FEUILLE D'EXERCICES N°6

RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Exercice 1 :

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ b & 0 & c \\ b & -a & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 2 :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer simplement les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ?

Exercice 3 :

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels non tous nuls, et soit $C = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et $A = C.C^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Quel est le rang de A ? Quel est le polynôme caractéristique de A ? A est-elle diagonalisable ?

Exercice 4 :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

Trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = A$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 \\ -8 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6 :

Déterminer toutes les matrices qui commutent avec la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ 14 & -13 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 :

Calculer A^n pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8 :

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\lim_{n\to\infty}(A_n)^n$.

Exercice 9 :

a) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Trigonaliser A.

b) Déterminer les suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient $(u_0, v_0, w_0) = (1, 0, 0)$ et les relations de récurrence valables pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n - 2w_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n + 3w_n \end{cases}$$

Exercice 10 :

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si λ est une valeur propre de $u \circ v$ alors λ est aussi valeur propre de $v \circ u$.

Exercice 11 :

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres dans $\mathbb{C}$ (distinctes ou non). Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} a_{ji}.$$

Exercice 12 :

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant les produits par blocs :

$$\begin{bmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_n & 0 \\ B & I_p \end{bmatrix} \text{et} \begin{bmatrix} xI_n & A \\ B & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -I_n & A \\ 0 & -xI_p \end{bmatrix},$$

comparer les polynômes caractéristiques de AB et de BA. Que peut-on dire dans le cas $n = p$?

Exercice 13 :

Montrer que l'application

$$f : P \mapsto (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X)$$

est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel $E = \mathbb{R}_n[X]$.

Former la matrice de f relative à la base canonique de E. En déduire la diagonalisabilité de f ainsi que ses valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres associés.

Exercice 14 :

Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et deux réels $a \neq b$. Pour $P \in E$, on pose

$$\varphi(P) = (X - a)(X - b)P' - nXP$$

a) Montrer que φ est un endomorphisme de E.

b) Déterminer les valeurs propres de φ et en déduire que φ est diagonalisable.

Exercice 15 :

Montrer que la matrice suivante est diagonalisable

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n & \ddots & 2 & & \\ & n-1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$$

(Indication : on pourra interpréter A comme la matrice d'un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$)

Exercice 16 :

a) Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

en fonction du polynôme $P(X) = X^n - (a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0)$.

b) Soit λ une racine de P. Déterminer le sous-espace propre de M associé à la valeur propre λ.

c) À quelle condition la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 17 :

On note $E = \mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$, espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$. Pour tout $f \in E$, on définit la fonction $F : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt & \text{si } x \in]0;1] \\ f(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que $F \in E$ et que l'application $\varphi : f \longmapsto F$ est un endomorphisme de E.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.

Exercice 18 :

Soit A une matrice donnée non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad u(M) = \mathrm{tr}(A)M - (\mathrm{tr}M)A.$$

Déterminer ses éléments propres. u est-il diagonalisable ?

Exercice 19 :

Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = M^\top - M$.

Exercice 20 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. On définit $\phi : \begin{cases} \mathscr{L}(E) & \longrightarrow \mathscr{L}(E) \\ f & \longmapsto (p \circ f + f \circ p) \end{cases}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ.

Exercice 21 :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent : $AB = BA$. On suppose que toutes les valeurs propres de B sont distinctes.

1. Montrer que tout vecteur propre de B est vecteur propre de A.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A = P(B)$.

Exercice 22 :

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'il existe un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $AB = P(A)$ et $P(0) \neq 0$. Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 23 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A^3 - 3A + 4I_n = 0$. Déterminer le signe de $\det A$.

Exercice 24 :

Soit $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $12A^3 - 8A^2 + 7A - I_5 = 0$. Montrer que $0 < \mathrm{tr}\, A < 2$.

Exercice 25 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 26 :

Soit u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par : $u(M) = -M + \mathrm{tr}(M)I_n$. Déterminer un polynôme annulateur de u, de degré 2. Quels sont les éléments propres de u ? u est-il diagonalisable ? u est-il inversible ? Calculer $\det u$.

Exercice 27 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, A^2, \ldots, A^{n-1})$ est libre. Calculer $\mathrm{tr}\ A$ et $\det A$.

Exercice 28 :

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant $u^3 + u = 0$.

a) Montrer que l'espace $\operatorname{Im} u$ est stable par u.

b) Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$.

c) Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$. Montrer que v est un isomorphisme.

d) En déduire que le rang de l'endomorphisme u est un entier pair.

