a el conjunto de juegos difusos que satisfagan

$$\nu(A) = \sum_{t=[0,1]} \Psi(t)\nu(A^t), A \in F(N).$$

Note que $\nu(A)$ puede ser negativo. Por lo cual en este capítulo permitimos que el rango de ν sean todos los reales. No hay ningún cambio significativo en los planteamientos hechos hasta ahora si el rango de ν es $\mathbb{R}$.

En el siguiente ejemplo vemos una motivación para definir los juegos difusos con función del peso.

Ejemplo 4.1. *[4] Suponga que N es un conjunto de inversionistas donde denotamos por c_i al capital de cada inversionista $i \in N$. En este caso las coordenadas de una coalición difusa $A \in F(N)$ denotarían el porcentaje del capital de cada inversionista que este esté dispuesto a invertir en la organización conformada por los jugadores en el soporte de A. Esta forma de definir a A es ventajosa ya que A_i refleja el riesgo que el jugador i está dispuesto a tomar, así como su nivel de compromiso con la organización y su nivel de interés en la inversión en cuestión. Puede que los jugadores i y j inviertan la misma cantidad, pero si el jugador i invirtió todo su capital mientras el jugador j solo una pequeña fracción, A_i y A_j reflejaría la diferencia en el interés de cada jugador y su posible futuro esfuerzo.*

Ahora, suponga que se tiene una función $g : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ que estima la posible ganancia $g(c)$ obtenida al invertir una cantidad c en el entorno en el que el juego $\nu \in G_0(N)$ tiene lugar, y asuma que si se invierte una fracción t del capital c, la ganancia sería multiplicativamente proporcional i.e., $g(tc) = tg(c), t \in [0,1]$. Pero, dado que estamos teniendo en cuenta también el nivel de riesgo que cada jugador está tomando, suponga a su vez que existe una función $\chi : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ que está determinada por las condiciones en las que el juego tiene lugar y que indica la recompensa para cada nivel de riesgo $t \in [0,1]$. De tal manera que si el jugador i decidiera invertir una cantidad $c = tc_i$, su recompensa vendría dada por $\chi(t)g(c)$. Donde en particular asumimos que si el riesgo *que el jugador toma es 1, su ganancia es el valor estimado original $g(c)$; por lo que asumimos que $\chi(1) = 1$.*

Con lo anterior en mente podemos definir el juego difuso $\nu \in G_F(N)$, en el cual se le asigna a $A \in F(N)$ la suma de las ganancias estimadas de los grupos de jugadores en distintos niveles de riesgo i.e.,

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{t\in[0,1]} \chi(t) g\left(t \sum_{i\in A^t} c_i\right) \\ &= \sum_{t\in[0,1]} \chi(t) t g\left(\sum_{i\in A^t} c_i\right). \end{aligned}$$

Ahora, definiendo $\Psi(t) := \chi(t)t$ y notando que $g\left(\sum_{i\in A^t} c_i\right)$ es la ganancia en el respectivo juego nítido de los jugadores en A^t, por lo que $g\left(\sum_{i\in A^t} c_i\right) = \nu(A^t)$, tendríamos finalmente que

$$\nu(A) = \sum_{t\in[0,1]} \Psi(t)\nu(A^t).$$

Por lo que un juego de este tipo podría ser modelado por el modelo de Butnariu.

Ahora, como siempre la cuestión del asunto es determinar la mejor forma de dividir $\nu(A)$ entre sus participantes, por lo que definiremos una función de Shapley para estos juegos con función de peso.

4.2. Función de Shapley para $\mathscr{G}[\Psi]$

Antes de definir una función de Sjapley en este contexto, necesitamos la siguiente definición.

Definición 4.1. *Sea $\nu \in G_F(N)$ y sean $A, B \in F(N)$. Decimos que B es un portador difuso de A si se satisfacen las siguientes dos condiciones:*

(i) $B^t \subseteq A^t, \forall t \in (0,1]$;

(ii) *Si $C \in F(N)$ es tal que $C^t \subseteq A^t$ para todo $t \in (0,1]$, entonces $\nu(B^t \cap C^t) = \nu(C^t), \forall t \in (0,1]$.*

Consideremos ahora una permutación π de $N, A \in F(N)$ y $\nu \in G_F(N)$. Definiremos $\pi A := A \circ \pi^{-1}$ y $\pi\nu(A) := \nu(\pi^{-1}A)$, donde para la definición de πA vemos a A como una función $A : N \mapsto [0,1]^n$. Note que si $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$ entonces $\pi\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$ también, ya que

$$\pi\nu(A) = \nu(\pi^{-1}A) = \sum_{t\in[0,1]} \Psi(t)\nu(\{i \in N|\nu(\pi^{-1}A) = t\})$$

$$= \sum_{t\in[0,1]} \Psi(t)\nu(\{i \in N|\pi\nu(A) = t\}) = \sum_{t\in[0,1]} \Psi(t)\pi\nu(A^t).$$

Con estos conceptos en mente, damos la siguiente definición.

Definición 4.2. *Sea Ψ una función de peso. Decimos que un mapa de Shapley es una función lineal $\Phi : \mathscr{G}[\Psi] \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ que satisfaga los siguientes axiomas para todo $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$ y todo $A \in F(N)$.*

- *Axioma $\mathscr{B}_1$: $\sum_{i\in N} \Phi_i(\nu)(A) = \nu(A)$ y si $A_j = 0$, entonces $\Phi_j(\nu)(A) = 0$.*
- *Axioma $\mathscr{B}_2$: Para todo portador difuso $B \in F(N)$ de A se tiene que $\sum_{i\in N; B_i>0} \Phi_i(\nu)(A) = \nu(B)$.*
- *Axioma $\mathscr{B}_3$: Si π es una permutación de N, entonces $\Phi_{\pi(i)}(\pi\nu)(\pi A) = \Phi_i(\nu)(A)$, $\forall i \in N$.*

Notemos la semejanza entre los axiomas $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ y $\mathscr{B}_3$ con los axiomas C_1, C_2 y C_3 del capítulo 2, respectivamente. Los axiomas C_1 y $\mathscr{B}_1$ nos dan una condición de repartición de $\nu(A)$ entre los jugadores que tienen participación en A. Los axiomas C_2 y $\mathscr{B}_2$ nos dan la llamada condición de eficiencia coalicional. Y los axiomas C_3 y $\mathscr{B}_3$ dan una condición de simetría. La relación con C_4 es inmediata ya que se asume de entrada que Φ es una función lineal.

De nuevo, tenemos el interesante resultado de que el mapa de Shapley Φ siempre existe y es único como lo enuncia el siguiente teorema:

Teorema 4.1. *Sea Ψ una función de peso. Se tiene que existe un único mapa de Shapley $\Phi : \mathscr{G}[\Psi] \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ que viene dado por*

$$\Phi_i(\nu)(A) = \begin{cases} \Psi(t) \sum_{S\in P_i(A^t)} \frac{(|S|-1)!(|A^t|-|S|)!}{|A^t|!}(\nu(S) - \nu(S\backslash\{i\})) & \text{si } A_i = t > 0 \\ 0 & \textit{de lo contrario} \end{cases},$$

donde $P_i(A^t) := \{T \subseteq N|i \in T, T \subseteq A^t\}$.

Una vez más la demostración vendrá tras una serie de lemas. Primero que todo recordemos del capítulo 2 que la función $w_S : P(N) \to \{0,1\}, S \in P(N)$, con $S \neq \emptyset$ venía definida por

$$w_S(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq A, \\ 0 & \text{si } S \nsubseteq A, \end{cases}$$

y que además estas $2^n - 1$ funciones eran una base del espacio lineal $G_0(N)$, donde toda $\nu \in G_0(N)$ podía ser escrita como $\nu = \sum_{S \in P(N); S \neq \emptyset} c_S(\nu) w_S$, donde $c_S(\nu) = \sum_{T \in P(N); T \subseteq S} (-1)^{|S|-|T|} \nu(T)$.

Empezamos la demostración del teorema con el siguiente lema:

Lema 4.1. *Si $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$, entonces $\nu = \sum_{S \in P(N); S \neq \emptyset} c_S(\nu) w_S^{\Psi}$.*

Prueba. *Sean $\nu \in \mathscr{G}[\Psi], A \in F(N)$. Tenemos que*

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_{t \in [0,1]} \Psi(t) \nu(A^t) \\ &= \sum_{t \in [0,1]} \Psi(t) \sum_{S \in P(N); S \neq \emptyset} c_S(\nu) w_S(A^t) \\ &= \sum_{S \in P(N); S \neq \emptyset} c_S(\nu) \sum_{t \in [0,1]} \Psi(t) w_S(A^t) \\ &= \sum_{S \in P(N); S \neq \emptyset} c_S(\nu) w_S^{\Psi}(A). \end{aligned}$$

□

Donde notamos que dado que dado que $w_S^{\Psi}(A) = \sum_{t \in [0,1]} \Psi(t) w_S(A^t)$ y dado que S solo puede pertenecer a lo sumo a uno de los conjuntos disjuntos A^t, se tiene que

$$w_S^{\Psi}(A) = \begin{cases} \Psi(t) & \text{si } S \subseteq A^t \text{ para algún } t \in (0,1] \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}. \tag{4.1}$$

Teniendo esto en cuenta y notando del lema anterior que $\mathscr{G}_0[\Psi] := \{w_S^{\Psi} | S \in P(N), S \neq \emptyset\}$ es una base de $\mathscr{G}[\Psi]$, pasamos a probar el siguiente lema:

Lema 4.2. *Sea $\Phi : \mathscr{G}_0[\Psi] \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ la función definida por*

$$\Phi_i(w_S^{\Psi})(A) = \begin{cases} \frac{\Psi(t)}{|S|} & \text{si } i \in S \subseteq A^t \text{ para algún } t \in (0,1] \\ 0 & \textit{de lo contrario} \end{cases}.$$

Entonces Φ es una función que satisface los axiomas $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ y $\mathscr{B}_3$.

