

Bài tập nhóm 2 - Phương pháp tính kỹ thuật HK1 2014-2015

Doãn Minh Đăng

Hạn nộp: 13:30 ngày thứ ba 11/11/2014

Yêu cầu

- Sinh viên có thể ghi kết quả trên giấy viết tay, hoặc đánh máy và in ra. Đối với bài 7, 8 và 9 cần gửi file chương trình cho giảng viên qua email.
- Trên bài làm và trên file chương trình, cần ghi cụ thể tên, mã số sinh viên của các thành viên trong nhóm.
- Sinh viên làm theo nhóm từ 2 đến 3 thành viên.
- Bài nộp trễ sẽ bị trừ 10 điểm cho mỗi ngày trễ hạn.
- Câu hỏi số 10 có bonus, tuy nhiên điểm tối đa cho bài tập nhóm này là 100 điểm, sẽ được quy đổi sang thang điểm 10 khi kết thúc môn học.

1 Bài 1 (10 điểm)

Cho một ma trận A trong Octave, ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Hãy ghi các lệnh Octave dùng để tạo ra các ma trận khác như sau:

1. Ak là ma trận mà mỗi phần tử đều bằng hằng số k nhân với phần tử cùng vị trí bên ma trận A (k là số cho trước)
2. $Ac2$ là vector chứa các phần tử trên cột số 2 của A
3. $Ar3$ là vector chứa các phần tử trên hàng số 3 của A
4. $a1$ là ma trận con chứa các phần tử ở hàng 2 đến 4, cột 1 đến 3 của A
5. AT là ma trận chuyển vị của A
6. $Ainv$ là ma trận nghịch đảo của A (nếu A là ma trận vuông, khả đảo)
7. $A2c$ là ma trận lớn, mà nếu cắt đôi ma trận này theo chiều dài thì mỗi nửa đều là ma trận A

8. A_{2r} là ma trận lớn, mà nếu cắt đôi ma trận này theo chiều rộng thì mỗi nửa đều là ma trận A
9. $Aghep$ là một vector hàng, được thành lập bằng cách nối liên tiếp các hàng của ma trận A (câu này có thể dùng một nhóm lệnh)
10. Cho vector $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix}$, lệnh nào giúp giải nhanh hệ phương trình $AX = B$?

Lời giải:

1. $Ak=k*A$

2. $A_{c2}=A(:,2)$

3. $A_{r3}=A(3,:)$

4. $a1=A(2:4,1:3)$

5. $AT=A'$

hoặc

$$AT=A.'$$

hoặc

$$AT=\text{transpose}(A)$$

Lưu ý: hai lệnh sau nếu áp dụng cho ma trận có số phức thì là chuyển vị không liên hợp. Lệnh đầu là chuyển vị liên hợp (tức là đổi dấu của phần ảo khi chuyển vị).

6. $A_{inv}=\text{inv}(A)$

7. $A_{2c}=[A;A]$

hoặc

$$A_{2r}=\text{repmat}(A,2,1)$$

8. $A_{2r}=[A,A]$

hoặc

$$A_{2r}=[A \ A]$$

hoặc

$$A_{2r}=\text{repmat}(A,1,2)$$

9. $Aghep=\text{reshape}(A,1,\text{size}(A,1)*\text{size}(A,2))$

hoặc lập trình:

```
Aghep=[] ;
for i=1:size(A,1) Aghep=[Aghep A(i,:)]; end
Aghep
```

10. $X=A \setminus B$

2 Bài 2 (10 điểm)

Ta xem lại bài toán **Lập hệ phương trình tuyến tính** trong đề thi giữa kỳ:

Giải thi đấu cờ vua *Millionaire Chess* vừa diễn ra tại Las Vegas tháng 10/2014, kết quả các kỳ thủ được giải thưởng như sau:

Tên kỳ thủ	Hạng	Giá trị giải thưởng
SO Wesley	1	x_1
ROBSON Ray	2	x_2
YU Yangyi	3	x_3
ZHOU Jianchao	4	x_4
6 kỳ thủ	5-10	x_5
12 kỳ thủ	11-22	x_6
LE Quang Liem	23	x_7

Lập hệ phương trình tuyến tính để tính giải thưởng các kỳ thủ trên nhận được, với các thông tin sau đây:

- Tổng cộng các kỳ thủ trong bảng trên nhận được 232 ngàn USD.
- SO Wesley được giải thưởng gấp đôi người hạng nhì, gấp bốn người hạng ba.
- YU Yangyi có giải thưởng bằng tổng của ZHOU Jianchao, hai kỳ thủ nhóm 5-10, 2 kỳ thủ nhóm 11-22, và LE Quang Liem cộng lại.
- Kỳ thủ hạng 4 nhận giải thưởng bằng một phần ba tổng giải thưởng của cả hai nhóm tiếp sau gộp lại.
- Mỗi kỳ thủ trong nhóm 5-10 nhận được gấp rưỡi tiền thưởng so với mỗi kỳ thủ ở nhóm 11-22.
- LE Quang Liem nhận được một nửa giải thưởng so với người xếp ngay trên mình.

Hãy tìm cách để biến đổi ma trận vừa thành lập được thành một **ma trận tam giác trên**, với ít thao tác nhất.

Lời giải:

Từ dữ liệu được cho, ta lập hệ phương trình $AX = B$ với các ma trận A, B như sau:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 12 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \left| \left(\begin{array}{c} 232 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \right. \quad (2)$$

Cần tốn 6 bước để biến đổi thành hệ phương trình với ma trận tam giác trên (mỗi bước khử cho từng dòng và giữ cố định dòng đó, nếu muốn làm tắt bằng cách gộp nhiều phép khử trong cùng một bước thì sẽ làm biến đổi nghiệm của hệ). Khi giải, ta sẽ tính được nghiệm là:

$$X = \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 25 \\ 14 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

3 Bài 3 (9 điểm)

Sử dụng phương pháp khử Gauss hoặc Gauss-Jordan để giải các hệ phương trình sau:

a)

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= -2 \\ 4x + y - 2z &= 1 \\ -2x + y - z &= -3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 3y + z &= 4 \\ 2x - y + z &= 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x + y - 4z &= -7 \\ x - y + z &= -2 \\ -x + 3y - 2z &= 6 \end{aligned}$$

Lời giải: Các nghiệm (SV cần thể hiện được các bước biến đổi):

a)

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

b)

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

c)

$$X = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

4 Bài 4 (6 điểm)

Sắp xếp lại các hệ phương trình sau để có dạng ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt. Áp dụng phương pháp Jacobi tính 2 bước lặp đầu tiên, với vector ban đầu là $[0, \dots, 0]$.

a)

$$\begin{aligned} u - 8v - 2w &= 1 \\ u + v + 5w &= 4 \\ 3u - v + w &= -2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} u + 4v &= 5 \\ v + 2w &= 2 \\ 4u + 3w &= 0 \end{aligned}$$

Lời giải: Các nghiệm (SV cần thể hiện được các bước biến đổi):

a)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{61}{49} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{57}{49} \end{pmatrix} \quad (7)$$

b)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{35} \\ \frac{35}{46} \\ \frac{12}{35} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Các bước lặp:

a) Cách 1, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ X^{(1)} &= [-0.667 \ -0.125 \ 0.8]^T \\ X^{(2)} &= [-0.975 \ -0.408 \ 0.958]^T \end{aligned}$$

Cách 2, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} v \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\X^{(1)} &= [-0.125 \ 0.8 \ -0.667]^T \\X^{(2)} &= [-0.408 \ 0.958 \ -0.975]^T\end{aligned}$$

b) Cách 1, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\X^{(1)} &= [0 \ 1.25 \ 1]^T \\X^{(2)} &= [-0.75 \ 1.25 \ 0.375]^T\end{aligned}$$

Cách 2, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} v \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\X^{(1)} &= [1.25 \ 1 \ 0]^T \\X^{(2)} &= [1.25 \ 0.375 \ -0.75]^T\end{aligned}$$

5 Bài 5 (6 điểm)

Áp dụng phương pháp Gauss-Seidel để giải các hệ phương trình ở bài 4.

Lời giải: Xem các nghiệm ở lời giải bài 4.

