

Lógica Proposicional e Dedução Natural (parte 1)

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io



Roteiro

- 1 Uma Introdução Intuitiva
- 2 Proposições
- 3 Dedução Natural (parte 1)

Roteiro

1 Uma Introdução Intuitiva

2 Proposições

3 Dedução Natural (parte 1)

O objetivo da lógica em computação

“...é desenvolver **linguagens** para **modelar** situações que abordamos enquanto profissionais de computação, de forma a poder **raciocinar** sobre elas **formalmente**. Raciocinar sobre situações significa construir **argumentos** sobre as mesmas; queremos fazer isso formalmente, de forma que os argumentos sejam **válidos** e possam ser defendidos **rigorosamente**, ou executados **computacionalmente**.”

Michael Huth e Mark Ryan

Traduzido do livro “Logic in Computer Science”

Exemplo 1: Trem das Onze

1. Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado
2. Mas João chegou no horário
3. Já o trem chegou atrasado
4. Logo, haviam táxis na estação

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Exemplo 2: Maria, olha a chuva!

1. Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou
2. Maria não está molhada
3. Estava chovendo
4. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Um argumento mais formal

- Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado. Mas João chegou no horário. Já o trem chegou atrasado. Logo, haviam táxis na estação.
- Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou. Maria não está molhada. Estava chovendo. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva.
- Se p e não q , então r . Não r . p . Logo, q .

Roteiro

1 Uma Introdução Intuitiva

2 Proposições

3 Dedução Natural (parte 1)

Definição e exemplos

- Proposição: uma sentença que pode ser considerada verdadeira ou falsa
 - A soma de 2 e 3 é igual a 5
 - Fulano falou mal de Ciclano para Beltrano
 - Quero passar em lógica
- Que sentenças não são proposições?
 - Que a força esteja com você.
 - Já viu que horas são?
 - Pare com esses exemplos agora!

Representação Simbólica

- Proposições em linguagem natural \Rightarrow Fórmulas lógicas
- Menos detalhes desnecessários (abstração)
- Mais facilidade de manipulação
- Foco na argumentação, na combinação de fórmulas

Átomos

- Proposições atômicas são aquelas mais simples, que não podem ser logicamente decompostas.
- Por exemplo: O número 5 é par.
- São representadas por átomos (variáveis): p, q, r, \dots
- Proposições compostas são formadas pela combinação das atômicas
- Por exemplo: 5 é par e 4.5 é negativo

Operadores Lógicos: \neg

- *negação / não / not*

- Inverte o valor lógico de uma proposição

- p : 5 é par

- $\neg p$: 5 não é par

Operadores Lógicos: \vee

- *ou / or / disjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ao menos uma é verdadeira
 - p : 3 é par
 - q : 4 é negativo
 - $p \vee q$: 3 é par ou 4 é negativo

Operadores Lógicos: \wedge

- *e / and / conjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ambas são verdadeiras
 - p : o céu é verde
 - q : vacas voam
 - $p \wedge q$: o céu está verde e vacas voam

Operadores Lógicos: \rightarrow

- *implicação / se / if*
- Indica que uma proposição é uma consequência lógica de outra
 - p : $1+1 = 10$
 - q : $10+10 = 100$
 - $p \rightarrow q$: Se $1+1 = 10$, então $10+10 = 100$
 - p é a premissa, q é a conclusão

Teste seus conhecimentos

- p : Fulana é educada
- q : Fulana é inteligente
- r : Quero me casar com Fulana
- Traduza “Fulana é educada e inteligente”
 - $p \wedge q$
- Traduza “Se fulana é inteligente, quero me casar com ela”
 - $q \rightarrow r$
- Traduza “Fulana é educada mas não quero casar com ela.”
 - $p \wedge \neg r$
- Traduza $q \rightarrow p$
 - Se fulana é inteligente, então ela é educada.

Precedência de Operadores e Parentização

- $\neg p \wedge q$?
 - Fulana não é educada mas é inteligente
 - Fulana não é educada e inteligente
- Operadores ordenados por precedência: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- Implicação é associativa à direita: $p \rightarrow q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- É preferível sempre usar parênteses!

Roteiro

1 Uma Introdução Intuitiva

2 Proposições

3 Dedução Natural (parte 1)

Definição

- Dedução Natural (DN) é um sistema dedutivo usado para construir demonstrações lógicas formais
 - É definido por um conjunto de regras de inferência
 - A aplicação dessas regras sobre um conjunto de premissas leva a uma conclusão
- Notação: $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \vdash \psi$

Regra de Inferência (RI)

- É a descrição de uma relação logicamente válida entre premissas e conclusões
- Numa prova formal, cada aplicação das RIs deve ser um passo na direção da conclusão desejada
- Dicas para aplicação de RIs (para evitar erros comuns)
 - As premissas da RI devem corresponder, coincidir, combinar com as proposições sobre as quais a regra será aplicada
 - A conclusão da RI deve corresponder, coincidir, combinar com a proposição resultante da aplicação da regra
 - Sempre indique a que proposições a regra é aplicada

Regras para conjunção

- Introdução do \wedge ($i\wedge$):

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

- Eliminação do \wedge ($e\wedge$):

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi}$$

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

- Intuição: afirmar “o céu é verde” junto com “vacas voam” é equivalente a afirmar “o céu é verde e vacas voam”

Exemplo de uso: regras para conjunção

Prove que: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1	$p \wedge q$	premissa
2	r	premissa
3	q	$e \wedge 1$
4	$q \wedge r$	$i \wedge 2, 3$

Regras para dupla negação

- Introdução da dupla negação ($i\neg\neg$):

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}$$

- Eliminação da dupla negação ($e\neg\neg$):

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$

- Intuição: afirmar “quero passar em lógica” é equivalente a afirmar “não quero não passar em lógica”

Exemplo de uso: regras para dupla negação

Prove que: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

1	p	premissa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premissa
3	$\neg\neg p$	$i\neg\neg 1$
4	$q \wedge r$	$e\neg\neg 2$
5	r	$e\wedge 4$
6	$\neg\neg p \wedge r$	$i\wedge 3, 5$

Teste seus conhecimentos

Prove que: $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash s \wedge \neg\neg q$

1 $(p \wedge q) \wedge r$ premissa

2 $s \wedge t$ premissa

3 $p \wedge q$ $e \wedge 1$

4 q $e \wedge 3$

5 $\neg\neg q$ $i \neg\neg 4$

6 s $e \wedge 2$

7 $s \wedge \neg\neg q$ $i \wedge 5, 6$

Eliminação da implicação ($e \rightarrow$)

$$\frac{\phi \quad \phi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- Intuição: afirmar “se vacas voassem, haveriam rebanhos aéreos” junto com “vacas voam”, permite concluir que “há rebanhos aéreos”.
- Também conhecido pelo nome em latim: *modus ponens*

Exemplo de uso: eliminação da implicação

Prove que: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$

1 $\neg p \wedge q$ premissa

2 $\neg p \wedge q \rightarrow r \vee \neg p$ premissa

3 $r \vee \neg p$ $e \rightarrow 1, 2$

Exemplo de uso: eliminação da implicação (2)

Prove que: $p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premissa
2	$p \rightarrow q$	premissa
3	p	premissa
4	$q \rightarrow r$	$e \rightarrow 1, 3$
5	q	$e \rightarrow 2, 3$
6	r	$e \rightarrow 4, 5$

Introdução da implicação ($i \rightarrow$)

$$\frac{\begin{array}{c} [\phi] \\ \vdots \\ \psi \end{array}}{\phi \rightarrow \psi}$$

- Intuição: se a suposição de que “vacas voam” permite afirmar que “há rebanhos aéreos”, é possível concluir que “se vacas voassem, haveriam rebanhos aéreos”.

Suposições e Sub-universos

- Ao fazer uma suposição, é criado um “sub-universo”, dentro do “universo” atual
- As proposições do universo atual continuam válidas no sub-universo
- No sub-universo o que foi suposto é tido como uma proposição válida qualquer
- As proposições obtidas no sub-universo dependem da suposição feita, então não são válidas fora do sub-universo
- É possível criar um sub-universo dentro de outro já existente

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \rightarrow (q \rightarrow r) \vdash p \wedge q \rightarrow r$

1	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premissa
2	$[p \wedge q]$	suposição
2.1	p	$e \wedge 2$
2.2	$q \rightarrow r$	$e \rightarrow 1, 2.1$
2.3	q	$e \wedge 2$
2.4	r	$e \rightarrow 2.2, 2.3$
3	$p \wedge q \rightarrow r$	$i \rightarrow 2, 2.4$

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$[p]$	suposição
2.1	$[q]$	suposição
2.1.1	$p \wedge q$	$i \wedge 2, 2.1$
2.1.2	r	$e \rightarrow 1, 2.1.1$
2.2	$q \rightarrow r$	$i \rightarrow 2.1, 2.1.2$
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$i \rightarrow 2, 2.2$

Teste seus conhecimentos

Prove que: $p \rightarrow q \vdash p \wedge r \rightarrow q \wedge r$

1	$p \rightarrow q$	premissa
2	$[p \wedge r]$	suposição
2.1	p	$e \wedge 2$
2.2	r	$e \wedge 2$
2.3	q	$e \rightarrow 1, 2.1$
2.4	$q \wedge r$	$i \wedge 2.2, 2.3$
3	$p \wedge r \rightarrow q \wedge r$	$i \rightarrow 2, 2.4$