FEUILLE D'EXERCICES N°5

DÉTERMINANTS

Exercice 1 :

Calculer les déterminants des matrices suivantes (on les mettra sous forme factorisée si possible) :

a) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^2 & b^2 \\ 1 & a^2 & 0 & c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} b+c+d & a+c+d & a+b+d & a+b+c \\ b^2+c^2+d^2 & a^2+c^2+d^2 & a^2+b^2+d^2 & a^2+b^2+c^2 \\ b^3+c^3+d^3 & a^3+c^3+d^3 & a^3+b^3+d^3 & a^3+b^3+c^3 \\ b^4+c^4+d^4 & a^4+c^4+d^4 & a^4+b^4+d^4 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix}$

Réponses :

a) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$

b) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a-b+c-d)(a-b-c+d)$

c) $-3abcd(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$ (utiliser un produit de matrices)

Exercice 2 :

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}$$

Exercice 3 :

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 4 :

Calculer le déterminant d'ordre $n+1$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

Exercice 5 :

Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n(a,b) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 6 :

Déterminant de Zorro

$$Z_4=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&1&0\end{vmatrix},\quad Z_5=\begin{vmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1\\1&1&1&1&0\end{vmatrix},$$

$$Z_n=\begin{vmatrix} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1\\ 1 & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & & \\ & & & \iddots & & & \\ & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & & 1\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \end{vmatrix}$$

(les termes non écrits valent 0).

Exercice 7 :

Déterminant d'une matrice compagnon

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ a_2 & 0 & x & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

Exercice 8 :

Utilisation de la factorisation de polynômes

1. En le considérant comme un polynôme en a, calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ b & a & d & c\\ c & d & a & b\\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

2. Soit $x \in \mathbb{C}$. Déterminer les cas d'annulation du déterminant suivant, puis le calculer en fonction de x :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1-x & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1\\ 1 & \cdots & 1 & n-1-x & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & n-x \end{vmatrix}$$

3. Même question avec :

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & a_2 & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n & x \end{vmatrix}$$

Exercice 9 :

Généralisation de Vandermonde

1. Les $F_k (1 \leq k \leq n-1)$ étant des polynômes normalisés de degrés respectifs k, calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & F_1(x_1) & \cdots & F_{n-1}(x_1)\\ 1 & F_1(x_2) & \cdots & F_{n-1}(x_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & F_1(x_n) & \cdots & F_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

2. Application 1 : calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos(a_0) & \cos(2a_0) & \cdots & \cos(na_0)\\ 1 & \cos(a_1) & \cos(2a_1) & \cdots & \cos(na_1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 1 & \cos(a_n) & \cos(2a_n) & \cdots & \cos(na_n) \end{vmatrix}$$

3. Application 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_1, \dots, x_n$ n nombres entiers. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [1:n]^2$, on ait : $a_{ij} = C_{x_j}^{i-1}$. Calculer $\det A$, et en déduire que le nombre

$$\frac{\prod_{1\leq i<j\leq n} (x_i - x_j)}{\prod_{1\leq i<j\leq n} (i-j)} \in \mathbb{Z}$$

est un nombre entier.

Exercice 10 :

Déterminant de Cauchy. Soient $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ deux familles de scalaires vérifiant : $a_i + b_j \neq 0$ pour tout $(i,j) \in [1:n]^2$.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$, avec $a_{ij} = \frac{1}{a_i+b_j}$. Calculer $\det A$ (retrancher la première ligne toutes les autres, puis la première colonne à toutes les autres).

En déduire le déterminant de Hilbert, c'est-à-dire celui de A avec $a_{ij} = \frac{1}{i+j}$.

Exercice 11 :

Montrer que le déterminant d'une matrice antisymétrique d'ordre impair est nul.

Exercice 12 :

1. Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille des polynômes $(X-a_0)^n, (X-a_1)^n, \dots, (X-a_n)^n$ forme une base de $C_n[X]$ (utiliser le déterminant de Vandermonde ; une autre démonstration de ce résultat a été proposée dans la feuille n^e)

2. Plus généralement, montrer que, si $P \in C_n[X]$, avec $\deg P = n$, la famille des polynômes $P(X-a_i)$, $0 \leq i \leq n$, forme une base de $C_n[X]$ (on pourra utiliser la formule de Taylor).

Exercice 13 :

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que, si $p \neq n$, $\det AB = 0$ ou $\det BA = 0$.

2. Montrer que : $\det(I_n - AB) = \det(I_p - BA)$ (on pourra utiliser un produit par blocs judicieux).

Exercice 14 :

1. Soit $A \in M_n(K)$ et $(a,b,c,d) \in K^4$. Calculer le déterminant de la matrice d'ordre $2n$:

$$\begin{bmatrix} aA & bA \\ cA & dA \end{bmatrix}$$

2. Soient $A, B \in M_n(K)$. Montrer que :

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A+B)\det(A-B).$$

3. Soient $A, B, C, D \in M_n(K)$ telles que $CD = DC$. Montrer que :

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - BC)$$

(commencer par examiner le cas où D est inversible, en utilisant un produit par blocs). Donner un contre-exemple si on ne suppose plus $CD = DC$.

Exercice 15 :

Soient $A, B \in M_n(C)$, telles que $AB = BA$ et B nilpotente. Montrer que $\det(A+B) = \det A$ (on pourra commencer par traiter le cas où $A = I_n$, puis le cas où A est inversible).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆⋆