Resolução Proposicional

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

Informações Gerais

- Resolução é um método de inferência e construção de provas lógicas.
- É um sistema dedutivo alternativo a dedução natural, sendo mais interessante do ponto de vista computacional.
- Baseia-se em refutação: para provar que $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \vdash \beta$, mostra que $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\} \cup \{\neg\beta\} \vdash \Box$, sendo $\Box \equiv \bot$.
- Emprega nenhum regra de inferência além da regra de resolução (res).
- Trabalha apenas com proposições no formato de cláusulas.

Cláusulas

- Um literal é um átomo ou um átomo negado: e.g., $a, \neg b, \neg c, d$.
- Uma cláusula é ou um literal, ou uma disjunção de literais: e.g., $a \vee \neg b, \neg c, d$.
- Para usar o método de resolução, é necessário converter todas as premissas para clásulas. Um passo intermediário nesse processo é a conversão das premissas para sua Forma Normal Conjuntiva (FNC).

Roteiro

Informações Gerais

- Uma proposição na FNC é uma conjunção de disjunções de literais: e.g., $(a \vee b) \wedge (\neg c \vee \neg d \vee e)$.

- Toda e qualquer proposição tem uma proposição equivalente na FNC.

Conversão para FNC/cláusulas

A conversão de uma proposição para FNC/cláusulas se dá em 4 passos, denominados INDC (para memorizar, lê-se "índice"):

1. I, eliminação das implicações;
2. N, eliminação de negações que não atuem diretamente em átomos;
3. D, distribuição de disjunções sobre conjunções e eliminação de parênteses desnecessários;
4. C, definição das cláusulas como sendo os operandos da conjunção determinada no passo anterior.

Passo I

- Uso a equivalência implicação-disjunção para eliminar todas as implicações de uma proposição.
- $\phi \rightarrow \psi \vdash \neg\phi \vee \psi$.
- Sugestão: data uma certa proposição, eliminar uma implicação de cada vez, ao invés de todas ao mesmo tempo.

Passo N

- Uso das Leis de De Morgan e da regra $e\neg\neg$ para eliminar qualquer $\neg$ que não atue diretamente sobre um átomo.
- $\neg(\phi \lor \psi) \vdash \neg\phi \land \neg\psi$.
- $\neg(\phi \land \psi) \vdash \neg\phi \lor \neg\psi$.
- $\neg\neg\phi \vdash \phi$.

Passo D

- Uso de propriedade distributivas e eliminação de parênteses cuja remoção não altera o significado da proposição.

- $\chi \vee (\phi \wedge \psi) \vdash (\chi \vee \phi) \wedge (\chi \vee \psi)$.

- Após este passo, a proposição resultante já está na FNC.

Passo C

- Divisão em cláusulas das partes da proposição na FNC.
- $(\chi \vee \neg\phi) \wedge (\chi \vee \psi) \Rightarrow \chi \vee \neg\phi, \chi \vee \psi.$
- $\chi \vee \phi \vee \neg\psi \Rightarrow \chi \vee \phi \vee \neg\psi.$ (Sem alterações)
- $\chi \wedge \phi \wedge \neg\psi \Rightarrow \chi, \phi, \neg\psi.$

Extra: eliminação de parênteses

- A qualquer momento durante o processo de conversão é aceitável a eliminação de parênteses usando as seguintes equivalências:
- $\chi \lor (\phi \lor \psi) \dashv\vdash \chi \lor \phi \lor \psi$.
- $\chi \land (\phi \land \psi) \dashv\vdash \chi \land \phi \land \psi$.

Roteiro

Roteiro passo-a-passo

Os passos para provar que $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\} \vdash \beta$ são:

1. Obter as cláusulas γ_{ij} que representam cada premissa α_i;
2. Obter as cláusulas θ_j que representam a conclusão negada $\neg\beta$;
3. Mostrar que $\{\gamma_{ij}\} \cup \{\theta_j\} \vdash \Box$.
    - Usando apenas a regra de resolução
    - Ou seja, sem suposições, $e \rightarrow$, raa etc

Exemplo 1

Prove, por resolução, que: $(p \lor q) \rightarrow r \vdash p \rightarrow r$

Conversão para FNC:

- $(p \lor q) \rightarrow r \Rightarrow \neg(p \lor q) \lor r \Rightarrow (\neg p \land \neg q) \lor r \Rightarrow (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r)$
- $\neg(p \rightarrow r) \Rightarrow \neg(\neg p \lor r) \Rightarrow \neg\neg p \land \neg r \Rightarrow p \land \neg r$

Prova:

1. $\neg p \lor r$	premissa	4. $\neg r$	premissa
2. $\neg q \lor r$	premissa	5. r	1, 3
3. p	premissa	6. $\square$	5, 4

Exemplo 2

Prove, por resolução, que: $\varnothing \vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Conversão para FNC:

- $\neg(p \rightarrow (q \rightarrow p)) \Rightarrow \neg(p \rightarrow (\neg q \vee p)) \Rightarrow \neg(\neg p \vee (\neg q \vee p)) \Rightarrow \neg(\neg p \vee \neg q \vee p) \Rightarrow \neg\neg p \wedge \neg\neg q \wedge \neg p \Rightarrow p \wedge q \wedge \neg p$

Prova:

1.	p	premissa
2.	q	premissa
3.	$\neg p$	premissa
4.	$\square$	1,3