UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDLLAH
FACULTÉ DES SCIENCES DHAR EL MEHRAZ
FÈS

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du

DIPLÔME D'ÉTUDES SUPÉRIEURES APPROFONDIES
DE $3^{ème}$ **CYCLE**

Spécialité : Mathématiques Fondamentales

Option : Analyse Fonctionnelle

OPÉRATEURS COMPACTS
&
PROPRIÉTÉ D'ORLICZ-PETTIS EN ANALYSE P-ADIQUE

Par

Khalid EL BAKKIOUI

Soutenu le :15/10/2005 devant le Jury

R.AMEZIANE HASSANI	Professeur à la Faculté des Sciences Dhar Mehraz	Fès
A.BLALI	Professeur à l'École Normale Supérieure	Fès
M.BABAHMED	Professeur à la Faculté des Sciences	Meknes

DÉDICACE

Je dédie ce mémoire à :

Mes parents,

toute ma famille,

tous mes amis,

et tous les chercheurs.

REMERCIEMENTS

Ce mémoire a été fait sous la direction de :
Mr R. AMEZIANE HASSANI,
et
Mr A. BLALI ;
grâce à qui j'ai pu faire mes débuts dans la recherche, je tiens à exprimer ma profonde gratitude pour m'avoir constamment guidé avec la plus grande patience et pour leur disponibilité continue et leurs conseils efficaces, ainsi que pour la bienveillance qu'ils ont manifestée à mon égard en toutes circonstances.

Je tiens à remercier aussi le professeur Monsieur M. BABAHMED qui a suivi le long des deux années de ma recherche des exposés et qui m'a ouvert des perspectives de travail à l'aide de ses remarques combien fructueuses et adéquates.

J'adresse ma sincère reconnaissance à Monsieur C. Pèrez-Garcia, Monsieur W. Schikhof et Monsieur A. C. M. van Rooij pour avoir envoyé de nombreux articles qui leur appartiennent et autres.

Je remercie tous les amis du groupe de recherche pour leurs remarques faites pendant les séminaires et pour leurs encouragements.

Je remercie, ceux qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce mémoire.

Enfin, j'espère que ce travail ouvrira une voie pour plusieurs questions concernant l'Analyse non-archimédienne (n.a), en particulier, la propriété d'Orlicz-Pettis (O.P).

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Comme l'analyse réelle ou complexe est basée sur le corps des nombres réels, respectivement le corps des nombres complexes, les corps munis d'une valuation non-archimédienne, dont les corps P-adiques sont un exemple, sont à la base de l'analyse non-archimédienne.

Après l'introduction des corps P-adiques par Hensel en 1908, ces corps ont été étudiés principalement dans la théorie des nombres et en algèbre. Ce n'est qu'après 1940 que leur étude a été abordée du point de vue de l'analyse, qui a été derrière un nombre d'articles dans plusieurs journaux.

Je m'occupe dans ce mémoire de l'analyse non-archimédienne. On n'y trouvera donc pas les théories algébriques des corps valués non-archimédiens, ni les applications de ces corps dans la théorie des nombres ; ce domaine est tellement vaste qu'un mémoire, tel que le présent, ne suffirait pas pour les réunir.

Le but du chapitre 1 d'une part est de présenter les principes de la théorie de telle sorte que les mathématiciens qui ne connaissent pas le domaine y trouvent les moyens nécessaires pour y pénétrer. D'autre part, j'espère que ce chapitre sera utile pour ceux qui travaillent dans ce domaine en rassemblant, parfois, sans démonstration, les résultats déjà acquis. C'est pour cette raison que j'ai indiqué des problèmes ouverts.

Seulement, dans le chapitre 1 j'ai réuni les principes des résultats de la théorie algébrique qui sont indispensables pour l'analyse, des résultats de l'analyse classique dans le cas non-archimédien, on y trouve aussi l'analyse linéaire, c'est à dire la théorie des espaces de Banach et des espaces localement convexes, y compris la dualité, l'orthogonalité, la dénombrabilité, l'espace polaire et l'espace fortement polaire et les ensembles totalement c-bornés.

Dans le chapitre 1 j'ai rassemblé des sujets variés dans le domaine. On y trouvera des applications et des problèmes ouverts. Ce ne sont que des indications ; la théorie est devenue déjà tellement étendue qu'il est impossible de la présenter en détail dans un mémoire tel que le présent.

Maintenant je vais essayer de citer des résultats dans ce chapitre et qui sont utiles pour l'analyse non-archimédienne mais qui sont erronés pour l'analyse classique.

(1) Dans (1.1.2.2) on démontre que pour tous $x, y, z \in (X, d)$ (espace ultramétrique) si $d(x,y) \neq d(y,z)$ alors $d(x,z) = \max(d(x,y), d(y,z))$ c'est-à-dire que tout triangle est isocèle, la base étant le plus petit côté.

(2) Puisque la complétude ne répond pas à notre besoin dans l'analyse non-archimédienne, on définit la complétude sphérique (1.1.4) qui implique la complétude ordinaire, alors que la réciproque est fausse.

(3) En se référant aux travaux de G. Bachman [4], deux valuations sur K (K un corps valué non-archimédien) sont dites équivalentes si et seulement si il existe une constante positive telle que l'une de ces valuations est la puissance de l'autre par cette constante.

(4) Dans (1.2.3) une suite dans K est sommable si et seulement si son terme général converge vers 0.

(5) Dans $\mathbb{C}_p$, la fonction exponentielle est définie pour $\mid x \mid \leq p^{\frac{1}{1-p}}$ (où p est un nombre premier).

(6) Le théorème (1.2.5.3) montre que toute fonction continue, définie d'un espace topologique à valeurs dans K a une approximation par une fonction localement constante.

(7) Le lemme (1.2.6.3) montre que toute fonction développable en serie en un point d'une boule est développable en tous points de la boule.

(8) Si f est une fonction complexe analytique sur un domaine borné le principe du maximum, c'est à dire que $|f|$ atteint son maximum sur la frontière, on a le même résultat pour notre cas (n.a)(1.2.6.5).

(9) Dans (1.2.7.3) on construit un corps de Krull qui a des éléments qui ont une valuation < 1 mais leurs puissances par $n \in \mathbb{N}$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$.

(10) L'exemple (1.3.1.11) montre que les normes définies sur $\mathcal{L}(E,F)$ (l'ensemble des applications linéaires continues) ne sont pas identiques comme dans le cas classique.

(11) Dans (1.3.2) on donne un exemple d'un opérateur qui a un spectre vide.

(12) On sait que dans un espace de Banach complexe E il n'existe pas $A,B \in \mathcal{L}(E)$ tels que $AB - BA = I_E$, mais dans (1.3.3) j'ai donné un exemple où cette équation admet une solution.

(13) $(1+\varepsilon)$ Hahn-Banach est vraie uniquement pour les espaces de Banach de type dénombrables (1.5.10 :(vi)) et les espaces fortement polaires (1.7.8).

(14) L'extention de Hahn-Banach que nous avons dans l'analyse classique est vraie si K est sphériquement complet (1.6.1).

(15) Anti-Hahn Banach, c'est à dire si E est un espace de Banach sphériquement complet et K ne l'est pas alors $E' = \{0\}$ (1.6.9).

Dans le $2^{ème}$ chapitre j'ai rassemblé tous les détails de la propriété d'Orlicz-Pettis, on y trouvera des exemples naturels et autres qui sont construits à partir d'un (O.P)-espace ou plusieurs (O.P)-espaces par des opérations algébriques et on ajoute des conditions pour avoir d'autres catégories comme (O.P)-espace. On a définit les opérateurs compacts par l'utilisation de la définition des ensembles totalement c-bornés et on s'est basé sur les opérateurs compacts pour définir (∞)-espace et (0)-espace, ce dernier qui a été étudié par N.DE GRANDE DE KIMPE dans [9] et [10] et qui se limite au cas du corps sphériquement complet et par T. KIYOSAWA dans [23].

J'espère que le lecteur trouvera dans ce mémoire des moyens pour pouvoir consulter les travaux originaux.

Dans ce chapitre nous supprimons la plupart des démonstrations ; on peut les trouver dans la littérature.

