FEUILLE D'EXERCICES N°7 & 8

ESPACES VECTORIELS NORMÉS

Exercice 1 :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, et soient $x, y \in E$.
Montrer que :

$$\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$$

.

Exercice 2 :

Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels. Pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :

$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_i pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3 :

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Quelle(s) condition(s) doit vérifier A pour que l'application :

$$N : P \mapsto \|P\|_A = \sup_{t \in A} |P(t)|$$

soit une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 4 :

Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ par : $N(x,y) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \dfrac{x+ty}{1+t+t^2} \right|$. Dessiner la boule unité pour cette norme.

Exercice 5 :

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose :

$$N(A) = \sup \left\{ \|AX\|_\infty \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|X\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

a) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \|AX\|_\infty \leq N(A)\|X\|_\infty$$

et en déduire que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) \leq N(A)N(B).$$

c) Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, montrer que $N(A) = \max\limits_{i \in [1,n]} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.

Exercice 6 :

1. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer qu'il existe un réel $k > 0$ tel que :

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \|AB\| \leq k\|A\|.\|B\|.$$

2. Démontrer que, pour $n \geq 2$, il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\|AB\| = \|BA\|$ pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (on pourra, dans le cas $n = 2$, considérer les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et remarquer que ces deux matrices sont semblables).

Exercice 7 :

Soit $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \int_0^1 e^x |f(x)| dx$.

Montrer que N est une norme, et la comparer à la norme $\|.\|_\infty$ (on pourra considérer la suite (f_n) telle que $f_n(x) = 1 - nx$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{n}$ et $f_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$), ainsi qu'à la norme $\|.\|_1$ et à la norme $\|.\|_2$.

Exercice 8 :

Soit $F = \{f \in \mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. On pose, pour $f \in F$, $N(f) = \|f'\|_\infty$.

Montrer que N est une norme sur F. Est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$?

Exercice 9 :

Dans $E = \mathbb{R}[X]$, on pose, si $P = \sum_i a_i X^i$:

$N_1(P) = \max\{|a_i|\}, N_2(P) = \sum_i |a_i|$ et $N_3(P) = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$.

Montrer que N_1, N_2 et N_3 sont des normes sur E et qu'elles sont deux à deux non équivalentes.

Exercice 10 :

Dans $E = \mathscr{C}^2([0;1],\mathbb{R})$, on pose, pour $f \in E$:

$$N_1(f) = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad N_2(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

et

$$N_3(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f''(t)|.$$

Montrer que ce sont des normes sur E et les comparer.

Exercice 11 :

Dans $\mathbb{R}[X]$ on pose, si $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ (où les a_k sont nuls à partir d'un certain rang) :

$$N_\infty(P) = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \quad \text{et} \quad N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{2^k}.$$

Montrer qu'il s'agit de normes sur $\mathbb{R}[X]$ et les comparer.

Exercice 12 :

On note L le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications lipschitziennes de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$, et E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.

1. Dire pourquoi E est un sous-espace vectoriel de L.
2. Montrer que l'application $N : L \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in L, \quad N(f) = |f(0)| + \sup_{\substack{(x,y)\in[0,1]^2 \\ x\neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|}$$

est une norme sur L, et qu'elle n'est pas équivalente à la norme $\|.\|_\infty$.

3. Montrer que $N_1 : E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f \in E, \quad N_1(f) = |f(0)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)|$$

est une norme sur E et qu'elle coïncide avec N sur E.

Exercice 13 :

Soit E un espace vectoriel normé.

a) Soient $a, a' \in E$ et $r, r' > 0$.

Montrer que $B(a,r) + B(a',r') = B(a+a', r+r')$.

b) Soit $a \in E, r > 0$ et $\lambda \neq 0$. Montrer que $\lambda B(a,r) = B(\lambda a, |\lambda| r)$.

Exercice 14 :

Soit $(E, ||)$ un espace vectoriel normé, $a, a' \in E$ et $r, r' \in R_+$. Montrer que :

$$B_f(a,r) \subset B_f(a',r') \iff ||a'-a|| \leq r'-r$$

et

$$B(a,r) \subset B(a',r') \iff ||a'-a|| \leq r'-r$$

Exercice 15 :

Montrer que l'ensemble

$$A = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in R^n \text{ tq } \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour tout } i \neq j\}$$

est un ouvert de R^n.

Exercice 16 :

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E.

a) Montrer que son adhérence $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b) Montrer que, si $\overset{\circ}{F} \neq \emptyset$, alors $F = E$.

Exercice 17 :

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E. Montrer que $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$ sont des parties convexes de E.

Exercice 18 :

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de vecteurs telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \text{ est colinéaire à } v_n, \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell_u, \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell_v.$$

Montrer que les vecteurs ℓ_u et ℓ_v sont colinéaires. (on pourra raisonner par l'absurde et compléter alors (ℓ_u, ℓ_v) en une base de E.)

