Lógica Proposicional e Dedução Natural

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

O objetivo da lógica em computação

"...é desenvolver linguagens para modelar situações que abordamos enquanto profissionais de computação, de forma a poder raciocinar sobre elas formalmente. Raciocinar sobre situações significa construir argumentos sobre as mesmas; queremos fazer isso formalmente, de forma que os argumentos sejam válidos e possam ser defendidos rigorosamente, ou executados computacionalmente."

Michael Huth e Mark Ryan
Traduzido do livro "Logic in Computer Science"

Exemplo 1: Trem das Onze

1. Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado
2. Mas João chegou no horário
3. Já o trem chegou atrasado
4. Logo, haviam táxis na estação

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Exemplo 2: Maria, olha a chuva!

1. Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou
2. Maria não está molhada
3. Estava chovendo
4. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Um argumento mais formal

- Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado. Mas João chegou no horário. Já o trem chegou atrasado. Logo, haviam táxis na estação.

- Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou. Maria não está molhada. Estava chovendo. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva.

- Se p e não q, então r. Não r. p. Logo, q.

Roteiro

Definição e exemplos

- Proposição: uma sentença que pode ser considerada verdadeira ou falsa
  - A soma de 2 e 3 é igual a 5
  - Fulano falou mal de Ciclano para Beltrano
  - Quero passar em lógica
- Que sentenças não são proposições?
  - Que a força esteja com você.
  - Já viu que horas são?
  - Pare com esses exemplos agora!

Representação Simbólica

- Proposições em linguagem natural $\Rightarrow$ Fórmulas lógicas
- Menos detalhes desnecessários (abstração)
- Mais facilidade de manipulação
- Foco na argumentação, na combinação de fórmulas

Átomos

- Proposições atômicas são aquelas mais simples, que não podem ser logicamente decompostas.
- Por exemplo: O número 5 é par.
- São representadas por átomos (variáveis): $p, q, r, \ldots$
- Proposições compostas são formadas pela combinação das atômicas
- Por exemplo: 5 é par e 4.5 é negativo

Operadores Lógicos: $\neg$

- *negação / não / not*
- Inverte o valor lógico de uma proposição
  - p: 5 é par
  - $\neg p$: 5 não é par

Operadores Lógicos: $\vee$

- *ou / or / disjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ao menos uma é verdadeira
  - p: 3 é par
  - q: 4 é negativo
  - $p \vee q$: 3 é par ou 4 é negativo

Operadores Lógicos: $\wedge$

- *e / and / conjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ambas são verdadeiras
  - p: o céu é verde
  - q: vacas voam
  - $p \wedge q$: o céu está verde e vacas voam

Operadores Lógicos: $\rightarrow$

- *implicação / se / if*
- Indica que uma proposição é uma consequência lógica de outra
  - p: $1+1 = 10$
  - q: $10+10 = 100$
  - $p \rightarrow q$: Se $1+1 = 10$, então $10+10 = 100$
  - p é a premissa, q é a conclusão

Teste seus conhecimentos

- p: Fulana é educada
- q: Fulana é inteligente
- r: Quero me casar com Fulana
- Traduza "Fulana é educada e inteligente"
  - $p \land q$
- Traduza "Se fulana é inteligente, quero me casar com ela"
  - $q \to r$
- Traduza "Fulana é educada mas não quero casar com ela."
  - $p \land \neg r$
- Traduza $q \to p$
  - Se fulana é inteligente, então ela é educada.

Precedência de Operadores e Parentização

- $\neg p \land q$?
  - Fulana não é educada mas é inteligente
  - Fulana não é educada e inteligente
- Operadores ordenados por precedência: $\neg, \land, \lor, \rightarrow$
- Implicação é associativa à direita: $p \rightarrow q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- É preferível sempre usar parênteses!

