

§ 1.1 质点 (Mass point)

运动学 (kinematics) 以几何观点来研究和描述物体的机械运动，不考虑物体的质量及其所受的力。

质点 (mass point)

如果在所研究的问题中，物体上各点运动状态的差异只占很次要的地位，我们就可以忽略物体的大小和内部结构，把它看成一个有质量的几何点，叫做**质点**。

一个物体能否被看做质点，主要取决于所研究问题的性质。

§ 1.2 质点的位矢、位移和速度

1. 位置矢量 (position vector) (单位: 米)

P 点坐标 (x, y, z)

P 点位矢 \vec{r}

位置矢量
(位矢)

运动方程: $\vec{r} = \vec{r}(t)$

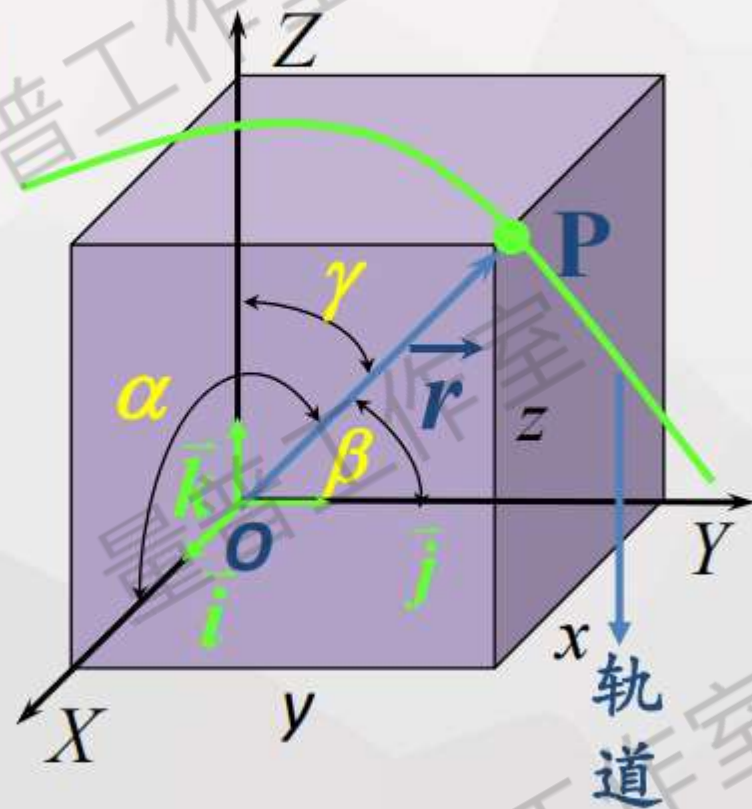
直角
坐标
系中

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

P 点位矢 \vec{r} 大小

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

P 点位矢 \vec{r} 方向 $\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \cos \beta = \frac{y}{r} \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}$



2. 位移 (displacement) 和路程 (distance)

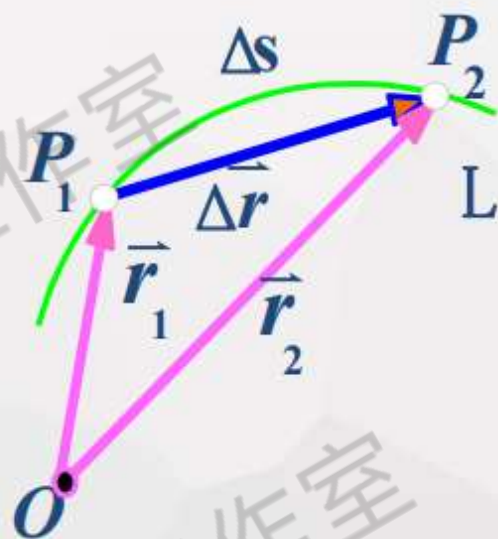
位移：质点位置的变更，用从 P_1 到 P_2 的有向线段表示，是矢量。

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$

直角坐
标系中

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{r} &= (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \\ &= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}\end{aligned}$$



路程：质点在 Δt 时间内所经过的路程，是曲线 P_1P_2 的长度，是标量。

自然坐标法（用于运动轨迹已知的质点）

在已知运动轨迹上任选固定点 O ，从 O 点起沿运动轨迹量得曲线长度 s 正值，这个方向称为自然坐标的正向。



质点在轨迹上的位置可以用 s 唯一确定。

$$s = f(t) \quad \text{说明：自然坐标 } s \text{ 是代数量。}$$

3. 速度 (velocity) (单位: 米/秒)

平均速度 $\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

瞬时速度

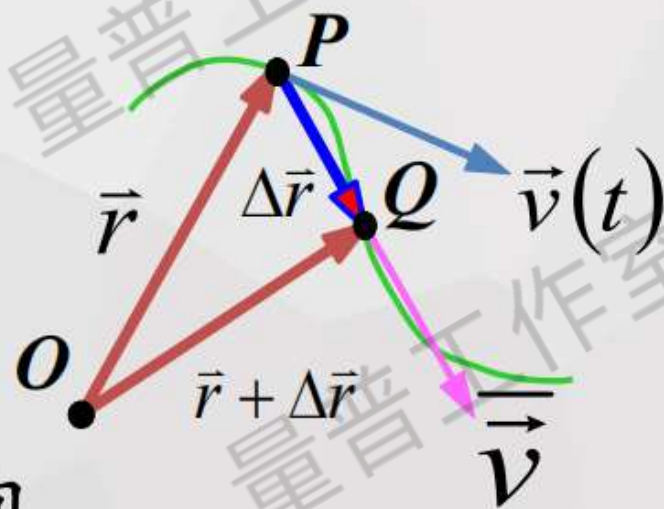
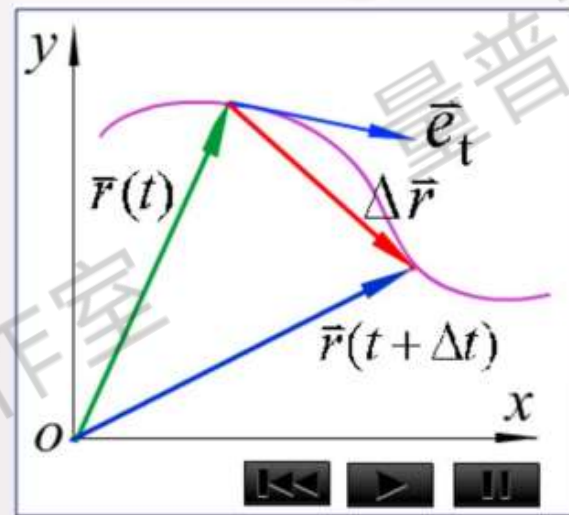
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

