

Autômatos Finitos Não-Determinísticos

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br



Roteiro

- 1 Conceitos Básicos
- 2 Equivalência entre AFDs e AFNs
- 3 AFN λ s

Roteiro

1 Conceitos Básicos

2 Equivalência entre AFDs e AFNs

3 AFN λ s

Definição

Um AFN é definido de forma semelhante a um AFD: uma quintupla, $(E, \Sigma, \delta, I, F)$, em que:

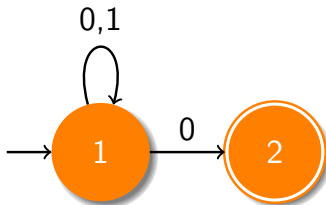
- E é um conjunto de estados;
- Σ é um alfabeto;
- $\delta : E \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(E)$ é a função de transição;
- $I, I \subset E, I \neq \emptyset$, é o conjunto de estados iniciais;
- $F, F \subset E$, é o conjunto de estados finais.

AFDs, AFNs e Não-Determinismo

É importante notar duas diferenças de AFNs para AFDs, que representam o caráter não-determinístico dos primeiros:

- Um AFN pode ter um ou mais estados iniciais, enquanto um AFD tem apenas 1 estado inicial;
- Os elementos do contradomínio da função de transição de um AFN são conjuntos de estados, enquanto de um AFD são estados apenas.

Exemplo



- $E = \{1, 2\}$
- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $I = \{1\}$
- $F = \{2\}$

δ	0	1
1	$\{1, 2\}$	$\{1\}$
2	\emptyset	\emptyset

$$\delta(e, a) = \emptyset?$$

- No contexto de AFNs, $\delta(e, a)$ é o conjunto de estados alcançados por transição de e sob a .
- Logo, $\delta(e, a) = \emptyset$ se e somente se não há transições sob o símbolo a partindo de e .
- AFNs dispensam o uso de sumidouros, já que a função de transição permite indicar a ausência de transições de um estado sob um símbolo.
- Se $\forall (e, a) \in E \times \Sigma, |\delta(e, a)| \leq 1$, o referido AFN poderia ser representado como um AFD. (Por que?)

AFNs e Linguagens

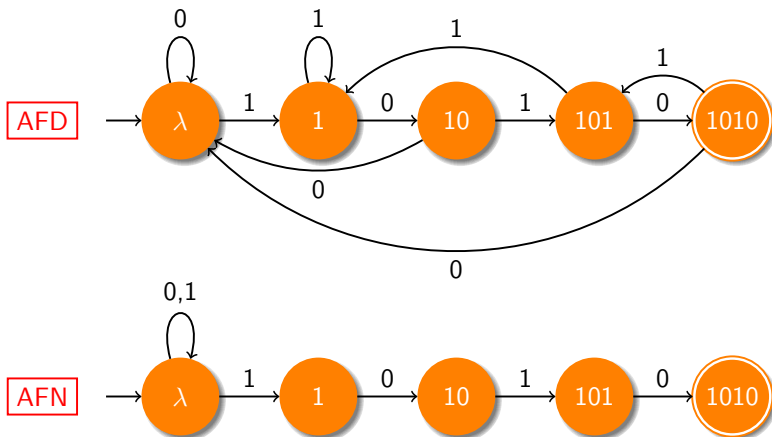
- Seja $\hat{\delta} : \mathcal{P}(E) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(E)$ uma função de transição estendida de um AFN qualquer, tal que:
 - $\hat{\delta}(\emptyset, w) = \emptyset$, para todo $w \in \Sigma^*$;
 - $\hat{\delta}(A, \lambda) = A$, para todo $A \subseteq E$;
 - $\hat{\delta}(A, aw) = \hat{\delta}(\bigcup_{e \in A} \delta(e, a), w)$.
- Usando a definição de $\hat{\delta}$, a linguagem aceita por um AFN $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$ é o conjunto

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \emptyset\} .$$

Por que usar AFNs?

- AFDs e AFNs são equivalentes: para todo AFN, há um AFD correspondente; e todo AFD é um “AFN determinístico”.
- Ainda assim, AFNs ainda se mostram úteis ante a AFDs por permitirem descrições mais simples e claras de algumas ideias.
- Devido a isso, determinar um AFN para chegar ao seu AFD correspondente é eventualmente mais interessante que determinar o AFD diretamente.
- Por exemplo, como seriam um AFD e um AFN que aceitem a linguagem $\{0, 1\}^* \{1010\}$?

$\{0, 1\}^* \{1010\}$: AFD e AFN



Exercício

- Considere a linguagem

$$L_i = \{w \in \{0,1\}^* : |w| \geq i \wedge w_{|w|-i+1} = 1\}, i > 0 .$$

- Determine um AFD D_i e um AFN N_i tal que $L(D_i) = L(N_i) = L_i$, para $i = 1, 2, 3$.
- Indique o número de estados de D_i e N_i em função de i .
- A comparação desses números diz algo sobre a importância de AFNs, apesar da sua equivalência com AFDs?

Roteiro

1 Conceitos Básicos

2 Equivalência entre AFDs e AFNs

3 AFN λ s

AFD \rightarrow AFN: Intuição

- Um AFN $N = (E', \Sigma', \delta', I, F')$ equivalente a um AFD $D = (E, \Sigma, \delta, i, F)$ qualquer pode ser determinado baseando-se na ideia de que um AFD é como um “AFN determinístico”:
 - $E' = E, \Sigma' = \Sigma, \delta'(e, a) = \{\delta(e, a)\}, I = \{i\}, F' = F.$
 - Isso merece ser provado! :)
 - Provar a equivalência de D e N, $L(D) = L(N)$, é provar que $\forall w, w \in L(D) \leftrightarrow w \in L(N).$

AFD \rightarrow AFN: Prova

Segue uma prova da ida, $w \in L(D) \rightarrow w \in L(N)$. A prova da volta usa os mesmo passos, mas ao contrário.

- 1 $w \in L(D)$
- 2 $\hat{\delta}(i, w) \in F$ (Pela definição da linguagem aceita por AFD)
- 3 $\hat{\delta}(i, w) \in F'$ (Afinal, $F = F'$)
- 4 $\{\hat{\delta}(i, w)\} \cap F' \neq \emptyset$ (Pela definição matemática de conjuntos)
- 5 $\hat{\delta}'(\{i\}, w) \cap F' \neq \emptyset$ (Segundo $\{\hat{\delta}(e, w)\} = \hat{\delta}'(\{e\}, w)$, a provar)
- 6 $w \in L(N)$ (Pela definição da linguagem aceita por AFN)

$\{\hat{\delta}(e, w)\} = \hat{\delta}'(\{e\}, w)$: Prova, por indução em $|w|$, base

■ Base: $|w| = 0$ (i.e., $w = \lambda$).

1 $\{\hat{\delta}(e, \lambda)\}$

2 $\{e\}$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFDs)

3 $\hat{\delta}'(\{e\}, \lambda)$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFNs)

$\{\hat{\delta}(e, w)\} = \hat{\delta}'(\{e\}, w)$: Prova, por indução em $|w|$, passo

■ Hipótese: $\{\hat{\delta}(e, w)\} = \hat{\delta}'(\{e\}, w)$, para $|w| = n$.

■ Passo: $\{\hat{\delta}(e, aw)\} = \hat{\delta}'(\{e\}, aw)$.

1 $\{\hat{\delta}(e, aw)\}$

2 $\{\hat{\delta}(\delta(e, a), w)\}$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFDs)

3 $\hat{\delta}'(\{\delta(e, a)\}, w)$

(Pela hipótese de indução)

4 $\hat{\delta}'(\delta'(e, a), w)$

(Pela definição de δ')

5 $\hat{\delta}'(\{e\}, aw)$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFNs)

AFN \rightarrow AFD: Intuição

- Um AFD $D = (E', \Sigma', \delta', i, F')$ equivalente a um AFN $N = (E, \Sigma, \delta, I, F)$ qualquer realizaria, determinística e sincronicamente, computações “paralelas” do AFN.
- Logo, os estados desse AFD seriam conjuntos de estados do AFN (já que um AFN permite estar em mais de um estado ao mesmo tempo).
- O estado inicial de D seria o próprio conjunto de estados iniciais de N .
- Os conjuntos de estados de N com pelo menos 1 estado final seriam os estados finais de D .
- Assim sendo: $E' \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\Sigma' = \Sigma$, $i = I$, $F' = \{X \subseteq E : X \cap F \neq \emptyset\}$.
- Por fim, $\delta'(X, a) = \bigcup_{e \in X} \delta(e, a)$, para $X \subseteq E$.

AFN \rightarrow AFD: Prova, $w \in L(N) \leftrightarrow w \in L(D)$

1 $w \in L(N)$

2 $\hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \emptyset$ (Pela definição de linguagem aceita por AFN)

3 $\hat{\delta}'(I, w) \cap F \neq \emptyset$ (Segundo $\hat{\delta}(X, w) = \hat{\delta}'(X, w)$, a provar)

4 $\hat{\delta}'(I, w) \in F'$ (Pela definição de F')

5 $w \in L(D)$ (Pela definição de linguagem aceita por AFD)

$\hat{\delta}(X, w) = \hat{\delta}'(X, w)$: Prova, por indução em $|w|$, base

■ Base: $|w| = 0$ (i.e., $w = \lambda$).

1 $\hat{\delta}(X, \lambda)$

2 X

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFNs)

3 $\hat{\delta}'(X, \lambda)$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFDs)

$\hat{\delta}(X, w) = \hat{\delta}'(X, w)$: Prova, por indução em $|w|$, passo

■ Hipótese: $\hat{\delta}(X, w) = \hat{\delta}'(X, w)$, para $|w| = n$.

■ Passo: $\hat{\delta}(X, aw) = \hat{\delta}'(X, aw)$.

1 $\hat{\delta}(X, aw)$

2 $\hat{\delta}(\bigcup_{e \in X} \delta(e, a), w)$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFNs)

3 $\hat{\delta}'(\bigcup_{e \in X} \delta(e, a), w)$

(Pela hipótese de indução)

4 $\hat{\delta}'(\delta'(X, a), w)$

(Pela definição de δ')

5 $\hat{\delta}'(X, aw)$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFDs)

Exercício

- 1 Considere um AFN $N = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{0, 1\}, \delta, \{1, 2\}, \{5\})$, cuja matriz de transições é mostrada a seguir.

δ	0	1
1	$\{2\}$	\emptyset
2	$\{3\}$	\emptyset
3	\emptyset	$\{4\}$
4	\emptyset	$\{3, 5\}$
5	\emptyset	\emptyset

- 2 Desenhe o diagrama referente a este AFN.
- 3 Determine o AFD equivalente a este AFN.

Roteiro

1 Conceitos Básicos

2 Equivalência entre AFDs e AFNs

3 AFN λ s

Definição

- Um autômato finito não determinístico com transições λ (AFN λ) é definido de forma semelhante a um AFN.
- A diferença entre ambos está na função de transição, que para AFN λ s é descrita como: $\delta : E \times (\Sigma \cup \{\lambda\}) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
- Ou seja, num AFN λ é possível a realização de transições sem que qualquer símbolo da seja consumido.
- Mesmo com essa capacidade extra, AFN λ s são equivalentes a AFNs.
- Assim sendo, a utilidade de AFN λ s é baseada apenas na possibilidade de obter modelos mais claros e objetivos do que usando AFNs.

Função fecho $\lambda, f\lambda$

- Antes de falar na linguagem aceita por um AFN λ $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$, é interessante definir a função fecho $\lambda, f\lambda : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
- Essa função é definida recursivamente, conforme mostrado a seguir, para um conjunto de estados X qualquer, $X \subseteq E$:
 - $X \subseteq f\lambda(X)$;
 - Se $e \in f\lambda(X)$, então $\delta(e, \lambda) \in f\lambda(X)$.
- Numa descrição em alto nível, $f\lambda(X)$ é o conjunto de todos os estados alcançáveis a partir dos estados em X usando apenas transições sob λ , sem que símbolos sejam consumidos.

AFN λ s e Linguagens

- Seja $\hat{\delta} : \mathcal{P}(E) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(E)$ uma função de transição estendida de um AFN λ qualquer, tal que:
 - $\hat{\delta}(\emptyset, w) = \emptyset$, para todo $w \in \Sigma^*$;
 - $\hat{\delta}(A, \lambda) = f\lambda(A)$, para todo $A \subseteq E$;
 - $\hat{\delta}(A, aw) = \hat{\delta}(\bigcup_{e \in f\lambda(A)} \delta(e, a), w)$.
- De forma semelhante a AFNs, a linguagem aceita por um AFN λ $M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$ é o conjunto

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(I, w) \cap F \neq \emptyset\} .$$

Equivalência entre AFN λ s e AFNs

- Assim como AFDs são como um caso particular de AFNs, é possível ver os próprios ANFs como um caso particular de AFN λ s.
- Sendo assim, a equivalência entre AFN λ s e AFNs pode ser comprovada apenas obtendo AFNs correspondentes a todos AFN λ s.
- Considere então um AFN $\lambda M = (E, \Sigma, \delta, I, F)$. Um AFN equivalente seria $N = (E, \Sigma, \delta', I', F)$, tal que $I' = f\lambda(I)$ e $\delta'(e, a) = f\lambda(\delta(e, a))$.
- Para provar que $L(M) = L(N)$, mostrar-se que $\hat{\delta}'(I', w) = \hat{\delta}(I, w)$.

- 1 $\hat{\delta}'(I', w)$

- 2 $\hat{\delta}'(f\lambda(I), w)$ (Pela definição de I')

- 3 $\hat{\delta}(I, w)$ (Segundo $\hat{\delta}'(f\lambda(X), w) = \hat{\delta}(X, w)$, a provar)

$\hat{\delta}'(f\lambda(X), w) = \hat{\delta}(X, w)$: Prova, indução em $|w|$, base

■ Base: $|w| = 0$ (i.e., $w = \lambda$).

1 $\hat{\delta}'(f\lambda(X), \lambda)$

2 $f\lambda(X)$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFNs)

3 $\hat{\delta}(X, \lambda)$

(Pela definição de $\hat{\delta}$ para AFN λ s)

$\hat{\delta}'(f\lambda(X), w) = \hat{\delta}(X, w)$: Prova, indução em $|w|$, passo

■ Hipótese: $\hat{\delta}'(f\lambda(X), w) = \hat{\delta}(X, w)$, para $|w| = n$.

■ Passo: $\hat{\delta}'(f\lambda(X), aw) = \hat{\delta}(X, aw)$.

1 EXERCÍCIO PARA CASA. :)

Exercício

- 1 Considere um AFN λ $M = (\{1, 2, 2', 3, 3'\}, \{0, 1\}, \delta, \{1\}, \{2, 3\})$, cuja matriz de transições é mostrada a seguir.

δ	0	1	λ
1	\emptyset	$\{3\}$	$\{2\}$
2	$\{2'\}$	\emptyset	\emptyset
2'	$\{2\}$	\emptyset	\emptyset
3	\emptyset	$\{3'\}$	\emptyset
3'	\emptyset	$\{3\}$	\emptyset

- 2 Desenhe o diagrama referente a este AFN λ .
- 3 Determine o AFN equivalente a este AFN λ .