Đáp án - Đề thi cuối kỳ - Phương pháp tính kỹ thuật (đề 1)

Trường ĐH Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ

24/01/2015 (Thi học kỳ 1, năm học 2014-2015)

GV: Doãn Minh Đăng

Yêu cầu

- Thời gian làm bài: 90 phút, hình thức thi: tự luận.
- Sinh viên không được dùng tài liệu, ngoại trừ một tờ giấy A4 viết tay bằng mực xanh, có ghi tên và mã số sinh viên của người dự thi.
- Được dùng máy tính cầm tay, không được dùng điện thoại di động.

1 Bài 1 (2 điểm)

Cho hàm số $f(x) = x^3 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{27}$ có các khoảng cách ly nghiệm là $[-1, -0.5]$ và $[0, 1]$.

a). (1 điểm) Dùng phương pháp Newton-Raphson để tìm nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với điểm bắt đầu là $x_0 = 1$, lặp tối thiểu 5 bước. Trình bày kết quả theo bảng gồm các giá trị x_k, $f(x_k)$.

b). (0.5 điểm) Khi áp dụng phương pháp chia đôi để tìm nghiệm của bài toán này trong đoạn $[0, 1]$, kết quả có hội tụ về cùng điểm hội tụ của phương pháp Newton-Raphson hay không? Giải thích.

c). ($\star$) (0.5 điểm) Hãy dùng công thức ước lượng sai số tổng quát để đánh giá sai số đối với nghiệm xấp xỉ thu được ở câu a).

Đáp án:

Lưu ý: Những chỗ "Ghi chú" là giải thích thêm về ý nghĩa của bài tập, sinh viên không cần làm được đến mức đó.

a). Kết quả:

k	x_k	$f(x_k)$
0	1.0	0.74074
1	0.72222	0.21005
2	0.55166	0.05807
3	0.45147	0.01561
4	0.39537	0.00409
5	0.36523	0.00105

Ghi chú: nghiệm chính xác là $x_1 = \frac{1}{3}$ (nghiệm kép) và $x_2 = -\frac{2}{3}$.

b). Không. Vì theo kết quả đã tính thì phương pháp Newton-Raphson hội tụ về một nghiệm thuộc đoạn $[0,1]$; mà $f(0).f(1) > 0$ nên phương pháp chia đôi không giúp tìm được nghiệm trên đoạn này.

c). Để có thể dùng được công thức ước lượng sai số tổng quát $|x^* - p| \leq \frac{|f(x^*)|}{m}$, ta cần tìm một số $m > 0$ sao cho $|f'(x)| \geq m, \forall x \in [0,1]$. Đạo hàm của hàm số: $f'(x) = 3\,x^2 - \frac{1}{3}$, ta thấy $f'(0) < 0$ và $f'(1) > 0$, hàm số đạo hàm này là hàm liên tục, nên tồn tại một điểm $c \in [0,1]$ mà $f'(c) = 0$. Do có $c \in [0,1] : f'(c) = 0$, nên ta không tìm được giá trị chặn dưới $m > 0$ của $|f'(x)|$ trong đoạn $[0,1]$, vậy **ta không dùng được công thức ước lượng sai số tổng quát**.

Ghi chú: thực ra $f'(x_1) = 0$ với $x_1 = \frac{1}{3}$, tức là đạo hàm cũng bằng không ở đúng vị trí của nghiệm x_1 mà phương pháp Newton-Raphson hội tụ về, nên giả sử không xét trên đoạn $[0,1]$ mà ở một đoạn $[a,b]$ có chứa $x_1 = \frac{1}{3}$ thì vẫn gặp trở ngại không tìm được giá trị chặn dưới $m > 0$ như lý luận ở trên.

2 Bài 2 (2 điểm)

Cho hệ phương trình tuyến tính $AX = B$, với các ma trận A, B, X như sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 32 \\ 24 \\ 28 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

a). (1 điểm) Tìm các số điều kiện của ma trận A theo chuẩn 1 và chuẩn ∞.

b). (0.5 điểm) Tìm nghiệm của hệ bằng phương pháp khử Gauss hoặc Gauss-Jordan.

c). (0.5 điểm) Khi dùng phương pháp lặp Jacobi để giải hệ phương trình trên, phép lặp có hội tụ về nghiệm của hệ hay không? Giải thích.

Đáp án:

a) Sinh viên cần thể hiện được các phép tính, đưa ra ma trận nghịch đảo và ghi đúng công thức tính các chuẩn của các ma trận, công thức tính số điều kiện. Kết quả:

- Ma trận nghịch đảo (chỉ cần tính ma trận dạng phân số hoặc dạng số thập phân): $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{19}{72} & \frac{11}{24} & -\frac{1}{18} \\ \frac{7}{36} & \frac{1}{12} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{8} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} -0.264 & 0.458 & -0.056 \\ 0.194 & 0.083 & -0.222 \\ 0.042 & -0.125 & 0.167 \end{bmatrix}.$$
- Số điều kiện tính theo chuẩn 1: $k_1(A) = \|A\|_1 \|A^{-1}\|_1 = \frac{40}{3} \approx 13.333$.
- Số điều kiện tính theo chuẩn ∞: $k_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty = \frac{91}{9} \approx 10.111$.

b) Sinh viên cần thể hiện được các bước biến đổi để giải. Nghiệm là: $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

c) Khi dùng phương pháp lặp Jacobi để giải hệ phương trình trên, phép lặp **không** hội tụ về nghiệm của hệ. Lý do: vì ma trận A không phải là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt (sinh viên cần đưa ra dẫn chứng là điều kiện đường chéo trội nghiêm ngặt không thỏa mãn đối với hàng thứ nhất hoặc hàng thứ hai của ma trận A).

3 Bài 3 (2 điểm)

Một vật rắn chuyển động trong không gian theo một phương x, người ta đo vị trí của vật tại các điểm thời gian t_k, thu được các giá trị đo x_k như trong bảng dưới đây.

a). (1 điểm) Dùng công thức sai phân tiến để tính giá trị của vận tốc chuyển động của vật, ký hiệu là v_k, tại các thời điểm t_k, với $k = 0, \cdots, 9$.

b). (0.5 điểm) Sử dụng phương pháp bình phương bé nhất, tìm hàm số có dạng $v(t) = A + Bt$, với các giá trị v_k tính được ở câu trên.

c). (0.5 điểm) Tính xấp xỉ vận tốc của vật tại thời điểm $t = 0.85$.

k	t_k	x_k
0	0.0	0.0
1	0.1	0.5209
2	0.2	0.8226
3	0.3	1.1031
4	0.4	1.2477
5	0.5	1.2813
6	0.6	1.309
7	0.7	1.1464
8	0.8	0.8759
9	0.9	0.6008
10	1.0	0.1709

Đáp án:

a). Vận tốc chuyển động của vật là đạo hàm của vị trí ($v(t) = x'(t)$), ta tính được các giá trị v_k tại các thời điểm t_k như trong bảng dưới đây.

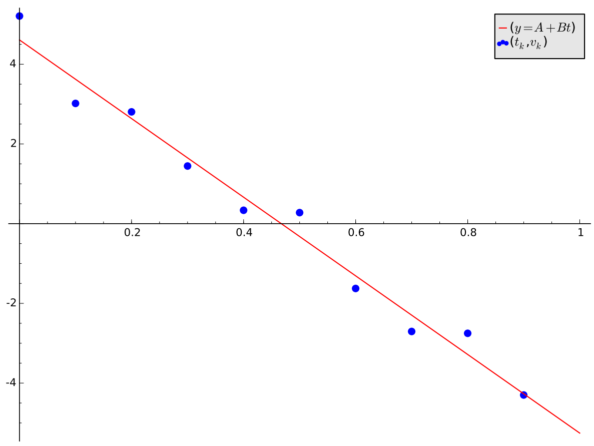
k	t_k	v_k
0	0.0	5.209
1	0.1	3.017
2	0.2	2.805
3	0.3	1.446
4	0.4	0.336
5	0.5	0.277
6	0.6	-1.626
7	0.7	-2.705
8	0.8	-2.751
9	0.9	-4.299

b). Sinh viên cần ghi được công thức tính hệ số của hệ phương trình tuyến tính (hoặc ma trận) với các biến A, B:

$$\begin{cases} n\mathbf{A} + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\mathbf{A} + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\mathbf{B} = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

Phương trình hàm số xấp xỉ được là: $v(t) = -9.865\,t + 4.61$.

Ghi chú: Đây là chuyển động theo phương thẳng đứng của một vật sau khi được ném lên trên cao (chiều dương của trục tọa độ hướng lên), và bị tác động của trọng lực rơi trở xuống (gia tốc tính theo giá trị số là gần bằng $-9.81(m/s^2)$, ở đây ta bỏ qua đơn vị đo lường để đơn giản hóa). Đồ thị của phương trình này và các điểm dữ liệu (t_k, v_k) được trình bày dưới đây (sinh viên không cần phải vẽ đồ thị):



c). Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 0.85$ là: $v(0.85) \approx -3.77525$. Sinh viên có thể tính được giá trị vận tốc này bằng cách thay $t = 0.85$ vào hàm số xấp xỉ $f(t)$ vừa tìm được, hoặc dùng một phương pháp nội suy để tính.

