Devoir Libre N°3

Date de rendu : sous 1 semaine

CONSIGNES GÉNÉRALES

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Le sujet se compose d'un seul problème.

Problème 1 : Racines carrées d'endomorphismes

Notations et objectifs

Dans tout ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E est un espace vectoriel de dimension fine n sur le corps $\mathbb{R}$ des nombre réels. $\mathcal{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E et $GL(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui sont bijectifs. On note 0 l'endomorphisme nul et id l'application identité. Pour tout endomorphisme f, Ker (f) et Im (f) désigneront respectivement le noyau et l'image de f. L'ensemble des valeurs propres de f sera noté Sp(f) et on notera :

$$\mathcal{R}(f) = \{h \in \mathcal{L}(E) | h^2 = f\}.$$

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace des polynômes à coefficients réels.

Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ donné par $P(X) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k x^k$, on définit $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^{\ell} a_k f^k$$

où $f^0 = \text{id}$ et pour $k \in \mathbb{N}^*, f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ fois}}$.

Si $f_1, \ldots, f_q$ désignent q endomorphismes de E ($q \in \mathbb{N}^*$) alors $\prod_{1 \leq i \leq q} f_i$ désignera l'endomorphisme $f_1 \circ \cdots \circ f_q$.

Pour tout entier p non nul, $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désigne l'espace des matrices carrées à p lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. I_p est la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. L'objectif du problème est d'étudier des conditions nécessaires ou suffisantes à l'existence de racines carrées d'un endomorphisme f et de décrire dans certains cas l'ensemble $\mathcal{R}(f)$.

Partie 1.1

Soient f et J les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ dont les matrices respectives A et J dans la base canonique sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer J^m pour tout entier $m \geq 1$.
2. En déduire que pour tout $m \in \mathbb{N}^*, f^m = \text{id} + \frac{1}{3}(4^m - 1)J$. Cette relation est-elle encore valable pour $m = 0$?
3. Montrer que f admet deux valeurs propres distinctes λ et μ telles que $\lambda < \mu$.
4. Montrer qu'il existe un unique couple (p, q) d'endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout entier $m \geq 0, J^m = \lambda^m p + \mu^m q$ et montrer que ces endomorphismes p et q sont linéairement indépendants.

5. Après avoir calculé $p^2, q^2, p \circ q$ et $q \circ p$, trouver tous les endomorphismes h, combinaisons linéaires de p et q qui vérifient $h^2 = f$.
6. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f. Ecrire la matrice D de f, puis la matrice de p et de q dans cette nouvelle base.
7. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $K^2 = I_2$, puis une matrice Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonale telle que $Y^2 = D$.
8. En déduire qu'il existe un endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ qui n'est pas combinaison linéaire de p et q.
9. Montrer que tous les endomorphismes h de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $h^2 = f$ sont diagonalisables.

Partie 1.2

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et deux endomorphismes non nuls p et q de E tels que :

$$\lambda \neq p \text{ et } \begin{cases} \text{id} = p + q \\ f = \lambda p + \mu q \\ f^2 = \lambda^2 p + \mu^2 q. \end{cases}$$

1. Calculer $(f - \lambda\text{id}) \circ (f - \mu\text{id})$. En déduire que f est diagonalisable.
2. Montrer que λ et μ sont valeurs propres de f et qu'il n'y en a pas d'autres.
3. Déduire de la relation trouvée dans la question 1) que $p \circ q = q \circ p = 0$ puis montrer que $p^2 = p$ et $q^2 = q$.
4. On suppose jusqu'à la fin de cette partie que $\lambda\mu \neq 0$. Montrer que f est un isomorphisme et écrire f^{-1} comme combinaison linéaire de p et q.
5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$:
$$f^m = \lambda^m p + \mu^m q.$$
6. Soit F le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par p et q. Déterminer la dimension de F.
7. On suppose dans la suite de cette partie que λ et μ sont strictement positifs. Déterminer $R(f) \cap F$.
8. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Déterminer une matrice K de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ non diagonale et vérifiant $K^2 = I_k$.
9. Montrer que si l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est supérieur ou égal à 2, alors il existe un endomorphisme $p' \in L(E) \backslash F$ tel que $p'^2 = p$ et $p' \circ q = q \circ p' = 0$.
10. En déduire que si $\dim(E) \geq 3$, alors $R(f) \not\subset F$.