Exercice 29 :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base B, $f \in \mathcal{L}(E)$ et H un hyperplan.

a) Rappel : E^* désigne l'espace vectoriel dual. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel $\{u \in E^*/u(H) = \{0\}\}$.

b) Montrer que si H a pour équation $u(x) = 0$ alors H est stable par f si et seulement si $u \circ f$ est colinéaire à u.

c) Soient A et L les matrices dans B de f et u. Montrer que H est stable par f si et seulement si ${}^tL$ est vecteur propre de ${}^tA$

d) Déterminer les plans stables par $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice 30 :

Soient u endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. On suppose que E est le seul sous-espace vectoriel non nul stable par u.

a) L'endomorphisme u possède-t-il des valeurs propres ?

b) Montrer que pour tout vecteur non nul $x \in E$, la famille $\big(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\big)$ est une base de E. Quelle est la forme de la matrice de u dans cette base ?

c) Montrer que cette matrice ne dépend pas du choix de x.

d) Montrer que seuls les polynômes en u commutent avec u.

Exercice 31 :

Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension supérieure ou égale à 1, soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel de E stable par f et de dimension 1 ou 2.

Exercice 32 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent et si $v \in GL(E)$ commute avec u, alors $u + v$ est inversible et préciser son inverse (on pourra d'abord traiter le cas $v = Id_E$).

Trouver un contre-exemple si on ne suppose plus que u et v commutent.

Exercice 33 :

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose $uov = vou$ et v nilpotent. On désire montrer que $\det(u + v) = \det u$ en raisonnant par récurrence sur la dimension $n \geq 1$.

a) Traiter le cas $n = 1$ et le cas $v = 0$.

b) Pour $n \geq 2$ et $v \neq 0$, former les matrices de u et v dans une base adaptée à $\operatorname{Im} v$.

c) Conclure en appliquant l'hypothèse de récurrence aux restrictions de u et v à $\operatorname{Im} v$.

Exercice 34 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer que, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent d'indice p, il existe $x_0 \in E$ tel que la famille $\{x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0)\}$ soit libre. En déduire : $p < n$.

2. Prouver que, si u est nilpotent, son indice est égal à n si et seulement si $\dim(\operatorname{Ker} u) = 1$. Quelle est alors sa matrice dans la base précédente ?

3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice n. Prouver que $v \in \mathcal{L}(E)$ commute avec u si et seulement si il existe $P \in K_{n-1}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Exercice 35 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v - v \circ u = \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{K}^*$).

a) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $u \circ P(v) - P(v) \circ u = \lambda v \circ P'(v)$.

b) En déduire que v est nilpotent.

Exercice 36 :

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in [1; n]$, $\mathrm{tr} u^k = 0$. Montrer que u est nilpotent.

Exercice 37 :

Soit $M \in GL_n(C)$ telle que M^2 soit diagonalisable. Montrer que M est diagonalisable.

Exercice 38 :

Soient $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $A_2 \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$ définie par : $A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{bmatrix}$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A_1 et A_2 le sont.

Exercice 39 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $B = \begin{bmatrix} 2A & A \\ A & 2A \end{bmatrix}$. Montrer que : A diagonalisable $\Longleftrightarrow$ B diagonalisable .

Exercice 40 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $B \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par blocs par : $B = \begin{bmatrix} A & A \\ 0_n & A \end{bmatrix}$. Trouver une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que B soit diagonalisable.

Exercice 41 :

Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, tels que $u \circ v = v \circ u$.

a) Montrer que tout sous-espace propre de u (resp. v) est stable par v (resp. u). En déduire que u et v admettent un vecteur propre commun.

b) On suppose ici que u admet n valeurs propres distinctes. Montrer que u et v admettent une base de vecteurs propres communs, et qu'il existe un polynôme P à coeff. dans $\mathbb{C}$ tel que : $v = P(u)$.

c) On suppose ici que u et v sont diagonalisables. Montrer qu'ils admettent une base de vecteurs propres communs (u et v sont dits co-diagonalisables).

d) Dans le cas général, montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle les matrices de u et de v sont triangulaires supérieures.

Exercice 42 :

On pose $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $X_j = X^n - 1$. Déterminer les éléments propres de J.

b) En déduire que la matrice $D(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & c & & b \\ b & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & c \\ c & & b & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments propres.

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆⋆