Lời giải mẫu. Sinh viên hiểu phương pháp nếu tính các bước khác mà ra kết quả đúng thì cũng được điểm.

31/10/2014

Đức

Kiểm tra giữa kỳ
Phương pháp tính kỹ thuật HK1 2014-2015

13:30 - 14:20 ngày thứ ba 21/10/2014

Họ và tên:	MSSV:
Điểm:	

Yêu cầu

- Sinh viên làm bài ngay trên đề thi này, cuối giờ nộp lại.
- Đây là bài làm cá nhân, không trao đổi với người khác. Được sử dụng tài liệu.

1 Bài 1 (1 điểm)

Biết số A có giá trị gần đúng là $a = 0.5090$ với sai số tương đối là $\delta_a = 0.83\%$. Ta làm tròn a thành $a^* = 0.51$. Tính sai số tuyệt đối của a^* khi dùng nó làm số gần đúng cho A.

$\Delta_{a^*} = \Delta_a + |a - a^*| = a.\delta_a + |a - a^*|$

$= 0,5090 . 0,83\% + |0,5090 - 0,51| = 0,004225 + 0,001 = 0,005225$

Theo cách viết số a, chữ số thứ tư sau dấu phẩy là đáng tin, nên ta viết Δ_{a^*} với 4 chữ số sau dấu phẩy $\rightarrow \Delta_{a^*} = 0,0053$ (làm tròn lên).

2 Bài 2 (1 điểm)

Cho hàm số $f = x^3 + xy + y^3$. Biết $x = 3.6991 \pm 0.0010$ và $y = 0.3958 \pm 0.0021$. Tính sai số tuyệt đối của hàm số f tại điểm (x, y) đó.

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x \Rightarrow \Delta_f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y).\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).\Delta y$

$= (3.3,6991^2 + 0,3958).0,0010 + (3.0,3958^2 + 3,6991).0,0021 = 0,050201$

Lấy 4 chữ số sau dấu phẩy (vì $\Delta_x = 0,0010$), nên ta làm tròn lên: $\Delta_f = 0,0503$.

3 Bài 3 (1 điểm)

Phương trình $f(x) = -(x-2)^2 + 2x\cos(2x)$ nhận các khoảng nào sau đây làm khoảng cách ly nghiệm:

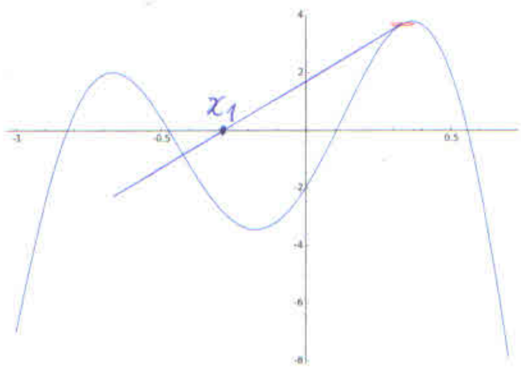
a. $[0, 1]$ b. $[1, 2]$ c. $[2, 3]$ d. $[3, 4]$

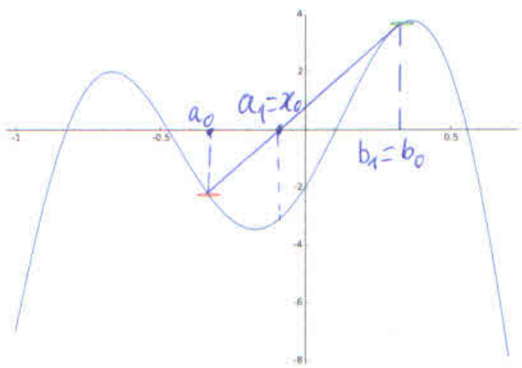
$f(0) = -4$; $f(1) \approx -1,83$; $f(2) \approx -2,61 < 0$; $f(3) \approx 4,76 > 0$; $f(4) \approx -5,1 < 0$

4 Bài 4 (1 điểm)

Vẽ hình minh họa bước thứ nhất cho các phương pháp lặp sau đây để giải phương trình phi tuyến, đánh dấu trên đồ thị các giá trị x_1, a_1, b_1 (nếu có sử dụng khoảng $[a, b]$ trong phương pháp). Sinh viên có thể vẽ tay, không cần thước.

a. Phương pháp Newton-Raphson, $x_0 = \frac{1}{3}$ b. Phương pháp dây cung, $a_0 = -\frac{1}{3}, b_0 = \frac{1}{3}$





5 Bài 5 (1 điểm)

Tìm giá trị của hệ số co của các hàm số sau:

a. $g(x) = \sqrt[4]{6x+17}$, khoảng $[0, 1]$

$g'(x) = \frac{6}{4}(6x+17)^{-\frac{3}{4}} = \frac{3}{2\sqrt[4]{(6x+17)^3}}$

Với $x \in [0,1]: 0 \leq g'(x) \leq g'(0) = \frac{3}{2\sqrt[4]{17^3}}$

$\Rightarrow |g'(x)| \leq g'(0) \approx 0,1792 < 1$

Vậy hệ số co là $q = 0,1792$.

b. $g(x) = \cos x + \pi + 1$, khoảng $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$

$g'(x) = -\sin x$, hàm số này biến đổi từ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ đến $\frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}]$

$\Rightarrow |g'(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$.

Vậy hệ số co là $q = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$.

6 Bài 6 (1 điểm)

Sử dụng phương pháp khử Gauss để giải hệ phương trình sau:

$$\begin{aligned} 2x - 2y - z &= -2 \\ 4x + y - 2z &= 1 \\ -2x + y - z &= -3 \end{aligned}$$

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -2 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[h_3 \to h_3 + h_1]{h_2 \to h_2 - 2h_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{h_3 \to h_3 + \frac{h_2}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow z = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{5}{5} = 1$$

$$x = \frac{-2 + 2y + z}{2} = 1.$$

7 Bài 7 (1 điểm)

Tính chuẩn một $\|A\|_1$ và chuẩn vô cùng $\|A\|_\infty$ của ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -8 \\ 3 & -3 & 8 \\ 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Chuẩn 1:

$$\left.\begin{aligned} j=1:&\ \sum_{i=1}^{3}|a_{i1}| = 13 \\ j=2:&\ \sum_{i=1}^{3}|a_{i2}| = 12 \\ j=3:&\ \sum_{i=1}^{3}|a_{i3}| = 23 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{3}|a_{ij}| = 23,$$

Chuẩn vô cùng:

$$\left.\begin{aligned} i=1:&\ \sum_{j=1}^{3}|a_{1j}| = 13 \\ i=2:&\ \sum_{j=1}^{3}|a_{2j}| = 14 \\ i=3:&\ \sum_{j=1}^{3}|a_{3j}| = 21 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^{3}|a_{ij}| = 21.$$

8 Bài 8 (1 điểm)

Cho hệ phương trình:

$$\begin{aligned} 19x_1 - 2x_2 &= 4 \\ -2x_1 + 9x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Tính ma trận lặp T_g theo phương pháp lặp Gauss-Seidel.

$D = \begin{bmatrix} 19 & 0 \\ 0 & 19 \end{bmatrix}$; $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D - L = \begin{bmatrix} 19 & 0 \\ -2 & 19 \end{bmatrix}$. Ta tính $(D-L)^{-1}$:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 19 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 19 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{h_2 \to h_2 + \frac{2}{19}h_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 19 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 19 & \frac{2}{19} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[h_2/19]{h_1/19} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/19 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{+2}{19^2} & \frac{1}{19} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow (D-L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/19 & 0 \\ \frac{2}{19^2} & \frac{1}{19} \end{bmatrix} \Rightarrow T_g = (D-L)^{-1}U = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{19} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & \frac{4}{19} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{19} \\ 0 & \frac{4}{19^2} \end{bmatrix}.$$

9 Bài 9 (1 điểm)

Cho hệ phương trình:

$$\begin{aligned} 14x_1 - 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 17x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Tính ma trận lặp T_j theo phương pháp lặp Jacobi.

$D = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 17 \end{bmatrix}$; $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$; $U = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix}$

$$T_j = D^{-1}(L+U) = \begin{bmatrix} \frac{1}{14} & 0 \\ 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/7 \\ 2/17 & 0 \end{bmatrix}.$$

10 Bài 10 (2 điểm)

Thiết lập các phương trình để giải quyết các bài toán thực tế sau đây.

10.1 Lập phương trình phi tuyến

Công ty điện lực Cần Thơ hiện đang quản lý 400 000 đồng hồ điện, trong đó có 50 000 đồng hồ điện tử ("công tơ điện tử"), còn lại là đồng hồ cơ. Tỉ lệ suy giảm của số lượng đồng hồ điện là e^{-ct}, với t là thời gian (tính theo tháng), c là hệ số hư hao (hằng số), tức là sau thời gian t thì từ N cái ban đầu sẽ còn lại Ne^{-ct} cái; đối với đồng hồ điện tử thì $c = 0.002$, và $c = 0.001$ đối với đồng hồ cơ. Công ty này có kế hoạch chuyển đổi dần các đồng hồ cơ thành đồng hồ điện tử. Giả sử chi phí thay mới một đồng hồ điện tử là 5 triệu đồng (giống nhau cho cả hai trường hợp: thay cho đồng hồ cơ, hoặc thay cho đồng hồ điện tử). Mỗi tháng công ty này đầu tư 5 tỉ đồng để bổ sung đồng hồ điện tử mới, theo cách sau: nếu có đồng hồ bị hỏng (cơ, hoặc điện tử) thì ưu tiên thay mới, còn lại thì thay thế dần các đồng hồ cơ bằng đồng hồ điện tử.

Hãy lập phương trình thể hiện số lượng đồng hồ điện tử $f(t)$ và đồng hồ cơ $g(t)$ theo số tháng t, lấy $t = 0$ ở thời điểm hiện tại.

- Ban đầu có 50000 đồng hồ điện tử, 350000 đồng hồ cơ. Mỗi tháng đầu tư 1000 đhđt mới.
- Số đồng hồ cơ ban đầu còn lại sau tháng thứ t: $350000e^{-0,001t}$
- Số đồng hồ cơ ban đầu bị hỏng ở tháng thứ t: $350000(e^{-0,001(t-1)} - e^{-0,001t}) = h_c(t)$
Số đồng hồ điện tử ban đầu bị hỏng ở tháng t: $50000(e^{-0,002(t-1)} - e^{-0,002t}) = h_{đt}(t)$
- Ở tháng t, số đồng hồ cơ chưa hỏng mà được thay: $r_c(t) = 1000 - h_c(t) - h_{đt}(t)$
- Số đồng hồ cơ còn lại sau tháng thứ t: $N_c(t) = 350000e^{-0,001t} - \sum_{k=1}^{t} r_c(k)$.
- Số đồng hồ điện tử có sau tháng thứ t: $N_{đt}(t) = 400000 - N_c(t)$.

(*) Bài này để chính xác thì cần tính thêm số đồng hồ điện tử mới (thay sau $t=0$) mà bị hỏng, tuy nhiên sẽ phức tạp. Lời giải đơn giản hoá ở đây là tạm được.

Tính số lượng đồng hồ điện tử và đồng hồ cơ ở thời điểm 120 tháng.

Số đồng hồ cơ: $N_c(120) = 240668$ cái

Số đồng hồ điện tử: $N_{đt}(120) = 159332$ cái.

10.2 Lập hệ phương trình tuyến tính

Giải thi đấu cờ vua *Millionaire Chess* vừa diễn ra tại Las Vegas tháng 10/2014, kết quả các kỳ thủ được giải thưởng như sau:

Tên kỳ thủ	Hạng	Giá trị giải thưởng
SO Wesley	1	x_1
ROBSON Ray	2	x_2
YU Yangyi	3	x_3
ZHOU Jianchao	4	x_4
6 kỳ thủ	5-10	x_5
12 kỳ thủ	11-22	x_6
LE Quang Liem	23	x_7

Lập hệ phương trình tuyến tính để tính giải thưởng các kỳ thủ trên nhận được, với các thông tin sau đây:

1. SO Wesley được giải thưởng gấp đôi người hạng nhì, gấp bốn người hạng ba.
2. YU Yangyi có giải thưởng bằng tổng của ZHOU Jianchao, hai kỳ thủ nhóm 5-10, 2 kỳ thủ nhóm 11-22, và LE Quang Liem cộng lại.
3. Kỳ thủ hạng 4 nhận giải thưởng bằng một phần ba tổng giải thưởng của cả hai nhóm tiếp sau gộp lại.
4. Mỗi kỳ thủ trong nhóm 5-10 nhận được gấp rưỡi tiền thưởng so với mỗi kỳ thủ ở nhóm 11-22.
5. LE Quang Liem nhận được một nửa giải thưởng so với người xếp ngay trên mình.
6. Mỗi kỳ thủ cần đóng phí tham dự là 1000 USD, kết quả là LE Quang Liem hòa vốn.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 &= 0\\
x_2 - 2x_3 &= 0\\
x_3 - x_4 - 2x_5 - 2x_6 - x_7 &= 0\\
x_4 - 2x_5 - 4x_6 &= 0\\
x_5 - 1{,}5x_6 &= 0\\
x_6 - 2x_7 &= 0\\
x_7 &= 1000 \text{ (USD)}
\end{aligned}
$$

Ma trận A của hệ phương trình này có dạng gì?

A là ma trận tam giác trên.

Giải bài toán trên để tìm $x_i, i = 1, \cdots, 7$.

$x_7 = 1000$; $x_6 = 2x_7 = 2000$; $x_5 = 1{,}5x_6 = 3000$

$x_4 = 2x_5 + 4x_6 = 14000$; $x_3 = x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 = 25000$

$x_2 = 2x_3 = 50000$; $x_1 = 2x_2 = 100000$. (đơn vị chung: USD)

Chúc các bạn làm bài tốt, tập trung, nghiêm túc. Vui lòng không làm quá dòng này.