预习要点

1. 注意简谐振动的规律和特点。如何判断一个振动是否为简谐振动?

2. 简谐振动的能量有什么特点?

3. 简谐振动的周期由什么因素决定? 如何计算一简谐振动的周期?

4. 研究谐振子模型的意义何在?

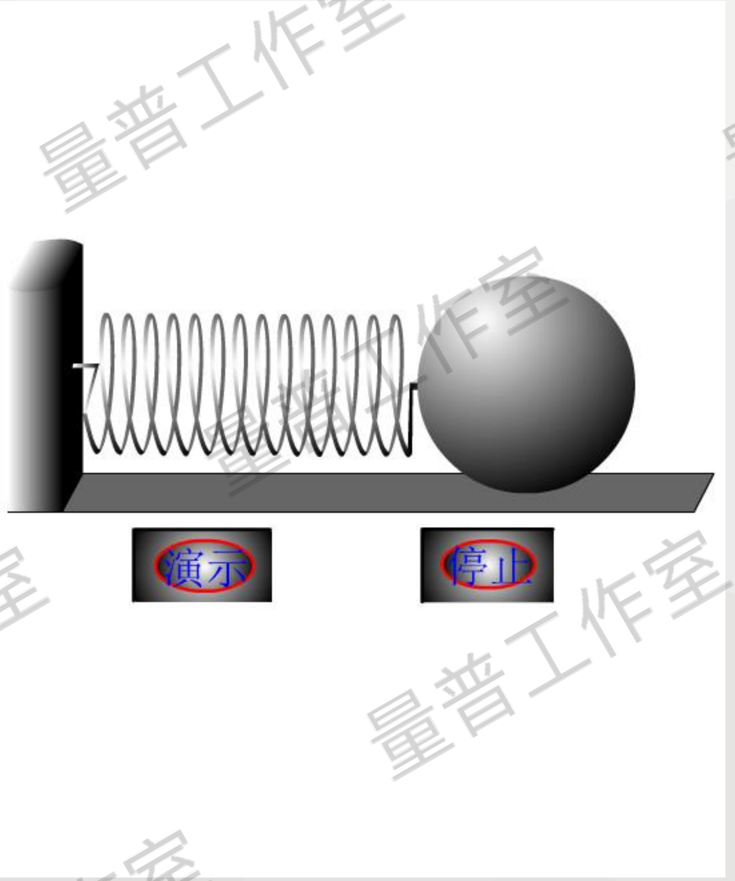
5. 注意波动传播过程的物理实质。

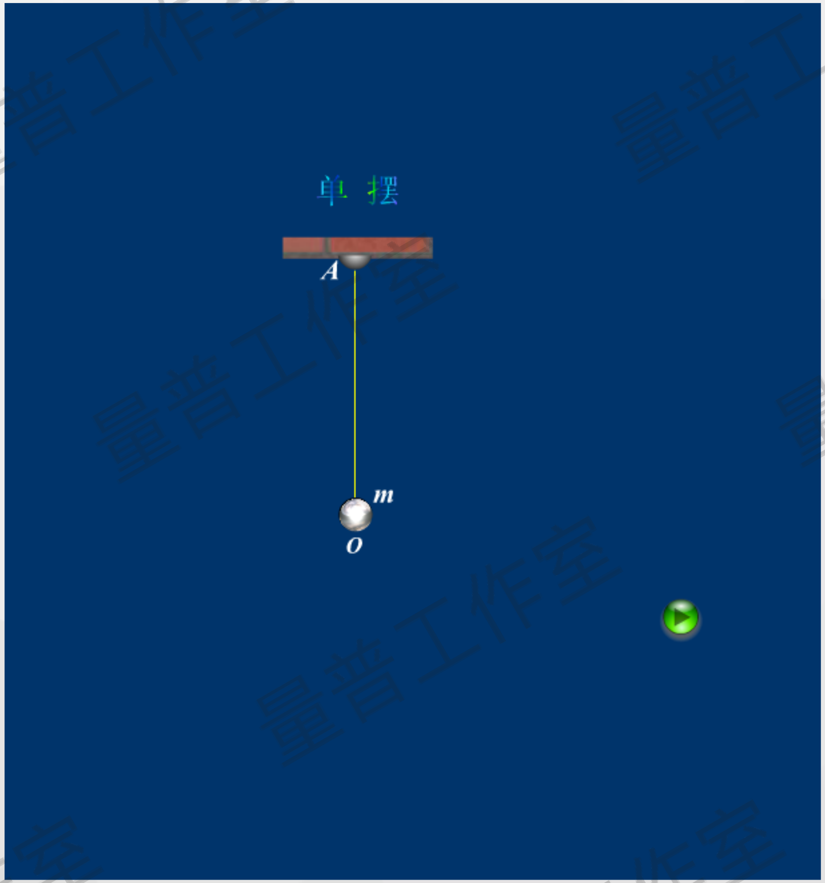
6. 描写波动的物理量有哪些? 它们的关系如何?

第五章

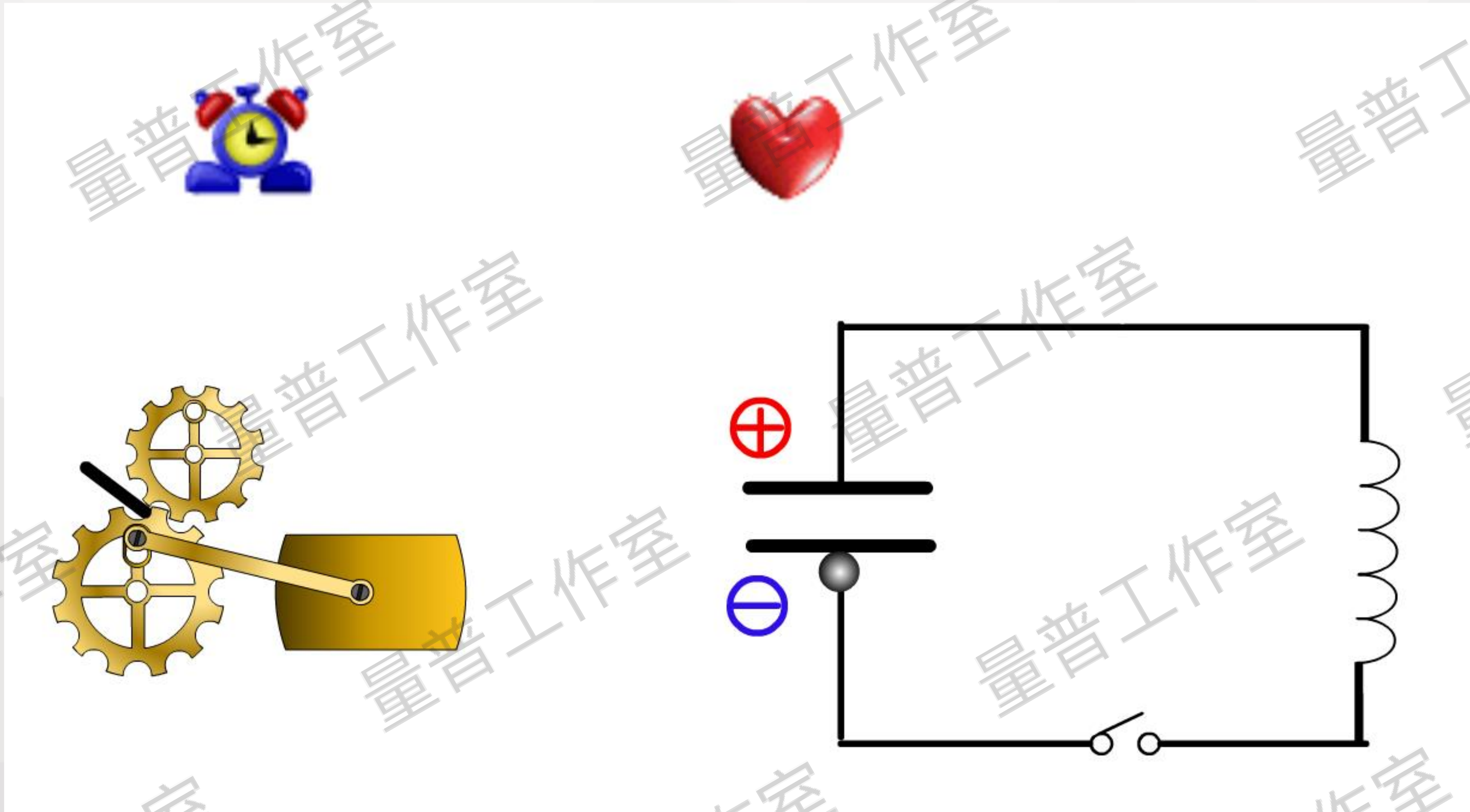
具有周期性运动行为的振动和波动的描述

机械振动：物体在一定位置附近作来回往复的运动。





广义振动：任一物理量（如位移、电流等）在某一数值附近反复变化。



§5.1 简谐振动的运动学描述

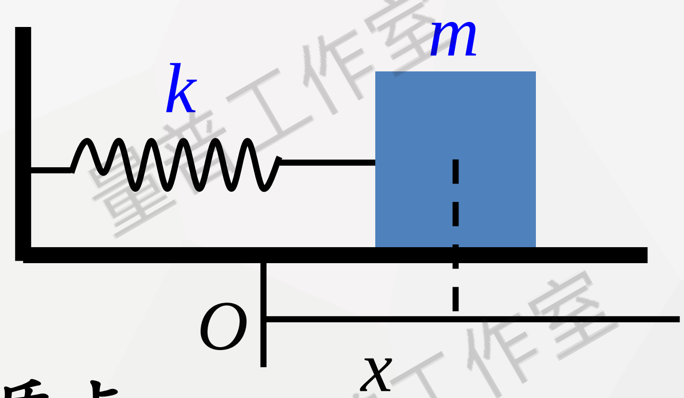
最简单最基本的**线性振动**。

简谐振动(simple harmonic motion)：**一个作往复运动的物体，如果其偏离平衡位置的位移 x（或角位移 θ）随时间 t 按余弦（或正弦）规律变化的振动。**

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

简谐运动 $\xrightarrow[\text{分解}]{\text{合成}}$ 复杂振动

谐振子 作简谐运动的物体。



物体——可看作质点

轻弹簧——质量忽略不计，形变满足胡克定律

平衡位置：弹簧处于自然状态的稳定位置

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

相位

振幅　　角频率　　初相

质点位置变化具有时间上的周期性——周期T

周期*T*： 振动往复一次所经历的时间

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = A\cos\left[\omega\left(t + T\right) + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t + \varphi + \omega T\right]$$

余弦函数的周期是2π

$$\omega T = 2\pi$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

SI单位：*s*

频率*ν*： 单位时间内的往复次数

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

SI单位：1/*s*

二、简谐振动的旋转矢量图示法

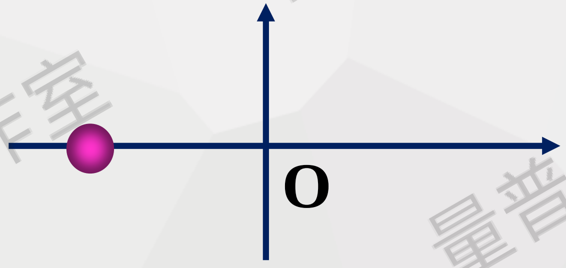
思考

匀速圆周运动与简谐运动之间有没有什么联系？

简谐振动的相量图表示法

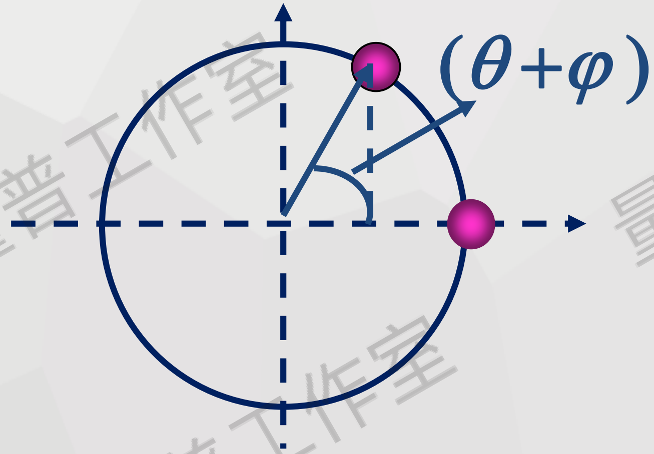
简谐运动： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

圆周运动： $x^2 + y^2 = R^2$



圆周运动在x轴上的投影：

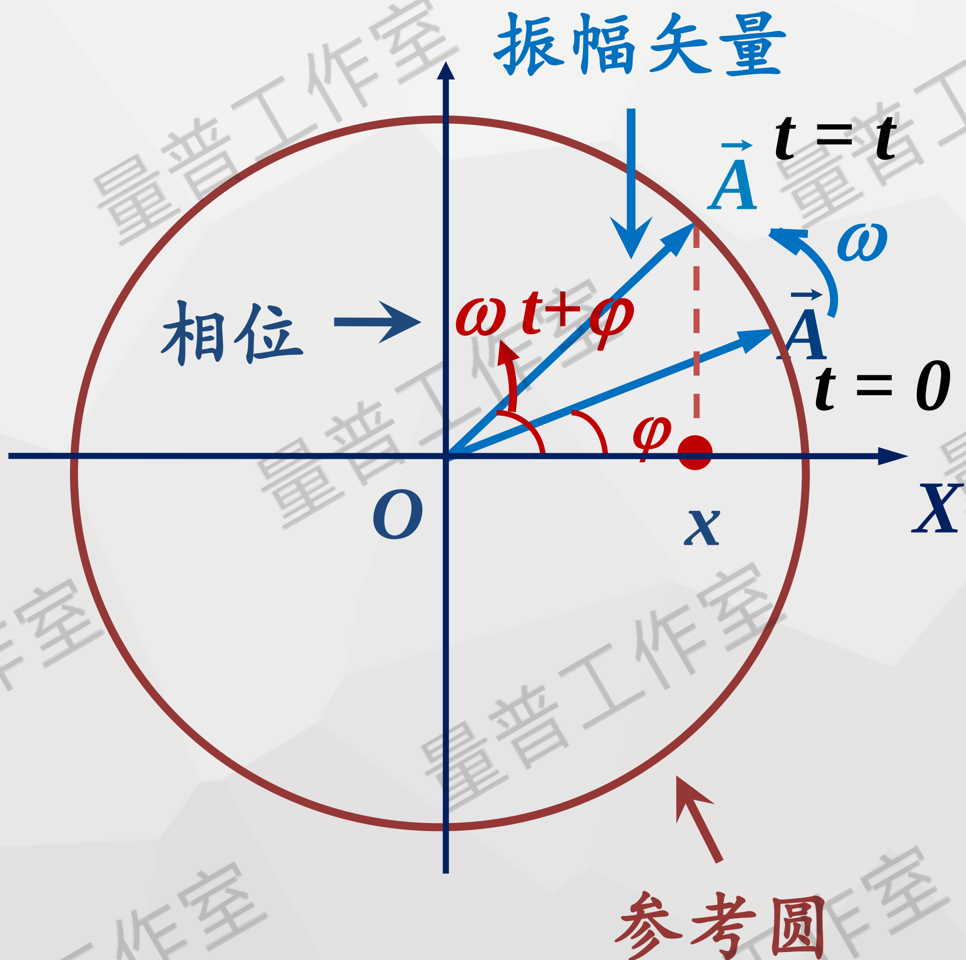
$$x = R\cos(\theta + \varphi)$$
$$= R\cos(\omega t + \varphi)$$



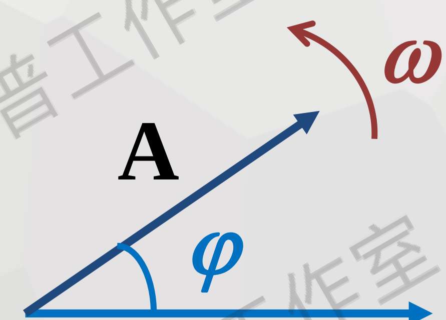
结论

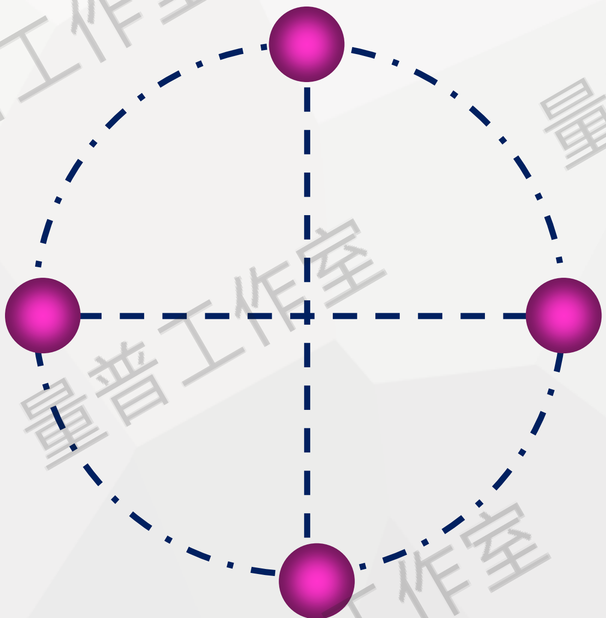
可以用圆周运动表示简谐运动！

——相量图法（参考圆）



振幅矢量：长度为A，以O为原点作角速度为ω的**逆时针旋转**。振幅矢量的端点在x轴上的投影点的运动为简谐振动。





$\omega t+\varphi=0$或$2k\pi$时

正极大处，$v=0$，下一刻v为负

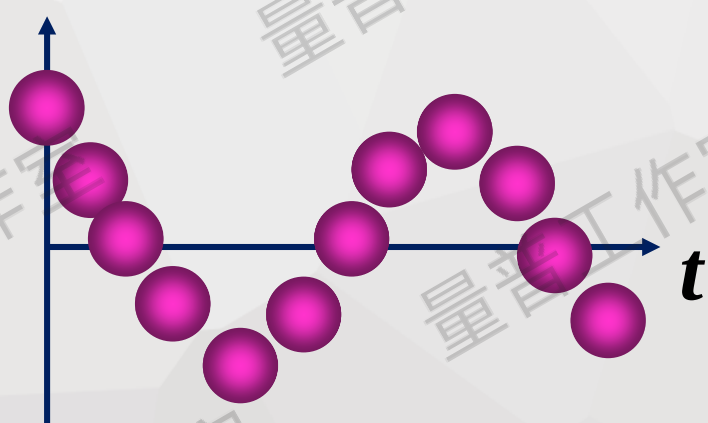
$\omega t+\varphi=\frac{\pi}{2}$或$2k\pi+\frac{\pi}{2}$时

越过原点以v_{max}向x轴负向运动

$\omega t+\varphi=\pi$或$2k\pi+\pi$时

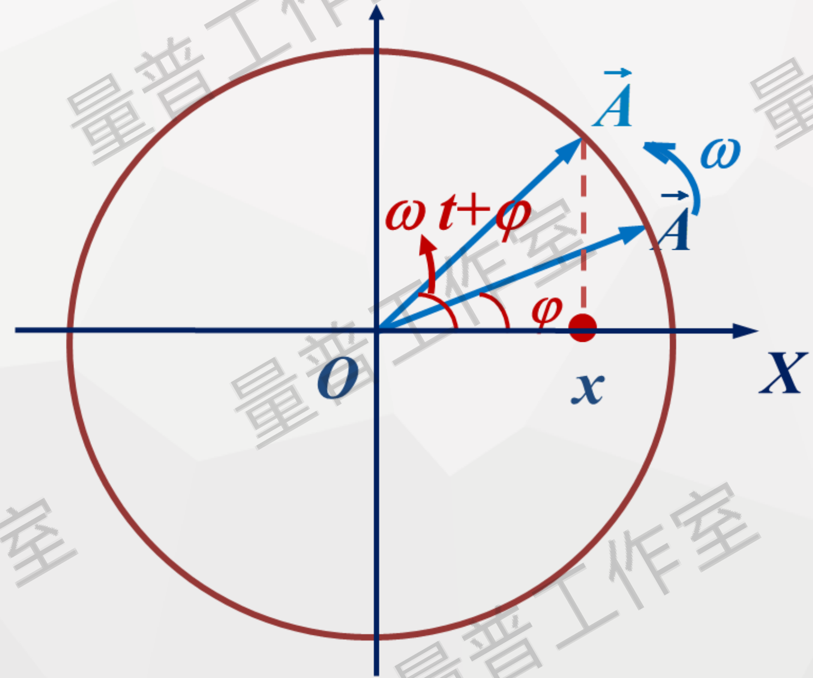
负极大处，$v=0$，下一刻v为正

$\omega t+\varphi=\frac{3\pi}{2}$或$2k\pi+\frac{3\pi}{2}$时



越过原点以v_{max}向x轴正向运动

三、相位



$$x = A\cos\boxed{(\omega t + \varphi)}$$

在t时刻振动的相位，对应于振动质点在该时刻的运动状态。

振幅矢量与简谐振动的对应关系

$\vec{A}$的长度 —— 谐振动的振幅 A

$\vec{A}$的角速度 —— 谐振动的角频率ω

$\vec{A}\big|_{t=0}$与 x 轴的夹角 —— 谐振动的初相位φ

相的用途： 比较两同频率简谐运动的步调。

设两个简谐运动为：$x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

它们的相差为：

$$\Delta\varphi = (\omega t+\varphi_2)-(\omega t+\varphi_1) = \varphi_2-\varphi_1$$

$\Delta\varphi = 2k\pi, k = 0,1,2\ldots$　　步调相同，同相

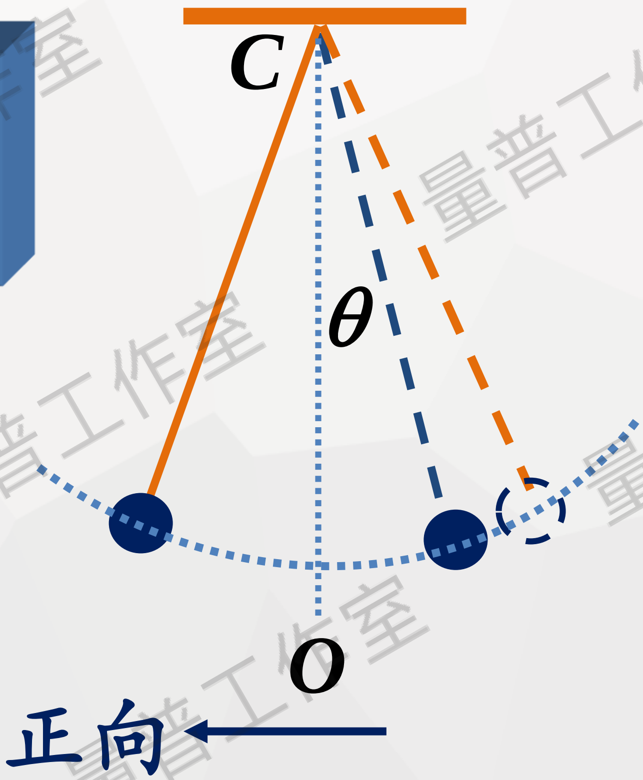
$\Delta\varphi = (2k+1)\pi, k = 0,1,2\ldots$　　步调相反，反相

$\Delta\varphi =$ 其它值　　不同相

$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 > 0$, x_2振动超前x_1振动$\Delta\varphi$