Prueba. *Sea $S \in P(N), S \neq \emptyset$ y $A \in F(N)$. Veamos que:*

- *Φ satisface $\mathscr{B}_1$: De la definición de Φ tenemos que si $A_j = 0$ para algún $j \in N$, entonces $\Phi_j(w_S^\Psi)(A) = 0$. Además si $S \nsubseteq A^t$ para ningún $t \in (0,1]$ entonces $\Phi_i(w_S^\Phi)(A) = 0, \forall i \in N$ y por lo tanto $\sum_{i \in N} \Phi_i(w_S^\Phi)(A) = 0 = w_S^\Psi(A)$. Si por otro lado se tiene que $S \subseteq A^t$ para algún $t \in (0,1]$, entonces $\Phi_i(w_S^\Phi)(A) = \frac{\Psi(t)}{|S|}$ para todo $i \in S$, y $\Phi_i(w_S^\Phi)(A) = 0$ para $i \notin S$. Por lo tanto $\sum_{i \in N} \Phi_i(w_S^\Phi)(A) = \frac{|S|\Psi(t)}{|S|} = \Psi(t) = w_S^\Phi(A)$. Concluimos que Φ satisface $\mathscr{B}_1$.*

- *Φ satisface $\mathscr{B}_2$: Sea B un portador difuso de A para la función w_S^Ψ. Si $S \nsubseteq A^t$ entonces $S \nsubseteq B^t, \forall t \in (0,1]$ y se tendría trivialmente que $\sum_{i \in N; B_i > 0} \Phi_i(w_S^\Phi)(A) = 0 = w_S^\Psi(B)$.*

  Ahora, si $S \subseteq A^t$ para algún $t \in (0,1]$ entonces debemos tener que $S \subseteq B^t$ ya que $w_S^\Psi(A) = w_S^\Psi(B)$. Por lo tanto, y teniendo en cuenta que si $i \in S$ entonces $\Phi_i(w_S^\Phi)(A) = 0$, tenemos que

  $$\sum_{i \in N; B_i > 0} \Phi_i(w_S^\Phi)(A) = \sum_{i \in S} \Phi_i(w_S^\Phi)(A) = \sum_{i \in S} \frac{\Psi(t)}{|s|} = \Psi(t) = w_S^\Phi(B),$$

  probando que Φ satisface $\mathscr{B}_2$.

- *Φ satisface $\mathscr{B}_3$: Sea π una permutación de N. Tenemos por lo tanto que*

  $$\pi w_S^\Psi(A) = w_S^\Psi(\pi^{-1}A) = \begin{cases} \Psi(t) & \text{si } S \subseteq \pi^{-1}A^t \text{ para algún } t \in (0,1] \\ 0 & \textit{de lo contrario} \end{cases}.$$

  Teniendo en cuenta que $S \subseteq \pi^{-1}A^t$ si y solo si $\pi S \subseteq A^t$, tenemos que

  $$\pi w_S^\Psi(A) = w_{\pi S}^\Psi(A). \tag{4.2}$$

  Ahora, sea $i \in N$. Tenemos que

  $$\begin{aligned} \Phi_{\pi(i)}(\pi w_S^\Psi)(\pi A) &= \Phi_{\pi(i)}(w_{\pi S}^\Psi)(\pi A) \\ &= \begin{cases} \frac{\Psi(t)}{|\pi S|} & \text{si } \pi(i) \in \pi S \subseteq \pi A^t, \text{ para algún } t \in (0,1] \\ 0 & \textit{de lo contrario} \end{cases}. \end{aligned}$$

Por último, teniendo en cuenta que $|\pi S| = |S|$ *y que* $\pi(i) \in \pi S, \pi S \subseteq \pi A^t$ *si y solo si* $i \in SparaS \subseteq A^t$*, tenemos que* $\Phi_{\pi(i)}(\pi w_S^\Psi)(\pi A) = \Phi_i(w_S^\Psi)(A)$.

$\square$

Veamos ahora que Φ es la única función de $\mathscr{G}_0[\Psi]$ a $(\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ que satisface los 3 axiomas.

Lema 4.3. *Si* $\Phi' : \mathscr{G}_0[\Psi] \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ *satisface los axiomas* $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ *y* $\mathscr{B}_3$ *entonces* $\Phi' = \Phi$.

Prueba. *Sean* $S \in P(N), S \neq \emptyset$ *y* $A \in F(N)$.

- *Caso 1:* $S \subseteq A^{t_0}$ *para algún* $t_0 \in (0,1]$*. Defina* S_A *al igual que en capítulo 3 como*

$$(S_A)_i := \begin{cases} A_i & \text{si } i \in \pi S \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}.$$

Es claro que $S = S_A^{t_0}$ *y que* $S_A^t \subseteq A^t, \forall t \in (0,1]$ *ya que* $S_A^t = \emptyset$ *para* $(0,1]\backslash\{t_0\}$*. Ahora, sea* $C \in F(N)$ *tal que* $C^t \subseteq A^t, \forall t \in (0,1]$*. Tenemos que* $(S \subseteq (C^{t_0} \cap S_A^{t_0}) = (C^{t_0} \cap S) \leftrightarrow S \subseteq C^{t_0})$*. De esta y de la ecuación* (4.1) *tenemos que* $w_S^\Psi(S_A^t \cap C^t) = w_S^\Psi(C^t), \forall t \in (0,1]$*. Luego,* S_A *es un portador difuso de* A *para* W_S^Ψ*. Por lo tanto, del axioma* $\mathscr{B}_2$ *tenemos que:*

$$\sum_{i \in S} \Phi_i'(w_S^\Psi)(A) = \sum_{i \in N; (S_A)_i > 0} \Phi_i'(w_S^\Psi)(A) = w_S^\Psi(S_A) = \Psi(t_0) \neq 0. \tag{4.3}$$

Veamos ahora que $\Phi_i'(w_S^\Psi)(A) = \Phi_j'(w_S^\Psi)(A), \forall i,j \in S$*. Si* $|S| = 1$ *es claro, y si* $|S| > 1$ *tome* $i,j \in S$ *tales que* $i \neq j$*. Considere la permutación* π *de* N *dada por la transposición* (i,j)*. Es claro que* $\pi S = S$ *y que* $\pi A = A$*. Luego, por el axioma* $\mathscr{B}_3$ *y la ecuación* (4.2) *tenemos que*

$$\Phi_i'(w_S^\Psi)(A) = \Phi_j'(\pi w_S^\Psi)(\pi A) = \Phi_i'(w_{\pi S}^\Psi)(\pi A) = \Phi_j'(w_S^\Psi)(A).$$

Juntando este resultado y la ecuación (4.3) *tenemos que*

$$\Phi_i'(w_S^\Psi)(A) = \frac{\Psi(t_0)}{|S|}, \forall i \in S.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\Phi'_i(w_S^{\Psi})(A) = \Phi_i(w_S^{\Psi})(A), \forall i \in S. \tag{4.4}$$

Ahora, para $j \notin S$ defina $B \in F(N)$ como

$$B_i = \begin{cases} A_i & si\ i \in S \cup \{j\} \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases}.$$

Esta definición implica, por lo anterior, que B es un portador difuso de A para w_S^{Ψ}. Luego, por el axioma $\mathbb{B}_2$ y la ecuación (4.3) tenemos que

$$\sum_{i \in S} \Phi'_i(w_S^{\Psi})(A) = w_S^{\Psi}(B)$$

y por lo tanto, usando el axioma $\mathscr{B}_2$ de nuevo, tenemos que

$$w_S^{\Psi}(B) = \sum_{i \in N; B_i > 0} \Phi'_i(w_S^{\Psi})(A) = \sum_{i \in S \cup \{j\}} \Phi'_i(w_S^{\Psi})(A).$$

Comparando esta ecuación con la anterior concluimos que $\Phi'_j(w_S^{\Psi})(A) = 0\, \forall j \notin S$.

Juntando este resultado con la ecuación (4.4) deducimos que

$$\Phi'_i(w_S^{\Psi})(A) = \Phi_i(w_S^{\Psi})(A)$$

en este caso.

- *Caso 2: $S \nsubseteq A^t, \forall t \in (0, 1]$.*

  Veamos que en este caso $\Phi'(w_S^{\Psi})(A) = \Phi(w_S^{\Psi})(A) = 0$. Sea $j \in N$. Si $A_j = 0$ tenemos por el axioma $\mathscr{B}_1$ que $\Phi'_i(w_S^{\Psi})(A) = 0$. Si $A_j \neq 0$, defina $B \in F(N)$ como

  $$B_i := \begin{cases} A_j & si\ i = j \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases}.$$

  Es claro que $B^t \subseteq A^t$, $\forall t \in (0, 1]$. Tenemos que si $C \in F(N)$ es tal que $C^t \subseteq A^t\, \forall t \in (0, 1]$, entonces no existe $t \in (0, 1]$ tal que $S \subseteq C^t$ ya que esto implicaría que $S \subseteq A^t$. Por lo tanto tenemos que $w_s^{\Psi}(C^t \cap B^t) = 0 = w_S^{\Psi}(C^t) \quad \forall t \in (0, 1]$, *usando la ecuación* (4.1)*. Por lo tanto, B es un portador difuso de A para w_S^{Ψ}. Del axioma $\mathscr{B}_1$ y la definición de Φ tenemos que*

$$\Phi'_j(w_S^{\Psi})(A) = \sum_{i \in N; B_i > 0} \Phi'_i(w_S^{\Psi})(A) = w_S^{\Psi}(B) = 0 = \Phi_j(w_S^{\Psi})(A).$$

Juntando los resultados del caso 1 y caso 2 concluimos que $\Phi' = \Phi$.

□

Por el lema 4.1, tenemos que es posible extender la función Φ de $\mathscr{G}_0[\Psi]$ a $\mathscr{G}[\Psi]$ de la siguiente forma:

$$\Phi_i(\nu)(A) = \sum_{S \in P(N): S \neq \emptyset} c_S(\nu)\Phi_i(w_S^{\Psi})(A), \forall i \in N. \tag{4.5}$$

Veamos que esta expresión define el único mapa de Shapley sobre $\mathscr{G}[\Psi]$.

Lema 4.4. *La función extendida $\Phi : \mathscr{G}[\Psi] \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ de la ecuación* (4.5) *es el único mapa de Shapley sobre $\mathscr{G}[\Psi]$.*

Prueba. *Del lema 4.1 tenemos que la única manera de extender a $\Phi : \mathscr{G}_0[\Psi] \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ (la única función que satisface los tres axiomas de Shapley) a una función con dominio en $\mathscr{G}[\Psi]$, de tal forma que esta extensión sea una función lineal es como la expresión de la ecuación* (4.5)*. Por lo tanto, y usando el lema 4.3 tenemos que si existe un mapa de Shapley, este sería único y vendría dado por esa expresión. De tal manera que solo hace falta probar que la expresión de la ecuación* (4.5) *satisface los tres axiomas de Shapley. Veamos que en efecto los satisface.*

- *Φ satisface el axioma $\mathscr{B}_1$: Esto es inmediato del lema 4.1 y la ecuación* (4.5)*.*

- *Φ satisface el axioma $\mathscr{B}_2$: Sean $A, B \in F(N)$ tales que B es un portador difuso* *de A para $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$. Tenemos por lo tanto que:*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in N;B_i>0} \Phi_i(\nu)(A) &= \sum_{i\in N;B_i>0}\ \sum_{S\in P(N);S\neq\emptyset} c_S(\nu)\Phi_i(w_S^{\Psi})(A) \\
&= \sum_{i\in N;B_i>0}\ \sum_{S\in P_i(A^{B_i})} c_S(\nu)\frac{\Psi(B_i)}{|S|} \\
&= \sum_{i\in N;B_i>0} \Psi(B_i) \sum_{S\in P_i(A^{B_i})} c_S(\nu)\frac{1}{|S|} \\
&= \sum_{t\in[0,1]} \Psi(t) \sum_{t\in B^t}\ \sum_{S\in P_i(A^t)} c_S(\nu)\frac{1}{|S|}, \qquad (4.6)
\end{aligned}
$$

donde recordemos que $P_i(A^t) = \{T \subseteq N | i \in T, T \subseteq A^t\}$. Ahora, para $t \in (0,1]$ defina $u_t \in G_0(A^t)$ por $u_t(S) = \nu(S)$, $\forall S \in P(A^t)$, y ahora considere $\varphi(u_t) \in \mathbb{R}^{A^t}$; el valor de Shapley definido en el teorema 2.2. De la ecuación (2.2) tenemos que $\varphi(u_t) = \sum_{S\in P_i(A^t)} c_S(\nu)\frac{1}{|S|}, \forall i \in A^t$.

Ahora, dado que B es un portador difuso de A, tenemos que B^t es un portador de A^t(ver definición 2.5) $\forall t \in (0,1]$. Teniendo en cuenta los axiomas C_1 y C_2 de la definición 2.6 tenemos que

$$\sum_{i\in B^t} \varphi_i(u_t) = u_t(B^t).$$

Combinando esta expresión con la ecuación anterior, tenemos que

$$\sum_{i\in B^t}\ \sum_{S\in P_i(A^t)} c_S(\nu)\frac{1}{|S|} = u_t(B^t) = \nu(B^t).$$

Por último, combinando esta expresión con la ecuación (4.6) tenemos que

$$\sum_{i\in N;B_i>0} \Phi_i(\nu)(A) = \sum_{t\in[0,1]} \Psi(t)\nu(B^t) = \nu(B).$$

Concluimos por lo tanto que Φ satisface el axioma $\mathscr{B}_2$.

- *Φ satisface el axioma $\mathscr{B}_3$: Primero notemos que para $S \in F(N), S \neq \emptyset$ se tiene* *que*

$$c_S(\pi\nu) = \sum_{T\in P(N);T\subseteq S} (-1)^{|S|-|T|}\pi\nu(T) = \sum_{T\in P(N);T\subseteq \pi^{-1}S} (-1)^{|S|-|T|}\nu(\pi^{-1}T) = c_{\pi^{-1}S}(\nu),$$

para cualquier permutación π de N, y teniendo en cuenta además que Φ satisface el axioma $\mathscr{B}_3$ cuando se restringe a w_S^{Ψ}, obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Phi_{\pi(i)}(\pi\nu)(\pi A) &= \sum_{S\in P(N);S\neq\emptyset} c_S(\pi\nu)\Phi_{\pi(i)}(w_S^{\Psi})(\pi A) \\
&= \sum_{S\in P(N);S\neq\emptyset} c_{\pi^{-1}S}(\nu)\Phi_{\pi(i)}(\pi(\pi^{-1}w_S^{\Psi}))(\pi A) \\
&= \sum_{S\in P(N);S\neq\emptyset} c_{\pi^{-1}S}(\nu)\Phi_i(\pi^{-1}w_S^{\Psi})(A) \\
&= \sum_{S\in P(N);S\neq\emptyset} c_{\pi^{-1}S}(\nu)\Phi_i(w_{\pi^{-1}S}^{\Psi})(A) \\
&= \sum_{S\in P(N);S\neq\emptyset} c_S(\nu)\Phi_i(w_S^{\Psi})(A) \\
&= \Phi_i(\nu)(A), \forall i \in N,
\end{aligned}$$

donde en la cuarta igualdad usamos el hecho de que

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}w_S^{\Psi}(T) &= w_S^{\Psi}(\pi T) \\
&= \begin{cases} 1 & si\ S \subseteq (\pi T)^t \ para\ algún\ t \in (0,1] \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & si\ \pi^{-1}S \subseteq (T)^t \ para\ algún\ t \in (0,1] \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases} \\
&= w_{\pi^{-1}S}^{\Psi}(T), \forall T \in F(N).
\end{aligned}$$

Concluimos que Φ satisface también el axioma $\mathscr{B}_3$ y por lo tanto es el único mapa de Shapley $\Phi : \mathscr{G}[\Psi] \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$.

□

Finalmente, para probar el teorema 2.2 probamos el siguiente lema.

Lema 4.5. *La función Φ está definida en la ecuación (4.5) también está definida por*

$$\Phi_i(\nu)(A) = \begin{cases} \Psi(t) \sum_{S\in P_i(A^t)} \frac{(|S|-1)!(|A^t|-|S|)!}{|A^t|!}(\nu(S) - \nu(S\backslash\{i\})) & si\ A_i = t > 0 \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases}.$$

Prueba. *Sean $A \in F(N), i \in N$ y $t := A_i$. Tenemos dos casos.*

- *Caso 1: Si $t = 0$, entonces $\Phi_i(w_S^{\Psi})(A) = 0$ para cualquier $S \in P(N), S \neq \emptyset$, por el axioma $\mathscr{B}_1$. De la ecuación (4.5) deducimos que $\Phi_i(\nu)(A) = 0$.*

- *Caso 2: Si $t \in (0, 1]$, entonces*

$$\begin{aligned} \Phi_i(\nu)(A) &= \sum_{S\in P(N);S\neq\emptyset} c_S(\nu)\Phi_i(w_S^{\Psi})(A) \\ &= \sum_{S\in P_i(A^t)} c_S(\nu)\Phi_i(w_S^{\Psi})(A) \\ &= \Psi(t) \sum_{S\in P_i(A^t)} c_S(\nu)\frac{1}{|S|}, \end{aligned}$$

donde en la segunda y tercera igualdad usamos la definición de $\Phi_i(w_S^{\Psi})(A)$. Ahora, por la ecuación (2.2) tenemos que esta última expresión es igual a

$$\Psi(t)(\varphi_i(\nu)(A^t)) = \Psi(t) \sum_{S\in P_i(A^t)} \frac{(|S|-1)!(|A^t|-|S|)!}{|A^t|!}(\nu(S) - \nu(S\backslash\{i\})).$$

□

Con este lema concluimos la prueba del teorema 2.2. En la siguiente sección estudiaremos el núcleo difuso de este modelo y veremos su relación con el mapa de Shapley.

4.3. Núcleo difuso de $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$

Recordemos del capítulo 3 que para $U \in F(N)$, el núcleo difuso de $\nu \in G_F(N)$ en la coalición difusa de U venía dado por

$$\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \middle| \sum_{i\in N} x_i = \nu(U), \sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i \geq \nu(S_U) \text{ para todo } S \in P(N) \right\}.$$

Antes de ver cómo es la forma del núcleo difuso en estos juegos, consideremos unas cuantas cosas. Sea $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$ para alguna función de peso Ψ y sean $U \in F(N), Q(U) := \{U_i | U_i > 0, i \in N\}$ y $q(U) := |Q(U)|$. Escribamos ahora los elementos de $Q(U)$ en orden creciente de la siguiente forma: $t_1 < \ldots < t_{q(U)}$. Con esto en mente, podemos escribir el núcleo difuso en la coalición difusa U como

$$\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \middle| \sum_{i \in N} x_i = \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)\nu(U^{t_m}), \sum_{i \in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i \geq \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)\nu(S_U^{t_m}), \forall S \in P(N) \right\},$$

donde, siguiendo la notación anterior, $(S_U)_i = \begin{cases} U_i & \text{si } i \in S \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$, y $(S_U)^{t_m} = \{i \in N | (S_U)_i = t_m\}$.

En el siguiente teorema daremos la forma general de $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ cuando $\mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})}) \neq \emptyset$ para $m = 1, \cdots q(U)$, donde $\mathcal{C}(\cdot)$ denota el núcleo nítido y $\nu^{(U^{t_m})}$ es la función característica restringida a la coalición nítida U^{t_m}. Haremos unas ligeras modificaciones a la prueba de X.Yu y Q.Zhang [3] ya que ellos solo probaron el teorema para el caso particular en el que $\Psi(t) = t$, que fue el modelo original de Butnariu [9].

Teorema 4.2. *Sean $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$ para alguna función de peso Ψ y $U \in F(N)$. Si $\mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})}) \neq \emptyset$ para $m = 1, \ldots, q(U)$, entonces $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) \neq \emptyset$ y*

$$\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) = \left\{ y \middle| \quad y = \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)x^m = \left(\sum_{m=1}^{q(u)} \Psi(t_m)x_1^m, \ldots, \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)x_n^m \right), \right.$$
$$\left. \forall x^m = (x_1^m, \ldots, x_n^m) \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})}), m = 1, \ldots, q(U) \right\}$$

Prueba. *Sean $U \in F(N)$ y $\nu \in \mathscr{G}[\Psi]$. Suponga que $\mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})}) \neq \emptyset$ para $m = 1, \ldots, q(U)$. Haremos esta demostración mostrando primero que si tomamos cualesquiera $x^m \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})}) \forall m$, entonces $y := \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)x^m \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$, y luego mostramos que si $y \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ entonces esta es de la forma $y = \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)x^m$ para $x^m \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})})$. Tomemos entonces un $x^m \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})})$ para todo m. Tenemos por lo tanto que $\sum_{i \in N} x_i^m = \nu(U^{t_m})$ y esto implica que*

$$\sum_{i \in N} y_i = \sum_{i \in N} \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)x_i^m = \sum_{m=1}^{q(U)} \left(\Psi(t_m) \sum_{i \in N} x_i^m \right) = \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)\nu(U^{t_m}) = \nu(U).$$

De manera que la primera condición $\sum_{i\in N} y_i = \nu(U)$ *para pertenecer a* $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ *se satisface.*

Ahora, notemos que de la definición de U^{t_m} *tenemos que* $\{U^{t_1},\ldots,U^{t_{q(U)}}\}$ *es una partición de* $\mathrm{Supp}(U)$*. Notando además el hecho de que si* $x^m \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})})$ *entonces* $x_i^m = 0\ \forall i \notin U^{t_m}$*, tenemos que* $\sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i^m = \sum_{i\in (S_U)^{t_m}} x_i^m$*,* $\forall S \in P(N)$ *y esto implica que*

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} y_i &= \sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m) x_i^m \\
&= \sum_{m=1}^{q(U)} \left(\Psi(t_m) \sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i^m \right) \\
&= \sum_{m=1}^{q(U)} \left(\Psi(t_m) \sum_{i\in (S_U)^{t_m}} x_i^m \right) \\
&\geq \sum_{m=1}^{q(U)} \big(\Psi(t_m) \nu((S_U)^{t_m}) \big) \\
&= \nu(S_U),
\end{aligned}$$

donde en la desigualdad usamos el hecho de que $x^m \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})})$ *implica que* $\sum_{i\in T} x_i^m \geq \nu(T), \forall T \subseteq U^{t_m}$*; donde en particular* $(S_U)^{t_m} \subseteq U^{t_m}$*.*

Concluimos que y satisface la segunda condición para pertenecer a $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ *también, y pot lo tanto* $y \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$*.*

Ahora, suponga que $y \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$*. Defina* x^m *por*

$$x_i^m = \begin{cases} \frac{y_i}{\Psi(t_m)} & \textit{si } i \in U^{t_m} \\ 0 & \textit{de lo contrario,} \end{cases}$$

$m = 1, \ldots, q(U)$.

Notemos que $y_i = \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m) x_i^m\ \forall i \in N$*, ya que* $x_i^m = 0\ \forall i \notin U^{t_m}$*. Veamos que en efecto* $x^m \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})})$*. Dado que* $y \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$*, tenemos en particular que*

$$\sum_{i\in \mathrm{Supp}((U^{t_m})_U)} y_i \geq \nu((U^{t_m})_U) = \Psi(t_m)\nu(U^{t_m})$$

y que

$$\sum_{m=1}^{q(U)} \sum_{i \in \mathrm{Supp}((U^{t_m})_U)} y_i = \sum_{i \in N} y_i = \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)\nu(U^{t_m}).$$

Estas dos ecuaciones implican que

$$\sum_{i \in \mathrm{Supp}((U^{t_m})_U)} y_i = \Psi(t_m)\nu(U^{t_m}),$$

lo que a su vez implica que

$$\sum_{i \in \mathrm{Supp}((U^{t_m})_U)} \frac{y_i}{\Psi(t_m)} = \sum_{i \in U^{t_m}} \frac{y_i}{\Psi(t_m)} = \nu(U^{t_m}),$$

donde por la definición de x^m *tenemos que* $\sum_{i \in U^{t_m}} x_i^m = \nu(U^{t_m})$. *Por lo tanto* x^m *satisface la primera condición para pertenecer a* $\mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})})$. *Ahora, la segunda condición se satisface también ya que por hipótesis de que* $y \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ *se tiene* $\forall S \in P(N)$

$$\sum_{i \in (S_U)^{t_m}} y_i \sum_{i \in \mathrm{Supp}(((S_U)^{t_m})_U)} y_i \geq \nu(((S_U)^{t_m})_U) = \Psi(t_m)\nu((S_U)^{t_m}),$$

que implica que $\sum_{i \in (S_U)^{t_m}} \frac{y_i}{\Psi(t_m)} = \sum_{i \in (S_U)^{t_m}} x_i^m \geq \nu((S_U)^{t_m})$. *Notando el hecho de que todos los subconjuntos nítidos de* U^{t_m} *pueden ser escritos como* $(S_U)^{t_m}$ *para algún* $S \in P(N)$, *concluimos que* $x^m \in \mathcal{C}(\nu^{(U^{t_m})}), m = t_1, \ldots, t_{q(U)}$ *y queda demostrado el teorema.*

□

Por último, vemos una relación interesante entre el núcleo difuso y el mapa de Shapley, análoga con los juegos nítidos. Donde de nuevo modificamos ligeramente la prueba de S.Yu y Q.Zhang que solo prueba el resultado para $\Psi(t) = t$.

Teorema 4.3. *Suponga que* $\nu \in \mathcal{G}[\Psi]$ *es convexo. Entonces para todo* $U \in F(N)$ *se tiene que* $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) \neq \emptyset$, *donde en particular* $\Phi(\nu)(U) \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$, *donde* Φ *denota el mapa de Shapley descrito en la sección anterior.*

Prueba. *Por lo probando en la anterior sección tenemos que* $\sum_{i \in N} \Phi(\nu)(U) = \nu(U)$. *Luego, solo falta probar que para todo* $S \in P(N)$ *se tiene que*

$$\sum_{i \in \mathrm{Supp}(S_U)} \Phi_i(\nu)(U) \geq \nu(S_U) = \sum_{m=1}^{q(U)} \Psi(t_m)\nu((S_U)^{t_m}).$$

Comparando la función de Shapley φ para los juegos nítidos con el mapa de Shapley Φ para $\mathscr{G}[\Psi]$ tenemos que

$$\Phi_i(\nu)(U) = \begin{cases} \Psi(t_m)\varphi_i(\nu^{(U^{t_m})}) & si\ i \in U^{t_m}, t_m \in Q(U) \\ 0 & de\ lo\ contrario \end{cases}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathrm{Supp}(S_U)} \Phi_i(\nu)(U) &= \sum_{m=1}^{q(U)} \sum_{i \in (S_U)^{t_m}} \Phi_i(\nu)(U) \\ &= \sum_{m=1}^{q(U)} \left(\sum_{i \in (S_U)^{t_m}} \varphi_i(\nu^{U^{t_m}}) \right) \Psi(t_m). \end{aligned}$$

Es claro que la restricción de ν a cualquier coalición, nítida o difusa, debe ser convexa también. Por lo tanto, usando el teorema 2.4 tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{q(U)} \left(\sum_{i \in (S_U)^{t_m}} \varphi_i(\nu^{U^{t_m}}) \right) \Psi(t_m) &\geq \sum_{m=1}^{q(U)} \nu^{(U^{t_m})}((S_U)^{t_m})\Psi(t_m) \\ &= \sum_{m=1}^{q(U)} \nu((S_U)^{t_m})\Psi(t_m) \end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO 5

Modelo de M.Tsurumi, su núcleo y su función de Shapley

En este capítulo revisaremos el modelo de juegos difusos desarrollado por M.Tsurumi [5]. Estos juegos tienen un par de propiedades importantes, que una gran parte de los juegos difusos con función de peso de Butnairu carece i.e., que las funciones características del juego difuso sean monótonas no decrecientes y continuas con respecto a la tasa de participación de los jugadores. Estas dos propiedades hacen que este modelo pueda ser aplicado a una extensa cantidad de juegos, y que los juegos cooperativos nítidos puedan ser extendidos de manera muy natural a los juegos difusos. Tsurumi también modifica en cierto grado los axiomas de Shapley de Butnairu para que estas sean un poco más lógicas y consistentes. En las siguientes dos secciones seguiremos a Tsurumi [5].

5.1. Juegos difusos con forma de integral de Choquet

Antes de definir estos juegos necesitamos una definición. Sea $S \in F(N)$. Denotamos por $[S]_h := \{i \in N | S_i \geq h\}$ para todo $h \in [0,1]$, a el conjunto de las coordenadas de S con un valor mayor a h. Definimos ahora los nuevos juegos difusos.

Definición 5.1. *Sean $S \in F(N), Q(S) = \{S_i | S_i > 0, i \in N\}$ y $q(S) = |Q(S)|$. Escribimos los elementos de $Q(S)$ en orden creciente como $h_1 < \ldots < h_{q(S)}$. Decimos que un* *juego difuso $\nu \in G_F(N)$ tiene forma de integral de Choquet si y solo si:*

$$\nu(S) = \sum_{\ell=1}^{q(S)} \nu([S]_{h\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}),$$

donde $h_o := 0$, y donde ν restringido a $P(N)$ es un juego nítido superaditivo. Denotaremos por $G_{FC}(N)$ a el conjunto de los juegos difusos con forma de integral de Choquet.

Estos juegos difusos llevan este nombre ya que la ecuación tiene la forma de la integral de Choquet de una función S con respecto a ν. Estas integrales están fuera del ámbito de esta tesis. El lector interesado es referido a [10]. Es claro de la definición que si $\nu \in G_0(N)$ es superaditivo entonces la función característica extendida a $G_{FC}(N)$ también.

Antes de probar las propiedades de continuidad y monotonía no decreciente de la función, probemos el siguiente lema.

Lema 5.1. *Sean $\nu \in G_{FC}(N), S \in F(N)$ y $0 \leq \kappa_1 < \ldots < \kappa_m \leq 1$, tales que $Q(S) \subseteq \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}$. Entonces*

$$\nu(S) = \sum_{\ell=1}^{m} \nu([S]_{\kappa\ell})(\kappa_\ell - \kappa_{\ell-1}),$$

donde $\kappa_0 = 0$.

Prueba. *Escriba los elementos de $Q(S)$ en orden creciente como $h_1 < \ldots < h_{q(S)}$. Si $h_{\ell-1} = \kappa_{j_\ell} < \kappa_{j_\ell+1} < \ldots < \kappa_{j_\ell+p_\ell} = h_\ell$ para cualesquiera ℓ, j_i, p_i entonces tenemos que $[S]_{h_\ell} = [S]_{\kappa_{j_\ell+1}} = \cdots = [S]_{\kappa_{j_\ell+p_\ell}}$. Por lo tanto*

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=1}^{m} \nu([S]_{\kappa_\ell})(\kappa_\ell - \kappa_{\ell-1}) &= \sum_{\ell=1}^{q(S)} \nu([S]_{\kappa_\ell})((\kappa_{j_\ell+p_\ell} - \kappa_{j_\ell+p_\ell-1}) + \cdots + (\kappa_{j_\ell+l} - \kappa_{j_\ell})) \\
&= \sum_{\ell=1}^{q(S)} \nu([S]_{\kappa_\ell})(\kappa_{j_\ell+p_\ell} - \kappa_{j_\ell}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{q(S)} \nu([S]_{\kappa_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) \\
&= \nu(S).
\end{aligned}$$

□

Teorema 5.1. *Sea $\nu \in G_{FC}(N)$. Entonces ν es monótona no decreciente y continua con respecto a la tasa de participación de los jugadores, i.e.,*

i) $\nu(S) \leq \nu(T)\, \forall S, T \in F(N)$, *tales que* $S \subseteq T$.

ii) ν *es continua con respecto a la métrica* d *en* $F(N)$ *dada por* $d(S,T) = \max_{i \in N} |S_i - T_i|\, \forall S, T \in F(N)$.

