Devoir Surveillé N°1

Durée : 4 heures

CONSIGNES GÉNÉRALES

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Aucun document ni **discussion** ne sont autorisés sous peine d'annulation de la copie.
- Les calculatrices, les téléphones portables et tout matériel électronique sont interdits.
- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Le sujet est composé d'un exercice et de trois problèmes indépendants.

Exercice 1 Racine carrée d'une matrice

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les nombres réels λ tels que $\det(A - \lambda I_3) = 0$.
2. Déterminer une base (v_1, v_2, v_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que $\ker(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$, $\ker(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v_2)$ et $\ker(f - \lambda\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v_3)$ et donner la matrice D de f dans cette nouvelle base.
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (v_1, v_2, v_3). Soit un entier $m \geq 1$. Sans calculer l'inverse de P, exprimer A^m en fonction de D, P et P^{-1}.
4. Calculer P^{-1}, puis déterminer la matrice de f^m dans la base canonique.
5. Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec la matrice D trouvée à la question 2.
6. Montrer que si $H \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $H^2 = D$, alors H et D commutent.
7. Déduire de ce qui précède toutes les matrices H de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $H^2 = D$, puis déterminer tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ en donnant leur matrice dans la base canonique.

Problème 1 Endomorphismes échangeurs

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. On note $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Un endomorphisme u de E est dit **échangeur** lorsqu'il existe des sous-espaces vectoriels F et G de E tels que

$$E = F \oplus G, \quad u(F) \subset G \quad \text{et} \quad u(G) \subset F$$

On dit que u est de **carré nul** lorsque u^2 est l'endomorphisme nul de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier naturel $n \geq 1$ tel que $u^n = 0$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite de **carré nul** lorsque $A^2 = 0$. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et F est un sous-espace stable par f, on note f_F l'endomorphisme induit par f sur F. L'objectif du problème est d'établir, pour un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, l'équivalence entre les conditions suivantes :

(C1) l'endomorphisme f est échangeur ;

(C2) il existe $u, v \in \mathcal{L}(E)$, tous deux de carré nul, tels que $f = u + v$.

Partie 1.1 La condition (C1) implique (C2)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que f est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $f(F) \subset G$ et $f(G) \subset F$. On se propose de montrer que f vérifie la condition (C2).

1. On suppose dans cette question que $F = \{0\}$ ou $G = \{0\}$. Montrer que $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ puis conclure.

On suppose dans la suite de cette partie que $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$, et que $\dim F = p$ et $\dim G = q$.

2. Justifier que $p + q = n$.
3. Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Montrer que $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.
4. Donner la forme par blocs de la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
5. Montrer que f est de trace nulle.
6. Soient $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix}$. Calculer le carré de la matrice $\begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer ensuite que M est la somme de deux matrices de carré nul.
7. Déduire des questions précédentes que f vérifie (C2).

Partie 1.2 La condition (C2) implique (C1)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n. Dans cette partie, on suppose qu'il existe deux endomorphismes u et v de E tels que

$$f = u + v \quad \text{et} \quad u^2 = v^2 = 0$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ et en déduire que $\dim(\ker u) \geq \frac{n}{2}$. Donner des résultats analogues pour v.
2. Dans cette question on suppose que f est un automorphisme.
   a. Démontrer que $E = \ker u \oplus \ker v$, et que $\ker u = \operatorname{Im} u$ et $\ker v = \operatorname{Im} v$.
   b. En déduire que f est échangeur.
3. Posons $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   a. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
   b. Montrer qu'il existe un entier naturel p tel que
   $$\forall k \geq p, \quad N_k = N_p \quad \text{et} \quad I_k = I_p$$
   c. Montrer que $E = N_p \oplus I_p$ et en déduire que $E = \ker(f^{2p}) \oplus \operatorname{Im}(f^{2p})$.
4. On suppose dans la suite que f n'est pas un automorphisme et on pose $F = \ker(f^{2p})$ et $G = \operatorname{Im}(f^{2p})$.
   a. Justifier que F et G sont stables par f.
   b. Montrer que f_F est nilpotente et que f_G est un automorphisme.
   c. Montrer que u et v commutent avec f^2.
   d. Montrer que le sous-espace vectoriel G est stable par u et v et que les endomorphismes induits u_G et v_G sont de carré nul.
   e. En admettant que tout endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est un échangeur, montrer que f est un échangeur.

Problème 2 Hyperplans de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Partie 2.1 Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\varphi_A : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} \\ M \mapsto \operatorname{tr}(AM) \end{cases}$$

Montrer que φ_A est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* \\ A \mapsto \varphi_A \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Déduire que pour toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(M) = \operatorname{tr}(AM).$$

4. Soit f un élément de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ tel que : $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(MN) = f(NM)$.
   a. Montrer qu'il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \operatorname{tr}(AM)$.
   b. Montrer que $MA = AM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   c. En déduire qu'il existe un réel λ tel que $A = \lambda I_n$.
   d. Conclure.

Partie 2.2 Hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice non nulle A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(AM) = 0\}.$$

2. Soit x un élément de $\mathbb{K}$ et $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad I_n + xE_{ij} \in GL_n(\mathbb{K}).$$

3. On suppose que $H \cap GL_n(\mathbb{K}) = \emptyset$. Soit $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{K}, \quad x\operatorname{tr}(AE_{ij}) + \operatorname{tr}(A) \neq 0.$$

4. En déduire que pour tout $(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2$ tel que $i \neq j$, on a $E_{ij} \in H$.

5. Montrer que
$$J=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}\in H.$$
6. Conclure.

Partie 2.3 Hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit

Dans cette partie, on suppose que H est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui est stable par produit :
$$\forall A,B\in H,\quad AB\in H.$$
On se propose de montrer que $I_n\in H$ et on raisonne par l'absurde en supposant que $I_n\notin H$.

1. Justifier que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})=H\oplus \mathrm{Vect}(I_n)$.
2. On note p la projection sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H. Prouver que l'on a
$$\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\quad p(AB)=p(A)p(B).$$
3. Démontrer que $M^2\in H\Rightarrow M\in H$.
4. Prouver alors que
$$\forall (i,j)\in\{1,\dots,n\}^2,\quad E_{ij}\in H.$$
5. Conclure.

Problème 3 Décompositions de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en somme directe de deux sous-espaces vectoriels stables par les endomorphismes φ_M

Dans ce problème, $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes; la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est notée I_2. Si M et N sont deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose $[M,N]=MN-NM$ et on note φ_M l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ défini par
$$\varphi_M(X)=[M,X]=MX-XM,\quad X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$
On considère les matrices
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$
Le but du problème est de déterminer toutes les décompositions de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en somme directe de deux sous-espaces vectoriels non nuls et stables par tous les endomorphismes φ_M.

Partie 3.1 Construction de deux sous-espaces non nuls, supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et stables par tous les endomorphismes φ_M

1. Calculer les matrices $[A, B]$, $[C, A]$ et $[C, B]$.
2. Montrer que la famille (I_2, A, B, C) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3. Soit $M = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, avec $\lambda, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.
   a. Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$, déterminer $\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid MN = NM\}$.
   b. Si $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, montrer que $\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid MN = NM\}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par la famille (I_2, M). Quelle est sa dimension ?
4. Dans la suite, on note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendré par la famille (A, B, C), et $\mathbb{C}I_2$ celui engendré par la matrice $I_2 : \mathbb{C}I_2 = \{\lambda I_2 \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$.
   a. Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.
   b. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{F}$ et $\mathbb{C}I_2$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   c. Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathcal{F}$ et $\mathbb{C}I_2$ sont stables par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Partie 3.2 $\mathcal{F}$ et $\mathbb{C}I_2$ sont les seuls possibles

1. Calculer $\varphi_B(A)$ en fonction de C et $\varphi_B(C)$ en fonction de B.
2. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que V contient un élément $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, où $\lambda, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$.
   a. Si $\gamma \neq 0$,
      i. Calculer $\varphi_C \circ \varphi_A(X)$ et en déduire que $A \in V$.
      ii. Justifier que B et C sont éléments de V.
      iii. En déduire que $\mathcal{F} \subset V$.
   b. Envisager les cas restants et montrer que $\mathcal{F} \subset V$.
3. Soient V et W deux sous-espaces vectoriels non nuls et supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que V et W sont stables par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   a. On suppose qu'il existe $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in V$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, où $\lambda, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Montrer que $V = \mathcal{F}$ et $W = \mathbb{C}I_2$.
   b. Dans le cas contraire, montrer que $W = \mathcal{F}$ et $V = \mathbb{C}I_2$.

Fin du Devoir

Bon courage !