$\Delta\varphi = \varphi_2-\varphi_1 < 0$, x_2振动落后x_1振动$\Delta\varphi$

思考



θ_m=10°，t=0时，θ=5°

~~初相 $\varphi = 5^o = 0.03\pi$?~~

振动方程：

$$\theta = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$$

初相为：

$$\varphi = \arccos 0.5 = \frac{\pi}{3}$$

物理模型与数学模型比较

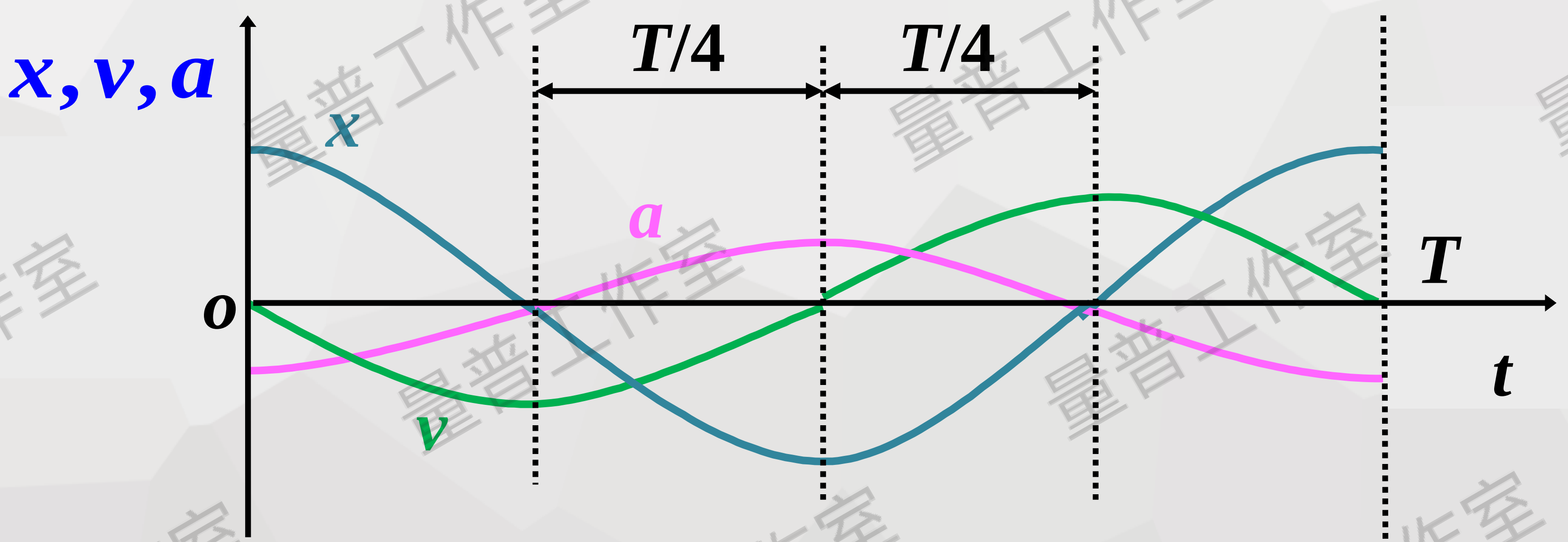
	简谐振动	振幅矢量
A	振幅	半径
φ	初相	初始角坐标
$\omega t+\varphi$	相位	角坐标
ω	圆频率	角速度
T	谐振动周期	圆周运动周期

四、简谐振动的位移、速度、加速度

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) = v_m\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = a_m\cos(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x$$



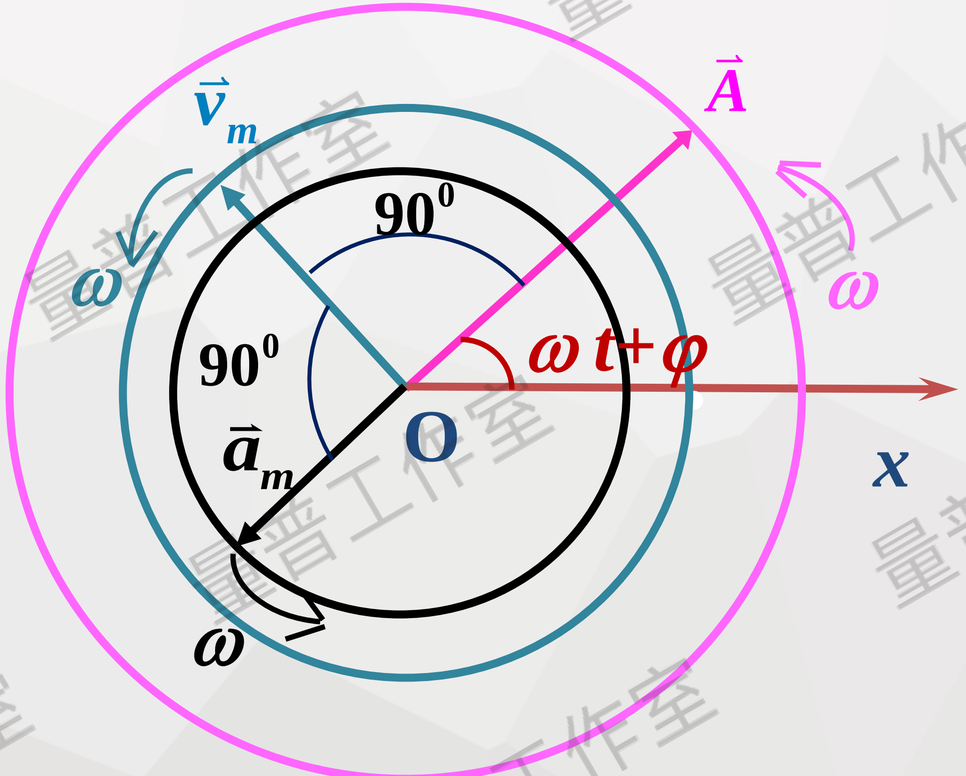
简谐运动的x, v, a随时间变化的关系曲线

简谐运动的位移x，速度 v 和加速度 a 的相量图

由图可见：

$\vec{v}$超前$\vec{x}$ $\dfrac{\pi}{2}$

$\vec{a}$超前$\vec{v}$ $\dfrac{\pi}{2}$



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v_x = v_m \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = A\omega\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a_x = a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

例 两质点沿 x 轴作同方向同振幅的简谐振动，其周期均为5s，当$t=0$时，质点1在$\sqrt{2}A/2$处向 x 轴负方向运动，而质点2在-A处。试用相量图法求这两个简谐振动的初相差，以及两个质点第一次经过平衡位置的时刻。

解 两质点的谐振动方程分别为

$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

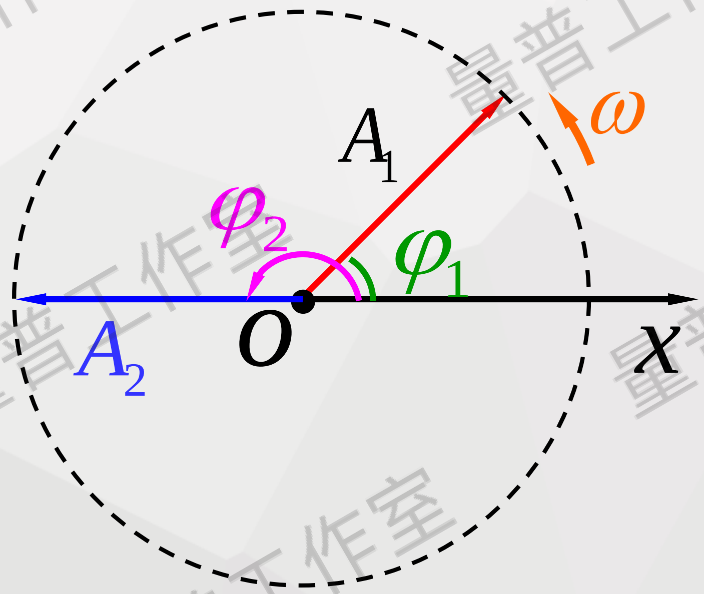
质点1在 $t = 0$ 时， $x_{10} = \sqrt{2}A/2$

向x轴负方向运动，其振幅矢量 A_1如图所示。

由图得初相角 $\varphi_1 = \pi/4$

同理，振幅矢量 A_2 如图所示。

初相角 $\varphi_2 = \pi$



两质点的初相差

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi - \pi/4 = 3\pi/4$$

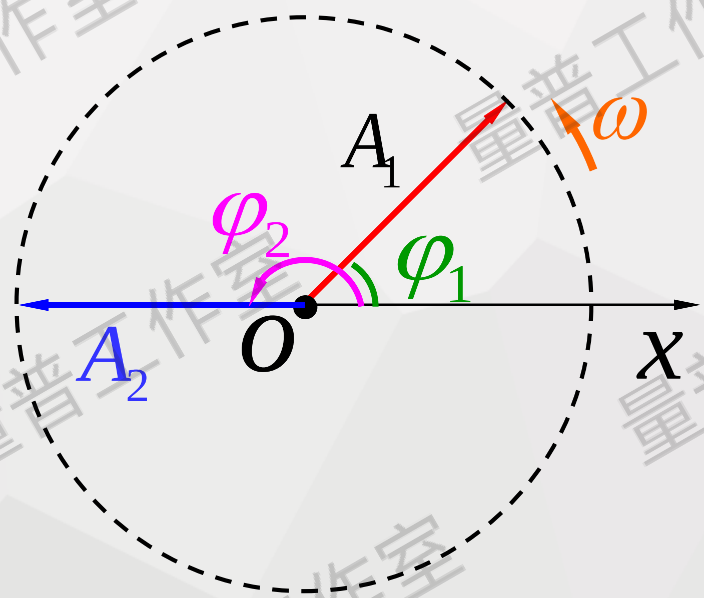
质点2的相位比质点1的相位超前 $3\pi/4$ 。

由图得，质点1第一次经过平衡位置的时刻为

$$t_1 = T/8 = 0.625\text{s}$$

质点2第一次经过平衡位置的时刻为

$$t_2 = T/4 = 1.25\text{s}$$



五、简谐运动的动力学

1. 简谐运动的动力学定义

质点在与对平衡位置的位移成正比而反向的合外力作用下的运动就是简谐运动。

做简谐运动的质点所受的合外力一定是回复力。

在 $F=-kx$ 这样的合外力的作用下，质点一定作简谐运动。

2. 简谐运动的动力学方程 $m\dfrac{d^2x}{dt^2}=-kx$

——二阶常系数齐次线性微分方程

3. 简谐运动方程的确定 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

1）简谐运动的固有角频率和固有周期

$$\left.\begin{aligned} &\text{动力学方程}\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \\ &\text{简谐运动}\quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\omega^2 x = -\frac{k}{m}x \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

简谐运动的角频率为：$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$，由振动系统本身的性质（力的特征和物体的质量）所决定，称为振动系统的**固有角频率**。

相应的周期叫振动系统的**固有周期**。 $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$

2）由初始条件求A和φ

要确定简谐运动的具体形式，即 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ 中**A**，**ω**，**φ** 的具体值时，除了要知道外力条件外，还需要知道初始条件，即t=0时刻的位移x_0和速度v_0

由 $\begin{matrix} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) \end{matrix}$ 可知t=0时，$\begin{matrix} x_0 = A\cos\varphi \\ v_0 = -\omega A\sin\varphi \end{matrix}$

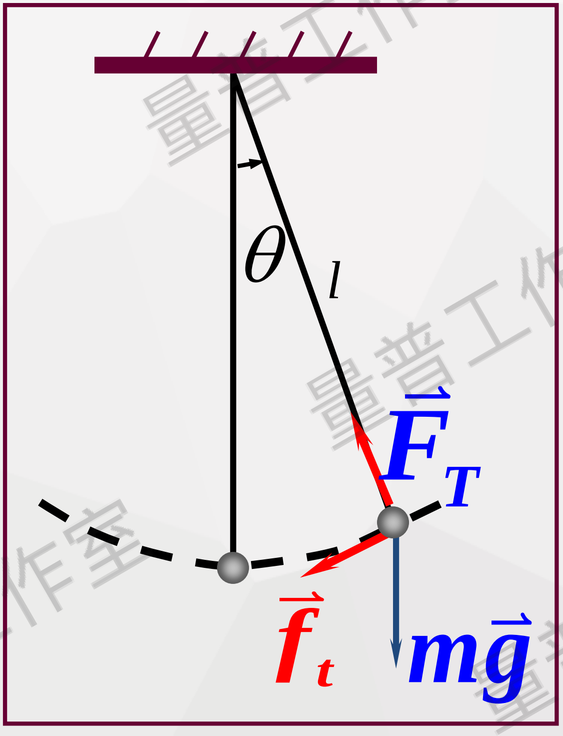
由此可解得：$\begin{cases} A = \sqrt{x_0{}^2 + v_0{}^2 / \omega^2} \\ \varphi = \arctan\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{cases}$

补充：<u>单摆的微小振动</u>

摆球受到的切向力：

$$f_t = -mg\sin\theta$$

当 $\sin\theta \approx \theta$ 时 $f_t = -mg\theta$



摆球切向加速度：

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(l\omega)}{dt} = l\frac{d\omega}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

由牛顿第二定律：

$$f_t = ma_t \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0$$

与简谐运动的动力学方程 $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$ 进行比较（式中，$\frac{k}{m} = \omega^2$）

结论：

单摆的微小振动是简谐运动。其角频率和振动的周期分别为：

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

复摆的运动分析：

t 时刻，复摆所受重力矩

$$M=-mgl\sin\theta$$

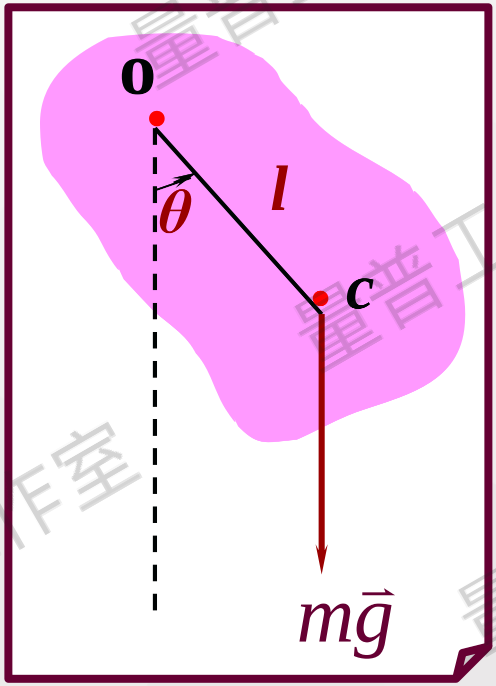
摆角很小时， $\sin\theta\approx\theta$

故 $M=-mgl\theta$

由转动定律 $M=J\alpha$

得 $$-mgl\theta=J\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

即 $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgl}{J}\theta=0$$



$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{mgl}{J}\theta=0$$

与弹簧振子的微分方程比较

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

当θ很小时，复摆的运动是简谐运动。

角频率

$$\omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

周期

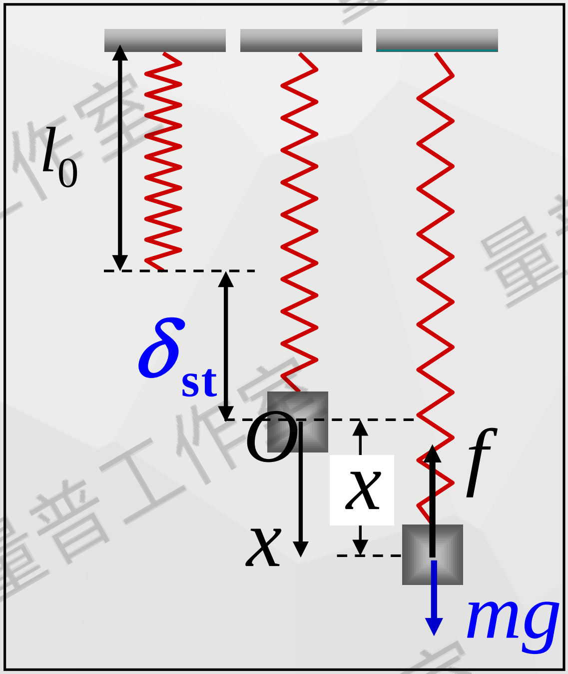
$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}$$

频率

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

例2 一劲度系数为 k 的轻质弹簧，上端固定，下端悬挂一质量为m的物体M。平衡时，弹簧将伸长一段距离δ_{st}，称为静止变形，见图。如果再用手拉物体，然后无初速地释放。

试写出物体M的运动微分方程，并确定它的运动规律。



解 以物体 M 为研究对象，它受重力 mg 和弹性回复力 f 两个力的作用。

当物体处于平衡位置时

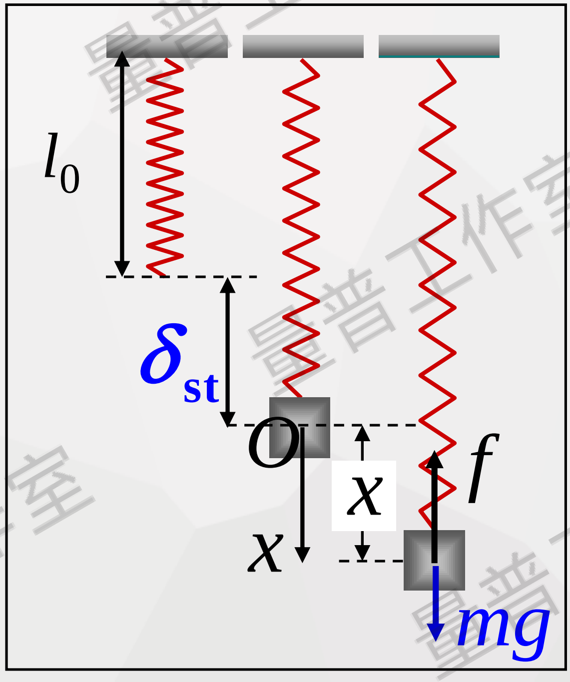
$$mg - k\delta_{\mathrm{st}} = 0$$

$$\therefore \quad \delta_{\mathrm{st}} = mg / k$$

在运动过程中，物体所受的合力$\boldsymbol{F}_{\mathbf{R}}$为

$$F_{\mathrm{R}} = mg - k(\delta_{\mathrm{st}} + x)$$

$$= -kx$$



根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_{\mathrm{R}}=-kx \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$$

令 $\omega^2=k/m=g/\delta_{\mathrm{st}}$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

简谐振动

$$T=2\pi\sqrt{\delta_{\mathrm{st}}/g} \qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_{\mathrm{st}}}$$

§5.2 简谐运动的能量

例：弹簧振子

总的机械能： $E=E_k+E_p=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$

简谐运动： $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$v=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

故有：

$$\begin{cases} E_p=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi) \\ E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi) \end{cases}$$

总机械能： $E=E_p+E_k=\frac{1}{2}kA^2$

弹性回复力是**保守力**，作**简谐**振动的系统**机械能守恒**。

平均动能 $\overline{E}_{k} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} E_{k}\mathrm{d}t$

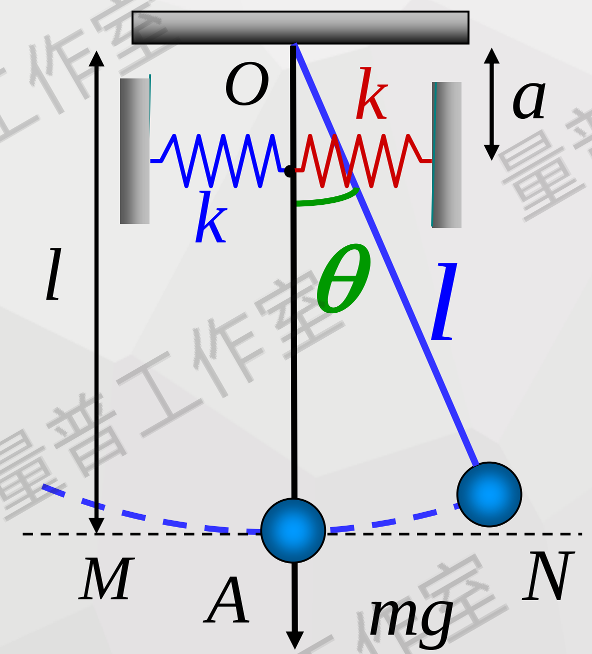
$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} \frac{1}{2}kA^{2}\sin^{2}(\omega t + \varphi)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^{2}$$

平均势能 $\overline{E}_{p} = \frac{1}{T}\int_{0}^{T} E_{p}\mathrm{d}t = \frac{1}{4}kA^{2}$

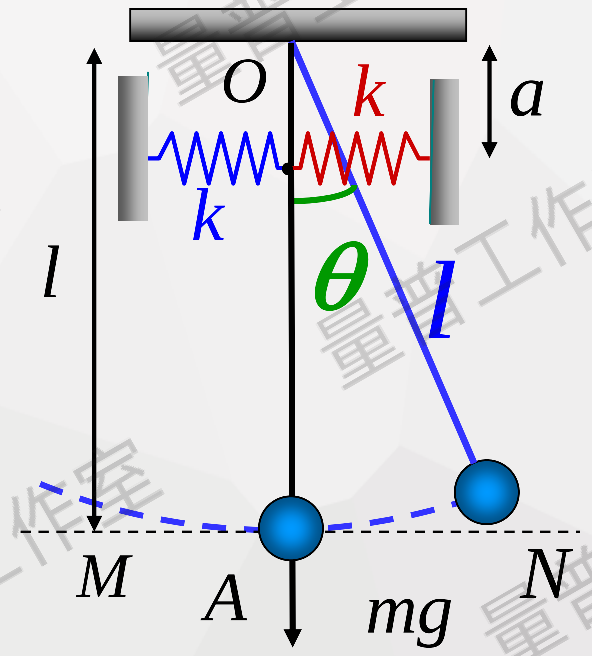
简谐振动在一个周期内的平均势能和平均动能**相等**。

例 杆OA的质量可忽略，杆的一端用铰链连接，使杆在铅直面内摆动，杆的另一端固定有质量为 m 的摆球。当摆球在铅直位置时，与摆连接的两根水平放置的轻弹簧都处于没有变形的状态，假定摆在小角度摆动时，θ角按照余弦规律随时间变化。

试求当摆球在铅直位置时的固有频率。两根弹簧的劲度系数均为k，各种尺寸皆标在图上。



解 由于摆在小角度摆动时，θ 角按照余弦规律随时间变化，这是简谐振动的特征。因此，在该运动过程中不考虑摩擦力等阻力的影响，用机械能守恒定律求解较方便。



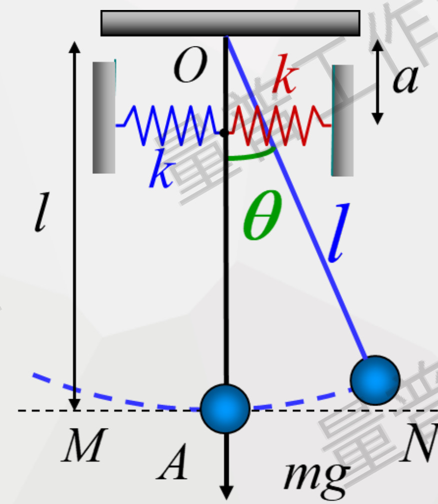
取水平面 MN 为重力零势能面，则摆在最低位置时具有的机械能 E_1 为

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} m (l\dot{\theta}_{\max})^2$$

摆到达最大偏离位置时，物体的速度为零，取弹簧原长处为弹性势能的零势能点，θ 角很小时，摆的机械能 E_2 为

$$E_2 = mgl(1-\cos\theta_{max}) + 2\times\frac{1}{2}k(a\theta_{max})^2$$

$$= \frac{1}{2}mgl\,\theta_{\max}^2 + k(a\theta_{\max})^2$$



根据机械能守恒定律，得

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_{\max})^2 = \frac{1}{2}mgl\,\theta_{\max}^2 + k(a\theta_{\max})^2$$

摆角很小时，摆的运动为谐振动，则

$$\theta = \theta_{\max}\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_{max})^2 = \frac{1}{2}mgl\theta_{\max}^2 + k(a\theta_{\max})^2 \qquad (1)$$

$$\theta = \theta_{\max}\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

$$\therefore \dot{\theta} = -\theta_{\max}\cdot 2\pi\nu\sin(2\pi\nu t + \varphi)$$

$$\therefore \dot{\theta}_{\max} = -2\pi\nu\theta_{\max}$$ 代入 (1) 式，得

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl + 2ka^2}{ml^2}}$$

§5.3 阻尼振动及受迫振动

阻尼振动（Damped Oscillations）：

振动系统受到**阻力**的作用，**能量随时间减小**的振动称阻尼振动或减幅振动。

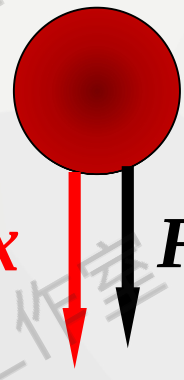
阻尼振动

- **摩擦阻尼：** 系统克服阻力作功使振幅受到摩擦力的作用，系统的动能转化为热能。
- **辐射阻尼：** 振动以波的形式向外传波，使振动能量向周围辐射出去。