Exercice 19 :

Soient $A, P \in \mathcal{M}_p(C)$ telles que : $\lim_{n\to+\infty} A^n = P$. Montrer que $AP = PA = P$ et que $P^2 = P$.

Exercice 20 :

Soit $B \in \mathcal{M}_p(R)$ une matrice antisymétrique, telle que la suite $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice C. Que peut-on dire de C ?

Exercice 21 :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

a) Montrer que si la suite $((AB)^n)$ tend vers 0, il en est de même de la suite $((BA)^n)$.

b) Montrer que, si A et B commutent, si la suite (A^n) tend vers P et la suite (B^n) vers Q, alors P et Q commutent.

c) Montrer que si (A_n) est une suite de matrices inversibles qui converge vers A et si la suite (A_n^{-1}) converge vers B, alors A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

d) Est-il possible de trouver une suite (A_n) de matrices inversibles qui converge et telle que la suite (A_n^{-1}) diverge ?

Exercice 22 :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie, et u un endomorphisme de E tel que :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose : $v_n = \frac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u^k$.

a) Simplifier $v_n \circ (u - Id_E)$.

b) Montrer que

$$A = \mathrm{Ker}(u - Id_E) \oplus \mathrm{Im}(u - Id_E).$$

c) En déduire que, pour tout $x \in E$: $\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = p(x)$, où p est la projection sur $\mathrm{Ker}(u - Id_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - Id_E)$.

d) Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E ; on note, pour $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$, puis on définit :

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), N(f) = \sum_{i=1}^{n} \|f(e_i)\|_\infty.$$

Montrer que l'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{L}(E)$, et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers p au sens de cette norme.

Exercice 23 :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à diagonale strictement dominante, c'est-à-dire :

$$\forall i \in [1;n], |a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

On rappelle que la matrice A est inversible. En conséquence, pour tout $B \in \mathbb{R}^n$, l'équation $AX = B$ a une solution unique $X \in \mathbb{R}^n$.

On note $D = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^n$, et $(X_p)_{p\in\mathbb{N}}$ la suite de $\mathbb{R}^n$ définie par récurrence par :

$$\forall p \in \mathbb{N}, DX_{p+1} = (D - A)X_p + B.$$

Prouver que la suite (X_p) converge vers la solution de l'équation $AX = B$.

Exercice 24 :

Étudier les limites en $(0,0)$ des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ b) $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ c) $f(x,y) = \frac{x^3}{y}$

d) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$ e) $f(x,y) = \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 25 :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue.

Exercice 26 :

Soient $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon $R > 0$.

a) Montrer qu'il existe deux points A et B de $\mathscr{C}$ diamétralement opposés tels que $g(A) = g(B)$.

b) Montrer qu'il existe deux points C et D de C, se déduisant l'un de l'autre par un quart de tour tels que $g(C) = g(D)$.

Exercice 27 :

Soit f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum.

Exercice 28 :

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé et f l'application définie sur E par :

$$\forall x \in E, f(x) = \frac{x}{1 + \|x\|^2}.$$

a) Montrer que f est continue de E dans E pour la norme $\|.\|$.

b) Montrer que : $f(E) = B_f(0, \frac{1}{2})$.

Exercice 29 :

Soit E un espace vectoriel normé, et $a \in E$, non nul. On note f l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in E, f(x) = \begin{cases} \|x - a\| & \text{si } \|x\| \leq \|a\| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en a.

b) Montrer que f n'est pas continue en $-a$ (considérer par exemple la suite (x_n) donnée par $x_n = -\left(1 + \frac{1}{n}\right) a$).

Exercice 30 :

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|.\|_1$ et on considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (ay, bx).$$

Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 31 :

Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $u \in L(E,F)$. Démontrer l'équivalence :

$$u \text{ continue} \iff \begin{cases} \text{pour toute suite } (x_n) \text{ d'éléments de } E \text{ qui} \\ \text{converge vers } 0_E, \text{la suite } (u(x_n)) \text{ est bornée.} \end{cases}$$

Exercice 32 :

Soit $E = \mathscr{C}([0;1], \mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$.

Soit T l'endomorphisme de E qui à toute $f \in E$ associe sa primitive $T(f)$ qui s'annule en 0.

Montrer que T est un endomorphisme continu de E.

Exercice 33 :

On note E l'espace vectoriel des suites réelles bornées muni de la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall x \in E, \|x\|_\infty = \sup_{n \geq 0} |x_n|.$$

On définit l'opérateur de différence Δ sur E par :

$$\forall x \in E, \Delta(x) = y \quad \text{avec :} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ y_n = x_{n+1} - x_n.$$

Montrer que Δ est linéaire et continue pour $\|.\|_\infty$.

Exercice 34 :

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme $\|.\|_\infty$ ($\|\sum a_i X^i\|_\infty = \max(|a_i|)$). Étudier la continuité des applications linéaires :

a) $f_0 : P \mapsto P(x_0)\,(x_0 \in \mathbb{R})$; b) $f_1 : P \mapsto P'$;
c) $f_2 : P \mapsto (X-1)P$.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★★