

Regras Derivadas e Equivalências Populares

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io



Roteiro

1 Regras Derivadas

2 Equivalências Populares

Roteiro

1 Regras Derivadas

2 Equivalências Populares

Informações Gerais

- **Regras derivadas** são sequências “auto-contidas” de aplicações das regras básicas de inferência (DN).
- São “atalhos” na descrição de provas, evitando repetições de passos.
- Não há impedimentos para o uso ou mesmo criação de regras derivadas, mas é **necessário prová-las**.
- Algumas regras derivadas são tão conhecidas quanto as regras básicas.

Modus Tollens

Modus Tollens (*mt*):

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}$$

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. $\neg q$ | premissa |
| 3. $[p]$ | suposição |
| 3.1. q | $e \rightarrow 1, 3$ |
| 3.2. \perp | <i>abs</i> 2, 3.1 |
| 4. $\neg p$ | <i>raa</i> 3, 3.2 |

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

1. $[\neg(p \vee \neg p)]$ suposição

1.1. $[p]$ suposição

1.1.1. $p \vee \neg p$ $i \vee 1.1$

1.1.2. \perp $abs\ 1, 1.1.1$

1.2. $\neg p$ $rra\ 1.1, 1.1.2$

1.3. $p \vee \neg p$ $i \vee 1.2$

1.4. \perp $abs\ 1, 1.3$

2. $p \vee \neg p$ $raa\ 1, 1.4$

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

- | | |
|----------------|-----------------------------------|
| 1. $p \vee q$ | premissa |
| 2. $\neg p$ | premissa |
| 3. $[\neg q]$ | suposição |
| 3.1. $[p]$ | suposição |
| 3.1.1. \perp | <i>abs</i> 2, 3.1 |
| 3.2. $[q]$ | suposição |
| 3.2.1. \perp | <i>abs</i> 3, 3.2 |
| 3.3. \perp | $e\vee$ 1, 3.1, 3.1.1, 3.2, 3.2.1 |
| 4. q | <i>raa</i> 3,3.3 |

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg\phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| 1. $p \vee q$ | premissa |
| 2. $\neg p \vee r$ | premissa |
| 3. $[p]$ | suposição |
| 3.1. r | res_1 2, 3 |
| 3.2. $q \vee r$ | $i \vee$ 3.1 |
| 4. $[q]$ | suposição |
| 4.1. $q \vee r$ | $i \vee$ 4 |
| 5. $q \vee r$ | $e \vee$ 1, 3, 3.2, 4, 4.1 |

Roteiro

1 Regras Derivadas

2 Equivalências Populares

Informações Gerais

- Duas fórmulas ϕ e ψ para as quais vale $\phi \vdash \psi$ assim como $\psi \vdash \phi$ são ditas equivalentes (segundo prova).
- Para provar uma equivalência $\phi \dashv\vdash \psi$ é necessário provar tanto a “ida” $\phi \vdash \psi$ quanto a “volta” $\psi \vdash \phi$.
- Assim como as regras derivadas, algumas equivalências são populares pelo seu uso frequente em provas.
- São apresentadas a seguir algumas dessas equivalências, e a prova da ida de cada uma delas. É sugerido como exercício provar cada volta.

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $[p]$ suposição

2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$

2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$

2.2. $\neg p$ $rra\ 2.1, 2.1.2$

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 2, 2.2$

* Usando *modus tollens*

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $\neg p$ $mt\ 1, 2$

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 3.1, 2.1$

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$ De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

- | | | |
|--------|----------------------|------------------------------------|
| 1. | $\neg p \vee \neg q$ | premissa |
| 2. | $[p \wedge q]$ | suposição |
| 2.1. | $[\neg p]$ | suposição |
| 2.1.1. | p | $e \wedge 2$ |
| 2.1.2. | \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. | $[\neg q]$ | suposição |
| 2.2.1. | q | $e \wedge 2$ |
| 2.2.2. | \perp | <i>abs</i> 2.2, 2.2.1 |
| 2.3. | \perp | $e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$ |
| 3. | $\neg(p \wedge q)$ | <i>rra</i> 2, 2.3 |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$ De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | | |
|--------|------------------------|------------------------------------|
| 1. | $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. | $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. | $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. | $\neg p$ | $e \wedge 1$ |
| 2.1.2. | \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. | $[q]$ | suposição |
| 2.2.1. | $\neg q$ | $e \wedge 1$ |
| 2.2.2. | \perp | <i>abs</i> 2.2, 2.2.1 |
| 2.3. | \perp | $e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$ |
| 3. | $\neg(p \vee q)$ | <i>rra</i> 2, 2.3 |

Equivalência implicação-disjunção $\neg\phi \vee \psi \dashv\vdash \phi \rightarrow \psi$

Equivalência implicação-disjunção (*eid*): $\neg p \vee q \dashv\vdash p \rightarrow q$

1. $\neg p \vee q$ premissa

2. $[p]$ suposição

2.1. q res_1 1, 2

3. $p \rightarrow q$ $i \rightarrow$ 2, 2.1

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | |
|---------------------------------------|----------------------------|
| 1. $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. p | $e \wedge 1$ |
| 3. $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. $[q]$ | suposição |
| 4.1. $p \wedge q$ | $i \wedge 2, 4$ |
| 4.2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 4.1$ |
| 5. $[r]$ | suposição |
| 5.1. $p \wedge r$ | $i \wedge 2, 5$ |
| 5.2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 5.1$ |
| 6. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $e \vee 3, 4, 4.2, 5, 5.2$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|--------------------------------|----------------------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |
| 2.3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 2.1, 2.2$ |
| 3. | $[q \wedge r]$ | suposição |
| 3.1. | q | $e \wedge 3$ |
| 3.2. | r | $e \wedge 3$ |
| 3.3. | $p \vee q$ | $i \vee 3.1$ |
| 3.4. | $p \vee r$ | $i \vee 3.2$ |
| 3.5. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 3.3, 3.4$ |
| 4. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $e \vee 1, 2, 2.3, 3, 3.5$ |