

## Dedução Natural (parte 2)

Douglas O. Cardoso  
douglas.cardoso@cefet-rj.br  
docardoso.github.io



# Roteiro

1 Regras para disjunção

2 Contradições

# Roteiro

1 Regras para disjunção

2 Contradições

# Introdução do $\vee$

- Introdução do  $\vee$  ( $i\vee$ ):

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

- Intuição: acreditar que “o céu é verde” permite afirmar que “o céu é verde e/ou vacas voam”.
- Ou seja, espera-se que ao menos uma das alternativas seja verdade.

## Exemplo de uso: introdução do $\vee$

Prove que:  $p, \neg q \vdash (q \vee p) \vee \neg r$ .

1.  $p$  premissa

2.  $\neg q$  premissa

3.  $q \vee p$   $i\vee$  1

4.  $(q \vee p) \vee \neg r$   $i\vee$  3

# Eliminação do $\vee$ : intuição

- Digamos que eu acredite que “vacas e/ou ovelhas voam”.
- Ou seja, **pelo menos** um desses voa, mas eu não sei qual.
- Ao **supor** que “vacas voam”, posso concluir que “há rebanhos aéreos”.
- Se eu supor que “ovelhas voam”, chego a **mesma** conclusão.
- Então, **sem supor nada**, posso afirmar que “há rebanhos aéreos”.
- Só não sei se são rebanhos de ovelhas ou vacas.

# Eliminação do $\vee$ ( $e\vee$ )

$$\frac{\begin{array}{cc} [\phi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots \\ \phi \vee \psi & \chi \quad \chi \end{array}}{\chi}$$

- O uso dessa regra se dá em 4 passos:
  1. É identificada a disjunção que será a base da eliminação;
  2. Pela suposição de um operando da disjunção, é concluído um certo fato;
  3. Pela suposição do outro operando, é obtida a mesma conclusão;
  4. Então, é inferida como fato a conclusão de ambas suposições.
- **Lembre-se:** não misture as suposições; são sub-universos distintos!

## Exemplo de uso: eliminação do $\vee$

Prove que:  $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$

- |        |                                 |                                   |
|--------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1.     | $q \rightarrow r$               | premissa                          |
| 2.     | $[p \vee q]$                    | suposição                         |
| 2.1.   | $[p]$                           | suposição                         |
| 2.1.1. | $p \vee r$                      | $i\vee$ 2.1                       |
| 2.2.   | $[q]$                           | suposição                         |
| 2.2.1. | $r$                             | $e \rightarrow$ 1, 2.2            |
| 2.2.2. | $p \vee r$                      | $i\vee$ 2.2.1                     |
| 2.3.   | $p \vee r$                      | $e\vee$ 2, 2.1, 2.1.1, 2.2, 2.2.2 |
| 3.     | $p \vee q \rightarrow p \vee r$ | $i \rightarrow$ 2, 2.3            |



# Teste seus conhecimentos

Prove que:

1.  $(p \vee q) \vee r \dashv\vdash p \vee (q \vee r)$  <sup>1</sup>;
2.  $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ .

---

<sup>1</sup> “ $\phi \dashv\vdash \psi$ ” indica a realização de duas provas:  $\phi \vdash \psi$  e  $\psi \vdash \phi$ .

# Roteiro

1 Regras para disjunção

2 Contradições

# Noções básicas

- Uma contradição é a conclusão de qualquer combinação de premissas contrárias uma a outra.
- Contradições também são conhecidas como Absurdos.
- O símbolo usado para representar uma contradição é  $\perp$ .

# Regra do Absurdo

- Absurdo (*abs*):

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp}$$

- Intuição: afirmar “hoje vai chover” logo após “hoje não vai chover”; contraditório, não?
- Esta regra também é conhecida como “eliminação da negação”.

# Redução ao Absurdo

- Redução ao Absurdo (*raa*):

$$\frac{[\phi] \quad \vdots \quad \perp}{\neg\phi}$$

- Intuição: se a suposição de que “vacas voam” leva a conclusão absurda de que “ $1=2$ ”, é natural então inferir que “vacas **não** voam”.
- Esta regra também é conhecida como “introdução da negação”.

# Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo

Prove que:  $\neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash p$ .

- |      |                             |                      |
|------|-----------------------------|----------------------|
| 1.   | $\neg p \rightarrow q$      | premissa             |
| 2.   | $\neg p \rightarrow \neg q$ | premissa             |
| 3.   | $[\neg p]$                  | suposição            |
| 3.1. | $q$                         | $e \rightarrow 3, 1$ |
| 3.2. | $\neg q$                    | $e \rightarrow 3, 2$ |
| 3.3. | $\perp$                     | <i>abs</i> 3.1, 3.2  |
| 4.   | $p$                         | <i>raa</i> 3, 3.3    |

# Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo (2)

Prove que:  $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$ .

1.  $p \rightarrow \neg p$  premissa

2.  $[p]$  suposição

2.1.  $\neg p$   $e \rightarrow 2, 1$

2.2.  $\perp$   $abs\ 2, 2.1$

3.  $\neg p$   $raa\ 2, 2.2$

# Teste seus conhecimentos

Prove que:

1.  $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q;$

2.  $\neg p \vee q \not\vdash p \rightarrow q.$