Chương 3: Hệ phương trình đại số tuyến tính

1. Đặt bài toán
2. Các phương pháp khử Gauss
3. Phương pháp lặp Jacobi
4. Phương pháp lặp Gauss-Seidel
5. Bài tập

Đặt bài toán

Phát biểu một bài toán hệ phương trình tuyến tính:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $a_{ij}, i, j \in \{1, \cdots, n\}$ và $b_i, i \in \{1, \cdots, n\}$ là các hằng số thực. Ta cần giải hệ phương trình tuyến tính (bậc nhất) này để tìm các ẩn số $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$.

Đặt bài toán

Hệ phương trình (1) được viết gọn lại thành phương trình sau:

$$AX = B, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, X \in \mathbb{R}^n, B \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

với:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Phương trình này có nghiệm duy nhất khi $\mathbf{det(A) \neq 0}$. Trong chương này, ta tìm nghiệm số của (2), chỉ xét ở trường hợp này.

Ứng dụng của hệ phương trình tuyến tính

Nhiều bài toán thường gặp trong kỹ thuật liên quan đến việc giải hệ phương trình tuyến tính.
Một số ví dụ:

- Tính các giá trị U, I trong một mạch điện, điện tử
- Xác định giá của các mặt hàng trên thị trường
- Phân bổ nguồn lực để đầu tư cho trồng trọt, chăn nuôi...

Các phương pháp khử Gauss

Khái niệm ma trận đường chéo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ma trận tam giác trên, tam giác dưới:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Các phương pháp khử Gauss

- Trường hợp dễ nhất: giải $AX = B$ với A là ma trận đường chéo với $a_{ii} \neq 0, \forall i$ (để $det(A) \neq 0$), có công thức tính nghiệm riêng lẻ cho từng thành phần x_i:

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

- Ví dụ:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Các phương pháp khử Gauss

- Với A là ma trận tam giác trên: tính thành phần x_n trước, sau đó tính x_{n-1}, dần lên đến x_2, x_1, theo công thức:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}; x_{n-1} = \frac{b_{n-1} - a_{nn}x_n}{a_{(n-1)(n-1)}} \tag{4}$$

$$\dots$$

$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k}{a_{ii}} \tag{5}$$

$$\dots$$

$$x_1 = \frac{b_1 - \sum_{k=2}^{n} a_{1k}x_k}{a_{11}} \tag{6}$$

- Với A là ma trận tam giác dưới: giải từ x_1 đến x_n (ngược lại).

Các phương pháp khử Gauss

Ví dụ 1:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Ví dụ 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Câu hỏi:

- Các phương trình (7) và (8) khác nhau thế nào?
- Giải phương trình nào dễ hơn?

Các phương pháp khử Gauss

Tinh thần của phương pháp: biến đổi ma trận A về dạng ma trận tam giác trên, sau đó giải từ dưới lên, lần lượt tìm từng phần tử của X.

Các phép biến đổi ma trận (sơ cấp) thường dùng:

- Nhân một hàng với một số khác không (ví dụ: từ (7) sang (8))
- Hoán chuyển hai hàng cho nhau
- Cộng một hàng cho một hàng khác đã nhân với một số khác không

Qua biến đổi sơ cấp, ta tìm được phương trình *tương đương*, tức là sẽ có nghiệm giống nhau.

Các phương pháp khử Gauss

Giải thuật Gauss: biến đổi sơ cấp để khử từng phần tử của ma trận A ở bên dưới của đường chéo chính, bắt đầu từ cột thứ nhất, dịch chuyển dần sang bên phải cho đến cột $n-1$.

Bước 1 (xét cột 1):

- Xét trong các số $a_{11}, \cdots, a_{n1}$ để tìm một số khác không (do $det(A) \neq 0$ nên cả cột không thể cùng bằng không). Nếu $a_{11} = 0$ thì dùng phép hoán chuyển hai hàng để được $a_{11} \neq 0$.
- Lấy các hàng thứ k với $k = 2, \cdots, n$, trừ cho hàng thứ nhất đã nhân với $\frac{a_{k1}}{a_{11}}$.
- Kết thúc bước này, thì ấn định dòng 1 và cột 1 (sẽ không thay đổi ở các bước sau).

Các phương pháp khử Gauss

Kết thúc bước 1, ta thu được hệ phương trình mới có dạng:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots \\ 0 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Cứ thế làm tiếp, đến bước thứ i (xét cột i) thì xét các dòng từ i đến n, mục tiêu là đạt được các ma trận tương đương có chứa $a_{ii} \neq 0$ và $a_{ki} = 0, k = i+1, \cdots, n$. Sau $n-1$ bước, ta có hệ tam giác trên:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ 0 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \cdots \\ 0 & + & \cdots & + & 0 & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Các phương pháp khử Gauss

Ví dụ:

$$A^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, B^{(0)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Ở bước 1: biến đổi $h_2 = h_2 - 2h_1, h_3 = h_3 - h_1, h_4 = h_4 - h_1$, ta thu được:

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B^{(1)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Các phương pháp khử Gauss

Ở bước 2: hoán chuyển hàng thứ hai và ba:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, B^{(2)} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Ở bước 3: biến đổi $h_4 = h_4 + 2h_3$, cuối cùng ta có:

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B^{(3)} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Sau đó dùng cách giải hệ phương trình với A là ma trận tam giác trên, để tìm X.

Bài tập

Giải hệ phương trình bằng phương pháp khử Gauss với các ma trận:

1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{13}$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{14}$$

Các phương pháp khử Gauss

Phương pháp Gauss-Jordan:

Ta cải tiến phương pháp Gauss bằng cách: tại mỗi bước, ta chọn phần tử để biến đổi là phần tử có trị tuyệt đối lớn nhất, sao cho không cùng hàng và cột với những phần tử đã chọn trước. Phần tử đó gọi là **phần tử trội** (hay **phần tử chính**). Sau đó ta biến đổi cho tất cả các phần tử trên cùng cột của phần tử trội bằng không. Sau n bước ta sẽ tìm được nghiệm dễ dàng.

Các phương pháp lặp

Tinh thần của kỹ thuật lặp: chuyển phương trình $AX = B$ sang dạng tương đương $X = TX + C$ với T là một ma trận vuông cấp n và C là một vector hằng số. Chọn một giá trị ban đầu $X^{(0)}$, sau đó ta xây dựng dần dãy vector $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ theo công thức:

$$X^{(k)} = TX^{(k-1)} + C, \quad k = 1, 2, \cdots \tag{15}$$

Một số lưu ý:

- Giải bằng phương pháp lặp là cách giải gần đúng, không giống các phương pháp Gauss (tìm nghiệm chính xác).
- Phép lặp này tương tự phương pháp lặp đơn đã học ở chương trước: công thức tính toán rất đơn giản, và nếu khéo chọn ánh xạ thì có thể nhanh đạt được kết quả (nghiệm có sai số nhỏ).

Các phương pháp lặp

Để giải bằng phương pháp lặp, ta cần quan tâm: giải thuật sẽ *hội tụ* hay *phân kỳ*. Cách chọn ma trận T sẽ quyết định tính chất đó, qua định lý sau:

Định lý 1 *Ký hiệu* $\|\cdot\|$ *là một chuẩn ma trận. Nếu* $\|T\| < 1$ *thì dãy lặp các vector theo công thức* (15) *sẽ hội tụ về nghiệm* $\bar{X}$ *của phương trình* (2) *với mọi vector lặp ban đầu* $X^{(0)}$. *Ta có công thức đánh giá sai số như sau:*

$$\|X^{(k)} - \bar{X}\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| \tag{16}$$

$$\|X^{(k)} - \bar{X}\| \leq \frac{\|T\|^k}{1 - \|T\|}\|X^{(1)} - X^{(0)}\| \tag{17}$$

