

Regras Derivadas e Equivalências Populares

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io



Roteiro

1 Regras Derivadas

2 Equivalências Populares

Roteiro

1 Regras Derivadas

2 Equivalências Populares

Informações Gerais

- **Regras derivadas** são sequências “auto-contidas” de aplicações das regras básicas de inferência (DN).

Informações Gerais

- **Regras derivadas** são sequências “auto-contidas” de aplicações das regras básicas de inferência (DN).
- São “atalhos” na descrição de provas, evitando repetições de passos.

Informações Gerais

- **Regras derivadas** são sequências “auto-contidas” de aplicações das regras básicas de inferência (DN).
- São “atalhos” na descrição de provas, evitando repetições de passos.
- Não há impedimentos para o uso ou mesmo criação de regras derivadas, mas é **necessário prová-las**.

Informações Gerais

- **Regras derivadas** são sequências “auto-contidas” de aplicações das regras básicas de inferência (DN).
- São “atalhos” na descrição de provas, evitando repetições de passos.
- Não há impedimentos para o uso ou mesmo criação de regras derivadas, mas é **necessário prová-las**.
- Algumas regras derivadas são tão conhecidas quanto as regras básicas.

Modus Tollens

Modus Tollens (*mt*):

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi}$$

1. $p \rightarrow q$

premissa

Modus Tollens

Modus Tollens (*mt*):

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi}$$

1. $p \rightarrow q$

premissa

2. $\neg q$

premissa

Modus Tollens

Modus Tollens (*mt*):

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi}$$

1. $p \rightarrow q$

premissa

2. $\neg q$

premissa

3. $[p]$

suposição

Modus Tollens

Modus Tollens (mt):

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg \psi}{\neg \phi}$$

1. $p \rightarrow q$

premissa

2. $\neg q$

premissa

3. $[p]$

suposição

3.1. q

$e \rightarrow 1, 3$

Modus Tollens

Modus Tollens (*mt*):

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}$$

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. $\neg q$ | premissa |
| 3. $[p]$ | suposição |
| 3.1. q | $e \rightarrow 1, 3$ |
| 3.2. \perp | <i>abs</i> 2, 3.1 |

Modus Tollens

Modus Tollens (*mt*):

$$\frac{\phi \rightarrow \psi \quad \neg\psi}{\neg\phi}$$

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. $\neg q$ | premissa |
| 3. $[p]$ | suposição |
| 3.1. q | $e \rightarrow 1, 3$ |
| 3.2. \perp | $abs\ 2, 3.1$ |
| 4. $\neg p$ | $raa\ 3, 3.2$ |

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

1. $[\neg(p \vee \neg p)]$

suposição

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

1. $[\neg(p \vee \neg p)]$

suposição

1.1. $[p]$

suposição

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

1. $[\neg(p \vee \neg p)]$

suposição

1.1. $[p]$

suposição

1.1.1. $p \vee \neg p$

$i \vee 1.1$

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

1. $[\neg(p \vee \neg p)]$

suposição

1.1. $[p]$

suposição

1.1.1. $p \vee \neg p$

$i \vee$ 1.1

1.1.2. \perp

abs 1, 1.1.1

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

- | | |
|----------------------------|------------------|
| 1. $[\neg(p \vee \neg p)]$ | suposição |
| 1.1. $[p]$ | suposição |
| 1.1.1. $p \vee \neg p$ | $i \vee$ 1.1 |
| 1.1.2. \perp | abs 1, 1.1.1 |
| 1.2. $\neg p$ | rra 1.1, 1.1.2 |

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

- | | |
|----------------------------|-----------------------|
| 1. $[\neg(p \vee \neg p)]$ | suposição |
| 1.1. $[p]$ | suposição |
| 1.1.1. $p \vee \neg p$ | <i>i</i> \vee 1.1 |
| 1.1.2. \perp | <i>abs</i> 1, 1.1.1 |
| 1.2. $\neg p$ | <i>rra</i> 1.1, 1.1.2 |
| 1.3. $p \vee \neg p$ | <i>i</i> \vee 1.2 |

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

- | | |
|----------------------------|------------------|
| 1. $[\neg(p \vee \neg p)]$ | suposição |
| 1.1. $[p]$ | suposição |
| 1.1.1. $p \vee \neg p$ | $i \vee$ 1.1 |
| 1.1.2. \perp | abs 1, 1.1.1 |
| 1.2. $\neg p$ | rra 1.1, 1.1.2 |
| 1.3. $p \vee \neg p$ | $i \vee$ 1.2 |
| 1.4. \perp | abs 1, 1.3 |

Princípio do Terceiro Excluído

Princípio do Terceiro Excluído (*pte*):

$$\frac{\emptyset}{\phi \vee \neg \phi}$$

- | | |
|----------------------------|-------------------|
| 1. $[\neg(p \vee \neg p)]$ | suposição |
| 1.1. $[p]$ | suposição |
| 1.1.1. $p \vee \neg p$ | $i \vee 1.1$ |
| 1.1.2. \perp | $abs\ 1, 1.1.1$ |
| 1.2. $\neg p$ | $rra\ 1.1, 1.1.2$ |
| 1.3. $p \vee \neg p$ | $i \vee 1.2$ |
| 1.4. \perp | $abs\ 1, 1.3$ |
| 2. $p \vee \neg p$ | $raa\ 1, 1.4$ |

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

1. $p \vee q$

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

premissa

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

1. $p \vee q$
2. $\neg p$

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

premissa

premissa

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

1. $p \vee q$
2. $\neg p$
3. $[\neg q]$

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

premissa

premissa

suposição

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

1. $p \vee q$

2. $\neg p$

3. $[\neg q]$

3.1. $[p]$

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

premissa

premissa

suposição

suposição

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

1. $p \vee q$

2. $\neg p$

3. $[\neg q]$

3.1. $[p]$

3.1.1. \perp

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

premissa

premissa

suposição

suposição

abs 2, 3.1

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

1. $p \vee q$

premissa

2. $\neg p$

premissa

3. $[\neg q]$

suposição

3.1. $[p]$

suposição

3.1.1. \perp

abs 2, 3.1

3.2. $[q]$

suposição

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

1. $p \vee q$

premissa

2. $\neg p$

premissa

3. $[\neg q]$

suposição

3.1. $[p]$

suposição

3.1.1. \perp

abs 2, 3.1

3.2. $[q]$

suposição

3.2.1. \perp

abs 3, 3.2

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

- | | |
|----------------|--------------------------------|
| 1. $p \vee q$ | premissa |
| 2. $\neg p$ | premissa |
| 3. $[\neg q]$ | suposição |
| 3.1. $[p]$ | suposição |
| 3.1.1. \perp | abs 2, 3.1 |
| 3.2. $[q]$ | suposição |
| 3.2.1. \perp | abs 3, 3.2 |
| 3.3. \perp | eV 1, 3.1, 3.1.1, 3.2, 3.2.1 |

Regra de Resolução 1

Regra de Resolução 1 (res_1):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi}{\psi}$$

- | | |
|----------------|--------------------------------|
| 1. $p \vee q$ | premissa |
| 2. $\neg p$ | premissa |
| 3. $[\neg q]$ | suposição |
| 3.1. $[p]$ | suposição |
| 3.1.1. \perp | abs 2, 3.1 |
| 3.2. $[q]$ | suposição |
| 3.2.1. \perp | abs 3, 3.2 |
| 3.3. \perp | eV 1, 3.1, 3.1.1, 3.2, 3.2.1 |
| 4. q | raa 3,3.3 |

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

1. $p \vee q$

premissa

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

1. $p \vee q$

premissa

2. $\neg p \vee r$

premissa

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

1. $p \vee q$

premissa

2. $\neg p \vee r$

premissa

3. $[p]$

suposição

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

1. $p \vee q$

premissa

2. $\neg p \vee r$

premissa

3. $[p]$

suposição

3.1. r

res_1 2, 3

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

1. $p \vee q$

premissa

2. $\neg p \vee r$

premissa

3. $[p]$

suposição

3.1. r

res_1 2, 3

3.2. $q \vee r$

$i\vee$ 3.1

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

- | | |
|--------------------|--------------|
| 1. $p \vee q$ | premissa |
| 2. $\neg p \vee r$ | premissa |
| 3. $[p]$ | suposição |
| 3.1. r | res_1 2, 3 |
| 3.2. $q \vee r$ | $i\vee$ 3.1 |
| 4. $[q]$ | suposição |

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

- | | |
|--------------------|--------------|
| 1. $p \vee q$ | premissa |
| 2. $\neg p \vee r$ | premissa |
| 3. $[p]$ | suposição |
| 3.1. r | res_1 2, 3 |
| 3.2. $q \vee r$ | $i \vee$ 3.1 |
| 4. $[q]$ | suposição |
| 4.1. $q \vee r$ | $i \vee$ 4 |

Regra de Resolução 2

Regra de Resolução 2 (res_2):

$$\frac{\phi \vee \psi \quad \neg \phi \vee \chi}{\psi \vee \chi}$$

- | | |
|--------------------|----------------------------|
| 1. $p \vee q$ | premissa |
| 2. $\neg p \vee r$ | premissa |
| 3. $[p]$ | suposição |
| 3.1. r | res_1 2, 3 |
| 3.2. $q \vee r$ | $i \vee$ 3.1 |
| 4. $[q]$ | suposição |
| 4.1. $q \vee r$ | $i \vee$ 4 |
| 5. $q \vee r$ | $e \vee$ 1, 3, 3.2, 4, 4.1 |

Roteiro

1 Regras Derivadas

2 Equivalências Populares

Informações Gerais

- Duas fórmulas ϕ e ψ para as quais vale $\phi \vdash \psi$ assim como $\psi \vdash \phi$ são ditas equivalentes (segundo prova).

Informações Gerais

- Duas fórmulas ϕ e ψ para as quais vale $\phi \vdash \psi$ assim como $\psi \vdash \phi$ são ditas equivalentes (segundo prova).
- Para provar uma equivalência $\phi \dashv\vdash \psi$ é necessário provar tanto a “ida” $\phi \vdash \psi$ quanto a “volta” $\psi \vdash \phi$.

Informações Gerais

- Duas fórmulas ϕ e ψ para as quais vale $\phi \vdash \psi$ assim como $\psi \vdash \phi$ são ditas equivalentes (segundo prova).
- Para provar uma equivalência $\phi \dashv\vdash \psi$ é necessário provar tanto a “ida” $\phi \vdash \psi$ quanto a “volta” $\psi \vdash \phi$.
- Assim como as regras derivadas, algumas equivalências são populares pelo seu uso frequente em provas.

Informações Gerais

- Duas fórmulas ϕ e ψ para as quais vale $\phi \vdash \psi$ assim como $\psi \vdash \phi$ são ditas equivalentes (segundo prova).
- Para provar uma equivalência $\phi \dashv\vdash \psi$ é necessário provar tanto a “ida” $\phi \vdash \psi$ quanto a “volta” $\psi \vdash \phi$.
- Assim como as regras derivadas, algumas equivalências são populares pelo seu uso frequente em provas.
- São apresentadas a seguir algumas dessas equivalências, e a prova da ida de cada uma delas. É sugerido como exercício provar cada volta.

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa
2. $[\neg q]$ suposição

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

- | | |
|----------------------|-----------|
| 1. $p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. $[\neg q]$ | suposição |
| 2.1. $[p]$ | suposição |

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $[p]$ suposição

2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $[p]$ suposição

2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$

2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

- 1. $p \rightarrow q$ premissa
- 2. $[\neg q]$ suposição
- 2.1. $[p]$ suposição
- 2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$
- 2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$
- 2.2. $\neg p$ $rra\ 2.1, 2.1.2$

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

- 1. $p \rightarrow q$ premissa
- 2. $[\neg q]$ suposição
- 2.1. $[p]$ suposição
- 2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$
- 2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$
- 2.2. $\neg p$ $rra\ 2.1, 2.1.2$
- 3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 2, 2.2$

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

* Usando *modus tollens*

2.1. $[p]$ suposição

2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$

2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$

2.2. $\neg p$ $rra\ 2.1, 2.1.2$

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 2, 2.2$

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

- | | | | |
|--------|-----------------------------|------------------------|-------------------------------|
| 1. | $p \rightarrow q$ | premissa | |
| 2. | $[\neg q]$ | suposição | * Usando <i>modus tollens</i> |
| 2.1. | $[p]$ | suposição | 1. $p \rightarrow q$ premissa |
| 2.1.1. | q | $e \rightarrow 1, 2.1$ | |
| 2.1.2. | \perp | $abs\ 2, 2.1.1$ | |
| 2.2. | $\neg p$ | $rra\ 2.1, 2.1.2$ | |
| 3. | $\neg q \rightarrow \neg p$ | $i \rightarrow 2, 2.2$ | |

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $[p]$ suposição

2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$

2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$

2.2. $\neg p$ $rra\ 2.1, 2.1.2$

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 2, 2.2$

* Usando *modus tollens*

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $[p]$ suposição

2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$

2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$

2.2. $\neg p$ $rra\ 2.1, 2.1.2$

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 2, 2.2$

* Usando *modus tollens*

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $\neg p$ $mt\ 1, 2$

Contraposição

Contraposição (*cp*): $\phi \rightarrow \psi \dashv\vdash \neg\psi \rightarrow \neg\phi$

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $[p]$ suposição

2.1.1. q $e \rightarrow 1, 2.1$

2.1.2. \perp $abs\ 2, 2.1.1$

2.2. $\neg p$ $rra\ 2.1, 2.1.2$

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 2, 2.2$

* Usando *modus tollens*

1. $p \rightarrow q$ premissa

2. $[\neg q]$ suposição

2.1. $\neg p$ $mt\ 1, 2$

3. $\neg q \rightarrow \neg p$ $i \rightarrow 3.1, 2.1$

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

1. $\neg p \vee \neg q$ premissa

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

1. $\neg p \vee \neg q$

premissa

2. $[p \wedge q]$

suposição

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

- | | |
|-------------------------|-----------|
| 1. $\neg p \vee \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \wedge q]$ | suposição |
| 2.1. $[\neg p]$ | suposição |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

- | | |
|-------------------------|--------------|
| 1. $\neg p \vee \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \wedge q]$ | suposição |
| 2.1. $[\neg p]$ | suposição |
| 2.1.1. p | $e \wedge 2$ |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| 1. $\neg p \vee \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \wedge q]$ | suposição |
| 2.1. $[\neg p]$ | suposição |
| 2.1.1. p | $e \wedge 2$ |
| 2.1.2. \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

- | | |
|-------------------------|-----------------------|
| 1. $\neg p \vee \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \wedge q]$ | suposição |
| 2.1. $[\neg p]$ | suposição |
| 2.1.1. p | $e \wedge 2$ |
| 2.1.2. \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. $[\neg q]$ | suposição |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

1.	$\neg p \vee \neg q$	premissa
2.	$[p \wedge q]$	suposição
2.1.	$[\neg p]$	suposição
2.1.1.	p	$e \wedge 2$
2.1.2.	\perp	<i>abs</i> 2.1, 2.1.1
2.2.	$[\neg q]$	suposição
2.2.1.	q	$e \wedge 2$

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

1.	$\neg p \vee \neg q$	premissa
2.	$[p \wedge q]$	suposição
2.1.	$[\neg p]$	suposição
2.1.1.	p	$e \wedge 2$
2.1.2.	\perp	<i>abs</i> 2.1, 2.1.1
2.2.	$[\neg q]$	suposição
2.2.1.	q	$e \wedge 2$
2.2.2.	\perp	<i>abs</i> 2.2, 2.2.1

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

- | | | |
|--------|----------------------|------------------------------------|
| 1. | $\neg p \vee \neg q$ | premissa |
| 2. | $[p \wedge q]$ | suposição |
| 2.1. | $[\neg p]$ | suposição |
| 2.1.1. | p | $e \wedge 2$ |
| 2.1.2. | \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. | $[\neg q]$ | suposição |
| 2.2.1. | q | $e \wedge 2$ |
| 2.2.2. | \perp | <i>abs</i> 2.2, 2.2.1 |
| 2.3. | \perp | $e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$ |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \vee \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \wedge \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \vee \neg q \dashv\vdash \neg(p \wedge q)$

- | | | |
|--------|----------------------|------------------------------------|
| 1. | $\neg p \vee \neg q$ | premissa |
| 2. | $[p \wedge q]$ | suposição |
| 2.1. | $[\neg p]$ | suposição |
| 2.1.1. | p | $e \wedge 2$ |
| 2.1.2. | \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. | $[\neg q]$ | suposição |
| 2.2.1. | q | $e \wedge 2$ |
| 2.2.2. | \perp | <i>abs</i> 2.2, 2.2.1 |
| 2.3. | \perp | $e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$ |
| 3. | $\neg(p \wedge q)$ | <i>rra</i> 2, 2.3 |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

1. $\neg p \wedge \neg q$ premissa

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

1. $\neg p \wedge \neg q$

premissa

2. $[p \vee q]$

suposição

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | |
|---------------------------|-----------|
| 1. $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. $[p]$ | suposição |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | |
|---------------------------|--------------|
| 1. $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. $\neg p$ | $e \wedge 1$ |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| 1. $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. $\neg p$ | $e \wedge 1$ |
| 2.1.2. \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| 1. $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. $\neg p$ | $e \wedge 1$ |
| 2.1.2. \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. $[q]$ | suposição |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$ De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | | |
|--------|------------------------|-----------------------|
| 1. | $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. | $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. | $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. | $\neg p$ | $e \wedge 1$ |
| 2.1.2. | \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. | $[q]$ | suposição |
| 2.2.1. | $\neg q$ | $e \wedge 1$ |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$ De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

1.	$\neg p \wedge \neg q$	premissa
2.	$[p \vee q]$	suposição
2.1.	$[p]$	suposição
2.1.1.	$\neg p$	$e \wedge 1$
2.1.2.	\perp	<i>abs</i> 2.1, 2.1.1
2.2.	$[q]$	suposição
2.2.1.	$\neg q$	$e \wedge 1$
2.2.2.	\perp	<i>abs</i> 2.2, 2.2.1

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$ De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | | |
|--------|------------------------|------------------------------------|
| 1. | $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. | $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. | $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. | $\neg p$ | $e \wedge 1$ |
| 2.1.2. | \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. | $[q]$ | suposição |
| 2.2.1. | $\neg q$ | $e \wedge 1$ |
| 2.2.2. | \perp | <i>abs</i> 2.2, 2.2.1 |
| 2.3. | \perp | $e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$ |

Leis de (Augustus) De Morgan: $\neg\phi \wedge \neg\psi \dashv\vdash \neg(\phi \vee \psi)$

De Morgan (*dm*): $\neg p \wedge \neg q \dashv\vdash \neg(p \vee q)$

- | | | |
|--------|------------------------|------------------------------------|
| 1. | $\neg p \wedge \neg q$ | premissa |
| 2. | $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. | $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. | $\neg p$ | $e \wedge 1$ |
| 2.1.2. | \perp | <i>abs</i> 2.1, 2.1.1 |
| 2.2. | $[q]$ | suposição |
| 2.2.1. | $\neg q$ | $e \wedge 1$ |
| 2.2.2. | \perp | <i>abs</i> 2.2, 2.2.1 |
| 2.3. | \perp | $e \vee 1, 2.1, 2.1.2, 2.2, 2.2.2$ |
| 3. | $\neg(p \vee q)$ | <i>rra</i> 2, 2.3 |

Equivalência implicação-disjunção $\neg\phi \vee \psi \dashv\vdash \phi \rightarrow \psi$

Equivalência implicação-disjunção (*eid*): $\neg p \vee q \dashv\vdash p \rightarrow q$

1. $\neg p \vee q$

premissa

Equivalência implicação-disjunção $\neg\phi \vee \psi \dashv\vdash \phi \rightarrow \psi$

Equivalência implicação-disjunção (*eid*): $\neg p \vee q \dashv\vdash p \rightarrow q$

1. $\neg p \vee q$ premissa

2. $[p]$ suposição

Equivalência implicação-disjunção $\neg\phi \vee \psi \dashv\vdash \phi \rightarrow \psi$

Equivalência implicação-disjunção (*eid*): $\neg p \vee q \dashv\vdash p \rightarrow q$

1. $\neg p \vee q$ premissa

2. $[p]$ suposição

2.1. q res_1 1, 2

Equivalência implicação-disjunção $\neg\phi \vee \psi \dashv\vdash \phi \rightarrow \psi$

Equivalência implicação-disjunção (*eid*): $\neg p \vee q \dashv\vdash p \rightarrow q$

1. $\neg p \vee q$ premissa

2. $[p]$ suposição

2.1. q res_1 1, 2

3. $p \rightarrow q$ $i \rightarrow$ 2, 2.1

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

1. $p \wedge (q \vee r)$ premissa

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | |
|--------------------------|--------------|
| 1. $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. p | $e \wedge 1$ |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | |
|--------------------------|--------------|
| 1. $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. p | $e \wedge 1$ |
| 3. $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | | |
|----|-----------------------|--------------|
| 1. | $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. | p | $e \wedge 1$ |
| 3. | $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. | $[q]$ | suposição |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | | |
|------|-----------------------|-----------------|
| 1. | $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. | p | $e \wedge 1$ |
| 3. | $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. | $[q]$ | suposição |
| 4.1. | $p \wedge q$ | $i \wedge 2, 4$ |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | |
|---------------------------------------|-----------------|
| 1. $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. p | $e \wedge 1$ |
| 3. $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. $[q]$ | suposição |
| 4.1. $p \wedge q$ | $i \wedge 2, 4$ |
| 4.2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 4.1$ |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | | |
|------|----------------------------------|-----------------|
| 1. | $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. | p | $e \wedge 1$ |
| 3. | $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. | $[q]$ | suposição |
| 4.1. | $p \wedge q$ | $i \wedge 2, 4$ |
| 4.2. | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 4.1$ |
| 5. | $[r]$ | suposição |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | | |
|------|----------------------------------|-----------------|
| 1. | $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. | p | $e \wedge 1$ |
| 3. | $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. | $[q]$ | suposição |
| 4.1. | $p \wedge q$ | $i \wedge 2, 4$ |
| 4.2. | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 4.1$ |
| 5. | $[r]$ | suposição |
| 5.1. | $p \wedge r$ | $i \wedge 2, 5$ |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | |
|---------------------------------------|-----------------|
| 1. $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. p | $e \wedge 1$ |
| 3. $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. $[q]$ | suposição |
| 4.1. $p \wedge q$ | $i \wedge 2, 4$ |
| 4.2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 4.1$ |
| 5. $[r]$ | suposição |
| 5.1. $p \wedge r$ | $i \wedge 2, 5$ |
| 5.2. $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 5.1$ |

Propriedade distributiva, conjunção sobre disjunção

Distribuição de conjunção sobre disjunção: $p \wedge (q \vee r) \dashv\vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- | | | |
|------|----------------------------------|----------------------------|
| 1. | $p \wedge (q \vee r)$ | premissa |
| 2. | p | $e \wedge 1$ |
| 3. | $(q \vee r)$ | $e \wedge 1$ |
| 4. | $[q]$ | suposição |
| 4.1. | $p \wedge q$ | $i \wedge 2, 4$ |
| 4.2. | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 4.1$ |
| 5. | $[r]$ | suposição |
| 5.1. | $p \wedge r$ | $i \wedge 2, 5$ |
| 5.2. | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $i \vee 5.1$ |
| 6. | $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ | $e \vee 3, 4, 4.2, 5, 5.2$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1. $p \vee (q \wedge r)$ premissa

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1. $p \vee (q \wedge r)$ premissa
2. $[p]$ suposição

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|-----------------------|------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|-----------------------|------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|--------------------------------|---------------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |
| 2.3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 2.1, 2.2$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|--------------------------------|---------------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |
| 2.3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 2.1, 2.2$ |
| 3. | $[q \wedge r]$ | suposição |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|--------------------------------|---------------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |
| 2.3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 2.1, 2.2$ |
| 3. | $[q \wedge r]$ | suposição |
| 3.1. | q | $e \wedge 3$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|--------------------------------|---------------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |
| 2.3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 2.1, 2.2$ |
| 3. | $[q \wedge r]$ | suposição |
| 3.1. | q | $e \wedge 3$ |
| 3.2. | r | $e \wedge 3$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|--------------------------------|---------------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |
| 2.3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 2.1, 2.2$ |
| 3. | $[q \wedge r]$ | suposição |
| 3.1. | q | $e \wedge 3$ |
| 3.2. | r | $e \wedge 3$ |
| 3.3. | $p \vee q$ | $i \vee 3.1$ |

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1.	$p \vee (q \wedge r)$	premissa
2.	$[p]$	suposição
2.1.	$p \vee q$	$i \vee 2$
2.2.	$p \vee r$	$i \vee 2$
2.3.	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i \wedge 2.1, 2.2$
3.	$[q \wedge r]$	suposição
3.1.	q	$e \wedge 3$
3.2.	r	$e \wedge 3$
3.3.	$p \vee q$	$i \vee 3.1$
3.4.	$p \vee r$	$i \vee 3.2$

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

1. $p \vee (q \wedge r)$	premissa
2. $[p]$	suposição
2.1. $p \vee q$	$i \vee 2$
2.2. $p \vee r$	$i \vee 2$
2.3. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i \wedge 2.1, 2.2$
3. $[q \wedge r]$	suposição
3.1. q	$e \wedge 3$
3.2. r	$e \wedge 3$
3.3. $p \vee q$	$i \vee 3.1$
3.4. $p \vee r$	$i \vee 3.2$
3.5. $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	$i \wedge 3.3, 3.4$

Propriedade distributiva, disjunção sobre conjunção

Distribuição de disjunção sobre conjunção: $p \vee (q \wedge r) \dashv\vdash (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- | | | |
|------|--------------------------------|----------------------------|
| 1. | $p \vee (q \wedge r)$ | premissa |
| 2. | $[p]$ | suposição |
| 2.1. | $p \vee q$ | $i \vee 2$ |
| 2.2. | $p \vee r$ | $i \vee 2$ |
| 2.3. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 2.1, 2.2$ |
| 3. | $[q \wedge r]$ | suposição |
| 3.1. | q | $e \wedge 3$ |
| 3.2. | r | $e \wedge 3$ |
| 3.3. | $p \vee q$ | $i \vee 3.1$ |
| 3.4. | $p \vee r$ | $i \vee 3.2$ |
| 3.5. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $i \wedge 3.3, 3.4$ |
| 4. | $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | $e \vee 1, 2, 2.3, 3, 3.5$ |