FEUILLE D'EXERCICES N°2 & 3

APPLICATIONS ET FORMES LINÉAIRES

Rappels et compléments

Exercice 1 :

a) Montrer que l'application φ définie par $\varphi(P) = P + P'$ est un automorphisme de $\mathbb{K}[X]$.

b) En est-il de même de l'application $P \mapsto \psi_\lambda(P) = \lambda P - XP'$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ (discuter) ?

Exercice 2 :

Soit $\Delta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]$ l'application définie par : $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a) Montrer que Δ est un endomorphisme et que pour tout polynôme P non constant $\deg(\Delta(P)) = \deg P - 1$.

b) Déterminer $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\operatorname{Im} \Delta$.

c) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\Delta^n(P) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(X+k)$$

.

d) En déduire que si $\deg P < n$ alors : $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} P(k) = 0$.

Exercice 3 :

Dans $\mathbb{K}_n[X]$, soit u l'application qui a tout polynôme P associe le polynôme $(X-a)[P'(X) + P'(a)] - 2[P(X) - P(a)]$ (où $a \in \mathbb{K}$ est donné).

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$. Déterminer son image et son noyau (on pensera à utiliser une base convenable de $\mathbb{K}_n[X]$).

Exercice 4 :

Dans $\mathbb{K}[X]$, soit φ l'application qui a tout polynôme P associe le polynôme $(1 - nX)P + X^2 P'$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ est donné).

Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$. Est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 5 :

Soit φ l'application qui a tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ associe $\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^{(k)}$.

a) Démontrer que φ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{R}[X]$ et que $\varphi(\mathbb{R}_n[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.

b) En déduire :

$$\forall Q \in \mathbb{R}_n[X] \quad , \quad \exists! P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \text{tq} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} p^{(k)} = Q$$

.

Simplifier alors $Q - Q'$; en déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et déterminer φ^{-1}.

Exercice 6 :

On considère l'application

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto \dfrac{1}{3}(x + 2y + 2z,\ 2x + y - 2z,\ 2x - 2y + z) \end{cases}$$

Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Est-ce un projecteur, une symétrie ? Si oui, en déterminer les éléments caractéristiques.

Exercice 7 :

Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $u \circ p = p \circ u$ si et seulement si Im p et Ker p sont stables par u.

Exercice 8 :

Soient p, q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Montrer que, si p et q commutent, alors $p \circ q$ est un projecteur, et en déterminer l'image et le noyau.

Exercice 9 :

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, tels que $p \circ q = 0$. Soit $r = p + q - q \circ p$.

Montrer que r est un projecteur, et en déterminer l'image et le noyau.

Exercice 10 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = Id_E$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f, et p un projecteur de E tel que Im $p = F$.

Montrer que : $q = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f^k \circ p \circ f^{n-k}$ est un projecteur de E, d'image F

(on pourra remarquer que, pour tout $\ell \in \mathbb{Z}$, $p \circ f^\ell \circ p = f^\ell \circ p$).

Exercice 11 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe un projecteur p de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.

a) Montrer que $u(\text{Ker } p) \subset \text{Im} p$ et Im $p \subset$ Ker u.

b) En déduire $u^2 = 0$.

c) Réciproque ?

Exercice 12 :

Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

a) Montrer que p et q ont même noyau si et seulement si $p \circ q = p$ et $q \circ p = q$.

b) Énoncer une condition nécessaire et suffisante similaire pour que p et q aient même image.

Exercice 13 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $u^2 - 3u + 2Id_E = 0$.

a) Montrer que u est inversible et exprimer son inverse en fonction de u.

b) Montrer que $E = \text{Ker}(u - Id_E) \oplus \text{Ker}(u - 2Id_E)$.

c) On note p (resp. q) le projecteur sur $\text{Ker}(u - Id_E)$ (resp. $\text{Ker}(u - 2Id_E)$) parallèlement à $\text{Ker}(u - 2Id_E)$ (resp. $\text{Ker}(u - Id_E)$).

Montrer que $u = p + 2q$.

d) Calculer u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ puis pour $n \in \mathbb{Z}$ en fonction de p et q.

Exercice 14 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$, tel que $u^3 = u^2 + 2u$. Soient : $E_1 = Ker(u)$, $E_2 = Ker(u + Id_E)$, $E_3 = Ker(u - 2Id_E)$.

a) Montrer que $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$.

b) On note p_1, p_2, p_3 les projecteurs associés à cette somme directe (p_1 projection sur E_1 de direction $E_2 \oplus E_3$, etc...).

Montrer qu'il existe des réels a_n, b_n et c_n, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u^n = a_n p_1 + b_n p_2 + c_n p_3.$$

c) Montrer qu'il existe des réels a'_n, b'_n et c'_n, que l'on déterminera, tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u^n = a'_n Id_E + b'_n u + c'_n u^2.$$

Exercice 15 :

Soient $f_1, \ldots, f_n$ des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant :

$$f_1 + \cdots + f_n = Id_E \text{ et } f_i \circ f_j = 0 \text{ si } i \neq j.$$

a) Montrer que chaque f_i est une projection vectorielle.
b) Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} Imf_i = E$.

Exercice 16 :

Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tels que $u \circ v$ soit un projecteur de rang 2 de $\mathbb{R}^3$.

Comparer $Im(u \circ v)$ et Imu et en déduire $v \circ u = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Exercice 17 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que

$$f + g = Id_E \text{ and } rgf + rgg \leq n.$$

Montrer que f et g sont des projecteurs.

Exercice 18 :

Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :
a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$.
b) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x+y+z, x+y+t, x+z-t)$.
c) $f : C \to C$ définie par $f(z) = z + iz$ (C est ici vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel).

Exercice 19 :

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Montrer que $Im(u+v) \subset Imu+Imv$ et $Keru \cap Kerv \subset Ker(u+v)$.
Montrer par des exemples que ces inclusions peuvent être strictes.

Exercice 20 :

Soit $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ et T l'application définie sur E par :

$$\forall x \in [0; 1],\ T(f)(x) = \int_0^x f(4(t - t^2))\, dt.$$

a) Montrer que T est un endomorphisme de E.
b) Déterminer Ker T.
c) T est-il surjectif ?

Exercice 21 :

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, qui commutent ($u \circ v = v \circ u$).

Montrer que Im u et Ker u sont stables par v.

Exercice 22 :

Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.
a) Montrer que $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} g = \mathrm{Ker} g \oplus \mathrm{Im} f$.
b) Montrer que $f(\mathrm{Im} g) = \mathrm{Im} f$.

Exercice 23 :

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
1. Soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.
Démontrer : $\exists w \in \mathcal{L}(E, F)\ \mathrm{tq}\ u = v \circ w \iff [\mathrm{Im}\, u \subset \mathrm{Im} v]$.
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E, G)$ et $w \in \mathcal{L}(E, F)$.
Démontrer : $\exists v \in \mathcal{L}(F, G)\ \mathrm{tq}\ u = v \circ w \iff [\mathrm{Ker} w \subset \mathrm{Ker} u]$.
(Indication : penser à utiliser le théorème d'isomorphisme).

Exercice 24 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$ tels que $u \circ v = \mathrm{Id}_F$.

Montrer que : $E = \mathrm{Ker} u \oplus \mathrm{Im} v$.

Exercice 25 :

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.

Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) Im $u = \mathrm{Im} u^2$;
(ii) Ker $u = \mathrm{Ker} u^2$;
(iii) $E = \mathrm{Im} u \oplus \mathrm{Ker} u$. Contre-exemple si E n'est pas de dimension finie ?

Exercice 26 :

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant $f^3 = \mathrm{Id}$.

Montrer que : $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = E$.

Exercice 27 :

Soit E un C-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E tel que $f^3 = Id_E$. Pour tout $\lambda \in C$ on note $E_\lambda = Ker(f - \lambda Id_E)$.

Montrer que $E = E_1 \oplus E'_1 \oplus E'_2$.

Exercice 28 :

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim F + \dim G = n$;

(ii) il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Imu = F$ et $Keru = G$.

Exercice 29 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et f un endomorphisme de E. Pour tout $p \in N$, on pose $I_p = Imf^p$ et $N_p = Kerf^p$.

a) Montrer que la suite $(I_p)_{p\geq 0}$ est décroissante (pour l'inclusion) et que la suite $(N_p)_{p\geq 0}$ est croissante.

b) Montrer qu'il existe $s \in N$ tel que $I_{s+1} = I_s$ et $N_{s+1} = N_s$.

c) Soit r le plus petit des entiers s ci-dessus considérés. Montrer que

$$\forall s \geq r, I_s = I_r \text{ et } N_s = N_r.$$

d) Montrer que I_r et N_r sont supplémentaires dans E.

En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice A de u s'écrit, par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix},$$

où A' est une matrice carrée inversible et N une matrice carrée nilpotente.

Exercice 30 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Montrer que $rg(f^2) \leq \frac{n}{2}$.

Exercice 31 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = 0$ et $u + v$ est inversible.

Montrer que $n = rg(u) + rg(v)$.

