

Autômatos Finitos Determinísticos

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br



Roteiro

- 1 Uma Introdução Intuitiva
- 2 Autômatos Finitos Determinísticos (AFDs)
- 3 Exercícios

Roteiro

1 Uma Introdução Intuitiva

2 Autômatos Finitos Determinísticos (AFDs)

3 Exercícios

Um leão, um coelho e um repolho

- Numa margem de um rio estão um leão, um coelho e um repolho. Você deve atravessar de canoa os 3 para a outra margem, um por vez. Porém, não podem ser deixados sozinhos o leão com o coelho, ou o coelho com o repolho.
- Como você faria isso?
- Há mais de um jeito de fazer isso?

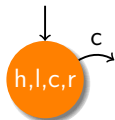
Modelagem

- Símbolos: humano = h, leão = l, coelho = c, repolho = r
- Estado inicial: todos numa mesma margem do rio; $\{h, l, c, r\}$
- Abstração 1: Não preciso representar a posição da canoa
 - Afinal, ela está onde o homem está
- Abstração 2: cada “passo” é uma travessia
 - Não é preciso registrar ações como “fulano entra na canoa”
 - Agora, é importante registrar quem atravessou

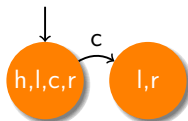
Solução



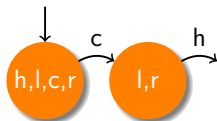
Solução



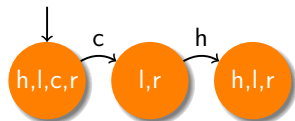
Solução



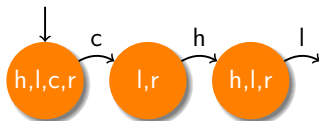
Solução



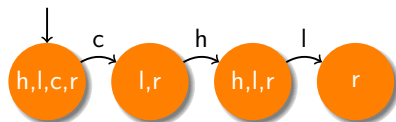
Solução



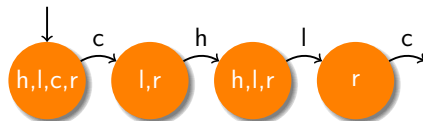
Solução



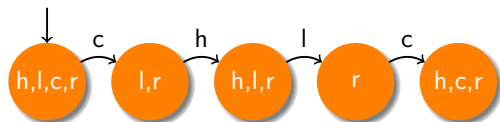
Solução



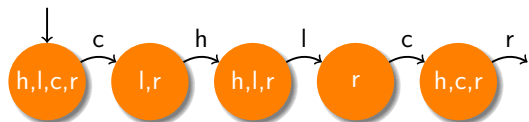
Solução



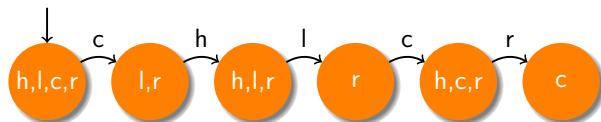
Solução



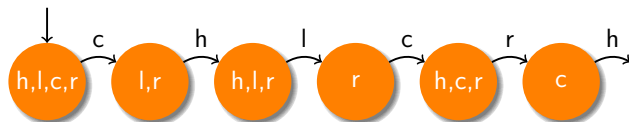
Solução



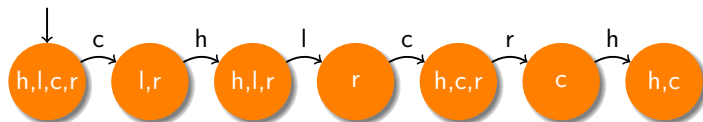
Solução



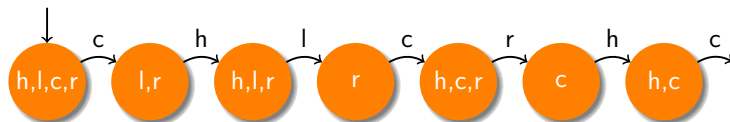
Solução



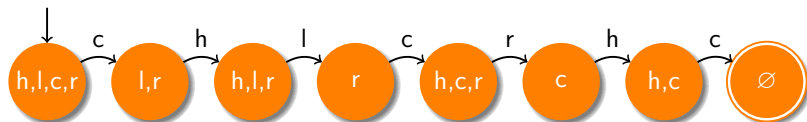
Solução



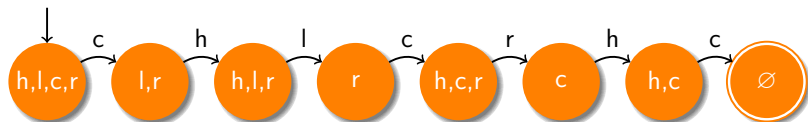
Solução



Solução

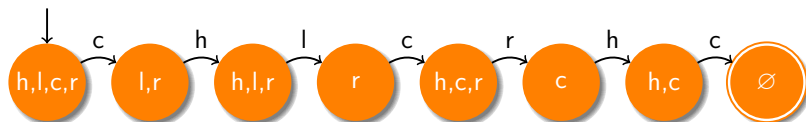


Solução

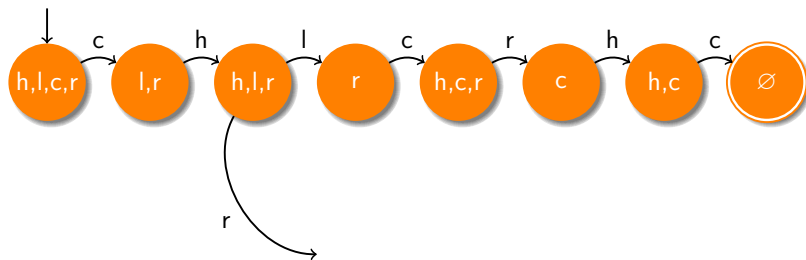


A solução é: chlc r h c

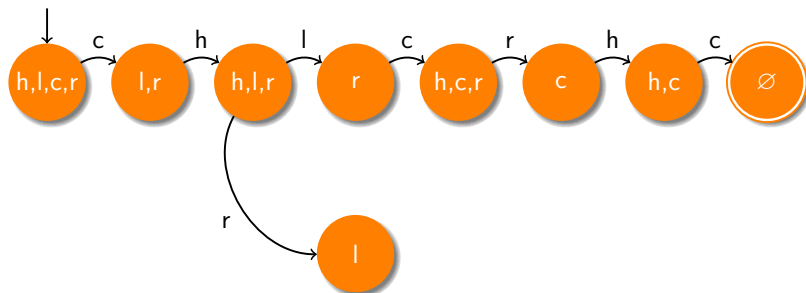
Outra solução?



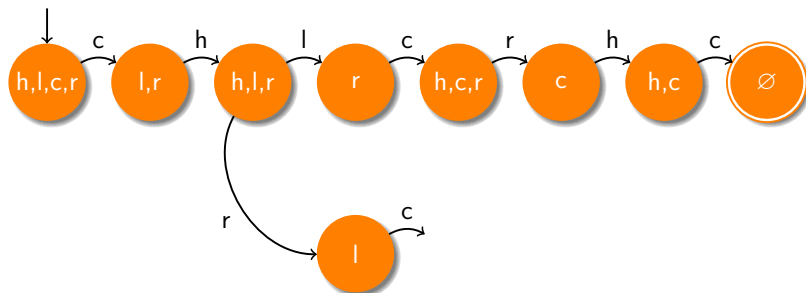
Outra solução?



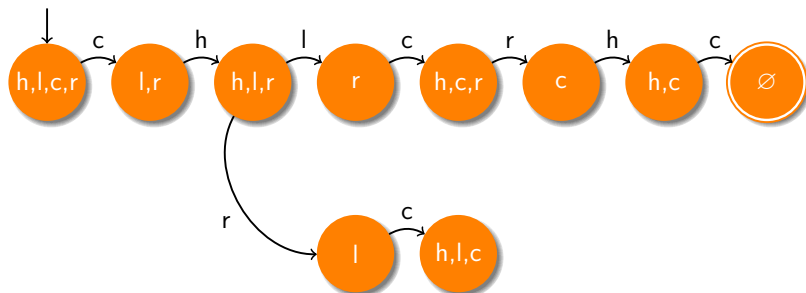
Outra solução?



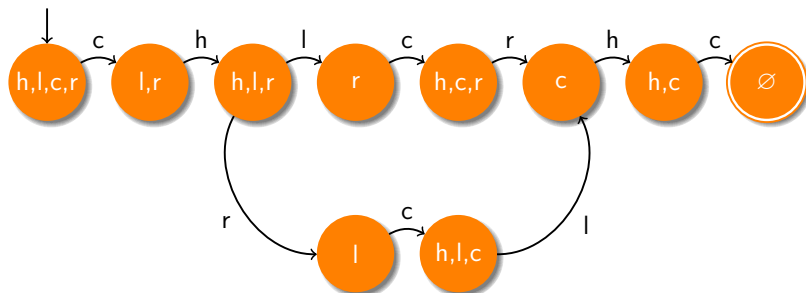
Outra solução?



