Corrigé : Interrogation de cours n°2

1. a) La famille $(0_{\mathbb{R}[X]}, 1, 2+X, 1-X^2)$ est-elle libre ? Justifier.

Démonstration. La famille $(0_{\mathbb{R}[X]}, 1, 2+X, 1-X^2)$ n'est pas libre car elle contient $0_{\mathbb{R}[X]}$.

b) Démontrer que la famille $(X-X^2, X^3-X^5, X)$ est libre. On exige ici l'utilisation de la méthode correspondant à la vérification de la définition de liberté.

Démonstration. Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.
On suppose : $\lambda \cdot (X-X^2) + \mu \cdot (X^3 - X^5) + \nu \cdot X = 0_{\mathbb{R}[X]} (*)$.
Or : $(*) \iff (\lambda+\nu)\cdot X - \lambda \cdot X^2 + \mu \cdot X^3 - \mu \cdot X^5 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$$\begin{cases} \lambda + \nu = 0 \\ -\lambda = 0 \\ \mu = 0 \\ -\mu = 0 \end{cases}$$

(car $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$)

$$\Rightarrow \lambda = \mu = \nu = 0 \quad \text{(par remontées successives)}$$

La famille $(X-X^2, X^3-X^5, X)$ est donc libre.

c) De quelle propriété la question précédente est-elle une illustration ? (à citer avec précision !)

Démonstration. Toute famille de polynômes échelonnée en degrés et qui ne contient pas le polynôme nul est libre.

2. Démontrer que la famille $(1+X+X^2, 1-X+X^2, 3X-2X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration. Démontrons que la famille $(1+X+X^2, 1-X+X^2, 3X-2X^2)$ est libre.
Soit $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.
On suppose : $\lambda \cdot (1+X+X^2) + \mu \cdot (1-X+X^2) + \nu \cdot (3X-2X^2) = 0_{\mathbb{R}[X]} (*)$.
Or : $(*) \iff (\lambda+\mu)\cdot 1 + (\lambda - \mu + 3\nu) \cdot X + (\lambda + \mu - 2\nu) \cdot X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda - \mu + 3\nu = 0 \\ \lambda + \mu - 2\nu = 0 \end{cases} \qquad \text{(car } (1, X, X^2) \text{ est une famille libre de } \mathbb{R}[X]\text{)}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ -2\mu + 3\nu = 0 \\ -2\nu = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\lambda = \mu = \nu = 0 \quad \text{(par remontées successives)})$$

La famille $\mathcal{F} = (1+X+X^2, 1-X+X^2, 3X-2X^2)$ est libre.
La famille $\mathcal{F}$ est :
⋆ libre,
⋆ telle que : $\text{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
On en conclut que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. On note : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 2X\}$.

   Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).

Démonstration. • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned}
X \in F &\iff (A - 2I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \\
&\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff}} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \\
&\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x + y - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} -x = z \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{(en choisissant } z \text{ comme variable auxiliaire)}
\end{aligned}$$

• On obtient :

$$\begin{aligned}
F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = -z \text{ et } y = 0 \right\} &= \left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

• La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

⋆ engendre F,
⋆ est libre car constituée d'un vecteur non nul.
C'est donc une base de F.
On en conclut enfin : $\dim(F) = 1$.

4. Justifier (avec précision) que la famille $\left(1-X^2, 2+X^2+3X^5, 1-2X\right)$ est libre.

Démonstration. La famille $(1-X^2, 2+X^2+3X^5, 1-2X)$ est échelonnée en degrés et ne contient pas le polynôme nul. Elle est donc libre.

5. Démontrer que la famille $\mathcal{F} = \left(1-X-X^2, 2-X^2, -1+3X\right)$ est libre. On exige ici l'utilisation de la méthode correspondant à la vérification de la définition de liberté.

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\lambda_1(1-X-X^2) + \lambda_2(2-X^2) + \lambda_3(-1+3X) = 0_{\mathbb{R}[X]}. \qquad (*)$$

En développant et en regroupant selon les puissances de X, on obtient :

$$(*) \iff (\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3) \cdot 1 + (-\lambda_1 + 3\lambda_3) \cdot X + (-\lambda_1 - \lambda_2) \cdot X^2 = 0_{\mathbb{R}[X]}.$$

Comme la famille $(1, X, X^2)$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$ (elle en est une base), on en déduit le système :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons ce système par la méthode du pivot :

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\iff}} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

De la dernière équation $-4\lambda_3 = 0$, on déduit $\lambda_3 = 0$.
Par remontée : $2\lambda_2 + 2 \times 0 = 0$ donne $\lambda_2 = 0$.
Enfin, $\lambda_1 + 2 \times 0 - 0 = 0$ donne $\lambda_1 = 0$.
Ainsi, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qui prouve que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

6. Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Démonstration. • La famille $\mathcal{F}$ est :
$\star$ libre,
$\star$telle que : $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}_2[X])$.
On en conclut que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

7. On note : $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 3X\}$.

Déterminer une base de F et sa dimension (on justifiera).