速度是位矢对时间的一阶导数

速度方向

$\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \vec{r}$ 的极限方向

在 P 点的切线并指向质点运动方向



用自然坐标表示平面曲线运动中的速度

速度

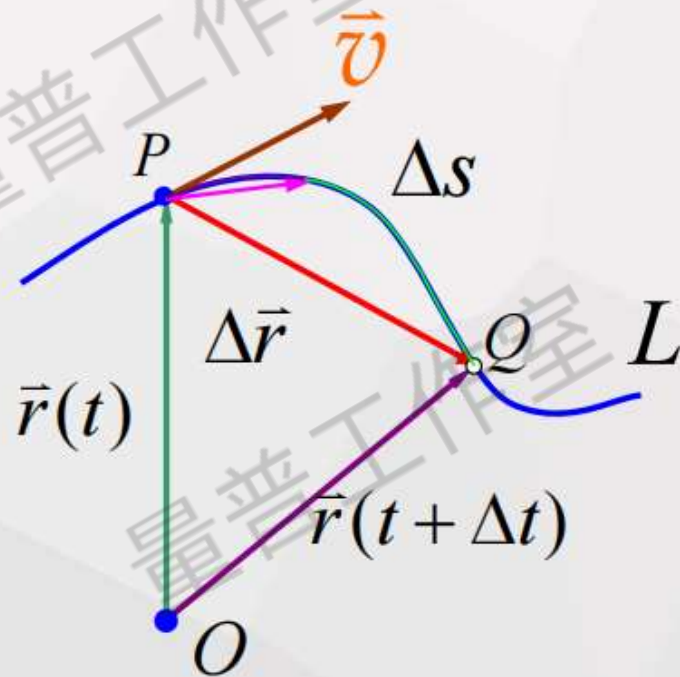
$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \right)$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right) \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \bar{\tau}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \vec{r}$ 沿切线方向, 且 $|\Delta \vec{r}| \rightarrow \Delta s$



直角坐标系中

瞬时速度

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\end{aligned}$$

速度大小

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

平均速度

$$\begin{aligned}\bar{\vec{v}} &= \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k} \\ &= \bar{v}_x\vec{i} + \bar{v}_y\vec{j} + \bar{v}_z\vec{k}\end{aligned}$$

4. 加速度 (Acceleration)

(速度随时间的变化。单位：米/秒²)

平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

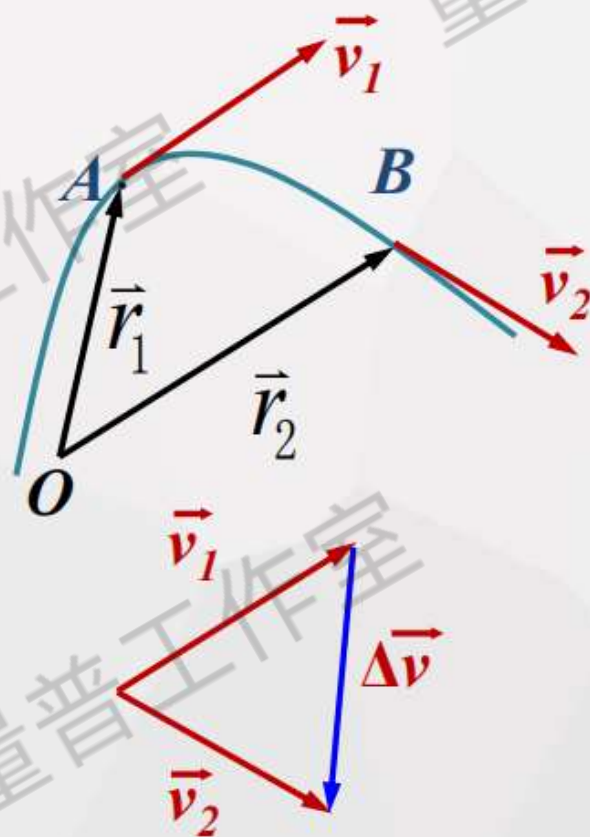
瞬时加速度

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

加速度是速度对时间的一阶导数或位矢对时间的二阶导数

\vec{r} 、 \vec{v} —— 描述质点运动状态的物理量

\vec{a} —— 描述质点运动状态变化的物理量



直角坐标系中

加速度

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k} \\ &= a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}\end{aligned}$$

加速度大小

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

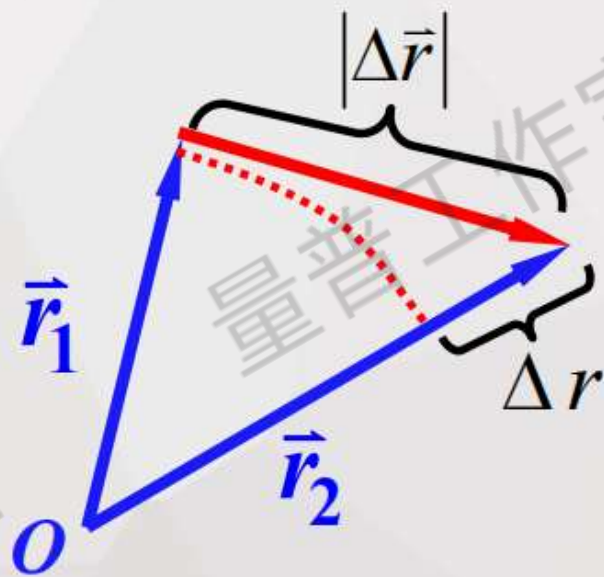
任意曲线运动都可以视为沿 x , y , z 轴的三个各自独立的直线运动的叠加（矢量加法）。

——运动的独立性原理或运动叠加原理

Δr 与 $\Delta \vec{r}$ 的区别

1. Δr 为标量, $\Delta \vec{r}$ 为矢量

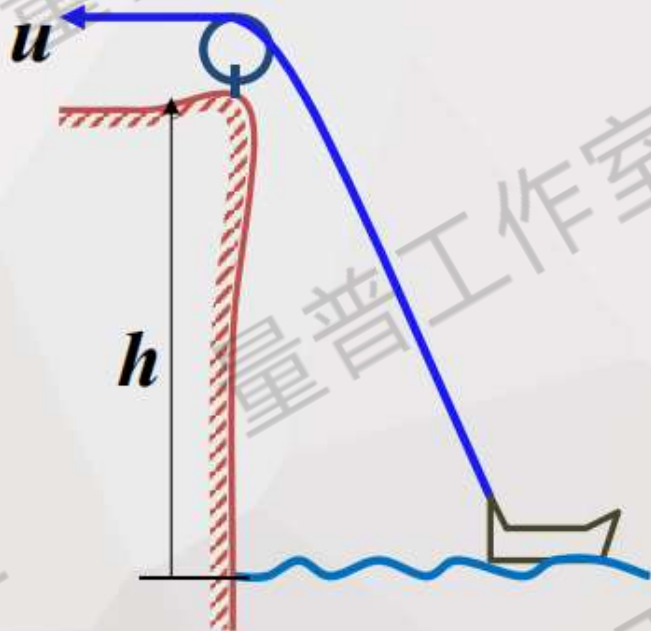
2. $\Delta r = |\vec{r}_2| - |\vec{r}_1|$ $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



$$|\Delta \vec{r}| \geq \Delta r$$

dr 和 $d\vec{r}$ 是两者的极限情况!

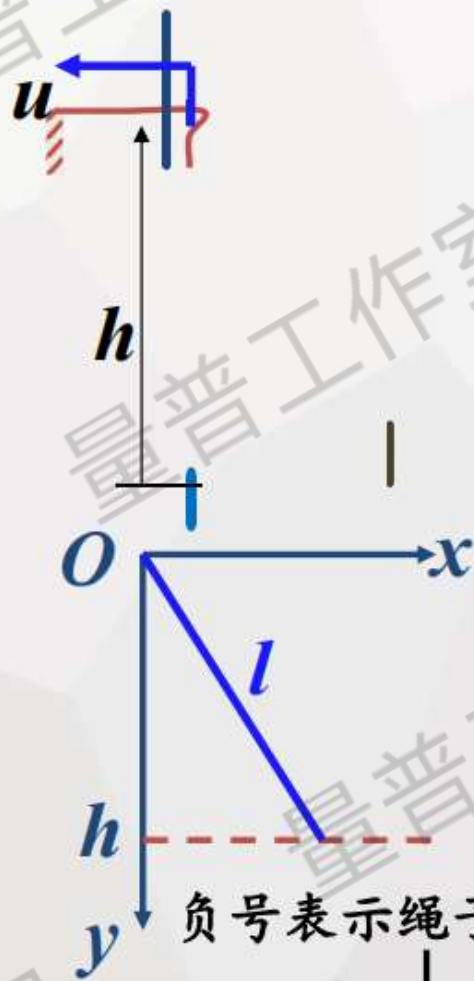
例：通过岸上的绞车拉动纤绳将湖中的小船拉向岸边，如果以恒定的速率 u 拉动纤绳，绞车定滑轮离水面的高度为 h ，求小船向岸边移动的速度 v 和加速度 a 。



解题思路：

要求速度和加速度，首先要确定小船的运动方程或运动轨迹，然后对时间进行微分，即可求得速度与加速度。

解：建立坐标系，坐标原点在滑轮处。



小船的运动函数或轨道方程：

任意时刻小船离岸距离满足：

$$x^2 = l^2 - h^2 \quad (x \text{ 和 } l \text{ 均为时间 } t \text{ 的函数})$$

速度：等式两端对 t 求导：

$$2x \frac{dx}{dt} = 2l \frac{dl}{dt}$$

负号表示绳子在缩短 $2xv = -2lu \Rightarrow v = -\frac{l}{x}u = -\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}u$

$$\frac{dl}{dt} = -u$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

加速度：

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{u^2 h^2}{x^3}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -u \frac{d\left(\frac{\sqrt{x^2 + h^2}}{x}\right)}{dt} = -u \frac{d\left(\frac{l}{x}\right)}{dt}$$

$$a = -u \left(\frac{dl}{dt} \cdot \frac{1}{x} + l \cdot \frac{d\frac{1}{x}}{dt} \right) = -u \left(-u \cdot \frac{1}{x} - l \cdot \frac{1}{x^2} \cdot v \right)$$

$$= -u \left(-u \cdot \frac{1}{x} - l \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(-\frac{l}{x} \cdot u \right) \right) = \frac{u^2}{x} - \frac{l^2 u^2}{x^3}$$

$$= \frac{u^2}{x^3} (x^2 - l^2) = -\frac{u^2 h^2}{x^3}$$

§ 1.3 运动的相对性

一、运动的绝对性和相对性



运动是相对的，对于不同参照物，同一质点运动的位移、速度和加速度都可能不同。

三、用不同参考系描述同一运动时，其位移、速度、加速度之间的关系

1. 位矢变换关系

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_s \xrightarrow{\text{分量式}} \begin{cases} x = x' + u_x t \\ y = y' + u_y t \\ z = z' + u_z t \end{cases}$$