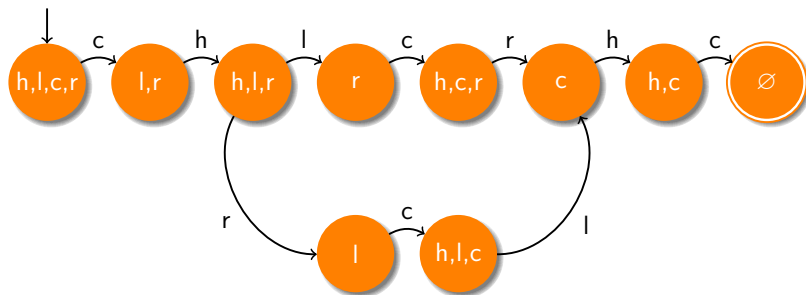
Outra solução?



Outra solução?

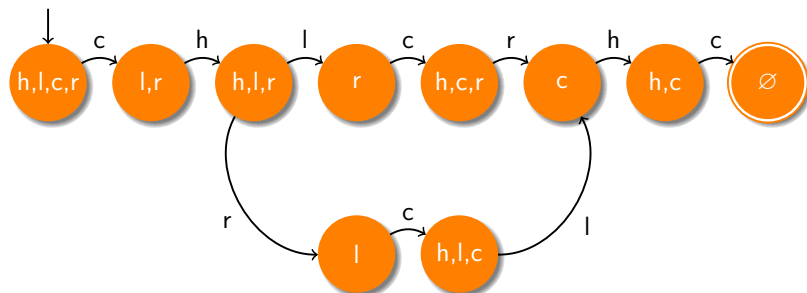


Outra solução?

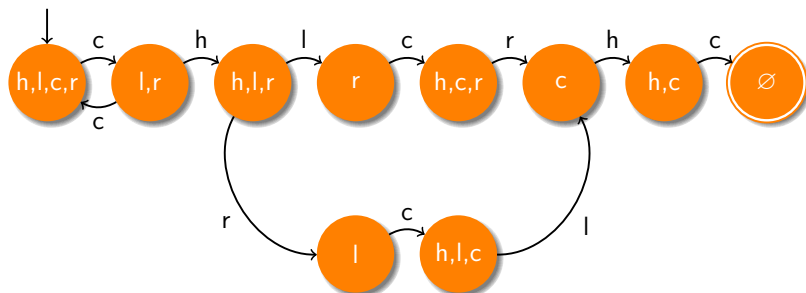


Outra solução é: `chrclhc`

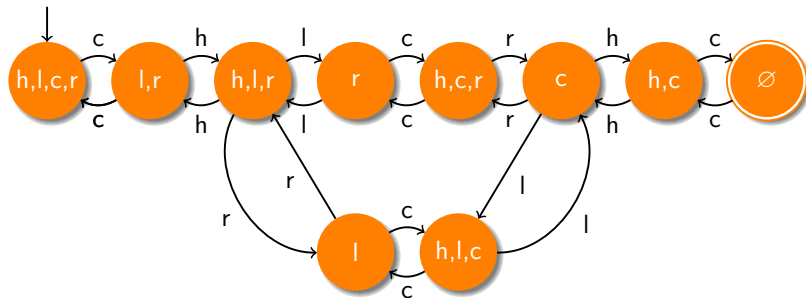
Outras soluções?



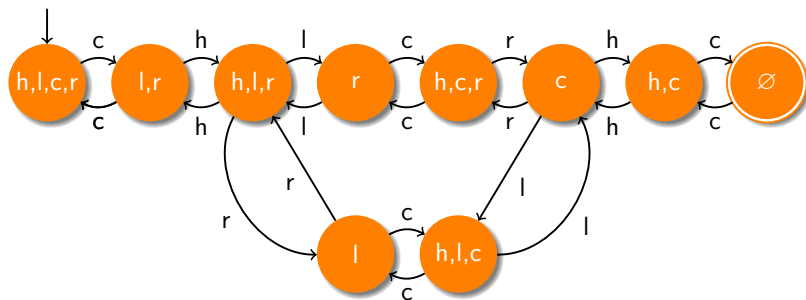
Outras soluções?



Outras soluções?



Outras soluções?



Na verdade, infinitas soluções!

