

# Cahier de Texte

EL BAKKIOUI KHALID

CPGE DE TANGER

2<sup>e</sup> Année

Filière : **PSI**

Matière : **Mathématiques**

*Lycée Moulay Al Hassan*

## I. Lundi 08 Septembre 2025

### PSI de 10h à 12h

- Accueil des élèves. Présentation de la classe, de ses exigences, etc.
- Présentation du programme de mathématiques et organisation de la semaine.

♠ Cours du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Définition d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (avec  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ). Lois interne et externe, propriétés. Exemples :  $\mathbb{K}$ ,  $\mathbb{C}$  comme  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{A}(D, E)$ , suites,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ . Espace vectoriel produit  $E_1 \times \cdots \times E_p$ .

## II. Mardi 09 Septembre 2025

### PSI de 08h à 10h

♠ Cours du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Sous-espaces vectoriels : définition et caractérisation. Exemples et contre-exemples. Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie :  $\text{Vect}(X)$ . Réunion de sous-espaces vectoriels (cas général, cas de deux s.e.v).

## III. Mercredi 10 Septembre 2025

### PSI de 16h à 18h

♠ Cours du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Combinaisons linéaires (famille à support fini). Lien entre  $\text{Vect}(X)$  et les combinaisons linéaires. Exemples : droite vectorielle, polynômes, matrices. Somme d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Somme directe, caractérisation.

## IV. Jeudi 11 Septembre 2025

### PSI de 08h à 10h

♠ Cours du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Sous-espaces supplémentaires. Exemples : fonctions paires et impaires, polynômes et multiples. Familles génératrices, libres, liées : définitions et propriétés. Exemples de familles libres ( $t \mapsto t^\lambda$ ,  $t \mapsto \cos(nt)$ , polynômes de degrés distincts).

## V. Vendredi 12 Septembre 2025

### PSI de 08h à 10h

♠ Cours du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Bases : définition, caractérisation, coordonnées. Exemples de bases : base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ . Bases et supplémentaires : réunion de bases adaptées. Espaces vectoriels de dimension finie : définition, exemples.

## VI. Lundi 15 Septembre 2025

**PSI de 10h à 12h**

♠ **Cours** du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Théorème de la base incomplète et corollaires. Dimension : définition, exemples ( $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$ , etc.). Caractérisation des bases en dimension finie. Dimension d'un espace produit.

## VII. Mardi 16 Septembre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ **Cours** du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Sous-espaces vectoriels en dimension finie : dimension, supplémentaires. Formule de Grassmann. Somme directe et dimension. Rang d'une famille de vecteurs. Exercice d'application : supplémentarité dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

## VIII. Mercredi 17 Septembre 2025

**PSI de 16h à 18h**

♣ **Travaux dirigés** du chapitre 1 : Espaces vectoriels.

- Exercices : 1, 2, 3, 4, 5, 6.

## IX. Jeudi 18 Septembre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ **Cours** du chapitre 2 : Applications linéaires.

- Définition d'une application linéaire. Propriétés élémentaires. Exemples fondamentaux : application nulle, homothéties, dérivation, évaluation, intégration. Endomorphismes, isomorphismes, automorphismes. Notations  $\mathcal{L}(E, F)$ ,  $\mathcal{L}(E)$ ,  $GL(E)$ . Sous-espaces vectoriels stables. Endomorphisme induit.

## X. Vendredi 19 Septembre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ **Cours** du chapitre 2 : Applications linéaires.

- Image et noyau d'une application linéaire. Théorèmes fondamentaux. Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité par le noyau et l'image. Lien avec les sommes de sous-espaces vectoriels. Théorème d'isomorphisme : restriction à un supplémentaire du noyau.

## XI. Lundi 22 Septembre 2025

**PSI de 10h à 12h**

♦ Distribution du devoir à la maison n°1.

♠ **Cours** du chapitre 2 : Applications linéaires.

- Opérations sur les applications linéaires : structure d'espace vectoriel de  $\mathcal{L}(E, F)$ . Composition d'applications linéaires. Propriétés de la composition. Image et noyau d'une composée. Structure d'algèbre de  $\mathcal{L}(E)$ .

## XII. Mardi 23 Septembre 2025

PSI de 08h à 10h

♠ Cours du chapitre 2 : Applications linéaires.

- Groupe linéaire  $GL(E)$ . Propriétés des automorphismes. Puissances d'un endomorphisme. Formule du binôme lorsque  $u$  et  $v$  commutent. Projecteurs : définition, propriétés, caractérisation. Symétries : définition, propriétés, caractérisation.