$\vec{r} \rightarrow$ 质点在静止系(S系)中的位矢

$\vec{r}' \rightarrow$ 质点在运动系(S'系)中的位矢

$\vec{r}_s \rightarrow$ 运动系(S'系)在静止系(S系)中的位矢

注意：S系与S'系的相对性！

2. 位移变换关系

S 系和 S' 系， $t_0=0$ 时两坐标重合。在 $\Delta t=t-t_0$ 时段，质点由 A 运动到 B 。

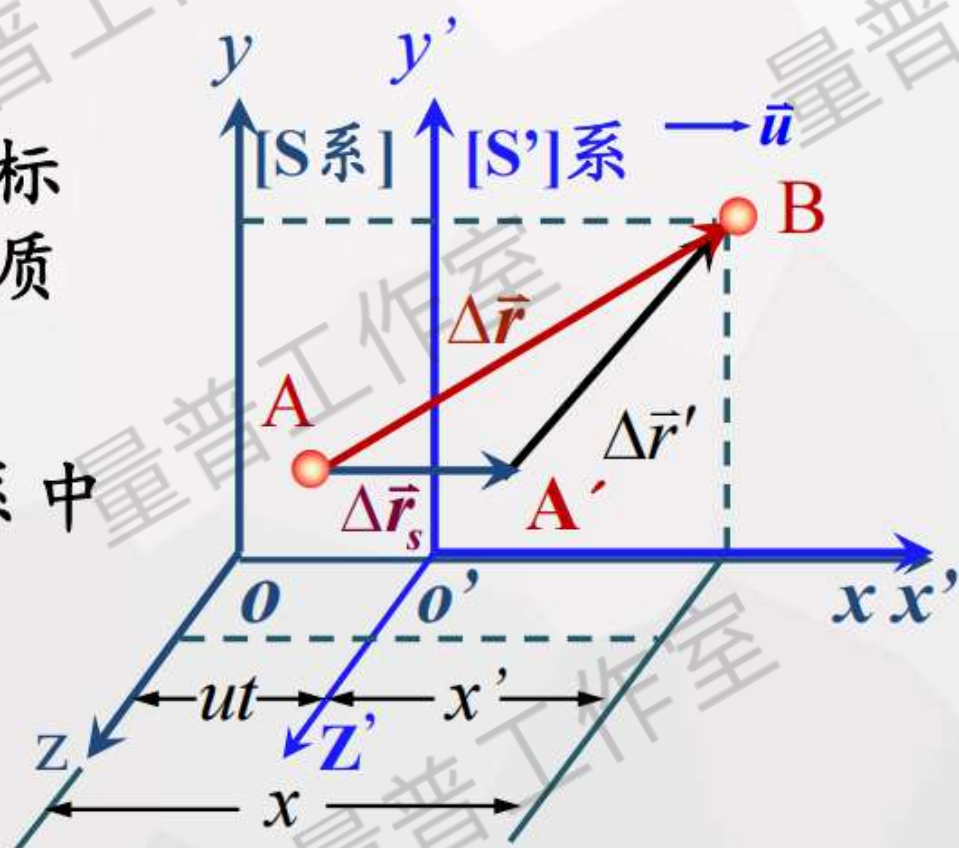
S 系测得的位移与在 S' 系中测得的位移有如下关系：

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}' + \Delta \vec{r}_s$$

$\Delta \vec{r} \rightarrow$ 质点在静止系(S 系)中的位移

$\Delta \vec{r}' \rightarrow$ 质点在运动系(S' 系)中的位移

$\Delta \vec{r}_s \rightarrow S'$ 系相对于 S 系的位移



4. 加速度的变换关系

对速度关系式进行求导即可得到

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0$$

$\vec{a} \rightarrow$ 质点在静止系(S 系)中的加速度

$\vec{a}' \rightarrow$ 质点在运动系(S' 系)中的加速度

$\vec{a}_0 \rightarrow S'$ 系相对于 S 系的加速度

两个参考系相对做匀速直线运动, 则 $\vec{a} = \vec{a}'$

注意

上述变换公式称作伽利略变换, 是建立在牛顿的绝对时空观上的!

例1 雨天一辆客车在水平马路上以 20 m/s 的速度向东开行，雨滴在空中以 10 m/s 的速度竖直下落。求雨滴相对于车厢的速度的大小与方向。

解：如图建立坐标系。 [图示](#)

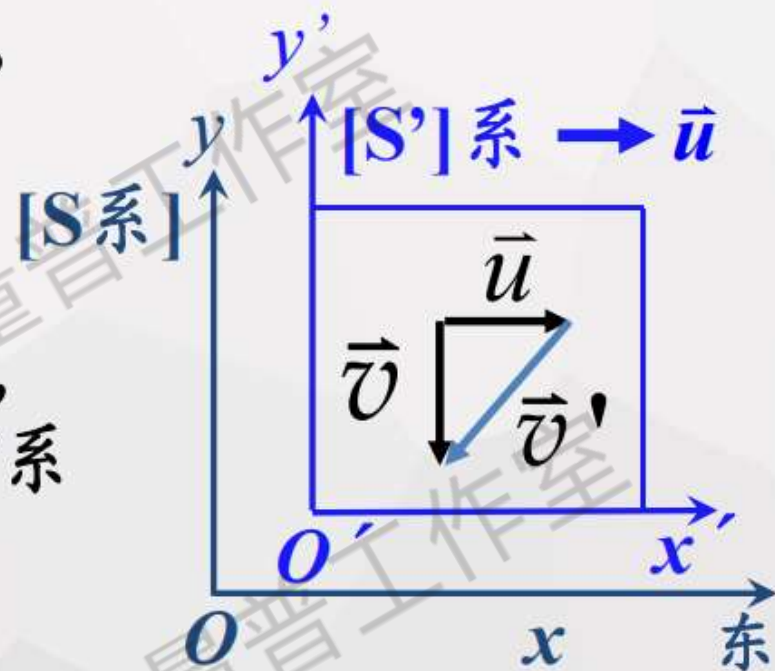
以地面参考系 xoy 为静止系 S 系，
以车厢参考系 $x'o'y'$ 为运动系 S' 系

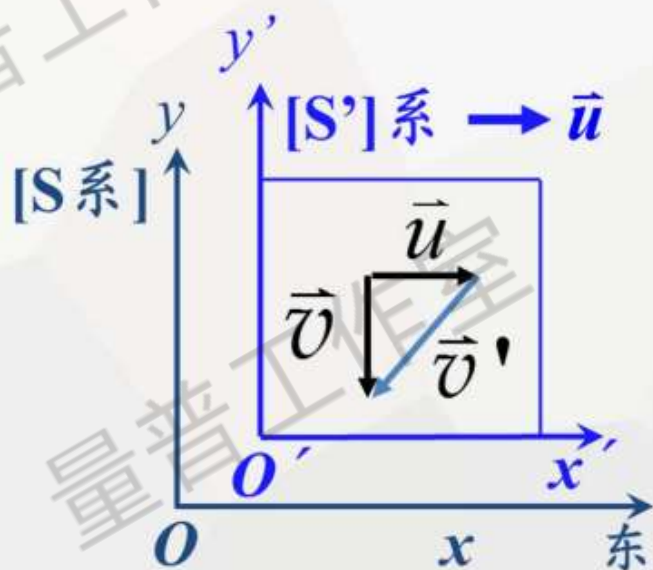
根据题意：

雨滴在 S 系中的速度为 $\vec{v} = 10\text{ m/s}$ ，方向沿 y 轴负向

雨滴在 S' 系中的速度为 \vec{v}' ，大小和方向待求

S' 系相对于 S 系的速度为 $\vec{u} = 20\text{ m/s}$ ，方向沿 x 轴正向





解法一：矢量法

根据伽利略变换 $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$ 以及三个速度的几何关系，有：

$$|\vec{v}'| = v' = \sqrt{v^2 + u^2} \\ = \sqrt{10^2 + 20^2} = 22.4 \text{ m/s}$$

设该速度与y轴的夹角为 θ ，则：

$$\tan \theta = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{u}{v} = \frac{20}{10} = 2 \Rightarrow \theta = 63.4^\circ$$

三、圆周运动

1. 圆周运动的速度

线速度：质点沿圆周运动时，它的速率通常叫做线速度。

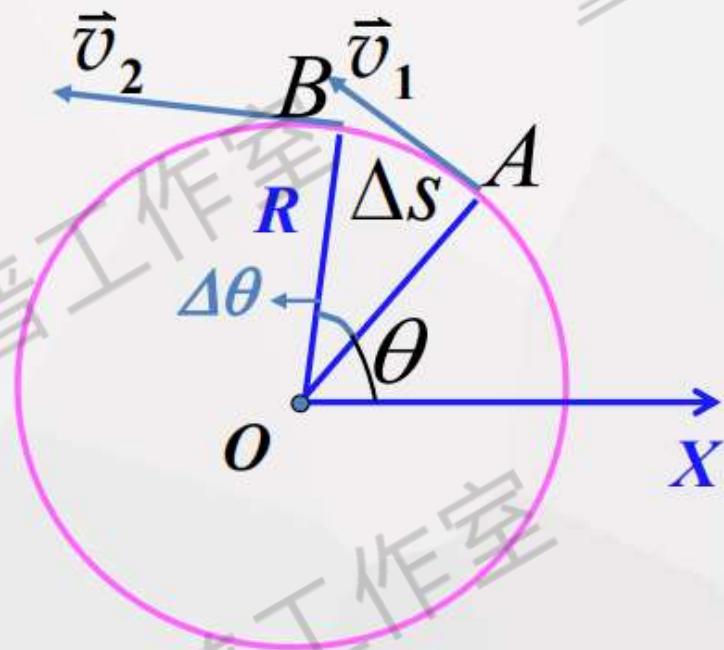
大小：
$$v = \frac{ds}{dt}$$

方向：圆周在该点的切线方向

角速度：以 θ 表示质点的角位置（逆时针时为正），则质点沿圆周运动时的角速度为：

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{SI单位：rad/s 或 s}^{-1}$$

线速度与角速度的关系： $v = R\omega$



2. 圆周运动的加速度

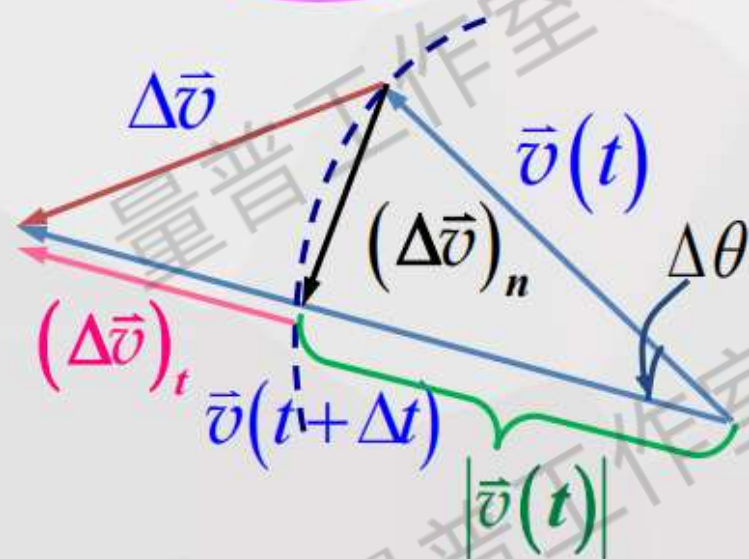
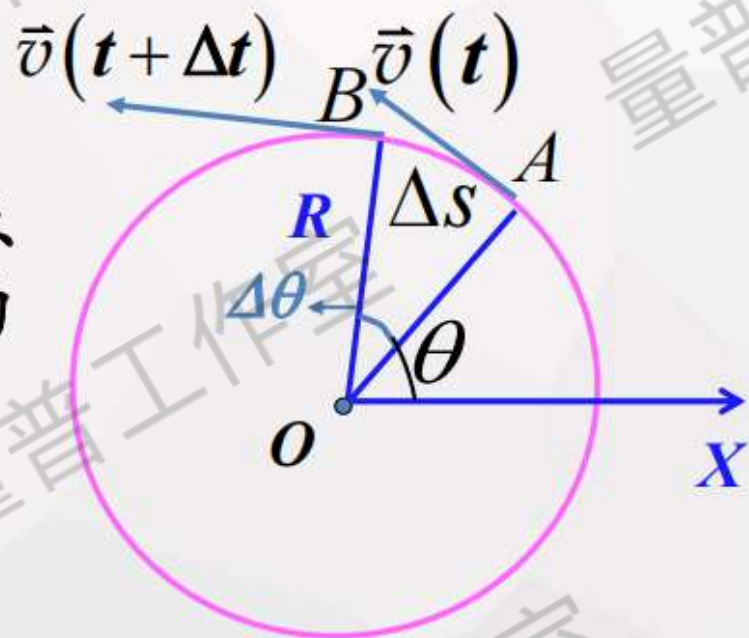
$\vec{v}(t+\Delta t)$ 和 $\vec{v}(t)$ 分别表示质点沿圆周运动到A点和B点时的速度矢量，则：

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

由于 $\Delta \vec{v} = (\Delta \vec{v})_n + (\Delta \vec{v})_t$

加速度的表达式可写作：

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{v})_n}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \vec{v})_t}{\Delta t} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$



(1) 切向加速度 \bar{a}_t

$$\bar{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \bar{v})_t}{\Delta t}$$

$(\Delta \bar{v})_t$ 的数值为:

$$(\Delta v)_t = v(t + \Delta t) - v(t) = \Delta v$$

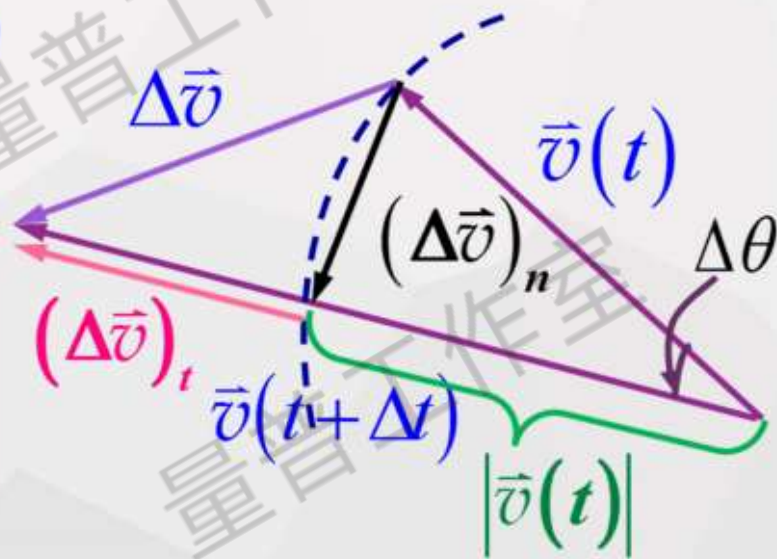
大小:

$$a_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

速率的变化率

方向: 沿着轨道的切线方向

(因为 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $(\Delta v)_t$ 的方向趋于和 v 在同一直线上)



注意

① 切向加速度表示质点速率变化的快慢。

② a_t 为一代数值，可正可负。 $a_t > 0$ 表示速率随时间增大， a_t 的方向与速度 v 同向； $a_t < 0$ 表示速率随时间减小， a_t 的方向与速度 v 反向。

③ 角加速度 α ：定义质点运动角速度对时间的变化率为角加速度，即： $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

则 $a_t = R\alpha \leftarrow \because v = R\omega, \therefore a_t = \frac{d(R\omega)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\alpha$

(2) 法向加速度 \bar{a}_n $\bar{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta \bar{v})_n}{\Delta t}$

两个阴影 \triangle 为相似 \triangle 。故：

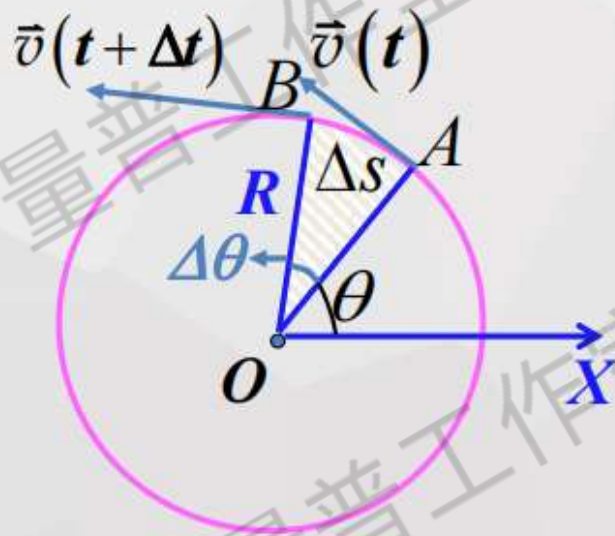
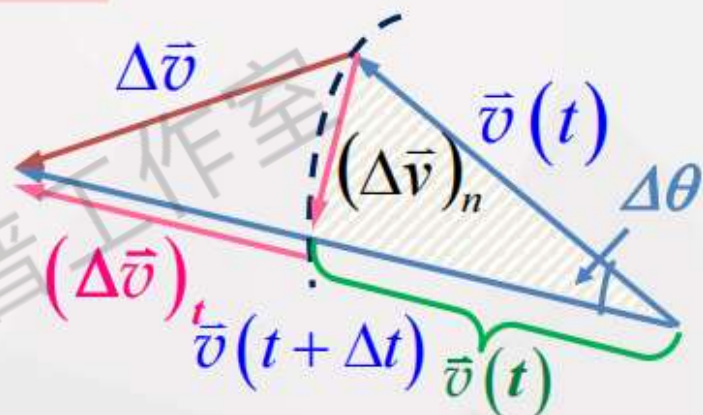
$$\frac{|(\Delta \bar{v})_n|}{v} = \frac{AB}{R} \quad \rightarrow \quad |(\Delta \bar{v})_n| = \frac{v \overline{AB}}{R}$$