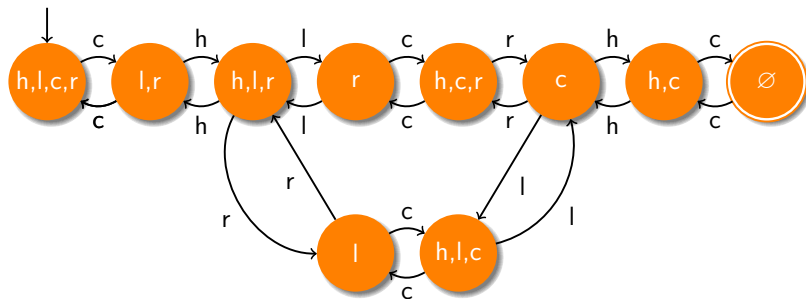
Reconhecimento de soluções

- Seja $\Sigma = \{h, l, c, r\}$ um alfabeto, i.e., um conjunto finito, não-vazio de símbolos
- Seja uma palavra sobre Σ uma sequência finita de elementos desse conjunto
 - Por exemplo: `chrclhc` e `chlcrhc`
 - O número de símbolos (i.e., o tamanho) de uma palavra w é indicado por $|w|$
 - A palavra de tamanho zero é representada por λ
- Seja Σ^* o conjunto de todas as palavras sobre Σ
- Como verificar se $w \in \Sigma^*$ é uma solução?

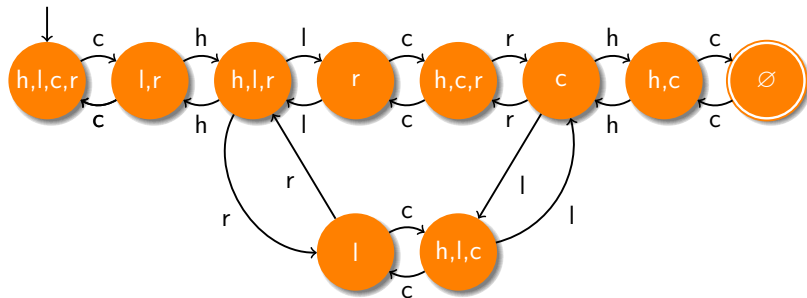
Resposta: computação

- Verificar se o caminho correspondente a w leva ao estado final
- Em caso positivo, diz-se que w foi **aceita** (ou reconhecida)
- Senão, w foi **rejeitada**
- Denomina-se **computação** o processamento de uma palavra
- Uma computação é denotada usando a notação $[e_1, ax] \vdash [e_2, x]$, considerando que exista uma transição do estado e_1 para e_2 sob o símbolo a

Exemplo de computação: *chrclhc*, desde o estado inicial

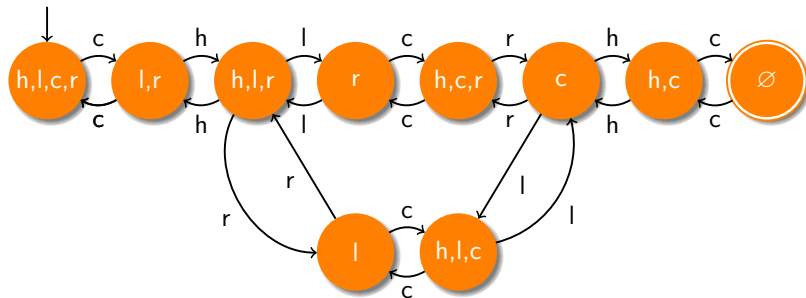


$[\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash$

Exemplo de computação: *chrclhc*, desde o estado inicial

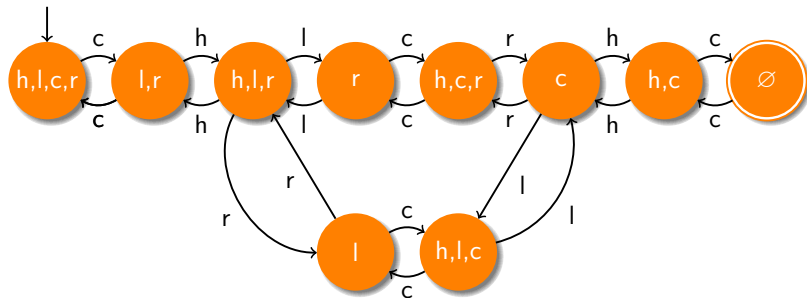
$$[\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash [\{l, r\}, hrclhc] \vdash$$