Các bước lặp (SV cần thể hiện được các bước biến đổi):

a) Cách 1, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & -8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\X^{(1)} &= [-0.667 \ -0.208 \ 0.975]^T \\X^{(2)} &= [-1.061 \ -0.501 \ 1.113]^T\end{aligned}$$

Cách 2, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} -8 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} v \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ X^{(1)} &= [-0.125 \ 0.825 \ -0.983]^T \\ X^{(2)} &= [-0.454 \ 1.088 \ -1.181]^T \end{aligned}$$

b) Cách 1, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ X^{(1)} &= [0 \ 1.25 \ 0.375]^T \\ X^{(2)} &= [-0.281 \ 1.320 \ 0.340]^T \end{aligned}$$

Cách 2, biến đổi ma trận thành:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right], \text{ với } X = \begin{bmatrix} v \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ X^{(1)} &= [1.25 \ 0.375 \ -0.281]^T \\ X^{(2)} &= [1.320 \ 0.340 \ -0.255]^T \end{aligned}$$

6 Bài 6 (9 điểm)

Tìm các số điều kiện của các ma trận sau:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2.01 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

Lời giải:

Sinh viên cần ghi ra được công thức tính số điều kiện của ma trận, trong đó phải phân biệt rõ chỗ nào thì lấy tổng theo i (số hàng), chỗ nào thì lấy tổng theo j (số cột).

a) $k_1(A) = 21; k_\infty(A) = 21$.

b) $k_1(A) = 2403; k_\infty(A) = 2403$

c) $\det(A) = 0$, vậy ma trận này suy biến, nên A^{-1} không tồn tại, do đó không có số điều kiện.

7 Bài 7 (10 điểm)

Viết một chương trình Octave để thực hiện giải thuật khử Gauss, chương trình nhận hai tham số là ma trận vuông A và vector cột B , xuất ra nghiệm là vector cột X .

Sinh viên nộp chương trình dạng file function *khugauss.m*, file này sẽ được kiểm tra bằng cách cho chạy một số ma trận mẫu có kích thước 3x3, 3x4, 4x3, 4x4, 5x5.

Lưu ý: chương trình này cần kiểm tra các điều kiện để có thể trả lời là hệ phương trình có nghiệm hay không.

8 Bài 8 (15 điểm)

Viết một chương trình Octave để thực hiện phương pháp lặp Jacobi giải hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ với X_0 cho trước. Sinh viên tự do tham khảo các chương trình mẫu trong sách và cải tiến chúng.

Sinh viên nộp chương trình dạng file function *ppjacobi.m*, file này sẽ được kiểm tra bằng cách cho chạy một số ma trận mẫu có kích thước 3x3, 3x4, 4x3, 4x4, 5x5.

Lưu ý: cần kiểm tra ma trận có ở dạng đường chéo trội nghiêm ngặt không.

9 Bài 9 (15 điểm)

Viết một chương trình Octave để thực hiện phương pháp lặp Gauss-Seidel giải hệ phương trình tuyến tính $AX = B$ với X_0 cho trước. Sinh viên tự do tham khảo các chương trình mẫu trong sách và cải tiến chúng.

Sinh viên nộp chương trình dạng file function *ppgauss_seidel.m*, file này sẽ được kiểm tra bằng cách cho chạy một số ma trận mẫu có kích thước 3x3, 3x4, 4x3, 4x4, 5x5.

Lưu ý: cần kiểm tra ma trận có ở dạng đường chéo trội nghiêm ngặt không.

10 Bài 10 (10+10 điểm)

Tìm các ví dụ trong thực tế, trong các môn học khác, về việc cần giải một hệ phương trình tuyến tính. Trình bày ví dụ đó, xây dựng hệ phương trình cần giải, và nêu ý nghĩa của việc giải hệ phương trình đó.

Các nhóm sinh viên không được sao chép ý tưởng của nhau. Nếu có ví dụ được hai hay nhiều nhóm cùng sử dụng, điểm số chỉ được tính cho nhóm nào gửi đầu tiên. Các

nhóm có thể gửi giải đáp cho bài 10 này nhiều lần qua email trước khi gửi bài báo cáo cuối cùng cho bài tập nhóm này (để đăng ký ý tưởng mình nghĩ ra).

Mỗi ví dụ đúng đắn và trình bày rõ ràng được tính 5 điểm.

Bonus: Nếu báo cáo bài tập nhóm được hoàn thành kịp hạn chót, thì câu này có thể đạt tối đa 20 điểm. Nếu báo cáo bài tập nhóm được gửi trễ hạn, thì câu này chỉ được tối đa 10 điểm.