Chương 5: Tính đạo hàm và tích phân

Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định

1. Tính gần đúng đạo hàm
2. Tính gần đúng tích phân xác định

Tính gần đúng đạo hàm

Vấn đề: với tập giá trị rời rạc (x_k, y_k), ta có hàm số nội suy là $y = f(x)$. Cần tính gần đúng đạo hàm cấp một và cấp hai của $f(x)$ tại các điểm nút x_k.

Cách giải quyết:

1. Lập đa thức nội suy Lagrange rồi tính đạo hàm.
2. Trong trường hợp các điểm x_k là cách đều nhau, ta có thể dùng các công thức tính nhanh giá trị xấp xỉ của đạo hàm.

Ứng dụng:

- Tính gần đúng đạo hàm dựa vào bảng giá trị.
- Tính giá trị đạo hàm của hàm số phức tạp tại điểm cho trước.

Tính gần đúng đạo hàm

Nguyên lý: dùng sai phân trong một khoảng đủ nhỏ để tính gần đúng đạo hàm. Xét công thức đạo hàm: $f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$. Khi tính với giá trị rời rạc, chỉ cần dùng Δ đủ nhỏ, ta không lấy $\lim$.

Xét tập hợp giá trị đo đạc được: $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$.

Công thức **sai phân tiến**:

$$f'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} \tag{1}$$

Công thức **sai phân lùi**:

$$f'(x_k) \approx \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \tag{2}$$

Công thức **sai phân hướng tâm**, khi $x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1} = h$:

$$f'(x_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} \tag{3}$$

Tính gần đúng đạo hàm

Đánh giá sai số:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \cdots \quad (4)$$

Với $x_k = x, x_{k+1} = x + h$:

$$f'(x_k) = \frac{f(x_{k+1}) - f(x_k)}{h} - \frac{h}{2} f''(x) + \cdots \quad (5)$$

Vậy sai số của công thức sai phân tiến là $\mathcal{O}(h)$.

Tương tự, sai số của công thức sai phân lùi cũng là $\mathcal{O}(h)$.

Tính gần đúng đạo hàm

Đánh giá sai số đối với công thức sai phân hướng tâm:

$$f(x_{k+1}) = f(x_k + h) = f(x_k) + hf'(x_k) + \frac{h^2}{2}f''(x_k) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_k)\cdots$$

$$f(x_{k-1}) = f(x_k - h) = f(x_k) - hf'(x_k) + \frac{h^2}{2}f''(x_k) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_k)\cdots$$

Lấy hai phương trình trừ cho nhau để lập công thức tính đạo hàm:

$$f'(x_k) = \frac{\mathbf{f(x_{k+1}) - f(x_{k-1})}}{\mathbf{2h}} - \frac{\mathbf{h^2}}{\mathbf{3!}}\mathbf{f'''(x_k)} - \frac{h^4}{5!}f^{(5)}(x_k) - \cdots \tag{6}$$

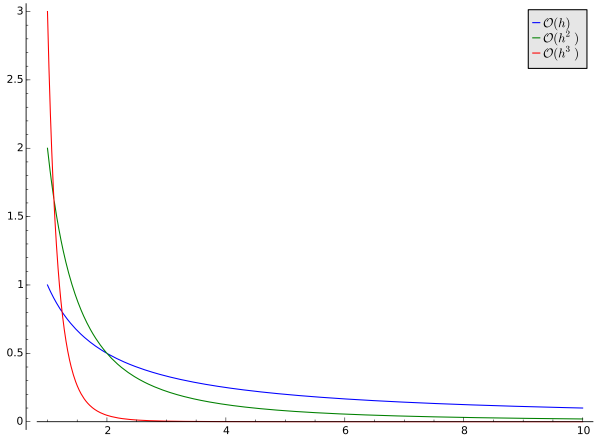
Tức là sai số của công thức sai phân hướng tâm ở bậc $\mathcal{O}(h^2)$.

Khi h càng nhỏ thì $h^2 << h$, do đó sai số của công thức sai phân hướng tâm là nhỏ hơn so với sai phân tiến hoặc sai phân lùi.

Khi nào có điều kiện thì ta ưu tiên dùng công thức sai phân hướng tâm.

Tính gần đúng đạo hàm

Ý nghĩa của **số bậc của hàm số sai số**:



Doãn Minh Đăng

Tính gần đúng đạo hàm

Ví dụ: tính đạo hàm cấp một và cấp hai tại các điểm t_k bằng các công thức: sai phân tiến, sai phân lùi, sai phân hướng tâm, với bảng giá trị dưới đây:

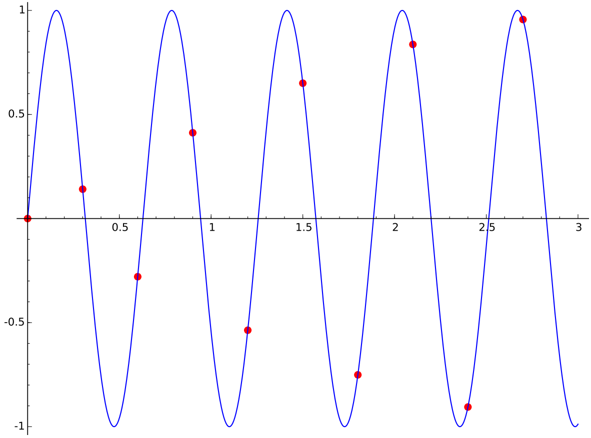
k	t_k	y_k	$f'(t_k)$	$f''(t_k)$
0	0.0	0.0		
1	0.5	0.19		
2	1.0	0.26		
3	1.5	0.29		
4	2.0	0.31		

Lưu ý: Ở các đầu mút không đủ thông tin để tính giá trị đạo hàm thì bỏ qua.

Tính gần đúng đạo hàm

Lưu ý về việc chọn các điểm rời rạc:

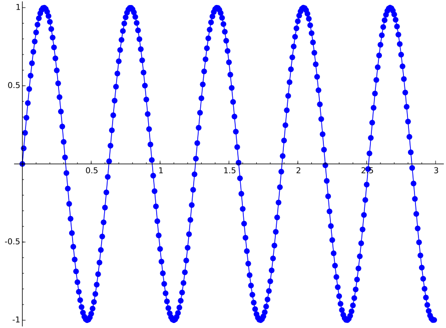
Nếu khoảng cách h giữa hai điểm lớn thì nhiều khả năng bị mất thông tin:



Tính gần đúng đạo hàm

Lưu ý về việc chọn các điểm rời rạc:

Khi lấy giá trị rời rạc, khoảng cách h càng nhỏ càng giữ được nhiều thông tin của hàm số ban đầu



Trong kỹ thuật xử lý tín hiệu: tần số lấy mẫu cần lớn hơn hoặc bằng hai lần tần số của tín hiệu (thực tế người ta lấy mẫu ở tần số cao hơn khoảng 6 lần).

Tính gần đúng tích phân xác định

Vấn đề: Tính gần đúng tích phân xác định

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (7)$$

trong đó $f(x)$ là hàm số xác định và khả tích trên đoạn $[a, b]$.

Ví dụ:

- Tính năng lượng khi chạy động cơ điện và có bảng kết quả đo đạc.
- Tính tích phân của hàm số phức tạp.

Tính gần đúng tích phân xác định

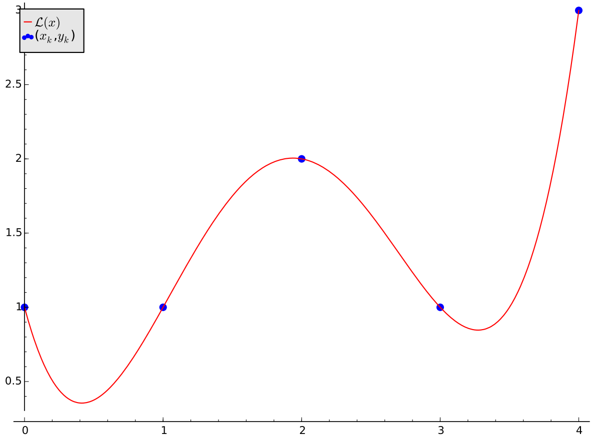
Các cách tính gần đúng tích phân (7):

- Chia đoạn $[a, b]$ thành n khoảng cách đều (gọi là **phép phân hoạch đều**): $h = \frac{b-a}{n}, x_0 = a, x_k = x_0 + kh, \forall k \in \{0, \cdots, n\}$.
- Tính tích phân gần đúng trên mỗi khoảng bằng công thức xấp xỉ:
  1. Hình chữ nhật
  2. Hình thang
  3. Hình parabol
- Tính tổng các giá trị xấp xỉ.

Tính gần đúng tích phân xác định

Ví dụ: hàm số $f(x)$ có các giá trị cho trong bảng số:

k	x_k	y_k
0	0.0	1
1	1.0	1
2	2.0	2
3	3.0	1
4	4.0	3



Tính gần đúng tích phân xác định

Công thức Newton-Cotes

Ý tưởng: xấp xỉ hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ bằng đa thức nội suy Lagrange $\mathcal{L}_n(x)$ và tính:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I^* = \int_a^b \mathcal{L}_n(x)dx \tag{8}$$

Với phép phân hoạch đều, công thức Lagrange có dạng (đặt $q = \frac{x-x_0}{h}$):

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}q(q-1)\cdots(q-n)}{k!(n-k)!(q-k)} y_k \tag{9}$$

Tính gần đúng tích phân xác định

Công thức Newton-Cotes

Thay (9) vào (8), ta được:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx I^* = (b-a)\sum_{k=0}^{n} H_k y_k \tag{10}$$

với:

$$H_k = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n}\int_0^n \frac{q(q-1)\cdots(q-n)}{q-k}dq \tag{11}$$

Ta gọi (10) là **công thức Newton-Cotes**, các hệ số H_k gọi là **hệ số Cotes**, có các tính chất:

$$\sum_{k=0}^{n} H_k = H_0 + H_1 + \cdots + H_n = 1 \tag{12}$$

$$H_k = H_{n-k}, \forall k = \overline{0, n} \tag{13}$$

Tính gần đúng tích phân xác định

Các cách tính toán xấp xỉ:

1. Hình chữ nhật: **công thức hình chữ nhật**: $I^* = hy_0$
2. Hình thang: **công thức hình thang**: $I^* = h\frac{y_0+y_1}{2}$
3. Hình parabol: **công thức Simpson**: $I^* = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$

Lưu ý:

- Khi đoạn cần tính là dài, ta cũng chia thành từng đoạn nhỏ và áp dụng công thức tính trên mỗi đoạn, rồi lấy tổng ở các đoạn.
- Công thức Simpson là công thức xấp xỉ tích phân gộp trên hai đoạn nằm cạnh nhau và có cùng độ dài là h.

Tính gần đúng tích phân xác định

Ví dụ: tính gần đúng các tích phân

1. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, công thức hình thang, chia 5 khoảng (chính xác: $\ln(2) \approx 0.6931$)
2. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, công thức Simpson, chia 5 khoảng
3. $\int_1^5 \frac{dx}{x}$, công thức hình thang, chia 4 khoảng (chính xác: $\ln(5) \approx 1.6094$)
4. $\int_1^5 \frac{dx}{x}$, công thức Simpson, chia 4 khoảng