Probabilidades - Primer cuatrimestre 2021

Práctica 1

Vectores aleatorios

1. **(Para resolver en clase)** De una urna que contiene 3 bolillas numeradas 1, 2 y 3, se extraen sin reposición y sucesivamente 2 bolillas. Sea X el número de la primer bolilla e Y el de la segunda.

   a) Hallar $p_{X,Y}(x, y)$, $p_X(x)$ y $p_Y(y)$.

   b) Calcular $\mathbf{P}(X < Y)$.

   c) ¿Son X e Y independientes?.

2. Se arrojan dos dados piramidales equilibrados con los números $1, 2, 3, 4$ en sus caras. Sea X el mayor de los resultados observados e Y la suma. Hallar la distribución conjunta de X e Y y sus distribuciones marginales. ¿X e Y son independientes?

3. **(Para resolver en clase)** Se elige al azar un par (X, Y) en el círculo de centro $(0, 0)$ y radio R

   a) Hallar la densidad conjunta del vector (X, Y).

   b) Hallar la probabilidad de que la distancia del punto al centro del círculo sea menor que $R/2$.

   c) Hallar las funciones de densidad marginales $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

   d) ¿Son X e Y independientes?.

4. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme sobre el trapecio de vértices $(-6, 0), (-3, 4)$, $(3, 4)$ y $(6, 0)$.

   a) Hallar la densidad conjunta de (X, Y) y las funciones de densidad marginales.

   b) ¿Son X e Y independientes?. Justificar.

5. **(Para resolver en clase)** Se tiene una caja con 3 tipos de cartucho: 4 de tipo A, 6 de tipo T y 5 de tipo N. Se extraen con reposición 3 cartuchos. Sean X_1 la cantidad de cartuchos de tipo A, X_2 la cantidad de cartuchos de tipo T y X_3 la cantidad de cartuchos tipo N en la muestra. Hallar la función de probabilidad conjunta del vector aleatorio (X_1, X_2, X_3).

6. Un laboratorio posee 14 ratas de la especie **A** y 16 de la especie **B** para realizar experimentación. La probabilidad de que cualquiera de ellas muera en un experimento es 0.1 y se considera que las muertes se producen en forma independiente.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que mueran más de 4 ratas?.

    b) Si murieron 2 ratas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas hayan sido de la especie **A**?.

7. El número de reclamos por errores en la facturación que recibe diariamente una oficina de una empresa de telefonía celular es una v.a. con distribución $\mathcal{P}(5)$, mientras que el número de reclamos de otro tipo es una v.a. con distribución $\mathcal{P}(15)$. Suponiendo independencia entre ambos tipos de reclamos,

    a) Hallar la probabilidad de que en una día dado haya por lo menos 23 reclamos.

    b) Si un día dado hubo 18 reclamos, ¿cuál es la probabilidad de que 8 de ellos hayan sido por errores en la facturación?.

8. El 5 % de una población fuma cigarrillos negros, el 35 % fuma cigarrillos rubios y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas y se definen: Y_1 = número de personas que no fuman, Y_2 = número de personas que fuman cigarrillos rubios e Y_3 = número de personas que fuman cigarrillos negros.

    a) Hallar la distribución de (Y_1, Y_2, Y_3).

    b) Hallar la distribución de $(Y_1, Y_2 + Y_3)$.

    c) Hallar la distribución de $(Y_2 + Y_3)$.

9. Sea (X, Y) un v.a. con densidad:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{1}{2\,x^2}\mathbf{I}\{|x| < 1, \quad 0 < y < x^2\}$$

    a) Hallar $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

    b) ¿Son X e Y independientes?. Justificar.

    c) Probar que $U = \frac{Y}{X^2}$ tiene distribución $U(0, 1)$.

10. **(Para resolver en clase)** Para ir todos los días al trabajo, Dana se dirige en auto hasta la estación de tren y luego sigue su camino en tren. Dana sale de su casa en un intervalo distribuido uniformemente entre las 7:30 y las 7:50. El tiempo de viaje hasta la estación es también uniforme entre 20 y 40 minutos, e independiente de la hora en que sale de su casa. Hay un tren que sale a las 8:12 y otro que sale a las 8:26.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que Dana pierda ambos trenes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga que esperar más de 8 minutos en la estación hasta que sale el tren?

11. **(Para entregar)** Kira y Suki quedaron en encontrarse en un bar a las 18:00. El horario de llegada de Kira, K, es una variable aleatoria con distribución uniforme entre las 18:00 y las 18:15. Kira espera 15 min. a Suki y si no llega se va. El horario de llegada de Suki, S, es independiente del de Kira y se distribuye uniformemente entre las 18:05 y 18:20. Suki es más impaciente que Kira y espera como máximo 5 min. antes de irse. Calcular la probabilidad de que se encuentren.

12. Sean X e Y dos variables aleatorias con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} e^{-\frac{2}{3}\left(x^2 - xy + y^2\right)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

a) Hallar las densidades marginales de X y de Y.

b) ¿X e Y son variables aleatorias independientes?

Simulación

1. Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar. Hallar una función h, tal que la variable aleatoria $h(Z)$ tenga distribución Binomial de parámetros $n = 2$ y $p = 1/2$ y generar una muestra aleatoria de la variable $Y = h(X)$ a partir una muestra aleatoria de tamaño 1000 de Z.

2. **(Para resolver en clase)** El tiempo en años hasta que ocurre la primera falla es una heladera es una variable aleatoria con función de distribución

$$F_T(t) = (1 - e^{-t^2/27})\mathbf{I}\{0 \leq t\}$$

Usando una muestra aleatoria de tamaño 1000 de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0,1)$, simular los valores del tiempo de funcionamiento de una heladera hasta que ocurre la primera falla.

3. Una catacumba se mantiene iluminada por una antorcha cuya duración (en horas) es una variable aleatoria con función de densidad $f(t) = \frac{2}{t^2}\mathbf{1}\{t > 2\}$. La antorcha se enciende a las 0:00 del 1 de enero. A partir de una muestra aleatoria de tamaño 1000 de una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0,1)$ simular el tiempo durante el cual la catacumba se mantendrá iluminada.

Ejercicios complementarios

1. a) Demostrar que la función

$$F(x,y) = (1 - e^{-x-y})\mathbf{I}\{x \geq 0, y \geq 0\}$$

   no es función de distribución de un vector aleatorio.

   b) Demostrar que la función

$$F(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})\mathbf{I}\{x \geq 0, y \geq 0\}$$

   si lo es.

2. Generar, a partir de una muestra aleatoria de variables aleatorias con distribución $\mathcal{U}(0,1)$, una muestra aleatoria de variables con distribución

   a) $\mathcal{U}(3,8)$.

   b) $\mathcal{E}(10)$.

   c) con la siguiente función de probabilidad: $p_X(x) = 1/100, x = 1, \ldots, 100$.

   d) $\mathcal{B}(1, 1/3)$.

   e) $\mathcal{P}(5)$