1.1 **ESPACES ULTRAMÉTRIQUES**

1.1.1 **Métrique**

1.1.1.1 (**Définition**)

Une métrique sur un ensemble X est une application $d : X \times X \to [0,+\infty)$ (d=distance) telle que pour tous $x,y,z \in X$
(i) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et $d(x,y) \geq 0$
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$ (symétrique)
(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire)

(X,d) est appelé un espace métrique
Si nous remplaçons (i) seulement par d(x,x)=0 alors d sera un écart.

1.1.1.2 (**Définition**)

Pour $a \in X, r > 0$ l'ensemble :

$$B(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$$

est la boule unité fermée de rayon r, et

$$B(a,r^-) = \{x \in X : d(x,a) < r\}$$

est la boule unité ouverte de rayon r.

1.1.1.3 (**Définition**)

Un sous-ensemble $U \subseteq X$ est dit ouvert si pour chaque $a \in U$ il existe un $r > 0$ tel que

$$B(a,r^-) \subseteq U.$$

1.1.1.4 (**Définition**)

La collection des ensembles ouverts de X forme une topologie sur X laquelle s'appelle la topologie induite par d.

1.1.1.5 (**Remarque**)

La boule ouverte est ouverte ,et la boule fermée est fermée.

1.1.1.6 (**Définition**)

Le diamètre d'un ensemble non vide $Y \subseteq X$ est

$$diam Y = \sup\{d(x,y) : x,y \in Y\}$$

(possible ∞) et $diam \emptyset = 0$.

1.1.1.7 (**Définition**)

Y est dit borné si $diamY < \infty$.

1.1.1.8 (**Définition**)

La distance entre deux ensembles non vides $Y,Z \subseteq X$ est

$$d(Y,Z) = \inf\{d(y,z) : y \in Y, z \in Z\}.$$

1.1.1.9 (**Notation**)

Pour $y \in X$ nous écrivons d(y,Z) plutôt que d({y},Z).

1.1.1.10 (**Définition**)

Une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$, est convergente vers $x \in X$, notation $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$, si

$$\lim_{n\to+\infty} d(x,x_n) = 0.$$

1.1.1.11 (**Définition**)

Une suite $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq X$, est de Cauchy si

$$\lim_{n,m\to+\infty} d(x_n,x_m) = 0.$$

1.1.1.12 (**Propriétés**)

Une suite de Cauchy est bornée. Toute suite convergente est de Cauchy, mais la réciproque en générale n'est pas vraie.

1.1.1.13 (**Définition**)

Deux distances sur un ensemble sont dites équivalentes si elles définissent la même topologie.

1.1.1.14 (**Propriété**)

Soient d_1, d_2 deux distances équivalentes sur un ensemble X. Alors une suite est convergente dans (X,d_1) si et seulement si, elle est convergente dans (X,d_2) ; mais, cet équivalence est fausse pour les suites de Cauchy.

1.1.1.15 (**Définition**)

Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.

1.1.1.16 (**Propriété**)

Tout espace métrique peut injecter dans sa complétude $X^{\#}$ ($X^{\#}$ un espace métrique complet et contient X comme un sous-ensemble dense).

1.1.1.17 (**Définition**)

Soient $(X_1,d_1),(X_2,d_2)$ deux espaces métriques, une application $f : X_1 \to X_2$ est appelée une isométrie si

$$d_2(f(x),f(y)) = d_1(x,y)$$

pour tous $x,y \in X_1$.

1.1.2 **Ultramétrique**

1.1.2.1 (**Définition**)

Une métrique d sur un ensemble X est appelée ultramétrique [et (X,d) est appelé un espace ultramétrique], si elle satisfait l'inégalité triangulaire forte

$$d(x,z) \leq \max(d(x,y),d(y,z))$$

pour tous $x,y,z \in X$ (il est clair que cette dernière inégalité implique l'inégalité triangulaire ordinaire). Comme on a défini l'écart à partir d'une métrique ci-dessus, on définit la semi-ultramétrique (écart pour une ultramétrique).

1.1.2.2 (**PRINCIPE DU TRIANGLE ISOCÈLE**)

$$si\ d(x,y) \neq d(y,z)\ alors\ d(x,z) = \max(d(x,y),d(y,z))$$

1.1.2.3 (**Définition**)

Un sous-ensemble d'un corps valué non-archimédien , est ultramétrique(voir le paragraphe qui suit) avec l'ultramétrique

$$(x,y) \to \mid x-y \mid .$$

1.1.2.4 (**Définition**)

Soit (X,d) un espace métrique, alors il existe une plus grande semi-ultramétrique parmi toutes les semi-ultramétriques qui sont $\leq d$, qui s'appelle sous-dominante par d.

1.1.2.5 (**Propriétés**)

Soit (X,d) un espace ultramétrique
(i) Soit $a \in Y \subseteq X$, alors

$$diamY = \sup\{d(x,a) : x \in Y\}$$

(ii) Toute boule dans X est à la fois ouverte et fermée ('of').
(iii) Tout point d'une boule est un centre. Toute boule non vide est bornée.
(iv) Les rayons d'une boule B forment l'ensemble

$$\{r \in \mathbb{R} : r_1 \leq r \leq r_2\}$$

avec $r_1 = diamB$,$r_2 = dist(B,X \setminus B)$ ($r_2 = \infty$ si B=X), il arrive que $r_1 < r_2$, et que la boule a une infinité de rayons.

(v) Deux boules quelconques ont une intersection vide ou bien l'une de ces deux boules est contenue dans l'autre.
(vi) Si deux boules B_1, B_2 sont disjointes, alors

$$dist(B_1, B_2) = dist(x, y)$$

pour chaque $x \in B_1$, $y \in B_2$.
(vii) Soit $\varepsilon > 0$ la relation $d(x, y) < \varepsilon$ $(x, y \in X)$ est une relation d'équivalence et induit une partition de X par des boules ouvertes de rayon ε. La même chose pour $d(x, y) \leq \varepsilon$ et les boules fermées.

1.1.2.6 (**Définition**)

La topologie induite par une ultramétrique est de dimension 0. i. e : il existe une base de la topologie constituée des ensembles ouverts et fermés, d'où un espace ultramétrique est totalement discontinu.

1.1.2.7(**Remarque**)

Si (X,d) est un espace ultramétrique et $Y \subset X$ qui est dense alors

$$\{d(y_1, y_2) : y_1, y_2 \in Y\} = \{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in X\}$$

par conséquent, la complétude d'un espace ultramétrique ne crée pas de nouvelles valeurs d'une ultramétrique.

1.1.3 **Espace ultramétrique compact**

1.1.3.1 (**Propriété**)

Soit (X,d) un espace ultramétrique compact alors $\{d(x, y) : x, y \in X\}$ est dénombrable et a 0 comme unique point d'accumulation possible.

1.1.3.2 (**Remarque**)

Soit (X,d) un espace ultramétrique infini (si X est fini le processus ci-dessous s'arrête).
Par (1.1.3.1) l'ensemble des valeurs non nulles de d est une suite $r_1 > r_2 >$ ....tend vers 0.
On peut construire la collection de toutes les boules dans X comme suit : nous avons $X = B(a, r_1)$ pour un $a \in X$, la relation $d(x, y) \leq r_2$, [ou $d(x, y) < r_2$ en cas de besoin], décompose X par un nombre fini de boules fermées de rayon r_2 et chacune de ces boules fermées est décomposée en un nombre fini de boules fermées de rayon r_3 ; si on continue ce processus, il donne un arbre.

1.1.4 **Complétude sphérique**

1.1.4.1 (**Définition**)

Un espace ultramétrique (X,d) est appelé sphériquement complet si toute suite de boules $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq$ .... a une intersection non vide (ceci n'exige pas que le diamètre de B_n se rapproche de 0).

1.1.4.2 (**Propriété**)

Il n'est pas difficile de voir qu'un espace ultramétrique sphériquement complet est complet ; mais la réciproque est fausse.

1.1.4.3 (**Propriétés**)

(i) Un espace ultramétrique compact, est sphériquement complet.
(ii) Soit X un espace ultramétrique sphériquement complet injecté dans un espace ultramétrique Y, alors tout $y \in Y$ a une meilleure approximation dans X, i. e : $\min\{d(x,y) : x \in X\}$ existe.

