Corrigé de l'exercice et problèmes d'algèbre linéaire N°1

Exercice 1 Racine carrée d'une matrice

On désigne par f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -7 \\ -8 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & -7 \\ -8 & -4-\lambda & 8 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-4)$.
   Ainsi, $\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1, 4\}$.
2. La résolution des systèmes $(A - \lambda I_3)X = 0$ pour $\lambda \in \{0, 1, 4\}$ montre que
   $\ker(f) = \mathrm{Vect}(v_1)$ avec $v_1 = (1, -2, 0)$,
   $\ker(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v_2)$ avec $v_2 = (1, 0, 1)$,
   $\ker(f - 4\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v_3)$ avec $v_3 = (1, -1, 0)$.
   Et on vérifie que la famille (v_1, v_2, v_3) est effectivement une base de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle est libre.
   Dans cette base, la matrice D est donnée par : $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.
3. La formule de changement de base donne : $A = P \times D \times P^{-1}$, et donc $A^m = P \times D^m \times P^{-1}$.
4. En utilisant par exemple la méthode du pivot de Gauss, on trouve :
   $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
   Après calculs, on trouve que la matrice de f^m dans la base canonique est :

$$A^m = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^m \end{pmatrix} \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 \times 4^m & 4^m & 1 - 2 \times 4^m \\ -2 \times 4^m & -4^m & 2 \times 4^m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier, on vérifie que cela redonne A pour $m = 1$.

5. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}$ une matrice qui commute avec D. On écrit que $MD = DM$, ce qui donne $m_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Donc nécessairement, M est une matrice diagonale.

   Réciproquement, toute matrice diagonale commute avec D qui est elle-même diagonale.

   Finalement, les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.
6. On a $HD = DH = H^3$, donc H et D commutent.
7. D'après les questions 5) et 6), si $H^2 = D$, alors H est une matrice diagonale. La condition $H^2 = D$ donne également :

   $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 \end{pmatrix}$ (ce qui fournit 4 solutions).

   Pour obtenir les matrices solutions dans la base canonique, on effectue un changement de base : les matrices solutions sont données par $P \times H \times P^{-1}$, où H est l'une des 4 solutions précédentes. Après calculs, on obtient à nouveau 4 solutions, qui sont :

   $\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\pm \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -4 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problème 1

Partie 1.1 La condition (C1) implique (C2)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n. On suppose que f est échangeur et on se donne donc une décomposition $E = F \oplus G$ dans laquelle F et G sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $f(F) \subset G$ et $f(G) \subset F$. On se propose de montrer que f vérifie la condition (C2).

1. Si F est nul, alors $G = E$ et $\Im(f) = f(G) \subset F = \{0\}$. f est donc l'endomorphisme nul qui vérifie immédiatement (C2). On fait la même chose si $G = \{0\}$ (travailler alors avec $F = E$).

   On suppose dans la suite de cette partie que $F \neq \{0\}$ et $G \neq \{0\}$, et que $\dim F = p$ et $\dim G = q$.
2. Puisque $E = F \oplus G$ alors $\dim E = \dim F + \dim G$ donc $n = p + q$.
3. Soient $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Montrons que $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Puisque B est de cardinal $n = \dim E$ il suffit de montrer qu'elle est libre. Pour cela soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. Donc $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i \in$

$F = -\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i \in G$ ce qui implique que les vecteurs $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $\sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$ sont tous les deux dans $F \cap G = \{0\}$ (puisque F et G sont supplémentaires).
Par suite $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i = 0$.
Or $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ sont libres donc $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.
Autrement : Tout élément x s'écrit sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$ qui s'écrivent à leur tour dans les bases de F et G sous les formes $x_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $x_2 = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$ donc $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ ce qui assure que la famille est génératrice minimale donc base de E.

4. $f(F) \subset G$ indique qu'il y a un bloc de 0 en haut à gauche puisque $\forall j = 1, \dots, p$; $f(e_j) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_{ij} e_i$.
   $f(G) \subset F$ indique qu'il y a un bloc de 0 en bas à droite puisque $\forall j = p+1, \dots, n$; $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_{ij} e_i$.
   Finalement $\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$.
5. $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(0_p) + \mathrm{Tr}(0_q) = 0$.
6. Soient $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice $M = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ A & 0_q \end{pmatrix}$.
   Un calcul par blocs montre que $\begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix}^2 = 0_n$ et de même $\begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,q} \\ A & 0_q \end{pmatrix}^2 = 0_n$.
   M est somme de deux matrices de carré nul.
7. Soit u et v les endomorphismes de E tels que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 0_p & 0_{p,q} \\ A & 0_q \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} 0_p & B \\ 0_{q,p} & 0_q \end{pmatrix}$ alors u et v sont de carré nul et vérifient $f = u + v$.

Partie 1.2 La condition (C2) implique (C1)

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie n.
Dans cette partie, on suppose qu'il existe deux endomorphismes u et v de E tels que $f = u + v$ et $u^2 = v^2 = 0$.

1. Si $x \in \Im(u)$, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$ et donc $u(x) = u^2(y) = 0$. Ainsi $x \in \ker(u)$.
   Par théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\ker(u)) + \dim(\Im(u)) \leq 2\dim(\ker(u))$.
   On a donc $\Im(u) \subset \ker(u)$ et $\dim(\ker(u)) \geq \dim(E)/2$.
   u et v jouent le même rôle donc $\Im(v) \subset \ker(v)$ et $\dim(\ker(v)) \geq \dim(E)/2$.
2. Dans cette question on suppose que f est un automorphisme.

(a) Soit $x \in \ker(u) \cap \ker(v)$. On a $f(x) = u(x) + v(x) = 0$ et comme f est injective $x = 0$.

Ceci montre que $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$.

D'autre part $\dim \ker(u) \oplus \ker(v) = \dim \ker(u) + \dim \ker(v) \geq \dim(E)/2 + \dim(E)/2 = \dim E$ donc $E = \ker(u) \oplus \ker(v)$.

De plus $\Im(u) \subset \ker(u)$ (car $u^2 = 0$) et $\Im(v) \subset \ker(v)$ (car $v^2 = 0$). $\ker(u) \cap \ker(v) = \{0\}$ entraîne ainsi $\Im(u) \cap \Im(v) = \{0\}$.

Mais on a aussi $\forall x \in E$, $x = f(f^{-1}(x)) = u(f^{-1}(x)) + v(f^{-1}(x)) \in \Im(u) + \Im(v)$ et donc $E = \Im(u) + \Im(v)$ et finalement $E = \Im(u) \oplus \Im(v)$.

Si l'une des inclusions $\Im(u) \subset \ker(u)$ ou $\Im(v) \subset \ker(v)$ était stricte, on aurait $\dim(E) = \dim(\Im(u)) + \dim(\Im(v)) < \dim(\ker(u)) + \dim(\ker(v)) = \dim(E)$ ce qui est une contradiction. Les inclusions sont donc des égalités.

$\Im(u) = \ker(u)$ et $\Im(v) = \ker(v)$.

(b) On a $f(\ker(u)) \subset u(\ker(u)) + v(\ker(u)) = v(\ker(u)) \subset \Im(v) = \ker(v)$ et de même $f(\ker(v)) \subset \ker(u)$. Comme $\ker(u)$ et $\ker(v)$ sont supplémentaires, f est échangeur.

3. Posons $N_k = \ker(f^k)$ et $I_k = \Im(f^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrons que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante :

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $x \in N_k = \ker(f^k)$ alors $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0$ et donc $x \in \ker(f^{k+1}) = N_{k+1}$. Ainsi $N_k \subset N_{k+1}$ et $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croît pour l'inclusion.

Montrons que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion :

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $y \in I_{k+1} = \Im(f^{k+1})$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$ et donc $y = f^k(f(x)) \in \Im(f^k) = I_k$. Ainsi $I_{k+1} \subset I_k$ et $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ décroît pour l'inclusion.