Prueba.

i) *Tenemos para* $S, T \in F(N)$ *que*

$$\begin{aligned} S \subseteq T &\iff S_i \leq T_i, \forall i \in N \\ &\iff [S]_h \subseteq [T]_h, \forall h \in [0,1] \\ &\implies \nu([S]_h) \leq \nu([T]_h), \forall h \in [0,1], \end{aligned}$$

ya que $\nu|_{P(N)}$ *es superaditiva y por lo tanto es monótona no decreciente. Ahora, si consideramos el conjunto* $Q(S) \cup Q(T) = \{\kappa_1, \ldots, \kappa_m\}, \kappa_1 < \ldots < \kappa_m$. *Tenemos del lema anterior que*

$$\begin{aligned} \nu(S) &= \sum_{\ell=1}^{m} \nu([S]_{\kappa_\ell})(\kappa_\ell - \kappa_{\ell-1}) \\ &\leq \sum_{\ell=1}^{m} \nu([T]_{\kappa_\ell})(\kappa_\ell - \kappa_{\ell-1}) \\ &= \nu(T). \end{aligned}$$

ii) *Sea* $S \in F(N), \delta > 0$ *lo suficientemente pequeño y* $T \in F(N)$ *tal que* $d(S,T) = \max_{i \in N} |S_i - T_i| < \delta$. *Veamos que* $\lim_{\delta \to 0} \nu(S) = \nu(T)$. *Sean* $Q'(S) := \{S_i | i \in N\}$ *y* $q'(S) = |Q'(S)|$. *Consideremos los elementos de* $Q'(S)$ *en forma creciente* $\kappa_1 < \ldots < \kappa_{q'(S)}$. *Considere el conjunto* $Q'((S^{k_m})_T) = \{T_i | i \in S^{k_m}\}$, *que por simplicidad escribiremos como* $T[m]$. *Considere los elementos de* $T[m]$ *en forma creciente* $k_1^m < \ldots < k_{t[m]}^m$, *donde* $t[m] := |T[m]|$. *Considerando* δ *lo suficientemente pequeño; en particular* $\delta < \min_{1 < i \leq q'(S)} \left(\frac{\kappa_i - \kappa_{i-1}}{2}\right)$, *tenemos que* $t_{m-1} \leq t_m$ *para todo* $m \geq 2, t_m \in T[m]$ *y* $t_{m-1} \in T[m-1]$. *Veamos la razón de esto. Suponga que* $t_{m-1} > t_m$ *para algún* $m \geq 2$. *Sean* $i_1, i_2 \in N$ *tales que*

$S_{i_1} = \kappa_m, T_{i_1} = t_m, S_{i_2} = \kappa_{m-1}$ *y* $T_{i_2} = t_{m-1}$. *Dado que* $d(S,T) < \delta$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}
& \kappa_m - t_m < \delta \\
\Longrightarrow\ & \kappa_m - \kappa_{m-1} < \delta + t_m - \kappa_{m-1} \\
\Longrightarrow\ & 2\delta < \delta + t_m - \kappa_{m-1} \left(ya\ que\ \delta < \frac{\kappa_m - \kappa_{m-1}}{2} \right) \\
\Longrightarrow\ & \delta < t_m - \kappa_{m-1} \\
\Longrightarrow\ & \delta < t_{m-1} - \kappa_{m-1} (ya\ que\ t_{m-1} > t_m).
\end{aligned}$$

Pero esto es una contradicción con el hecho de que $d(S,T) < \delta$. *Concluimos que* $t_{m-1} \leq t_m$ *para todo* $m \geq 2, t_m \in T[m], t_{m-1} \in T[m-1]$. *En particular se tiene que* $\kappa_{t[m-1]}^{m-1} \leq \kappa_1^m, \forall m \geq 2$. *Teniendo en cuenta esto y el lema anterior tenemos que*

$$\nu(T) = \sum_{m=1}^{q'(S)} \sum_{p=1}^{t[m]} \nu\left([T]_{\kappa_p^m}\right) (\kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m), \tag{5.1}$$

donde $\kappa_0^1 := 0$ *y* $\kappa_0^m := \kappa_{t[m-1]}$, *para* $m \geq 2$. *Tomando una vez más en cuenta la consideración anterior, tenemos que para* δ *lo suficientemente pequeño* $\nu\left([T]_{\kappa_1^m}\right) = \nu\left([S]_{\kappa_m}\right)$ *para todo* m. *Por lo tanto para todo* m *se tiene que*

$$\sum_{p=1}^{t[m]} \nu\left([T]_{\kappa_p^m}\right) (\kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m) = \nu\left([S]_{\kappa_m}\right) (\kappa_1^m - \kappa_{t[m-1]}^{m-1}) + \sum_{p=2}^{t[m]} \nu\left([T]_{\kappa_p^m}\right) (\kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m), \tag{5.2}$$

donde $\kappa_{t[0]}^0 = 0$. *Ahora, dado que* $|\kappa_m - \kappa_1^m| < \delta$ *y* $|\kappa_{m-1} - \kappa_{t[m-1]}^{m-1}| < \delta\ \forall m \geq 2$, *tenemos que*

$$\kappa_m - \kappa_{m-1} - 2\delta < \kappa_1^m - \kappa_{t[m-1]}^{m-1} < \kappa_m - \kappa_{m-1} + 2\delta. \tag{5.3}$$

También dado que $|\kappa_m - \kappa_p^m| < \delta$ *y* $|\kappa_m - \kappa_{p-1}^m| < \delta$, *para* $p \geq 2$, *se tiene por desigualdad triangular que*

$$0 < \kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m < 2\delta. \tag{5.4}$$

Por las ecuaciones (5.2), (5.3) *y* (5.4) *se tiene que*

$$\begin{aligned}
\nu([S]_{\kappa_m})(\kappa_m - \kappa_{m-1} - 2\delta) &< \nu([S]_{\kappa_m})(\kappa_1^m - \kappa_{t[m-1]}^{m-1}) \\
&\leq \sum_{p=1}^{t[m]} \nu([T]_{\kappa_p^m})(\kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m) \\
&= \nu([S]_{\kappa_m})(\kappa_1^m - \kappa_{t[m-1]}^{m-1}) \\
&\quad + \sum_{p=2}^{t[m]} \nu([T]_{\kappa_p^m})(\kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m) \\
&< \nu([S]_{\kappa_m})(\kappa_m - \kappa_{m-1} + 2\delta) + \sum_{p=2}^{t[m]} \nu([T]_{\kappa_p^m})2\delta
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en el límite $\delta \to 0$ *se tiene que*

$$\sum_{p=1}^{t[m]} \nu([T]_{\kappa_p^m})(\kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m) \to \nu([S]_{\kappa_m})(\kappa_m - \kappa_{m-1}), \forall m.$$

Comparando esto con la ecuación (5.1) *deducimos que en el límite* $\delta \to 0$

$$\begin{aligned}
\nu(T) &= \sum_{m=1}^{q'(S)} \sum_{p=1}^{t[m]} \nu([T]_{\kappa_p^m})(\kappa_p^m - \kappa_{p-1}^m) \\
&\to \sum_{m=1}^{q'(S)} \nu([S]_{\kappa_m})(\kappa_m - \kappa_{m-1}) \\
&= \nu(S).
\end{aligned}$$

Concluimos que ν *es continua con respecto a la métrica* d.

□

Veamos ahora una caracterización de la función de Shapley para estos juegos.

5.2. Función de Shapley en $G_{FC}(N)$

Primero damos una nueva definición de portador difuso. Le cambiaremos el nombre para que no haya ambigüedad con los portadores definidos en el capítulo 4.

Definición 5.2. *Sean $\nu \in G_F(N)$ y $U \in F(N)$. Decimos que $S \in F(U)$ es un f-portador de U para ν si*

$$\nu(S \cap T) = \nu(T)\ \forall T \in L(U).$$

Donde denotaremos por $FC(U|_\nu)$ al conjunto de los f-portadores de U para ν.

La razón por la que Tsurumi da esta nueva definición de portador en juegos difusos es que esta está basada en la inclusión estándar entre conjuntos, mientras que los portadores definidos por Butnariu están basados en una inclusión no estándar. Se hace esto para redefinir el axioma de Shapley concerniente a los portadores.

Adicionalmente, para $U \in F(N)$ y $i, j \in N$ definimos para todo $S \in F(U), S_{ij}^U \in F(U)$ dado por

$$(S_{ij}^U)_\kappa = \begin{cases} \text{mín}\{S_i, U_j\} & \text{si } \kappa = i \\ \text{mín}\{S_j, U_i\} & \text{si } \kappa = j \\ S_\kappa & \text{de lo contrario} \end{cases}.$$

Definimos también para todo $S \in F(N)$ el conjunto $\mathscr{P}_{ij}[S]$ dado por πS donde π es la transposición (i, j). Donde además es claro que $S_{ij}^U, \mathscr{P}_{ij}[S] \in L(U)$.

Definimos ahora la nueva función de Shapley.

Definición 5.3. *Sea $G'_F(N) \subseteq G_F(N)$. Decimos que $\Theta : G'_F(N) \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ es una función de Shapley en $G'_F(N)$ si se satisfacen los siguientes axiomas.*

- *Axioma $\mathscr{F}_1$: Si $\nu \in G'_F(N)$ y $U \in F(N)$ entonces*

$$\sum_{i \in N} \Theta_i(\nu)(U) = \nu(U),$$

$$\Theta_i(\nu)(U) = 0, \forall i \notin \text{Supp}(U).$$

- *Axioma $\mathscr{F}_2$: Si $\nu \in G'_F(N), U \in F(N)$ y $T \in FC(U|_\nu)$ entonces*

$$\Theta_i(\nu)(U) = \Theta_i(\nu)(T)\ \ \forall i \in N.$$

- *Axioma $\mathscr{F}_3$: Si $\nu \in G'_F(N), U \in F(N), U_{ij}^U \in FC(U|_\nu)$ y $\nu(S) = \nu(\mathscr{P}_{ij}[S])$ para todo $S \in F(U_{ij}^U)$ entonces*

$$\Theta_i(\nu)(U) = \Theta_j(\nu)(U).$$

- *Axioma $\mathscr{F}_4$: Sean $\nu_1, \nu_2 \in G'_F(N)$, y defina el juego $\nu_1 + \nu_2$ por $(\nu_1 + \nu_2)(S) = \nu_1(S) + \nu_2(S)$ para todo $S \in F(N)$. Si $\nu_1 + \nu_2 \in G'_F(N)$ y $U \in F(N)$ entonces*

$$\Theta_i(\nu_1 + \nu_2)(U) = \Theta_i(\nu_1)(U) + \Theta_i(\nu_2)(U) \;\; \forall i \in N.$$

El axioma $\mathscr{F}_1$ es, como siempre, el axioma que nos indica que al dividir el valor $\nu(U)$ entre los jugadores, aquellos que no aportan nada a la coalición deben recibir un pago de cero y que la suma de los pagos debe ser igual a $\nu(U)$. El axioma $\mathscr{F}_2$ es un poco más lógico que el axioma $\mathscr{B}_2$ de Butnariu. Primero, nos dice como es de esperar, y usando el axioma $\mathscr{F}_1$, que $\nu(U) = \sum_{i \in N} \Theta_i(\nu)(U) = \sum_{i \in N} \Theta_i(\nu)(T) = \nu(T)$, en concordancia con que $T \in FC(U|_\nu)$. Lo segundo en lo que nos fijamos y basados en la definición de f-portador, es que si $T \in FC(U|_\nu)$ entonces cada coordenada $i \in N$ de T nos indica que es irrelevante que el jugador i tenga una tasa de participación mayor a T_i en cualquier coalición de $F(U)$; en particular $U_i \geq T_i$. Por lo que es lógico darle un pago correspondiente a la tasa de participación T_i en caso de que la exceda, como indica $\mathscr{F}_2$. Analicemos ahora el axioma $\mathscr{F}_3$. Si sin pérdida de generalidad asumimos que $U_i \geq U_j$, entonces $U_{ij}^U \in FC(U|_\nu)$ implica que es irrelevante que el jugador i tenga una tasa de participación mayor a U_j en cualquier coalición de $F(U)$, y para deducir la forma de su pago da igual a restringirnos a U_{ij}^U, donde el hecho de que $\nu(S) = \nu(\mathscr{P}_{ij}[S])$ para todo $S \in F(U)$ implica que la función característica restringida a U_{ij}^U es totalmente simétrica con respecto a los jugadores i y j. Por lo tanto es lógico que ambas reciban el mismo pago como lo indica $\mathscr{F}_3$. Por último el axioma $\mathscr{F}_4$ es la acostumbrada condición de linealidad.

Enunciamos ahora el siguiente teorema que nos muestra una función de Shapley en $G_{FC}(N)$.

Teorema 5.2. *La función $\Theta : G_{FC}(N) \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ definida por*

$$\Theta_i(\nu)(U) := \sum_{\ell=1}^{q(U)} \left(\varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell})\right)(h_\ell - h_{\ell-1}),$$

es una función de Shapley donde φ es la función de Shapley para juegos nítidos definida en el teorema 2.2.

Recalcamos el hecho de que es aún un problema abierto la unicidad de la función de Shapley en este modelo.

Antes de probar este teorema necesitamos un par de lemas.

Lema 5.2. *Sean $\nu \in G_{FC}(N)$ y $S, T \in F(N)$ tales que $S \subseteq T$. Entonces $\nu(S) = \nu(T)$ si y solo si $\nu([S]_h) = \nu([T]_h)$ para todo $h \in (0, 1]$.*

Prueba. *Sean $\nu \in G_{FC}(N)$ y $S, T \in F(N)$ tales que $S \subseteq T$ y $\nu(S) = \nu(T)$. Considere los elementos de $Q(S) \cup Q(T)$ en forma creciente como $h < \ldots < h_{q(S,T)}$, donde $q(S,T) := |Q(S) \cup Q(T)|$. Por el lema 5.1, tenemos que*

$$0 = \nu(T) - \nu(S) = \sum_{\ell=1}^{q(S,T)} (\nu([T]_{h_\ell}) - \nu([S]_{h\ell}))\,(h_\ell - h_{\ell-1}). \tag{5.5}$$

Ahora, tenemos que $S \subseteq T$ si y solo si $[S]_h \subseteq [T]_h$ para todo $h \in [0, 1]$. Esto combinado con el hecho de que ν es monótona no decreciente con respecto a las tasas de participación de los jugadores, nos lleva a que $\nu([T]_h) \geq \nu([S]_h)$ para todo $h \in [0, 1]$. Por lo tanto, podemos inferir de la ecuación (5.5) que $\nu([T]_{h_\ell}) = \nu([S]_{h_\ell})$, para todo $h_\ell \in Q(S) \cup Q(T)$. Notando además que $[T]_h = [T]_{h_\ell}$ para todo $h \in (h_{\ell-1}, h_\ell]$, tenemos por lo tanto que $\nu([T]_h) = \nu([T]_{h_\ell}) = \nu([S]_{h_\ell}) = \nu([S]_h)$ para todo $h_\ell \in Q(S) \cup Q(T)$ y $h \in (h_{\ell-1}, h_\ell]$, donde $h_o := 0$. Por lo tanto $\nu([S]_h) = \nu([T]_h)$ para $h \in (0, h_{q(S,T)}]$. Si $h > h_{q(S,T)}$, entonces $[S]_h = [T]_h = \emptyset$, y por lo tanto $\nu([S]_h) = \nu([T]_h) = 0$. Concluimos que $\nu([S]_h) = \nu([T]_h)$ para todo $h \in (0, 1]$.

Por otro lado, si asumimos que $\nu([S]_h) = \nu([T]_h)$ para todo $h \in (0, 1]$ y considerando los elementos de $Q(S) \cup Q(T)$ en forma creciente como $h_1 < \ldots < h_{q(S,T)}$, tenemos por el lema 5.1 que

$$\begin{aligned}
\nu(S) &= \sum_{\ell=1}^{q(S,T)} \nu([S]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{q(S,T)} \nu([T]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) \\
&= \nu(T).
\end{aligned}$$

□

Lema 5.3. *Sean $\nu \in G_{FC}(N)$ y $U \in F(N)$. Si S es un f-portador de U para ν, entonces $[S]_h$ es un portador (nítido) de $[U]_n$ para la función ν restringida a $P(N)$.*

Prueba. *Primero veamos que $\{[T]_h | T \in F(U)\} = P([U]_h)\, \forall h \in (0, 1]$. Suponga que $[T_0]_h \in \{[T]_h | T \in F(U)\}$. Entonces $(T_0)_i \leq U_i, \forall i \in N$. De manera que si $U_i < h$ entonces $(T_0)_i < h$. Luego, las únicas coordenadas de T_0 que pueden ser mayor o iguales* *a las de U, son las que están en $[U]_h$ i.e., $[T_0]_h \subseteq [U]_h \to [T_0]_h \in P([U]_h)$. Ahora, suponga que $U_0 = \{i_1, \ldots, i_m\} \in P([U]_h)$.*

Considere $T_1 \in F(U)$ dado por

$$(T_1)_i = \begin{cases} U_i & \text{si } i = i_1, \ldots, i_m \\ \frac{h}{2} & \text{de lo contrario} \end{cases}.$$

Es claro que $[T_1]_h = \{i_1, \ldots, i_m\} = U_0$. Luego $U_0 \in \{[T]_h | T \in F(U)\}$.

Ahora, tenemos que

$$\begin{aligned} S \in FC(U|_\nu) &\iff \nu(S \cap T) = \nu(T)\ \forall T \in F(U) \\ &\iff \nu([S \cap T]_h) = \nu([T]_h)\ \forall h \in (0,1]\ T \in F(U)\ (\text{por el lema 5.2}) \\ &\iff \nu([S]_h \cap [T]_h) = \nu([T]_h)\ \forall T \in F(U)\ \forall h \in (0,1] \\ &\iff (\nu([S]_h \cap R) = \nu(R)\ \forall R \in P([U]_h))\ \forall h \in (0,1] \\ &\qquad (\text{por la consideración anterior}) \\ &\iff [S]_h \text{ es un portador de } [U]_h \text{ para } \nu, \forall h \in (0,1]. \end{aligned}$$

□

Estamos ahora listos para probar el teorema 5.2

Prueba (del teorema 5.2). *Veamos que la función $\Theta : G_{FC}(N) \mapsto (\mathbb{R}^n)^{F(N)}$ dada por*

$$\Theta_i(\nu)(U) = \sum_{\ell=1}^{q(U)} \varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1})$$

satisface los axiomas $\mathscr{F}_1 - \mathscr{F}_4$.

- *Θ satisface $\mathscr{F}_1$: Sean $\nu \in G_{FC}(N)$ y $U \in F(N)$. Dado que φ satisface el axioma C_1 para funciones de Shapley nítidas, tenemos que $\sum_{i \in N} \varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell}) = \nu([U]_{h_\ell})$ para todo $h_\ell \in Q(U)$, y por lo tanto*

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \Theta_i(\nu)(U) &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \sum_{i \in N} \varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \nu([U]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) \\ &= \nu(U). \end{aligned}$$

Por lo tanto Θ *satisface la primera condición del axioma* $\mathscr{F}_1$*. Para la segunda condición note que si* $i \notin \mathrm{Supp}(U)$ *entonces* $i \notin [U]_{h_\ell}$*, para todo* $h_\ell \in Q(U)$ *ya que por la definición de* $Q(U)$ *todos sus elementos son mayores a cero. Luego, de nuevo por el axioma* C_1 *de* φ *tenemos que* $\varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell}) = 0$ *y por lo tanto*

$$\Theta_i(\nu)(U) = \sum_{\ell=1}^{q(U)} \varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) = 0.$$

Concluimos que Θ *satisface el axioma* $\mathscr{F}_1$

- Θ *satisface* $\mathscr{F}_2$*: Sean* $\nu \in G_{FC}(N), U \in F(N)$ *y* $T \in FC(U|_\nu)$*. Por el lema 5.3, tenemos que* $[T]_h$ *es un portador nítido de* $[U]_h$ *para* ν *restringido a* $P(N), \forall h \in (0,1]$*. Por el axioma* C_2 *de* φ*, tenemos que* $\varphi_i(\nu)([U]_h) = \varphi_i(\nu)([T]_h)\ \forall h \in (0,1]$*. Esto implica que*

$$\begin{aligned} \Theta_i(\nu)(U) &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \varphi_i(\nu)([T]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1}) \\ &= \Theta_i(\nu)(T). \end{aligned}$$

- Θ *satisface* $\mathscr{F}_3$*: Sean* $\nu \in G_{FC}, U \in F(N)$ *y* $i, j \in N$ *tales que* $U_{ij}^U \in FC(U|_\nu)$ *y* $\nu(S) = \nu(\mathscr{P}_{ij}[S])$ *para todo* $S \in F(U_{ij}^U)$*. Si* $(U_{ij}^U)_i = (U_{ij}^U)_j = 0$*, entonces por los axiomas* $\mathscr{F}_1$ *y* $\mathscr{F}_2$ *se tiene que*

$$\Theta_i(\nu)(U) = \Theta_i(\nu)(U_{ij}^U) = 0 = \Theta_j(\nu)(U_{ij}^U) = \Theta_j(\nu)(U).$$

Suponga ahora que $(U_{ij}^U)_i = (U_{ij}^U)_j > 0$*, que a su vez implica que* $U_i, U_j > 0$*. Veamos las implicaciones de que* $\nu(S) - \nu(\mathscr{P}_{ij}[S]) = 0$*, para todo* $S \in F(U_{ij}^U)$ *primero. Si* $\nu(S) - \nu(\mathscr{P}_{ij}[S]) = 0\ \forall S \in F(U_{ij}^U)$*, entonces en particular* $\nu(S) - \nu(\mathscr{P}_{ij}[S]) = 0\ \forall S \in F(U_{ij}^U)$*, donde* $S_j = 0, S_\kappa \in \{S_i, 0\}\ \forall \kappa \in \mathrm{Supp}(U)$*.*

Esto a su vez implica que $(\nu(S) - \nu(\mathscr{P}_{ij}[S]) = 0\ \forall S \in F(U_{ij}^U),$ *tal que* $S_i = h, S_j = 0$ *y* $S_\kappa \in \{h, 0\}\ \forall \kappa \in \mathrm{Supp}(U)), \forall h \in (0, (U_{ij}^U)_i]$*.*

En este caso particular tenemos que $Q(S) = h$*. Luego, por la definición de*

$G_{FC}(N)$ tenemos que esto es equivalente a

$$\begin{aligned}
&((\nu([S]_h) - \nu([\mathscr{P}_{ij}[S]]_h))h = 0 \;\forall S \in F(U^U_{ij}),\; \textit{tal que } S_i = h, S_j = 0\\
&\;\textit{y } S_\kappa \in \{h,0\}\;\forall \kappa \in \mathrm{Supp}(U)), \forall h \in (0,(U^U_{ij})_i]\\
\iff\;& (\nu([S]_h) - \nu([\mathscr{P}_{ij}[S]]_h) = 0 \;\forall S \in F(U^U_{ij}),\; \textit{tal que } S_i = h, S_j = 0\\
&\;\textit{y } S_\kappa \in \{h,0\}\;\forall \kappa \in \mathrm{Supp}(U)), \forall h \in (0,(U^U_{ij})_i]\\
\iff\;& (\nu([S']_h \cup \{i\}) - \nu([\mathscr{P}_{ij}[S]]_h \cup \{j\}) = 0 \;\forall S' \in F(U^U_{ij}),\; \textit{tal que}\\
& S'_i = S'_j = 0 \;\textit{y } S_\kappa \in \{h,0\}\;\forall \kappa \in \mathrm{Supp}(U)), \forall h \in (0,(U^U_{ij})_i].
\end{aligned}$$

Notemos en esta última afirmación que $[S']_h$ puede contener a cualquier jugador κ tal que $i \neq \kappa \neq j$ y tal que $(U^U_{ij})_\kappa \geq h$. Luego, la afirmación implica que $(\nu(T \cup \{i\}) - \nu(T \cup \{j\}) = 0 \;\forall T \in P([U^U_{ij}]_h \backslash \{i,j\}), \forall h \in (0,(U^U_{ij})_i]$.

Por lo tanto, usando el axioma C_3 de φ se tiene que $\varphi_i(\nu)([U^U_{ij}]_h) = \varphi_j(\nu)([U^U_{ij}]_h)$ para todo $h \in (0,(U^U_{ij})_i]$. Note además que si $h \in ((U^U_{ij})_i, 1]$ entonces $i, j \notin [U^U_{ij}]_h$ y esto a su vez implica por el axioma C_1 de φ que $\varphi_i(\nu)([U^U_{ij}]_h) = \varphi_j(\nu)([U^U_{ij}]_h)$ para todo $h \in ((U^U_{ij})_i, 1)$. Concluyendo que $\varphi_i(\nu)([U^U_{ij}]_h) = \varphi_j(\nu)([U^U_{ij}]_h)$ para $h \in (0,1]$.

Ahora, usando el hecho de que $U^U_{ij} \in FC(U|_\nu)$ y el axioma $\mathscr{F}_2$ se concluye finalmente que

$$\begin{aligned}
\Theta_i(\nu)(U) &= \Theta_i(\nu)(U^U_{ij})\\
&= \sum_{\ell=1}^{q(U^U_{ij})} \varphi_i(\nu)([U^U_{ij}]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1})\\
&= \sum_{\ell=1}^{q(U^U_{ij})} \varphi_j(\nu)([U^U_{ij}]_{h_\ell})(h_\ell - h_{\ell-1})\\
&= \Theta_j(\nu)(U^U_{ij})\\
&= \Theta_j(\nu)(U).
\end{aligned}$$

Concluyendo que Θ satisface $\mathscr{F}_3$.

- *Θ satisface $\mathscr{F}_4$: Sean $\nu_1, \nu_2 \in G_{FC}(N)$ y $U \in F(N)$. Es claro que $\nu_1 + \nu_2 \in G_{FC}(N)$*

ya que

$$\begin{aligned}(\nu_1+\nu_2)(U) &= \nu_1(U)+\nu_2(U)\\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)}(\nu_1([U]_{h_\ell})+\nu_2([U]_{h_\ell}))\,(h_\ell-h_{\ell-1}),\end{aligned}$$

y dado que $\nu_1|_{P(N)}, \nu_2|_{P(N)} \in G_0(N)$ *entonces* $(\nu_1|_{P(N)}+\nu_2|_{P(N)}) \in G_0(N)$. *Por lo tanto* $\nu_1+\nu_2 \in G_{FC}(N)$. *Ahora, usando el axioma* C_4 *de* φ *tenemos que*

$$\begin{aligned}\Theta_i(\nu_1+\nu_2)(U) &= \sum_{\ell=1}^{q(U)}\varphi_i(\nu_1+\nu_2)([U]_{h_\ell})(h_\ell-h_{\ell-1})\\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)}(\varphi_i(\nu_1)([U]_{h_\ell})+\varphi_i(\nu_2)([U]_{h_\ell}))\,(h_\ell-h_{\ell-1})\\ &= \Theta_i(\nu_1)(U)+\Theta_i(\nu_2)(U).\end{aligned}$$

Esto concluye que Θ *satisface los cuatro axiomas* $\mathscr{F}_1-\mathscr{F}_4$ *y por lo tanto* Θ *es una función de Shapley en* $G_{FC}(N)$.

□

Veamos ahora las propiedades del núcleo difuso en $G_{FC}(N)$ y una relación con la función de Shapley.

5.3. Núcleo difuso de $\nu \in G_{FC}(N)$

Por la definición del núcleo difuso para una coalición U tenemos que este es de la forma $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) = \{x \in \mathbb{R}^n_+ | \sum_{i\in N} x_i = \sum_{\ell=1}^{q(U)}\nu([U]_{h_\ell})(h_\ell-h_{\ell-1}), \sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} \geq \sum_{\ell=1}^{q(U)}\nu([S_U]_{h_\ell})(h_\ell-h_{\ell-1})$ para todo $S \in P(N)\}$.

Note que hemos usado en la segunda condición el hecho de que $Q(S_U) \subseteq Q(U)$ para todo $S \in P(N)$ y por lo tanto, por el lema 5.1 $\nu(S_U)$ puede ser escrito de esa manera. Probamos ahora un interesante teorema que nos da la forma del núcleo difuso para ciertos casos, facilitando bastante el cómputo del mismo.

Teorema 5.3. *[3] Sean* $\nu \in G_{FC}(N)$ *y* $U \in F(N)$. *Si el juego nítido de* ν *restringido* *a* $\mathrm{Supp}(U)$ *es convexo, entonces* $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) \neq \emptyset$ *y*

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U) \;=\; & \Bigg\{ y \;\Bigg|\; y = \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) x^\ell = \left(\sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) x_1^\ell, \ldots, \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) x_n^\ell \right), \\ & \quad \forall x^\ell = (x_1^\ell, \ldots, x_n^\ell) \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}}), \ell = 1, 2, \ldots, q(U). \Bigg\}\end{aligned}$$

Prueba. *Primero note que si* ν *restringida a* $\mathrm{Supp}(U)$ *es convexo entonces también lo es al restringirse a* $[U]_{h_\ell}$ *para todo* $h_\ell \in Q(U)$ *ya que* $[U]_{h_\ell} \subseteq \mathrm{Supp}(U)$. *Por el teorema 2.4 tenemos que* $\mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}}) \neq \emptyset$ *para* $\ell = 1, \ldots, q(U)$. *Ahora, tome un* $x^\ell \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}})$ *para* $\ell = 1, \ldots, q(U)$ *y defina* $y = \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) x^\ell$. *Veamos que* $y \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$. *Dado que* $\sum_{i \in N} x_i^\ell = \nu([U]_{h_\ell})$ *tenemos que*

$$\begin{aligned}\sum_{i \in N} y_i &= \sum_{i \in N} \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) x_i^\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \sum_{i \in N} x_i^\ell \\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \nu([U]_{h_\ell}) \\ &= \nu(U).\end{aligned}$$

Por lo tanto y *satisface la primera condición para pertenecer a* $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$. *Veamos que satisface también la segunda.*

Sea $S \in P(N)$. *Note que debido a que* $x^\ell \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}})$ *se tiene que* $x_i^\ell = 0$ *para*

$i \notin [U]_{h_\ell}$ y por lo tanto $\sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i^\ell = \sum_{i\in [S_U]_{h_\ell}} x_i^\ell$. Con esto en mente tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} y_i &= \sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) x_i^\ell \\
&= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \left((h_\ell - h_{\ell-1}) \sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} x_i^\ell \right) \\
&= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \left((h_\ell - h_{\ell-1}) \sum_{i\in [S_U]_{h_\ell}} x_i^\ell \right) \\
&\geq \sum_{\ell=1}^{q(U)} ((h_\ell - h_{\ell-1}) \nu [S_U]_{h_\ell}) \\
&= \nu(S_U).
\end{aligned}$$

Concluimos que $\tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ no es vacío y en particular $y \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$.