1.2 **CORPS VALUÉ NON-ARCHIMÉDIEN**

1.2.1 **Corps valué**

1.2.1.1 (**Définition**)

Soit K un corps (commutatif)
Une valuation est une application $| \quad | : K \to [0, +\infty)$ telle que pour tous $\lambda, \mu \in K$.
(i) $|\lambda| = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $|\lambda| \geq 0$.
(ii) $|\lambda\mu| = |\lambda||\mu|$.
(iii) $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$ (inégalité triangulaire).

1.2.1.2 (**Exemple**)

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{C}$ avec la fonction valeur absolue ordinaire.

1.2.1.3 (**Remarque**)

L'application $(\lambda, \mu) \mapsto |\lambda - \mu|$ est une métrique sur K qui définit sa topologie (i. e : les opérations algébriques sont continues).

1.2.1.4 (**Exemple**)

K muni de la métrique complète, est un corps valué.

1.2.1.5 (**Définition**)

Deux valuations sur un corps K sont dites équivalentes, si elles définissent la même topologie.

$\lceil$ G. Bachman, introduction to p-adic numbers and valuation theory, academie press, new york, 1964 : Deux valuations $| \quad |_1, | \quad |_2$ sur K sont dites équivalentes si et seulement si, il existe une constante positive c telle que $| \quad |_1 = | \quad |_2^c \rfloor$.

1.2.1.6 (**Théorème**)

Soit K un corps valué, alors il existe uniquement deux possibilités, l'une ou l'autre :
(i) K est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $| \quad |$ est équivalente à la fonction valeur absolue restrictive à K ;
ou
(ii) la valuation est non-archimédienne (n.a) i. e : elle satisfait l'inégalité triangulaire forte

$$|\lambda + \mu| \leq \max(|\lambda|, |\mu|) \qquad (\lambda, \mu \in K)$$

1.2.2 **Corps valué non-archimédien**

Dans cette sous-section $(K, | \quad |)$ est un corps valué non-archimédien
L'expression "non-archimédien" est expliquée par le fait que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$| n.1 | = | 1+1+1+.....+1 | \leq \max(| 1 |, | 1 |, ..., | 1 |) = 1$$

ce qui est contraire à l'axiome archimédien pour $\mathbb{R}$, état où $\mathbb{N}$ non borné.

1.2.2.1 (**Propriété**)

La complétude d'un corps valué non-archimédien est un corps valué non-archimédien.

1.2.2.2 (**Définition**)

Soit $(K, |\quad|)$ un corps valué non-archimédien alors

$$K^* = \{\lambda \in K, \lambda \neq 0\}$$

est un groupe multiplicatif et

$$| K^* | = \{| \lambda | : \lambda \in K^*\}$$

est appelé le groupe des valeurs de K.
- Ce groupe de valeurs peut être dense dans $(0, +\infty)$ ou discret.
- Dans le dernier cas si la valuation non triviale $(| K^* | = \{1\})$, $\rho = \max\{r : r \in | K^* |,\ r < 1\}$ existe.
- Un élément $\pi \in K$ pour lequel $| \pi | = \rho$ est appelé paramètre local pour la valuation (ou l'élément uniforme) le groupe des valeurs a un autre générateur du groupe qui est : $| \pi^{-1} |$.
- De plus $B(0,1)$ le disque unité fermé est un anneau ; et $B(0,1^-)$ le disque unité ouvert est un idéal maximal dans B(0,1).
- Le quotient $k = B(0,1)/B(0,1^-)$ est un corps appelé : le corps résiduel des classes de K.

1.2.2.3 (**Définition**)

-La valuation P-adique sur $\mathbb{Q}$ (corps des nombres rationnels) est déterminée par :

$$| n |_p = p^{-(nombre\, de\, facteur\, p\, dans\, n)} \qquad (n \in \mathbb{N}^*).$$

-La complétude de $(\mathbb{Q}, |\quad|_p)$ est appelée le corps des nombres P-adiques, et noté $(\mathbb{Q}_p, |\quad|_p)$.
-Le groupe des valeurs est $\{p^n : n \in \mathbb{Z})$.
-Le corps résiduel est le corps $\mathbb{F}_p$de p éléments.
- p est un paramètre local pour $|\quad|_p$.

⌈ Dans ce cours, ce qui précéde, p est un nombre premier ⌋

1.2.2.4 (**Remarque**)

-Les corps $\mathbb{Q}_2$, $\mathbb{Q}_3$, $\mathbb{Q}_5$, $\mathbb{Q}_7$..... ne sont pas isomorphes deux à deux.
-Le disque unité fermé de $\mathbb{Q}_p$ est noté $\mathbb{Z}_p$ et appelé l'anneau des entiers p-adiques (ce nom est expliqué par le fait que $\mathbb{Z}_p$ est la fermeture de $\mathbb{Z}$.

1.2.2.5 (**Propriétés**)

- $\mathbb{Z}_p$ est compact, en outre toute boule dans $\mathbb{Q}_p$ est compacte.
- $\mathbb{Q}_p$ est sphériquement complet, séparable et localement compact.
- $\mathbb{Q}_p$ n'est pas algébriquement fermé.

- $|\quad|_p$ a une extention à la fermeture algébrique $\mathbb{Q}_p^a$ et la complétude de $(\mathbb{Q}_p^a, |\quad|_p)$ est appelée le corps des nombres complexes p-adiques et notée $\mathbb{C}_p$.
- $\mathbb{C}_p$ n'est pas localement compact, mais séparable, algébriquement fermé, dont les groupes des valeurs est :

$$\{p^r : r \in \mathbb{Q}\},$$

la valuation dense et le corps résiduel des classes est la fermeture algébrique de $\mathbb{F}_p$, d'où infini.
- $\mathbb{C}_p$ est sphériquement complet !

1.2.2.6 (**Théorème**)

Soit $(K, |\quad|)$ un corps valué. (n.a). Supposons que K est séparable et a une valuation dense, alors K est non sphériquement complet.

(Démonstration)

Il existe $r_1 > r_2 > r_3$............ dans $|K^*|$ tels que

$$r = \lim_{n\to+\infty} r_n > 0$$

soit $\{s_1, s_2 ....\}$ le sous-ensemble dénombrable dense, il existe une boule fermée B_1 de rayon r_1 telle que $s_1 \notin B_1$, comme B_1 se décompose en une infinité des boules fermées de rayon r_2 (pourquoi infinité ?) il existe une boule fermée $B_2 \subset B_1$ telle que s_2 n'appartient pas à B_2 ; de proche en proche on trouve une suite $B_1 \supset B_2 \supset$ .... de boules fermées avec le rayon r_n pour B_n, s_n n'appartient pas à B_n pour chaque n. Soit $B = \cap_{n\geq 1} B_n$, si $B \neq \emptyset$ elle donne la boule fermée de rayon r, d'où ouverte. Aussi l'ensemble $\{s_1, s_2, ...\}$ et B ont une intersection non vide. Mais d'autre part, par construction $\{s_1, s_2 ....\} \cap B = \emptyset$ ce qui est absurde C.Q.F.D.

***DÉSORMAIS, DANS CE COURS** $K = (K, |\quad|)$ **EST UN CORPS VALUÉ COMPLET NON-ARCHIMÉDIEN ET NOUS SUPPOSONS QUE** $|\quad|$ **EST NON TRIVIALE ET IL EXISTE UN** $\lambda \in K$ **AVEC** $|\lambda| \neq 0, |\lambda| \neq 1$*

1.2.2.7 (**Exercice**)

Montrer que $\{\lambda \in K : |1-\lambda| < 1\}$est un sous-groupe multiplicatif de $\{\lambda \in K : |\lambda| = 1\}$

1.2.3 **Suite et série dans K**

NOUS RAPPELONS QUELQUES RÉSULTATS FONDAMENTAUX

1.2.3.1 (**Propriétés**)

- Soient $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ *et* $|a_i| \neq |a_j|$ chaque fois que $i \neq j$ alors

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| = \max\{|a_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

- Soient $a_1, a_2, ... \in K$ cette suite est sommable si

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_{1\leq i\leq n} a_i$$

existe.
Alors

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow a_1, a_2, ...$$

est sommable.
- Si $\lim_{n\to+\infty} a_n = a \neq 0$ alors $\mid a_n \mid = \mid a \mid$ pour n assez grand. Par conséquent, nous avons dans $\mathbb{Q}_p$

$$\frac{1}{1-p} = 1 + p + p^2 + p^3 + \ldots\ldots\ldots$$

- La somme $\sum_{0\leq n\leq\infty} n!$ existe dans tout $\mathbb{Q}_p$ parce que $\lim_{n\to+\infty} n! = 0$ dans tout $\mathbb{Q}_p$.

