Lógica de Primeira Ordem

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

Definição: Lógica de Primeira Ordem (LPO)

- É uma extensão da Lógica Proposicional (LP)
  - Isto é, tudo (operadores, regras de inferência) da LP continuam os mesmos no contexto de LPO
  - Há porém novos elementos próprios da LPO
- Maior poder de expressão, significado, descrição
- Também conhecida como Lógica de Predicados ou Lógica Relacional

Constantes

- Para LPO, considera-se a existência de entidades num universo
- Constantes são referências a essas entidades (pessoas, objetos etc)
- Por exemplo, 'Pedro' é uma constante referente a uma certa pessoa
- Outros exemplos: 'livro', '40', 'amor', 'vaca', 'laranja', 'Dilma' etc
- Constantes genéricas costumam ser representadas por letras minúsculas do início do alfabeto: $a, b, c, \ldots$
- Cabe notar que uma constante **NÃO** tem valor lógico
    - Afinal, 'Pedro', '37' ou 'loucura' não são proposições!

Variáveis

- Uma variável serve para referenciar entidades de forma genérica
- Ou seja, uma variável é uma incógnita: mesmo não sabendo qual entidade ela representa, sabe-se que ela representa alguma entidade
- Assim como constantes, variáveis também não tem valor lógico
- Variáveis costumam ser representadas por letras minúsculas do fim do alfabeto: $z, y, x, \ldots$

Predicados

- Uma proposição geralmente fala de um atributo de uma entidade ...
  - Pedro é alto, laranjas são gostosas, vacas voam
- ... Ou falam de uma relação entre entidades
  - 20 é maior que 10, dinheiro não compra felicidade
- Esses atributos e relações são chamados de predicados na LPO
  - Alto(Pedro), Maior(20, 10)
  - $G(x)$: x é gostoso(a); $V(y)$: y é capaz de voar
- Predicados genéricos costumam ser representados por letras maiúsculas: $A, B, C, P, Q, R, S, \ldots$
- Uma aplicação de predicado (e.g., Alto(Pedro)) tem valor lógico!

Funções

- Permitem referenciar um entidade a partir de outra(s)
- Exemplos: mãe(Pedro), cor(maçã), peso(vaca)
    - Podem referenciar: Maria, vermelho e 300 kg
- Também **NÃO** tem valor lógico
- Funções genéricas costumam ser representadas por letras minúsculas como: $f, g, h, \ldots$
- Podem ser definidas de forma similar a predicados: $p(z)$: pai de z

Quantificadores

- Estabelecem proposições envolvendo todos as entidades do universo
- Permitem descrever formalmente expressões como:
  - Tudo tem seu valor: $\forall x TemValor(x)$
  - Todo ser humano é mortal: $\forall x Humano(x) \rightarrow Mortal(x)$
  - Tem gente que é ruim: $\exists x Humano(x) \wedge Ruim(x)$
- $\forall$: quantificador universal, "para todo"
- $\exists$: quantificador existencial, "existe"

Exemplos

- $\forall x ProfessorCEFET(x) \rightarrow FuncionarioPublico(x)$
  - Para todo x, se x é professor do CEFET, então x é funcionário público
  - Todo professor do CEFET é funcionário público
  - 'x' variável; 'ProfessorCEFET' e 'FuncionarioPublico' predicados
- $\forall x Aluno(x) \rightarrow (\exists y Professor(y) \wedge Menor(idade(x), idade(y)))$
  - Pra todo aluno, existe um professor mais velho que ele
  - 'x' e 'y' variáveis; 'Aluno', 'Professor' e 'Menor' predicados; 'idade' função

Exemplos (2)

- Considere que:
  - $P(x)$: x é um passáro
  - $V(x)$: x é capaz de voar
- Nem todo pássaro pode voar: $\neg \forall x P(x) \rightarrow V(x)$
  - Equivalente: $\exists x P(x) \wedge \neg V(x)$
- $\neg \forall x P(x) \wedge V(x)$: Nem tudo é pássaro e voa.
  - Equivalente: $\exists x \neg P(x) \vee \neg V(x)$
- Existem seres voadores que não são pássaros: $\exists x V(x) \wedge \neg P(x)$
  - Equivalente: $\neg \forall x V(x) \rightarrow P(x)$

Roteiro

Introdução do $\exists (i\exists)$

$$\frac{P(a)}{\exists x P(x)}$$

- Intuição: partindo da premissa que uma vaca específica voa, é possível afirmar que existe alguma vaca que voa.

Eliminação do $\forall (e\forall)$

$$\frac{\forall x P(x)}{P(a)}$$

- Intuição: partindo da premissa que todas as vacas voam, é possível afirmar que Mimosa, minha vaca favorita, é capaz de voar.

Eliminação do $\exists (e\exists)$

$$\frac{\exists x P(x) \qquad \begin{matrix}[P(a)]^* \\ \vdots \\ Q(b)^+\end{matrix}}{Q(b)}$$

- Intuição: dado que algum aluno é genial, ao supor que o aluno genial é Pedro, eu poderia concluir que Pedro passaria com 10 em tudo e, indo além, que algum aluno passaria com 10 em tudo. Esta última proposição é válida mesmo fora da suposição que Pedro é genial, já que ela seria confirmada caso qualquer aluno fosse tomado por genial.
- O funcionamento desta regra é similar a RI de eliminação do $\vee$ de LP
- Restrição(!!): a constante presente na suposição * deve ser inédita, e não pode estar presente na proposição $+$

Exemplo de uso: eliminação do $\exists$

Prove que: $\forall x P(x) \to Q(x), \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$.

1. $\forall x P(x) \to Q(x)$ — premissa
2. $\exists x P(x)$ — premissa
3. $[P(a)]$ — suposição
    - 3.1. $P(a) \to Q(a)$ — $e\forall$ 1
    - 3.2. $Q(a)$ — $e \to$ 3.1, 3
    - 3.3. $\exists x Q(x)$ — $i\exists$ 3.2
4. $\exists x Q(x)$ — $e\exists$ 2, 3, 3.3

Introdução do $\forall (i\forall)$

$$\frac{P(a)^*}{\forall x P(x)}$$

- Intuição: dado que qualquer pessoa tem potencial e sonhos, é possível afirmar que Pedro tem potencial e sonhos; logo, também é possível afirmar que Pedro tem sonhos; esta conclusão é razoável não apenas com relação a Pedro mas a qualquer pessoa; então, conclui-se que todo mundo tem sonhos.
- Restrição(!!): a constante presente na proposição * deve ser suficientemente genérica, substituível por quaisquer outras constantes

Exemplo de uso: Introdução do $\forall$

Prove que: $\forall x P(x) \to Q(x), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$.

1.	$\forall x P(x) \to Q(x)$	premissa
2.	$\forall x P(x)$	premissa
3.	$P(a)$	$e\forall$ 2
4.	$P(a) \to Q(a)$	$e\forall$ 1
5.	$Q(a)$	$e \to$ 4, 3
6.	$\forall x Q(x)$	$i\forall$ 5