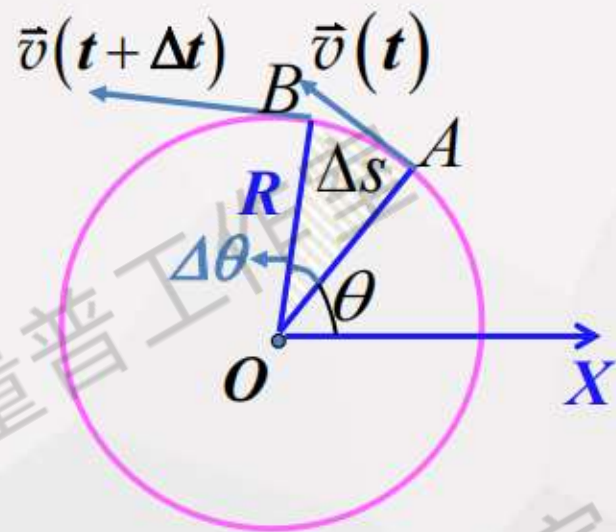
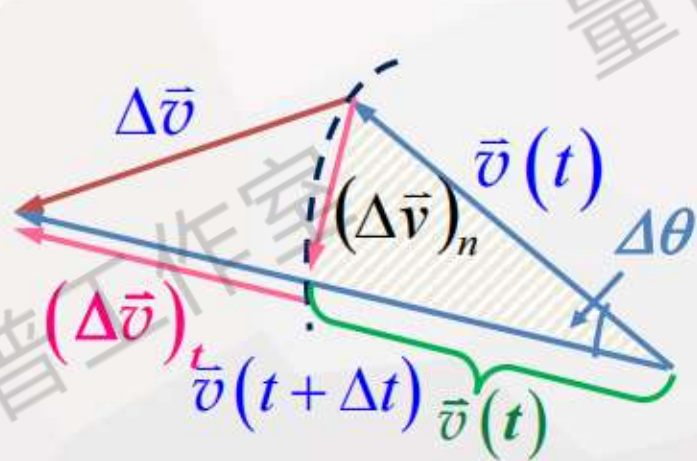
$\Delta t \rightarrow 0$ 时, $AB \approx \Delta s$

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|(\Delta \bar{v})_n|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v \cdot \Delta s}{R \cdot \Delta t} = \frac{v}{R} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\left\{ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = v \right\} \Rightarrow a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R \quad \{v = \omega R\}$$

大小: $a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$



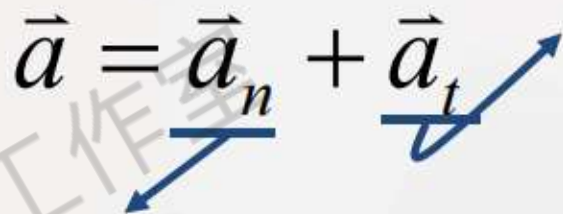


方向：垂直于圆的切线方向沿着半径指向圆心

因为 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\Delta \theta \rightarrow 0$, $(\Delta v)_n$ 的方向趋于垂直于速度 v 的方向而指向圆心

