FEUILLE D'EXERCICES N°1

ESPACES VECTORIELS

Rappels et compléments

Exercice 1 :

1. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

a) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$

b) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\}$

c) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\}$

d) $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\}$

2. Soit $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G, H des sous-espaces vectoriels de E.

1. a) Comparer : $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

b) Montrer que, si $F \subset G$, on a : $F+(G\cap H) = (F+G)\cap(F+H)$.
Contre-exemple si $F \not\subset G$?

2. Comparer : $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

3. Montrer que, si $F \subset G$, $F + H = G + H$ et $F \cap H = G \cap H$, alors $F = G$.

4. Montrer que, si $F \cap H \subset G$, $H \subset F + G$ et $G \subset H$, alors $G = H$.

5. Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $F\cap G = F' \cap G'$.
Montrer que : $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

Exercice 3 :

Soit H l'ensemble des polynômes de la forme $aX^3 + (b - 2a)X^2 - 2bX + 3a$ avec a et b réels.

Montrer que, muni des lois usuelles, il s'agit d'un plan vectoriel et en donner une base.

Exercice 4 :

Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b,\ a + b,\ a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer $F + G$ et $F \cap G$.

Exercice 5 :

On considère les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u = (2, 3, -1)$, $v = (1, -1, -2)$, $w = (3, 7, 0)$, $x = (5, 0, -7)$.

Montrer que $\text{Vect}(u, v) = \text{Vect}(w, x)$.

Exercice 6 :

On considère dans $\mathbb{R}^4$ le sous-espace L engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 3, 1, 3)$, $(1, -1, 1, -1)$ et le sous-espace M engendré par $(1, 2, 0, 2)$, $(1, 2, 1, 2)$, $(3, 1, 3, 1)$.
Calculer les dimensions de L et de M et montrer que $L \subset M$.

Exercice 7 :

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

1. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G$ n'est pas réduit au vecteur nul.

2. Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim F + \dim G + \dim H > 2n$. Que peut-on dire de $F \cap G \cap H$?

Exercice 8 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E. On pose, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $f_i = \sum_{j \neq i} e_j$.

Que peut-on dire de la famille $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$?

Exercice 9 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.

Montrer que si $a \in E$ est tel que $a \notin \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 10 :

Soient $f_1, f_2, f_3, f_4 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ définies par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x \cos x$, $f_3(x) = \sin x$, $f_4(x) = x \sin x$.

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 11 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sin(x + n)$.

Déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}(f_0, \dots, f_n)$.

Exercice 12 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, étudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $(x \mapsto \sin nx)_{n \in \mathbb{N}^*}$

2. $(x \mapsto \operatorname{ch} nx)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 13 :

Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, étudier si la famille de fonctions $\{x \mapsto x^\alpha (\ln x)^\beta\}_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2}$ est libre.

Exercice 14 :

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, non constants et sans racine commune.

Montrer que les polynômes $P_k = A^k B^{n-k}$ $(k \in \{0, \dots, n\})$ forment une famille libre.

Exercice 15 :

Soit, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, $P_k = X^k (1 - X)^{n-k}$.

1. Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Donner dans cette base les coordonnées de $1, X, X^2, \dots, X^n$ (on pourra calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k$, $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} P_k$ etc.).

Exercice 16 :

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_{n+1}) > \deg(P_n)$.

Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$.

Exercice 17 :

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ $(n + 1)$ éléments distincts de $\mathbb{K}$.

Montrer que la famille $\{(X - a_i)^n\}_{0 \leqslant i \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ (on pourra procéder par récurrence en utilisant la dérivation).

Exercice 18 :

Soient P et Q deux polynômes non constants de $\mathbb{C}[X]$. On pose : $a = \deg P$ et $b = \deg Q$.

Démontrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. la famille $(P, XP, \dots, X^{b-1}P, Q, XQ, \dots, X^{a-1}Q)$ est libre ;

2. il existe $U, V \in \mathbb{C}[X]$ avec $\deg U < \deg Q$ et $\deg V < \deg P$ tels que $UP + VQ = 1$;

3. P et Q n'ont pas de racine commune.

Exercice 19 :

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on considère une famille de n vecteurs, de rang r. On extrait de cette famille une sous-famille de n' vecteurs, de rang r'.

Montrer que : $n - r \geqslant n' - r'$ (utiliser la formule de Grassmann).

Exercice 20 :

On se donne une subdivision $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ du segment $[a, b]$.

Soit F (resp. G) l'ensemble des applications (resp. l'ensemble des applications continues) $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui sont affines sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$.

Montrer que F et G sont des espaces vectoriels pour les lois usuelles et en donner la dimension.

Exercice 21 :

Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b,\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 22 :

Soit $F = \{f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. En déterminer un supplémentaire.

Exercice 23 :

Dans $\mathbb{R}^4$ soient : $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y - z - t = x - y + 3z + 2t = 0\}$, $F = \mathrm{Vect}((1, 2, -1, 0))$ et $E = \mathrm{Vect}((0, 1, 0, 2))$.

A-t-on : $\mathbb{R}^4 = E \oplus F \oplus G$?

Exercice 24 :

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $H = \{f \in E \mid \int_0^1 f(t)\,dt = 0\}$.

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E et en donner un supplémentaire.

Exercice 25 :

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, E_0 l'ensemble des applications constantes sur $\mathbb{R}$, E_- l'ensemble des applications qui sont nulles sur $\mathbb{R}^-$ et E_+ l'ensemble des applications qui sont nulles sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer qu'il s'agit de trois sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 26 :

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$ on note $F_i = \{P \in E \mid \forall j \in \{0, \ldots, n\} \setminus \{i\},\ P(j) = 0\}$.

Montrer que les F_i pour $0 \leqslant i \leqslant n$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 27 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) = \dim(G)$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$ (on pourra procéder par récurrence sur $n - \dim(F)$).

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