## XIII. Mercredi 24 Septembre 2025

PSI de 16h à 18h

♣ Travaux dirigés du chapitre 2 : Applications linéaires.

- Exercices : 1, 2, 3.

## XIV. Jeudi 25 Septembre 2025

PSI de 08h à 10h

♠ Cours du chapitre 2 : Applications linéaires.

- Détermination d'une application linéaire par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires. Détermination par l'image d'une base. Caractérisation des isomorphismes. Cas de la dimension finie : théorème du rang. Caractérisations des applications injectives, surjectives, bijectives en dimension finie.

## XV. Vendredi 26 Septembre 2025

PSI de 08h à 10h

♠ Cours du chapitre 2 : Applications linéaires.

- Invariance du rang par composition avec un isomorphisme. Dimension de  $\mathcal{L}(E, F)$  en dimension finie. Polynômes d'interpolation de Lagrange : existence, unicité, construction. Application à la décomposition en éléments simples.

## XVI. Lundi 29 Septembre 2025

PSI de 10h à 12h

♠ Cours du chapitre 3 : Formes linéaires et hyperplans.

- Définition d'un hyperplan : sous-espace vectoriel admettant une droite vectorielle pour supplémentaire. Caractérisation : si  $H$  est un hyperplan et  $a \notin H$ , alors  $E = H \oplus \mathbb{K}a$ . Définition d'une forme linéaire et de l'espace dual  $E^*$ . Lien hyperplan – noyau d'une forme linéaire non nulle. Équation d'un hyperplan en dimension finie :  $\sum a_i x_i = 0$ . Système d'équations d'un sous-espace vectoriel : intersection de noyaux de formes linéaires indépendantes. Exemples et méthodes de résolution d'exercices types.

## XVII. Mardi 30 Septembre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 4 : Calcul matriciel.

- Définitions fondamentales : matrices, types de matrices (ligne, colonne, carrée). Matrice d'un système de vecteurs dans une base. Matrice d'une application linéaire. Bijection entre  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $M_{p,q}(K)$ . Application linéaire canoniquement associée à une matrice. Rang d'une matrice. Opérations sur les matrices : addition, multiplication externe. Structure d'espace vectoriel de  $M_{p,q}(K)$ . Base canonique.

## XVIII. Mercredi 01 Octobre 2025

**PSI de 16h à 18h**

- ♦ Eléments de correction au tableau du devoir à la maison n° : 1.

## XIX. Jeudi 02 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 4 : Calcul matriciel.

- Multiplication matricielle : définition et propriétés. Expression analytique d'une application linéaire. Noyau et image d'une matrice. Théorème du rang matriciel. Matrices par blocs : définitions et opérations. Produit de matrices par blocs. Transposition : définition et propriétés fondamentales.

## XX. Vendredi 03 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 4 : Calcul matriciel.

- Algèbre  $M_n(K)$  : structure d'algèbre non commutative. Matrice d'un endomorphisme. Groupe linéaire  $GL_n(K)$ . Matrices inversibles : caractérisations équivalentes. Rang et matrices extraites.

## XXI. Lundi 06 Octobre 2025

**PSI de 10h à 12h**

♠ Cours du chapitre 4 : Calcul matriciel.

- Matrices triangulaires : caractérisation par la stabilité des sous-espaces emboîtés. Sous-algèbre des matrices triangulaires supérieures. Inversibilité et nilpotence des matrices triangulaires. Matrices diagonales et matrices scalaires. Matrices symétriques et antisymétriques. Décomposition d'une matrice en partie symétrique et antisymétrique. Matrices par blocs et stabilité de sous-espaces. Changements de base : matrices de passage et formules de transformation. Trace d'une matrice et d'un endomorphisme.

## XXII. Mardi 07 Octobre 2025

**PSI de 08h à 12h**

- ♦ Devoir sur table n° : 1.

## XXIII. Mercredi 08 Octobre 2025

**PSI de 16h à 18h**

- ♣ Travaux dirigés du chapitre 3 : Formes linéaires et hyperplans.
  - Exercices : 45, 46, 47, 48.

## XXIV. Jeudi 09 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

- ♠ Cours du chapitre 5 : Déterminants.

- Applications  $p$ -linéaires : définitions et exemples. Formes  $p$ -linéaires symétriques et anti-symétriques. Propriétés des applications antisymétriques. Déterminant d'un système de vecteurs dans une base : existence, unicité et propriétés fondamentales. Déterminant d'un endomorphisme : définition et propriétés (multiplicativité, lien avec l'inversibilité).

