Autômatos Finitos Determinísticos

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

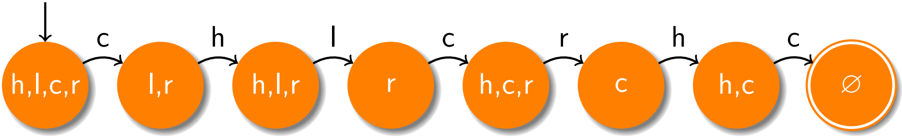
Um leão, um coelho e um repolho

- Numa margem de um rio estão um leão, um coelho e um repolho. Você deve atravessar de canoa os 3 para a outra margem, um por vez. Porém, não podem ser deixados sozinhos o leão com o coelho, ou o coelho com o repolho.
- Como você faria isso?
- Há mais de um jeito de fazer isso?

Modelagem

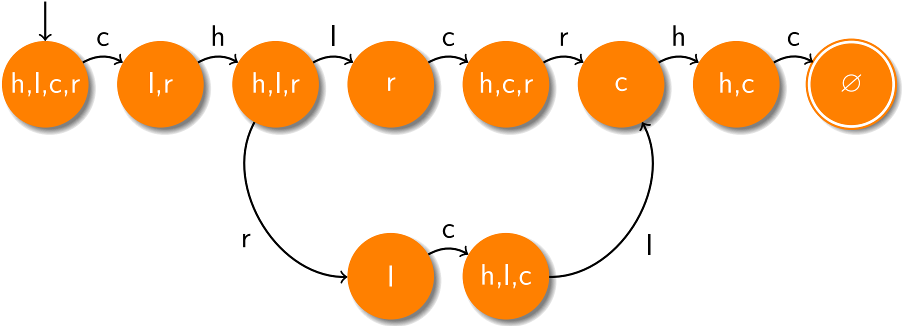
- Símbolos: humano = h, leão = l, coelho = c, repolho = r
- Estado inicial: todos numa mesma margem do rio; {h, l, c, r}
- Abstração 1: Não preciso representar a posição da canoa
  - Afinal, ela está onde o homem está
- Abstração 2: cada “passo” é uma travessia
  - Não é preciso registrar ações como “fulano entra na canoa”
  - Agora, é importante registrar quem atravessou

Solução



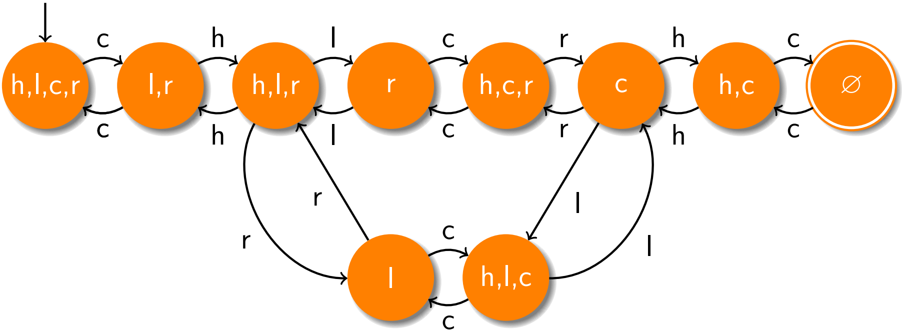
A solução é: chlcrhc

Outra solução?



Outra solução é: chrclhc

Outras soluções?



Na verdade, infinitas soluções!

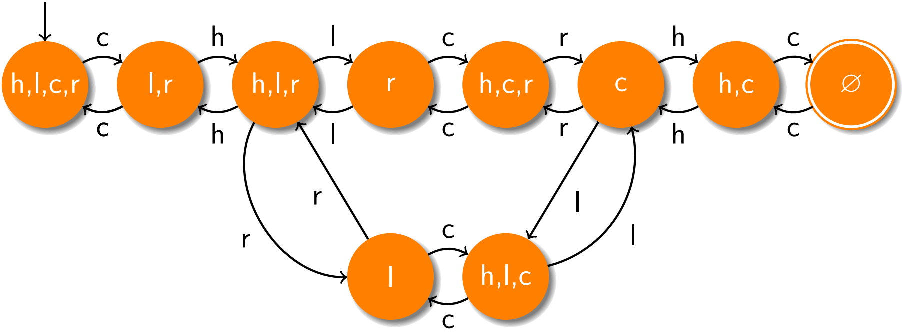
Reconhecimento de soluções

- Um alfabeto é um conjunto finito, não-vazio de símbolos
  - Exemplo: $\Sigma = \{h, l, c, r\}$
- Um palavra sobre Σ uma sequência finita de elementos desse conjunto
  - Exemplos: chrclhc e chlcrhc
  - $|w|$ representa o número de símbolos (i.e., tamanho) de uma palavra w
  - w_i representa o i-ésimo elemento de uma palavra w
  - A palavra de tamanho zero é representada por λ
- Seja Σ^* o conjunto de todas as palavras sobre Σ
- Como verificar se $w \in \Sigma^*$ é uma solução?

Resposta: computação

- Verificar se o caminho correspondente a w leva ao estado final
- Em caso positivo, diz-se que w foi aceita (ou reconhecida)
- Senão, w foi rejeitada
- Denomina-se computação o processamento de uma palavra
- Uma computação é denotada usando a notação $[e_1, ax] \vdash [e_2, x]$, considerando que exista uma transição do estado e_1 para e_2 sob o símbolo a

Exemplo de computação: chrclhc, desde o estado inicial



$$[\{h,l,c,r\}, chrclhc] \vdash [\{l,r\}, hrclhc] \vdash [\{h,l,r\}, rclhc] \vdash$$
$$[\{l\}, clhc] \vdash [\{h,l,c\}, lhc] \vdash [\{c\}, hc] \vdash [\{h,c\}, c] \vdash [\varnothing, \lambda]$$

Roteiro

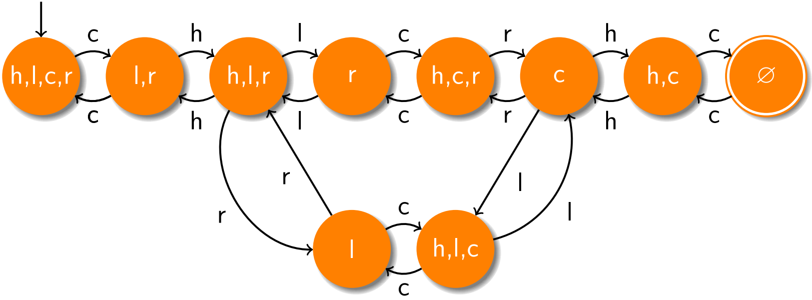
Definição

Um AFD é definido pela quíntupla $(E, \Sigma, \delta, i, F)$, em que:

- E é um conjunto finito, não-vazio de elementos denominados estados
- Σ é um alfabeto
- $\delta : E \times \Sigma \to E$ é a função de transição (determinismo)
- $i, i \in E$, é o estado inicial
- $F, F \subset E$, é o conjunto de estados finais

O estado "sumidouro"

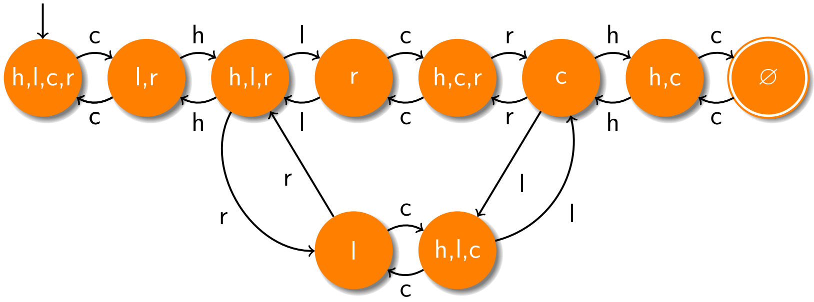
- Uma função mapeia cada elemento do seu domínio
- Todavia, não há transições sob todos os símbolos a partir de todos os estados do exemplo
- Assume-se então que há um estado não-terminal 't', denominado sumidouro, que foi omitido do diagrama
- Se uma transição de um estado e sob um símbolo a não foi especificada, assume-se que $\delta(e, a) = t$
- Por fim, $\forall_{a \in \Sigma}\ \delta(t, a) = t$


h,l,c,r
l,r
h,l,r
r
h,c,r
c
h,c
∅
l
h,l,c
c
h
l
c
r
h
c
c
h
l
c
r
h
c
r
r
l
l
c
c

O estado "sumidouro"

- Uma função mapeia cada elemento do seu domínio
- Todavia, não há transições sob todos os símbolos a partir de todos os estados do exemplo
- Assume-se então que há um estado não-terminal 't', denominado sumidouro, que foi omitido do diagrama
- Se uma transição de um estado e sob um símbolo a não foi especificada, assume-se que $\delta(e, a) = t$
- Por fim, $\forall_{a \in \Sigma}\ \delta(t, a) = t$

Exemplo



- $E = \{\{h,l,c,r\},\{l,r\},\{h,l,r\},\{l\},\{r\},\{h,l,c\},\{h,c,r\},\{c\},\{h,c\},\varnothing, t\}$
- $\Sigma = \{h,l,c,r\}$
- $i = \{h,l,c,r\}$
- $F = \{\varnothing\}$

Exemplo, função de transição

δ	h	l	c	r
{h,l,c,r}	t	t	{l, r}	t
{l,r}	{h,l,r}	t	{h,l,c,r}	t
{h,l,r}	{l,r}	{r}	t	{l}
{l}	t	t	{h,l,c}	{h,l,r}
{r}	t	{h,l,r}	{h,c,r}	t
{h,l,c}	t	{c}	{l}	t
{h,c,r}	t	t	{r}	{c}
{c}	{h,c}	{h,l,c}	t	{h,c,r}
{h,c}	{c}	t	$\varnothing$	t
$\varnothing$	t	t	{h, c}	t
t	t	t	t	t

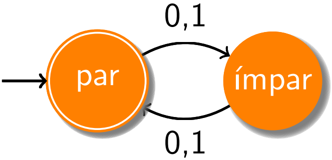
Linguagens

- Uma linguagem é um conjunto de palavras
- A linguagem aceita por um AFD M, $L(M)$, é o conjunto de palavras que M aceita
- Seja $\hat{\delta} : E \times \Sigma^* \rightarrow E$ uma função de transição estendida, tal que:
    - $\hat{\delta}(e, \lambda) = e$
    - $\hat{\delta}(e, aw) = \hat{\delta}(\delta(e, a), w)$
- Então, $L(M) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(i, w) \in F\}$
- Dado outro AFD M', se e somente se $L(M) = L(M')$, diz-se que M e M' são equivalentes

Roteiro

Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M, dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0,1\}^* : w$ tem um número par de símbolos$\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



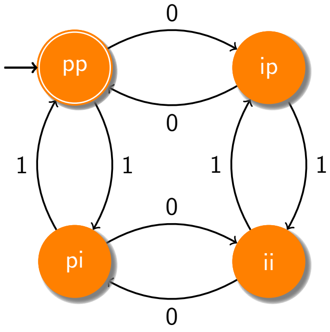
Caracterização formal

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $E = \{\text{par, ímpar}\}$
- $i = \text{par}$
- $F = \{\text{par}\}$
-

δ	0	1
par	ímpar	ímpar
ímpar	par	par

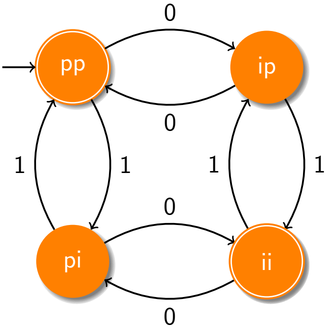
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M', dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0,1\}^* :$
  w tem um número par de 0s e um número par de 1s$\}$



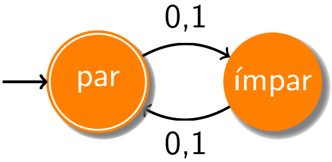
Exercício 3: adaptando M'

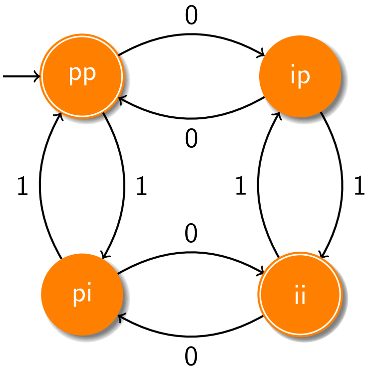
- Seja M'' um AFD tal que:
- $L(M'') = \{w \in \{0,1\}^* :$
  w tem os números de 0s e 1s ambos pares, ou ambos ímpares$\}$
- Como modificar o diagrama de M' para definir M''?



Exercício 4

Qual a relação entre os AFDs M e M'' dos exercícios anteriores?





Solução na próxima aula

- Seja A_n um AFD tal que:
- $L(A_n) = \{w \in \{0,1\}^* :$
  w é um número divisível por n representado na base 2$\}$
- Determine a função de transição dos AFDs $A_1, A_2, \ldots, A_7$