Partie 1.3

Soient $p_1, \ldots, p_m, m$ endomorphismes non nuls de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, m$ nombres réels distincts. Soit f un endomorphisme de E vérifiant pour tout entier $k \in \mathbb{N}$:

$$f^k = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k p_i.$$

1. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(f) = \sum_{i=1}^{m} P(\lambda_i)p_i.$$

2. En déduire que $\prod_{i=1}^{m}(f - \lambda_i \mathrm{id}) = 0$, puis que f est diagonalisable.

3. Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq m$, on considère le polynôme :

$$L_\ell(X) = \prod_{\substack{1\leq i\leq m \\ i\neq \ell}} \frac{(X - \lambda_i)}{(\lambda_\ell - \lambda_i)}.$$

Montrer que pour tout entier ℓ, tel que $1 \leq \ell \leq m$, on a $p_\ell = L_\ell(f)$. En déduire que $\mathrm{Im}(p_\ell) \subset \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{id})$, puis que le spectre de f est :

$$Sp(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}.$$

4. Vérifier que pour tout couple d'entiers (i, j) tels que $1 \leq i, j \leq m$, on a :

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j. \end{cases}$$

5. Justifier le fait que la somme $\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ker}\,(f - \lambda_i)$ est directe et égale à E et que les projecteurs associés à cette décomposition de E sont les p_i.

6. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ engendré par $\{p_1, \ldots, p_m\}$. Déterminer la dimension de F.

7. Déterminer $R(f) \cap F$ dans le cas où $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ sont des réels positifs ou nuls.

8. Dans cette question, on suppose de plus que $m = n$.
   a. Préciser alors la dimension des sous-espaces propres de f.
   b. Montrer que si $h \in R(f)$, tout vecteur propre de f est également vecteur propre de h.
   c. En déduire que $R(f) \subset F$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur les λ_i pour que $R(f)$ soit non vide.

9. Montrer que si $m < n$ et si tous les λ_i sont positifs ou nuls, alors $R(f) \not\subset F$.

Partie 1.4

A) Soit f un endomorphisme non nul de E tel qu'il existe un entier $p > 1$ tel que $f^p = 0$ et $f^{p-1} \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ non nul tel que la famille $(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{p-1}(x))$ est libre. En déduire que $p \leq n$ et que $f^n = 0$.

2. Montrer que si $R(f) \neq \emptyset$, alors $2p - 1 \leq n$.

3. Déterminer les réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $\sqrt{1+x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + O(x^n)$ au voisinage de 0. Dans la suite, P_n désigne le polynôme défini par $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$.
4. Montrer qu'il existe une fonction η bornée au voisinage de 0 telle que l'on ait $P_n^2(x) - x - 1 = x^n \eta(x)$. En déduire que X^n divise $P_n^2 - X - 1$.
5. Montrer alors que $R(f + id) \neq \emptyset$.
   Plus généralement, montrer que pour tout réel α réel, $R(\alpha f + id) \neq \emptyset$, puis que pour tout β réel strictement positif, $R(f + \beta id) \neq \emptyset$.

B)

1. Soit $T = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ une matrice triangulaire supérieure de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à un réel λ.
   Montrer que $(T - \lambda I_n)^n = 0$.
2. On suppose dans toute la suite que f est un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé et qui n'admet qu'une seule valeur propre λ. Déduire de la question précédente que $E = \mathrm{Ker}\,(f - \lambda id)^n$.
3. Montrer que si $\lambda > 0$ alors $R(f) \neq \emptyset$.

Fin du Devoir libre

Bon courage !