Dedução Natural (parte 2)

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

Roteiro

Roteiro

Introdução da implicação ($i \rightarrow$)

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{matrix}}{\phi \rightarrow \psi}$$

- Intuição: se a suposição de que "vacas voam" permite afirmar que "há rebanhos aéreos", é possível concluir que "se vacas voassem, haveriam rebanhos aéreos".

Suposições e Sub-universos

- Ao fazer uma suposição, é criado um "sub-universo", dentro do "universo" atual
- As proposições do universo atual continuam válidas no sub-universo
- No sub-universo o que foi suposto é tido como uma proposição válida qualquer
- As proposições obtidas no sub-universo dependem da suposição feita, então não são válidas fora do sub-universo
- É possível criar um sub-universo dentro de outro já existente

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \to (q \to r) \vdash p \land q \to r$

1	$p \to (q \to r)$	premissa
2	$[p \land q]$	suposição
2.1	p	$e \land 2$
2.2	$q \to r$	$e \to 1, 2.1$
2.3	q	$e \land 2$
2.4	r	$e \to 2.2, 2.3$
3	$p \land q \to r$	$i \to 2, 2.4$

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \wedge q \rightarrow r \vdash p \rightarrow (q \rightarrow r)$

1	$p \wedge q \rightarrow r$	premissa
2	$[p]$	suposição
2.1	$[q]$	suposição
2.1.1	$p \wedge q$	$i \wedge 2, 2.1$
2.1.2	r	$e \rightarrow 1, 2.1.1$
2.2	$q \rightarrow r$	$i \rightarrow 2.1, 2.1.2$
3	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$i \rightarrow 2, 2.2$

Teste seus conhecimentos

Prove que: $p \to q \vdash p \wedge r \to q \wedge r$

1	$p \to q$	premissa
2	$[p \wedge r]$	suposição
2.1	p	$e \wedge 2$
2.2	r	$e \wedge 2$
2.3	q	$e \to 1, 2.1$
2.4	$q \wedge r$	$i \wedge 2.2, 2.3$
3	$p \wedge r \to q \wedge r$	$i \to 2, 2.4$

Roteiro

Introdução do $\vee$

- Introdução do $\vee$ $(i\vee)$:

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

- Intuição: acreditar que "o céu é verde" permite afirmar que "o céu é verde e/ou vacas voam".
    - Ou seja, espera-se que ao menos uma das alternativas seja verdade.

Exemplo de uso: introdução do $\vee$

Prove que: $p, \neg q \vdash (q \vee p) \vee \neg r$.

1.	p	premissa
2.	$\neg q$	premissa
3.	$q \vee p$	$i\vee$ 1
4.	$(q \vee p) \vee \neg r$	$i\vee$ 3

Eliminação do $\vee$: intuição

- Digamos que eu acredite que "vacas e/ou ovelhas voam".
- Ou seja, pelo menos um desses voa, mas eu não sei qual.
- Ao supor que "vacas voam", posso concluir que "há rebanhos aéreos".
- Se eu supor que "ovelhas voam", chego a mesma conclusão.
- Então, sem supor nada, posso afirmar que "há rebanhos aéreos".
  - Só não sei se são rebanhos de ovelhas ou vacas.

Eliminação do $\vee$ ($e\vee$)

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \chi\end{matrix}}{\chi}$$

- O uso dessa regra se dá em 4 passos:
    1. É identificada a disjunção que será a base da eliminação;
    2. Pela suposição de um operando da disjunção, é concluído um certo fato;
    3. Pela suposição do outro operando, é obtida a mesma conclusão;
    4. Então, é inferida como fato a conclusão de ambas suposições.
- Lembre-se: não misture as suposições; são sub-universos distintos!

Exemplo de uso: eliminação do $\vee$

Prove que: $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$

1.	$q \rightarrow r$	premissa
2.	$[p \vee q]$	suposição
2.1.	$[p]$	suposição
2.1.1.	$p \vee r$	$i\vee$ 2.1
2.2.	$[q]$	suposição
2.2.1.	r	$e \rightarrow$ 1, 2.2
2.2.2.	$p \vee r$	$i\vee$ 2.2.1
2.3.	$p \vee r$	$e\vee$ 2, 2.1, 2.1.1, 2.2, 2.2.2
3.	$p \vee q \rightarrow p \vee r$	$i \rightarrow$ 2, 2.3

Teste seus conhecimentos

Prove que: $(p \vee q) \vee r \dashv\vdash p \vee (q \vee r)$ [1].