(b) La suite de terme général $d_k = \dim(N_k)$ est donc aussi croissante. Or, elle est majorée (par $\dim(E)$). Elle est donc convergente. Comme elle est constituée d'entiers, elle finit par stationner. En notant p le rang à partir duquel la suite stationne, on a $\forall k \geq p$, $\dim N_k = \dim N_p$ et comme $\forall k \geq p$, $N_p \subset N_k$ on peut conclure que $\exists p \in \mathbb{N}/\forall k \geq p$, $N_k = N_p$.

En appliquant le théorème du rang on a $\forall k \geq p$, $\dim I_k = \dim I_p$ et comme $\forall k \geq p$, $I_k \subset I_p$ on peut conclure que $\exists p \in \mathbb{N}/\forall k \geq p$, $I_k = I_p$.

(c) Par le théorème du rang on a $\dim N_p + \dim I_p = \dim E$.

Soit $x \in N_p \cap I_p$ alors $f^p(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$; ceci entraîne $y \in N_{2p} = N_p$ donc $x = f^p(y) = 0$ par suite $E = N_p \oplus I_p$ et comme $\ker(f^{2p}) = N_{2p} = N_p$ et $\Im(f^{2p}) = I_{2p} = I_p$ on a $E = \ker(f^{2p}) \oplus \Im(f^{2p})$.

4. On suppose dans la suite que f n'est pas un automorphisme et on pose $F = \ker(f^{2p})$ et $G = \Im(f^{2p})$.

(a) f et f^{2p} commutent donc F et G sont stables par f.

(b) Pour tout $x \in F$ on a $f_F^{2p}(x) = f^{2p}(x) = 0$ donc $f_F^{2p} = 0$ ce qui montre que f_F est nilpotente.

Si $x \in \ker f_G$ alors $x \in G$ et $f(x) = 0$, donc $x \in F \cap G = \{0\}$ par suite $x = 0$. Ceci montre que f_G est un endomorphisme injectif d'espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un automorphisme.

(c) $f^2 = u^2 + u \circ v + v \circ u + v^2 = u \circ v + v \circ u$. Ainsi $u \circ f^2 = u \circ v \circ u = f^2 \circ u$.
On procède de même avec $f^2 \circ v$.

(d) Comme u commute avec f^2, il commute avec toutes les itérées de f^2 et donc avec f^{2p}. Donc $G = \Im(f^{2p})$ est stable par u et de même il est stable par v. u_G et v_G sont ainsi des endomorphismes de G et $u_G^2 = 0$ (idem pour v).

(e) La restriction f_F de f à F est nilpotente ; et la restriction f_G de f à G est inversible. D'après le résultat admis, il existe une décomposition $F = F_1 \oplus F_2$ telle que $f(F_1) \subset F_2$ et $f(F_2) \subset F_1$.
Avec la question précédente, f_G vérifie (C2) et comme c'est un automorphisme, le résultat de la question II.2 s'applique. Il existe une décomposition $G = G_1 \oplus G_2$ telle que $f(G_1) \subset G_2$ and $f(G_2) \subset G_1$.
En posant $H_1 = F_1 \oplus G_1$ et $H_2 = F_2 \oplus G_2$ (le caractère direct des sommes découle de $F \oplus G$), on a alors $E = H_1 \oplus H_2$ et $f(H_1) \subset H_2$, $f(H_2) \subset H_1$. Ainsi f est échangeur.

