Chương 6: Giải số các phương trình vi phân

Giải gần đúng các phương trình vi phân thường và hệ phương trình vi phân cấp một

1. Phát biểu bài toán
2. Phương pháp Euler
3. Phương pháp Euler cải tiến
4. Phương pháp Runge - Kutta
5. Giải hệ phương trình vi phân cấp một

Phát biểu bài toán

Bài toán Cauchy, còn gọi là **bài toán điều kiện ban đầu (IVP - initial value problem)**:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \geq t_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

Bài toán có đạo hàm vi phân ở vế trái, với hàm số f và điều kiện ban đầu y_0 được cho trước. Ta cần giải bài toán này để tìm $y(t_1)$ ở thời điểm t_1 mong muốn, dùng **phương pháp số**.

Ví dụ ứng dụng: phân tích đáp ứng của mạch điện, phân tích đáp ứng các hệ thống dao động (như con lắc),...

Tổng quan các phương pháp

- Phương pháp Euler
- Phương pháp Euler cải tiến
- Phương pháp Runge - Kutta

Phương pháp Euler

Nhắc lại ý nghĩa hình học của đạo hàm: $y'(\bar{t})$ là hệ số góc tiếp tuyến của hàm số $y(t)$ tại điểm $(\bar{t}, y(t))$ (ở đây t là tên biến số, còn $\bar{t}$ là một giá trị nào đó).

Công thức Euler:

$$y(t_1) \approx y_0 + (t_1 - t_0)f(t_0, y_0) = y_0 + hf(t_0, y_0) \tag{2}$$

với $h = t_1 - t_0$.

Ý nghĩa: xấp xỉ hàm số $y(t)$ trong khoảng $[t_0; t_1]$ bằng tiếp tuyến của nó vẽ tại điểm (t_0, y_0):

$$y(t) \approx y_0 + y'(t_0)(t - t_0) = y_0 + f(t_0, y_0)(t - t_0) \tag{3}$$

Phương pháp Euler cải tiến

Ý tưởng cải tiến: sử dụng thêm đạo hàm tại điểm t_1, với hy vọng sự xấp xỉ được chính xác hơn. Thay vì dùng đạo hàm tại t_0, ta dùng **trung bình cộng đạo hàm tại** t_0 **và** t_1:

$$y(t_1) \approx y_0 + h\frac{y'(t_0) + y'(t_1)}{2} = y_0 + h\frac{f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))}{2} \tag{4}$$

Tuy nhiên, giá trị $y(t_1)$ ở vế phải lại là cái chưa biết, nên ta thay $y(t_1)$ ở vế phải bằng giá trị xấp xỉ theo công thức Euler: $y(t_1) \approx y_0 + hf(t_0, y_0)$, để ở vế phải có đủ dữ kiện.

Công thức Euler cải tiến:

$$y(t_1) \approx y_0 + h\frac{f(t_0, y_0) + f(t_1, y_0 + hf(t_0, y_0))}{2} \tag{5}$$

với $h = t_1 - t_0$.

Phương pháp Runge- Kutta

Công thức Runge-Kutta bậc 4 (RK4):

$$\begin{cases} y(t_1) \approx y_0 + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(t_0, y_0) \\ K_2 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = hf\left(t_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = hf\left(t_0 + h, y_0 + K_3\right) \end{cases} \tag{6}$$

Sử dụng cách thiết lập công thức Runge-Kutta tổng quát, cho ta lại: với bậc 1, ta được công thức Euler, với bậc 2, ta được công thức Euler cải tiến.

Bài tập

Dùng các công thức Euler, Euler cải tiến, RK4 để tính $y(t_1)$ với $h = 0.1$:

$$\begin{cases} y'(t) = y + t \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Nghiệm chính xác là: $2e^t - t - 1$.

$$\begin{cases} y'(t) = 1 + (y - t)^2, 2 \leq t \leq 3 \\ y(2) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

Nghiệm chính xác là: $t + \frac{1}{t-1}$.

Chia nhỏ khoảng cần tính

Khi khoảng cần tính là quá rộng, ta chia nhỏ ra thành nhiều bước: để tính $y(t_0 + H)$, ta chia bước nhỏ $h = \frac{H}{n}$ và tính $y(t_k)$ tại $t_k = t_0 + kh$.

Công thức Euler:

$$y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1})$$

với $k = 1, 2, \cdots, n$.

Công thức Euler cải tiến:

$$y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + h\frac{f(t_{k-1}, y_{k-1}) + f(t_k, y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1}))}{2}$$

với $k = 1, 2, \cdots, n$. Hoặc viết lại ở dạng công thức Runge-Kutta bậc 2:

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_2 = hf\left(t_{k-1} + h, y_{k-1} + K_1\right) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}(K_1 + K_2) \end{cases}$$

với $k = 1, 2, \cdots, n$.

Chia nhỏ khoảng cần tính

Công thức Runge-Kutta bậc 4 (RK4):

$$\begin{cases} K_1 = hf(t_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_2 = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = hf\left(t_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3\right) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

với $k = 1, 2, \cdots, n$.

Hệ phương trình vi phân

Xét bài toán hệ phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t), y(t)), t \geq t_0 \\ y'(t) = g(t, x(t), y(t)), t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{9}$$

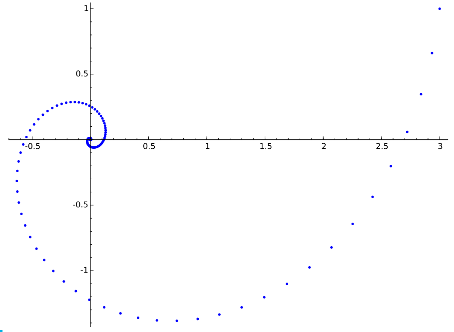
Bài toán có đạo hàm vi phân ở vế trái đối với hai hàm số $x(t)$ và $y(t)$, với các hàm số f, g và điều kiện ban đầu x_0, y_0 cho trước.
Ví dụ ứng dụng: sự thay đổi của số lượng sinh vật trong quần thể kẻ săn mồi - con mồi, sản lượng trong dây chuyền sản xuất... hoặc giải phương trình vi phân bậc cao.

Hệ phương trình vi phân

Ví dụ: Hệ mô tả chuyển động xoắn ốc:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)/2 + y(t), t \geq t_0 \\ y'(t) = -x(t) - y(t)/2, t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{10}$$

Đồ thị: (với $t_0 = 0, x_0 = 3, y_0 = 1$)



Hệ phương trình vi phân

Ví dụ: Hệ mô tả quần thể thỏ và sói:

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t), t \geq t_0 \\ y'(t) = ebx(t)y(t) - cy(t), t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{11}$$

Xem mô phỏng ở

http://shodor.org/interactivate/activities/RabbitsAndWolves/

(ta chọn các tham số về tốc độ phát triển của thỏ và sói, các điều kiện ban đầu, rồi bấm nút "Start Simulation" để xem diễn biến của quần thể)

Hệ phương trình vi phân

Giải số bằng công thức Euler:

$$\begin{cases} x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \end{cases}$$

với $k = 1, 2, \cdots, n$

Hệ phương trình vi phân

Giải số bằng công thức Euler cải tiến:

$$\begin{cases} K_{1x} = hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{1y} = hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{2x} = hf\left(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}\right) \\ K_{2y} = hg\left(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{1x}, y_{k-1} + K_{1y}\right) \\ x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1x} + K_{2x}) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{2}(K_{1y} + K_{2y}) \end{cases}$$

với $k = 1, 2, \cdots, n$

Hệ phương trình vi phân

Giải số bằng công thức Runge-Kutta bậc 4 (RK4):

$$\begin{cases} K_{1x} = hf(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{1y} = hg(t_{k-1}, x_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_{2x} = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, x_{k-1} + \frac{K_{1x}}{2}, y_{k-1} + \frac{K_{1y}}{2}\right) \\ K_{2y} = hg\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, x_{k-1} + \frac{K_{1x}}{2}, y_{k-1} + \frac{K_{1y}}{2}\right) \\ K_{3x} = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, x_{k-1} + \frac{K_{2x}}{2}, y_{k-1} + \frac{K_{2y}}{2}\right) \\ K_{3y} = hg\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, x_{k-1} + \frac{K_{2x}}{2}, y_{k-1} + \frac{K_{2y}}{2}\right) \\ K_{4x} = hf\left(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{3x}, y_{k-1} + K_{3y}\right) \\ K_{4y} = hg\left(t_{k-1} + h, x_{k-1} + K_{3x}, y_{k-1} + K_{3y}\right) \\ x(t_k) \approx x_k = x_{k-1} + \frac{1}{6}(K_{1x} + 2K_{2x} + 2K_{3x} + K_{4x}) \\ y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{6}(K_{1y} + 2K_{2y} + 2K_{3y} + K_{4y}) \end{cases}$$

với $k = 1, 2, \cdots, n$

Hệ phương trình vi phân

Giải bài toán phương trình vi phân **bậc cao** bằng cách **chuyển về hệ phương trình vi phân bậc một**. Cách làm như sau:
Giả sử ta có phương trình vi phân cấp hai:

$$\begin{cases} x''(t) = F(t, x(t), x'(t)), t \geq t_0 \\ x(t_0) = \alpha \\ x'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Ta đặt thêm biến số $y(t) = x'(t)$ để biến đổi về hệ phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t), t \geq t_0 \ \textbf{(tức là } \mathbf{f(t,x,y) = y)} \\ y'(t) = F(t, x(t), y(t)), t \geq t_0 \ \textbf{(tức là } \mathbf{g(t,x,y) = F(t,x,y))} \\ x(t_0) = \alpha \\ y(t_0) = \beta \end{cases}$$

Hệ phương trình vi phân

Ví dụ: xét một quả nặng khối lượng m treo trên một lò xo có độ cứng k, chịu tác động của trọng lực g và lực cản của bộ phận giảm chấn $f = -k_f x'$, với x là tọa độ của vật nặng theo phương thẳng đứng. Dùng phương pháp phân tích lực, ta thu được mô hình động lực học của hệ thống này ở dạng phương trình vi phân bậc hai:

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{k_f}{m}x'(t) + g \\ x(t_0) = \alpha, x'(t_0) = \beta \end{cases}$$

Ta biến đổi về hệ phương trình vi phân cấp một:

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -\frac{k}{m}x(t) - \frac{k_f}{m}y(t) + g \\ x(t_0) = \alpha, y(t_0) = \beta \end{cases}$$

Hệ phương trình vi phân

Nghiệm của hệ PTVP này là một phương trình dao động với biên độ giảm dần (có thể tìm được công thức của nghiệm bằng phép biến đổi Laplace). Ta cũng có thể giải bằng phương pháp số, vẽ đồ thị dao động của vật (theo phương thẳng đứng):