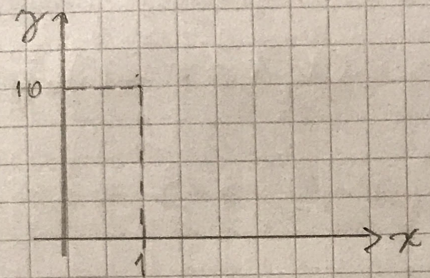
Federico Brusa | HOJA N° 1/4
Examen Probabilidades | FECHA 22/05/21

Ejercicio 1

X: cantidad de componentes de A (en gr)
Y: cantidad de componentes de B (en gr)

$$f_{XY}(x,y) = \frac{xy}{25}\, I\{0<x<1,\ 0<y<10\}$$



$$f_{XY}(x,y) = 2x\, I\{0<x<1\} \cdot \frac{y}{50}\, I\{0<y<10\}$$

$$f_X(x) = 2x\, I\{0<x<1\} \qquad \int_0^1 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^1 = 1 \ ✓$$

$$f_Y(y) = \frac{y}{50}\, I\{0<y<10\} \qquad \int_0^{10} \frac{y}{50}\,dy = \left[\frac{y^2}{100}\right]_0^{10} = 1 \ ✓$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y) \Rightarrow X \text{ e } Y \text{ son indep}$$

$$f_{X|Y}(x) = f_X(x) = 2x$$

$$P(X>0{,}2 \mid Y>5{,}4) = P(X>0{,}2) = \int_{0,2}^{1} 2x\,dx = \left[x^2\right]_{0,2}^{1} = \frac{24}{25}$$

$$\boxed{P(X>0{,}2 \mid Y>5{,}4) = \frac{24}{25} = 0{,}96}$$

Federico Brusa | HOJA Nº 2/4
Examen Probabilidades | FECHA 22/05/21

Ejercicio 2

X_1, X_2, X_3 VA iid $\sim Poi(2)$

$Y_1 = X_1 + X_2$

$Y_2 = X_2 + X_3$

Y_1, Y_2 por ser sumas de VA con distribución de Poisson independientes, tienen distribución de Poisson

$Y_1, Y_2 \sim Poi(2+2) = Poi(4)$

$Cov(Y_1, Y_2) = Cov(X_1 + X_2, X_2 + X_3) = Cov(X_1, X_2) + Cov(X_1, X_3) +$
$+ Cov(X_2, X_2) + Cov(X_2, X_3)$

Como X_1, X_2, X_3 independientes

$Cov(X_i, X_j) = 0$

$Cov(X_2, X_2) = Var(X_2) = 2$

$Cov(Y_1, Y_2) = Var(X_2) = 2$

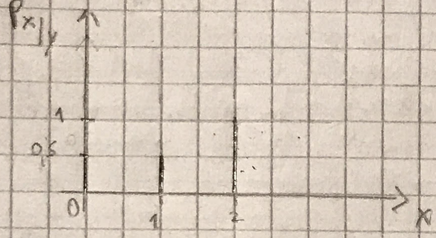
$\boxed{Cov(Y_1, Y_2) = 2}$

Federico Brusa | HOJA Nº 3/4
Examen probabilidades | FECHA 22/05/21

Ejercicio 3

$Y \sim \mathcal{U}(0,2)$

$X|_{Y=y}$ / $p_{X|_Y}(x) = \frac{y}{4} I\{x=0\} + \frac{y}{4} I\{y=1\} + \left(1-\frac{y}{2}\right) I\{x=2\}$



$\varphi(y) = E\left[X|_{Y=y}\right] = \sum_x x \cdot p_{X|_Y}(x) = 0 \cdot \frac{y}{4} + 1 \cdot \frac{y}{4} + 2\left(1-\frac{y}{2}\right) = 2 - \frac{3}{4}y$

$\boxed{\varphi(y) = 2 - 3/4\, y}$

$E(X) = E\left[E\left(X|_Y\right)\right] = E\left[2 - \frac{3}{4} \cdot Y\right] = 2 - \frac{3}{4} E(Y)$

$E(Y) = 1$ por $\mathcal{U}(0,2)$

$\boxed{E(X) = 1{,}25}$

Ejercicio 4

$\{X_n\}_{n\geq 1}$ V.A. iid, $X_i \sim G(p)$

$$Y_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

$$Z_n = \frac{1}{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- X_i independientes $\Rightarrow cov(X_i, X_j) = 0$ con $i \neq j$
- $E(X_i) = \mu_i = \frac{1}{p}$
- $Var(X_i) = \sigma_i^2 = \frac{(1-p)}{p^2}$
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1-p}{p^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\cancel{2}}} \frac{\cancel{n}(1-p)}{p} = 0$

Por ley débil de los grandes números:

$$Z_n \xrightarrow{P} \mu_i = \frac{1}{p}$$

Por lo tanto

$$Y_n = \frac{1}{Z_n}$$

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{P} \frac{1}{\mu_i} = p}$$

Número de hojas: 4

Federico Brusa