Đáp án - Đề thi cuối kỳ - Phương pháp tính kỹ thuật (đề 2)

Trường ĐH Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ

Học kỳ 1 - 2014-2015

GV: Doãn Minh Đăng (Điện thoại: 0947613939)

Yêu cầu

- Thời gian làm bài: 90 phút, hình thức thi: tự luận.
- Sinh viên không được dùng tài liệu, ngoại trừ một tờ giấy A4 viết tay bằng mực xanh, có ghi tên và mã số sinh viên của người dự thi.
- Được dùng máy tính cầm tay, không được dùng điện thoại di động.

1 Bài 1 (2 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x - \frac{16}{27}$ có các khoảng cách ly nghiệm là $[-1, 0]$ và $[1, 2]$.

a). (1 điểm) Dùng phương pháp Newton-Raphson để tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với điểm bắt đầu là $x_0 = 1$, lặp tối thiểu 4 bước. Trình bày kết quả theo bảng gồm các giá trị x_k, $f(x_k)$.

b). (1 điểm) Khi áp dụng phương pháp lặp đơn để tìm nghiệm của bài toán này trong đoạn $[1, 2]$, kết quả có hội tụ về cùng điểm hội tụ của phương pháp Newton-Raphson hay không? Giải thích.

Đáp án:

a). Kết quả:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0	-0.9259
1	1.5556	1.0974
2	1.3704	0.1537
3	1.3346	0.0052
4	1.3333	0.0

Ghi chú: nghiệm chính xác là $x_1 = -\frac{2}{3}$ (nghiệm kép) và $x_2 = \frac{4}{3}$.

b). Câu trả lời là có, với cách biến đổi để tìm hàm lặp phù hợp. Trước tiên ta biến đổi phương trình $f(x) = 0$ thành $x = g(x)$ với hàm số $g(x) = \left(\frac{4}{3}x + \frac{16}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$. Đạo hàm của hàm số là $g'(x) = \frac{4}{9\left(\frac{4}{3}x+\frac{16}{27}\right)^{\frac{2}{3}}}$. Ta sẽ chứng minh đoạn $[1, 2]$ là tập giới nội của hàm số $g(x)$ và hàm số là ánh xạ co trên đoạn này.

- Ta thấy $g'(x) > 0, \forall x \geq 1$, vậy hàm số $g(x)$ là hàm số đơn điệu tăng trên đoạn $[1, 2]$, suy ra với $\forall x \in [1, 2]$ ta có: $g(x) \geq g(1) = 1.244 > 1$, và $g(x) \leq g(2) = 1.483 < 2$, vậy $g(x) \in [1, 2], \forall x \in [1, 2]$, tức là đoạn $[1, 2]$ là tập giới nội của hàm số $g(x)$.
- Ta lại thấy $g''(x) = -\frac{32}{81\left(\frac{4}{3}x+\frac{16}{27}\right)^{\frac{5}{3}}} < 0, \forall x \geq 1$, vậy hàm số $g'(x)$ là hàm số đơn điệu giảm trên đoạn $[1, 2]$, và $0 \leq g'(x) \leq g'(1) = 0.287, \forall x \in [1, 2]$. Suy ra $|g'(x)| \leq 0.287 < 1, \forall x \in [1, 2]$, vậy hàm số $g(x)$ là ánh xạ co trên đoạn này với hệ số co là $q = 0.287$.

Do đó áp dụng phương pháp lặp đơn trên đoạn $[1, 2]$ đối với hàm $g(x)$ sẽ hội tụ.

Hơn nữa, do đoạn $[1, 2]$ là một khoảng cách ly nghiệm của phương trình $f(x) = 0$, nên chỉ có duy nhất một nghiệm trong đoạn này. Khi áp dụng phương pháp Newton-Raphson ở câu a), kết quả hội tụ về nghiệm thuộc đoạn $[1, 2]$, do vậy đó cũng là điểm hội tụ (nghiệm) của phương pháp lặp đơn khi giải phương trình $x = g(x)$ với một điểm bắt đầu $x_0 \in [1, 2]$.

2 Bài 2 (2 điểm)

Cho hệ phương trình tuyến tính: $\begin{cases} 3x + y - z = 5 \\ x + 4y + z = 4 \\ x - 2y - 5z = 4 \end{cases}$

a). (1 điểm) Lập ma trận A từ hệ phương trình trên, rồi tìm các số điều kiện của ma trận A theo chuẩn 1 và chuẩn ∞.

b). (0.5 điểm) Tìm nghiệm của hệ bằng phương pháp khử Gauss hoặc Gauss-Jordan.

c). (0.5 điểm) Khi dùng phương pháp lặp Gauss-Seidel để giải hệ phương trình trên, phép lặp có hội tụ về nghiệm của hệ hay không? Giải thích.

Đáp án:

a) Sinh viên cần ghi ra được ma trận A, tính được ma trận nghịch đảo A^{-1} và ghi đúng công thức tính các chuẩn của ma trận, công thức tính số điều kiện. Kết quả:

- Ma trận nghịch đảo (chỉ cần ghi ra được một trong hai dạng phân số hoặc số thập phân): $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{6} & -\frac{5}{42} \\ -\frac{1}{7} & \frac{1}{3} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{6} & -\frac{11}{42} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.429 & -0.167 & -0.119 \\ -0.143 & 0.333 & 0.095 \\ 0.143 & -0.167 & -0.262 \end{bmatrix}$.
- Số điều kiện tính theo chuẩn 1: $k_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = 5.0$.
- Số điều kiện tính theo chuẩn ∞: $k_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{40}{7} = 5.71428571429$.

b) Sinh viên cần thể hiện được các bước biến đổi để giải. Nghiệm: $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

c) Khi dùng phương pháp lặp Gauss-Seidel để giải hệ phương trình trên, phép lặp sẽ hội tụ về nghiệm của hệ. Lý do là vì ma trận A **là** ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt (sinh viên cần giải thích điều kiện đường chéo trội nghiêm ngặt được thỏa mãn như thế nào).

3 Bài 3 (2 điểm)

Một vật rắn chuyển động trong không gian theo một phương x, người ta đo vị trí của vật tại các điểm thời gian t_k, thu được các giá trị đo x_k như trong bảng dưới đây.

a). (1 điểm) Dùng công thức sai phân tiến để tính giá trị của vận tốc chuyển động của vật, ký hiệu là v_k, tại các thời điểm t_k, với $k = 0, \cdots, 9$.

b). (0.5 điểm) Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm số có dạng $v(t) = A + Bt$, với các giá trị v_k tính được ở câu trên.

c). (0.5 điểm) Tính xấp xỉ vận tốc của vật tại thời điểm $t = 0.85$.

k	t_k	x_k
0	0.0	0.0
1	0.1	-0.2
2	0.2	-0.189
3	0.3	-0.1929
4	0.4	0.0039
5	0.5	0.1863
6	0.6	0.6058
7	0.7	0.9755
8	0.8	1.5224
9	0.9	2.1542
10	1.0	2.8829

Đáp án:

a). Vận tốc chuyển động của vật là đạo hàm của vị trí ($v(t) = x'(t)$). Áp dụng công thức sai phân tiến:

$$v_k = x'(t_k) \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{t_{k+1} - t_k}$$

ta tính được các giá trị v_k tại các thời điểm t_k như trong bảng dưới đây.

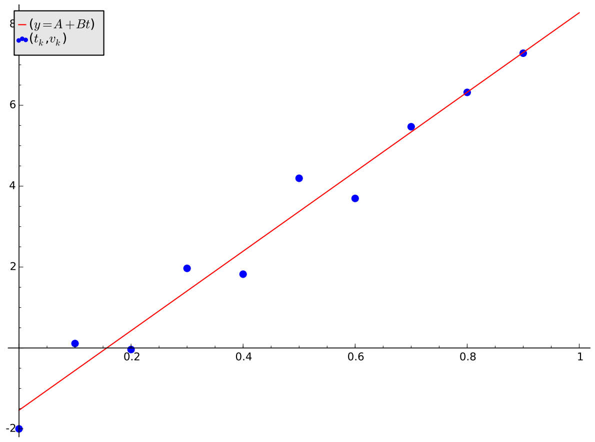
k	t_k	v_k
0	0.0	-2.0
1	0.1	0.11
2	0.2	-0.039
3	0.3	1.968
4	0.4	1.824
5	0.5	4.195
6	0.6	3.697
7	0.7	5.469
8	0.8	6.318
9	0.9	7.287

b). Sinh viên cần ghi được công thức tính hệ số của hệ phương trình tuyến tính (hoặc ma trận) với các biến A, B:

$$\begin{cases} n\mathbf{A} + \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} v_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} t_k\right)\mathbf{A} + \left(\sum_{k=1}^{n} t_k^2\right)\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} t_k v_k \end{cases}$$

Phương trình hàm số xấp xỉ được là: $v(t) = 9.826\,t - 1.539$.

Ghi chú: Đây là chuyển động theo phương thẳng đứng của một vật sau khi được ném lên trên cao, và bị tác động của trọng lực rơi trở xuống (gia tốc tính theo giá trị số là gần bằng $9.81 (m/s^2)$ khi ta xét chiều dương của trục tọa độ hướng xuống đất). Đồ thị của phương trình này và các điểm dữ liệu (t_k, v_k) được trình bày dưới đây (sinh viên không cần phải vẽ đồ thị):



c). Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 0.85$ là: $v(0.85) \approx 6.8131$. Sinh viên có thể tính được giá trị vận tốc này bằng cách thay $t = 0.85$ vào hàm số xấp xỉ $f(t)$ vừa tìm được, hoặc dùng một phương pháp nội suy để tính.