Problème 2

Partie 2.1 Forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Découle de la linéarité de la trace.
2. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ définie par $A \mapsto \varphi_A$ où $\varphi_A(X) = \mathrm{Tr}(AX)$.
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in K$, $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi_{A+\lambda B}(X) = \mathrm{Tr}((A+\lambda B)X) = \mathrm{Tr}(AX) + \lambda \mathrm{Tr}(BX) = (\varphi_A + \lambda\varphi_B)(X)$.
Donc φ est linéaire.
$A \in \ker(\varphi) \Rightarrow \varphi_A = 0 \Rightarrow \forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AX) = 0 \Rightarrow \mathrm{Tr}(A^tA) = 0 \Rightarrow A = 0$.
Donc φ est injective et puisque $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^* = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$ alors φ est un isomorphisme.
3. Du fait que φ est un isomorphisme, on déduit que pour toute forme linéaire f sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f = \varphi_A$, donc $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.
4. Soit f un élément de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*$ tel que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $f(MN) = f(NM)$.

   (a) D'après le résultat de la question précédente il existe une unique matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

   (b) Pour tout $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $f(MN) = f(NM) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(AMN) = \mathrm{Tr}(ANM) \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(AMN) = \mathrm{Tr}(MAN)$.
   Donc d'après l'injectivité de φ on a $MA = AM$.

(c) Pour $M = (a_{ij})$ et (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $E_{ij}M = \sum_l a_{jl}E_{il}$ et $ME_{ij} = \sum_k a_{ki}E_{kj}$.
En identifiant terme à terme on obtient $\forall i \neq j$, $a_{ii} = a_{jj} = \lambda$, $a_{ij} = 0$.
Donc $A = \lambda I_n$.

(d) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(M) = \mathrm{Tr}(AM) = \lambda \mathrm{Tr}(M)$ donc $f = \lambda \mathrm{Tr}$.

Partie 2.2 Hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc H est le noyau d'une forme linéaire non nulle f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, or pour une telle forme linéaire il existe une matrice non nulle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $f(M) = \mathrm{Tr}(AM)$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ donc $H = \ker f = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \mathrm{Tr}(AM) = 0\}$.
2. Soit x un réel et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(I_n + xE_{ij}) = 1 \Rightarrow I_n + xE_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
3. On suppose que $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \emptyset$. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
$\forall x \in \mathbb{R}$, $I_n + xE_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $I_n + xE_{ij} \notin H \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Tr}(A(I_n + xE_{ij})) \neq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $x\mathrm{Tr}(AE_{ij}) + \mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
4. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ si $\mathrm{Tr}(AE_{ij}) \neq 0$ alors $x\mathrm{Tr}(AE_{ij}) + \mathrm{Tr}(A)$ s'annule pour $x = -\mathrm{Tr}(A)/\mathrm{Tr}(AE_{ij})$ ce qui contredit le résultat précédent donc $\mathrm{Tr}(AE_{ij}) = 0$ par suite, $E_{ij} \in H$.
5. $J = E_{n1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} \in H$ comme combinaison linéaire des éléments de H.
6. On développant $\det J$ par rapport à la première colonne il vient $\det(J) = 1$.
J est donc une matrice inversible dans H absurde, donc $H \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \neq \emptyset$.

Partie 2.3 Hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit

1. D'après le cours, puisque H est un hyperplan et $I_n \notin H$ on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus H$.
2. Soit la projection p sur $\mathrm{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.
Soit $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On utilise la décomposition en somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(I_n) \oplus H$:
$\exists \lambda_1 \in K, \exists A_1 \in H$, $M = \lambda_1 I_n + A_1$ avec $p(M) = \lambda_1 I_n$.
$\exists \lambda_2 \in K, \exists A_2 \in H$, $N = \lambda_2 I_n + A_2$ avec $p(N) = \lambda_2 I_n$.
Il vient $MN = \lambda_1\lambda_2 I_n + \lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_1 + A_1A_2$, car H est stable pour la multiplication matricielle, donc $A_1A_2 \in H$.
On en déduit que $p(MN) = \lambda_1\lambda_2 I_n = p(M)p(N)$.
D'où $\forall (M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $p(MN) = p(M)p(N)$.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^2 \in H$. La décomposition $M^2 = 0 + M^2$ avec $0 \in \mathrm{Vect}(I_n)$ et $M^2 \in H$ donne $p(M^2) = 0$.
   D'après la question 2., on a $0 = p(M^2) = p(M)^2$. Notons $M = \lambda I_n + A$ avec $\lambda \in K$, $A \in H$, alors $p(M) = \lambda I_n$ donc $0 = (\lambda I_n)^2 = \lambda^2 I_n$ donc $\lambda = 0$. On en déduit que $p(M) = 0$ puis $M \in H$.
   Ainsi $M^2 \in H \Rightarrow M \in H$.
4. Soit $(i,j) \in [1,n]^2$.
   Premier cas : $i \neq j$. On a $(E_{ij})^2 = 0 \in H$ puisque H est un sous-espace vectoriel.
   D'après la question 3., $E_{ij} \in H$.
   Deuxième cas : $i = j$. Puisque $n \geq 2$, il existe $j \neq i$. H stable par multiplication contient E_{ij} et E_{ji} donc $E_{ii} = E_{ij}E_{ji} \in H$.
   Donc $\forall (i,j)$, $E_{ij} \in H$.
5. On a alors $I_n = \sum E_{ii} \in H$, absurdité puisque $I_n \notin H$.
   Ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{ij}) \subset H \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc $H = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ absurdité.
   Dans les deux cas, contradiction donc $I_n \in H$.

Problème 3 Décompositions de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ en somme directe de deux sous-espaces vectoriels stables par les endomorphismes φ_M

Partie 3.1 Construction de deux sous-espaces non nuls, supplémentaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et stables par tous les endomorphismes φ_M

1. $[A,B] = C, [C,A] = 2A$ et $[C,B] = -2B$.
2. La famille (I_2, A, B, C) est libre et de cardinal $4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, donc c'est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
3. Soit $M = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); \lambda, \alpha, \beta$ et γ étant des complexes.
   (a) Si $\alpha = \beta = \gamma = 0$ alors $M = \lambda I_2$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc
   $$\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); \quad MN = NM\} = \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$
   (b) Supposons que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$, remarquons d'abord que $\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); MN = NM\}$ est le noyau de l'endomorphisme φ_M donc c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrons, ensuite, qu'il est engendré par la famille (I_2, M). Pour cela, soit $N = xI_2 + yA + zB + tC \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. En utilisant la linéarité de φ_M et le

fait que $[X,Y]=0$ chaque fois que les matrices X et Y commutent entre elles et que $[X,Y]=-[Y,X]$, on a :

$$\begin{aligned} MN=NM &\Leftrightarrow \varphi_M(N)=0 \\ &\Leftrightarrow y[M,A]+z[M,B]+t[M,C]=0 \\ &\Leftrightarrow y[\lambda I_2+\alpha A+\beta B+\gamma C,A]+z[\lambda I_2+\alpha A+\beta B+\gamma C,B] \\ &\quad\ +t[\lambda I_2+\alpha A+\beta B+\gamma C,C]=0 \\ &\Leftrightarrow y\left(\beta[B,A]+\gamma[C,A]\right)+z\left(\alpha[A,B]+\gamma[C,B]\right) \\ &\quad\ +t\left(\alpha[A,C]+\beta[B,C]\right)=0 \\ &\Leftrightarrow (y\beta-z\alpha)[B,A]+(y\gamma-t\alpha)[C,A]+(z\gamma-t\beta)[C,B]=0 \\ &\Leftrightarrow (z\alpha-y\beta)C+2(y\gamma-t\alpha)A-2(z\gamma-t\beta)B=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} z\alpha-y\beta=0 \\ y\gamma-t\alpha=0 \\ z\gamma-t\beta=0 \end{cases} \end{aligned}$$

puisque $(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)$ l'un au moins des reels α,β ou γ est non nul , supposons que $\alpha\neq 0$ alors