PROBLÈME : (en 1971)

- $\sum_{n\geq 0} n!$ peut être rationnel pour un certain nombre premier p dans $\mathbb{Q}_p$?
- Tout le monde croit que $\sum_{n\geq 0} n!$ est irrationnel pour tout p. Plusieurs démonstrations ont été proposées à cette intention mais, elles n'ont pas abouti.
- On ne sait pas est-ce que $\sum_{n\geq 0} n! \neq 0$ dans tout $\mathbb{Q}_p$.
- Récemment Vladimirov (2002) a introduit :

$$!n = \sum_{0\leq k\leq n-1} k!$$

et propose la conjecture suivante :

$$P.G.C.D(!n, n!) = 2.$$

1.2.3.2(**Exercice**)

Calculer

$$\sum_{n\geq 0} n(n!)$$

1.2.4 **Série**

Comme dans le cas archimedien, étant donné

$$a_1\,,\,a_2\,,\,\ldots\ldots\ldots \in K$$

alors

$$R = (\limsup \sqrt[n]{\mid a_n \mid})^{-1}$$

(avec $\infty^{-1} = 0\,,\,0^{-1} = \infty$) est appelé le rayon de convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Comme dans le cas complexe on montre que $a_0\,,\,a_1x\,,\,a_2x^2\,,\ldots\ldots\ldots$ est sommable pour $\mid x \mid < R$ et non sommable pour $\mid x \mid > R$. Le comportement sur l'ensemble frontière $\mid x \mid = R$ comme dans le cas complexe : $a_0\,,\,a_1x\,,\,a_2x^2\,,\ldots\ldots\ldots$ peut être sommable sur $\{x :\mid x \mid = R\}$partout ou bien nulle part. Ceci car la région de la convergence de

$$\{x \in K : a_0\,,\,a_1x\,,\,a_2x^2\,,\ldots\ldots\ldots est\,sommable\} = \{x \in K : \lim_{n\to+\infty} a_n x^n = 0\}$$

1.2.4.1 (**Exemples**)

(i) La région de la convergence de

$$\sum_{n\geq 0} x^n$$

est $\{x \in K : \mid x \mid < 1\}$
(ii) Dans $\mathbb{C}_p$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} \quad existe \qquad\qquad si\, et\, seulement\, si \mid x \mid < 1$$

aussi nous pouvons définir le logarithme p-adique au moyen de la formule

$$\log_p(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \qquad , \qquad (\mid x \mid < 1)$$

1.2.4.2 (**Exercice**)

Soit $n \in \mathbb{N}$, s'écrit dans la base p comme (p est un nombre premier)

$$n = a_0 + a_1 p + ... + a_s p^s$$

avec

$$a_i \in \{0\,,1\,,2\,,........,\, p-1\} \qquad et \qquad a_s \neq 0$$

définir S_p (la somme des nombres) comme $a_0 + a_1 + ... + a_s$
-Montrer que le nombre de facteur p dans n ! est égal à :

$$\frac{n - S_n}{p-1}$$

-Déduire que dans $\mathbb{C}_p$

$$\exp x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

est défini pour $\mid x \mid < p^{\frac{1}{1-p}}$ et que la série n'est pas sommable si $\mid x \mid \geq p^{\frac{1}{1-p}}$.
Maintenant nous notons à $\{x \in \mathbb{C}_p : \mid x \mid < p^{\frac{1}{1-p}}\}$ par E_p.
- Montrer que :
(i)

$$\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y) \qquad pour \qquad x,y \in E_p$$

(ii)

$$\log_p(xy) = \log_p(x) + \log_p(y) \qquad pour \qquad \mid x-1 \mid < 1, \mid y-1 \mid < 1$$

(iii)

$$\log_p \exp(x) = x \qquad\qquad (x \in E_p)$$

(iv)

$$\exp \log_p(x) = x \qquad\qquad (x \in 1+E_p)$$

(v)

$$\mid \exp x - \exp y \mid = \mid x-y \mid \qquad\qquad (x,y \in E_p)$$

(vi)

$$\mid \log_p x - \log_p y \mid = \mid x-y \mid \qquad\qquad (x,y \in 1+E_p)$$

(vii) Le logarithme p-adique est une application de $\{x \in \mathbb{C}_p : \mid 1-x \mid < 1\}$ à valeurs dans $\mathbb{C}_p$ et que $\log_p x = 0$ si et seulement si $\mid x \mid = 1$.

1.2.5 **Continuité des fonctions**

1.2.5.1 (**Définition**)

Soit X un espace topologique ; l'ensemble de toutes les fonctions continues $X \to K$ est un K-espace vectoriel, (même un K-algèbre) sous les opérations ponctuelles, et noté $C(X \to K)$, ou C(X) s'il n'a pas de confusion pour le corps des scalaires.

1.2.5.2 (**Définitions**)

(i) La fonction caractéristique K-valuée d'un sous ensemble $Y \subset X$ est définie par :

$$\xi_{\mathbf{Y}}(x) = \begin{cases} 1 \quad si \quad x \in Y \\ 0 \quad si \quad x \in X \backslash Y \end{cases}$$

Il est facile de voir que $\xi_{\mathbf{Y}}$ est continue si et seulement si Y est à la fois ouvert et fermé.
(ii) Une fonction $f : X \to K$ est localement constante si chaque point de X a un voisinage sur lequel f est constante.
Naturellement, les fonctions localement constantes sont continues.

1.2.5.3 (**Théorème**)

Soit X un espace topologique, $f \in C(X \to K)$, $\varepsilon > 0$, alors il existe une fonction localement constante $g : X \to K$ telle que $\mid f(x) - g(x) \mid < \varepsilon$ pour tout $x \in X$.
(Démonstration)

Le résultat (1.1.2.5-(vi))
La relation $\mid f(x) - g(x) \mid < \varepsilon$ $(x,y \in X)$ est une relation d'équivalence, qui donne une partition à X par des sous-ensembles ouverts et fermés (of) à la fois

$$X = \cup_{i \in I} U_i$$

le choix de $a_i \in U_i$ pour chaque i, on définit $g(x) = f(a_i)$ pour tous $i \in I$, $x \in U_i$ ce g répond à la question.

1.2.6 **Différentiabilités des fonctions**

Maintenant on prend pour X un sous-ensemble de K.
Pour éviter des problèmes, supposons que X n'a pas de points isolés.

1.2.6.1 (**Définition**)

Une fonction $f : X \to K$ est dite différentiable à $a \in X$ si

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad existe.$$

1.2.6.2 (**Propriétés**)

(i) La différentiabilité d'une somme, d'un produit, d'un quotient et d'une composition ce fait comme dans le cas classique.
(ii) Une fonction différentiable est continue, la réciproque est fausse.
(iii) Une fonction rationnelle sans pôles dans X, est différentiable sur X.

1.2.6.3(**Exercice**)

Pour $m,n \in \mathbb{N}$, soit $a_{mn} \in K$, on dit que $\lim_{m+n\to+\infty} a_{mn} = 0$ si pour chaque $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : | a_{mn} | \geq \varepsilon\} \qquad est\ fini.$$

-Montrer que les assertions suivantes (α), (β), (γ) sont équivalentes :
(α) $\lim_{m+n\to+\infty} a_{mn} = 0$.
(β) Pour chaque n $\lim_{m\to+\infty} a_{mn} = 0$; $\lim_{n\to+\infty} a_{mn} = 0$ uniformément en m.
(γ) Pour chaque m $\lim_{n\to+\infty} a_{mn} = 0$; $\lim_{m\to+\infty} a_{mn} = 0$ uniformément en n.
si $(\alpha) - (\beta)$ sont vraies, alors

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\ et\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$$

existent et sont identiques.

1.2.6.4 (**Lemme**)

Supposons que la série en (x-a) est convergente dans un voisinage de a $(a \in K)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in B(a,r))$$

alors pour chaque $b \in B(a,r)$, f est développable en une série en (x-b) sur la même boule et il existe b_0, b_1, ... $\in K$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-b)^n \qquad (x \in B(b,r) = B(a,r))$$

(Démonstration)

On peut assumer que $r \in | K^* |$ alors

$$\lim_{n\to+\infty} | a_n | r^n = 0$$

on a

$$(x-a)^n = (x-b+b-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(x-b)^k(b-a)^{n-k}$$

posons

$$t_{kn} = a_n\tbinom{n}{k}(x-b)^k(b-a)^{n-k}$$

clairement $\lim_{k\to+\infty} t_{kn} = 0$ pour chaque n puisque

$$| t_{kn} | \leq | a_n || \tbinom{n}{k} | r^k r^{n-k} \leq | a_n | r^n$$

($\tbinom{n}{k}$ est un entier, d'où $\tbinom{n}{k} \leq 1$)

nous avons $\lim_{n\to+\infty} t_{nk} = 0$ uniformément en k ; par l'exercice précédent nous avons

$$\begin{aligned} f(x) = & \quad \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} t_{kn} \\ = & \quad \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} t_{kn} \\ = & \quad \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} b_k(x-b)^k \end{aligned}$$

$$avec \qquad b_k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\tbinom{n}{k}(b-a)^{n-k}$$

1.2.6.5 (**Définition**)

Soit B une boule fermée dans K de rayon $r \in \mid K^* \mid$ une fonction $f : B \to K$ est appelée analytique s'il existe un $a \in B$ et $a_0,\ a_1, ... \in K$ tels que

$$(*) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \qquad (x \in B).$$

⌈ Nous connaissons que si f est une fonction complexe analytique, qui est définie sur un domaine borné le principe du maximum donne que $\mid f \mid$ atteint son maximum sur sa frontière ; le même résultat pour le cas (n.a).⌋

1.2.6.6 (**PRINCIPE DU MAXIMUM**)

Soient $K = \mathbb{C}_p$ et B, r, f, a, a_n comme après la définition (1.2.6.5). Alors $\mid f \mid$ atteint son maximum sur B et de plus :

$$\begin{aligned} \max\{\mid f(x) \mid :\ x \in B\} = & \quad \max\{\mid f(x) \mid : \mid x-a \mid = r\} \\ = & \quad \max\{\mid a_n \mid r^n : n \in \{0\ ,\ 1\ ,\ 2\ , ...\}\} \end{aligned}$$

(Démonstration)

Nous considérons uniquement le cas B=B(0,1) (le lecteur peut fournir les détails qui manquent) par conséquent :

$$(**) \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (\mid x \mid \leq 1)$$

Nous avons clairement $\mid f(x) \mid \leq \max_n \mid a_n x^n \mid \leq \max_n \mid a_n \mid$.
Montrons que

$$\max\{\mid f(x) \mid : \mid x \mid \leq 1\} \geq \max_n \mid a_n \mid$$

on peut supposer que

$$\max_n \mid a_n \mid = 1$$

et supposons que $\mid f(x) \mid < 1$ pour tout $x \in B(0,1)$; soit $\lambda \to \overline{\lambda}$ l'homomorphisme de $B(0,1) \to k$ (avec k le corps résiduel des classes). Alors la formule (**) nous donne

$$\overline{f(x)} = \overline{0} = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n x^n} \qquad (\overline{x} \in k)$$

pour un certain N (puisque $\mid a_n \mid < 1$ pour n assez grand), pour lequel $\overline{a_N} \neq \overline{0}$ par conséquent un polynôme non nul dans $k[x]$ admet chaque élément de k comme racine, mais k est infini, ce qui est absurde.

Par conséquent nous avons $\max\{| f(x) | : | x | \leq 1\} = \max_n | a_n |$.
Montrons que

$$\max\{| f(x) | : | x | = 1\} = \max_n | a_n |$$

remarquons que $| f(x) | < 1$ pour tout $| x | = 1$ donne $\overline{0} = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n}\overline{x^n}$ pour tout $\overline{x} \in k\backslash\{0\}$ raisonnons comme ci-dessus, en utilisant $k\backslash\{0\}$ est infini.

1.2.7 **Corps valué de W. Krull**

Remarquer le besoin pour une valuation non-archimédienne !
(i) $| \lambda | = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $| \lambda | \geq 0$;
(ii) $| \lambda\mu | = | \lambda || \mu |$;
(iii) $| \lambda + \mu | \leq \max(| \lambda |, | \mu |)$ (inégalité triangulaire forte) ;

- Cette inégalité triangulaire forte n'est pas comme l'inégalité triangulaire archimédienne, l'addition des scalaires ne joue aucun rôle, uniquement la multiplication et l'ordre.

Soit G un groupe totalement ordonné, multiplicatif et commutatif tel que :

$$(*) \qquad g_1 \leq g_2 \Rightarrow hg_1 \leq hg_2 \quad pour\ tout \quad h \in G$$

$\lceil$ (par exemple : $(0,\infty)$ avec la multiplication et l'ordre usuel), et remarquons que $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ est un groupe commutatif totalement ordonné mais ne satisfait pas (*) ! $\rfloor$
Augmenter G par l'élément 0 et pour tout $g \in G$

$$0.g = g.0 = 0.0 = 0$$

$$0 < g$$

1.2.7.1(**Définition**)

Une valuation de Krull sur un corps K, est une application surjective $| \quad | : K \to G \cup \{0\}$ satisfait (i), (ii) et (iii) ci-dessus pour tous $x , y \in K$. G est appelé le groupe des valeurs de K

1.2.7.2 (**Remarque**)

L'application $(x,y) \mapsto | x - y |$ est une ultramétrique qui induit une topologie sur K de dimension 0, cependant nous avons l'esprit de garder ses valeurs dans $G \cup \{0\}$ non dans $\mathbb{R}$ et que G peut être assez grand pour que K ne soit pas métrisable !

1.2.7.3 (**Construction d'un corps valué de W. Krull**)

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit G_n le groupe cyclique avec le générateur $g_n > 1$. D'où G_n est constitué de la suite ordonnée ....g_n^{-2}, g_n^{-1}, 1, g_n^1, g_n^2, ...(ce fait, chaque G_n isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}$).
Posons G la somme directe algébrique :

$$G = \oplus G_n$$

il devient un groupe totalement ordonné, si nous l'ordonnons G ***antilexigraphiquement*** i. e : si

$$g = (g_1^{n_1}, g_2^{n_2}, ..., g_k^{n_k}, 1, 1, ...)$$

$$g' = (g_1^{m_1}, g_2^{m_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots, g_k^{m_k}, 1, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

deux éléments distingués de G nous disons que $g < g'$ si $n_k < m_k$ ou si $n_k = m_k$ et $n_{k-1} < m_{k-1}$ ou si $n_k = m_k$ et $n_{k-1} = m_{k-1}$ et $n_{k-2} < m_{k-2}$, etc ....

Remarquons que ce groupe G n'est pas isomorphe (comme un groupe ordonné) à un sous-groupe multiplicatif de (0,∞) puisqu'il contient des sous-groupes bornés non triviaux.

$$\begin{array}{l} G_1 \\ G_1 \oplus G_2 \\ \quad . \\ \quad . \\ \quad . \\ G_1 \oplus G_2 \oplus \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \oplus G_n \\ \quad . \\ \quad . \end{array}$$

Maintenant soit $\mathbb{F} = \mathbb{R}(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ le corps des fonctions rationnelles avec des coefficients réels et des variables dénombrables X_1 , X_2 , ...il est facile de voir que :

$$| 0 | = 0$$

$$| \lambda | = 1 \qquad\qquad si \quad \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

$$| X_n | = (1, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots, g_n^{\uparrow (n^{ième} - place)}, 1, 1, \ldots\ldots\ldots)$$

détermine une valuation de Krull $| \quad | : \mathbb{F} \to G \cup \{0\}$ la complétude de $(\mathbb{F}, | \quad |)$ est construite de façon naturelle est un corps valué de Krull complet $\mathbb{L}$, voir la différence avec la valuation ordinaire ;

Considérons l'élément $X_1^{-1} \in \mathbb{F}$ alors

$$| X_1^{-1} | = (g_1^{-1}, 1, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots)$$

d'où $0 < | X_1^{-1} | < 1$

mais X_1^{-n} ne tend pas vers 0, comme

$$| X_1^{-n} | = (g_1^{-n}, 1, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots) > (1, g_2^{-1}, 1, \ldots\ldots\ldots) > 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$!