Démonstration. • Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Alors :

$$X \in F \iff (A - 3I_3)X = 0_{\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \iff \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff}} \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 0x + 2y - 2z = 0 \\ 0x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases} \qquad \text{(en choisissant } z \text{ comme variable auxiliaire)}$$

• On obtient :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid x = z \text{ et } y = z \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

• La famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

⋆ engendre F,
⋆ est libre car constituée d'un vecteur non nul.
C'est donc une base de F.
On en conclut enfin : $\dim(F) = 1$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est **antisymétrique** lorsqu'elle vérifie ${}^tM = -M$. On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques. On se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on considère f l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ associe :

$$f(M) = ({}^tA)M + MA$$

a) Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \neq \varnothing$ car $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. En effet : ${}^t0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} = -0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
(iii) Démontrons que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est stable par combinaisons linéaires.
Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et soit $(M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2$.
⋆ Comme $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, M vérifie : ${}^tM = -M$.
⋆ Comme $N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, N vérifie : ${}^tN = -N$.
Démontrons : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = -(\lambda \cdot M + \mu \cdot N)$).

$$\begin{aligned}
{}^t(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) = \lambda \cdot {}^t M + \mu \cdot {}^t N &= \lambda \cdot (-M) + \mu \cdot (-N) \quad (\text{car } (M, N) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})^2) \\
&= -\lambda \cdot M - \mu \cdot N \\
&= -(\lambda \cdot M + \mu \cdot N)
\end{aligned}$$

Ainsi : $\lambda \cdot M + \mu \cdot N \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. L'ensemble $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit M une matrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Établir que $f(M)$ est une matrice antisymétrique.

Démonstration. Il s'agit de démontrer : $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (c'est-à-dire : ${}^t(f(M)) = -f(M)$).

$$\begin{aligned}
{}^t(f(M)) = {}^t(({}^tA) \times M + M \times A) &= {}^t(({}^tA) \times M) + {}^t(M \times A) \quad (\text{par linéarité de la transposée}) \\
&= ({}^tM)({}^t({}^tA)) + ({}^tA)({}^tM) \\
&= (-M)A + ({}^tA)(-M) \quad (\text{car } M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})) \\
&= -MA - ({}^tA)M \\
&= -f(M)
\end{aligned}$$

On a bien : $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

c) En déduire que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. • Démontrons que f est linéaire. Soit $(M, N) \in (\mathcal{A}_n(\mathbb{R}))^2$ et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}
f(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) &= ({}^tA)(\lambda \cdot M + \mu \cdot N) + (\lambda \cdot M + \mu \cdot N)A \\
&= \lambda \cdot ({}^tA)M + \mu \cdot ({}^tA)N + \lambda \cdot MA + \mu \cdot NA \\
&= \lambda \cdot (({}^tA)M + MA) + \mu \cdot (({}^tA)M + MA) \\
&= \lambda \cdot f(M) + \mu \cdot f(N)
\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien une application linéaire.
• Démontrons que f est à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
D'après la question précédente, pour tout $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a $f(M) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
L'application f est bien à valeurs dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.
On en conclut que f est un endomorphisme de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.

9. On considère dans la suite le cas n = 3. On considère les trois matrices :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin on note : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet que la famille $\mathcal{B} = (J, K, L)$ est une base de $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$.

a) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$. On la note T. (faire les calculs au brouillon et écrire uniquement les résultats permettant d'écrire T)

Démonstration.

- $f(J) = ({}^tA)J + JA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1)\cdot J + 0\cdot K + (-1)\cdot L$
- $f(K) = ({}^tA)K + KA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot J + 0\cdot K + 0\cdot L$
- $f(L) = ({}^tA)L + LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\cdot J + 0\cdot K + (-1)\cdot L$

Donc $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) Déterminer la trace et le déterminant de l'endomorphisme f.

Démonstration.

- $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(T) = -1 + 0 - 1 = -2$
- $\det(f) = \det(T) = (-1) \times 0 \times (-1) = 0$

c) Que peut-on déduire du calcul du déterminant ?

Démonstration. Comme $\det(f) = 0$, l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

Commentaire

• Pour démontrer que $\mathcal{F}$ est base de $\mathbb{R}_2[X]$, on aurait aussi pu démontrer qu'elle est libre et génératrice $\mathbb{R}_2[X]$ ou démontrer qu'elle est génératrice $\mathbb{R}_2[X]$ et de cardinal minimal (en l'occurrence 3).

• Dans le cas où l'on étudie un espace vectoriel dont on connaît la dimension, on préférera ne pas démontrer le caractère libre et générateur de l'espace car c'est plus long que de ne démontrer que l'une ou l'autre de ces propriétés et de conclure par argument de dimension.

• Il faut savoir démontrer le caractère générateur d'une famille de $\mathbb{R}_2[X]$. Pour ce faire, le plus simple est d'utiliser les manipulations algébriques autorisées sur les espaces vectoriels engendrés par une partie. Attention à ne pas confondre espace vectoriel engendré par une partie et partie : l'espace vectoriel engendré reste inchangé par certaines manipulations algébriques mais la partie est évidemment modifiée par ces manipulations (c'est tout le but de la méthode !). Ici, on pouvait écrire :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Vect}\left(1-X-X^2, 2-X^2, -1+3X\right) &= \operatorname{Vect}\left(1-X-X^2, 1+X, -1+3X\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(1-X-X^2, 1+X, -4\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(1-X-X^2, 1+X, 1\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(1-X-X^2, X, 1\right)\\
&= \operatorname{Vect}\left(X^2, X, 1\right)\\
&= \mathbb{R}_2[X]
\end{aligned}$$