[1] "$\phi \dashv\vdash \psi$" indica a realização de duas provas: $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$.

Roteiro

Noções básicas

- Uma contradição é a conclusão de qualquer combinação de premissas contrárias uma a outra.
- Contradições também são conhecidas como Absurdos.
- O símbolo usado para representar uma contradição é $\perp$.

Regra do Absurdo

- Absurdo (abs):

$$\frac{\phi \qquad \neg\phi}{\bot}$$

- Intuição: afirmar "hoje vai chover" logo após "hoje não vai chover"; contraditório, não?

- Esta regra também é conhecida como "eliminação da negação".

Redução ao Absurdo

- Redução ao Absurdo (raa):

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg\phi}$$

- Intuição: se a suposição de que "vacas voam" leva a conclusão absurda de que "1=2", é natural então inferir que "vacas não voam".

- Esta regra também é conhecida como "introdução da negação".

Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo

Prove que: $\neg p \to q, \neg p \to \neg q \vdash p$.

1.	$\neg p \to q$	premissa
2.	$\neg p \to \neg q$	premissa
3.	$[\neg p]$	suposição
3.1.	q	$e \to$ 3, 1
3.2.	$\neg q$	$e \to$ 3, 2
3.3.	$\perp$	abs 3.1, 3.2
4.	p	raa 3, 3.3

Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo (2)

Prove que: $p \to \neg p \vdash \neg p$.

1.	$p \to \neg p$	premissa
2.	$[p]$	suposição
2.1.	$\neg p$	$e \to$ 1, 2
2.2.	$\perp$	abs 2, 2.1
3.	$\neg p$	raa 2, 2.2

Teste seus conhecimentos

Prove que: $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$.

Roteiro

1. Suposições
2. Regras para disjunção
3. Contradições
4. **Regras Derivadas**
5. Equivalências Populares

Informações Gerais

- Regras derivadas são sequências "auto-contidas" de aplicações das regras básicas de inferência (DN).
- São "atalhos" na descrição de provas, evitando repetições de passos.
- Não há impedimentos para o uso ou mesmo criação de regras derivadas, mas é necessário prová-las.
- Algumas regras derivadas são tão conhecidas quanto as regras básicas.

Modus Tollens

Modus Tollens (mt):

$$\frac{\phi \to \psi \qquad \neg\psi}{\neg\phi}$$

1. $p \to q$	premissa
2. $\neg q$	premissa
3. $[p]$	suposição
3.1. q	$e \to$ 1, 3
3.2. $\perp$	abs 2, 3.1
4. $\neg p$	raa 3, 3.2

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (pte): $\dfrac{\varnothing}{\phi \vee \neg\phi}$

1. $[\neg(p \vee \neg p)]$	suposição
1.1. $[p]$	suposição
1.1.1. $p \vee \neg p$	$i \vee$ 1.1
1.1.2. $\perp$	abs 1, 1.1.1
1.2. $\neg p$	rra 1.1, 1.1.2
1.3. $p \vee \neg p$	$i \vee$ 1.2
1.4. $\perp$	abs 1, 1.3
2. $p \vee \neg p$	raa 1, 1.4

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1): $\dfrac{\phi \vee \psi \qquad \neg\phi}{\psi}$

1.	$p \vee q$	premissa
2.	$\neg p$	premissa
3.	$[\neg q]$	suposição
3.1.	$[p]$	suposição
3.1.1.	$\perp$	abs 2, 3.1
3.2.	$[q]$	suposição
3.2.1.	$\perp$	abs 3, 3.2
3.3.	$\perp$	$e\vee$ 1, 3.1, 3.1.1, 3.2, 3.2.1
4.	q	raa 3,3.3

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2): $$\frac{\phi \vee \psi \qquad \neg\phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

1.	$p \vee q$	premissa
2.	$\neg p \vee r$	premissa
3.	$[p]$	suposição
3.1.	r	res_1 2, 3
3.2.	$q \vee r$	$i\vee$ 3.1
4.	$[q]$	suposição
4.1.	$q \vee r$	$i\vee$ 4
5.	$q \vee r$	$e\vee$ 1, 3, 3.2, 4, 4.1

Roteiro

Informações Gerais

- Duas fórmulas ϕ e ψ para as quais vale $\phi \vdash \psi$ assim como $\psi \vdash \phi$ são ditas equivalentes (segundo prova).
- Para provar uma equivalência $\phi \dashv\vdash \psi$ é necessário provar tanto a "ida" $\phi \vdash \psi$ quanto a "volta" $\psi \vdash \phi$.
- Assim como as regras derivadas, algumas equivalências são populares pelo seu uso frequente em provas.
- São apresentadas a seguir algumas dessas equivalências, e a prova da ida de cada uma delas. É sugerido como exercício provar cada volta.

Contraposição

Contraposição (cp): $\phi \to \psi \dashv\vdash \neg\psi \to \neg\phi$

1. $p \to q$	premissa
2. $[\neg q]$	suposição
2.1. $[p]$	suposição
2.1.1. q	$e \to$ 1, 2.1
2.1.2. $\bot$	abs 2, 2.1.1
2.2. $\neg p$	rra 2.1, 2.1.2
3. $\neg q \to \neg p$	$i \to$ 2, 2.2

* Usando *modus tollens*

1. $p \to q$	premissa
2. $[\neg q]$	suposição
2.1. $\neg p$	mt 1, 2
3. $\neg q \to \neg p$	$i \to$ 3.1, 2.1

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (dm): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

1.	$\neg p \vee \neg q$	premissa
2.	$[p \wedge q]$	suposição
2.1.	$[\neg p]$	suposição
2.1.1.	p	$e \wedge 2$
2.1.2.	$\bot$	abs 2.1, 2.1.1
2.2.	$[\neg q]$	suposição
2.2.1.	q	$e \wedge 2$
2.2.2.	$\bot$	abs 2.2, 2.2.1
2.3.	$\bot$	$e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$
3.	$\neg(p \wedge q)$	rra 2, 2.3

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (dm): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

1.	$\neg p \wedge \neg q$	premissa
2.	$[p \vee q]$	suposição
2.1.	$[p]$	suposição
2.1.1.	$\neg p$	$e \wedge 1$
2.1.2.	$\perp$	abs 2.1, 2.1.1
2.2.	$[q]$	suposição
2.2.1.	$\neg q$	$e \wedge 1$
2.2.2.	$\perp$	abs 2.2, 2.2.1
2.3.	$\perp$	$e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$
3.	$\neg(p \vee q)$	rra 2, 2.3

Equivalência implicação-disjunção $\neg\phi \lor \psi \dashv\vdash \phi \to \psi$

Equivalência implicação-disjunção (eid): $\neg p \lor q \dashv\vdash p \to q$

1.	$\neg p \lor q$	premissa
2.	$[p]$	suposição
2.1.	q	res_1 1, 2
3.	$p \to q$	$i \to 2, 2.1$

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjução sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1.	$p \wedge (q \vee r)$	premissa
2.	p	$e \wedge 1$
3.	$(q \vee r)$	$e \wedge 1$
4.	$[q]$	suposição
4.1.	$p \wedge q$	$i \wedge 2, 4$
4.2.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$i \vee 4.1$
5.	$[r]$	suposição
5.1.	$p \wedge r$	$i \wedge 2, 5$
5.2.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$i \vee 5.1$
6.	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$e \vee 3, 4, 4.2, 5, 5.2$

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1.	$p \vee (q \wedge r)$	premissa
2.	$[p]$	suposição
2.1.	$p \vee q$	$i \vee 2$
2.2.	$p \vee r$	$i \vee 2$
2.3.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i \wedge 2.1, 2.2$
3.	$[q \wedge r]$	suposição
3.1.	q	$e \wedge 3$
3.2.	r	$e \wedge 3$
3.3.	$p \vee q$	$i \vee 3.1$
3.4.	$p \vee r$	$i \vee 3.2$
3.5.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i \wedge 3.3, 3.4$
4.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$e \vee 1, 2, 2.3, 3, 3.5$