1.3 ESPACES DE BANACH ET ESPACES NORMÉS

1.3.1 **Espaces normés**

1.3.1.1 (**Définitions**)

Soit E un K-espace vectoriel, une norme sur E est une application $\| \quad \| : E \to [0, +\infty)$ qui satisfait :

(i) $\| x \| = 0$ si et seulement si $x = 0$ et $\| x \| \geq 0$

(ii) $\| \lambda x \| = | \lambda | \| x \|$
(iii) $\| x+y \| \leq \max(\| x \|, \| y \|)$
pour tous $x, y \in E$, $\lambda \in K$

-Un espace normé complet est appelé un espace de Banach.

-Deux normes sur un K-espace vectoriel E sont appelées équivalentes, si les métriques $(x,y) \mapsto \| x-y \|_1$ et $(x,y) \mapsto \| x-y \|_2$ induisent la même topologie.

1.3.1.2 (**Proposition**)

Deux normes sur un K-espace vectoriel E sont dites équivalentes si et seulement si il existe deux constantes $0 < c < C$ telles que :

$$c \| \quad \|_1 \leq \| \quad \|_2 \leq C \| \quad \|_1$$

1.3.1.3 (**Remarque**)

Sur un espace de dimension finie toutes les normes sont équivalentes, et l'espace est un espace de Banach pour chaque norme.

1.3.1.4 (**Exemples**)

(i) Soit e_1, e_2, ... ,e_n une base d'un K-espace vectoriel de dimension n ; alors

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} | \lambda_i |$$

est une norme.

(ii) Soit ℓ^∞ l'espace dont les éléments sont les suites bornées dans K , pour $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots) \in \ell^\infty$, $\lambda_i \in K$ $\sup_i | \lambda_i | < \infty$ muni de la norme non-archimédienne

$$\| x \|_\infty = \sup\{| \lambda_n | : n \in \mathbb{N}\}$$

est un espace de Banach (n.a).
(iii) $c_0 = \{(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots) \in \ell^\infty : \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = 0\}$ est un sous-espace fermé de ℓ^∞, d'où c'est un espace de Banach.
(iv) Soient X un espace topologique et BC(X) l'espace de tout les $f \in C(X)$ qui sont bornées ; alors BC(X) est un espace de Banach sous la norme

$$f \mapsto \| f \|_\infty = \sup\{| f(x) | : x \in X\}$$

(v) Soit M un corps valué complet contenant K comme un sous-corps. Alors M est un espace de Banach sur K par conséquent, en particulier, $\mathbb{C}_p$ est un espace de Banach sur $\mathbb{Q}_p$. Remarquons que $| \mathbb{C}_p |$ contient strictement $| \mathbb{Q}_p |$. Montrer qu'un vecteur ne peut être toujours normalisé.

PROBLÈME (1960)

Soit $(E, \| \quad \|)$ un espace de Banach sur K. Existe-t-il une norme $\| \quad \|'$ équivalente telle que $\| E \|' \subset | K |$, i. e : pour chaque vecteur non nul $x \in E$, il existe $\lambda \in K$ tels que : $\| \lambda x \| = 1$?

$\Rightarrow$ Il y a des réponses partielles, mais la réponse est en général inconnue
-Un bon test du cas ℓ^{∞} sur $\mathbb{C}_p$.

1.3.1.5 (**Remarques**)

(i) L'espace $\ell^2 = \{(\lambda_1, \lambda_2, ...) \in K^{\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{+\infty} | \lambda_n |^2 < \infty\}$ est un K-espace vectoriel.
Mais l'application $x \mapsto \| x \|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} | \xi_n |^2}$ satisfait (i), (ii) de (1.3.1.1), et ne satisfait pas (iii).
-On peut penser à la plus grande norme qui est $\leq \| \quad \|_2$.

(ii) Soit $(E, \| \quad \|)$ un espace normé alors l'ensemble $\| E \| \setminus \{0\} = \{\| x \| : x \in E, x \neq 0\}$ est l'union du supplémentaire multiplicatif de $| K^* |$ dans $(0, \infty)$ et inversement, chaque tel ensemble égale $\| E \| \setminus \{0\}$ pour un certain espace normé.

1.3.1.6 (**Définitions**)

Soit $(E, \| \quad \|)$ un espace normé et pour $r > 0$; $B(0,r) = \{x \in E : \| x \| \leq r\}$.
Clairement on a :
-Pour tout $x \in B(0,r)$ et pour tout $\lambda \in K, | \lambda | \leq 1 \Rightarrow \lambda x \in B(0,r)$. Grâce à l'inégalité triangulaire forte pour tous $x, y \in B(0,r) \Rightarrow x + y \in B(0,r)$.
Alors dans le langage algébrique, B(0,r) est un module sur l'anneau des entiers $\{\lambda \in K : | \lambda | \leq 1\}$. Un tel sous-module est dit un absolument convexe.

-Une semi-norme sur un K-espace vectoriel E est une application $q : E \to [0, \infty)$ qui satisfait $q(\lambda x) = | \lambda | q(x)$, $q(x+y) \leq \max(q(x), q(y))$ pour tous $x, y \in E$ et $\lambda \in K$ mais q(x) peut prendre la valeur 0 sans que x = 0, comme dans l'analyse archimédienne on peut définir une topologie localement convexe sur E comme la topologie la moins fine pour laquelle chaque élément de la collection $\mathcal{P}$ ($\mathcal{P}$ la famille de toutes les semi-normes continues sur E) est continue. Une sous-base de voisinages de 0 est formée par les ensembles $\{x \in E : q(x) < \varepsilon\}$ avec $q \in \mathcal{P}$, $\varepsilon > 0$ d'après ce qui précéde, ils sont absolument convexes.

Il existe des théories considérables sur les espaces localement convexes sur K.

1.3.1.7 (**Définitions**)

Soient E, F deux espaces vectoriels normés.
(i) $\mathcal{L}(E,F)$ c'est l'espace des applications linéaires continues de E dans F.
(ii) $E' = \mathcal{L}(E,K)$ est appelé l'espace conjugué ou l'espace de Banach dual de E.
(iii) $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E,E)$.

1.3.1.8 (**Proposition**)

Soient E, F deux espaces de Banach sur K et $T : E \to F$ une application linéaire, si T est continue en 0 alors T est lipschitzienne ; i. e : Il existe $M > 0$ tel que

$$\| Tx - Ty \| \leq M \| x - y \|$$

pour tout $x, y \in E$.

(Démonstration)

Il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $\| x \| \leq \delta$ on a $\| Tx \| \leq 1$ choisissons $\pi \in K$, $0 < | \pi | < 1$ et soit $x \in E$ arbitraire et non nul, alors il existe $\lambda \in K$ tel que

$$(*) \qquad | \pi | \delta \leq \| \lambda x \| \leq \delta$$

alors

$$\| T(\lambda x) \| \leq 1$$

d'où

$$\| Tx \| \leq | \lambda |^{-1}$$

lequel par (*)$\leq | \pi |^{-1} \delta^{-1} \| x \|$, et nous avons

$$\| Tx \| \leq M \| x \| \qquad (x \in E)$$

avec $M = | \pi |^{-1} \delta^{-1}$ alors par linearité pour $x, y \in E$

$$\| Tx - Ty \| \leq \| T(x-y) \| \leq M \| x - y \| .$$

1.3.1.9 (**Définition**)

Soient E, F deux espaces vectoriels normés
(i) Pour une application linéaire $T : E \to F$ soit

$$\| T \| = \inf\{c \in [0, \infty) : \ \| Tx \|_F \leq c \| x \|_E, \, pour\, tout \ \ x \in E\}$$

⌈ Vraiment dans l'analyse archimédienne, T est continue si et seulement si $\| T \|$ est finie, et $\| \quad \|$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$⌋
(ii) Si E n'est pas trivial, alors pour toute application linéaire $T : E \to F$

$$\| T \| = \sup\{ \frac{\| Tx \|_F}{\| x \|_E}, \ \ x \in E \, et \, x \neq 0\}$$

1.3.1.10 (**Remarque**)

La formule

$$\| T \|_0 = \sup\{\| Tx \| : \ x \in E, \ \| x \| \leq 1\}$$

définit une norme décente $\| \quad \|_0$ sur $\mathcal{L}(E,F)$ qui est équivalente à $\| \quad \|$, mais ne lui est identiques .

1.3.1.11 (**Exemple**)

Pour un certain nombre premier p, prenons F = $\mathbb{Q}_p$ avec la valuation comme norme et $E = \mathbb{Q}_p$ mais la norme est définie par : $\| x \| = q \, | x |_p$ pour $x \in E$, q un autre nombre premier différent de p.
L'application identité $I_{\mathbb{Q}_p} : E \to F$ nous trouvons $\| I \| = \frac{1}{q}$, mais $\| I \|_0 = \frac{1}{p}$.
Le même exemple montre que $\| T \|$ ne peut pas être

$$\sup\{\| Tx \| : \| x \| = 1\}$$

1.3.1.12 (**Propriétés**)

(i) Soient E un espace normé et E' l'espace des formes linéaires continues sur E, définissons

$$\| f \| = \sup\{\frac{| f(x) |}{\| x \|} : x \in E , x \neq 0\}$$

pour tout $f \in E'$ alors $\| \quad \|$ est une norme sur E', et pour cette norme E' est un espace de Banach sur K, c'est le dual de E.
(ii) Si $N_E \subseteq N_K$ ou si N_K dense dans $\mathbb{R}_+^*$ la définition de $\| f \|$ se réduit à

$$\| f \| = \sup\{| f(x) | : x \in E , \| x \| \leq 1\}$$

où $(N_E = \{\| x \| : x \in E , x \neq 0\};\ N_K = \{| \lambda | : \lambda \in K , \lambda \neq 0\})$
(iii) Soient I un ensemble préordonné (c-à-d muni d'une relation d'ordre réflexive et transitive) et filtrante à droite (c-à-d $\forall i,\ j \in I,\ \exists k \in I$ tel que $i \leq k,\ j \leq k$)
posons

$$c(I) = \{x = (\lambda_i)_{i\in I} \in K^I : \lambda_i\, convergente\}$$

alors les formes linéaires continues sur c(I) sont données explicitement par

$$f(x) = \sum_{i\in I} a_i x_i$$

où $x = (x_i)_{i\in I} \in c(I),\ a_i \in K$ tel que $\sup_{i\in I} | a_i | < \infty$ et le dual de c(I) est isomorphe à l'espace b(I) des familles bornées des l'éléments de K.
En particulier le dual de c_0 est isomorphe à ℓ^∞.

1.3.1.13 (**Propriété**)

Dans l'analyse fonctionnelle complexe l'espace dual de c_0 est isomorphe à ℓ^1.
Dans les théories non-archimédiennes la situation est totalement différente.
Pour $x \in c_0, y \in \ell^\infty$ où $x = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots) , y = (\mu_1, \mu_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ alors la somme

$$\langle x,y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n \mu_n$$

existe.
Pour chaque $y \in \ell^\infty$ on définit Ty par

$$(Ty)(x) = \langle x, y \rangle \qquad\qquad (x \in c_0)$$

alors $Ty \in c_0'$ et que T est une application linéaire isométrique de ℓ^∞ dans c_0', d'où le dual de c_0 est ℓ^∞.

1.3.1.14 (**Propriétés**)

Comme dans l'analyse archimédienne on peut remarquer que si F est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E,F)$ l'est aussi d'où, E', E'', E''', ... sont des espaces de Banach.

1.3.1.15 (**Définition et propriété**)

Soient E un espace normé sur K et $D \subset E$ un sous-espace fermé. On définit la norme naturelle sur E/D, comme suit : Soit $\pi : E \to E/D$ l'application quotient alors

$$\| \pi(x) \| = dist(x,D) = \inf\{\| x - d \| : d \in D\}$$

une vérification simple montre que $\| \lambda z \| = | \lambda | \| z \|$, $\| z+u \| \leq \max(\| z \| , \| u \|)$ pour tous $z,u \in E/D, \lambda \in K$. Vérifions la troisième propriété : Supposons que $\| z \| = 0$, on montre que z=0 ; z est de la forme x+D, comme

$$\| z \| = \inf\{\| x-d \| : \ d \in D\} = 0,$$

d'où il existe d_1, d_2, ...$\in D$ avec $\lim_{n\to+\infty} \| x-d_n \| = 0$ i. e : $x = \lim_{n\to+\infty} d_n$, comme D est fermé $x \in D$ ce qui implique que x+D est l'élément zéro de E/D.

1.3.1.16 (**Théorème**)

Si E est un espace de Banach et D un sous-espace fermé de E, alors E/D est un espace de Banach.

(Démonstration)

Soit z_1, z_2, ...une suite de Cauchy dans E/D, alors $\lim_{n\to+\infty}(z_{n+1}-z_n) = 0$ d'où il existe v_1, v_2 , ... dans E tels que : $\pi(v_1) = z_1$, $\pi(v_{n+1}) = z_{n+1}-z_n$ $\quad (n \geq 1)$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors, $x = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ existe dans E et

$$\pi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \pi(v_n) = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

1.3.1.17 (**Propriétés**)

(i) Soient E et F deux espaces vectoriels normés et D un sous-espace fermé de E, et $\pi : E \to E/D$ la surjection canonique, alors $T \to T \circ \pi$ est une isométrie linéaire de $\mathcal{L}(E/D,F)$ dans $\{S \in \mathcal{L}(E,F) : \ S(D) = \{0\}\}$
(ii) Soient E et F deux espaces vectoriels normés, tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ détermine $T' \in \mathcal{L}(F',E')$ par :

$$T'(f) = fT \qquad\qquad (f \in F') \quad et \ \| T' \| \leq \| T \|$$

(iii) La formule :

$$\hat{a}(f) = f(a) \qquad (a \in E \quad , \quad f \in E')$$

donne une application linéaire $a \mapsto \hat{a}$ de E dans E'' et nous avons $\| \hat{a} \| \leq \| a \|$ pour tout $a \in E$.
(iv) Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $T''\hat{a} = (\hat{Ta})$ on rappelle que l'application $j_E : a \to \hat{a}$ c'est l'application naturelle de E dans E'' alors $j_E : E \to E''$ et continue et que $\| j_E \| \leq 1$, mais j_E n'est pas une isométrie.

1.3.1.18 (**Définitions**)

(i) Un espace normé est appelé réflexif si j_E est une surjection isométrique.
(ii) Un espace normé est appelé pseudo-réflexif si j_E est une isométrie.
(iii) Un espace normé E est appelé topologiquement pseudo-réflexif si j_E est un homéomorphisme de E à valeurs dans un sous-espace de E''.
$\lceil$ Il est clair que (iii) est vrai si et seulement si, il existe un nombre réel positif c tel que $\| \hat{a} \| \geq c \| a \|$ pour tout $a \in E \rfloor$.

1.3.1.19 (**Propriété**)

Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces normés ; pour $f \in \oplus_{i\in I} E_i$ et $g \in \times_{i\in I} E_i'$; $i \to g_i(f_i)$ est un élément de $c_0(I)$ et que

$$\langle f,g\rangle = \sum_{i\in I} g_i(f_i) \qquad\qquad existe.$$

de plus

$$|\langle f,g\rangle| \leq \| f \| \| g \|$$

La formule

$$(Tg)(f) = \langle f,g\rangle \qquad\qquad (f \in \oplus_{i\in I} E_i\,,\, g \in \times_{i\in I} E'_{i\in I})$$

donne une isométrie linéaire T :

$$T : \times_{i\in I} E'_{i\in I} \to (\oplus_{i\in I} E_i)'$$

$\lceil$ où $\times_{i\in I} E'_i$ est l'ensemble de tous les éléments g de $\prod_{i\in I} E'_i$ ($\prod_i$ produit cartésien) pour lequel l'ensemble $\{\| g_i \|:\ i \in I\}$ est borné $\rfloor$

1.3.1.20 (**Définition**)

Soient E et F deux espaces normés ; une application linéaire bornée $\phi : E \to F$ est appelée strictement surjective, si pour tout $f \in F$ nous avons

$$\| f \| = \min\{\| e \|:\ e \in E\,,\, \phi(e) = f\}$$

(i. e : l'application surjective ϕ définit une norme sur F et pour tout $f \in F$ il existe $e \in \phi^{-1}(f)$ avec $\| e \| = \| f \|$.)

1.3.1.21 (**Remarque**)

Le théorème de Banach Steinhaus, le théorème du graphe fermé et le théorème de l'application ouverte sont restés vrais dans notre cas (n.a).