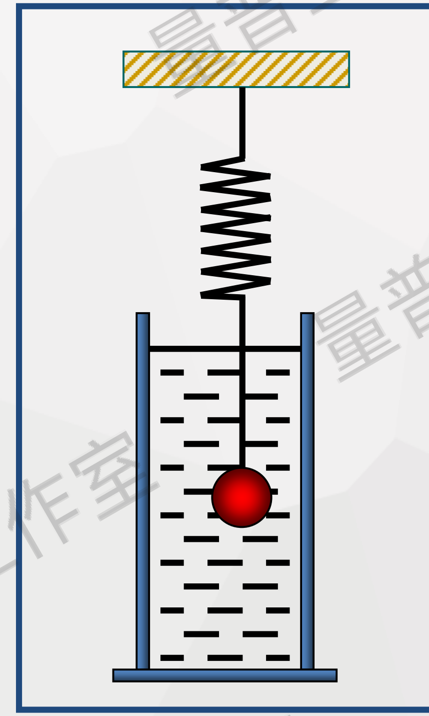
阻尼振动的振动方程

1. 受力特点

$F=-kx$



$F'=-\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$



线性回复力： $F=-kx$

受到的阻力： $f_r=-\gamma v$

γ — 阻力系数，由物体本身决定（物体的大小、形状、表面状况以及介质的性质）

2. 动力学微分方程 $-kx-\gamma\frac{dx}{dt}=m\frac{d^2x}{dt^2}$

令 $\gamma/m=2\beta,\omega_0^2=k/m$

$$\therefore\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0$$ β —— 阻尼系数

——二阶常系数齐次线性微分方程

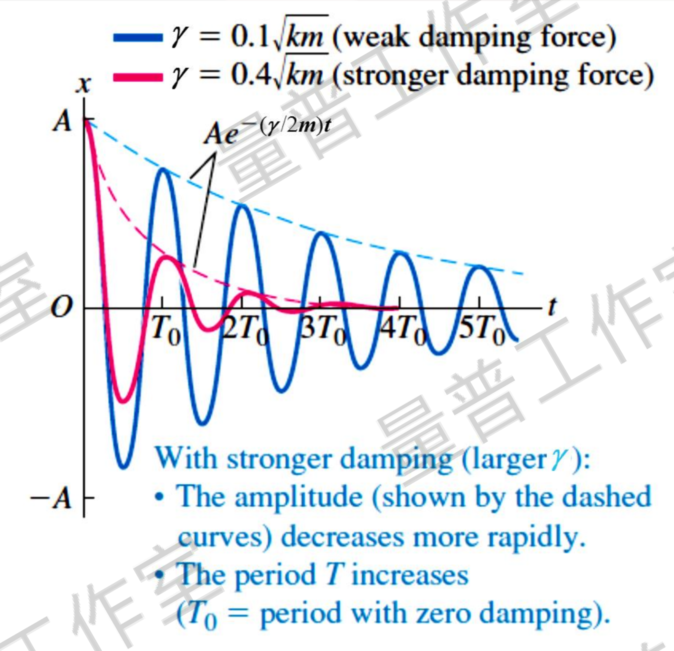
特征方程： $r^2+2\beta r+\omega_0^2=0$

解为： $r=\frac{-2\beta\pm\sqrt{4\beta^2-4\omega_0^2}}{2}=-\beta\pm\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}$

阻尼振动运动方程：

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\ t + \varphi)$$

振幅衰减随时间按指数衰减。



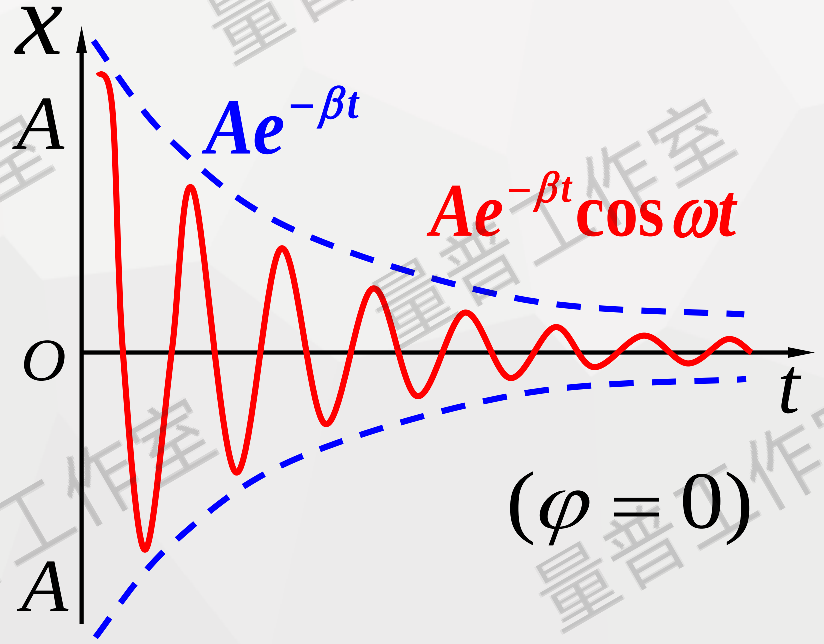
角频率 $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

振幅 $A = A_0 e^{-\beta t}$ ，其中 $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$ 阻尼系数

能量 $E = E_0 e^{-2\beta t}$

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

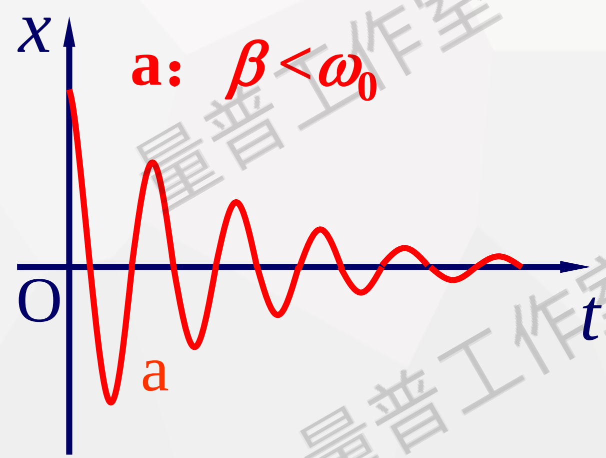
阻尼振动位移时间曲线



时间常量 $\tau=\dfrac{1}{2\beta}$ （振动系统的能量减小到起始能量的1/e时所经过的时间）

品质因素Q $Q=2\pi\dfrac{\tau}{T}=\omega_0\tau$ （时间常量内振动次数的2π倍）

3. 阻尼振动的分类



(1) 欠阻尼：阻尼系数比较小

$$\beta^2<\omega_0^2，\quad x=A_0e^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

其中 $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$。

特点：

1）物体在平衡位置附近来回振动，振幅不断衰减：

$$A(t)=A_0e^{-\beta t}$$

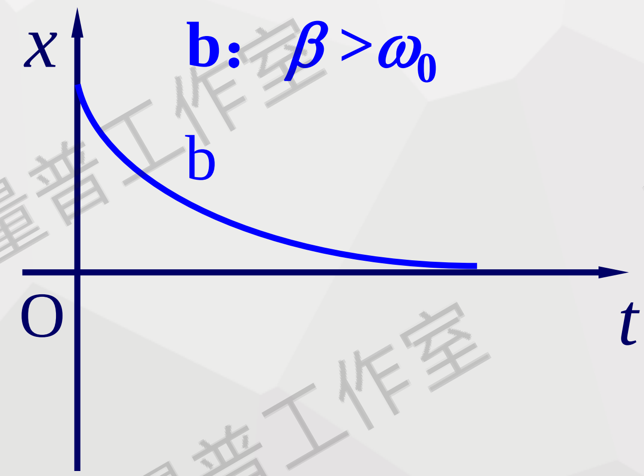
2）物体振动具有准周期性，准周期：

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

（2）过阻尼：阻尼作用过大

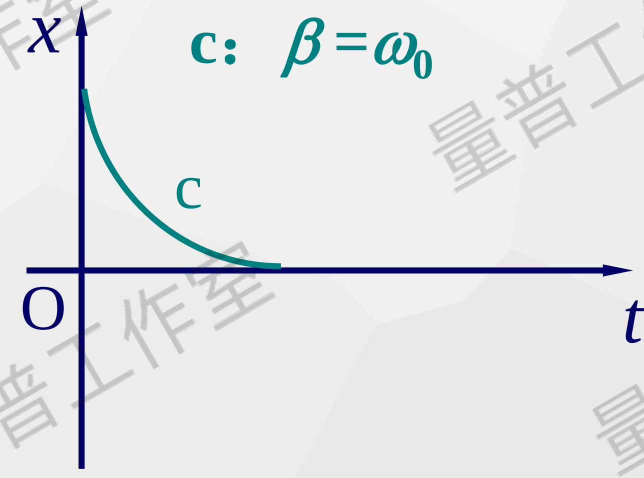
即 $\beta^2 > \omega_0^2$，$x = e^{-\beta t}\left[C_1 e^{\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t} + C_2\ e^{-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\,t}\right]$

特点： 物体不再作来回振动，而是逐渐靠近并停止在平衡位置。



（3）临界阻尼：阻尼大小适当

$\beta^2=\omega_0^2$， $x=(C_1+C_2t)e^{-\beta t}$



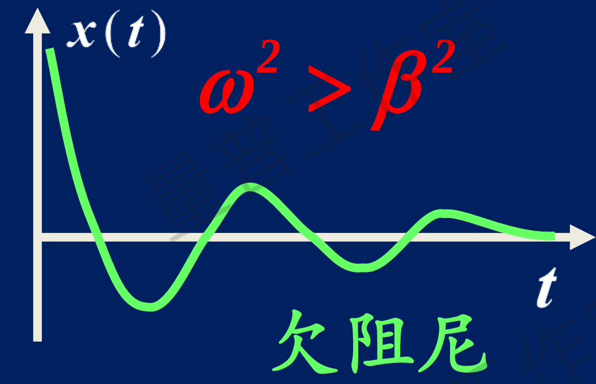
特点： 质点不再作来回振动，到达平衡位置刚好停下来。

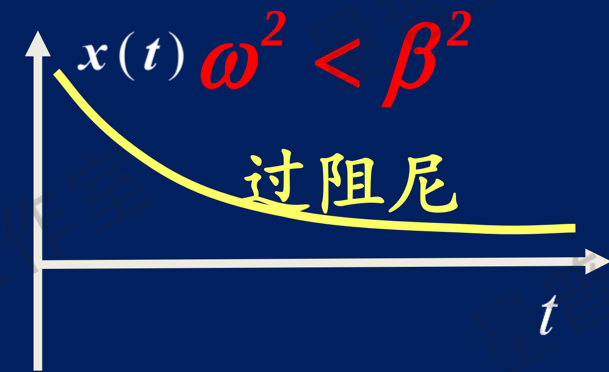
阻尼振动的分类

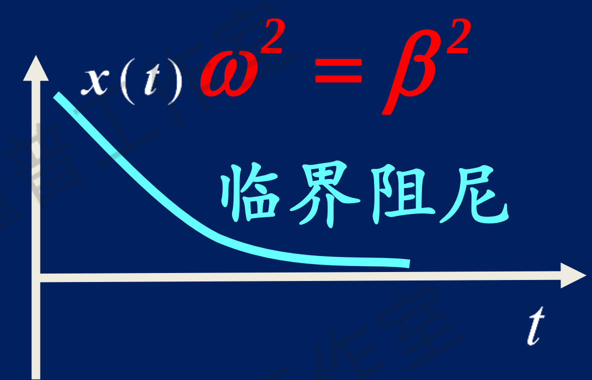
欠阻尼： 阻尼系数较小的阻尼运动

过阻尼： 阻尼作用过大，运动不再具有周期性，物体从原来远离平衡位置的状态慢慢回到平衡位置。

临界阻尼： 阻尼大小适当，运动处于一种临界阻尼状态。系统还是一次性地回到平衡状态，但所用的时间比过阻尼要短。

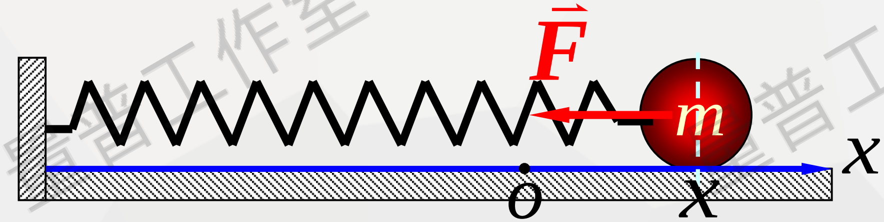


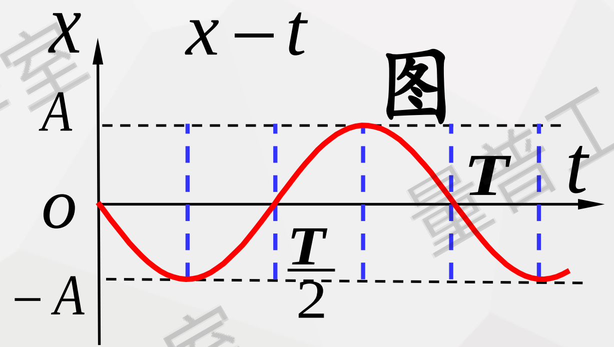




知识点回顾

1. 简谐振动



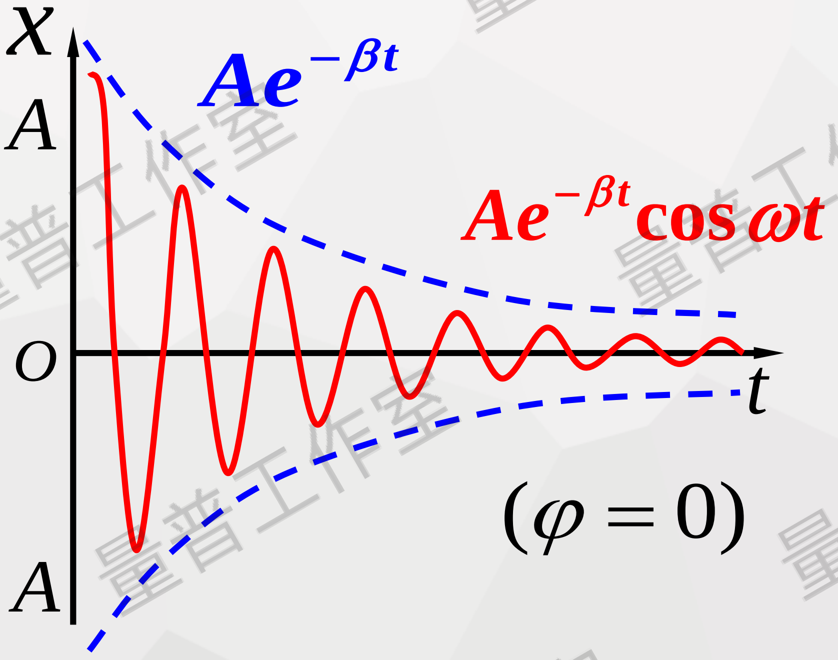


$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$$

$$x=A_0\cos(\omega_0 t+\varphi) \quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$ （固有角频率）

2. 阻尼振动

阻尼振动位移时间曲线



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\gamma\frac{dx}{dt} - kx$$

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

$2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$　（β ：阻尼系数）　$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

§5.3 阻尼振动及受迫振动

一 • 受迫振动（forced oscillation）

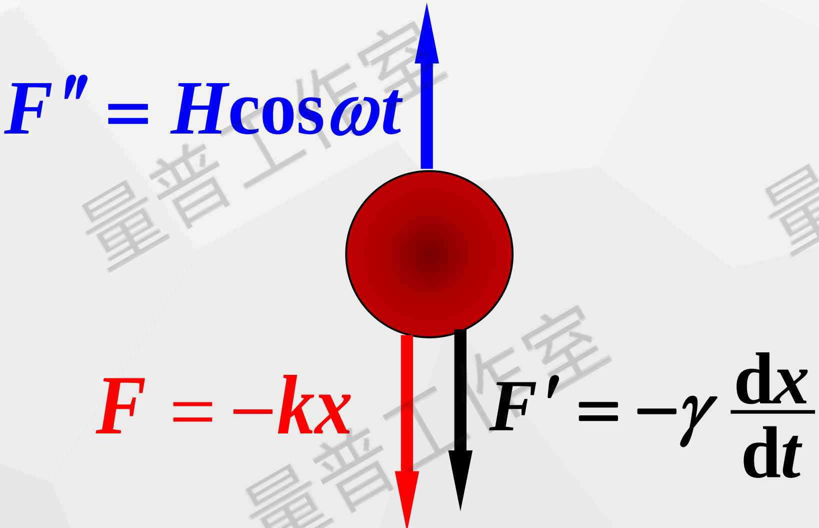
二 • 共振（resonance）

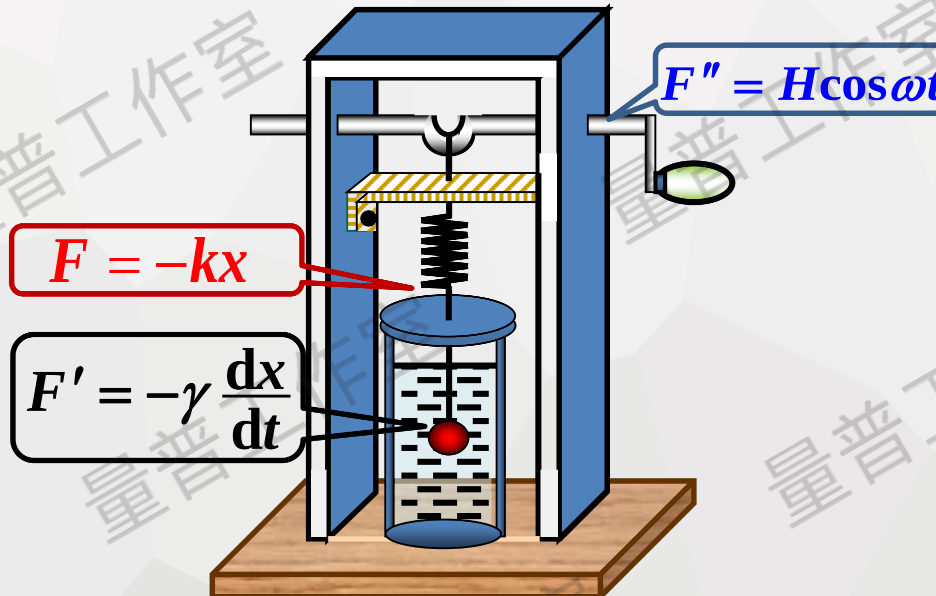
三 • 共振的实例

四 • 课外拓展（在线课程平台）

一、受迫振动（forced oscillation）：

周期性外力——驱动力：$F'' = H\cos\omega t$





动力学方程：

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} + H\cos\boxed{\omega}t$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

令 $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$， $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

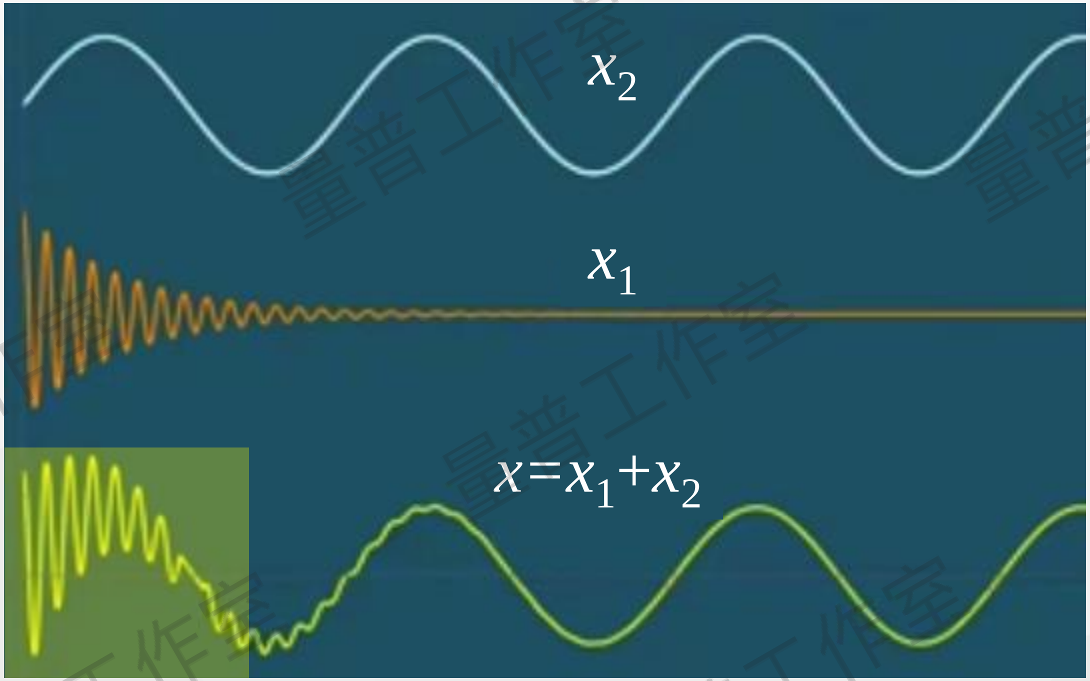
$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = \frac{H}{m}\cos\omega t$$

——二阶常系数非齐次微分方程

一般解： $x = \boxed{x_1(\mathrm{t})} + \boxed{x_2(t)}$

齐次方程的通解　　非齐次方程的特解

$$x = \underbrace{\boxed{A_0 \mathrm{e}^{-\beta t}}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\,t + \varphi')}_{\text{减幅运动}} + \underbrace{A\cos(\omega t + \varphi)}_{\text{等幅振动}}$$



$$x = \underbrace{\cancel{\boxed{A_0 e^{-\beta t}} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}\, t + \varphi')}}_{} + \underline{A\cos(\omega t + \varphi)}$$

减幅运动

随时间衰减为零

$(\omega_0^2 > \beta^2)$

等幅振动

思考

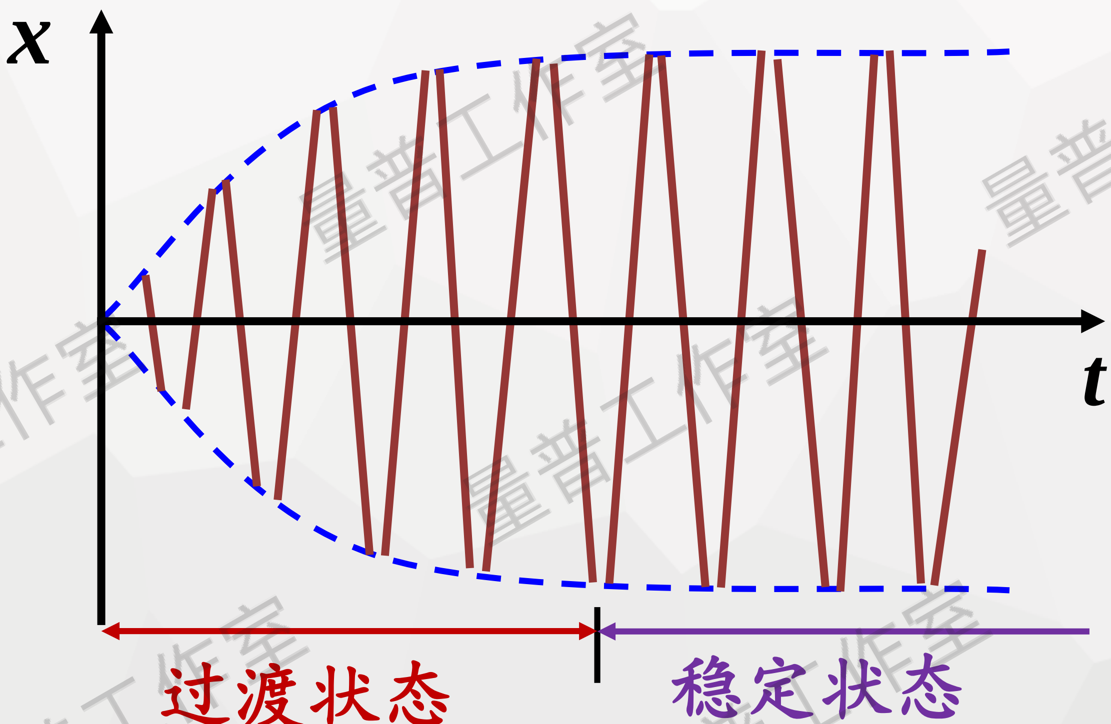
弹簧振子在受到阻力$F'=-\gamma\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$以及驱动力$F''=H\cos\omega t$的情况下，最终做什么样的运动？

（A）角频率为$\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ 的振幅衰减的振动

（B）角频率为$\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$ 的振幅不变的振动

（C）角频率为ω_0 的振幅不变的振动

（D）角频率为 ω 的振幅不变的振动



稳态受迫振动的解： $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{H}{m}\cos\omega t$$

$$A = \frac{H/m}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}} \qquad \tan\varphi = \frac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

二、共振（resonance）

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow A = \frac{H/m}{\left[\left(\omega_0^{\ 2} - \omega^2\right)^2 + 4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

什么时候受迫振动的**振幅最大**?

求极值 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\dfrac{H/m}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}\right)=0$

极大，则分母极小

设：$f(\omega)=\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2$ $\quad f'(\omega)=0$

有：$-4\omega\left(\omega_0^2-\omega^2\right)+8\beta^2\omega=0$ ⇒ 共振频率

$$\omega_r=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}$$

$f_{\min}(\omega)=4\beta^4+4\beta^2\left(\omega_0^2-2\beta^2\right)$ ⇒ 共振振幅

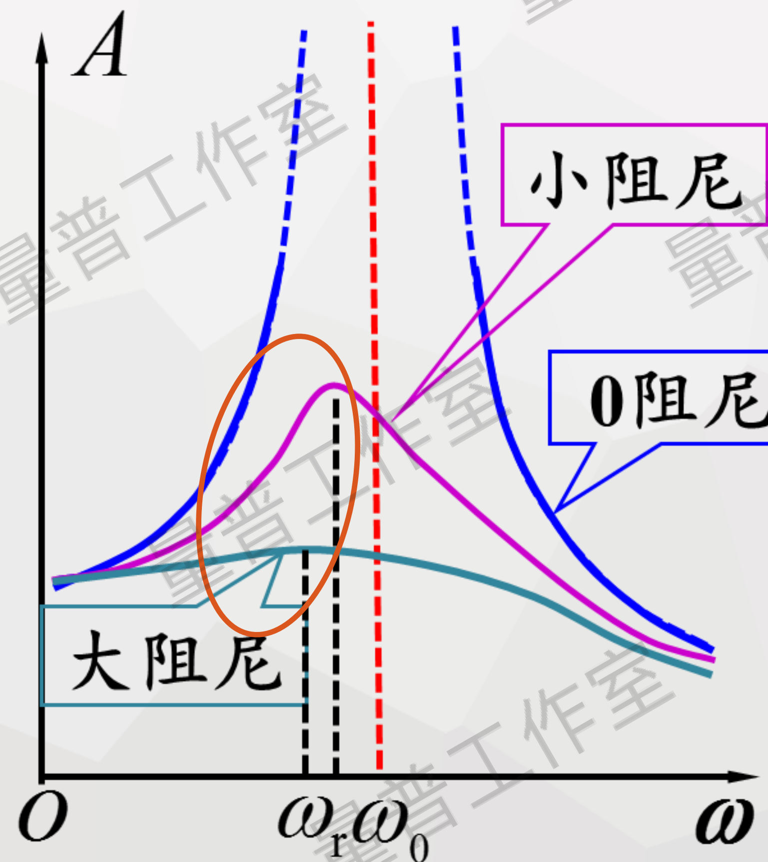
$$A_r=\frac{H/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

共振振幅

$$A_r = \frac{H/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

共振频率

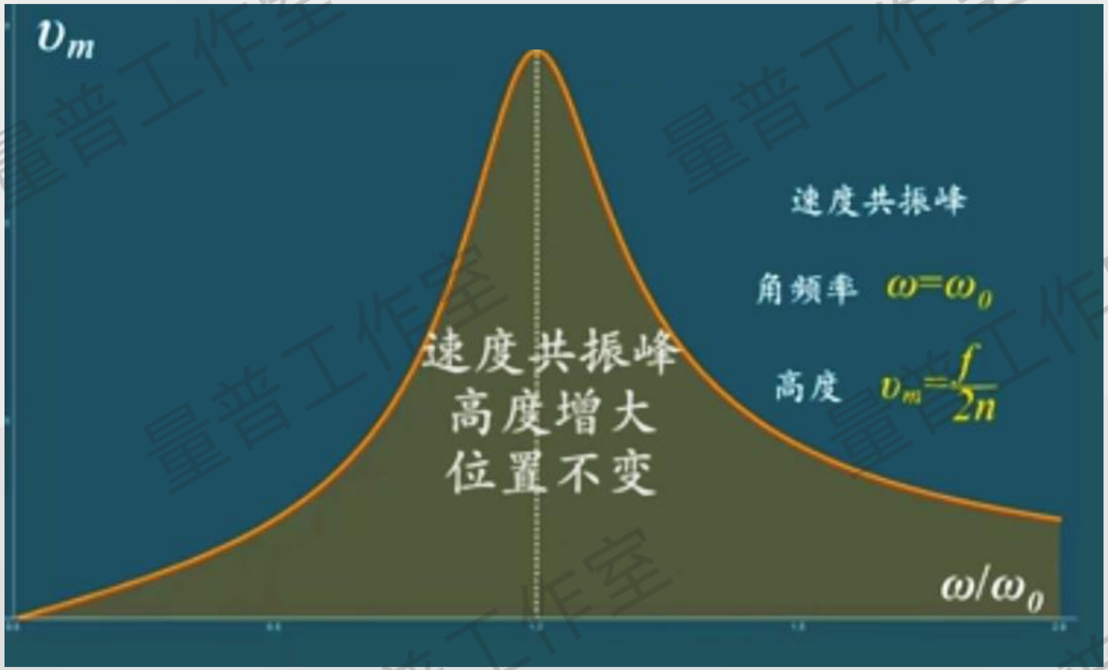
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$



受迫振动的速度：$v = -\omega A\sin(\omega t+\varphi)$

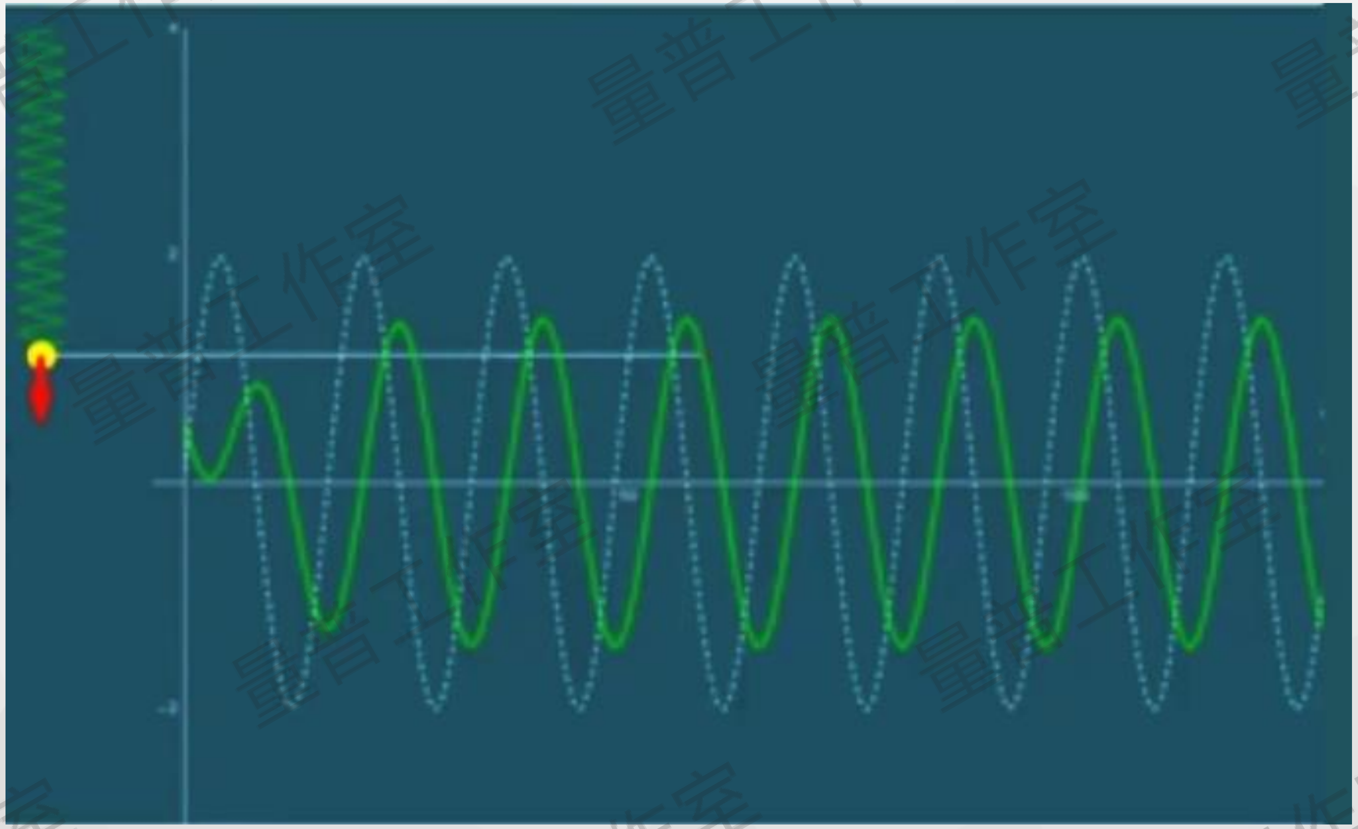
速度振幅（受迫振动速度的最大值）：

$$v_m = \omega A = \frac{\omega H/m}{\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\beta^2\omega^2\right]^{1/2}}$$



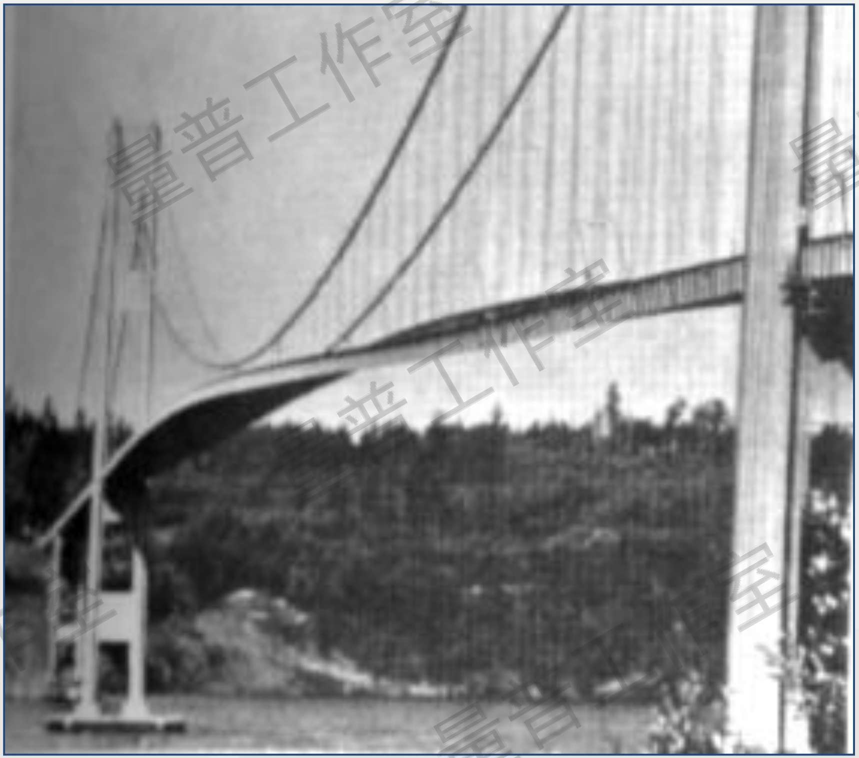
$\omega = \omega_0$ 时，速度最大；$\tan\varphi = \dfrac{-2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

此时，$\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$　$v = \omega A \cos\omega t$　$F'' = H\cos\omega t$



三、共振的实例

1. 机械共振



1940 年11月7日美国 Tocama 悬索桥因共振而坍塌

共振的防止和利用

1. 防止

使驱动力的频率与物体的固有频率不同，而且相差越大越好。

2. 利用

使驱动力的频率接近或等于振动物体的固有频率。

小　结

稳态受迫振动的运动

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Downarrow$$

共振 $\omega_{\mathrm{r}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

$$\omega_{\mathrm{r}} = \omega_0$$

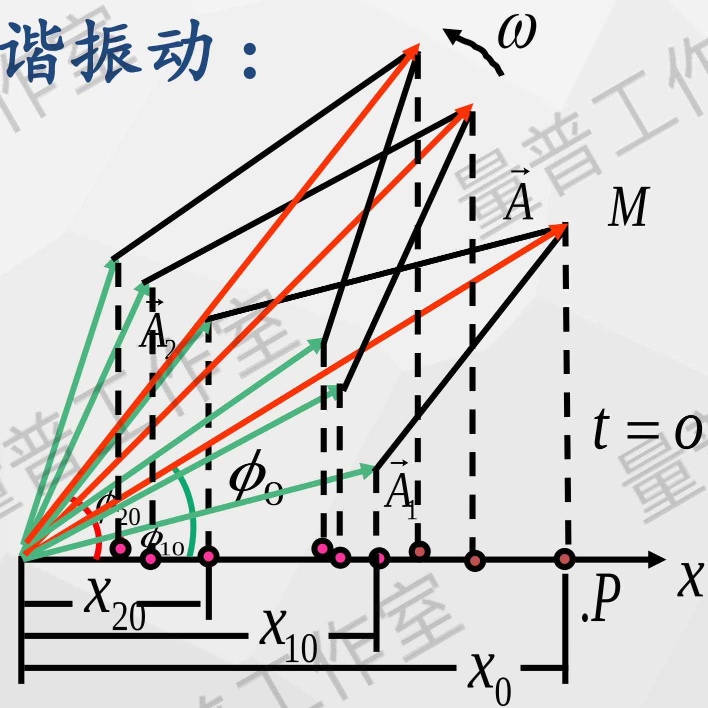
振动类型	自由振动	受迫振动	共振
受力情况	回复力	周期性驱动力作用	周期性驱动力作用
振动周期或频率	系统本身性质决定，即固有周期或固有频率	驱动力的周期或频率决定，$T=T_{驱}$ 或 $f=f_{驱}$	$T_{驱}=T_{固}$ 或 $f_{驱}=f_{固}$
振动能量	振动物体的机械能不变	由产生驱动力的物体提供	振动物体获得的能量最大
常见例子	弹簧振子或单摆（$\theta \leq 5°$）	机械工作时底座发生的振动	共振筛、声音的共鸣等

§ 5.4 简谐运动的合成

一、同一直线上同频率的振动

质点同时参与同方向同频率的谐振动：

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$$
$$x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$



合振动：

$$x = x_1 + x_2$$
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

合振动是简谐振动，其频率仍为 ω

1. 同方向同频率谐振动的合成

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

解析法

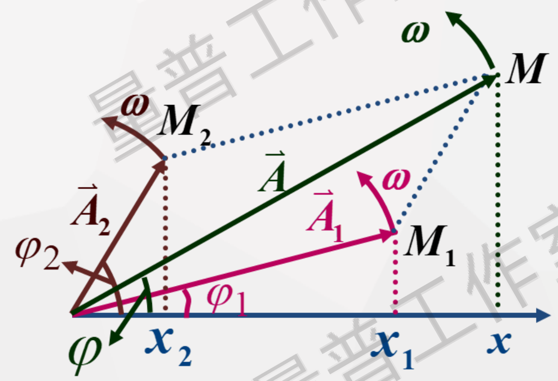
$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)\cos\omega t$$

$$-(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)\sin\omega t$$

令 $A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 = A\cos\varphi$

$A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 = A\sin\varphi$



$\therefore\ x = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

其中 $A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$

$$\tan\varphi=\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}$$

例 质点同时参与的两个简谐振动

$$x_1 = 4\cos 3t \ \text{cm},\ x_2 = 2\cos(3t+\pi)\ \text{cm}$$

求合成振动的初相位、振幅和振动方程。

解 合成运动仍是简谐振动

$$\varphi_1 = 0,\quad \varphi_2 = \pi,\ A_1=4\ \text{cm},\ A_2=2\ \text{cm}$$

合成简谐振动的振幅

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} = 2\ \text{cm}$$

合成简谐振动的初相

$$\varphi = \arctan\frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 0$$

合成简谐振动的振动方程为

$$x = 2\cos 3t \ \ \mathrm{cm}$$

相量图法也可得到同样的结果。

※多个同频率同方向的简谐振动的合成

$$x_1 = a\cos\omega t$$

$$x_2 = a\cos(\omega t+\delta)$$

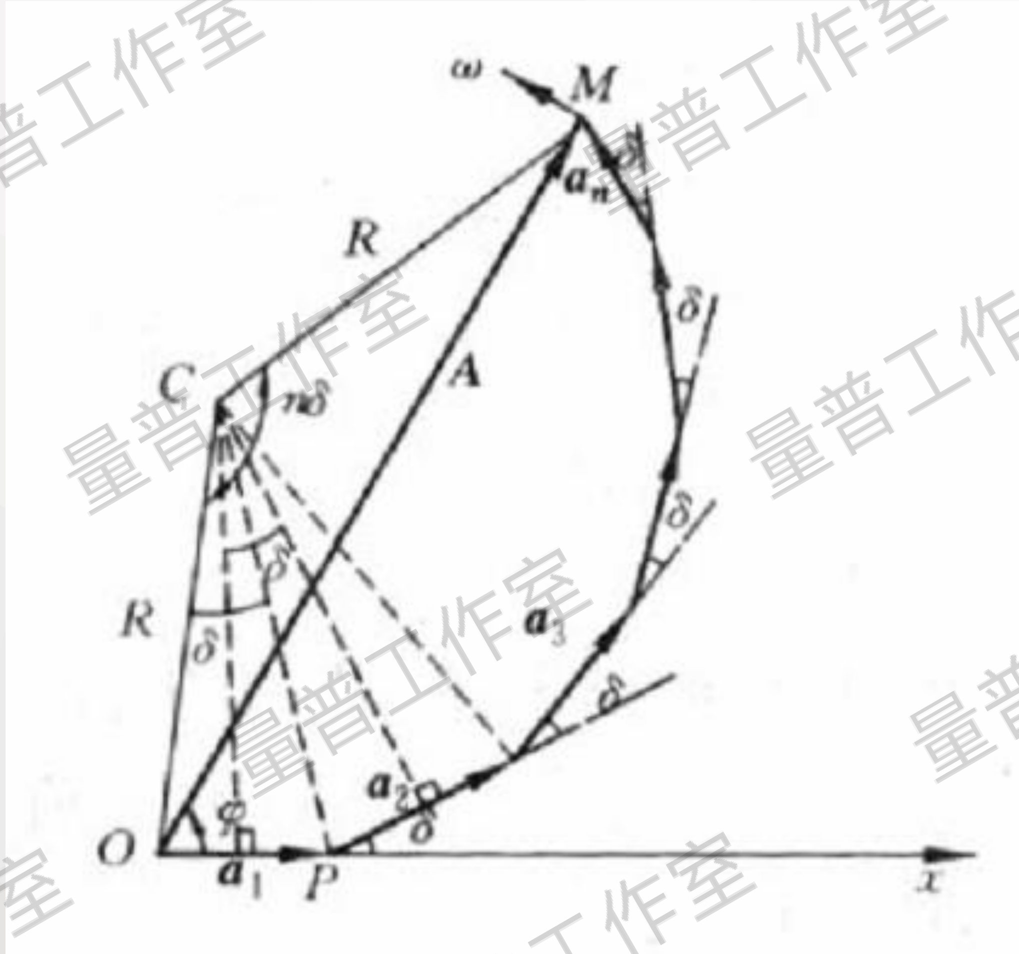
$$x_3 = a\cos(\omega t+2\delta)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_n = a\cos[\omega t+(n-1)\delta]$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots\cdots + x_n = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases} a = 2R\sin\dfrac{\delta}{2} \\ A = 2R\sin\dfrac{n\delta}{2} \end{cases} \rightarrow$$



$$A = a\frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

讨论：

1）$\delta = 2k\pi$， $A = na$

2）$\delta = 2k\pi/n$（$k \neq nk'$）， $A = 0$

2. 同一直线上不同频率的简谐运动的合成

分振动 $$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

合振动 $$x = x_1 + x_2$$

$$= A_1\cos\left(\omega_1 t + \varphi_1\right) + A_2\cos\left(\omega_2 t + \varphi_2\right)$$

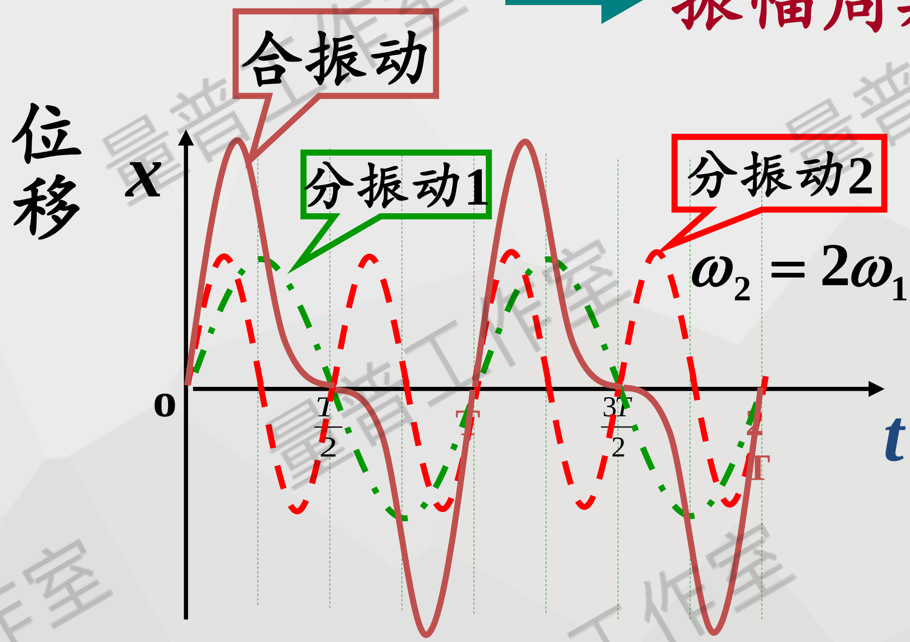
<u>合振动不是简谐运动，而是一种复杂的振动</u>

设两振动振幅相同，并以它们的初相位都为零时为计时起点　$x_1 = A\cos\omega_1 t$　　　$x_2 = A\cos\omega_2 t$

差频　　　　　　　　和频

$$x = x_1 + x_2 = 2A\cos\left(\boxed{\frac{\omega_2-\omega_1}{2}}\,t\right)\cos\left(\boxed{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}\,t\right)$$

振幅周期性变化



为一复杂振动

（1）振幅相同的情况（从同相时开始计时）

分振动 $x_1 = A\cos(\omega_1 t + \varphi)$

$x_2 = A\cos(\omega_2 t + \varphi)$

合振动 $x = x_1 + x_2$

$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$

在一般情况下，观察不到合振动有明显的周期性。但当两个分振动的频率都较大而其差很小时，就会出现明显的周期性。

$$x = 2A\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t\cdot\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$$

讨论：当ω_2~ω_1时， $\omega_2-\omega_1 \ll \omega_2+\omega_1$

式中 $\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}\right)t$ 随t缓变，频率低

$\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)$ 随t快变，频率高

$T=2\pi/\omega$，$T_1>>T_2$，第一量的变化比第二个量慢很多，一段时间内第二个量反复变化多次时，第一个量几乎无变化。

$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t \cdot \cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$

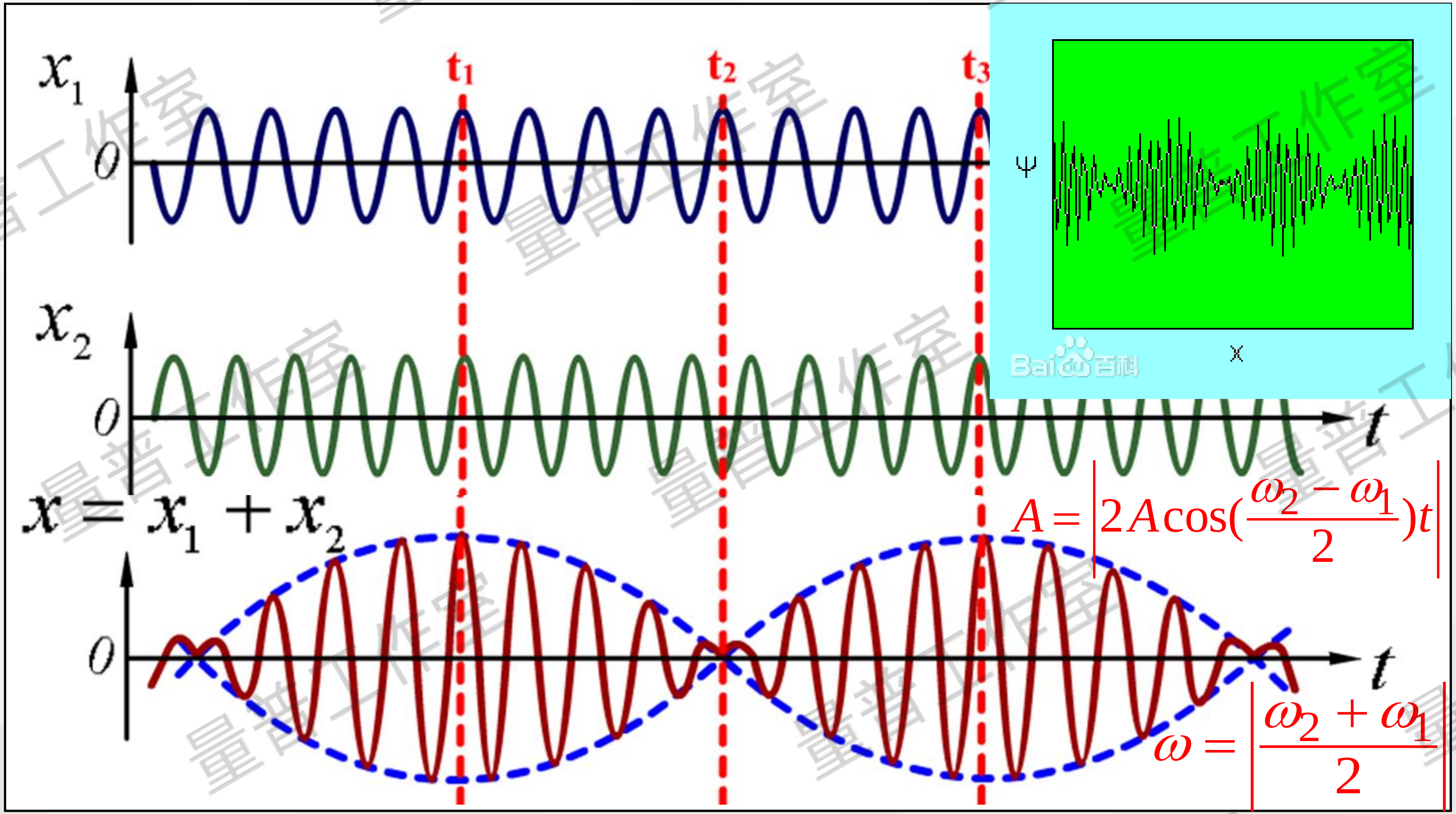
由这两个因子的乘积决定的运动可以近似地看成

振幅为： $\left|2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t\right|$

振幅调制因子（**Amplitude modulation factor**）

角频率为： $\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$ 的谐振动。

不是简谐运动，因为振幅是随时间变化的，但振幅的改变是周期性的。



拍： 合振动忽强忽弱的现象。　　振动的合成

拍频：单位时间内强弱变化的次数。$\nu = |\nu_2 - \nu_1|$

$\omega_{拍} = \omega_2 - \omega_1$　或：$T = \dfrac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$

振幅变化的频率

拍频 单位时间内振幅大小变化的次数，即

$$\nu = \left|(\omega_2 - \omega_1)/2\pi\right|$$
$$= \left|\nu_2 - \nu_1\right|$$

振动角频率

$$\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$$

（拍在声学和无线电技术中的应用）

（2）相互垂直的同频率的简谐振动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases} \rightarrow$$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

——椭圆轨道

垂直振动的合成1　　垂直振动的合成2

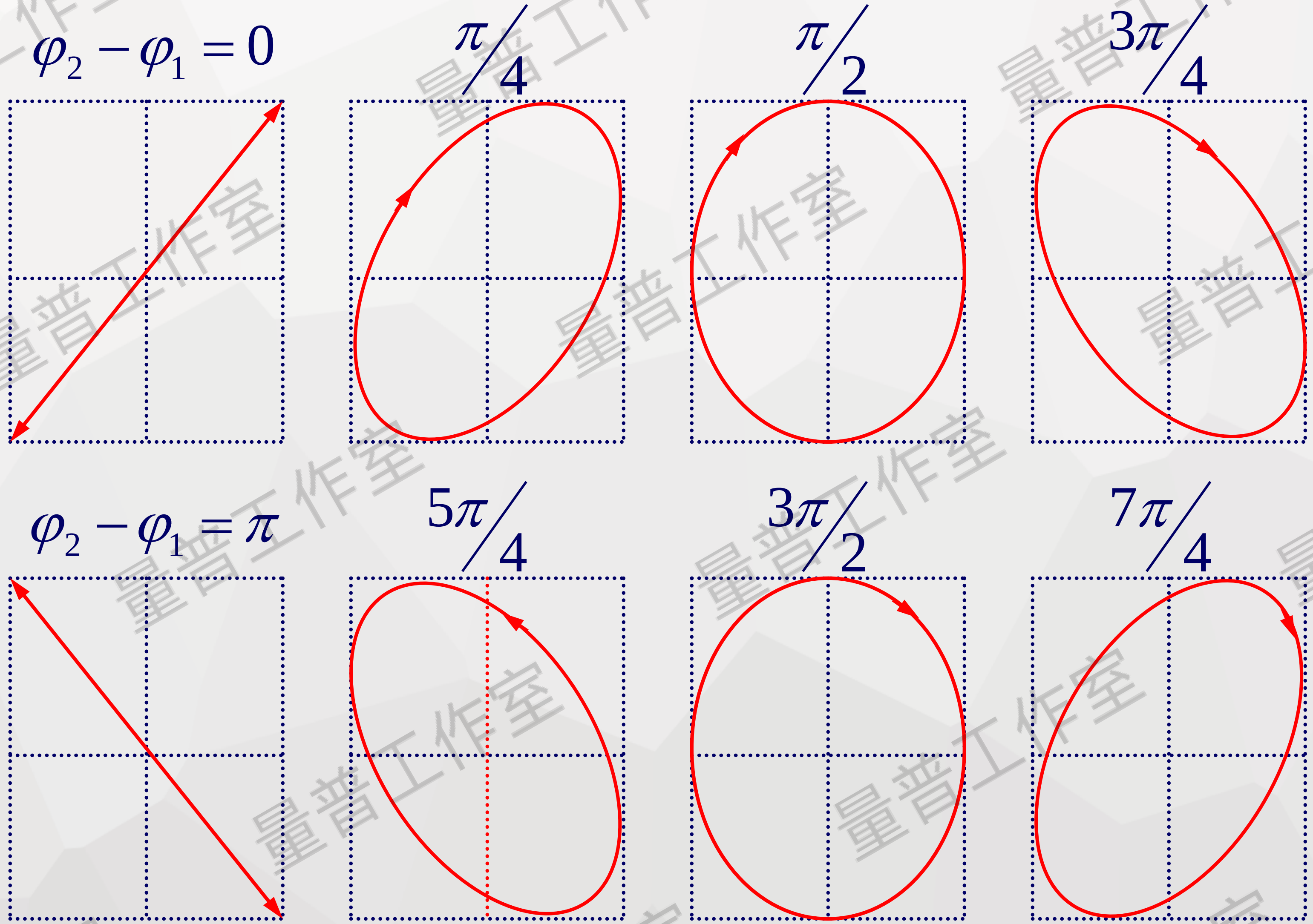
讨论 $$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

（1）$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi$ 时 $y=\dfrac{A_2}{A_1}x$ 轨迹为直线。

（2）$\Delta\varphi=(2k+1)\pi$ 时 $y=-\dfrac{A_2}{A_1}x$ 轨迹为直线。

（3）$\Delta\varphi=k\pi+\pi/2$ 时 $\dfrac{x^2}{A_1^2}+\dfrac{y^2}{A_2^2}=1$ 轨迹为正椭圆。

（4）其他　轨迹为倾斜椭圆，倾斜程度随而 $\Delta\varphi$ 不同。


$\varphi_2 - \varphi_1 = 0$
$\pi/4$
$\pi/2$
$3\pi/4$
$\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$
$5\pi/4$
$3\pi/2$
$7\pi/4$

波动：一定的扰动的传播称为波动（即振动的传播）。

机械波：机械振动在介质中的传播称为机械波。
声波、水波、地震波

电磁波：变化的电场和变化的磁场在空间的传播称为电磁波。光波，无线电波、X射线

物质波：与微观粒子联系的波，是一种几率波。

各种类型的波有其特殊性，但也有普遍的共性

（具一定的传播速度，伴随着能量的传播；能产生反射、折射、干涉和衍射），有类似的波动方程。

§5.5 简谐波的描述

机械波产生的条件
- 1. 有做机械振动的物体，即波源
- 2. 有连续的介质

行波：扰动的传播叫行波。

（抖动一次的扰动叫脉冲，脉冲的传播叫脉冲波）

分类
- 横波：参与波动的质点的振动方向与波的传播方向垂直。抖动绳子
- 纵波：参与波动的质点的振动方向与波的传播方向平行。声波
- 其他波：液体的表面波

二、波线和波面

波面　　在波的传播过程中，任一时刻媒质中各振动相位相同的点联结成的面。

波线　　沿波的传播方向画的带箭头的线。

波前　　在任一时刻，由波源最初振动状态传到的各点所连成的曲面。

在任一时刻，波面可以有任意多个。
在任一时刻，只有一个波前。

在各向同性的介质中，波线与波面垂直。

三、简谐波的形成过程

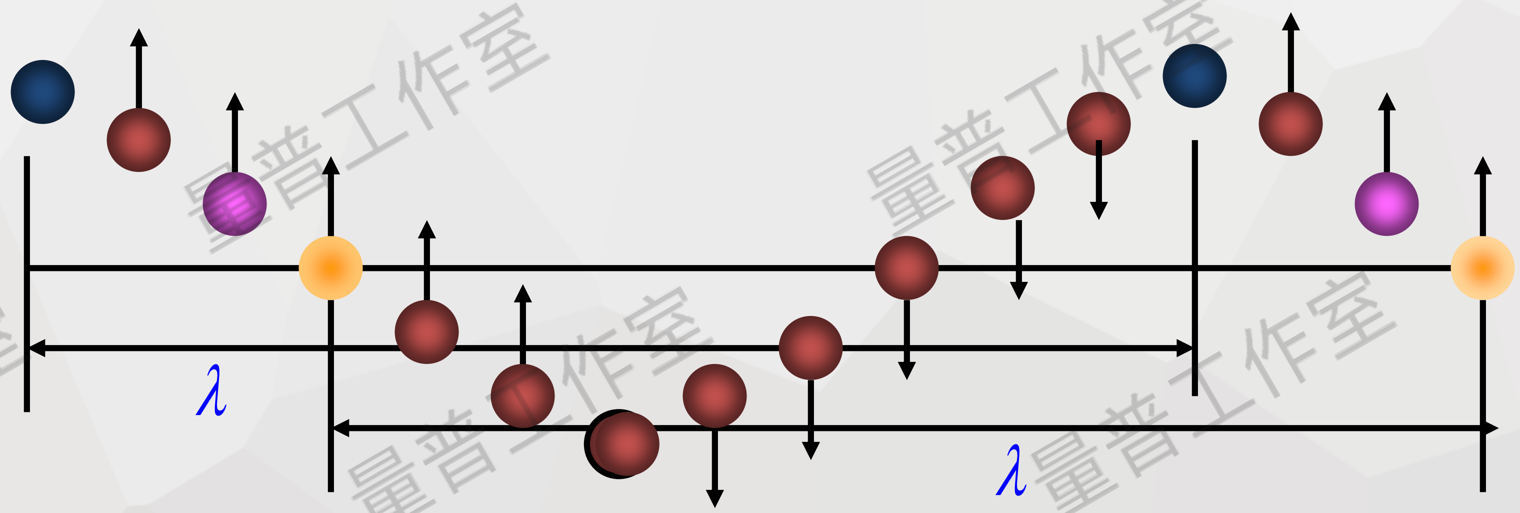
1. 有波源和连续的介质（即多个质点参与）
2. 前面的质点带动后面的质点运动
3. 每一个质点都在自己的平衡位置附近作简谐运动

思考

1. 各个质点简谐运动的异同点?

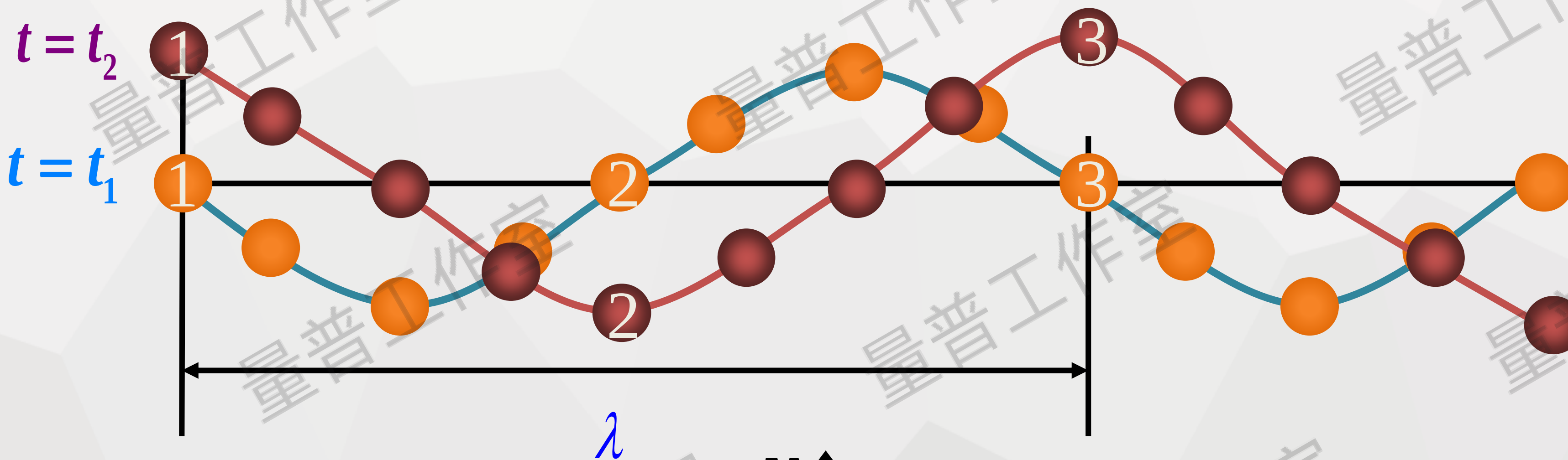
$$y = A\cos(\omega t + \varphi_i)$$

A、ω相同；φ_i不同，相距$k\lambda$距离的质点同相，相位相差$2k\pi$。



四、简谐波的波函数 波长

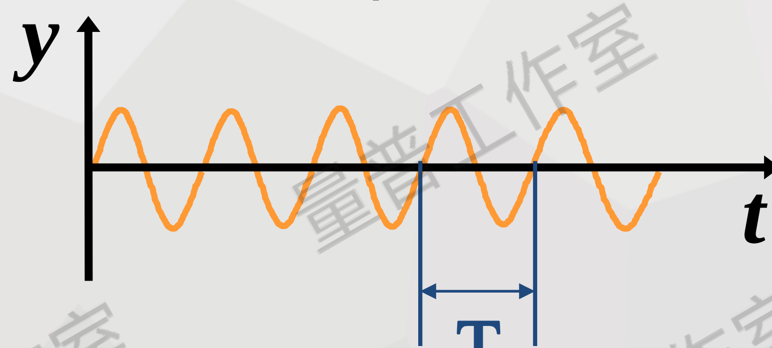
1. 波函数

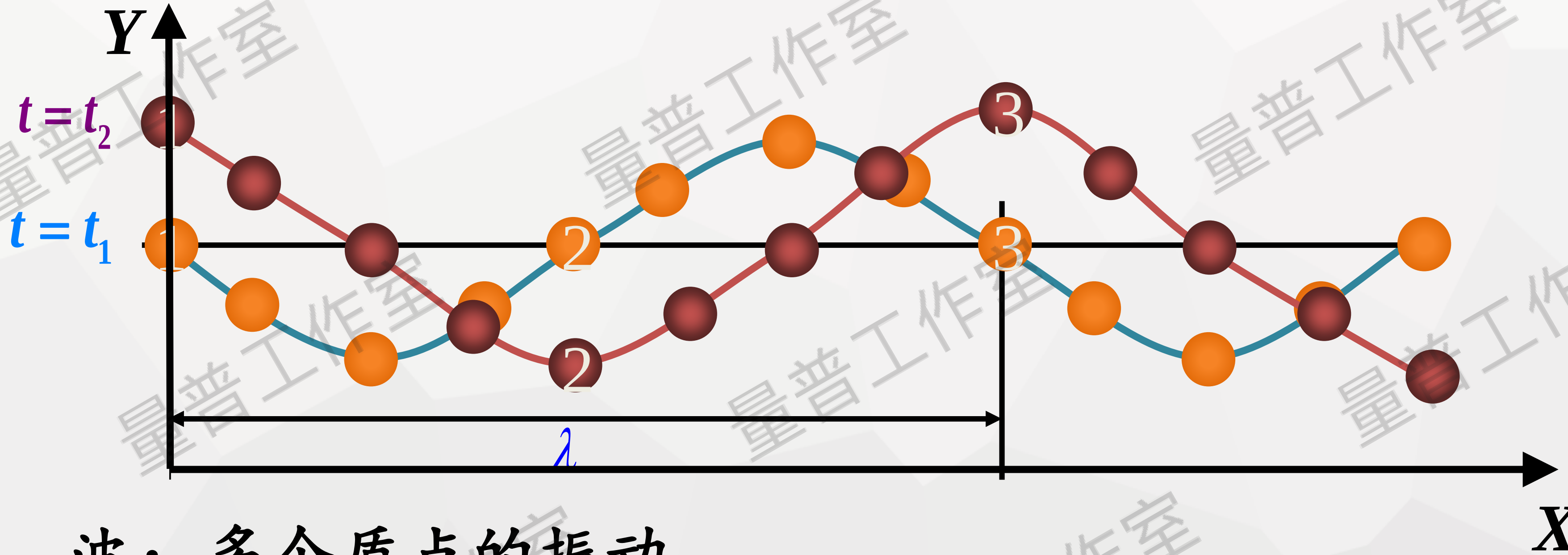


单个质点：振动

振动方程：

$$y = A\cos(\omega t + \varphi)$$





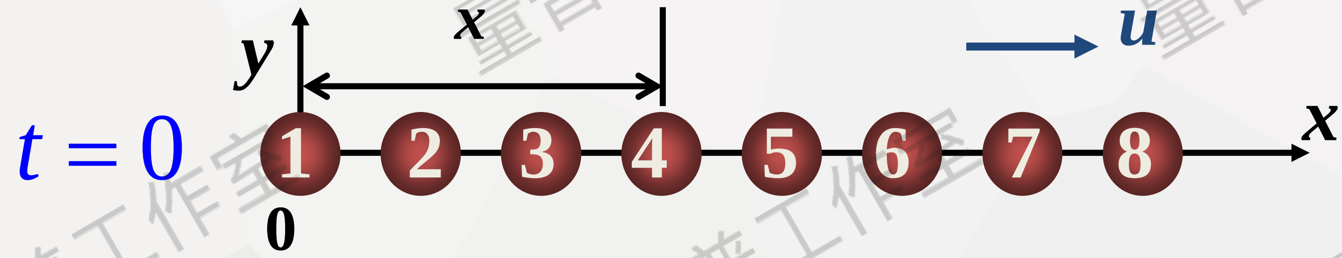
波：多个质点的振动

波动方程：所有质点的振动方程！

波动方程：

各质元的位移 y 随其平衡位置 x 和时间 t 变化的数学表达式，即$y=f(x, t)$

问题：如何写波动方程？

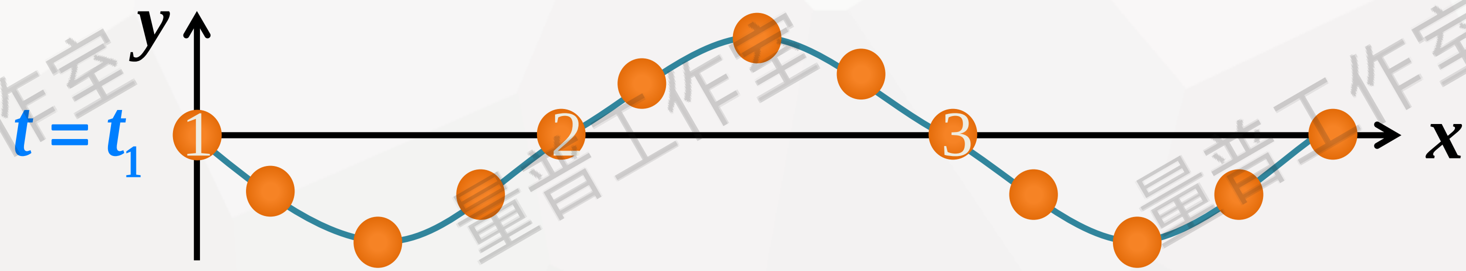


已知：①原点O的振动方程为：$y = A\cos(\omega t + \varphi)$

②波向右传播，传播速率为 u

提示：其它任意质元的振动与原点之间的振动形式完全相同，只是相位不同。两者的相位差恒定，且与质元的 x 坐标位置有关。

关键：找到两个振动（位于x处的质元与原点处质元）之间的相位差关系。



解析：位于x处的质元与原点处质元的相位关系

① 位于 $x > 0$ 处的质点的相位是超前还是落后？

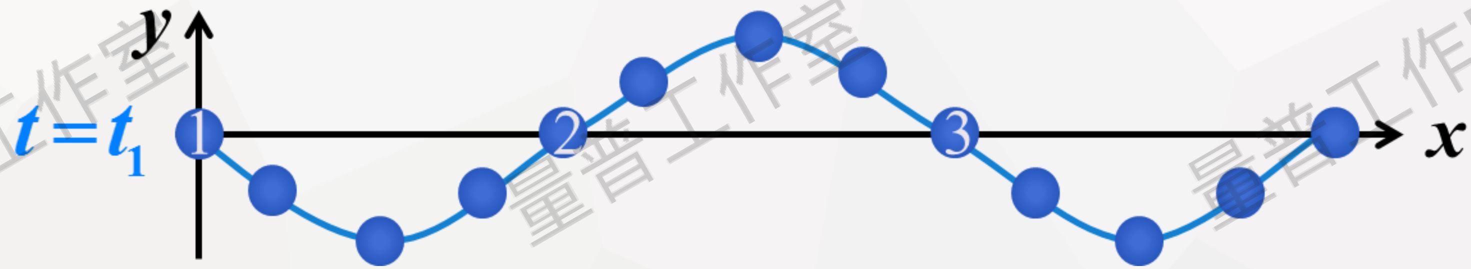
波沿 x 轴正向传播，所以在 $x > 0$ 处各质元将依次较晚开始振动，相位落后。

