

Lema do Bombeamento

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br



Roteiro

1 Noções Básicas

2 Exemplos

Roteiro

1 Noções Básicas

2 Exemplos

Motivação

- As linguagens reconhecidas por AFs são ditas **regulares**.
- Nem toda linguagem é regular.
 - Por exemplo, $\{0^n 1^n : n \in \mathbb{N}\}$.
- Avaliar se uma linguagem a ser reconhecida é ou não regular antes de tentar definir um AF que a reconheça pode evitar trabalho inútil.
- Tal avaliação pode ser feita utilizando propriedades simples derivadas da definição de AFs.

Intuição (1)

- Seja L uma linguagem qualquer.
- Deseja-se determinar um AF que reconheça L , se isto for possível.
 - Se L é finita, isto não só é possível como é trivial. (por que?)
- Considere que L é infinita. Ou seja, $(\forall x \in \mathbb{N})(\exists w \in L)[|w| > x]$.
 - L poderia ser infinita se $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall w \in L)[|w| \leq x]$?

Intuição (2)

- Suponha que exista um AFD $M = (E, \Sigma, \delta, i, F)$ que reconheça L .
- Se $w \in L \wedge |w| > |E|$, não há como fazer a computação de w sem visitar algum estado de M mais de uma vez.
 - Princípio das gavetas, ou do pombo, ou de Dirichlet.
- Consequentemente, há algum ciclo em M .

Intuição (3)

- Seja $w = xyz$ uma decomposição tal que x, y e z são as palavras consumidas antes, durante e após o ciclo, respectivamente.
- Nota-se que $(\forall n \in \mathbb{N})[\hat{\delta}(i, w) = \hat{\delta}(i, xy^n z)]$.
 - n é o número de repetições do ciclo.
- Logo, se $\hat{\delta}(i, w) \in F$, então $\hat{\delta}(i, xy^n z) \in F$.
- Ou seja, se $w \in L$, então $xy^n z \in L$.
- Se esta última implicação for falsa, não há AFD que reconheça L .
 - M não pode reconhecer w e não reconhecer $xy^n z$ simultaneamente.

Lema do Bombeamento (para linguagens regulares)

Seja L uma linguagem regular. Então existe uma constante $k > 0$ tal que para qualquer palavra $w \in L$, $|w| \geq k$, existem x, y e z que satisfazem as seguintes condições:

1 $w = xyz;$

2 $|xy| \leq k;$

3 $y \neq \lambda;$

4 $(\forall n \in \mathbb{N})[xy^n z \in L].$

Informações Adicionais

- Toda linguagem regular segue o Lema do Bombeamento (LB):
 $R \rightarrow LB$.
- Todavia, a recíproca não é verdadeira: $\neg(LB \rightarrow R)$.
- Para mostrar que uma linguagem não é regular basta mostrar que **apenas uma** de suas palavras não possui **nenhuma** subpalavra bombeável, dentre todas as possíveis.
- É prático e usual pensar que $k = |E|$.

Roteiro

1 Noções Básicas

2 Exemplos

Exemplo 1: $L = \{0^m 1^m : m \geq 0\}$

- Seja $w = 0^k 1^k$, sendo k a constante do LB.
- Para $w = xyz$, $x = 0^i$, $y = 0^j$ e $z = 0^{k-i-j} 1^k$.
- $xy^n z = 0^{i+jn+k-i-j} 1^k = 0^{k+j(n-1)} 1^k$.
- Para que $xy^n z \in L$, $k + j(n-1) = k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Porém, a equação só vale se $j = 0$.
- Isso contradiz a condição 3 do LB ($y \neq \lambda$).
- Logo, L não é regular.

Exemplo 2: $L = \{uu : u \in \{0, 1\}^*\}$

- Seja $w = 0^k 10^k 1$, sendo k a constante do LB.
- Para $w = xyz$, $x = 0^i$, $y = 0^j$ e $z = 0^{k-i-j} 10^k 1$.
- $xy^n z = 0^{i+jn+k-i-j} 10^k 1 = 0^{k+j(n-1)} 10^k 1$.
- Para que $xy^n z \in L$, $k + j(n - 1) = k$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Porém, a equação só vale se $j = 0$.
- Isso contradiz a condição 3 do LB ($y \neq \lambda$).
- Logo, L não é regular.