Chuẩn vector và chuẩn ma trận

Định nghĩa chuẩn vector:

Xét trên không gian tuyến tính thực $\mathbb{R}^n$. Chuẩn (norm) của vector $X \in \mathbb{R}^n$ là một số thực, ký hiệu là $\|X\|$, thỏa đủ ba điều kiện sau:

1. $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\| \geq 0; \|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$ (chỉ bằng không ở gốc tọa độ)
2. $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda X\| = |\lambda|.\|X\|$ (tỉ lệ với phép nhân)
3. $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n, \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ (bất đẳng thức tam giác)

Một chuẩn là một cách đo lường, so sánh các vector. Có nhiều loại chuẩn, tương ứng với các cách tính $\|X\|$ khác nhau.

Chuẩn vector và chuẩn ma trận

Hai loại chuẩn vector thường dùng, được định nghĩa bằng công thức sau đối với $X = [x_1, \cdots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{Chuẩn 1 (1-norm): } \|X\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{18}$$

$$\text{Chuẩn } \infty \text{ } (\infty\text{-norm}): \|X\|_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|) = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \tag{19}$$

Định nghĩa hội tụ của vector theo chuẩn:

Xét dãy vector $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ với $X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$. Ta nói dãy vector này hội tụ về vector $\bar{X}$ khi $k \to \infty$ nếu và chỉ nếu $\|X^{(k)} - \bar{X}\| \to 0$ khi $k \to \infty$.

Chuẩn vector và chuẩn ma trận

Định nghĩa chuẩn ma trận: Chuẩn ma trận tương ứng với chuẩn vector được xác định theo công thức:

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| = \max_{\|X\|\neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \tag{20}$$

Các chuẩn ma trận tương ứng với chuẩn vector như sau:

$$\text{Chuẩn 1 (1-norm): } \|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \tag{21}$$

$$\text{Chuẩn } \infty \text{ } (\infty\text{-norm}): \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \tag{22}$$

Phương pháp lặp Jacobi

Định nghĩa ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt:
Ma trận A được gọi là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt nếu nó thỏa mãn điều kiện:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \tag{23}$$

Đối với A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt, ta phân tích ma trận A thành $A = D - L - U$, với D là ma trận đường chéo của A, $-L$ là ma trận đối tam giác dưới và $-U$ là ma trận đối tam giác trên của A.
Lưu ý: từ công thức (23), ta có $a_{ii} \neq 0, \forall i$, do đó $det(D) \neq 0$ và có ma trận nghịch đảo D^{-1} (là nghịch đảo từng phần tử trên đường chéo chính của ma trận D).

Phương pháp lặp Jacobi

Khi đó ta có: $AX = B \Leftrightarrow (D - L - U)X = B$.

Nếu ta chuyển thành phương trình tương đương là $DX = (L+U)X+B$, hay $X = D^{-1}(L+U)X + D^{-1}B$, thì ký hiệu $T_j = D^{-1}(L+U)$ và $C_j = D^{-1}B$, ta có công thức lặp:

$$X^{(k)} = T_j X^{(k-1)} + C_j, k = 1, 2, \cdots \tag{24}$$

Đây gọi là **phương pháp lặp Jacobi**. Ta chứng minh được $\|T_j\|_\infty < 1$ từ điều kiện A là ma trận đường chéo trội nghiêm ngặt.

Công thức lặp tính cho từng giá trị thứ i của $X^{(k)}$:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)} + b_i\right) \tag{25}$$

Phương pháp lặp Gauss-Seidel

Nếu ta chuyển thành phương trình tương đương là $(D-L)X = UX+B$, hay $X = (D-L)^{-1}UX + (D-L)^{-1}B$, thì ký hiệu $T_g = (D-L)^{-1}U$ và $C_g = (D-L)^{-1}B$, ta có công thức lặp:

$$X^{(k)} = T_g X^{(k-1)} + C_g, k = 1, 2, \cdots \tag{26}$$

Đây gọi là **phương pháp lặp Gauss-Seidel**.

