Probabilidades - Primer cuatrimestre 2021

Práctica 2

Momentos

1. **(Para resolver en clase)** Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, de manera que $\mathbf{E}[X_i] = \mu, \mathbf{var}(X_i) = \sigma^2, i = \{1, \ldots, n\}$. Sea $\bar{X} = \sum_1^n X_i/n$, hallar $\mathbf{E}[\bar{X}]$ y $\mathbf{var}(\bar{X})$.

2. De una urna que contiene D bolillas blancas y $N-D$ bolillas negras se extraen n bolillas sin reposición. Sea X la cantidad de bolillas blancas extraídas, y para $i = 1, ..., n$,

$$X_i = \mathbf{I}\{\text{la i–ésima bolilla extraída es blanca}\}$$

   a) Probar que

$$\mathbf{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \frac{D(D-1)}{N(N-1)} \qquad \text{para } i \neq j,\ N \geq 2, D \geq 2$$

$$\mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{D}{N}$$

   b) Hallar $\mathbf{E}(X_i)$ y $\mathbf{var}(X_i)$.

   c) Calcular $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$, para $i \neq j$. Interpretar el resultado.

   d) Probar que

$$\mathbf{var}(X) = \frac{(N-n)nD(N-D)}{(N-1)N^2}$$

   Sugerencia: Usar que $X = \sum_{i=1}^n X_i$.

3. Se distribuyen al azar n bolillas en m urnas. Sean X el número de urnas vacías, Y el número de urnas que contienen exactamente una bolilla y Z el número de urnas que contienen dos o más bolillas.

   a) Hallar $\mathbf{E}(X)$

   Sugerencia: Definir

$$X_i = \mathbf{I}\{\text{la urna i esta vacía}\}$$

   Verificar que $X = \sum_{i=1}^m X_i$.

   b) Hallar $\mathbf{E}(Y)$ y $\mathbf{E}(Z)$.

c) En una central telefónica se tienen disponibles m líneas. Cada persona de un conjunto de n usuarios elige una línea al azar. Hallar la esperanza del número de líneas que no son usadas.

4. **(Para resolver en clase)** Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución uniforme en el triángulo de vértices (0,0), (0,2), (2,0)

   a) Calcular $\mathbf{var}(X+Y)$

   b) Calcular $\mathbf{cov}(3X+2, 4Y)$

   c) Calcular $\mathbf{E}[W]$, donde $W = X\mathbf{1}\{X \leq 1\} + (X+Y)\mathbf{1}\{X > 1\}$

5. a) Probar que $\mathbf{cov}(a+bX, c+dY) = b\,d\,\mathbf{cov}(X, Y)$

   b) Probar que $\mathbf{cov}(X+Y, Z) = \mathbf{cov}(X, Z) + \mathbf{cov}(Y, Z)$

   c) Probar que $\mathbf{cov}(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{j=1}^{m} Y_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \mathbf{cov}(X_i, Y_j)$

6. Sokka y Katara hacen una prueba para comparar sus reflejos. Cada uno tiene un pulsador y, cuando una luz se enciende, el que presiona primero gana el duelo. Los tiempos de reacción de Sokka y Katara (en segundos) son variables aleatorias i.i.d. (independientes e idénticamente distribuidas) $\mathcal{U}(0, 1)$. Sean las variables W: “tiempo de reacción del ganador? y L: “tiempo de reacción del perdedor?.

   a) Hallar la esperanza y varianza de W.

   b) Hallar el tiempo medio de reacción del ganador si se sabe que el perdedor reaccionó en más de $1/2$ segundo.

   c) Hallar la covarianza entre W y L.

7. Sea (X, Y) un vector aleatorio con distribución $\mathcal{N}(0, \Sigma)$, Σ simétrica y definida positiva. Probar que

$$\mathbf{cov}(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X e Y \text{ son independientes}$$

8. Si $Z \sim N(0, 1)$ e $Y = a + bZ + cZ^2$, probar que

$$\rho(Y, Z) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}}$$

9. a) Sea $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, con $\alpha > 1$ y $\lambda > 0$, probar que

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\lambda}{\alpha - 1}$$

b) Sea U una v.a. con distribución t de Student con n grados de libertad ($n > 2$), probar que

$$\mathbf{var}(U) = \frac{n}{n-2}$$

Sugerencia: Recordar que U se define como cociente entre una variable aleatoria $N(0,1)$ y una función de una variable aleatoria χ^2 independiente de la normal.

