Lógica Proposicional e Dedução Natural (pt 1)

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io

CEFET/RJ

Roteiro

Roteiro

O objetivo da lógica em computação

"...é desenvolver linguagens para modelar situações que abordamos enquanto profissionais de computação, de forma a poder raciocinar sobre elas formalmente. Raciocinar sobre situações significa construir argumentos sobre as mesmas; queremos fazer isso formalmente, de forma que os argumentos sejam válidos e possam ser defendidos rigorosamente, ou executados computacionalmente."

Michael Huth e Mark Ryan
Traduzido do livro "Logic in Computer Science"

Exemplo 1: Trem das Onze

1. Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado
2. Mas João chegou no horário
3. Já o trem chegou atrasado
4. Logo, haviam táxis na estação

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Exemplo 2: Maria, olha a chuva!

1. Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou
2. Maria não está molhada
3. Estava chovendo
4. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva

A conclusão é válida? Como chegamos a ela?

Um argumento mais formal

- Se o trem se atrasasse e não houvessem táxis na estação, João chegaria atrasado. Mas João chegou no horário. Já o trem chegou atrasado. Logo, haviam táxis na estação.

- Se estava chovendo e Maria não tinha um guarda-chuva, ela se molhou. Maria não está molhada. Estava chovendo. Logo, Maria levou consigo um guarda-chuva.

- Se p e não q, então r. Não r. p. Logo, q.

Roteiro

Definição e exemplos

- Proposição: uma sentença que pode ser considerada verdadeira ou falsa
  - A soma de 2 e 3 é igual a 5
  - Fulano falou mal de Ciclano para Beltrano
  - Quero passar em lógica
- Que sentenças não são proposições?
  - Que a força esteja com você.
  - Já viu que horas são?
  - Pare com esses exemplos agora!

Representação Simbólica

- Proposições em linguagem natural $\Rightarrow$ Fórmulas lógicas
- Menos detalhes desnecessários (abstração)
- Mais facilidade de manipulação
- Foco na argumentação, na combinação de fórmulas

Átomos

- Proposições atômicas são aquelas mais simples, que não podem ser logicamente decompostas.
- Por exemplo: O número 5 é par.
- São representadas por átomos (variáveis): $p, q, r, \ldots$
- Proposições compostas são formadas pela combinação das atômicas
- Por exemplo: 5 é par e 4.5 é negativo

Operadores Lógicos: $\neg$

- *negação / não / not*
- Inverte o valor lógico de uma proposição
  - p: 5 é par
  - $\neg p$: 5 não é par

Operadores Lógicos: $\vee$

- *ou / or / disjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ao menos uma é verdadeira
  - p: 3 é par
  - q: 4 é negativo
  - $p \vee q$: 3 é par ou 4 é negativo

Operadores Lógicos: $\wedge$

- *e / and / conjunção*
- Dadas duas proposições, indica que ambas são verdadeiras
    - p: o céu é verde
    - q: vacas voam
    - $p \wedge q$: o céu está verde e vacas voam

Operadores Lógicos: $\rightarrow$

- *implicação / se / if*
- Indica que uma proposição é uma consequência lógica de outra
    - p: 1+1 = 10
    - q: 10+10 = 100
    - $p \rightarrow q$: Se 1+1 = 10, então 10+10 = 100
    - p é a premissa, q é a conclusão

Teste Seus Conhecimentos

- p: Fulana é educada
- q: Fulana é inteligente
- r: Quero me casar com Fulana
- Traduza "Fulana é educada e inteligente"
  - $p \wedge q$
- Traduza "Se fulana é inteligente, quero me casar com ela"
  - $q \to r$
- Traduza "Fulana é educada mas não quero casar com ela."
  - $p \wedge \neg r$
- Traduza $q \to p$
  - Se fulana é inteligente, então ela é educada.

Precedência de Operadores e Parentização

- $\neg p \wedge q$?
  - Fulana não é educada mas é inteligente
  - Fulana não é educada e inteligente
- Operadores ordenados por precedência: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$
- Implicação é associativa à direita: $p \rightarrow q \rightarrow r \Leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$
- É preferível sempre usar parênteses!

Roteiro

Definição

- Dedução Natural (DN) é um sistema dedutivo usado para construir demonstrações lógicas formais
- É definido por um conjunto de regras de inferência
- A aplicação dessas regras sobre um conjunto de premissas leva a uma conclusão
  - Notação: $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \vdash \psi$

Regra de Inferência (RI)

- É a descrição de uma relação logicamente válida entre premissas e conclusões
- Numa prova formal, cada aplicação das RIs deve ser um passo na direção da conclusão desejada
- Dicas para aplicação de RIs (para evitar erros comuns)
  - As premissas da RI devem corresponder, coincidir, combinar com as proposições sobre as quais a regra será aplicada
  - A conclusão da RI deve corresponder, coincidir, combinar com a proposição resultante da aplicação da regra
  - Sempre indique a que proposições a regra é aplicada

Regras para conjunção

- Introdução do $\wedge$ $(i\wedge)$:
$$\frac{\phi \qquad \psi}{\phi \wedge \psi}$$

- Eliminação do $\wedge$ $(e\wedge)$:
$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}$$

- Intuição: afimar "o céu é verde" junto com "vacas voam" é equivalente a afirmar "o céu é verde e vacas voam"

Exemplo de uso: regras para conjunção

Prove que: $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1	$p \wedge q$	premissa
2	r	premissa
3	q	$e\wedge\, 1$
4	$q \wedge r$	$i\wedge\, 2, 3$

Regras para dupla negação

- Introdução da dupla negação $(i\neg\neg)$: $$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}$$

- Eliminação da dupla negação $(e\neg\neg)$: $$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}$$

- Intuição: afirmar "quero passar em lógica" é equivalente a afirmar "não quero não passar em lógica"

Exemplo de uso: regras para dupla negação

Prove que: $p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$

1	p	premissa
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	premissa
3	$\neg\neg p$	$i\neg\neg 1$
4	$q \wedge r$	$e\neg\neg 1$
5	r	$e\wedge\, 4$
6	$\neg\neg p \wedge r$	$i\wedge\, 3, 5$

Teste Seus Conhecimentos

Prove que: $(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash s \wedge \neg\neg q$

1	$(p \wedge q) \wedge r$	premissa
2	$s \wedge t$	premissa
3	$p \wedge q$	$e\wedge\, 1$
4	q	$e\wedge\, 3$
5	$\neg\neg q$	$i\neg\neg 4$
6	s	$e\wedge\, 2$
7	$s \wedge \neg\neg q$	$i\wedge\, 5, 6$

Eliminação da implicação ($e \rightarrow$)

$$\frac{\phi \qquad \phi \rightarrow \psi}{\psi}$$

- Intuição: afirmar "se vacas voassem, haveriam rebanhos aéreos" junto com "vacas voam", permite concluir que "há rebanhos aéreos".
- Também conhecido pelo nome em latim: *modus ponens*

Exemplo de uso: eliminação da implicação

Prove que: $\neg p \wedge q, \neg p \wedge q \to r \vee \neg p \vdash r \vee \neg p$

1	$\neg p \wedge q$	premissa
2	$\neg p \wedge q \to r \vee \neg p$	premissa
3	$r \vee \neg p$	$e \to 1, 2$

Exemplo de uso: eliminação da implicação (2)

Prove que: $p \to (q \to r), p \to q, p \vdash r$

1	$p \to (q \to r)$	premissa
2	$p \to q$	premissa
3	p	premissa
4	$q \to r$	$e \to 1, 3$
5	q	$e \to 2, 3$
6	r	$e \to 4, 5$

Introdução da implicação ($i \rightarrow$)

$$\frac{\begin{array}{c}[\phi] \\ \vdots \\ \psi\end{array}}{\phi \rightarrow \psi}$$

- Intuição: se a suposição de que "vacas voam" permite afirmar que "há rebanhos aéreos", é possível concluir que "se vacas voassem, haveriam rebanhos aéreos".

Suposições e Sub-universos

- Ao fazer uma suposição, é criado um "sub-universo", dentro do "universo" atual
- As proposições do universo atual continuam válidas no sub-universo
- No sub-universo o que foi suposto é tido como uma proposição válida qualquer
- As proposições obtidas no sub-universo dependem da suposição feita, então não são válidas fora do sub-universo
- É possível criar sub-universos dentro de outros

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \to (q \to r) \vdash p \land q \to r$

1	$p \to (q \to r)$	premissa
2	$[p \land q]$	suposição
2.1	p	$e \land 2$
2.2	$q \to r$	$e \to 1, 2.1$
2.3	q	$e \land 2$
2.4	r	$e \to 2.2, 2.3$
3	$p \land q \to r$	$i \to 2, 2.4$

Exemplo de uso: Introdução da implicação

Prove que: $p \land q \to r \vdash p \to (q \to r)$

1	$p \land q \to r$	premissa
2	$[p]$	suposição
2.1	$[q]$	suposição
2.1.1	$p \land q$	$i \land 2, 2.1$
2.1.2	r	$e \to 1, 2.1.1$
2.2	$q \to r$	$i \to 2.1, 2.1.2$
3	$p \to (q \to r)$	$i \to 2, 2.2$

Teste Seus Conhecimentos

Prove que: $p \to q \vdash p \wedge r \to q \wedge r$

1	$p \to q$	premissa
2	$[p \wedge r]$	suposição
2.1	p	$e \wedge 2$
2.2	r	$e \wedge 2$
2.3	q	$e \to 1, 2.1$
2.4	$q \wedge r$	$i \wedge 2.2, 2.3$
3	$p \wedge r \to q \wedge r$	$i \to 2, 2.2$