

Dedução Natural (parte 2)

Douglas O. Cardoso
douglas.cardoso@cefet-rj.br
docardoso.github.io



Roteiro

1 Regras para disjunção

2 Contradições

Roteiro

1 Regras para disjunção

2 Contradições

Introdução do \vee

- Introdução do \vee ($i\vee$):

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}$$

$$\frac{\psi}{\phi \vee \psi}$$

- Intuição: acreditar que “o céu é verde” permite afirmar que “o céu é verde e/ou vacas voam”.
- Ou seja, espera-se que ao menos uma das alternativas seja verdade.

Exemplo de uso: introdução do \vee

Prove que: $p, \neg q \vdash (q \vee p) \vee \neg r$.

1. p premissa

2. $\neg q$ premissa

3. $q \vee p$ $i\vee$ 1

4. $(q \vee p) \vee \neg r$ $i\vee$ 3

Eliminação do \vee : intuição

- Digamos que eu acredite que “vacas e/ou ovelhas voam”.
- Ou seja, **pelo menos** um desses voa, mas eu não sei qual.
- Ao **supor** que “vacas voam”, posso concluir que “há rebanhos aéreos”.
- Se eu supor que “ovelhas voam”, chego a **mesma** conclusão.
- Então, **sem supor nada**, posso afirmar que “há rebanhos aéreos”.
- Só não sei se são rebanhos de ovelhas ou vacas.

Eliminação do \vee ($e\vee$)

$$\frac{\begin{array}{cc} [\phi] & [\psi] \\ \vdots & \vdots \\ \phi \vee \psi & \chi \quad \chi \end{array}}{\chi}$$

- O uso dessa regra se dá em 4 passos:
 1. É identificada a disjunção que será a base da eliminação;
 2. Pela suposição de um operando da disjunção, é concluído um certo fato;
 3. Pela suposição do outro operando, é obtida a mesma conclusão;
 4. Então, é inferida como fato a conclusão de ambas suposições.
- **Lembre-se:** não misture as suposições; são sub-universos distintos!

Exemplo de uso: eliminação do \vee

Prove que: $q \rightarrow r \vdash p \vee q \rightarrow p \vee r$

- | | | |
|--------|---------------------------------|-----------------------------------|
| 1. | $q \rightarrow r$ | premissa |
| 2. | $[p \vee q]$ | suposição |
| 2.1. | $[p]$ | suposição |
| 2.1.1. | $p \vee r$ | $i\vee$ 2.1 |
| 2.2. | $[q]$ | suposição |
| 2.2.1. | r | $e \rightarrow$ 1, 2.2 |
| 2.2.2. | $p \vee r$ | $i\vee$ 2.2.1 |
| 2.3. | $p \vee r$ | $e\vee$ 2, 2.1, 2.1.1, 2.2, 2.2.2 |
| 3. | $p \vee q \rightarrow p \vee r$ | $i \rightarrow$ 2, 2.3 |

Teste seus conhecimentos

Prove que: $(p \vee q) \vee r \dashv\vdash p \vee (q \vee r)$ ¹.

¹ “ $\phi \dashv\vdash \psi$ ” indica a realização de duas provas: $\phi \vdash \psi$ e $\psi \vdash \phi$.

Roteiro

1 Regras para disjunção

2 Contradições

Noções básicas

- Uma contradição é a conclusão de qualquer combinação de premissas contrárias uma a outra.
- Contradições também são conhecidas como Absurdos.
- O símbolo usado para representar uma contradição é \perp .

Regra do Absurdo

- Absurdo (*abs*):

$$\frac{\phi \quad \neg\phi}{\perp}$$

- Intuição: afirmar “hoje vai chover” logo após “hoje não vai chover”; contraditório, não?
- Esta regra também é conhecida como “eliminação da negação”.

Redução ao Absurdo

- Redução ao Absurdo (*raa*):

$$\frac{[\phi] \quad \vdots \quad \perp}{\neg \phi}$$

- Intuição: se a suposição de que “vacas voam” leva a conclusão absurda de que “ $1=2$ ”, é natural então inferir que “vacas **não** voam”.
- Esta regra também é conhecida como “introdução da negação”.

Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo

Prove que: $\neg p \rightarrow q, \neg p \rightarrow \neg q \vdash p$.

- | | | |
|------|-----------------------------|----------------------|
| 1. | $\neg p \rightarrow q$ | premissa |
| 2. | $\neg p \rightarrow \neg q$ | premissa |
| 3. | $[\neg p]$ | suposição |
| 3.1. | q | $e \rightarrow 3, 1$ |
| 3.2. | $\neg q$ | $e \rightarrow 3, 2$ |
| 3.3. | \perp | <i>abs</i> 3.1, 3.2 |
| 4. | p | <i>raa</i> 3, 3.3 |

Exemplo de uso: Absurdo, Redução ao Absurdo (2)

Prove que: $p \rightarrow \neg p \vdash \neg p$.

1. $p \rightarrow \neg p$ premissa

2. $[p]$ suposição

2.1. $\neg p$ $e \rightarrow 2, 1$

2.2. \perp $abs\ 2, 2.1$

3. $\neg p$ $raa\ 2, 2.2$

Teste seus conhecimentos

Prove que: $p \wedge \neg q \rightarrow r, \neg r, p \vdash q$.