Exemplo de computação: chrclhc, desde o estado inicial



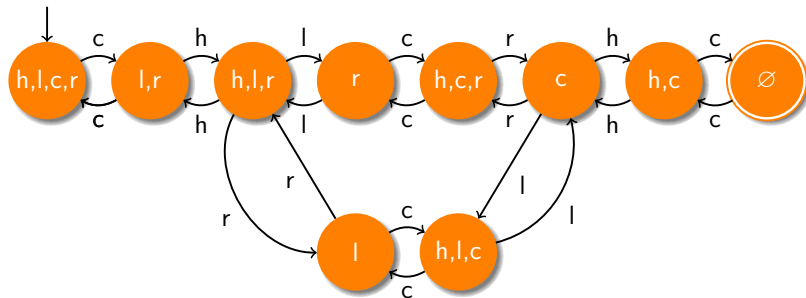
$$[\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash [\{l, r\}, hrclhc] \vdash$$

$$[\{h, l, r\}, rclhc] \vdash$$

Exemplo de computação: *chrclhc*, desde o estado inicial

$$[\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash [\{l, r\}, hrclhc] \vdash$$

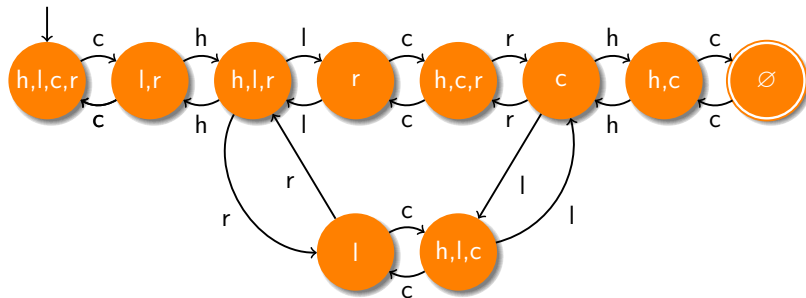
$$[\{h, l, r\}, rclhc] \vdash [\{l\}, clhc] \vdash$$

Exemplo de computação: *chrclhc*, desde o estado inicial

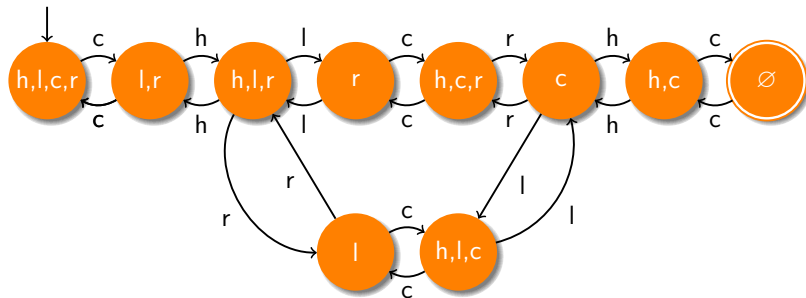
$$[\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash [\{l, r\}, hrclhc] \vdash$$

$$[\{h, l, r\}, rclhc] \vdash [\{l\}, clhc] \vdash [\{h, l, c\}, lhc] \vdash$$

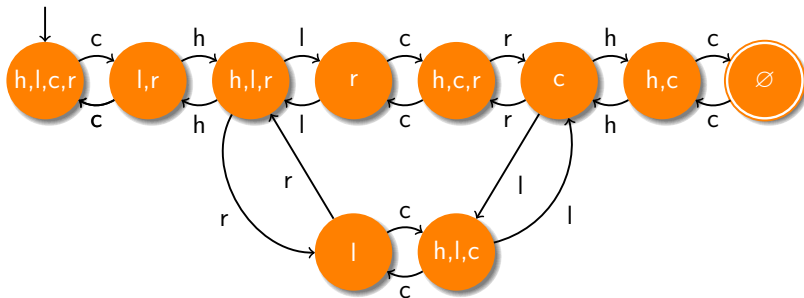
Exemplo de computação: chrclhc, desde o estado inicial



$$\begin{aligned}
 & [\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash [\{l, r\}, hrclhc] \vdash \\
 & [\{h, l, r\}, rclhc] \vdash [\{l\}, clhc] \vdash [\{h, l, c\}, lhc] \vdash \\
 & [\{c\}, hc] \vdash
 \end{aligned}$$

Exemplo de computação: *chrclhc*, desde o estado inicial

$$\begin{aligned}
 & [\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash [\{l, r\}, hrclhc] \vdash \\
 & [\{h, l, r\}, rclhc] \vdash [\{l\}, clhc] \vdash [\{h, l, c\}, lhc] \vdash \\
 & [\{c\}, hc] \vdash [\{h, c\}, c] \vdash
 \end{aligned}$$

Exemplo de computação: *chrclhc*, desde o estado inicial

$$\begin{aligned}
 & [\{h, l, c, r\}, chrclhc] \vdash [\{l, r\}, hrclhc] \vdash \\
 & [\{h, l, r\}, rclhc] \vdash [\{l\}, clhc] \vdash [\{h, l, c\}, lhc] \vdash \\
 & [\{c\}, hc] \vdash [\{h, c\}, c] \vdash [\emptyset, \lambda]
 \end{aligned}$$

Roteiro

1 Uma Introdução Intuitiva

2 Autômatos Finitos Determinísticos (AFDs)

3 Exercícios

Definição

Um AFD é definido pela quintupla $(E, \Sigma, \delta, i, F)$, em que:

Definição

Um AFD é definido pela quintupla $(E, \Sigma, \delta, i, F)$, em que:

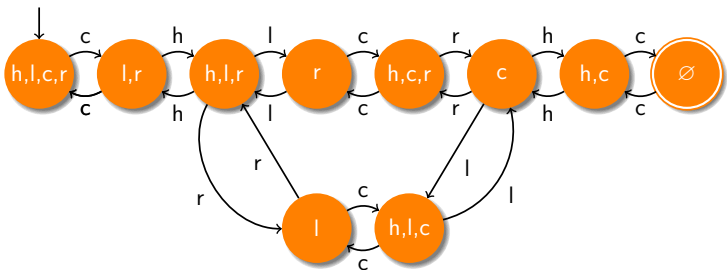
- E é um conjunto **finito, não-vazio** de elementos denominados estados
- Σ é um alfabeto
- $\delta : E \times \Sigma \rightarrow E$ é a **função** de transição (determinismo)
- $i, i \in E$, é o estado inicial
- $F, F \subset E$, é o conjunto de estados finais

Um estado “terminal”

- Uma função mapeia cada elemento do seu domínio

Um estado “terminal”

- Uma função mapeia cada elemento do seu domínio
- Todavia, não há transições sob todos os símbolos a partir de todos os estados do exemplo



Um estado “terminal”

- Uma função mapeia cada elemento do seu domínio
- Todavia, não há transições sob todos os símbolos a partir de todos os estados do exemplo
- Assume-se então que há um estado **não-terminal** ‘t’ que foi omitido do diagrama

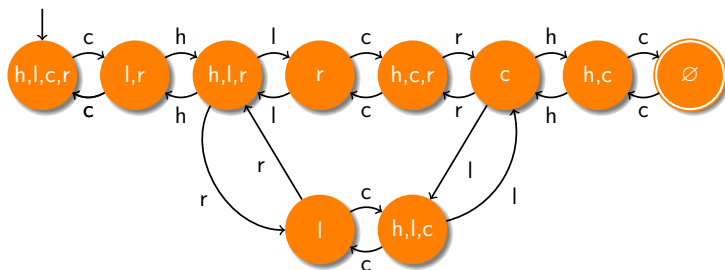
Um estado “terminal”

- Uma função mapeia cada elemento do seu domínio
- Todavia, não há transições sob todos os símbolos a partir de todos os estados do exemplo
- Assume-se então que há um estado **não-terminal** ‘t’ que foi omitido do diagrama
- Se uma transição de um estado e sob um símbolo a não foi especificada, assume-se que $\delta(e, a) = t$

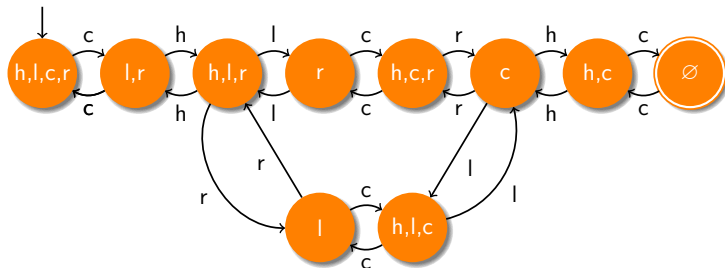
Um estado “terminal”

- Uma função mapeia cada elemento do seu domínio
- Todavia, não há transições sob todos os símbolos a partir de todos os estados do exemplo
- Assume-se então que há um estado **não-terminal** ‘t’ que foi omitido do diagrama
- Se uma transição de um estado e sob um símbolo a não foi especificada, assume-se que $\delta(e, a) = t$
- Por fim, $\forall_{a \in \Sigma} \delta(t, a) = t$

Exemplo



Exemplo



- $E =$
 $\{\{h, l, c, r\}, \{l, r\}, \{h, l, r\}, \{l\}, \{r\}, \{h, l, c\}, \{h, c, r\}, \{c\}, \{h, c\}, \emptyset, t\}$
- $\Sigma = \{h, l, c, r\}$
- $i = \{h, l, c, r\}$
- $F = \{\emptyset\}$

Exemplo, função de transição

δ	h	l	c	r
$\{h, l, c, r\}$	t	t	$\{l, r\}$	t
$\{l, r\}$	$\{h, l, r\}$	t	$\{h, l, c, r\}$	t
$\{h, l, r\}$	$\{l, r\}$	$\{r\}$	t	$\{l\}$
$\{l\}$	t	t	$\{h, l, c\}$	$\{h, l, r\}$
$\{r\}$	t	$\{h, l, r\}$	$\{h, c, r\}$	t
$\{h, l, c\}$	t	$\{c\}$	$\{l\}$	t
$\{h, c, r\}$	t	t	$\{r\}$	$\{c\}$
$\{c\}$	$\{h, c\}$	$\{h, l, c\}$	t	$\{h, c, r\}$
$\{h, c\}$	$\{c\}$	t	\emptyset	t
\emptyset	t	t	$\{h, c\}$	t
t	t	t	t	t

Linguagens

- Uma linguagem é um conjunto de palavras
- A linguagem aceita por um AFD M , $L(M)$, é o conjunto de palavras que M aceita
- Seja $\hat{\delta} : E^* \rightarrow E$ uma função de transição estendida, tal que:
 - $\hat{\delta}(e, \lambda) = e$
 - $\hat{\delta}(e, aw) = \hat{\delta}(\delta(e, a), w)$
- Então, $L(M) = \{w \in \Sigma^* : \hat{\delta}(i, w) \in F\}$
- Dado outro AFD M' , se e somente se $L(M) = L(M')$, diz-se que M e M' são equivalentes

Roteiro

- 1 Uma Introdução Intuitiva
- 2 Autômatos Finitos Determinísticos (AFDs)
- 3 Exercícios**

Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?

Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?

Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?

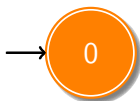
Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



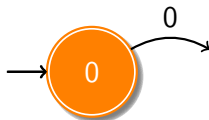
Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



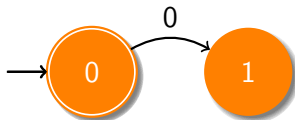
Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



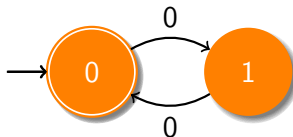
Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



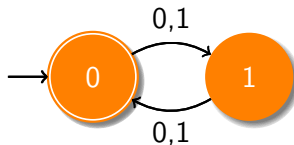
Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



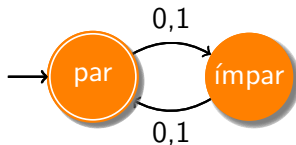
Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



Exercício 1: um AFD para uma linguagem

- Descreva um AFD M , dado que:
- $L(M) = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem um número par de símbolos}\}$
- Ideia: qual a menor palavra que M deve aceitar? E que deve rejeitar?



Caracterização formal

- $\Sigma = \{0, 1\}$
- $E = \{\text{par}, \text{ímpar}\}$
- $i = \text{par}$
- $F = \{\text{par}\}$

δ	0	1
par	ímpar	ímpar
ímpar	par	par

Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

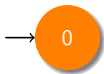
- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}

Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}

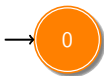
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}



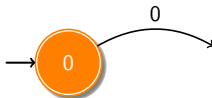
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}



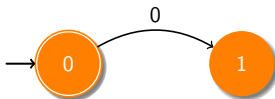
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}



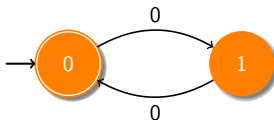
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}



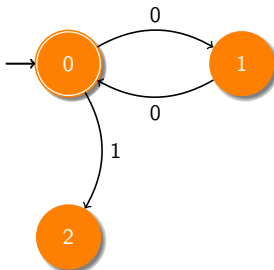
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}



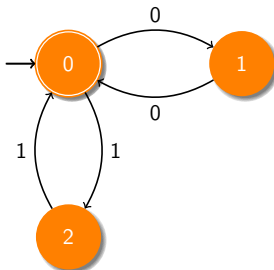
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}



