

Esercizi 10: Regressione Lineare

Esercizio 1. Si vuole studiare la relazione che intercorre tra la temperatura e il tempo (in minuti) di sopravvivenza di certi micro-organismi. Si sono rilevati i seguenti dati:

Temperatura	Tempo di sopravvivenza
20	10
24	12
28	18
30	24
32	22
36	20

- Calcolare il coefficiente di correlazione r e commentare il risultato.
- Determinare l'equazione della retta dei minimi quadrati.
- Determinare la temperatura per cui un micro-organismo sopravvive per 15 minuti.

Soluzione.

- a) Calcoliamo le medie dei valori di X e Y :

$$\bar{x} = \frac{20 + 24 + 28 + 30 + 32 + 36}{6} = \frac{170}{6} = 28,3333^\circ C$$

e

$$\bar{y} = \frac{10 + 12 + 18 + 24 + 22 + 20}{6} = \frac{106}{6} = 17,6667 \text{ min.}$$

Per calcolare il coefficiente di correlazione e in seguito l'equazione della retta dei minimi quadrati è utile compilare la seguente tabella.

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$x_i \cdot y_i$
20	-8,33	69,44	10	-7,67	58,83	200
24	-4,33	18,75	12	-5,67	32,15	288
28	-0,33	0,11	18	0,33	0,11	504
30	1,67	2,79	24	6,33	40,07	720
32	3,67	13,45	22	4,33	18,75	704
36	7,67	58,83	20	2,33	5,43	720
TOT.		163,37			155,34	3136

Dunque

$$r = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i\right) - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} =$$

$$= \frac{3136 - 6 \cdot 28,3333 \cdot 17,6667}{\sqrt{163,37 \cdot 155,34}} \simeq 0,8228$$

la retta è un buon modello, quindi ha senso calcolare l'equazione della retta dei minimi quadrati.

- b) Determiniamo ora l'equazione della retta dei minimi quadrati $y = mx + q$, dove

$$m = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i\right) - n\bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} =$$

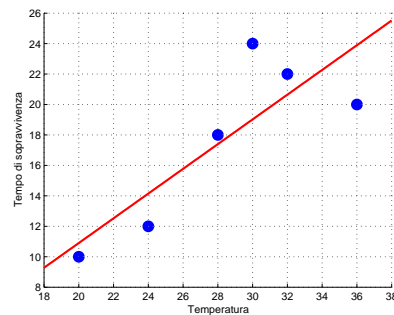
$$= \frac{3136 - 6 \cdot 28,3333 \cdot 17,6667}{163,37} \simeq 0,812$$

e

$$q = \bar{y} - m\bar{x} = 17,6667 - 0,812 \cdot 28,3333 \simeq -5,34$$

dunque l'equazione della retta dei minimi quadrati è

$$y = 0,812x - 5,34.$$



- c) Poniamo $y = 15$ min, allora la temperatura per cui il micro-organismo sopravvive è data da:

$$x = \frac{y + 5,34}{0,812} = \frac{15 + 5,34}{0,812} \simeq 25^\circ C.$$

Esercizio 2. Si vuole studiare la relazione che intercorre tra il numero di anni di studio di spagnolo e il punteggio ottenuto in un test di conoscenza della lingua. Si valuta il risultato ottenuto da 10 persone scelte a caso tra i partecipanti al test.

Anni di studio	3	4	4	2	5	3	4	5	3	2
Punteggio	57	78	72	58	89	63	73	84	75	48

- Calcolare il coefficiente di correlazione r e commentare il risultato.
- Determinare l'equazione della retta dei minimi quadrati.
- Determinare che punteggio ci si aspetta di ottenere da una persona che studia spagnolo da 6 anni.

Soluzione.

- $r = 0,911$
- $y = 10,905x + 31,533$
- $y = 10,905 \cdot 6 + 31,533 = 96,963 \approx 97.$

Esercizio 3. In un gruppo di 5 adulti la somministrazione di un farmaco in dosi diverse ha determinato le seguenti diminuzioni di pressione.

Dose in mg	Diminuzione di pressione in $mmHg$
8	9
13	17
16	19
21	24
23	24

- Calcolare il coefficiente di correlazione r e commentare il risultato.
- Determinare l'equazione della retta dei minimi quadrati.

Soluzione.

- $r = 0,976$
- $y = 0,9973x + 2,4441$

Esercizio 4. Si vuole studiare la relazione che intercorre tra la velocità con cui cammina una persona e l'ossigeno consumato da essa. Si valuta il risultato ottenuto da 9 persone scelte a caso.

Velocità in Km/h	Ossigeno consumato in l/h
0	19
1	20
2	20,5
3	21,5
4	22
5	23
6	23
7	23,5
8	24

- Calcolare il coefficiente di correlazione r e commentare il risultato.
- Determinare l'equazione della retta dei minimi quadrati.
- Quanto ossigeno mi aspetto che consumi una persona che si muove alla velocità di 10 Km/h ?

Soluzione.

- $r = 0,985$
- $y = 0,62x + 19,35$
- $y = 0,62 \cdot 10 + 19,35 = 25,55\text{ l/h}$.

Esercizio 5. Si vuole studiare la relazione che intercorre tra il peso in Kg di una persona e la sua statura in cm . Si valuta il risultato ottenuto da 10 persone scelte a caso.

Peso in Kg	Statura in cm
56	161
66	165
84	186
61	162
73	172
90	191
70	181
61	164
75	179
82	184

- Calcolare il coefficiente di correlazione r e commentare il risultato.
- Determinare l'equazione della retta dei minimi quadrati.
- Un individuo di 90 Kg , alto 175 cm è da considerarsi anomalo?

Soluzione.

- $r = 0,9504$
- $y = 0,9448x + 106,66$

- c) Un individuo che pesa 90 Kg dovrebbe essere alto

$$y = 0,9448 \cdot 90 + 106,66 = 191,69\text{ cm}$$

quindi è da considerarsi anomalo. Un individuo alto 175 cm dovrebbe pesare

$$x = \frac{y - 106,66}{0,9448} = \frac{175 - 106,66}{0,9448} = 72,33\text{ Kg}.$$

Esercizio 6. In tabella sono riportati i punteggi (in centesimi) ottenuti da 10 studenti in due esami di Matematica.

Matematica I	Matematica II
51	74
68	70
97	93
55	67
95	99
74	73
20	33
91	91
74	80
80	86

- Calcolare il coefficiente di correlazione r e commentare il risultato.
- Determinare l'equazione della retta dei minimi quadrati.
- Che punteggio dovrebbe ottenere in Matematica I uno studente che ha preso 72 in Matematica II?

Soluzione.

- $r = 0,9547$
- $y = 0,7548x + 23,386$
- Uno studente che ha preso 72 in Matematica II dovrebbe prendere in Matematica I

$$x = \frac{y - 23,386}{0,7548} = \frac{72 - 23,386}{0,7548} \simeq 64,41.$$