Chương 1: Sai số

1. Số gần đúng, sai số tuyệt đối và sai số tương đối
2. Sự quy tròn và sai số quy tròn
3. Sai số của hàm số

Số gần đúng và sai số

Số gần đúng: khi tìm giá trị của một đại lượng A, ta không có giá trị chính xác, mà chỉ có giá trị gần đúng a. Số a là **số gần đúng** và được dùng thay thế cho A trong tính toán. Ta còn nói a **xấp xỉ** A, ký hiệu: $a \approx A$.

Sai số:

- Sai số tuyệt đối: $\Delta = |A - a|$. Do A không có giá trị chính xác, nên Δ không tính chính xác được $\to$ ta dùng giới hạn trên của sai số: $\boldsymbol{\Delta_a \geq |A - a|}$.
  Giá trị Δ_a gọi là **sai số tuyệt đối giới hạn** của số gần đúng a so với A. Ta có:
  $a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a$, thường viết là: $\mathbf{A = a \pm \boldsymbol{\Delta}_a}$.

Số gần đúng và sai số

- Sai số tương đối: $\delta = \frac{|A-a|}{|A|}, (A \neq 0)$. Do không biết chính xác A, ta dùng giá trị ước lượng: $\delta_{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{\Delta_a}}{|\mathbf{a}|}, (\mathbf{a} \neq \mathbf{0})$.

Lưu ý:

- Δ_a có thứ nguyên (cm, kg...), còn δ_a không có thứ nguyên và thường viết dưới dạng phần trăm (%).
- Sai số tương đối không được định nghĩa với $A = 0$, cũng không tính được với $a = 0$.
- Trong tiếng Anh, chữ *accuracy* thường dùng để chỉ sai số tuyệt đối, còn chữ *precision* thường chỉ sai số tương đối (*tuy nhiên computer precision* có nghĩa khác).

Sự quy tròn và sai số quy tròn

Cách biểu diễn của một số thập phân:

$$a = \alpha_m \alpha_{m-1} \cdots \alpha_0 . \alpha_{-1} \alpha_{-2} \cdots \alpha_{-n} = \sum_{k=-n}^{m} \alpha_k 10^k \tag{1}$$

với m, n là số tự nhiên, $\alpha_k \in \{0, 1, \cdots, 9\}$

Ví dụ, số $a = 12.345$ viết dưới dạng:

$$a = 1 \times 10^1 + 2 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3} \tag{2}$$

Quy tròn: bỏ một số chữ số ở bên phải dấu thập phân, thì số mới được viết gọn hơn, đồng thời cũng làm tăng sai số như trong công thức (2).
Quy ước làm tròn: chữ số ≤ 4 thì bỏ, chữ số ≥ 5 khi bỏ thì cộng một vào chữ số cuối cùng còn lại (ở phía trái).

Sự quy tròn và sai số quy tròn

Sai số quy tròn: khi quy tròn bằng cách bỏ đi các số bên phải của a cho đến α_{-n} trong (1) để thu được số $\tilde{a}$, đặt **sai số quy tròn** là $\theta_{\tilde{a}} = |a - \tilde{a}|$, sai số mới so với số chính xác A là:

$$|A - \tilde{a}| \leq |A - a| + |a - \tilde{a}| \leq \Delta_a + \theta_{\tilde{a}} \triangleq \Delta_{\tilde{a}} \tag{3}$$

Ý nghĩa: khi quy tròn, sai số tăng lên.

Cho $A = a \pm \Delta_a$, khi viết a dưới dạng thập phân (1), chữ số α_k gọi là **đáng tin** nếu:

$$\Delta_a \leq 0.5 \times 10^k \tag{4}$$

Khi viết a dưới dạng thập phân (1), **chữ số có nghĩa** là các chữ số bắt đầu từ một chữ số khác không tính từ trái sang.

Cách viết số gần đúng

Có hai cách viết số gần đúng

1. Viết giá trị đi kèm với sai số tuyệt đối: $\mathbf{a} \pm \mathbf{\Delta_a}$
2. Viết theo quy ước **mọi chữ số có nghĩa đều đáng tin**. Nghĩa là sai số tuyệt đối không quá một nửa của giá trị ứng với chữ số cuối cùng bên phải.
   Ví dụ, khi viết $a = 12.34$ thì sai số là $\Delta_a \leq 0.005$.

Sai số của hàm số

Xét hàm số:

$$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{5}$$

Gọi $y, x_i, i = 1, 2, \cdots, n$ là giá trị chính xác, $\bar{x}_i, i = 1, 2, \cdots, n$ là các giá trị gần đúng, và giá trị gần đúng của hàm số là $\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$.
Ta muốn biết: **làm sao tính được sai số của y khi biết các sai số của x_i?**
Giả sử f là hàm khả vi liên tục đối với mọi biến số của nó. Xét khai triển Taylor hàm $f(\mathbf{x})$, với $\mathbf{x}$ là vector cột chứa $x_1 \cdots x_n$, ở lân cận của điểm $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)^T$:

$$f(\mathbf{x}) = \quad f(\bar{\mathbf{x}}) + [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla f(\bar{\mathbf{x}})] + \frac{1}{2!}[(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T H(\bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})] + \cdots$$

với ∇f là vector đạo hàm riêng, H là ma trận đạo hàm riêng cấp hai

Sai số của hàm số

Bỏ đi các giá trị nhỏ phía sau:

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\bar{\mathbf{x}}) + [(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T \nabla f(\bar{\mathbf{x}})] \tag{6}$$

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (x_1 - \bar{x_1}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{\mathbf{x}}) \cdot (x_n - \bar{x_n}) \tag{7}$$

Dùng (7) để ước lượng sai số của $\bar{y}$ đối với y:

$$|y - \bar{y}| = |f(\mathbf{x}) - f(\bar{\mathbf{x}})| \approx \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \right| |x_i - \bar{x}_i| \tag{8}$$

Do $\Delta_{x_i} = |x_i - \bar{x}_i|$ khá nhỏ, ta có thể xem:

$$\boldsymbol{\Delta_y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n) \right| \Delta_{x_i}} \tag{9}$$

Sai số của hàm số

Diễn giải cách làm:

- Lấy đạo hàm của hàm số đối với từng biến số (sẽ thu được hàm số đạo hàm riêng). Thay giá trị $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ vào để tính *đạo hàm riêng tại điểm đang xét*.
- Nhân đạo hàm riêng đối với từng biến số x_i với sai số Δ_{x_i}, rồi tính tổng.

Sai số tương đối của $\bar{y}$:

$$\delta_{\mathbf{y}} = \frac{\boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{y}|} = \sum_{\mathbf{i}=\mathbf{1}}^{\mathbf{n}} \left| \frac{\partial(\ln \mathbf{f})}{\partial \mathbf{x_i}} (\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{1}}, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{2}}, \cdots, \bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}}) \right| \boldsymbol{\Delta}_{\mathbf{x_i}} \tag{10}$$

(nhớ lại công thức đạo hàm: $(\ln f)' = \frac{1}{x}$)

Bài tập

1. Cho $a = 1.85$ với sai số tương đối $\delta_a = 0.12\%$. Tính Δ_a.
2. Làm tròn đến hai chữ số lẻ sau dấu thập phân của các số: $a = 14.0909, b = 13.2950, c \leq 12.8713, d \geq 1.2354$.
3. Xác định số các chữ số đáng tin trong cách viết thập phân các số sau: $a = 1.3452, \Delta_a = 0.0023$; $b = 154.2341, \Delta_b = 6.23 \times 10^{-3}$; $c = 3.14159, \delta_c = 0.25\%$.
4. Cho hình cầu có bán kính $R = 5 \pm 0.0003(m)$ và số $\pi = 3.14 \pm 0.002$. Tính sai số tuyệt đối của thể tích hình cầu $(V = \frac{4}{3}\pi R^3)$.
5. Cho $a = 1.5 \pm 0.02, b = 0.123 \pm 0.001, c = 3.7 \pm 0.05$. Hãy tính sai số tuyệt đối và tương đối của: $A = a+b+c$; $B = 2a-5b+3c$; $C = a^2+b^2c$.
6. Cho hàm $f(x) = 3x^5 - 2x^2 + 7$ và $x = 1.234 \pm 0.00015$. Tính Δ_f.

Bài thực hành 01 - làm quen với Octave

Octave là phần mềm hỗ trợ tính toán, có thể dùng để tính toán những lệnh đơn giản (như máy tính điện tử bỏ túi), hoặc viết các công thức tính phức tạp, lập trình được giải thuật tính toán số.
Các nội dung (xem chi tiết ở file *octave-tutorial.pdf*):

- Tính toán đơn giản kiểu máy tính bỏ túi
- Khái niệm về biến số
- Véc tơ và ma trận
- Lập trình vòng lặp *for*, lệnh rẽ nhánh *if*
- Vẽ đồ thị hàm số
- Lập trình một hàm số trong file .m