$$\begin{aligned} MN=NM &\Leftrightarrow \begin{cases} z=y\frac{\beta}{\alpha} \\ t=y\frac{\gamma}{\alpha} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow N=xI_2+yA+y\frac{\beta}{\alpha}B+y\frac{\gamma}{\alpha}C \\ &\Leftrightarrow N=xI_2+\frac{y}{\alpha}(\alpha A+\beta B+\gamma C) \\ &\Leftrightarrow N=xI_2+\frac{y}{\alpha}(M-\lambda I_2)=\left(x-\frac{\lambda y}{\alpha}\right)I_2+\frac{y}{\alpha}M\in \textbf{Vect}(I_2,M) \end{aligned}$$

on fait de meme pour les autres cas , et on deduit que $\{N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C});MN=NM\}\subset\textbf{Vect}(I_2,M)$. Reciproquement I_2 et M sont dans $\{N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C});MN=NM\}$ d'ou l'egalite

$$\{N\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C});MN=NM\}=\textbf{Vect}(I_2,M)$$

D'autre part la famille (I_2,M) est libre , en effet

$$\begin{aligned} aI_2+bM=0 &\Leftrightarrow (a+b\lambda)I_2+b\alpha A+b\beta B+b\gamma C=0 \\ &\Leftrightarrow (a+b\lambda)=b\alpha=b\beta=b\gamma=0 \\ &\underbrace{\Leftrightarrow}_{(\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)} a=b=0 \end{aligned}$$

donc

$$\dim\{N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}); MN = NM\} = 2$$

4. Dans la suite on note $\mathcal{F}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ engendre par la famille (A, B, C), et $\mathbb{C}.I_2$ celui engendre par la matrice I_2 : $\mathbb{C}.I_2 = \{\lambda I_2; \lambda \in \mathbb{C}\}$

   (a) $\dim \mathcal{F} = 3$ puisque la famille (A, B, C), est une sous famille d'une famille libre donc libre .

   (b) Si $X \in \mathbb{C}.I_2 \cap \mathcal{F}$ alors $X = \lambda I_2 = \alpha A + \beta B + \gamma C$ avec $(\lambda, \alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^4$ et puisque (I_2, A, B, C) est libre alors $\lambda = \alpha = \beta = \gamma = 0$ donc $X = 0$ par suite $\mathbb{C}.I_2 \cap \mathcal{F} = \{0\}$, et comme $\dim \mathbb{C}.I_2 + \dim \mathcal{F} = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ on deduit que

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}.I_2 \oplus \mathcal{F}$$

   (c) Soit $M = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

   • Si $X = \lambda I_2 \in \mathbb{C}.I_2$ alors $\varphi_M(X) = 0 \in \mathbb{C}.I_2$ donc $\mathbb{C}.I_2$ est stable par φ.

   • On a $\mathcal{F} = \text{Vect}(A, B, C)$ et $\begin{cases} \varphi_M(A) = \beta[B, A] + \gamma[C, A] = -\beta C + 2\gamma A \in \mathcal{F} \\ \varphi_M(B) = \alpha[A, B] + \gamma[C, B] = \alpha C - 2\gamma B \in \mathcal{F} \\ \varphi_M(C) = \alpha[A, C] + \beta[B, C] = -2\alpha A + 2\beta B \in \mathcal{F} \end{cases}$;

   donc $\mathcal{F}$ est stable par φ_M.

Partie 3.2 F et $\mathbb{C}I_2$ sont les seuls possibles

1. $\varphi_B(A) = -C$ et $\varphi_B(C) = 2B$.

2. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ stable par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que $\mathcal{V}$ contient un element $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C$, avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$; λ, α, β et γ etant des complexes.

   (a) Si $\gamma \neq 0$

      i. $\varphi_C \circ \varphi_A(X) = \varphi_C\left(\beta\varphi_A(B) + \gamma\varphi_A(C)\right) = \varphi_C\left(\beta C - 2\gamma A\right) = -2\gamma\varphi_C\left(A\right) = -4\gamma A$
      Puisque $X \in \mathcal{V}$ et $\mathcal{V}$ est stable par φ_C et φ_A alors $-4\gamma A \in \mathcal{V}$, et comme $\gamma \neq 0$ on deduit que $A \in \mathcal{V}$

      ii. On a $A \in \mathcal{V}$ et $\varphi_B(A) = -C$ donc $C \in \mathcal{V}$ et comme de plus on a $\varphi_B(C) = 2B$ on deduit que $B \in \mathcal{V}$

      iii. On a On a $\mathcal{F} = \text{Vect}(A, B, C)$ et $A, B, C \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$.