4 Bài 4 (2 điểm)

Xét bài toán phương trình vi phân với điều kiện ban đầu sau: $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} - 1, 1 \le t \le 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

a). (0.5 điểm) Hãy dùng công thức Euler để tính giá trị xấp xỉ của hàm $y(t)$ tại các thời điểm $t = 1.1, t = 1.2$ và $t = 1.3$ với bước $h = 0.1$.

b). (1 điểm) Sử dụng đa thức nội suy Lagrange (hoặc Newton) và dựa trên các giá trị tính được ở câu a), hãy tính xấp xỉ giá trị của hàm số y tại $t = 1.15$.

c). (0.5 điểm) Hãy dùng công thức Runge-Kutta bậc 4 để tính giá trị xấp xỉ của hàm $y(t)$ tại $t = 1.2$ với bước $h = 0.1$.

Đáp án:

a). Áp dụng công thức Euler:

$$y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1})$$

với $h = 0.1$ và $k = 1, 2, 3$, ta được:

k	t_k	y_k
0	1.0	1.0
1	1.1	1.0
2	1.2	0.9909
3	1.3	0.9735

b). Nếu dùng đa thức nội suy Lagrange, thì hàm số thu được là: $y(t) = \frac{25}{198}t^3 - \frac{115}{132}t^2 + \frac{559}{396}t + \frac{1}{3}$ (có thể lập đa thức rồi thay giá trị vào, hoặc lập bảng để tính trực tiếp).

Nếu dùng đa thức nội suy Newton, thì kết quả là bảng tỉ sai phân (ở đây dùng phương pháp Newton tiến, sinh viên có thể lập bảng tỉ sai phân theo phương pháp Newton lùi): (ký hiệu $f_\Delta^k = f[t_0, \cdots, t_k]$)

k	t_k	y_k	f^1_Δ	f^2_Δ	f^3_Δ
0	1.0	1.0			
1	1.1	1.0	0.0		
2	1.2	0.99	-0.09	-0.45	
3	1.3	0.97	-0.17	-0.42	0.13

Giá trị xấp xỉ của $y(t)$ tại $t = 1.15$ là: 0.997.

c). Áp dụng công thức Runge-Kutta bậc 4 (RK4):

$$\begin{cases} y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(t_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_2 = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = hf\left(t_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3\right) \end{cases}$$

với $k = 1, 2$ và bước $h = 0.1$, ta thu được kết quả:

k	t_k	y_k
0	1.0	1.0
1	1.1	0.9952
2	1.2	0.9812

Ghi chú: nghiệm chính xác của phương trình vi phân này là: $y = t(1 - ln(t))$.

5 Bài 5 (2 điểm)

Cho một hàm được viết để chạy trong chương trình Octave, lưu trong file tên *taodayso.m*, có nội dung như sau:

```
function [y]=taodayso(a,b,n)
if nargin<3
  n=10;
end
y=zeros(1,n);
y(1)=a;
for k=2:n
  y(k)=y(k-1)*b;
end
```

a). (0.5 điểm) Cho biết kết quả xuất ra khi chạy lệnh sau đây trong Octave: `y1=taodayso(1,0.5,4)`

b). (0.5 điểm) Cho biết kết quả xuất ra khi chạy lệnh sau đây trong Octave: `y2=taodayso(1,2)`

c). (0.5 điểm) Cho biết kết quả xuất ra khi chạy lệnh sau đây trong Octave: `y3=taodayso(1,1,1)` d). (0.5 điểm) Sau khi thực hiện lệnh `y=taodayso(2,2,N)` với N là một số tự nhiên bất kỳ đã có sẵn trong bộ nhớ, ta muốn tạo ra một vector sai phân của `y`, tức là một vector `yd` có $N-1$ phần tử, mà mỗi phần tử của nó được tính như sau: `yd(k)=y(k+1)-y(k)` với k là chỉ số cho biết thứ tự của phần tử trong vector. Hãy viết các câu lệnh trong Octave để tạo ra được vector `yd` theo mô tả trên.

Đáp án:

a). `y1 = [1   0.5   0.25   0.125]`

b). `y2 = [1   2   4   8   16   32   64   128   256   512]`

c). `y3 = 1`

d). Sinh viên có thể dùng phép lặp để tạo ra vector `yd`:

```
N=length(y);
yd=zeros(1,N-1);
for k=1:N-1
   yd(k)=y(k+1)-y(k);
end
```

hoặc có thể dùng lệnh tạo ra vector sai phân trực tiếp (có sẵn trong Octave):

```
yd=diff(y)
```