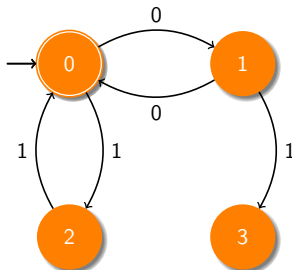
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* :$
 w tem um número par de 0s e um número par de 1s}



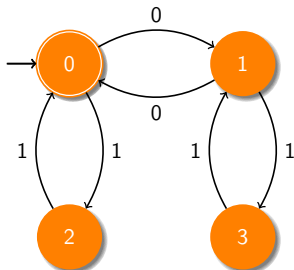
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de 0s e um número par de 1s}\}$



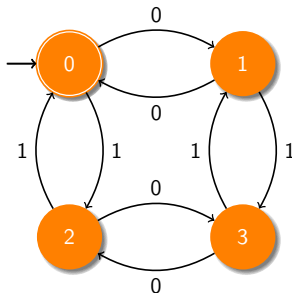
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de 0s e um número par de 1s}\}$



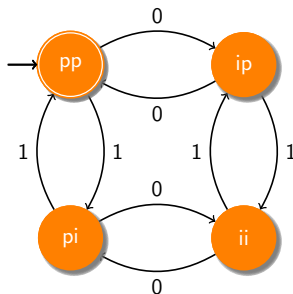
Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de 0s e um número par de 1s}\}$



Exercício 2: outro AFD para outra linguagem

- Descreva um AFD M' , dado que:
- $L(M') = \{w \in \{0, 1\}^* : w \text{ tem um número par de 0s e um número par de 1s}\}$



Exercício 3: adaptando M'

- Seja M'' um AFD tal que:
- $L(M'') = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem os números de 0s e 1s ambos pares, ou ambos ímpares}\}$
- Como modificar o diagrama de M' para definir M'' ?

Exercício 3: adaptando M'

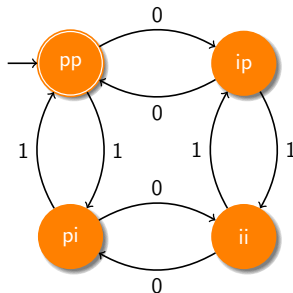
- Seja M'' um AFD tal que:
- $L(M'') = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem os números de 0s e 1s ambos pares, ou ambos ímpares}\}$
- Como modificar o diagrama de M' para definir M'' ?

Exercício 3: adaptando M'

- Seja M'' um AFD tal que:
- $L(M'') = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem os números de 0s e 1s ambos pares, ou ambos ímpares}\}$
- Como modificar o diagrama de M' para definir M'' ?

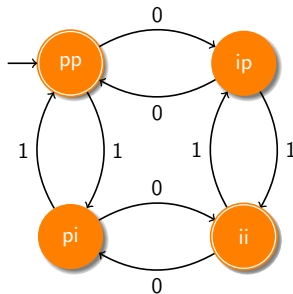
Exercício 3: adaptando M'

- Seja M'' um AFD tal que:
- $L(M'') = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem os números de 0s e 1s ambos pares, ou ambos ímpares}\}$
- Como modificar o diagrama de M' para definir M'' ?



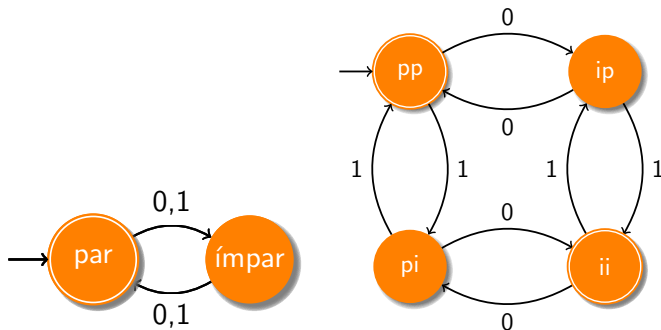
Exercício 3: adaptando M'

- Seja M'' um AFD tal que:
- $L(M'') = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ tem os números de 0s e 1s ambos pares, ou ambos ímpares}\}$
- Como modificar o diagrama de M' para definir M'' ?



Exercício 4

Qual a relação entre os AFDs M e M'' dos exercícios anteriores?



Solução na próxima aula

- Seja A_n um AFD tal que:
- $L(A_n) = \{w \in \{0,1\}^* :$
 w é um número divisível por n representado na base 2}
- Determine a função de transição dos AFDs A_1, A_2, \dots, A_7