   (b)

   • Si $\beta \neq 0$, on montre que $\varphi_A \circ \varphi_C(X) = -2\beta C$, ce qui donne $C \in \mathcal{V}$. Et de $\varphi_A(C) = -2A$ et $\varphi_B(C) = 2B$, on déduit que $A, B \in \mathcal{V}$.

   • Si $\alpha \neq 0$ on montre que $\varphi_B \circ \varphi_B(X) = 2\alpha B$ ce qui donne $B \in \mathcal{V}$ et de $\varphi_A(B) = C$ et $\varphi_A(C) = -2A$ on deduit que $A, C \in \mathcal{V}$. Dans tout les cas on a $A, B, C \in \mathcal{V}$ donc $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$.

3. Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux sous-espaces vectoriels non nuls et supplementaires dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On suppose de plus que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont stables par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

   (a) On suppose qu'il existe $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C \in \mathcal{V}$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$; λ, α, β et γ etant des complexes. D'apres la question precedente on a $\mathcal{F} \subset \mathcal{V}$, et $\dim \mathcal{F} = 3$ donc $\dim \mathcal{V} \geq 3$ est comme $\dim \mathcal{V} + \dim \mathcal{W} = 4$ et $\dim \mathcal{W} \geq 1$ on a $\dim \mathcal{V} \leq 3$ par suite $\dim \mathcal{V} = 3 = \dim \mathcal{F}$ et $\dim \mathcal{W} = 1$ d'ou $\mathcal{V} = \mathcal{F}$.

   Pour montrer que et $\mathcal{W} = \mathbb{C}.I_2$, soit $D = xA + yB + zC + \delta I_2$ un element de $\mathcal{W}$, forcement $\delta \neq 0$. $\mathcal{W}$ etant stable par φ_M, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc $\begin{cases} \varphi_C \circ \varphi_A(D) = -4zA \in \mathcal{W} \Rightarrow z = 0 \\ \varphi_A \circ \varphi_C(D) = -2yC \in \mathcal{W} \Rightarrow y = 0 \\ \varphi_B \circ \varphi_B(D) = -4xB \in \mathcal{W} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$ donc $D = \delta I_2$ par suite $I_2 \in \mathcal{W}$ et comme $\dim \mathcal{W} = 1$ on conclut que $\mathcal{W} = \mathbb{C}.I_2$

   (b) Dans le cas contraire montrer les matrices A, B et C n'appartiennent pas a $\mathcal{V}$, soit $D = xA + yB + zC + \delta I_2$ un element de $\mathcal{V}$ de $\begin{cases} \varphi_C \circ \varphi_A(D) = -4zA \in \mathcal{V} \Rightarrow z = 0 \\ \varphi_A \circ \varphi_C(D) = -2yC \in \mathcal{V} \Rightarrow y = 0 \\ \varphi_B \circ \varphi_B(D) = -4xB \in \mathcal{V} \Rightarrow x = 0 \end{cases}$ on déduit que tout element de $\mathcal{V}$ et de la forme $D = \delta I_2$ donc $\mathcal{V} = \mathbb{C}.I_2$.

   Si $\mathcal{W}$ ne contient pas d'element de la forme $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ alors un raisonnement analogue montre que $\mathcal{W} = \mathbb{C}.I_2$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont supplementaires donc forcement $\mathcal{W}$ contient un element de la forme $X = \lambda I_2 + \alpha A + \beta B + \gamma C$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$ et le resultat de la question precedente permet de conclure que $\mathcal{W} = \mathcal{F}$ et $\mathcal{V} = \mathbb{C}.I_2$.

Fin du Corrigé

That's all folks!!