② 相位落后多少？ $y = A\cos(\omega t + \varphi)$

x 处的质元比原点晚振动时间：x/u

在时刻 t，位于 x 处的质元的位移应该等于原点在（$t - x/u$）时刻的位移。

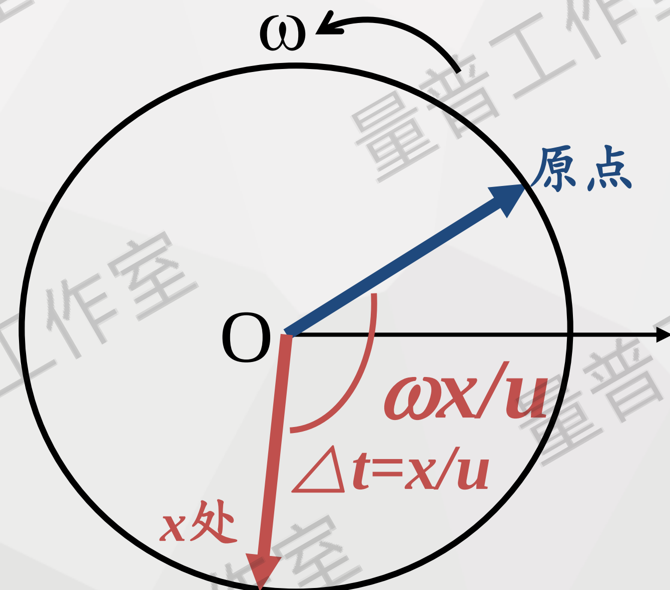
相位落后：$\omega x/u$



③位于 x处的质点的振动方程

t 时刻，x处质元的振动与原点在（t- x/u）时刻时相同

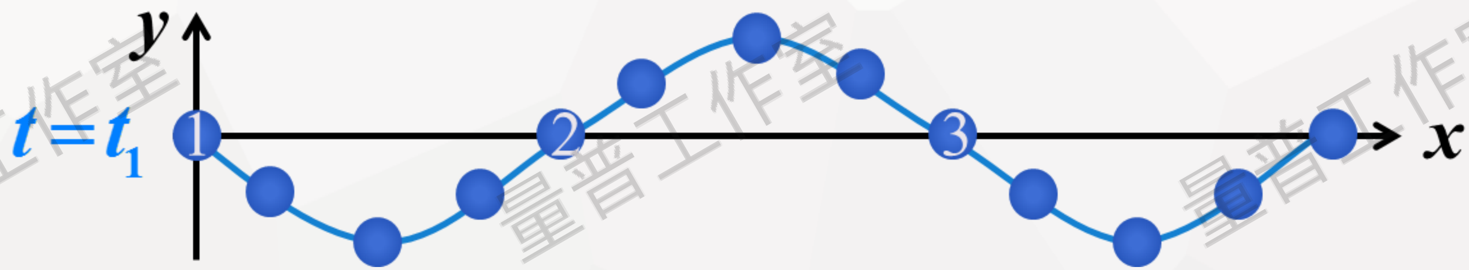
x处质元的振动相位落后：$\omega x/u$



位于 x处的质点的振动方程为：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

简谐波
波函数



波函数 $y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$

简谐波振幅

简谐波角频率，与各质元简谐运动角频率相同

讨论

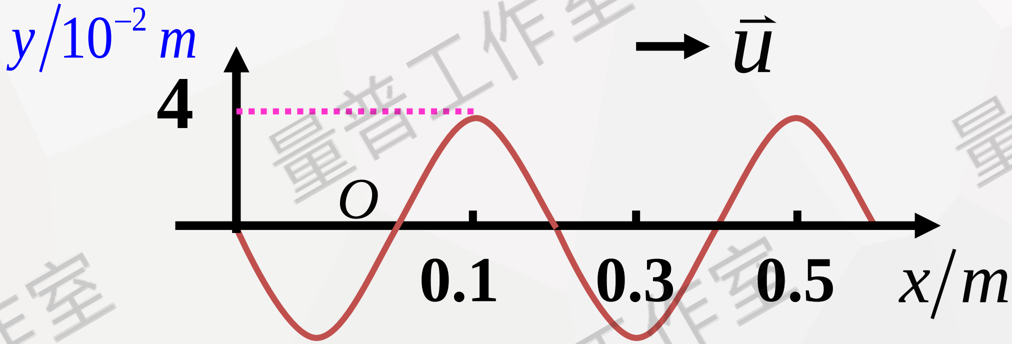
① 当x为定值时，上式表示什么？

答：$y=f(t)$，位于 x 处的质点的振动方程。

② 当t为定值时，上式表示什么？

答：$y=f(x)$。简谐波在 t 时刻的波形，即 t 时刻每个质点的位移。

讨论



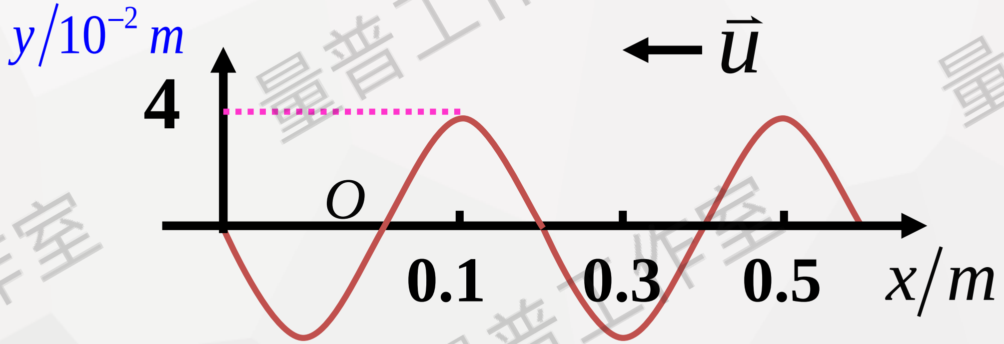
已知距波源为0.1 m处质点的振动方程为：

$$y_{0.1} = A\cos(\omega t + \varphi)$$

问：此时波函数的形式如何？

答：$y = A\cos[\omega(t - \frac{x-0.1}{u}) + \varphi]$

讨论



已知原点处质点的振动方程为：

$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$$ 且波向左传播

问：此时波函数的形式如何？

答：$y = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi]$

2. 波函数中的几个物理量

波函数： $y = A\cos\left[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi\right]$

相（或相位）： $\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi$

表示在 x 处的质点在 t 时刻的相位

相速度（波速）： $u = \frac{dx}{dt} = \lambda\nu$

简谐波中扰动传播的速度就是振动的相的传播速度，称为相速度，由介质的性质决定。

时间上的周期性：周期与频率 $y = A\cos\left[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi\right]$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\pi}$$

简谐波中每一质元都在做简谐运动，因而简谐波具有时间上的周期性。

空间上的周期性：波长

$$\lambda=\frac{2\pi u}{\omega}=uT$$

表示简谐波的空间周期性的特征量，等于一周期内简谐扰动（即：任意一个给定的相位）的传播距离。

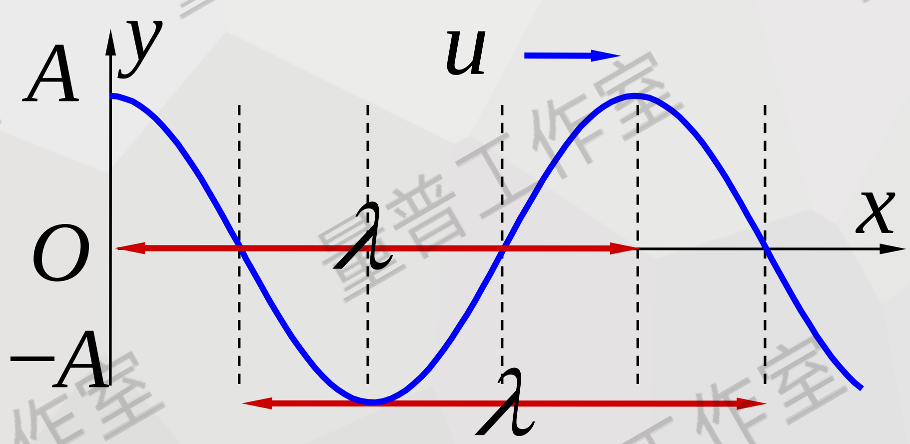
波数： $k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$

波数等于在2π的长度内含有“完整波”的数目。

根据λ，v，T，k 等的关系，沿 x 正向传播的简谐波的波函数还可以写成下列形式：

$$\begin{cases} y = A\cos\left[\omega(t-\dfrac{x}{u})+\varphi\right] \\ y = A\cos(\omega t - kx + \varphi) \\ y = A\cos 2\pi(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}+\varphi) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} k = 2\pi / \lambda \\ \lambda = uT \\ T = 2\pi / \omega \end{array}\right\} k = \omega / u$$



平面简谐波的数学描述：

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\nu t\mp\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

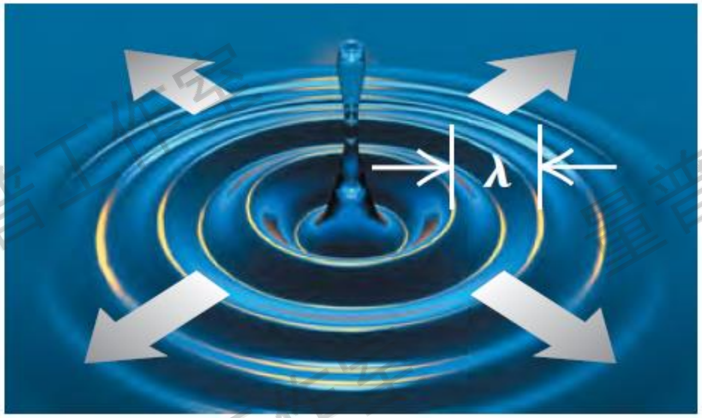
$$y(x,t)=A\cos[\frac{2\pi}{\lambda}(ut\mp x)+\varphi_0]$$

说明

(1) 波长反映了波的空间周期性。
周期表征了波的时间周期性。

(2) 波的频率ν与媒质的性质无关。

(3) 波速 u 大小主要决定于媒质的性质。



※(3) 波速 u 大小主要决定于媒质的性质。

a. 拉紧的绳子或弦线中横波的波速

$$u=\sqrt{T/\mu}\qquad\begin{cases}T\text{—— 张力}\\ \mu\text{—— 线密度}\end{cases}$$

b. 均匀细棒中，纵波的波速

$$u=\sqrt{Y/\rho}\qquad\begin{cases}Y\text{—— 固体棒的杨氏模量}\\ \rho\text{—— 固体棒的密度}\end{cases}$$

c. 液体和气体只能传播纵波，波速

$$u=\sqrt{B/\rho}\qquad\begin{cases}B\text{—— 液体或气体的体积模量}\\ \rho\text{—— 液体或气体的密度}\end{cases}$$

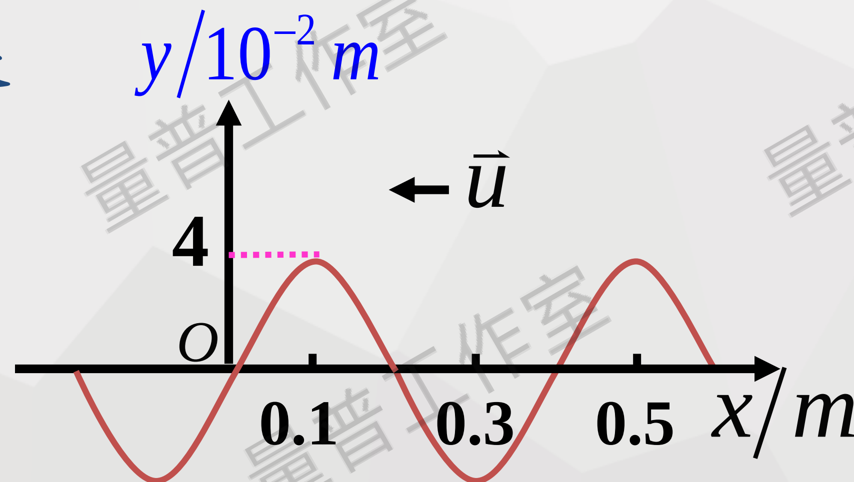
例： 一长线用水平力张紧，其上产生一列简谐横波向左传播，波速为 20 m/s。$t=0$ 时的波形曲线如图。

（1）求波的振幅、波长和波的周期

（2）按图设x轴方向写出波函数

（3）写出质点振动速度表达式

解：（1）波的振幅和波长可直接由图中看出。

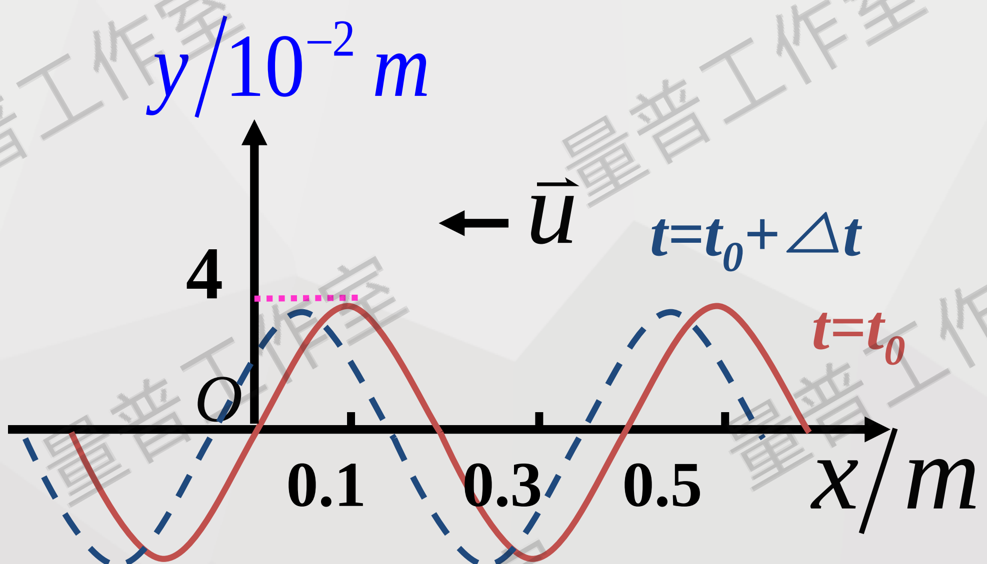


$A=4.0\times10^{-2}m$, $\lambda=0.4m$,

$T=\lambda/u=0.4/20=0.02s$

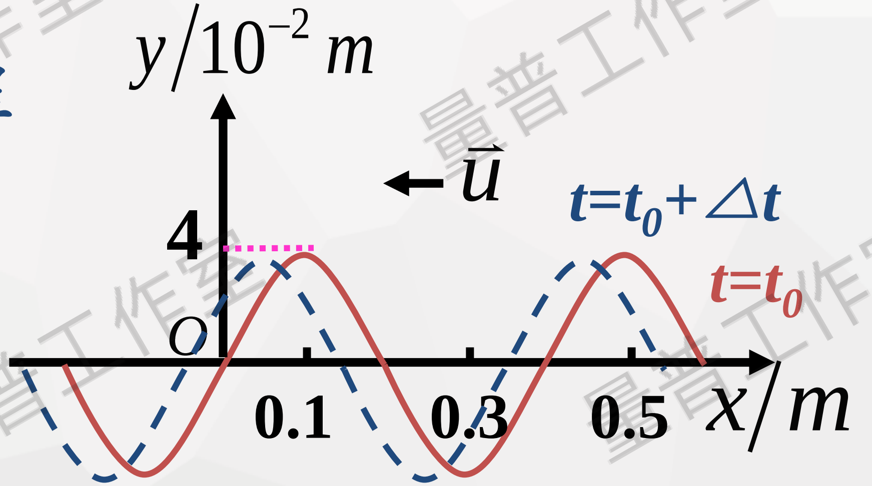
（2）求波函数

思路： 先确定某一点（如原点）处的质元的振动方程，再根据任意位置 x 处质点振动比它晚（或早）的时间或相位差关系，求得波函数。



a）原点处质元的振动方程

在波传播过程中，整个波形图向左平移。在原点O处质点的振动表达式为



$$y_0 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

由图可知，下一刻原点O处质点的位移为正，故取3π/2

$$t_0 = 0\text{时刻}, y_0 = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2\,(\text{舍}), 3\pi/2$$

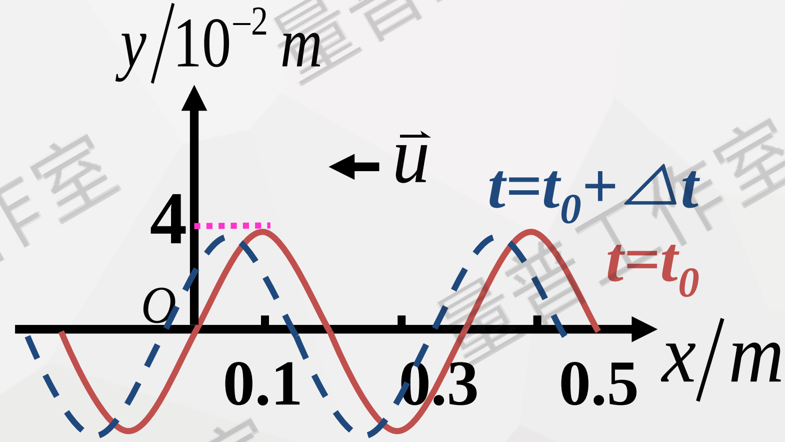
∴原点O处质元的振动方程为

$$y_0 = A\cos\left(\omega t - \pi/2\right)$$

b）波函数（任意位置 x 处的质元在任意时刻 t 的振动方程）

∴原点O处质元的振动方程为

$$y_0 = A\cos\left(\omega t - \pi/2\right)$$



波向左传播，当$x>0$的质点的振动比$x=0$点处早x/u这么长时间，两者相位差为$\omega x/u$。

故波函数为：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = A\cos\left(\omega t+\frac{\omega x}{u}-\frac{\pi}{2}\right)$$

波函数为：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t+\frac{x}{u}\right)-\frac{\pi}{2}\right] = A\cos\left(\omega t+\frac{\omega x}{u}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}, u=\frac{\lambda}{T} \Rightarrow y = A\cos\left(2\pi\frac{t}{T}+\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{\pi}{2}\right)$$

将具体值代入可得：

$$y = 4\times10^{-2}\cos\left(100\pi t+5\pi x-\frac{\pi}{2}\right)$$（m）

§5.6 简谐波的能量及传播

波不仅是振动状态的传播，而且也是伴随着振动能量的传播。

一、波的能量和能量密度

波的能量包括了动能和势能

1. 任一质元的动能和弹性势能：

设一平面简谐波 $y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

在x处取一体积为dV的质元，其质量为 $dm = \rho dV$

质点的振动速度为：$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -A\omega\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

质元的动能为：

$$dE_k = \frac{1}{2}v^2 dm = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]dV$$

质元的弹性势能为：

以横波为例，其单位体积内的弹性势能为

$$Wp=\frac{1}{2}G\varphi^2=\frac{1}{2}G\left(\Delta d\big/D\right)^2=\frac{1}{2}G\left(dy\big/dx\right)^2$$

所以质元的弹性势能为：

$$dE_p=\frac{1}{2}G\left(dy\big/dx\right)^2\cdot dV=\frac{1}{2}\frac{G}{u^2}\omega^2A^2\sin^2\omega[\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi]dV$$

又根据弹性介质中的波速公式 $u^2=G\big/\rho$

可推导出下式

$$dE_p=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]dV$$

质元的动能 $dE_K = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]dV$

质元的弹性势能 $dE_p = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]dV$

质元的总能量为：

$$dE = dE_k + dE_p = \rho A^2\omega^2 \sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]dV$$

总能量随时间做周期性的变化

注意：

1）波动传播过程中，动能和势能大小相等相位相同。

2）在波传动过程中，任意质元的能量不守恒。

质元总能量 $dE=\rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]dV$

<u>能量密度</u>　波在传播时，介质单位体积内的能量

$$w=\frac{dE}{dV}=\rho\omega^2A^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

<u>平均能量密度</u>　一个周期内（或一波长范围内）能量密度的平均值。

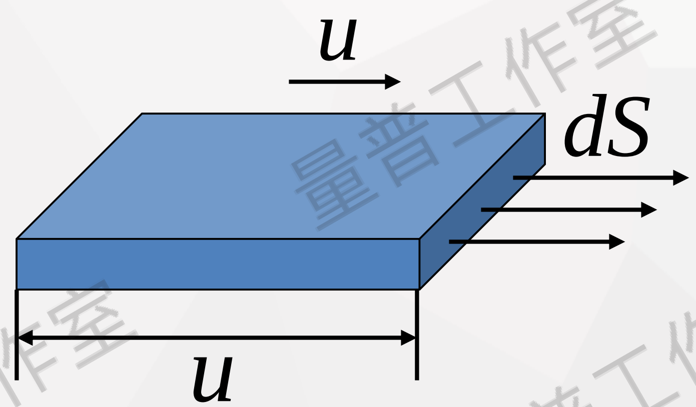
$$\bar{w}=\frac{1}{T}\int_0^T wdt=\frac{1}{T}\int_0^T \rho A^2\omega^2\sin^2[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]dt$$

$$T=2\pi/\omega \qquad \int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot d\theta=\pi/2$$

$$\bar{w}=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2=2\pi^2\rho A^2\upsilon^2$$

二、波的强度

平均在单位时间内通过垂直于波的传播方向的单位面积的能量，称为**波的强度**。



取垂直于波的传播方向的一个小面积ds，平均在dt时间内通过此面积的能量应为：

$$dw = \overline{w} u dt ds$$

dt 时间内能量=平均能量密度(单位体积单位时间内能量的平均值) ×通过的体积V(=udtds)

波的强度为：

$$I = \frac{dw}{dSdt} = \overline{w}u \xrightarrow{\overline{w} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A} I = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2 u$$

单位：瓦·米$^{-2}$

三、惠更斯原理与波的反射和折射

1. 几个概念

波线——从波源沿各传播方向所画的带箭头的线称为波线，代表波的传播方向。

波面——波在传播过程中，所在振动相位相同的点连成的面称为波面。波在传播过程中波面有无穷多个。

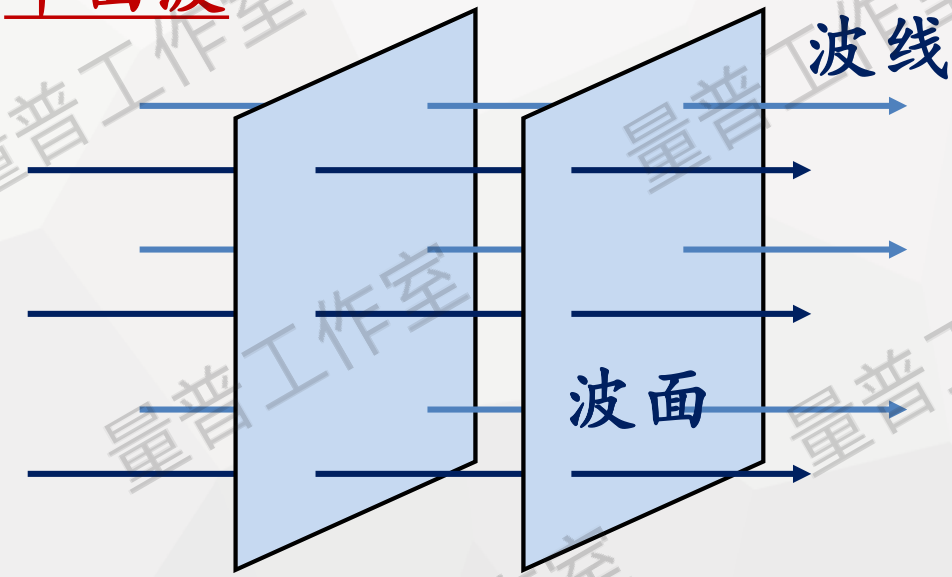
波面形状 → (三维) { 同心球面：球面波；平面：平面波 }　(二维) { 同心圆：球面波；直线：平面波 }

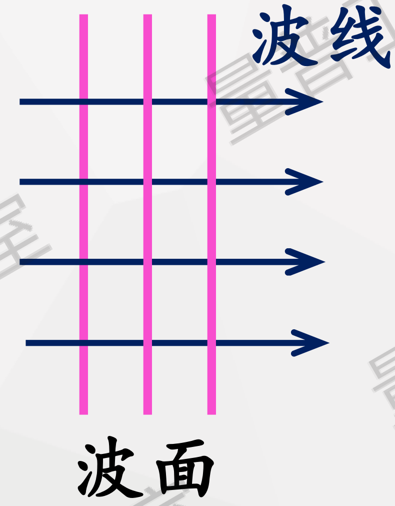
波阵面——某时刻波源最初的振动状态传到的波面。即波传播时最前面的那个波面。（波前）