Exercice 32 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Démontrer l'équivalence suivante :

$$rg(u+v) = rgu + rgv \Longleftrightarrow \begin{cases} Imu \cap Imv = \{0\} \\ et \\ E = Keru + Kerv. \end{cases}$$

Exercice 33 :

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que :

$$|rgu - rgv| \leq rg(u+v) \leq min(\dim E, \dim F, rgu + rgv).$$

Exercice 34 :

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G)$. Établir :

a) $\dim(\mathrm{Im}\ u \cap \mathrm{Ker}\ v) = rg\, u - rg(v \circ u)$.

b) $\dim(\mathrm{Ker}(v \circ u)) \leq \dim(\mathrm{Ker}\ u) + \dim(\mathrm{Ker}\ v)$.

c) $rg\, v + rg\, u - \dim F \leq rg(v \circ u) \leq \min(rg\, u, rg\, v)$.

(Indication : appliquer le théorème du rang à la restriction de v à Im u).

Exercice 35 :

Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On se donne $f \in \mathcal{L}(E, F)$, une famille $(E_i)_{1\le i\le n}$ de sous-espaces vectoriels de E et une famille $(F_j)_{1\le j\le p}$ de sous-espaces vectoriels de F.

a) Montrer que : $f\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^p f(E_i)$.

b) Montrer que si f est injective et si la somme des E_i est directe, alors la somme des $f(E_i)$ est directe.

c) Montrer que : $f^{-1}\left(\sum_{j=1}^p F_j\right) \supset \sum_{j=1}^p f^{-1}(F_j)$. Montrer que cette inclusion peut être stricte.

Donner une condition suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 36 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $f^2 + f \circ g = Id_E$. Montrer que f et g commutent (*on pourra commencer par démontrer que f est bijective*).

Exercice 37 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \ge 1$ et f un endomorphisme nilpotent non nul de E. Soit p le plus petit entier tel que $f^p = 0$.

a) Soit $x \notin \text{Ker } f^{p-1}$.

Montrer que la famille $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

b) En déduire que $f^n = 0$.

c) Soient u, v deux endomorphismes de E tels que $(u \circ v)^n = 0$. Montrer que $(v \circ u)^n = 0$.

Exercice 38 :

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F), v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $w = v \circ u$.

Montrer que w est un isomorphismen si et seulement si : u est injective, v est surjective et $\text{Im}u \oplus \text{Ker } v = F$.

Exercice 39 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

a) On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $\{x, u(x)\}$ est liée.

i) Justifier que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$.

ii) Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$ (on pourra distinguer les cas : (x, y) liée ou (x, y) libre.)

iii) Conclure que u est une homothéite vectorielle.

b) En déduire le centre de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes $v \in \mathcal{L}(E)$ tels que :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), u \circ v = v \circ u.$$

Exercice 40 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts. On considère les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$\forall j \in [0; n], \quad L_j = \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{X - a_i}{a_j - a_i}\right).$$

Déterminer le polynôme $\sum_{j=0}^n a_j^k L_j$ lorsque $k \in [0; n]$, puis pour $k = n + 1$.

Exercice 41 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

Pour $P \in \mathbb{K}[X]$, déterminer le reste dans la division euclidienne de P par $\prod_{i=1}^n (X - a_i)$.

Exercice 42 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ scalaires deux à deux distincts.

Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$, et F le sous-ensemble formé des applications f telles que :

$$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n) = 0.$$

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, et en déterminer un supplémentaire.

Exercice 43 :

On considère $n+1$ nombres complexes deux à deux distincts $x_0, \ldots, x_n$ et $2n+2$ nombres complexes $y_0, y_0', \ldots, y_n, y_n'$.

Montrer qu'il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant :

$$\forall k \in [0; n], \quad H(x_k) = y_k \text{ et } H'(x_k) = y_k'$$

(c'est le polynôme d'interpolation de Hermite).

Exercice 44 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et r un réel > 0 fixé.

Démontrer qu'il existe un et un seul polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P(k) = r^k$ pour tout $k \in [1; n]$, puis calculer $P(n+1)$ (Indication : utiliser un résultat de l'exercice 2).

Exercice 45 :

Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E (pas nécessairement de dimension finie !). Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant H. Montrer que $F = H$ ou $F = E$.

Exercice 46 :

Montrer que les formes linéaires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$\varphi_1(x, y, z) = 2x - y + 2z, \quad \varphi_2(x, y, z) = 3x - 5y + z,$$

$$\varphi_3(x, y, z) = 4x - 7y + z$$

forment une base de $(\mathbb{R}^3)^*$.

Exercice 47 :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall f \in E^*, f(e_1) = \ldots = f(e_n) = 0 \Rightarrow f = 0.$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

Exercice 48 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ une famille de formes linéaires sur E. On suppose qu'il existe un vecteur $x \in E$ non nul tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(x) = 0$.

Montrer que la famille $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est liée dans E^*.

★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★ ★★