Roteiro

Definição

- Dedução Natural (DN) é um sistema dedutivo usado para construir provas lógicas formais
- É definido por um conjunto de regras de inferência
- A aplicação dessas regras sobre um conjunto de premissas leva a uma conclusão
  - Notação: $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \vdash \psi$

Regra de Inferência (RI)

- É a descrição de uma relação logicamente válida entre premissas e conclusões
- Numa prova formal, cada aplicação das RIs deve ser um passo na direção da conclusão desejada
- Dicas para aplicação de RIs (para evitar erros comuns)
  - As premissas da RI devem corresponder, coincidir, combinar com as proposições sobre as quais a regra será aplicada
  - A conclusão da RI deve corresponder, coincidir, combinar com a proposição resultante da aplicação da regra
  - Sempre indique a que proposições a regra é aplicada

Regras para conjunção

- Introdução do $\wedge$ $(i\wedge)$:
$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

- Eliminação do $\wedge$ $(e\wedge)$:
$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

- Intuição: afimar "o céu é verde" junto com "vacas voam" é equivalente a afirmar "o céu é verde e vacas voam"

Exemplo de uso: regras para conjunção

Prove que: $p \land q, r \vdash q \land r$

1	$p \land q$	premissa
2	r	premissa
3	q	$e\land\ 1$
4	$q \land r$	$i\land\ 2, 3$

Regras para dupla negação

- Introdução da dupla negação $(i\neg\neg)$: $$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}$$
- Eliminação da dupla negação $(e\neg\neg)$: $$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$
- Intuição: afirmar "quero passar em lógica" é equivalente a afirmar "não quero não passar em lógica"

Exemplo de uso: regras para dupla negação

Prove que: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

1	p	premissa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premissa
3	$\neg\neg p$	$i\neg\neg 1$
4	$q \wedge r$	$e\neg\neg 1$
5	r	$e\wedge\, 4$
6	$\neg\neg p \wedge r$	$i\wedge\, 3, 5$

Teste seus conhecimentos

Prove que: $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash s \wedge \neg\neg q$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	premissa
2	$s \wedge t$	premissa
3	$p \wedge q$	$e\wedge\ 1$
4	q	$e\wedge\ 3$
5	$\neg\neg q$	$i\neg\neg 4$
6	s	$e\wedge\ 2$
7	$s \wedge \neg\neg q$	$i\wedge\ 5, 6$

Eliminação da implicação ($e \rightarrow$)

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- Intuição: afirmar "se vacas voassem, haveriam rebanhos aéreos" junto com "vacas voam", permite concluir que "há rebanhos aéreos".
- Também conhecido pelo nome em latim: *modus ponens*

Exemplo de uso: eliminação da implicação

Prove que: $\neg p \land q, \neg p \land q \to r \lor \neg p \vdash r \lor \neg p$

1	$\neg p \land q$	premissa
2	$\neg p \land q \to r \lor \neg p$	premissa
3	$r \lor \neg p$	$e \to 1, 2$

Exemplo de uso: eliminação da implicação (2)

Prove que: $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$

1	$p \to (q \to r)$	premissa
2	$p \to q$	premissa
3	p	premissa
4	$q \to r$	$e \to 1, 3$
5	q	$e \to 2, 3$
6	r	$e \to 4, 5$

Roteiro

Introdução da implicação ($i \rightarrow$)

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \rightarrow \psi}$$

- Intuição: se a suposição de que “vacas voam” permite afirmar que “há rebanhos aéreos”, é possível concluir que “se vacas voassem, haveriam rebanhos aéreos”.

Suposições e Sub-universos

- Ao fazer uma suposição, é criado um “sub-universo”, dentro do “universo” atual
- As proposições do universo atual continuam válidas no sub-universo
- No sub-universo o que foi suposto é tido como uma proposição válida qualquer
- As proposições obtidas no sub-universo dependem da suposição feita, então não são válidas fora do sub-universo
- É possível criar um sub-universo dentro de outro já existente

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \to (q \to r) \vdash p \wedge q \to r$

1	$p \to (q \to r)$	premissa
2	$[p \wedge q]$	suposição
2.1	p	$e \wedge 2$
2.2	$q \to r$	$e \to 1, 2.1$
2.3	q	$e \wedge 2$
2.4	r	$e \to 2.2, 2.3$
3	$p \wedge q \to r$	$i \to 2, 2.4$

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \wedge q \to r \vdash p \to (q \to r)$

1	$p \wedge q \to r$	premissa
2	$[p]$	suposição
2.1	$[q]$	suposição
2.1.1	$p \wedge q$	$i \wedge 2, 2.1$
2.1.2	r	$e \to 1, 2.1.1$
2.2	$q \to r$	$i \to 2.1, 2.1.2$
3	$p \to (q \to r)$	$i \to 2, 2.2$

Teste seus conhecimentos

Prove que: $p \to q \vdash p \wedge r \to q \wedge r$

1	$p \to q$	premissa
2	$[p \wedge r]$	suposição
2.1	p	$e \wedge 2$
2.2	r	$e \wedge 2$
2.3	q	$e \to 1, 2.1$
2.4	$q \wedge r$	$i \wedge 2.2, 2.3$
3	$p \wedge r \to q \wedge r$	$i \to 2, 2.4$

Roteiro

Introdução do $\vee$

- Introdução do $\vee$ ($i\vee$):

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \qquad\qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

- Intuição: acreditar que "o céu é verde" permite afirmar que "o céu é verde e/ou vacas voam".
    - Ou seja, espera-se que ao menos uma das alternativas seja verdade.

Exemplo de uso: introdução do $\vee$

Prove que: $p, \neg q \vdash (q \vee p) \vee \neg r$.

1.	p	premissa
2.	$\neg q$	premissa
3.	$q \vee p$	$i\vee$ 1
4.	$(q \vee p) \vee \neg r$	$i\vee$ 3

Eliminação do $\vee$: intuição

- Digamos que eu acredite que "vacas e/ou ovelhas voam".
- Ou seja, pelo menos um desses voa, mas eu não sei qual.
- Ao supor que "vacas voam", posso concluir que "há rebanhos aéreos".
- Se eu supor que "ovelhas voam", chego a mesma conclusão.
- Então, sem supor nada, posso afirmar que "há rebanhos aéreos".
    - Só não sei se são rebanhos de ovelhas ou vacas.

Eliminação do $\vee$ $(e\vee)$

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}$$

- O uso dessa regra se dá em 4 passos:
  1. É identificada a disjunção que será a base da eliminação;
  2. Pela suposição de um operando da disjunção, é concluído um certo fato;
  3. Pela suposição do outro operando, é obtida a mesma conclusão;
  4. Então, é inferida como fato a conclusão de ambas suposições.
- Lembre-se: não misture as suposições; são sub-universos distintos!

Exemplo de uso: eliminação do $\vee$

Prove que: $q \to r \vdash p \vee q \to p \vee r$

1.	$q \to r$	premissa
2.	$[p \vee q]$	suposição
2.1.	$[p]$	suposição
2.1.1.	$p \vee r$	$i\vee$ 2.1
2.2.	$[q]$	suposição
2.2.1.	r	$e \to$ 1, 2.2
2.2.2.	$p \vee r$	$i\vee$ 2.2.1
2.3.	$p \vee r$	$e\vee$ 2, 2.1, 2.1.1, 2.2, 2.2.2
3.	$p \vee q \to p \vee r$	$i \to$ 2, 2.3

Teste seus conhecimentos

Prove que: $(p \vee q) \vee r \dashv\vdash p \vee (q \vee r)$ [1].

[1] "$\phi \dashv\vdash \psi$" indica a realização de duas provas: $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$.

Roteiro

Noções básicas

- Uma contradição é a conclusão de qualquer combinação de premissas contrárias uma a outra.
- Contradições também são conhecidas como Absurdos.
- O símbolo usado para representar uma contradição é $\perp$.

Regra do Absurdo

- Absurdo (abs):

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}$$

- Intuição: afirmar "hoje vai chover" logo após "hoje não vai chover"; contraditório, não?

- Esta regra também é conhecida como "eliminação da negação".

Redução ao Absurdo

- Redução ao Absurdo (raa):

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi]\\ \vdots\\ \bot\end{array}}{\neg\phi}$$

- Intuição: se a suposição de que "vacas voam" leva a conclusão absurda de que "1=2", é natural então inferir que "vacas não voam".

- Esta regra também é conhecida como "introdução da negação".

Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo

Prove que: $\neg p \to q, \neg p \to \neg q \vdash p$.

1.	$\neg p \to q$	premissa
2.	$\neg p \to \neg q$	premissa
3.	$[\neg p]$	suposição
3.1.	q	$e \to$ 3, 1
3.2.	$\neg q$	$e \to$ 3, 2
3.3.	$\perp$	abs 3.1, 3.2
4.	p	raa 3, 3.3

Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo (2)

Prove que: $p \to \neg p \vdash \neg p$.

1.	$p \to \neg p$	premissa
2.	$[p]$	suposição
2.1.	$\neg p$	$e \to$ 1, 2
2.2.	$\perp$	abs 2, 2.1
3.	$\neg p$	raa 2, 2.2

Teste seus conhecimentos

Prove que: $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$.