各向同性均匀介质中，波线恒与波面垂直。

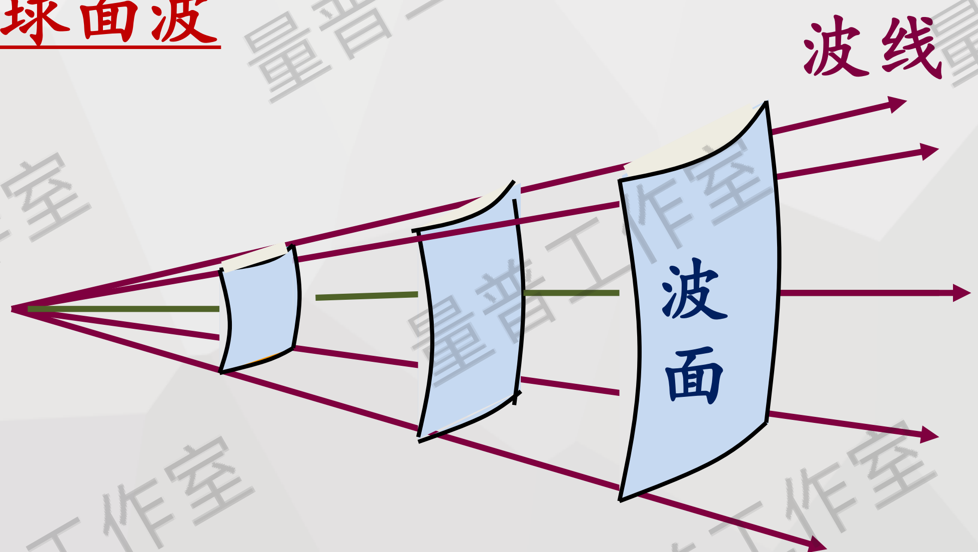
沿波线方向各质点的振动相位依次落后。

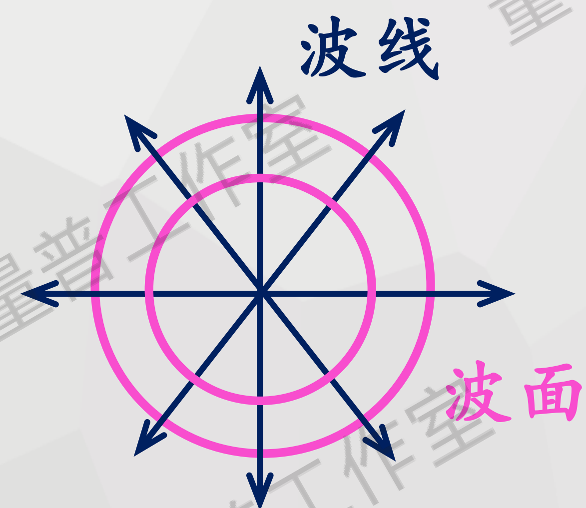
平面波





球面波

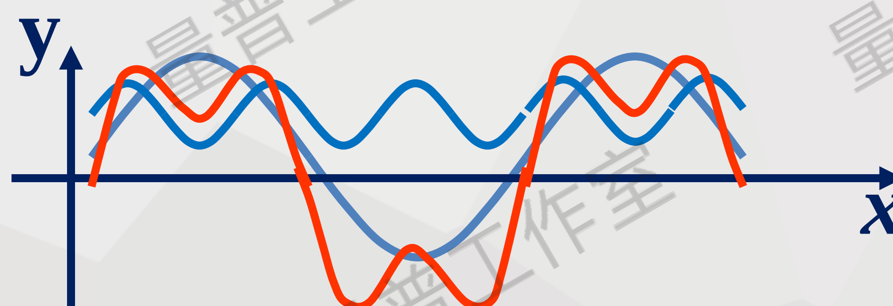




§5.7 简谐波的合成

一、波传播的独立性原理（波的叠加原理1、2、4）

几列波可以保持各自的特点（ν、λ、A、振动方向、传播方向等）同时通过同一介质，就象没有遇到其他波一样。几列波相遇或叠加区域内，任一质点的位移，为各个波单独在该点产生的位移的合成。



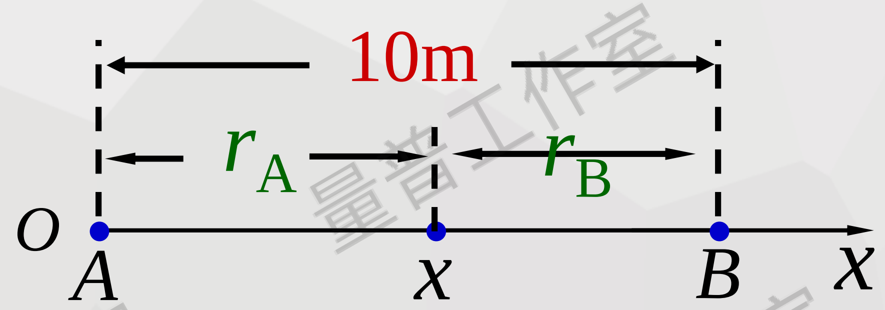
注意：振动的叠加仅发生在单一质点上，而波的叠加发生在两波相遇范围内的许多质点上。

例 两波源分别位于同一介质A和B处，振动方向相同，振幅相等，频率皆为100 Hz，但A处波源比B处波源相位落后π。若A、B相距10 m，波速为4000 m/s，试求由A、B之间连线上因干涉而静止的点。

解 建立所示的坐标系，任取一点x，则两波到该点的波程分别为

$$r_{\mathrm{A}} = x$$

$$r_{\mathrm{B}} = 10 - x$$



两波相位差为

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A - 2\pi\frac{r_B - r_A}{\lambda}$$

$$= \pi - 2\pi\frac{\nu}{u}[(10 - x) - x]$$

$$\Delta\varphi = \pi - 2\pi\frac{100}{400}(10 - 2x)$$

$$= \pi x - 4\pi$$

因干涉而静止的点，满足干涉相消条件

$$\Delta\varphi = \pi x - 4\pi = \pm(2k+1)\pi$$

$$k = 0, 1, 2, \cdots$$

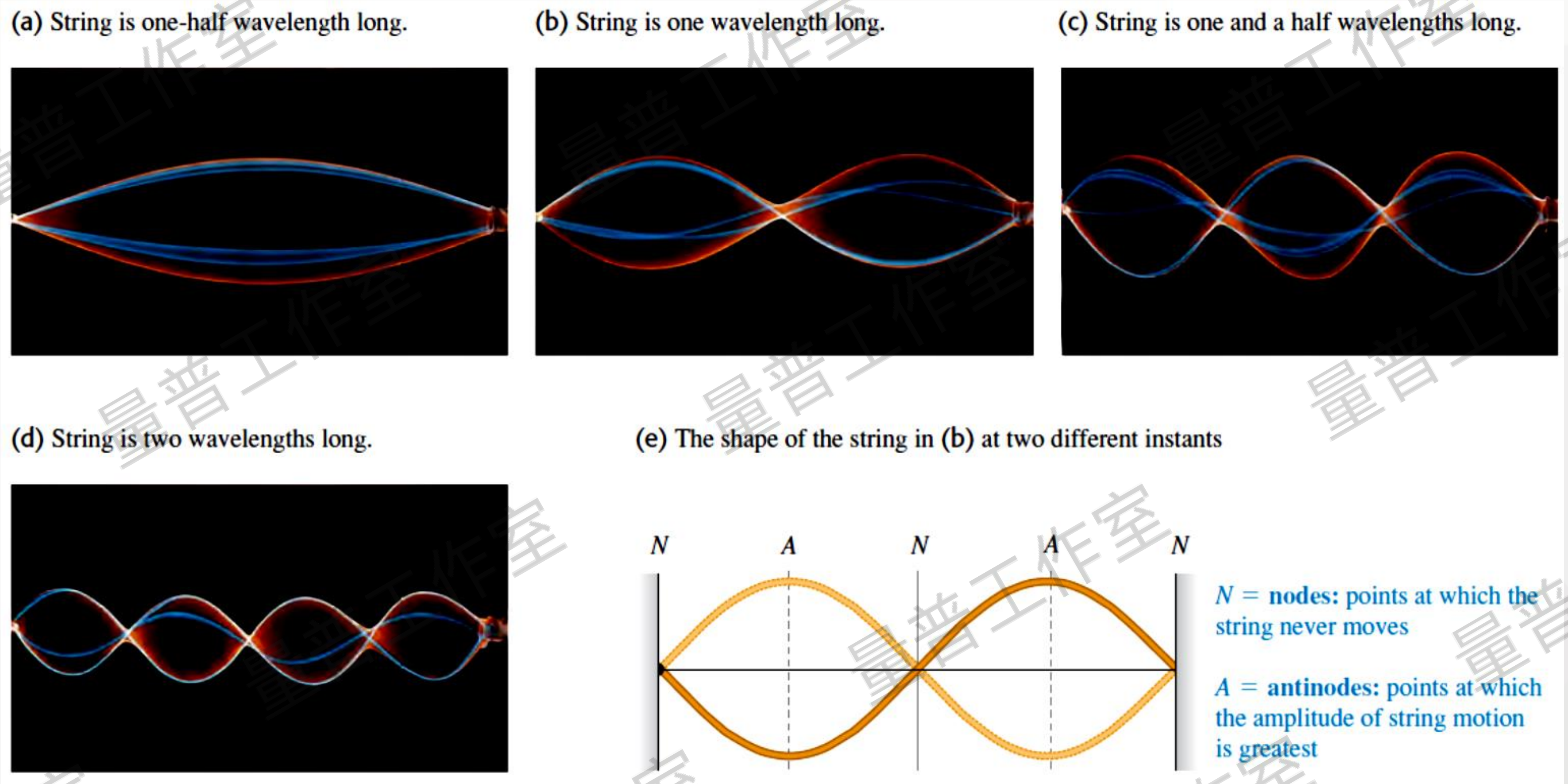
$$\therefore x = 2k+1$$

所以，因干涉而静止的点为

$$x = 1, 3, 5, 7, 9, \cdots, \ m$$

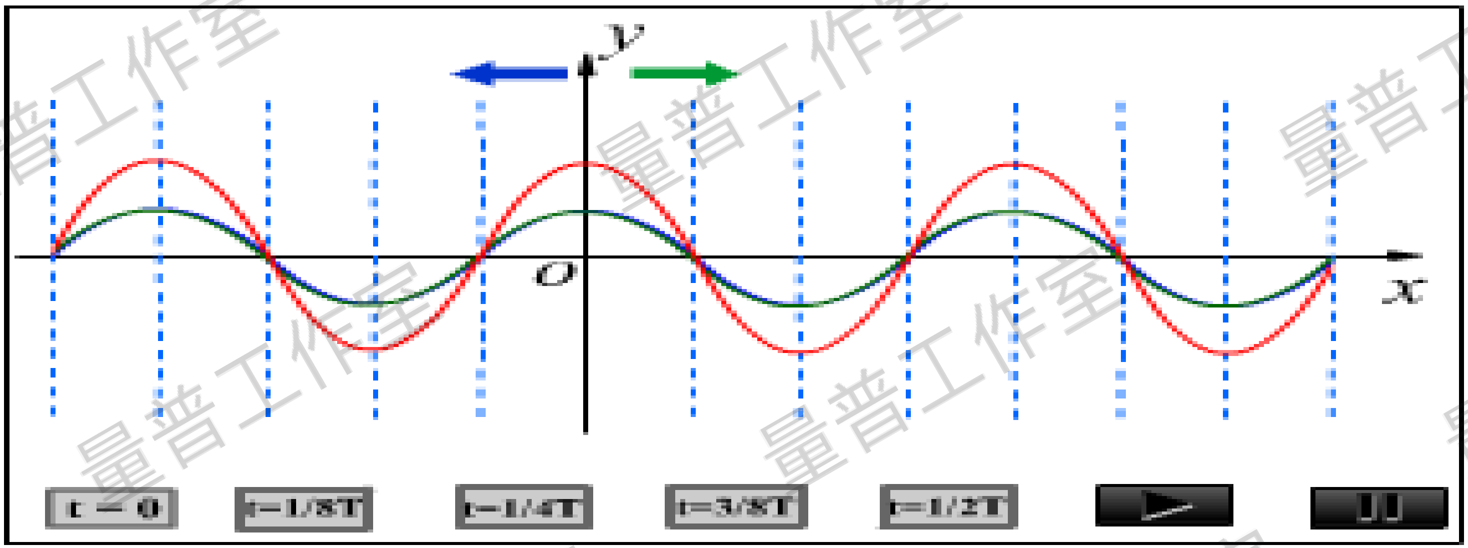
四、驻波（standing wave）

在同一介质中两列频率、振动方向相同，而且振幅也相同的简谐波，在同一直线上沿相反方向传播时就叠加形成驻波。



(a)–(d) Time exposures of standing waves in a stretched string. From (a) to (d), the frequency of oscillation of the right-hand end increases and the wavelength of the standing wave decreases. (e) The extremes of the motion of the standing wave in part (b), with nodes at the center and at the ends. The right-hand end of the string moves very little compared to the antinodes and so is essentially a node.

1. 驻波的形成



同频率、同振幅、同振动方向、同速度

反向传播

2. 驻波方程

正向 $y_1 = A\cos(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda})$

负向 $y_2 = A\cos(\omega t + \dfrac{2\pi x}{\lambda})$

$$y = y_1 + y_2$$

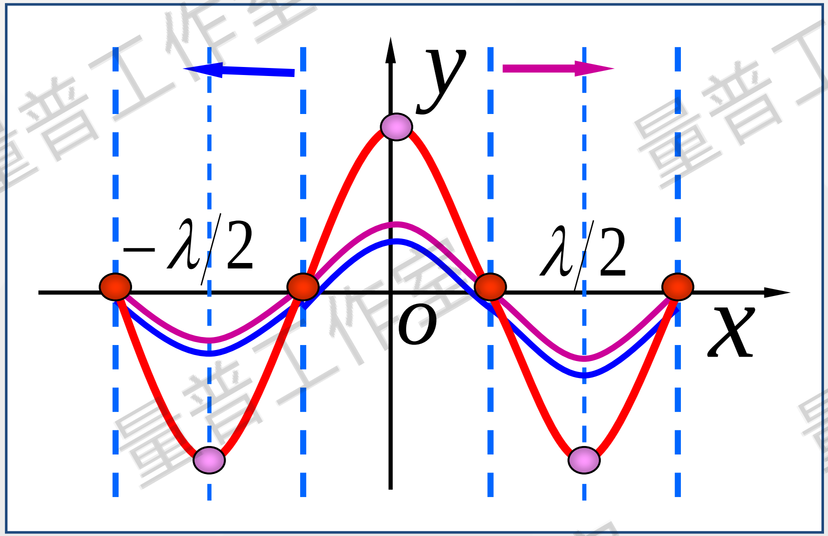
$$= \boxed{2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}}\underline{\cos\omega t}$$

驻波的振幅与位置有关

各质点都在作同频率的简谐运动

3. 驻波的特点 $y = 2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\cos\omega t$

（1）波腹与波节



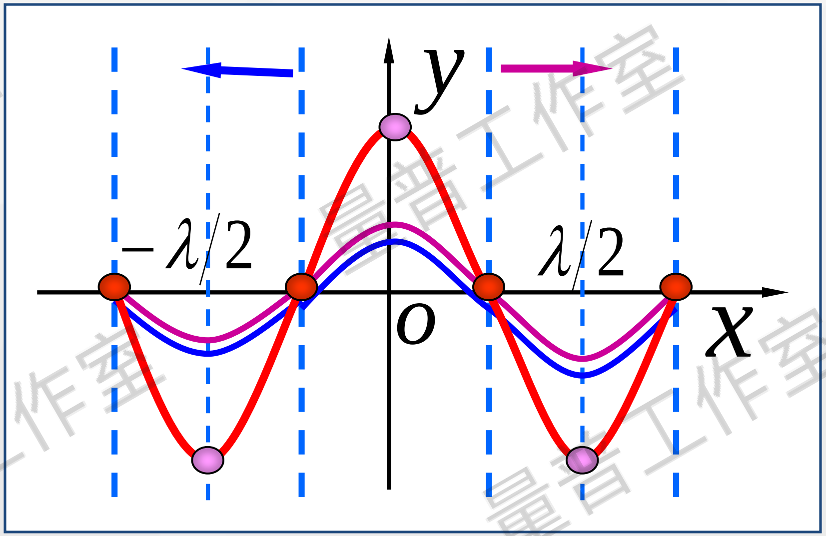
$$A(x) = \left|2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right|$$

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda}{2}$$

$x_k = \pm k\frac{\lambda}{2} \quad k = 0,1,2,\cdots \qquad A(x) = 2A$ 波腹

$x_k = \pm(k+\frac{1}{2})\frac{\lambda}{2} \quad k = 0,1,2,\cdots \qquad A(x) = 0$ 波节

（2）驻波相位的分布特点 $y = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t$



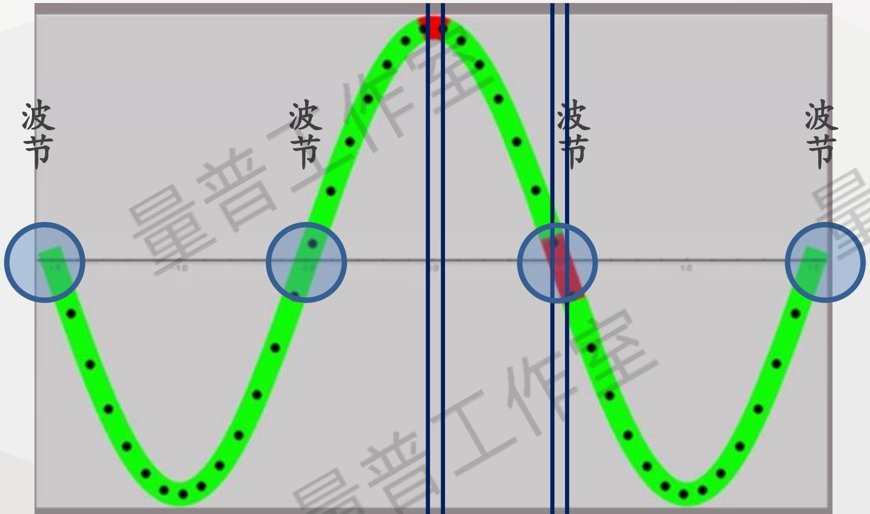
在波节两侧点的振动相位相反。

两个波节之间的点振动相位相同。

“驻”波

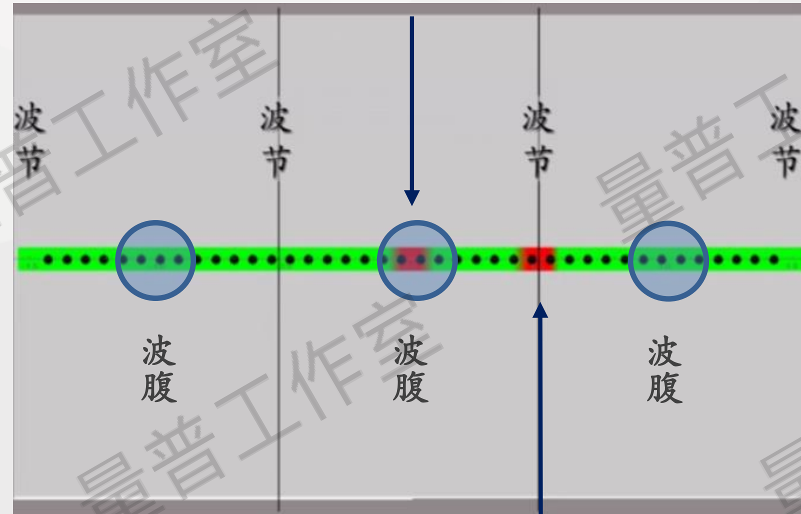
（3）驻波能量　　“驻”波

波腹 势能为零



波节 势能最大

波腹 动能最大



波节 动能为零

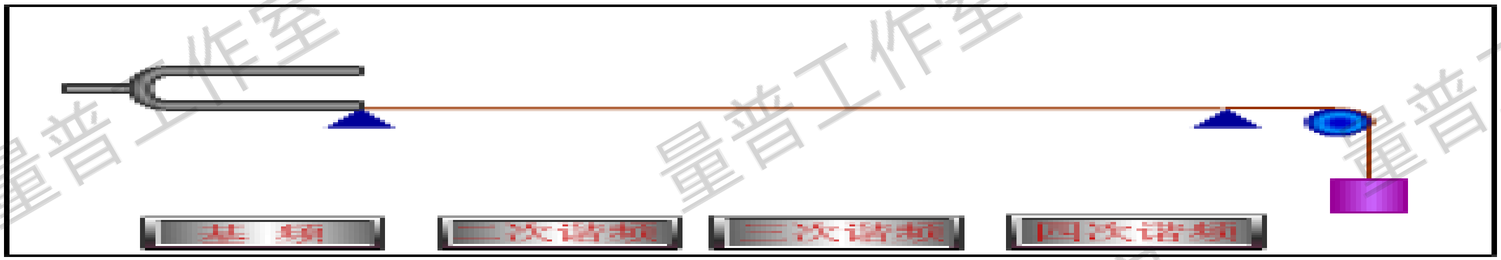
最大位移处

能量集中在波节附近，表现为势能。

平衡位置处

能量集中在波腹附近，表现为动能。

三、驻波的简正模式



两端固定的弦线形成驻波时，波长λ和弦线长L应满足：

$$L = n\frac{\lambda}{2}, n = 1,2,3\ldots$$

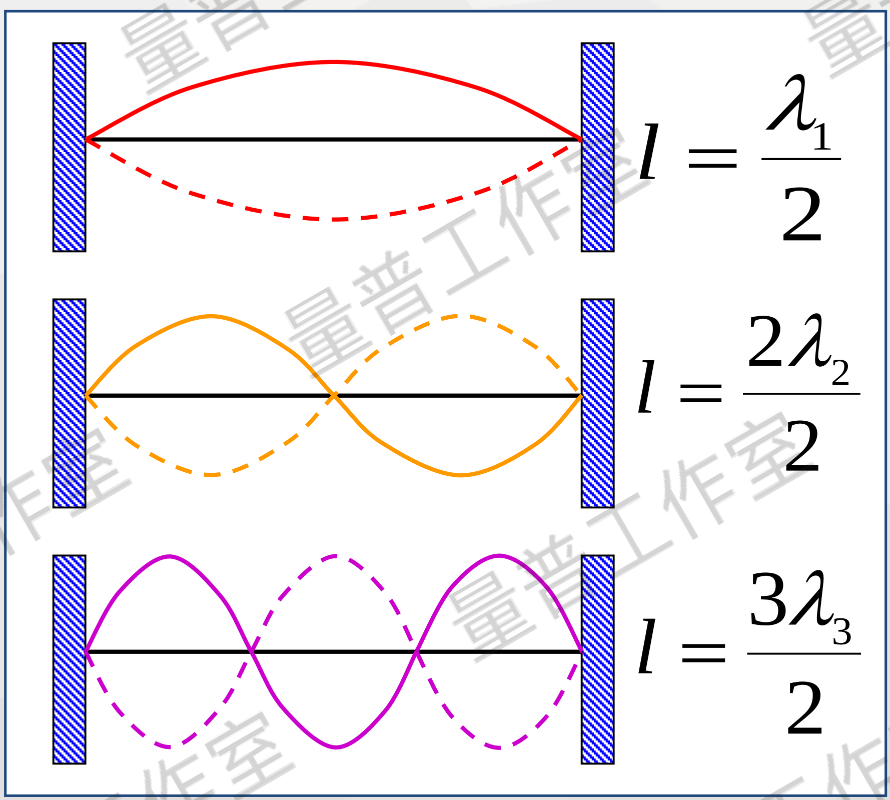
能形成驻波的各种振动方式称为弦线振动的简正模式。

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

⇒ 在绳上形成驻波的波长是不连续的。

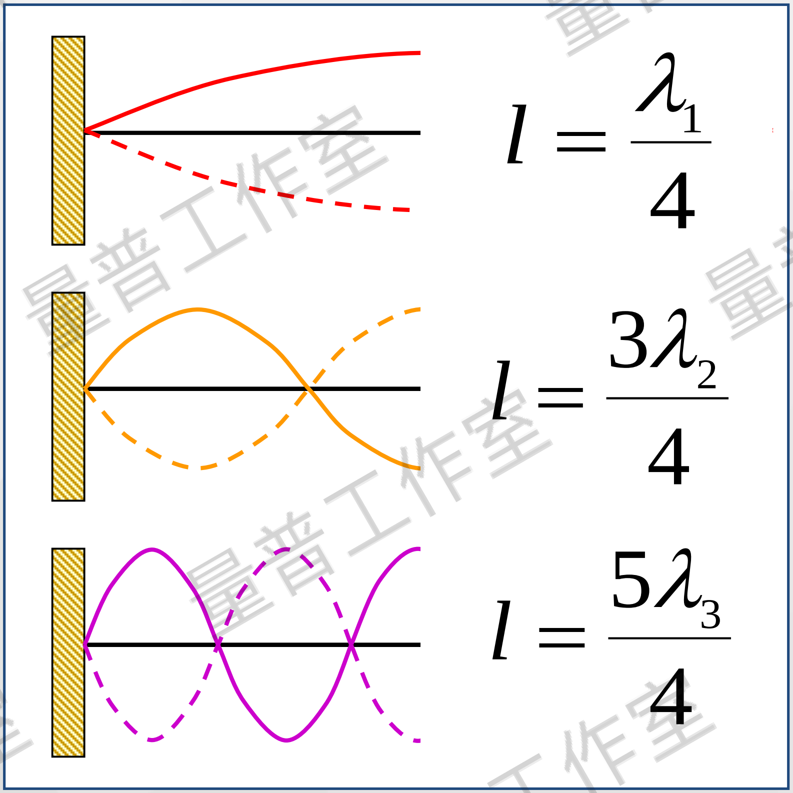
两端**固定**的弦振动的简正模式

$$L = n\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$



一端**固定**一端**自由**的弦振动的简正模式

$$L = (n - \frac{1}{2})\frac{\lambda_n}{2} \quad n = 1, 2, \cdots$$



小 结

1. 驻波是一种特殊的波的叠加

2. 两端固定弦线的驻波条件：

$$L = n\frac{\lambda}{2}, n = 1, 2, 3 \ldots$$

3. 驻波没有波形的推进、相位的传递和能量的定向传播

“驻”波

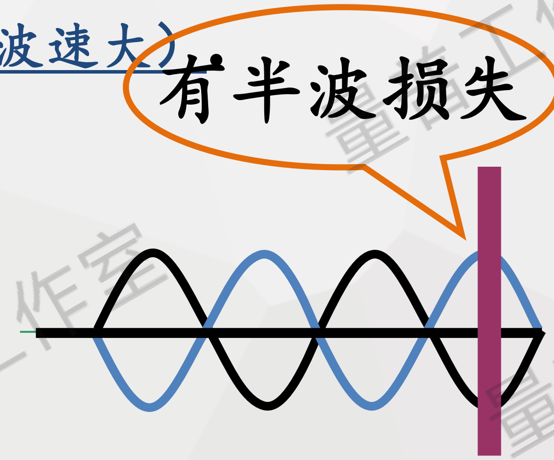
五、半波损失 半波损失

入射波在反射时发生反相的现象称为**半波损失**。

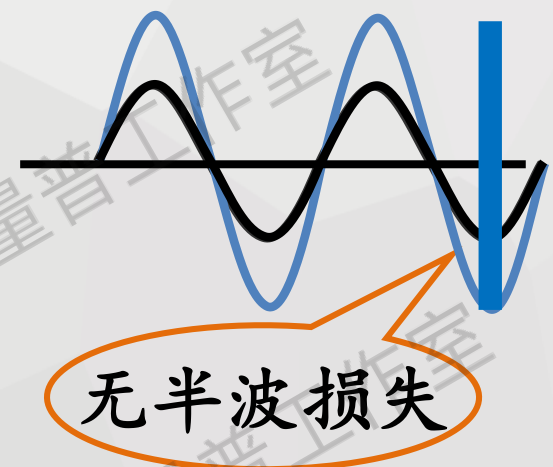
折射率较大的媒质称为波密媒质（波速小）；

折射率较小的媒质称为波疏媒质（波速大）

当波从波疏媒质垂直入射到波密媒质界面上反射时，有半波损失，形成的驻波在界面处是波节。



当波从波密媒质垂直入射到波疏媒质界面上反射时，无半波损失，界面处出现波腹。



例 一沿 x 方向传播的入射波在 $x=0$处发生反射，反射点为一波节。已知波函数为

$$y_1 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})$$

求（1）反射波的波函数；

（2）求合成波（驻波）的波函数；

（3）各波腹和波节的位置坐标。

解 （1）反射点为波节，说明波反射时有π的相位跃变，所以反射波的波函数为

$$y_2 = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})-\pi]$$

（2）合成波（驻波）的波函数为

$$y = y_1 + y_2 = A\cos 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) - \pi]$$

$$= 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2\pi\frac{t}{T} - \frac{\pi}{2})$$

$$= 2A\sin 2\pi\frac{x}{\lambda} \cdot \sin 2\pi\frac{t}{T}$$

（3）形成波腹的各点，振幅最大，即

$$\left|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 1 \qquad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm(k + \frac{1}{2})\pi$$

$$x_k = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

形成波节的各点，振幅为零，即

$$\left|\sin 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = 0 \quad 2\pi\frac{x}{\lambda} = \pm k\pi$$

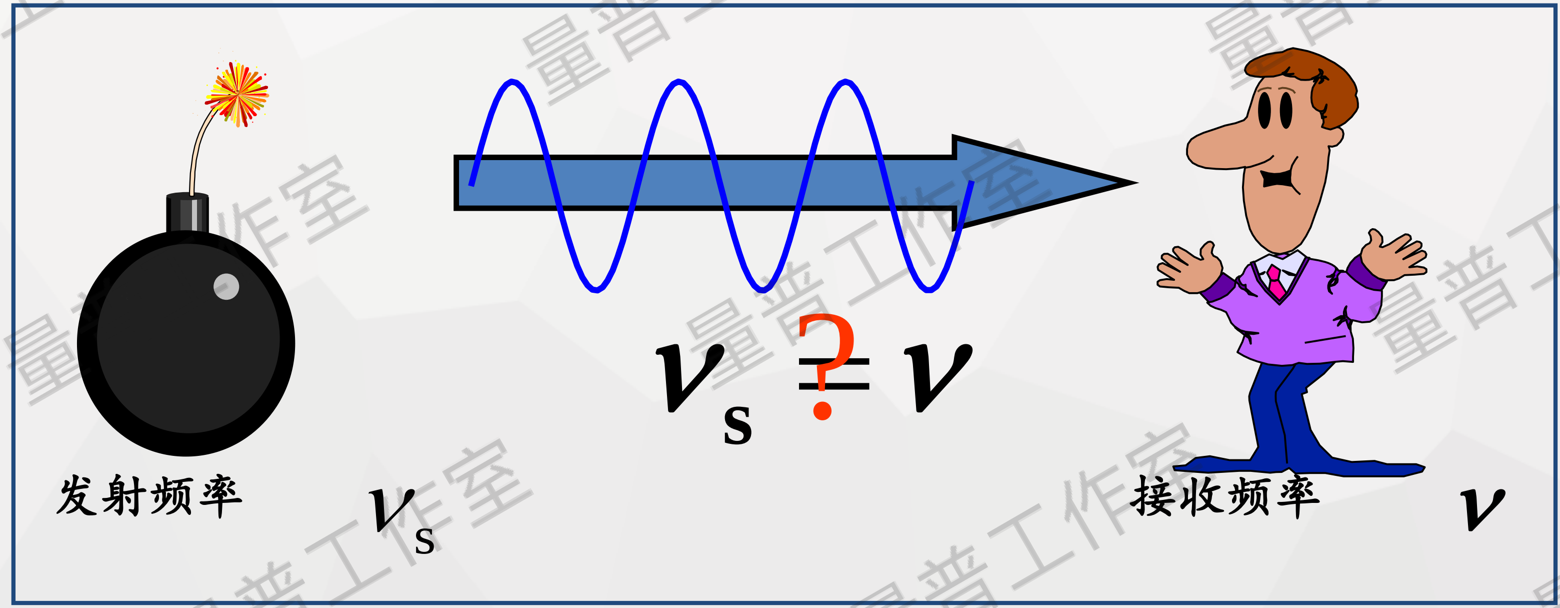
$$x_k = \pm k\frac{\lambda}{2} \qquad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

§5.8 多普勒效应

多普勒
（1803-1853）

多普勒效应（Doppler effect）

观察者接收到的频率有赖于波源或观察者运动的现象，称为多普勒效应。



当波源和观察者都相对于介质**静止**时，观察者所观测到的波的频率与波源的振动**频率一致**。

以声波为例，我们规定：

ν_S——波源的频率

u ——声波在介质中传播速度（和u_0 ,u_S无关）

λ ——声波的波长

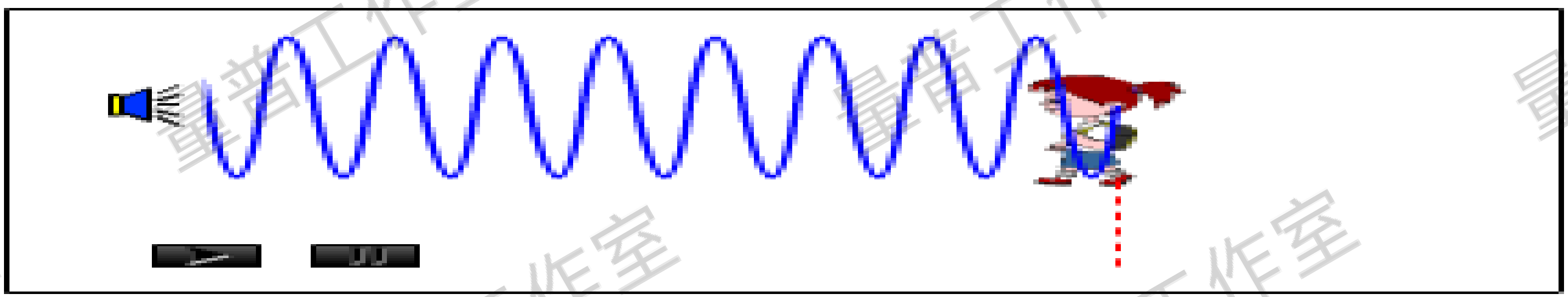
u_0——观察者相对于介质的运动速率

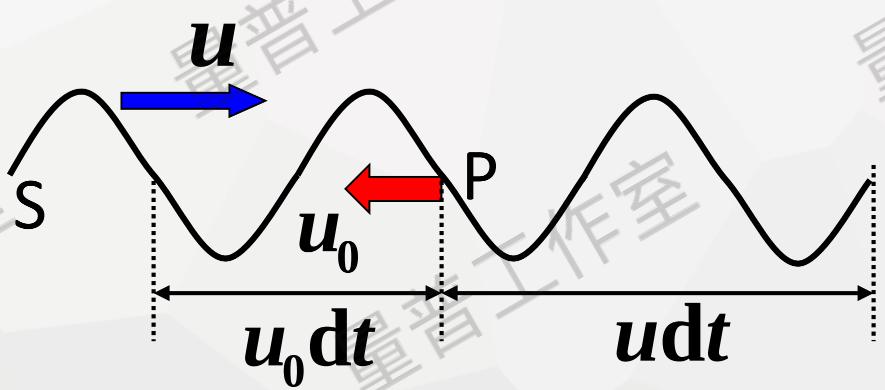
u_S——波源相对于介质的运动速率

ν ——观察者接收到的频率

一、波源不动，观察者运动

$u_s = 0$， $u_0 \neq 0$

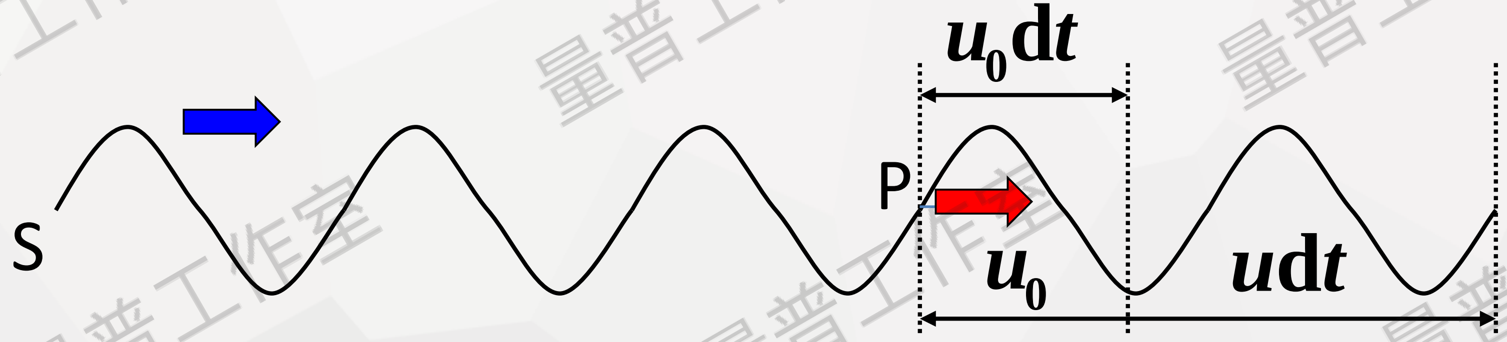




$$u' = u + u_0$$

观察者接收的频率： $\nu = \dfrac{u + u_0}{u} \nu_S$

观察者向波源运动<u>频率升高</u>



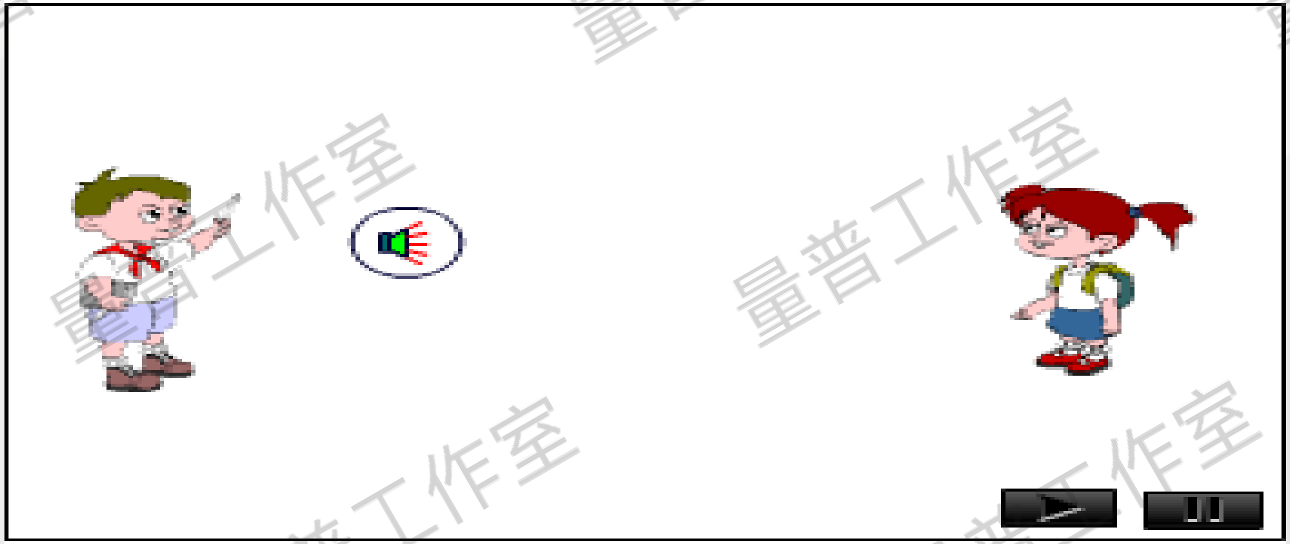
$$u' = u - u_0$$

观察者接收的频率： $\nu = \dfrac{u - u_0}{u} \nu_S$

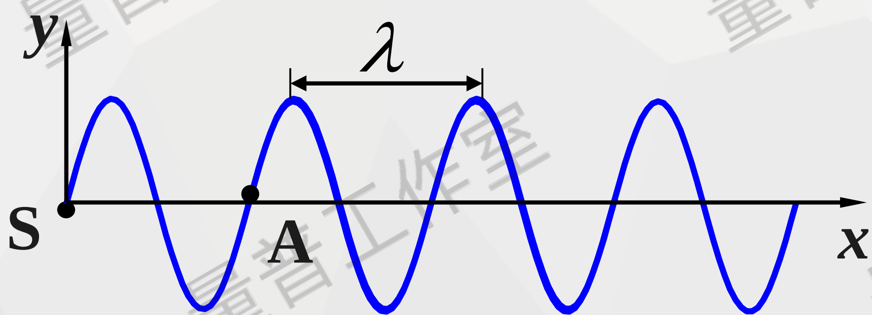
观察者远离波源运动<u>频率降低</u>

二、观察者不动，波源运动

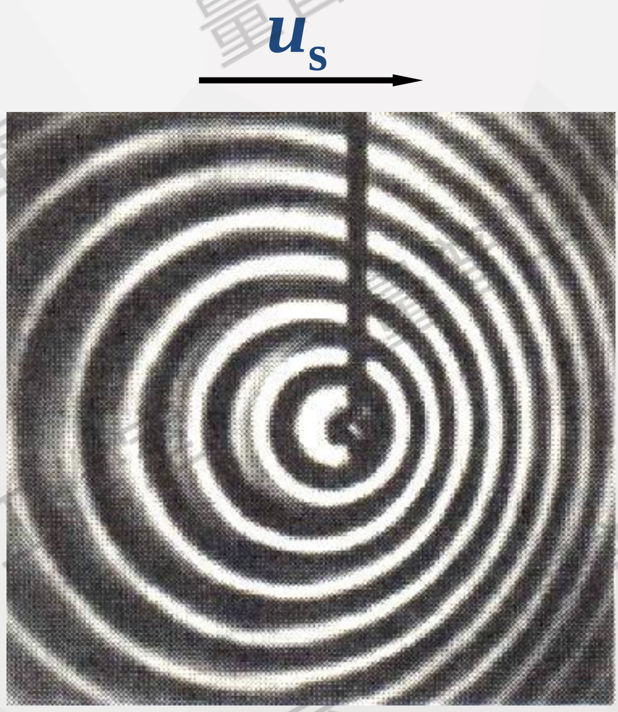
$u_s \neq 0$，$u_0 = 0$



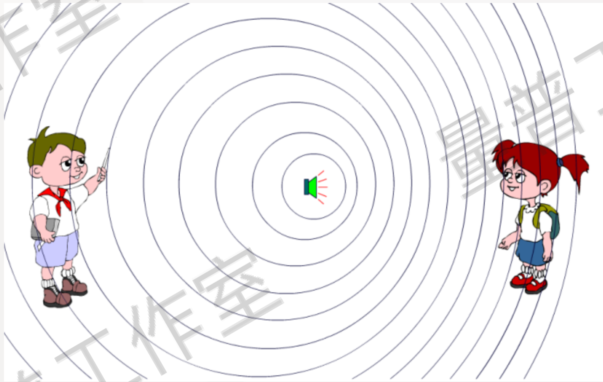
波长：一个**完整波形**的长度。

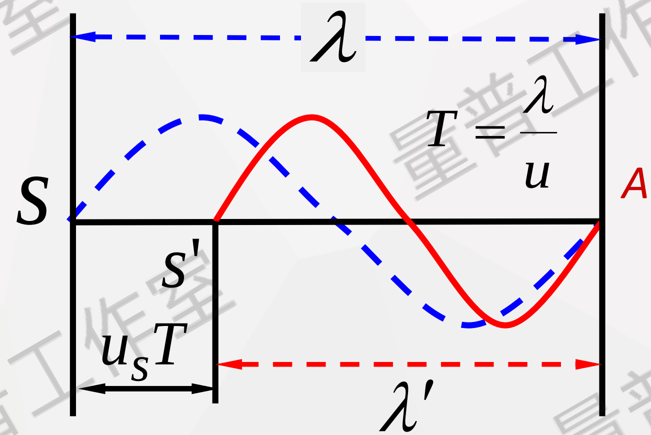


波源S 静止时的波形



波源运动时波长变化





$$\lambda' = \lambda - u_s T = \frac{u-u_s}{\nu_s}$$

观察者接收的频率：$\nu = \dfrac{u}{u-u_s}\nu_s$

波源向观察者运动频率升高

波源远离观察者运动 $\nu = \dfrac{u}{u+u_s}\nu_s$ 频率降低

三、波源与观察者同时相对介质运动(u_s, u_0)

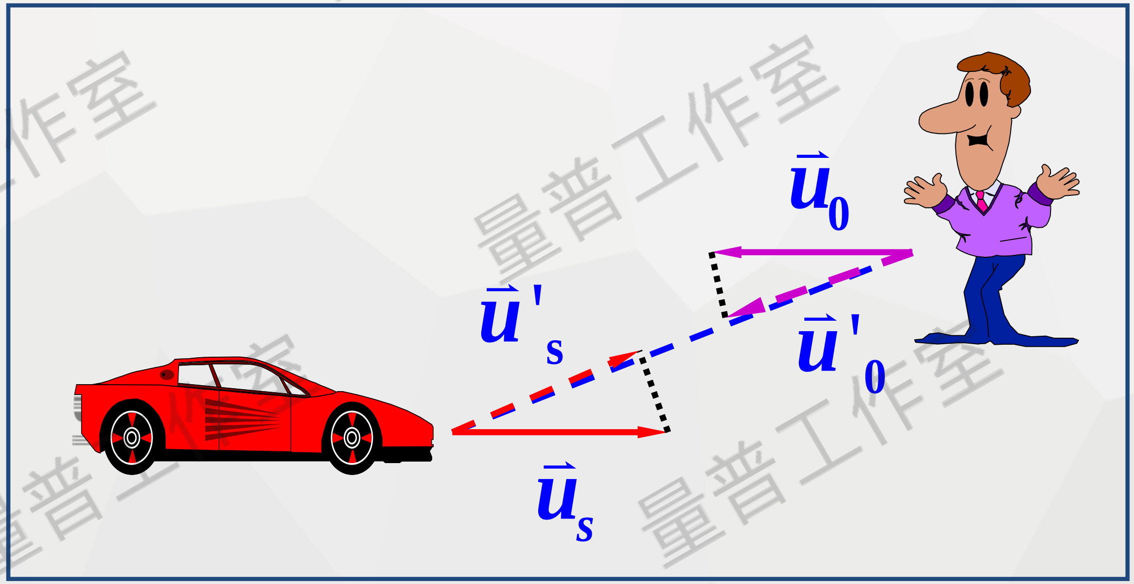
$u_s \neq 0$, $u_0 \neq 0$

观察者运动： $\nu = \dfrac{u \pm u_0}{u} \nu_S$

波源运动： $\nu = \dfrac{u}{u \mp u_s} \nu_S$

观察者、波源同时运动：$\nu = \dfrac{u \pm u_0}{u \mp u_s} \nu_S$

若波源与观察者不沿二者连线运动



$$\nu = \frac{u \pm u'_0}{u \mp u'_s}\nu_S$$

机械波有纵向多普勒效应；无横向多普勒效应。

思考

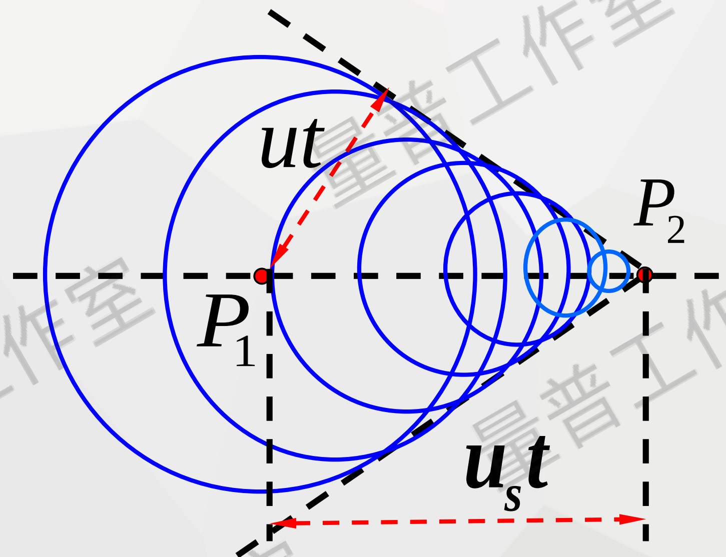
如果波源的运动速度比波在介质中的速度快，会发生什么现象呢？

$$u_s > u$$

观测者接收的频率为 $\nu = \dfrac{u}{u-u_s}\nu_S < 0$

频率为负值是没有意义的！

$u_s >> u$ 冲击波或激波



所有的波前将被挤压而聚集在一圆锥面上，圆锥的**顶点能量高度集中**。

小 结

多普勒效应：波源与观察者相对运动产生的频移

$$\nu = \frac{u \pm u_0}{u \mp u_s} \nu_S$$

应用：彩色多普勒超声、多普勒雷达、多普勒声纳、电子警察……