## XXV. Vendredi 10 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

- ♠ Cours du chapitre 5 : Déterminants.

- Déterminant d'une matrice carrée : définition, propriétés algébriques. Calcul du déterminant d'une matrice triangulaire. Lien entre déterminant et transposition. Calculs de déterminants : développement par lignes/colonnes, mineurs et cofacteurs. Méthodes pratiques : opérations élémentaires, matrices par blocs. Exemples classiques : matrices tridiagonales, déterminant de Vandermonde. Orientation d'un espace vectoriel réel.

## XXVI. Lundi 13 Octobre 2025

**PSI de 10h à 12h**

- ♦ Remise des copies du devoir sur table n° : 1. Eléments de correction au tableau .

## XXVII. Mercredi 15 Octobre 2025

**PSI de 16h à 18h**

- ♦ Distribution du devoir à la maison n°2.
- ♣ Travaux dirigés du chapitre 4 : Calcul matriciel.
  - Exercices : 1, 4, 6, 8, 15, 40, 44.

## XXVIII. Jeudi 16 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.

- Polynômes d'endomorphismes : définition, propriétés algébriques. Polynômes annulateurs : définition, exemples (projecteur, symétrie, nilpotent). Existence d'un polynôme annulateur en dimension finie. Polynômes de matrices : définition, lien avec les endomorphismes. Utilisation des polynômes annulateurs : calcul de l'inverse et des puissances d'un endomorphisme.

## XXIX. Vendredi 17 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.

- Éléments propres : valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres. Exemples (homothétie, rotation, projecteur, symétrie). Propriétés des sous-espaces propres : stabilité par les endomorphismes commutants, lien avec l'image et le noyau. Indépendance linéaire des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

## XXX. Lundi 27 octobre 2025

**PSI de 10h à 12h**

♠ Cours du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.

- Diagonalisabilité : caractérisations (somme directe des sous-espaces propres, base de vecteurs propres, matrice diagonale). Exemples (homothétie, projecteur, symétrie). Condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité (polynôme caractéristique scindé et égalité des dimensions des sous-espaces propres). Cas des valeurs propres distinctes.

## XXXI. Mardi 28 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.

- Polynôme caractéristique : définition, propriétés (degré, trace, déterminant). Lien avec les valeurs propres. Multiplicité des valeurs propres. Théorème de Cayley-Hamilton. Stabilité des sous-espaces propres. Application à la diagonalisation : exemples de matrices 3x3 et 4x4.

## XXXII. Mercredi 29 Octobre 2025

**PSI de 16h à 18h**

♣ Travaux dirigés du chapitre 5 : Déterminants.

- Exercices : 2, 3, 4, 5, 6, 14.

## XXXIII. Jeudi 30 Octobre 2025

**PSI de 08h à 10h**

- ♦ Distribution d'éléments de correction du devoir à maison n° 2.
- ♠ Cours du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.
  - Trigonalisation : définition, condition nécessaire et suffisante (polynôme caractéristique scindé). Cas des matrices complexes. Exemples de trigonalisation de matrices 3x3. Méthode pratique de recherche d'une base de trigonalisation.

## XXXIV. Vendredi 31 Octobre 2025

PSI de 08h à 10h

- ♦ Devoir sur table n° : 2.

## XXXV. Lundi 03 Novembre 2025

PSI de 10h à 12h

- ♦ Distribution du devoir à la maison n°3.
- ♠ Cours du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.
  - Applications de la réduction : calcul des puissances d'une matrice (méthodes par polynôme annulateur, diagonalisation, trigonalisation). Étude de systèmes de suites récurrentes linéaires. Résolution de systèmes différentiels homogènes à coefficients constants. Cas diagonalisable et non diagonalisable.

## XXXVI. Mardi 04 Novembre 2025

PSI de 08h à 10h

- ♠ Cours du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.
  - Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable. Endomorphismes nilpotents : caractérisation par le spectre. Lien entre diagonalisabilité et polynôme annulateur scindé à racines simples. Exemples et exercices de synthèse.

## XXXVII. Mercredi 05 Novembre 2025

PSI de 16h à 18h

- ♣ Travaux dirigés du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.
  - Exercices : 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 16, 30.

## XXXVIII. Jeudi 06 Novembre 2025

PSI de 08h à 10h

- ♦ Remise des copies du devoir sur table n° : 2. Eléments de correction au tableau .

## XXXIX. Vendredi 07 Novembre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 7 : Espaces vectoriels normés.

- Définition d'une norme : positivité, séparation, homogénéité, inégalité triangulaire. Exemples : valeur absolue dans  $\mathbb{R}$ , module dans  $\mathbb{C}$ , norme associée à un produit scalaire. Propriétés : équivalence  $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ , inégalité triangulaire généralisée, inégalité  $|||x||| - |||y||| \leq |||x - y|||$ . Vecteur unitaire. Normes usuelles en dimension finie :  $||x||_1, ||x||_2, ||x||_\infty$ . Démonstration des propriétés pour  $||\cdot||_1$  et  $||\cdot||_\infty$ . Lemme préliminaire sur  $\sup(kA) = k \sup A$ . Normes usuelles sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  :  $||A||_1, ||A||_2, ||A||_\infty$ . Norme d'algèbre : définition et exemples. La norme  $||\cdot||_1$  est une norme d'algèbre. Construction de normes d'algèbre :  $N(A) = n||A||_\infty$  et  $N(A) = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ . Démonstrations détaillées.

## XL. Lundi 10 Novembre 2025

**PSI de 10h à 12h**

♠ Cours du chapitre 7 : Espaces vectoriels normés.

- Normes usuelles sur  $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$  :  $||f||_1, ||f||_2, ||f||_\infty$ . Vérification des axiomes. Distance associée à une norme :  $d(x, y) = ||x - y||$ . Propriétés. Distance d'un point à une partie :  $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ . Remarques sur le non-atteignement de la borne inférieure. Boules et sphères : définitions (ouverte, fermée, sphère). Exemples dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^2$ . Dessin des boules unités pour  $N_1, N_2, N_\infty$ . Voisinages, parties convexes (définition, exemples). Une boule est convexe. Parties bornées.

## XLI. Mardi 11 Novembre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 7 : Espaces vectoriels normés.

- Comparaison de normes : définition de l'équivalence, relation d'équivalence. Comparaison des normes usuelles en dimension finie :  $||x||_\infty \leq ||x||_1 \leq n||x||_\infty, ||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty, ||x||_2 \leq ||x||_1 \leq \sqrt{n}||x||_2$ . Démonstrations détaillées avec Cauchy-Schwarz. Comparaison des normes sur  $\mathcal{C}([a; b], \mathbb{K})$  : inégalités  $||f||_1 \leq \sqrt{b-a}||f||_2, ||f||_2 \leq \sqrt{b-a}||f||_\infty, ||f||_1 \leq (b-a)||f||_\infty$  et contre-exemple montrant la non-équivalence. Propriétés de l'équivalence : conservation des boules ouvertes, des voisinages, des parties bornées. Théorème fondamental : en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

## XLII. Mercredi 12 Novembre 2025

**PSI de 16h à 18h**

♣ Travaux dirigés du chapitre 6 : Réduction des endomorphismes.

- Exercices : 14, 15, 19, 25, 26, 29, 32, 41.

## XLIII. Jeudi 13 Novembre 2025

**PSI de 08h à 10h**

♠ Cours du chapitre 7 : Espaces vectoriels normés.

- Suites dans un espace vectoriel normé : suites bornées, convergence, unicité de la limite. Lien avec les voisinages. Stabilité de la convergence par changement de norme équivalente. Théorèmes sur les opérations : somme, produit par une suite scalaire. Suites extraites : définition, limite d'une suite extraite. Exemple de  $(-1)^n$ . Réciproque partielle avec les suites  $(u_{2n})$  et  $(u_{2n+1})$ . Cas de la dimension finie : convergence équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée. Application aux suites complexes. Caractérisation séquentielle de l'adhérence :  $a \in \overline{A} \iff \exists(a_n) \in A^{\mathbb{N}}, a_n \rightarrow a$ .

## XLIV. Vendredi 14 Novembre 2025

### PSI de 08h à 10h

♠ Cours du chapitre 7 : Espaces vectoriels normés.

- Topologie : ouverts (définition, propriétés, boule ouverte est un ouvert), intérieur (définition, propriétés, intérieur d'une boule fermée), fermés (définition, propriétés, boule fermée est un fermé), adhérence (définition, propriétés, adhérence d'une boule ouverte). Parties denses. Caractérisation séquentielle des fermés :  $A$  fermé  $\iff$  toute suite convergente dans  $A$  a sa limite dans  $A$ . Effet d'un changement de norme équivalente sur la topologie. Exercices importants : sous-espaces vectoriels en dimension finie sont fermés, matrices stochastiques forment un fermé,  $GL_p(\mathbb{K})$  est dense dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ .