Chương 2: Giải phương trình phi tuyến

Tính gần đúng nghiệm thực của một phương trình

1. Đặt bài toán
2. Nghiệm và khoảng cách ly nghiệm
3. Phương pháp chia đôi
4. Phương pháp lặp đơn
5. Phương pháp dây cung
6. Phương pháp Newton
7. Bài tập

Đặt bài toán

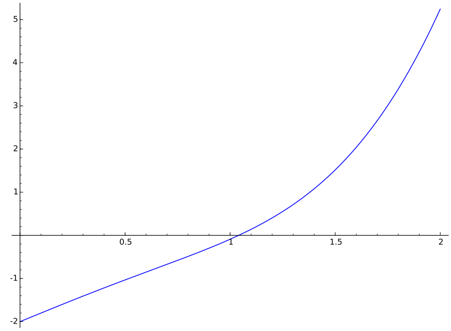
Tìm nghiệm của phương trình phi tuyến:

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

với f là hàm liên tục trên một khoảng đóng hoặc mở thuộc $\mathbb{R}$.

Vấn đề: khó tính được nghiệm chính xác của (1), nên ta cần **tìm nghiệm gần đúng**.

Ví dụ: $f(x) = x^3 + \sin(2x) - 2$



Đặt bài toán

Mục tiêu của chương này:

- Tìm hiểu về cách **đánh giá sai số** của một nghiệm gần đúng của phương trình phi tuyến một ẩn
- Học các nguyên lý xác định nghiệm qua **ý nghĩa hình học** của các giải thuật
- Biết cách thiết lập các **công thức tính toán** trong các giải thuật
- Biết **áp dụng** các giải thuật (tính toán bằng tay, và lập trình các chương trình chứa giải thuật)

Nghiệm và khoảng cách ly nghiệm

Nghiệm chính xác của phương trình $f(x) = 0$ là:

$$x = \frac{1}{2}\left(i\sqrt{3} - 1\right)(-\sin(2x) + 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{2}\left(-i\sqrt{3} - 1\right)(-\sin(2x) + 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = (-\sin(2x) + 2)^{\frac{1}{3}}$$

(hai giá trị đầu là nghiệm phức, chỉ có nghiệm thứ ba là số thực)

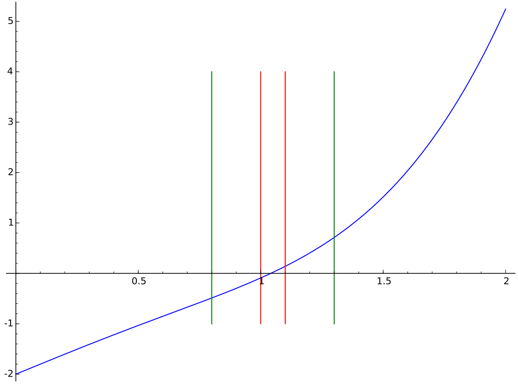
Để dễ tìm giá trị số, trước tiên ta tìm **khoảng cách ly nghiệm**, tức là các khoảng đóng $[a, b]$ (hoặc khoảng mở (a, b)) mà trên đó tồn tại duy nhất nghiệm. Sau đó tìm nghiệm gần đúng trong đó.
Lưu ý: Khoảng cách ly nghiệm càng nhỏ thì sai số của nghiệm gần đúng là càng nhỏ, và càng ít tốn công tìm kiếm.

Nghiệm và khoảng cách ly nghiệm

Ví dụ:

Khoảng cách ly nghiệm là $[0.8, 1.3]$

Khoảng cách ly nghiệm là $[1, 1.1]$



Nghiệm và khoảng cách ly nghiệm

Định lý 1 *Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và giá trị của hàm trái dấu tại hai đầu mút thì phương trình* (1) *có nghiệm trong khoảng $[a, b]$. Thêm nữa, nếu $f(x)$ đơn điệu trên $[a, b]$ thì nghiệm là duy nhất.*

Ví dụ: Tìm các khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với

Hàm số: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

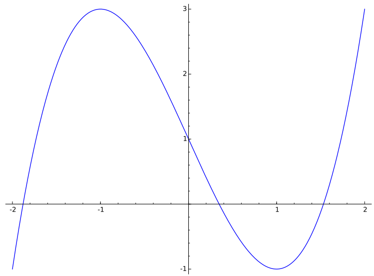
Tính giá trị hàm số ở vài điểm

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	3	1	-1	3

ta tìm được 3 khoảng cách ly nghiệm:

$[-2, -1]$, $[0, 1]$, và $[1, 2]$

Đồ thị:



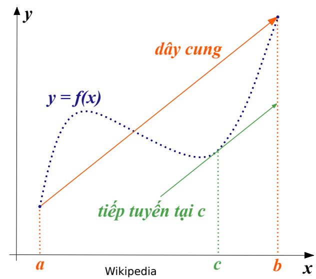
Nghiệm và khoảng cách ly nghiệm

Đánh giá sai số: ta dựa vào **định lý giá trị trung bình** của Lagrange:

Định lý 2 *Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$ và có đạo hàm trong (a, b), thì tồn tại một giá trị $c \in (a, b)$ thỏa mãn:*

$$f'(c) = \frac{f(b - f(a)}{b - a} \tag{2}$$

Ý nghĩa hình học:
Tiếp tuyến với đường cong $y = f(x)$
tại điểm $(c, f(c))$ song song với AB



Nghiệm và khoảng cách ly nghiệm

Áp dụng: gọi p là nghiệm chính xác và x^* là nghiệm gần đúng của $f(x)$ trên $[a, b]$. Xét trường hợp $f(x)$ có đạo hàm trên (p, x^*) (nếu $p < x^*$) hoặc trên (x^*, p) (nếu $x^* < p$). Theo định lý Lagrange, tồn tại một điểm $c \in (p, x^*)$ (hoặc $c \in (x^*, p)$), sao cho:

$$f'(c) = \frac{f(x^*) - f(p)}{x^* - p}$$

$$\Rightarrow |x^* - p| = \frac{|f(x^*) - f(p)|}{|f'(c)|} = \frac{|f(x^*)|}{|f'(c)|}$$

Nếu có số m thỏa: $\mathbf{0} < \mathbf{m} \leq |\mathbf{f}'(\mathbf{x})|, \forall \mathbf{x} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, thì $|f'(c)| \geq m$, do đó: $|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m}$

Vậy ta có thể chọn sai số tuyệt đối là: $\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{x}^*} = \frac{|\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)|}{\mathbf{m}}$.

Nghiệm và khoảng cách ly nghiệm

Công thức đánh giá sai số tổng quát:

Định lý 3 *Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong (a, b). Nếu x^* là nghiệm gần đúng của nghiệm chính xác $p \in [a, b]$ và $|f'(x)| \geq m > 0, \forall x \in [a, b]$, thì sai số của x^* thỏa công thức sau:*

$$|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m} \tag{3}$$

Ví dụ: xét phương trình $f(x) = x^3 - 3x + 1 = 0$ trong $[0, 0.8]$, có nghiệm gần đúng $x^* = 0.5$. Xét đạo hàm:

$$|f'(x)| = |3x^2 - 3| \geq 1.08 = m, \forall x \in [0, 0.8] \tag{4}$$

Do đó: $|x^* - p| \leq \frac{|f(0.5)|}{|1.08|} \approx 0.347$

Phương pháp chia đôi

Giải thuật:

- Xét đoạn $[a, b]$ là khoảng cách ly nghiệm và $f(a)f(b) < 0$. Đặt $a_0 = a, b_0 = b$ và $x_0 = \frac{b+a}{2}$ (điểm giữa của đoạn $[a, b]$).
- Làm phép lặp (với k là chỉ số vòng lặp, khởi đầu $k = 0$):
  - Nếu $f(x_k) = 0$ thì dừng lại, xác định x_k là nghiệm.
  - Nếu $f(x_k)f(a_k) < 0$ **(**$f(a_k)$ **trái dấu với** $f(x_k)$**)** thì đặt $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = x_k, x_{k+1} = \frac{b_{k+1}+a_{k+1}}{2}$.
  - Nếu $f(x_k)f(b_k) < 0$ **(**$f(b_k)$ **trái dấu với** $f(x_k)$**)**, khi đó đặt $a_{k+1} = x_k, b_{k+1} = b_k, x_{k+1} = \frac{b_{k+1}+a_{k+1}}{2}$.
  - Tăng k thêm 1: $k = k + 1$, và lặp lại cách tính toán này.

Phương pháp chia đôi

Kết quả từ giải thuật chia đôi:

- Ta luôn duy trì được $f(a_k)f(b_k) < 0, \forall k$ (trừ khi đạt được nghiệm chính xác). Như vậy $[a_k, b_k]$ luôn là khoảng cách ly nghiệm.
- Sau mỗi bước, khoảng cách ly nghiệm giảm đi một nửa: $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$.
- Đặt $d_k = b_k - a_k$, ta có công thức:

$$d_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \frac{b_{k-2} - a_{k-2}}{2^2} = \cdots = \frac{b_0 - a_0}{2^k} = \frac{b - a}{2^k} \quad (5)$$

dễ thấy $\lim_{k\to\infty} d_k = 0$, tức là hai dãy số $\{a_k\}, \{b_k\}$ hội tụ. Do $[a_k, b_k]$ là khoảng cách ly nghiệm nên nếu gọi p là nghiệm thì ta luôn có $a_k \le p \le b_k$, nên các dãy số $\{a_k\}, \{b_k\}$ hội tụ về p.

Phương pháp chia đôi

Đánh giá sai số: cho giải thuật chia đôi được lặp cho đến khi đạt được x_k (tức là điểm giữa của đoạn $[a_k, b_k]$). Ta dùng công thức sai số là:

$$|x_k - p| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}} \tag{6}$$

(lưu ý ta có $d_k = \frac{b-a}{2^k}$ theo (5), điểm x_k chia đôi khoảng $[a_k, b_k]$ nên sai số được chia cho 2 nữa)

Phương pháp chia đôi

Ví dụ: giải bài toán $f(x) = x^3 + \sin(2\,x) - 2 = 0$ bằng phương pháp chia đôi trên đoạn $[0, 1.5]$

Giá trị hàm ở hai đầu: $f(a) = -2.0$, $f(b) = 1.5161$

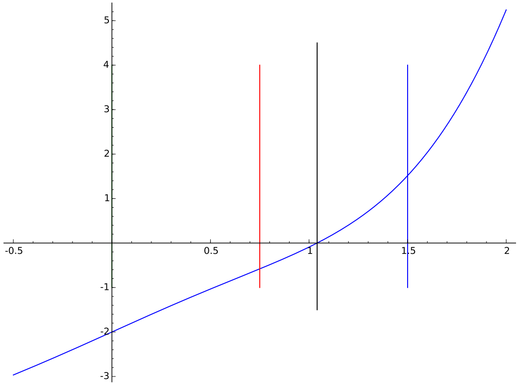
k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0.0	1.5	0.75	-0.5806
1	0.75	1.5	1.125	0.2019
2	0.75	1.125	0.9375	-0.2219
3	0.9375	1.125	1.0313	-0.0218
4	1.0313	1.125	1.0781	0.0866

So sánh với nghiệm chính xác: $p = 1.0409$.

Phương pháp chia đôi

Minh họa các bước giải qua đồ thị:

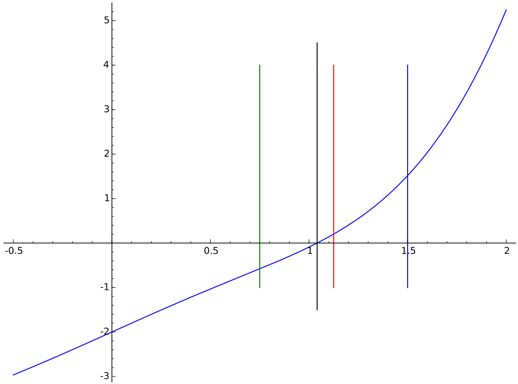
Bước 1:



Phương pháp chia đôi

Minh họa các bước giải qua đồ thị:

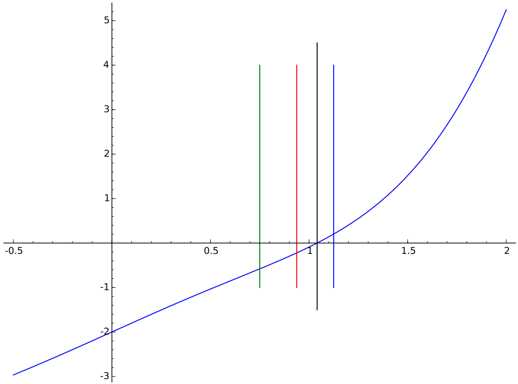
Bước 2:



Phương pháp chia đôi

Minh họa các bước giải qua đồ thị:

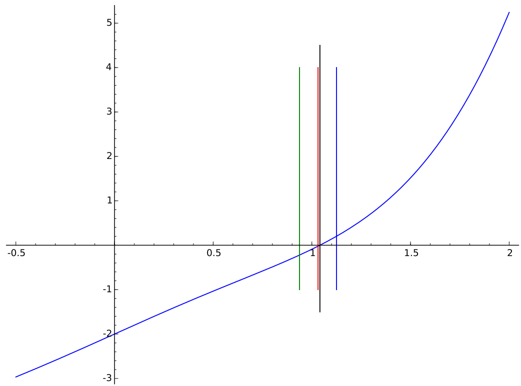
Bước 3:



Phương pháp chia đôi

Minh họa các bước giải qua đồ thị:

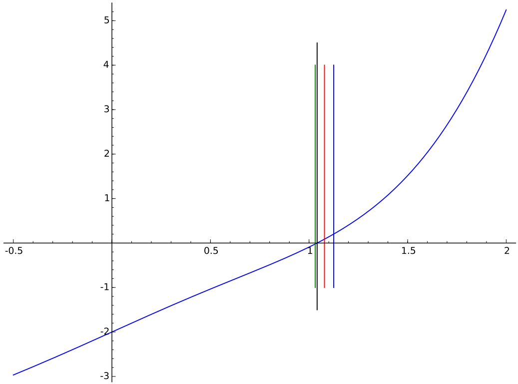
Bước 4:



Phương pháp chia đôi

Minh họa các bước giải qua đồ thị:

Bước 5:



Phương pháp chia đôi

Ví dụ (tính căn bậc hai của 2): giải bài toán $f(x) = x^2 - 2 = 0$ bằng phương pháp chia đôi trên đoạn $[0, 2]$

Giá trị hàm ở hai đầu: $f(a) = -2.0$, $f(b) = 2.0$

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
0	0.0	2.0	1.0	-1.0
1	1.0	2.0	1.5	0.25
2	1.0	1.5	1.25	-0.4375
3	1.25	1.5	1.375	-0.1094
4	1.375	1.5	1.4375	0.0664
5	1.375	1.4375	1.4063	-0.0225
6	1.4063	1.4375	1.4219	0.0217

Nghiệm chính xác: $p = 1.4142$

Phương pháp lặp đơn

Đầu tiên, chuyển từ phương trình (1) sang dạng tương đương:

$$x = g(x) \tag{7}$$

Nghiệm của phương trình (7) được gọi là **điểm bất động** của hàm số $g(x)$.

Giải thuật:

- Xét đoạn $[a, b]$ là khoảng cách ly nghiệm. Chọn giá trị đầu $x_0 \in [a, b]$.
- Lặp: $x_k = g(x_{k-1})$, với $k = 1, 2, ...$

Ta sẽ khảo sát phương pháp này có **hội tụ** về nghiệm của bài toán hay không, tùy vào đặc điểm của hàm $g(x)$.

Phương pháp lặp đơn

Ý nghĩa hình học:

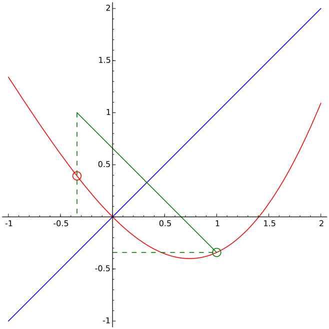
- Tìm điểm giao của đường thẳng $y = x$ và đồ thị $y = g(x)$.
- Giải thuật lặp: khi có giá trị x_{k-1}, ta lấy điểm đối xứng của điểm $g(x_{k-1})$ qua đường $y = x$, chiếu xuống trục hoành được x_k.

Hàm số: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \sin(x)$

Đường $y = x$

Điểm bắt đầu: x_{k-1}

Điểm tiếp theo: x_k



Phương pháp lặp đơn

Định nghĩa: Hàm $g(x)$ được gọi là **hàm co** trong đoạn $[a, b]$ nếu tồn tại một số $q : 0 \leq q < 1$ sao cho:

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leq q|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in [a, b] \tag{8}$$

Giá trị q được gọi là **hệ số co**.

Định lý 4 *Nếu $g(x)$ là hàm co trên đoạn $[a, b]$, thì nó liên tục trên đó.*

Định lý 5 *Nếu $g(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong (a, b) và $\exists q : 0 \leq q < 1$ sao cho $|g'(x)| \leq q, \forall x \in (a, b)$, thì $g(x)$ là hàm co trên $[a, b]$ với hệ số co là q.*

Phương pháp lặp đơn

Ví dụ: Xét phương trình $f(x) = 0$ với $f(x) = x^3 + x - 10$ trên đoạn $[0, 3]$, chuyển sang dạng (7), ta được: $g(x) = (-x + 10)^{\frac{1}{3}}$.

Ta có:

$$|g'(x)| = \left| -\frac{1}{3\left(-x+10\right)^{\frac{2}{3}}} \right| \leq \left| -\frac{1}{21} \cdot 7^{\frac{1}{3}} \right| \approx 0.0911 \triangleq q < 1$$

Do đó $g(x)$ là hàm co trên đoạn $[0, 3]$.

Phương pháp lặp đơn

Định lý sau đây tạo cơ sở cho phương pháp lặp đơn, còn gọi là **nguyên lý ánh xạ co**.

Định lý 6 *Giả sử* $g(x)$ *là hàm co trên đoạn* $[a, b]$ *với hệ số co là* q*; đồng thời* $\forall x \in [a, b], g(x) \in [a, b]$*. Khi đó, với mọi giá trị ban đầu* $x_0 \in [a, b]$*, dãy lặp* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *của giải thuật lặp sẽ hội tụ về nghiệm* p *của phương trình* (7)*.*

Sai số thu được:

$$|x_n - p| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0| \tag{9}$$

hoặc:

$$|x_n - p| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \tag{10}$$

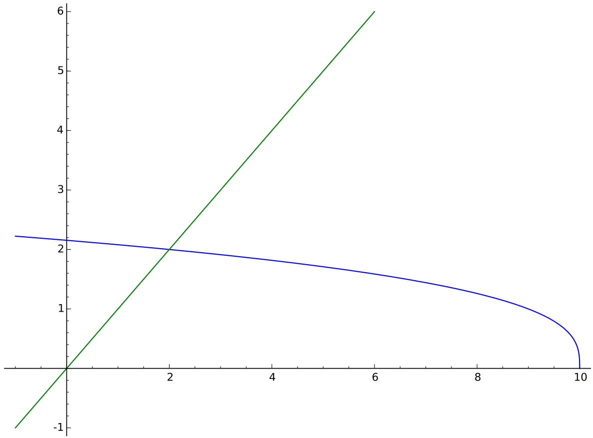
Phương pháp lặp đơn

Tóm tắt tính chất hội tụ:

- Hàm số là *co* (hệ số co thỏa mãn $q < 1$)
- Tập hợp $[a, b]$ là *tập giới nội* của hàm số $g(x)$
- Tốc độ hội tụ phụ thuộc vào giá trị của hệ số co q: q càng nhỏ thì hội tụ càng nhanh (ít bước).

Phương pháp lặp đơn

Ví dụ: áp dụng phương pháp lặp để giải $x = g(x) = (-x+10)^{\frac{1}{3}}$ với $x_0 = 0$



Phương pháp lặp đơn

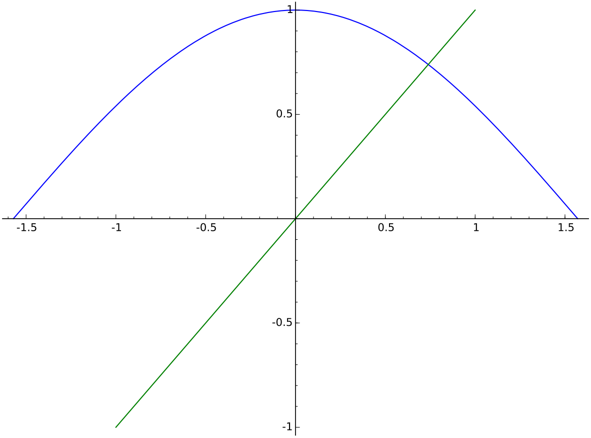
Ví dụ: áp dụng phương pháp lặp để giải $x = g(x) = (-x+10)^{\frac{1}{3}}$ với $x_0 = 0$

k	x_k	$g(x_k)$	$\lvert x_k - p \rvert$
0	0.0	2.1544	2.0
1	2.1544	1.987	0.1544
2	1.987	2.0011	0.013
3	2.0011	1.9999	0.0011
4	1.9999	2.0	0.0001
5	2.0	2.0	0.0

So sánh với nghiệm chính xác: $p = 2.0$

Phương pháp lặp đơn

Ví dụ: áp dụng phương pháp lặp để giải $x = g(x) = \cos(x)$ với $x_0 = 0$



Phương pháp lặp đơn

Ví dụ: áp dụng phương pháp lặp để giải $x = g(x) = \cos(x)$ với $x_0 = 0$

k	x_k	$g(x_k)$	$\lvert x_k - p \rvert$
0	0.0	1.0	0.73909
1	1.0	0.5403	0.26091
2	0.5403	0.85755	0.19878
3	0.85755	0.65429	0.11847
4	0.65429	0.79348	0.0848
5	0.79348	0.70137	0.0544
6	0.70137	0.76396	0.03772
7	0.76396	0.7221	0.02487
8	0.7221	0.75042	0.01698

So sánh với nghiệm chính xác: $p = 0.73909$

Phương pháp dây cung

Xét bài toán (1) trong khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$, hàm $f(x)$ là liên tục và $f(a).f(b) < 0$. Ý nghĩa: hai đầu hàm số ở hai bên trục hoành.

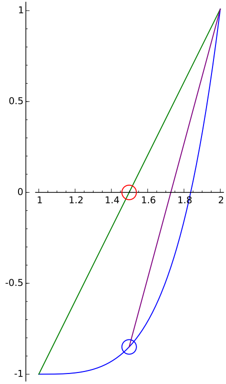
Giải thuật **lặp** (ở bước thứ k, với $a_0 = a, b_0 = b$):

- Kẻ đoạn thẳng (*dây cung*) nối hai điểm $(a_k, f(a_k))$ và $(b_k, f(b_k))$ (hai đầu của đồ thị hàm số trong đoạn $[a_k, b_k]$).
- Dây cung giao với trục hoành tại một điểm, thì lấy hoành độ của điểm đó làm x_k.
- Lặp lại việc dựng dây cung với đoạn nhỏ hơn: Nếu $f(a_k).f(x_k) < 0$, thì đặt $a_{k+1} = a_k, \mathbf{b_{k+1}} = \mathbf{x_k}$; nếu $f(x_k).f(b) < 0$, thì đặt $\mathbf{a_{k+1}} = \mathbf{x_k}, b_{k+1} = b_k$.

Phương pháp dây cung

Minh họa: dây cung của $f(x) = \frac{1}{10}(x-1)^3 e^{(x+1)} - 1$ trên đoạn $[1, 2]$

$x = 1.4979$, $f(x) = -0.85$, ta có $f(x).f(b) < 0$, vậy tiếp theo xét trên đoạn $[1.4979, 2]$.



Phương pháp dây cung

Tìm công thức tính giá trị của x_k:

Phương trình của dây cung:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \tag{11}$$

Phương trình của trục hoành: $y = 0$

Tọa độ của điểm giao giữa dây cung với trục hoành là nghiệm chung của hai phương trình trên. Ta thay $y = 0$ vào phương trình (11):

$$y = 0 \Leftrightarrow f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

$$\Leftrightarrow x = a - f(a)\frac{a - b}{f(a) - f(b)} \tag{12}$$

Phương pháp dây cung

Tìm công thức tính giá trị của x_k, cách khác:

Phương trình của dây cung, **thiết lập theo** $f(b)$:

$$y = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x) \tag{13}$$

Phương trình của trục hoành: $y = 0$

Tọa độ của điểm giao giữa dây cung với trục hoành là nghiệm chung của hai phương trình trên. Ta thay $y = 0$ vào phương trình (13):

$$y = 0 \Leftrightarrow f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \tag{14}$$

Lưu ý: cả hai công thức (12) và (14) đều đúng.

Phương pháp dây cung

Xét mối quan hệ giữa x_{k+1} và x_k:

Theo giải thuật, ta biết rằng hoặc $a_{k+1} = x_k$, hoặc $b_{k+1} = x_k$.

- Nếu $a_{k+1} = x_k$, thì dùng công thức (12), ta được:

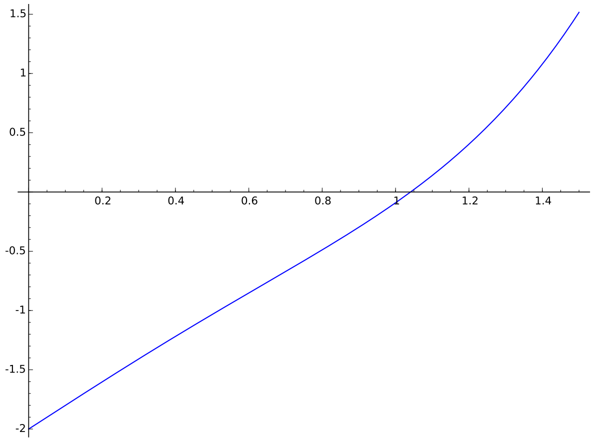
$$x_{k+1} = a_{k+1} - f(a_{k+1})\frac{a_{k+1} - b_{k+1}}{f(a_{k+1}) - f(b_{k+1})}$$
$$\Leftrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - b_{k+1})}{f(x_k) - f(b_{k+1})}$$

- Nếu $b_{k+1} = x_k$, thì dùng công thức (14), ta được:

$$x_{k+1} = b_{k+1} - f(b_{k+1})\frac{b_{k+1} - a_{k+1}}{f(b_{k+1}) - f(a_{k+1})}$$
$$\Leftrightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - a_{k+1})}{f(x_k) - f(a_{k+1})}$$

Phương pháp dây cung

Ví dụ: giải bài toán $f(x) = x^3 + \sin(2x) - 2 = 0$ bằng phương pháp dây cung trên đoạn $[0, 1.5]$



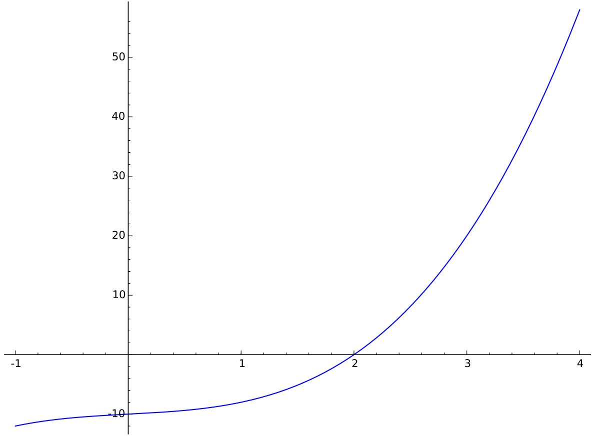
Phương pháp dây cung

Ví dụ: giải bài toán $f(x) = x^3 + \sin(2x) - 2 = 0$ bằng phương pháp dây cung trên đoạn $[0, 1.5]$ (nghiệm chính xác: $p = 1.0409$)

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - p \rvert$
0	0.8532	-0.3881	0.1877
1	0.985	-0.1229	0.0559
2	1.0236	-0.0388	0.0172
3	1.0355	-0.0121	0.0054
4	1.0392	-0.0038	0.0017
5	1.0404	-0.0012	0.0005
6	1.0407	-0.0004	0.0002
7	1.0408	-0.0001	0.0001
8	1.0409	-0.0	0.0

Phương pháp dây cung

Ví dụ: giải bài toán $f(x) = x^3 + x - 10 = 0$ bằng phương pháp dây cung trên đoạn $[0, 3]$ (nghiệm chính xác: $p = 2.0$)



Phương pháp dây cung

Ví dụ: giải bài toán $f(x) = x^3 + x - 10 = 0$ bằng phương pháp dây cung trên đoạn $[0, 3]$ (nghiệm chính xác: $p = 2.0$)

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - p\|$
0	1.0	-8.0	1.0
1	1.5714	-4.5481	0.4286
2	1.8361	-1.9739	0.1639
3	1.9407	-0.7506	0.0593
4	1.979	-0.2707	0.021
5	1.9926	-0.0958	0.0074
6	1.9974	-0.0336	0.0026
7	1.9991	-0.0118	0.0009
8	1.9997	-0.0041	0.0003

Phương pháp dây cung

Tên giải thuật bằng tiếng Anh:

- *Secant method*: là giải thuật lặp

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

  giống như phương pháp dây cung nhưng không so sánh dấu của $f(x)$ với hai đầu $f(a), f(b)$ mà tuần tự bỏ đầu a_k rồi b_{k+1}. Giải thuật này có thể hội tụ (tìm được nghiệm) hoặc phân kỳ (không tiến đến nghiệm).

- *False position method*: là phương pháp dây cung ta học ở đây, luôn đảm bảo có nghiệm, nhờ có kiểm tra dấu của $f(x)$ ở mỗi bước để đảm bảo khoảng tiếp theo vẫn là khoảng cách ly nghiệm.

Phương pháp Newton

Còn gọi là *Phương pháp tiếp tuyến* hoặc *Phương pháp Newton-Raphson*.

Xét bài toán (1) trong khoảng cách ly nghiệm $[a, b]$, với hàm số $f(x)$ **có đạo hàm** trong $[a, b]$. Ý nghĩa: đồ thị của $f(x)$ là một đường thẳng hoặc đường cong trơn trong $[a, b]$.

Giải thuật **lặp** (với điểm ban đầu $x_0 \in [a, b]$):

- Từ điểm có hoành độ x_{k-1} trên đồ thị của đường cong $f(x)$, ta kẻ tiếp tuyến với đường cong.
- Đường tiếp tuyến giao với trục hoành tại một điểm, thì lấy hoành độ của điểm đó làm x_k.

Phương pháp Newton

Phương trình của tiếp tuyến là:

$$y - f(x_{k-1}) = f'(x_{k-1})(x - x_{k-1})$$

Điểm giao của đường này với trục hoành là khi $y = 0$, tức là:

$$\mathbf{x_k = x_{k-1} - \frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})}}, \ \forall k = 1, 2, 3, ... \tag{15}$$

Định lý về sự hội tụ của phép lặp này:

Định lý 7 *Giả sử hàm $f(x)$ có đạo hàm đến cấp hai liên tục và các đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ không đổi dấu trên đoạn $[a, b]$. Khi đó nếu chọn x_0 thỏa điều kiện Fourier: $f(x_0)f''(x_0) > 0$, thì dãy lặp $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định theo công thức* (15) *sẽ hội tụ về nghiệm của bài toán* (1).

Phương pháp Newton

Lưu ý:

- Hệ số góc của tiếp tuyến là giá trị của đạo hàm tại điểm ta vẽ ($f'(x_{k-1})$). Khi hệ số góc bằng 0 tức là đường tiếp tuyến song song với trục hoành (sẽ không tồn tại điểm giao), giải thuật thường được điều chỉnh bằng cách bỏ đi điểm c có $f'(c) = 0$ và dùng lại một trong hai nửa đoạn $[a, c]$ hoặc $[c, b]$.

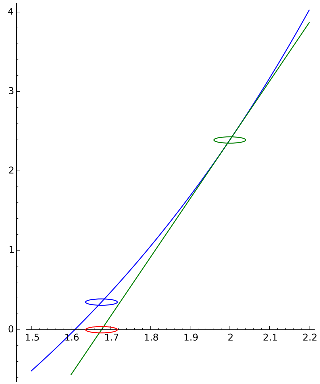
- Điều kiện Fourier chỉ là điều kiện đủ, không phải là điều kiện cần. Nghĩa là giải thuật cũng có thể hội tụ mà không thỏa điều kiện Fourier.

- Đánh giá sai số của phương pháp Newton theo công thức sai số tổng quát (3).

Phương pháp Newton

Minh họa (tính $ln(5)$): tiếp tuyến của $f(x) = e^x - 5$ với $x_0 = 2$

$x_1 = 1.6767$, $f(x_1) = 0.3478$, nếu tiếp tục kẻ tiếp tuyến với hàm f ở điểm này thì ta có điểm rất gần với nghiệm (phương pháp Newton thường hội tụ nhanh trong lân cận của nghiệm)



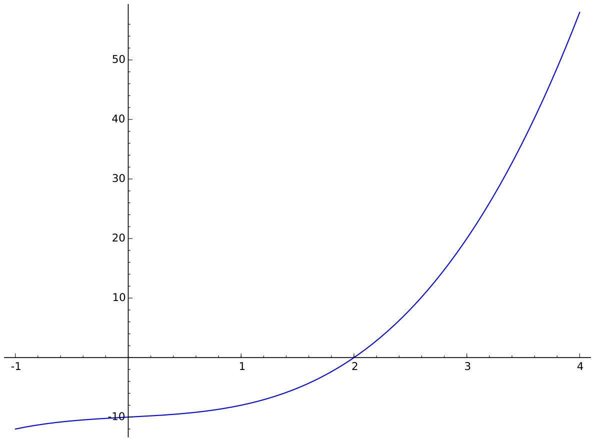
Phương pháp Newton

Ví dụ: tìm nghiệm của $f(x) = e^x - 5$ bằng phương pháp Newton với $x_0 = 2$ (nghiệm chính xác: $p = 1.6094$)

k	x_k	$f(x_k)$	$\lvert x_k - p \rvert$
0	2.0	2.3891	0.3906
1	1.6767	0.3478	0.0672
2	1.6116	0.0111	0.0022
3	1.6094	0.0	0.0
4	1.6094	0.0	0.0

Phương pháp Newton

Ví dụ: tìm nghiệm của $f(x) = x^3 + x - 10$ bằng phương pháp Newton với $x_0 = 0$ (nghiệm chính xác: $p = 2.0$)



Phương pháp Newton

Ví dụ: tìm nghiệm của $f(x) = x^3 + x - 10$ bằng phương pháp Newton với $x_0 = 0$ (nghiệm chính xác: $p = 2.0$)

k	x_k	$f(x_k)$	$\|x_k - p\|$
0	0.0	-10.0	2.0
1	10.0	1000.0	8.0
2	6.67774	294.45305	4.67774
3	4.49299	85.19298	2.49299
4	3.10911	23.16361	1.10911
5	2.33699	5.10044	0.33699
6	2.0436	0.57823	0.0436
7	2.00086	0.01112	0.00086
8	2.0	0.0	0.0

Bài tập

- Viết rõ công thức để thực hiện các giải thuật đối với các ví dụ trong bài này (phục vụ tính toán bằng tay)
- Dùng máy tính cầm tay để thực hiện các giải thuật nhằm giải các ví dụ, so sánh với kết quả trong bài học
- Làm các bài tập 1-7 trong chương 2, sách "Giáo trình phương pháp tính" (Lê Thái Thanh)
- Lập trình các thuật toán (thành các file hàm .m trên Octave) theo các phương pháp:
  - PP chia đôi, PP dây cung
  - PP lặp đơn, PP Newton