法向加速度表示由于速度方向的改变而引起的速度的变化率。

(3) 圆周运动的加速度小结

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$


切向加速度，由速度的大小（速率）的变化引起，方向为圆周的切线方向

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

法向加速度，由速度的方向的改变引起，方向为圆周径向向

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

注意

\vec{a}_t 总与 \vec{a}_n 垂直；圆周运动总有 \vec{a}_n ；直线运动 $\vec{a}_n = 0$

总加速度 \vec{a}

大小
方向

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

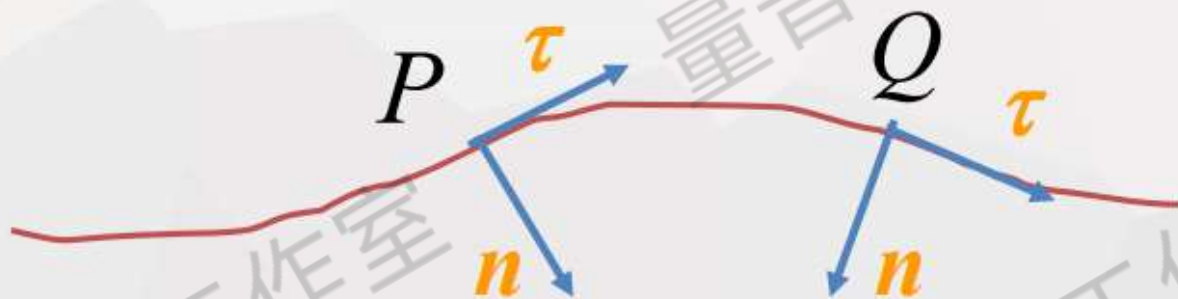
$$\beta = \arctan \frac{a_n}{a_t}$$

β 表示加速度与速度之间的夹角

四、平面曲线运动

注意

上述关于加速度的讨论结果也适用于任何二维曲线运动。这时公式中的半径 R 应为曲线上所涉及点处的曲率半径。



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{\rho} \vec{n}_0$$

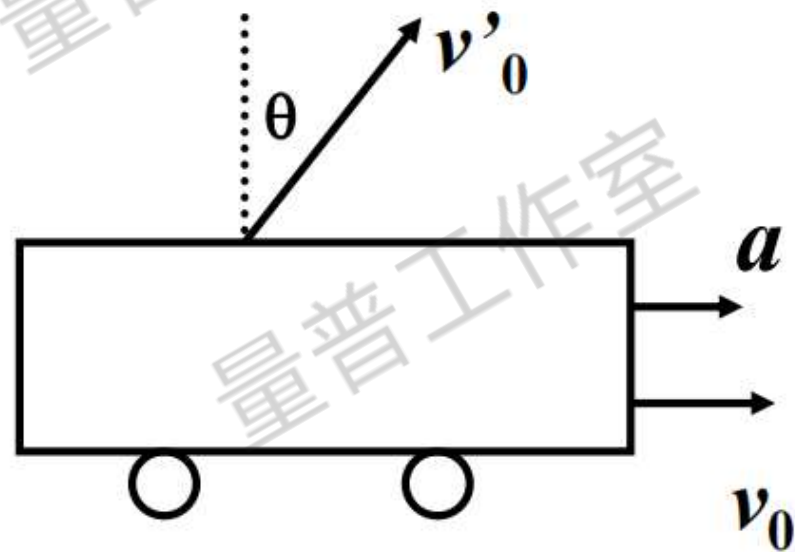
$\vec{\tau}_0$ → 切向单位矢量

指向物体运动方向

\vec{n}_0 → 法向单位矢量

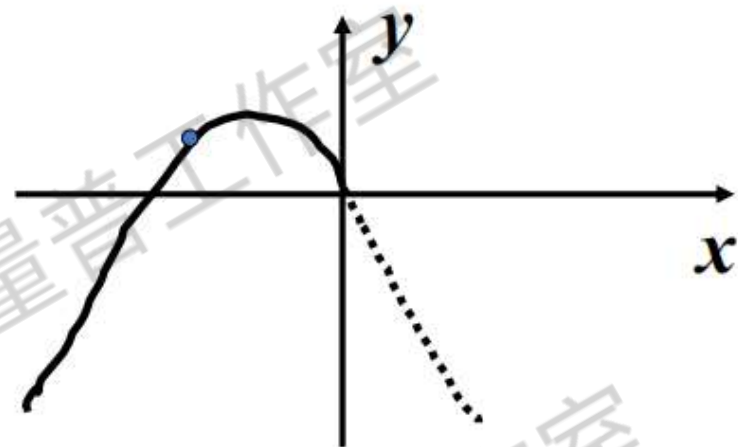
指向轨道的凹侧

补充作业1. 一男孩乘坐一铁路平板车，在平直铁路上匀加速行驶，加速度为 a ，他沿车前进的斜上方抛出一球(相对于车的速度为 v'_0)，设抛球时对车的加速度的影响可以忽略，如果使他不必要移动他在车中的位置就能接住球，则抛出的方向与竖直方向的夹角应为多大？



补充作业2. 一质点运动轨迹为抛物线

$$\begin{cases} x = -t^2 & (\text{SI}) \\ y = -t^4 + 2t^2 & (\text{SI}) \end{cases}$$



求： $x = -4 \text{ m}$ 时 ($t > 0$)

粒子的速度、速率、加速度。

[例题 1] 一质点的运动学方程为

$$\boldsymbol{r} = R \cos t \boldsymbol{i} + R \sin t \boldsymbol{j},$$

求以形式 $f(x, y) = 0$ 写出的轨迹方程.

[例题 1] 跳水运动员沿竖直方向入水, 接触水面时速率为 v_0 , 入水后地球对他的吸引和水的浮托作用相抵消, 仅受水的阻碍而减速. 自水面向下取 Oy 轴, 其加速度为 $a_y = -kv_y^2$, v_y 为速度, k 为常量. 求入水后运动员速度随时间的变化.

*[例题 2] 运动会上跳水运动员自 10 m 跳台自由下落. 入水后因受水的阻碍而减速. 自水面向下取坐标轴 Oy , 其加速度为 $-kv_y^2$, $k=0.4 \text{ m}^{-1}$. 求运动员速度减为入水速度的 $1/10$ 时, 运动员入水深度.

[例题 1] 一质点平面运动的加速度为 $a_x = -A \cos t$, $a_y = -B \sin t$, $A \neq B$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. 初始条件为 $t=0$, $v_{0x}=0$, $v_{0y}=B$, $x_0=A$, $y_0=0$. 求质点轨迹.

[例题 1] 汽车在半径为 200 m 的圆弧形公路上刹车,刹车开始阶段的运动学方程为 $s=20t-0.2t^3$ (单位:m,s). 求汽车在 $t=1$ s 时的加速度.

[例题 1] 如图 2.25(a)所示,甲舰自北向南以速率 v_1 行驶,乙舰自南向北以速率 v_2 行驶.两舰联线和航线垂直时,乙舰向甲舰发射炮弹,发射速率为 v_0 ,求发射方向与航线所成的夹角.

2.8.2 飞机在静止空气中的飞行速率是 235 km/h , 它朝正北的方向飞行, 使整个飞行时间内都保持在一条南北向公路的上空. 地面观察者利用通讯设备告诉驾驶员正在刮着速率为 70 km/h 的风, 但飞机仍能以 235 km/h 的速率沿公路方向飞行. (1) 风的方向是怎样的? (2) 飞机的头部指向哪个方向? 也就是说, 飞机的轴线和公路成怎样的角度?

1.2.2 平面极坐标系下的表示

在本书各公式的表达式中，其相关的标记为

$$\dot{r} \equiv \frac{dr}{dt}, \quad \ddot{r} \equiv \frac{d^2 r}{dt^2}, \quad \dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}, \quad \ddot{\theta} \equiv \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

这种对导数的标记方法源于牛顿在研究质点运动学过程中创立微积分时的标记，当时牛顿称其为“流数”。目前，高等数学上的因变量 y 对自变量 x 的导

数经常标记为 $y' \equiv \frac{dy}{dx}$ 。作为物理学上的习惯表述，如果自变量是时间 t 的话，

因变量 y 对时间自变量 t 的导数即可标记为 $y' \equiv \frac{dy}{dt}$ ，有时也可标记为 \dot{y} ，对高

阶导数亦如此。

$$\mathbf{a} = a_r \mathbf{e}_r + a_\theta \mathbf{e}_\theta = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \mathbf{e}_\theta$$

知识单元	知 识 点		
r 、 v 、 a 相互关系	$v = \frac{dr}{dt}$, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$, $r = \int v dt$, $v = \int a dt$		
r 、 v 、 a 相互关系的坐标表示	直角坐标系表示	极坐标系表示	本征坐标系表示
	$v = \frac{dx}{dt}i + \frac{dy}{dt}j + \frac{dz}{dt}k$ $a = \frac{dv_x}{dt}i + \frac{dv_y}{dt}j + \frac{dv_z}{dt}k$	$v = \dot{r}e_r + r\dot{\theta}e_\theta$ $a = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta$	$v = ve_n$ $a = \frac{dv}{dt}e_n + \frac{v^2}{R}e_r$
相对运动	$v = v_{\text{相对}} + v_{\text{牵连}}$		$a = a_{\text{相对}} + a_{\text{牵连}} + a_{\text{科氏}}$
	平动动系	$v_{\text{牵连}} = \frac{dr_0}{dt} = v_0$	$a_{\text{牵连}} = \frac{d^2r_0}{dt^2} = a_0$, $a_{\text{科氏}} = 0$
	匀角速转动动系	$v_{\text{牵连}} = \omega \times r$	$a_{\text{牵连}} = \omega \times (\omega \times r)$ $a_{\text{科氏}} = 2\omega \times v_{\text{相对}}$