Por otro lado, probemos que si $z \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ entonces $z = \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) x^\ell$ para $x^\ell \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}}), \ell = 1, \cdots q(U)$. Definamos primero

$$\begin{aligned}
\underline{x}_i^\ell &:= \min \left\{ x_i^\ell | x^\ell \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}}) \right\}, \\
\overline{x}_i^\ell &:= \max \left\{ x_i^\ell | x^\ell \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}}) \right\},
\end{aligned}$$

$\forall i \in N, \ell = 1, \ldots, q(U)$.

Note que $\overline{x}_i^\ell$ y $\underline{x}_i^\ell$ están bien definidos ya que el núcleo nítido es un conjunto compacto y por lo tanto estos mínimos y máximos se alcanzan. Antes de continuar definamos también

$$\begin{aligned}
H &:= \left\{ i \in N | z_i > \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \overline{x}_i^\ell \right\}, \\
K &:= \left\{ i \in N | z_i < \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \underline{x}_i^\ell \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora, notemos que si $\sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \underline{x}_i^\ell \leq z_i \leq \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \overline{x}_i^\ell$ para todo $i \in N$, entonces la convexidad de $\mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}})$ implica que existen $x^\ell \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}})$ tales que $\sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot x^\ell = z$. Por lo tanto, hay dos casos para los cuales z no pueda ser escrito de esta manera i.e.,

- *Caso 1: Existe $i \in N$ tal que $z_i < \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \underline{x}_i^\ell$,*
- *Caso 2: Existe $i \in N$ tal que $z_i > \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \overline{x}_i^\ell$.*

Veamos que con las hipótesis dadas esto es imposible.

- *Caso 1:*

  Suponga que $z_i < \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \underline{x}_i^\ell$. Tenemos que $z \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$ y por lo tanto

$$\sum_{i \in \mathrm{Supp}(K_U)} \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \underline{x}_i^\ell > \sum_{i \in \mathrm{Supp}(K_U)} z_i \geq \nu(K_U) \geq 0.$$

  Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0 &< \left(\sum_{i \in \mathrm{Supp}(K_U)} \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \underline{x}_i^\ell \right) - \nu(K_U) \\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \left((h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \sum_{i \in \mathrm{Supp}(K_U)} \underline{x}_i^\ell \right) - \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \nu([K_U]_{h_\ell}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \left((h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \left(\sum_{i \in \mathrm{Supp}(K_U)} \underline{x}_i^\ell - \nu([K_U]_{h_\ell}) \right) \right). \end{aligned}$$

  Esto implica que existe $h_\ell \in Q(U)$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathrm{Supp}(K_U)} \underline{x}_i^\ell - \nu([K_U]_{h_\ell}) &= \sum_{i \in [K_U]_{h_\ell}} \underline{x}_i^\ell - \nu([K_U]_{h_\ell}) \\ &= \sum_{i \in [K_U]_{h_\ell}} \nu(\{i\}) - \nu([K_U]_{h_\ell}) > 0 \\ &\Longrightarrow \sum_{i \in [K_U]_{h_\ell}} \nu(\{i\}) > \nu([K_U]_{h_\ell}). \end{aligned}$$

  Esto último contradice el hecho de que ν es superaditiva. Por lo tanto el caso 1 *no es posible.*

- *Caso 2:*

  Suponga que $z_i > \sum_{\ell=1}^{q(U)} (h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \overline{x}_i^\ell$ para algún $i \in N$. Esto implica que $H \neq \emptyset$. Por lo anterior si $i \in N \backslash H$ entonces existen $x^\ell \in \mathcal{C}(\nu^{[U]_{h_\ell}}), \ell = 1, \ldots, q(U),$ tales *que* $z_i = \sum_{\ell=1}^{q(U)}(h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot x_i^\ell$. *Tenemos entonces que*

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in N} z_i &= \sum_{i\in H} z_i + \sum_{i\in N\setminus H} z_i \\
&> \sum_{i\in H}\sum_{\ell=1}^{q(U)}(h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot \overline{x}_i^\ell + \sum_{i\in N\setminus H}\sum_{\ell=1}^{q(U)}(h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot x_i^\ell \\
&\geq \sum_{i\in N}\sum_{\ell=1}^{q(U)}(h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot x_i^\ell \\
&= \nu(U).
\end{aligned}$$

Pero $\sum_{i\in N} z_i > \nu(U)$ *es una contradicción con el hecho de que* $z \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$. *Concluimos que ninguno de los dos casos es posible. Luego,* z *se puede escribir como* $z = \sum_{\ell=1}^{q(U)}(h_\ell - h_{\ell-1}) \cdot x^\ell$.

□

Veamos ahora que la relación entre el núcleo y la función de Shapley se sigue manteniendo en este caso i.e., que esta última evaluada en la coalición correspondiente pertenece al primero si el juego es convexo.

Teorema 5.4. *Sea* $\nu \in G_{FC}(N)$ *un juego convexo. Entonces* $\Theta(\nu)(U) \in \tilde{\mathcal{C}}(\nu)(U)$, *para todo* $U \in F(N)$, *donde* Θ *denota la función de Shapley para* $G_{FC}(N)$.

Prueba. *Por el teorema 5.2 tenemos que* $\sum_{i\in N} \Theta_i(\nu)(U) = \nu(U)$ *para todo* $U \in F(N)$. *Por lo tanto solo falta probar que*

$$\sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} \Theta_i(\nu)(U) \geq \sum_{\ell=1}^{q(U)} \nu([S_U]_{h_\ell}) \cdot (h_\ell - h_{\ell-1}),\ \forall S \in P(U).$$

Esto se tiene ya que

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} \Theta_i(\nu)(U) &= \sum_{i\in \mathrm{Supp}(S_U)} \sum_{\ell=1}^{q(U)} \varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell}) \cdot (h_\ell - h_{\ell-1}) \\
&= \sum_{\ell=1}^{q(U)} \sum_{i\in [S_U]_{h_\ell}} \varphi_i(\nu)([U]_{h_\ell}) \cdot (h_\ell - h_{\ell-1}) \\
&\geq \sum_{\ell=1}^{q(U)} \nu([S_U]_{h_\ell}) \cdot (h_\ell - h_{\ell-1}) \\
&= \nu(S_U),
\end{aligned}$$

donde en la última línea usamos el hecho de que si $\nu|_{P(U)}$ *es convexo entonces* $\varphi \in \mathcal{C}(\nu)(U)$ *para todo* $U \in P(N)$, *y por lo tanto* $\sum_{i\in S} \varphi_i(\nu)(U) \geq \nu(S)$ *para todo* $S \in P(U)$.

$\square$

CAPÍTULO 6

Conclusiones

Nos hemos centrado en este trabajo en dos conceptos de solución claves de la teoría cooperativa de juegos, como lo son el núcleo y el valor de Shapley. Al considerar las imputaciones en el núcleo para distribuir el valor de una coalición tenemos que no existen subcoaliciones, tales que todos sus jugadores puedan beneficiarse al separarse de la coalición en cuestión y formar una propia. En ese sentido puede decirse que el núcleo es una solución estable. El valor de Shapley por otro lado es una solución puntual, que tiene bastantes propiedades que son intituivamente atractivas para que todos los jugadores entren en cooperación. Esta es además una solución bastante fácil de calcular a diferencia del núcleo cuando este no es vacío. Estas y otras propiedades hacen que el valor de Shapley sea la solución más importante y más ampliamente utilizada en la teoría cooperativa de juegos [11].

Luego hemos estudiado el contexto más realista que ofrecen los juegos difusos en comparación con los juegos nítidos. Hemos extendido conceptos clave a los mismos, entre ellos el núcleo. Después hemos analizado dos modelos importantes, encontrando una solución a cada uno de ellos como lo es la función de Shapley.

Primero estudiamos los juegos cooperativos con función de peso, que sirven para modelar un cierto número de casos y hemos procedido a encontrar el valor de Shapley correspondiente a cada coalición difusa basados en nuevos axiomas, similares a los del caso nítido. Luego encontramos la forma explícita del núcleo para un caso particular, que ayuda a ahorrarse los enormes cálculos que por lo general deben ser realizados para encontrar este conjunto de soluciones. Hicimos lo mismo para los juegos difusos con forma de integral de Choquet, notando que las propiedades de estos hacen que tengan una motivación mucho más grande para ser implementados. Además, siguiendo la línea de Tsurumi, dimos nuevos axiomas de Shapley algo más lógicos y naturales que los juegos con función de peso. Tanto para estos dos casos como para el caso nítido, mostramos que la convexidad del juego implica que el valor de Shapley pertenece a el núcleo, mostrando de esta manera una importante conexión entre las dos soluciones, que se mantiene en todos los casos.

Bibliografía

[1] Surajit Borkotokey and Radko Mesiar. The shapley value of cooperative games under fuzzy settings : A survey. *International Jorunal of General Systems*, 43:75–95, 2013.

[2] Lloyd Shapley. A value for n-persons games. *Annals of Mathematics Studies*, 28:307–318, 1953.

[3] Xiaohui Yu and Qiang Zhang. The fuzzy core in games with fuzzy coalitions. *School of Management Economics, Beijing Institute of Technology*, 230:173–186, 2009.

[4] Dan Butnariu and Tomas Kroupa. Shapley mappings and the cumulative value for n-person games with fuzzy coalitions. *European journal of operational research*, 186:288–299, 2007.

[5] Masayo Tsurumi, Tetsuzo Tanino, and Masahiro Inuiguchi. A shapley function on a class of cooperative fuzzy games. *European journal of operational research*, 129:596–618, 2001.

[6] Guillermo Owen. *Game Theory*. Emerald Group Publishing Limited, 1995.

[7] Rodica Branzei, Dinko Dimitrov, and Stef Tijs. *Models in Cooperative Game Theory: Crisp, Fuzzy, and Multi-Choice Games*. Springer, 2004.

[8] Michael Maschler, Elion Solan, and Shmuel Zamir. *Game Theory*. Cambridge University Press, 2013.

[9] Dan Butnariu. Stability and shapley value for an n-persons fuzzy game. *Fuzzy Sets and Systems*, 4:63–72, 1980.

[10] Gustave Choquet. Theory of capacities. *Annales de I'institut Fourier*, 5:131–295, 1953.

[11] Robert Aumann. *What is game theory trying to accomplish?* Frontiers of Economics, 1985.