Probabilidades - Primer cuatrimestre 2021

Práctica 4

Variables aleatorias condicionadas y esperanza condicional

1. **(Para resolver en clase)** Un almacén tiene en su deposito 35 productos de cierto tipo, 15 de los cuales fueron proporcionados por el proveedor 1, 7 por el proveedor 2 y 13 por el proveedor 3. Se van a seleccionar al azar y sin reposición 2 de los productos del depósito. Sean las variables aleatorias
   X: Cantidad de productos seleccionados que provienen del proveedor 1
   Y: Cantidad de productos seleccionados que provienen del proveedor 2

   a) ¿Son X e Y independientes?

   b) Calcular la función de probabilidad condicional $p_{Y|X=1}(y)$. ¿Qué distribución conocida tiene?

   c) Calcular $\mathbf{P}(Y > 0|X = 1)$

2. Se tira una moneda equilibrada 3 veces, siendo X el número de caras. Si $X = a$ se extraen sin reposición a+1 bolitas de una urna que contiene 4 bolitas blancas y 1 roja. Sea Y el número de bolitas rojas extraídas.

   a) Hallar la distribución de Y dado $X = a$

   b) Hallar la función de regresión $\varphi(a) = \mathbf{E}(Y|X = a)$

3. **(Para resolver en clase)** Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 2e^{-y/x} & \text{si} \quad \{0 < y, 0 < x < 1\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) ¿Son X e Y independientes?

   b) Hallar $f_{Y|X=1/3}(x)$

   c) Calcular $\mathbf{P}(Y < 1/5|X = 1/3)$

4. La cantidad de querosene, en miles de litros, en un tanque al principio del día es una variable aleatoria X, de la cual una cantidad aleatoria Y se vende durante el día. Suponga que el tanque no se rellena durante el día, de tal forma que $Y < X$, y que la función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x, y) = 2\mathbf{I}\{0 < y < x < 1\}$$

a) Hallar la distribución de las variables aleatorias $Y|X = x$ y $X|Y = y$.

b) ¿Qué puede decirse respecto a la independencia de X e Y ?

c) Calcular $\mathbf{P}(1/4 < Y < 1/2|X = 0{,}4)$

d) Hallar y graficar la función de regresión $\varphi(x) = \mathbf{E}(Y|X = x)$ y la función $\tau(x) = \mathbf{var}(Y|X = x)$

5. Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ e $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, probar que la distribución de X condicionada a $X + Y = s$ es hipergeométrica, y especificar cuáles son sus parámetros.

6. Sean X e Y variables aleatorias independientes tales que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ e $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, probar que la distribución de X condicionada a $X + Y = n$ es binomial, y especificar cuáles son sus parámetros.

7. Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(\lambda)$ y sea Y una variable aleatoria cuya distribución condicionada a $X = x$ tiene distribución $\mathcal{B}(x, p)$. Probar que la distribución de Y es $\mathcal{P}(\lambda p)$.

8. Sea $(X_1, ..., X_k) \sim \mathcal{M}(n, p_1, ..., p_k)$, $n > 2$,

   a) Hallar $\mathbf{E}(X_i)$, $\mathbf{var}(X_i)$ y $\mathbf{cov}(X_i, X_j)$.

   b) Hallar el mejor predictor lineal de X_1, basado en $X_2 + X_3$ y su error cuadrático medio (ECM).

9. Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio 4

   a) Hallar la esperanza condicional de Y dado X

   b) Hallar la esperanza de Y

10. Utilizando los resultados obtenidos en el ejercicio 4, hallar la esperanza condicional $\mathbf{E}[Y|X]$

11. **(Para resolver en clase)** Sean X e Y dos variables aleatorias cuya función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{e^{-2x}}{x}\mathbf{I}\{0 < y < 2x\}$$

Calcular la covarianza entre X e Y

12. Sean X e Y v.a. con densidad conjunta:

$$f_{XY}(x, y) = \frac{e^{-x/y}\, e^{-y}}{y}\mathbf{I}\{x > 0\}\,\mathbf{I}\{y > 0\}$$

a) Hallar $E(X|Y=y)$ y $E(X^2|Y=y)$.

b) Hallar la esperanza y la varianza condicional de X dada Y.

c) Hallar la varianza de X

13. Sea (X,Y) un vector aleatorio con densidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = 6\,(x-y)\,I_A(x,y)$$

siendo $A = \{(x,y)/0 < y \leq x < 1\}$

a) Hallar el mejor predictor constante de Y y su ECM.

b) Hallar el mejor predictor lineal de Y basado en X y su ECM.

c) Hallar el mejor predictor de Y basado en X y su ECM.

14. **(Para entregar)** Se arroja un dado 36 veces. Sean X e Y las cantidades de resultados pares e impares respectivamente. Hallar la esperanza condicional $\mathbf{E}[Y|X]$ y el valor de $\mathbf{cov}(X,Y)$.

Mezcla de variables aleatorias

1. Un receptor recibe una señal de amplitud aleatoria $X = S + N$, donde S es una señal equiprobable sobre el conjunto $\{0{,}1, 0{,}2, 0{,}3\}$ y N es un ruido con distribución normal estándar independiente de S.

a) Calcular la probabilidad de que X sea mayor a 0.87

b) Hallar la función de densidad de X

Ejercicios complementarios

1. El tiempo de atención (en minutos) en la caja de un banco es una variable aleatoria con distribución exponencial de media 2. Cuando Camila llega al banco puede encontrar 0 o 1 persona en la caja, con probabilidad 1/2 para cada caso. Hallar la función de distribución del tiempo T que debe esperar Camila para ser atendida desde que llega al banco.

2. a) Sean X e Y variables aleatorias discretas o contínuas tales que la distribución condicional de Y dada $X = x$ es $F(y)$, es decir no depende de x. Probar que entonces X e Y son independientes y $F_Y(y) = F(y)$.

b) Usando a), hallar la distribución de $Y = XU$ cuando $X \sim \chi^2(n)$ y la distribución condicional de U dada $X = x$ es $\Gamma(n, \lambda x)$.

3. Sea U una variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}(0,1)$ y sea X una variable aleatoria tal que la distribución de X condicional a $U = u$ es Binomial de parámetros n y p.

   a) Hallar la función de probabilidad de X.

   b) Hallar la función de distribución de U dada $X = x$.

4. Sea $Z = Y - g(X)$, donde $g(X)$ es el mejor predictor lineal de Y basado en X, probar que $cov(X, Z) = 0$.