Para trabajar con R

1. **(Para resolver en clase)** Generaremos muestras de una distribución dada, de tamaño cada vez mayor, calcularemos los promedios y veremos que estos promedios muestrales se acercan al valor verdadero de la media.

   a) Generar una muestra de tamaño $N = 100$ de una distribución $\mathcal{U}(0,1)$ y para cada k entre 1 y 100 calcular el promedio de las primeras k observaciones. Realizar un scatterplot de k vs. los promedios obtenidos. Incluir una linea horizontal en el valor correspondiente a la verdadera media μ.

   b) Repetir *a* comenzando con otra semilla y superponer el nuevo gráfico con un color diferente.

   c) Repetir *a* y *b* pero ahora con una distribución $\mathcal{N}(3,4)$.

   d) Generar una muestra de tamaño $N = 100$ de una distribución *Cauchy*. y para cada k entre 1 y 100 calcular el promedio de las primeras k observaciones. Realizar un scatterplot de k vs. los promedios obtenidos. ¿Qué observa?

   e) Repetir *d* comenzando con otra semilla y superponer el nuevo gráfico con un color diferente.

2. En un famoso casino, la ruleta está formada por 18 números negros, 18 rojos y 2 verdes. Un jugador tiene un capital de $100 y apuesta $1 al rojo cada vez que juega. Si cuando apuesta al rojo sale rojo, entonces recupera su inversión duplicada. Si pierde no recupera nada.

   a) Simule una realización de juego de ruleta y a partir de ella calcule el capital del jugador al finalizar.

   b) Crear una función que a partir de simulaciones calcule la cantidad de veces que puede jugar el jugador hasta quedarse sin dinero.

   c) Simule 1000 veces el experimento del ítem *b* y calcule el promedio de los resultados.

3. Un coleccionista quiere llenar un álbum de 500 figuritas comprando sobres que contienen 5 figuritas distintas. Para tal motivo compra sobres hasta que logra completar el álbum y las figuritas repetidas las descarta.

   a) Simular el experimento que consiste en contar la cantidad de sobres que necesita comprar el coleccionista para llenar el álbum.

   b) Repetir el ítem *a* 1000 veces y promediar los resultados. (En estadística verá porqué este resultado es una buena estimación de la esperanza de la cantidad de sobres necesarios)

   c) Si cada sobre cuesta $15, mediante simulaciones calcular en promedio cuanta plata se necesita para llenar el álbum.

Ejercicios complementarios

1. Sea X una v.a. simétrica respecto de μ, tal que $\mathbf{E}(|X|) < \infty$. Demostrar que $\mathbf{E}(X) = \mu$.

   Sugerencia: Hacerlo en primer lugar para el caso $\mu = 0$, demostrando que, en este caso, las v.a. X y $-X$ tienen igual distribución. Luego, extenderlo al caso general.

2. Probar que, si X es una v.a. no negativa, entonces

$$\mathbf{E}(X^n) = \int_0^\infty n\, x^{n-1}\,(1 - F(x))dx$$

3. Sean X e Y v.a. tales que $X \sim \mathcal{U}(-2\sqrt{15}, 2\sqrt{15})$ e $Y \sim \Gamma(7, 3)$.

   a) Probar que

$$\mathbf{E}\left(\frac{X}{Y^3}\right) \leq \frac{9}{2}$$

   b) ¿Qué pasa si X e Y son independientes?

4. Sea X una v.a. tal que $E(X^2) < \infty$

   a) Probar que

$$\mathbf{E}[(X - c)^2] < \infty \qquad \forall c \in R$$

$$\mathbf{var}(X) \leq E[(X - c)^2] \qquad \forall c \in R$$

b) Probar que, si $\alpha \in R$, entonces

$$\mathbf{var}(X) = \mathbf{E}[(X-\alpha)^2] - [\mathbf{E}(X) - \alpha]^2$$

5. Se arroja repetidas veces una moneda equilibrada. Llamamos N a la variable aleatoria que cuenta la cantidad de tiradas hasta que se obtiene por primera vez cara en dos tiradas consecutivas. Armar una función en R que simule n repeticiones del experimento. Utilizar la función para realizar 1000 simulaciones y promediar los resultados. Comparar con la esperanza de N.