4 Bài 4 (2 điểm)

Xét bài toán phương trình vi phân với điều kiện ban đầu sau: $\begin{cases} y' = y + t, t \geq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a). (0.5 điểm) Hãy dùng công thức Euler để tính giá trị xấp xỉ của hàm $y(t)$ tại các thời điểm $t = 0.2, t = 0.4$ và $t = 0.6$ với bước $h = 0.2$.

b). (1 điểm) Sử dụng đa thức nội suy Lagrange (hoặc Newton) và dựa trên các giá trị tính được ở câu a), hãy tính xấp xỉ giá trị của hàm số y tại $t = 0.5$.

c). (0.5 điểm) Hãy dùng công thức Runge-Kutta bậc 4 để tính giá trị xấp xỉ của hàm $y(t)$ tại $t = 0.4$ với bước $h = 0.2$.

Đáp án:

a). Áp dụng công thức Euler:

$$y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + hf(t_{k-1}, y_{k-1})$$

với $h = 0.2$ và $k = 1, 2, 3$, ta được:

k	t_k	y_k
0	0.0	1.0
1	0.2	1.2
2	0.4	1.48
3	0.6	1.856

b). Nếu dùng đa thức nội suy Lagrange, thì hàm số thu được là: $y(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^2 + \frac{62}{75}t + 1$

Nếu dùng đa thức nội suy Newton, thì kết quả là bảng tỉ sai phân (phương pháp Newton tiến): (ký hiệu $f^k_\Delta = f[t_0, \cdots, t_k]$)

k	t_k	y_k	f^1_Δ	f^2_Δ	f^3_Δ
0	0.0	1.0			
1	0.2	1.2	1.0		
2	0.4	1.48	1.4	1.0	
3	0.6	1.86	1.88	1.2	0.33

Giá trị xấp xỉ của $y(t)$ tại $t = 0.5$ là: 1.655.

c). Áp dụng công thức Runge-Kutta bậc 4 (RK4):

$$\begin{cases} y(t_k) \approx y_k = y_{k-1} + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = hf(t_{k-1}, y_{k-1}) \\ K_2 = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_1}{2}\right) \\ K_3 = hf\left(t_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{K_2}{2}\right) \\ K_4 = hf\left(t_{k-1} + h, y_{k-1} + K_3\right) \end{cases}$$

với $k = 1, 2$ và bước $h = 0.2$, ta thu được kết quả:

k	t_k	y_k
0	0.0	1.0
1	0.2	1.2428
2	0.4	1.5836

Ghi chú: nghiệm chính xác của phương trình vi phân này là: $y = 2e^t - t - 1$.

5 Bài 5 (2 điểm)

Cho một hàm được viết để chạy trong chương trình Octave, lưu trong file tên *taodayso.m*, có nội dung như sau:

```
function [y]=taodayso(a,b,n)
 if nargin<3
   n=10;
 end
 y=zeros(1,n); y(1)=a; y(2)=b;
 k=3;
 while k<=n
   y(k)=y(k-1)+y(k-2);
   k=k+1;
 end
```

a). (0.5 điểm) Cho biết kết quả xuất ra khi chạy lệnh sau đây trong Octave: `y1=taodayso(1,3,5)` b). (0.5 điểm) Cho biết kết quả xuất ra khi chạy lệnh sau đây trong Octave: `y2=taodayso(1,1)`

c). (0.5 điểm) Cho biết kết quả xuất ra khi chạy lệnh sau đây trong Octave: `y3=taodayso(1,1,1)`

d). (0.5 điểm) Sau khi thực hiện lệnh `y=taodayso(1,1,N)` với N là một số tự nhiên bất kỳ đã có sẵn trong bộ nhớ, ta muốn tạo ra một vector "mặt nạ" của `y`, tức là một vector `ym` mà mỗi phần tử của nó chỉ có thể mang giá trị 1 hoặc 0, giá trị 1 cho biết là phần tử tương ứng (ở cùng vị trí) trong vector `y` là một số lớn hơn hoặc bằng 10, và 0 chỉ điều ngược lại. Hãy viết các câu lệnh trong Octave để tạo ra được vector `ym` theo mô tả trên.

Đáp án:

a).
```
y1 = [1    3    4    7   11]
```

b).
```
y2 = [1    1    2    3    5    8   13   21   34   55]
```

c).
```
y3 = [1   1]
```

d). Sinh viên có thể dùng lệnh tạo ra vector cùng kích thước với vector `y` và mang giá trị 10, rồi so sánh từng phần tử của hai vector để tạo ra vector `ym`:

```
sosanh = 10*ones(size(y));
ym = y>=sosanh
```

hoặc có thể dùng lệnh so sánh trực tiếp vector `y` với giá trị 10, ngắn gọn hơn (Octave sẽ tự động tạo ra vector trung gian để so sánh):

```
ym = y>=10
```