Công thức lặp tính cho từng giá trị thứ i của $X^{(k)}$:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i \right) \tag{27}$$

Lưu ý: công thức lặp Gauss-Seidel sử dụng các giá trị *mới nhất* đối với các phần tử $x_1, \cdots, x_{i-1}$, do đó tốc độ hội tụ nhanh hơn phương pháp lặp Jacobi.

Ví dụ

Giải phương trình $AX = B$ với:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 \\ 25 \\ -11 \\ 15 \end{pmatrix} \tag{28}$$

bằng phương pháp Jacobi và Gauss-Seidel.

Ví dụ

Tính các ma trận lặp theo phương pháp Jacobi và Gauss-Seidel:

1.

$$14x_1 - 2x_2 = 7$$
$$-2x_1 + 17x_2 = 5$$

2.

$$19x_1 - 2x_2 = 4$$
$$-2x_1 + 9x_2 = 4$$

Lưu ý: với phương pháp Gauss-Seidel, có thể dùng công thức $T_g = (D - L)^{-1}U$, hoặc dùng các hệ số của phương pháp Jacobi nhưng thay những vị trí ở dưới đường chéo chính bằng giá trị mới (ở cùng bước lặp).

Số điều kiện của ma trận

Xét hệ phương trình $AX = B$ với $det(A) \neq 0$, có nghiệm là $x = A^{-1}B$. Ta đặt câu hỏi: nếu vế phải B thay đổi một khoảng Δ_B, thì nghiệm mới sẽ thay đổi một khoảng Δ_X là bao nhiêu?

$$A\Delta_X = \Delta_B \Rightarrow \Delta_X = A^{-1}\Delta_B$$

$$\Rightarrow \|\Delta_X\| = \|A^{-1}\Delta_B\| \leq \|A^{-1}\|\|\Delta_B\|$$

và $\|B\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\|$, nên ta suy ra:

$$\frac{\|\Delta_X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta_B\|}{\|B\|}$$

Số điều kiện của ma trận A được định nghĩa là:

$$k(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \tag{29}$$

Doãn Minh Đăng

Số điều kiện của ma trận

Ý nghĩa của số điều kiên $k(A)$: số điều kiện càng lớn thì tỉ lệ biến động của nghiệm càng lớn, ta gọi là hệ phương trình càng mất ổn định.

Ví dụ: xét phương trình $AX = B$ với:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2.01 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.01 \end{bmatrix}, \text{ và } B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.1 \end{bmatrix} \tag{30}$$

Với $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.01 \end{bmatrix}$, nghiệm của hệ là $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, với $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.1 \end{bmatrix}$, nghiệm của hệ là $X_2 = \begin{bmatrix} -17 \\ 10 \end{bmatrix}$ (để ý: X_1 và X_2 cách nhau xa).

Hãy tính số điều kiện $k(A)$ theo chuẩn vô cùng:

$$k_\infty(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty \tag{31}$$

Tính ma trận nghịch đảo

Xét ma trận vuông A không suy biến (tức $det(A) \neq 0$), tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}. Các phương pháp tính ma trận nghịch đảo A^{-1}:

1. Biến đổi ma trận A thành ma trận đơn vị, cùng lúc đó biến đổi ma trận đơn vị theo phép biến đổi đó, thì sẽ thu được A^{-1}.

2. Dùng ma trận phần phụ đại số:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^T \qquad (32)$$

   với $a_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$, D_{ij} là định thức của ma trận con bỏ đi hàng i, cột j của A.

Tính ma trận nghịch đảo

Cách khác: tách thành các hệ phương trình tuyến tính, nhằm đạt:

$$A \cdot A^{-1} = I \tag{33}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{34}$$

Ta giải từng hệ phương trình:

$$A \cdot \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1(\text{j-th row}) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$