1.3.2 Opérateur avec un spectre vide

Soient E un espace de Banach et $T \in \mathcal{L}(E)$; comme dans le cas classique on définit le spectre de T, $\sigma(T)$ par :

$$\sigma(T) = \{\lambda \in K :\ T - \lambda I \ non\ \ inversible\}$$

(si $dimE < \infty$, $\sigma(T)$ est l'ensemble des valeurs propres de T).
Un fameux résultat classique est que $\sigma(T)$ non vide si le corps des scalaires est $\mathbb{C}$.
Maintenant, prenons l'espace de Banach M qui est donné dans (1.3.1.4 : Ex : v) et soit $a \in M\backslash K$ et posons $Tx = xa$ (x∈M) alors $T \in \mathcal{L}(M)$; mais pour $\lambda \in K$ nous avons $(T-\lambda I)x = (a-\lambda)x$, d'où $T-\lambda I$ a un inverse $x \to (a-\lambda)^{-1}x$, d'où $\sigma(T) = \emptyset$.

1.3.3 Relation commutative

Il est connu que dans un espace de Banach complexe E il n'existe pas $A, B \in \mathcal{L}(E)$ tels que AB-BA=I (*).
Mais dans le cas non-archimédien on a :
Prenons $E = c_0$; $A(\lambda_1, \lambda_2, \ldots.) = (\lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots)$ et $B(\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots..) = (0, \lambda_1, 2\lambda_2, 3\lambda_3, \ldots\ldots.)$ alors on vérifie sans peine que $A, B \in \mathcal{L}(E)$ (B est borné puisque $|n\lambda_n| \leq |\lambda_n|$!) et que (*) est satisfaite.

1.3.4 B_K Localement K-convexe

1.3.4.1 (**Définition**)

Soit A un anneau (commutatif unitaire).
Un A-module est un ensemble M muni d'une loi de groupe abélien (M,+) et d'une application modulation de $A \times M \to M$ telle que :
$\star\ a(x+y) = ax+ay \qquad \forall a \in A,\ et\ \forall x, y \in M.$
$\star\ (ab)x = a(bx) \qquad \forall a, b \in A,\ et\ \forall x \in M.$
$\star\ (a+b)x = ax+bx \qquad \forall a, b \in A,\ et\ x \in M.$
$\star\ 1_A x = x \qquad \forall x \in M.$

1.3.4.2 (**Exemple**)

Si A = K un corps
A-module = K-espace vectoriel.

1.3.4.3 (**Théorème**) ([34], théorème 1.1)

Soient A un B_K-module et $\lambda \in B_K$; alors $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ est un sous-module de A.

1.3.4.4 (**Théorème**) ([34], théorème 1.2)

Soient A un B_K-module et B un sous-module de A ; alors A/B est un B_K-module l'application quotient $\pi : A \to A/B$ est définit par $\pi(x) = x+B\ \ (x \in A)$ est un homomorphisme.

1.3.4.5 (**Définition**)

Soit A un B_K-module. Un sous-module B de A est dit absorbant si pour tout $x \in A$, il existe un $\lambda \in B_K$, $\lambda \neq 0$ tel que $\lambda x \in B$.

1.3.4.6 (**Définitions**)

-Soit A un B_K-module et X un sous-ensemble de A ; alors le B_K-module engendré par X est noté par co(X).
-A a un générateur fini s'il existe un sous-ensemble fini X de A tel que A = co(X).
-A a un générateur dénombrable s'il existe un sous-ensemble dénombrable X de A tel que A = co(X).

1.3.4.7 (**Définition**)

Soient A et B deux B_K-modules, nous disons que A est injecté dans B s'il existe un homomorphisme injectif $A \to B$; s'il existe un homomorphisme bijectif $A \to B$ alors A et B sont dits isomophes et on note $A \simeq B$.

1.3.4.8 (**Définition**)

Une semi-norme sur un B_K-module est une application $p : A \to [0, \infty)$ qui satisfait les propriétés :
(i) p(0)=0.
(ii) $p(x+y) \leq \max(p(x), p(y)) \qquad (x, y \in A)$.
(iii) $p(\lambda x) \leq p(x) \qquad (\lambda \in B_K\ ,\ x \in A)$.
(iv) Si $x \in A$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_K$ tels que $\lambda_n \to 0$, alors $p(\lambda_n x) \to 0 \quad (n \to \infty.)$
-Une semi-norme p est appelée fidèle si $p(\lambda x) = \mid \lambda \mid p(x)$ pour $(\lambda \in B_K, x \in A)$.

1.3.4.9 (**Définitions**)

-Une norme sur un B_K-module est une semi-norme p avec la propriété $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pour $(x \in A)$.

-La norme usuellement notée par $\| \quad \|$.
-Un B_K-module normé est la donnée de la paire (A, $\| \quad \|$), avec A un B_K-module et $\| \quad \|$ une norme sur A.

1.3.4.10 (**Théorème**) ([34], théorème 1.8)

Soient A un B_K-module et p une semi-norme sur A. Alors ker(p) est un sous-module de A.
Soit $\overline{p} : A/kerp \to [0,\infty)$ est défini par $\overline{p}(x+kerp) = p(x)$, $(x \in A)$ alors $(A/kerp, \overline{p})$ est un B_K-module normé.

1.3.4.11 (**Définitions**)

-Une topologie B_K-module, est la paire (A, τ) où A est un B_K-module et τ est une topologie séparée sur A tels que l'addition $A \times A \longrightarrow A$ et la multiplication par un scalaire $B_K \times A \longrightarrow A$ sont des applications continues.
-La topologie B_K-module (A, τ) est appelée localement convexe s'il existe une base de voisinages de 0 constituée de sous-modules de A.

1.3.4.12 (**Théorème**) ([34], théorème 1.10)

Un B_K-module normé est localement convexe.

1.3.4.13 (**Définition**)

Un B_K-module localement convexe A est dit borné, si pour tout sous-module ouvert U de A il existe un $\lambda \in B_K$, $\lambda \neq 0$, tel que $\lambda A \subset U$.

1.3.4.14 (**Théorème**) ([34], théorème 1.12)

Le produit d'une famille de B_K-modules localement convexes muni de la topologie produit est un B_K-module localement convexe.

1.3.4.15 (**Définition**)

Soit (A, τ) un B_K-module localement convexe et B un sous-module de A. Alors la restriction de la topologie τ sur B est notée τ/B.

1.3.4.16 (**Définition**)

Soient (A, τ) et (B, ν) deux B_K-modules localement convexes. Nous disons (A, τ) est topologiquement injecté dans (B, ν) s'il existe un homomorphisme injectif ρ de A dans B, tel que l'application

$$\rho : (A,\tau) \longrightarrow (\rho(A), \nu/\rho(A))$$

soit un homéomorphisme.

1.3.4.17 (**Théorème**) ([34], théorème 1.15)

(i) Tout espace localement convexe séparé sur K est un B_K-module localement convexe.
(ii) Si (A, τ) est un B_K-module localement convexe et B est un sous-module de A, alors (B, τ/B) est un B_K-module localement convexe.

1.3.4.18 (**Théorème**) ([34], théorème 1.16)

Soit (A, τ) un B_K-module localement convexe.
Alors (A, τ) est topologiquement injecté dans un espace localement convexe si et seulement s'il existe une

collection séparante de semi-normes fidèles sur A engendreant τ.

1.3.4.19 (**Définition**)

-Un B_K-module normé (A, $\|\quad\|$) est dit de type dénombrable si il existe un sous-ensemble dénombrable X de A tel que co(X) est dense dans A.
-Un B_K-module localement convexe est dit de type dénombrable si pour toute semi-norme continue p sur A l'espace normé $(A/ker p, \overline{p})$ est de type dénombrable.

1.4 ORTHOGONALITÉ

Dans les espaces de Banach le meilleur exemple est : les espaces de Hilbert.
Un produit intérieur (.,.) dans un espace sur $\mathbb{C}$ satisfait :
(i) $x \to (x,y)$ est linéaire en x, pour tout y.
(ii) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.
(iii) $(x,x) > 0$ chaque fois que x$\neq$0.
Dans le cas non archimédien nous remplaçons le conjugué complexe par l'automorphisme de K, $\lambda \mapsto \lambda^*$ pour lequel $\lambda^{**} = \lambda$ et $|\lambda^*| = |\lambda|$ pour tout $\lambda \in K$. Comme K est non ordonné, on remplace (iii) par (x,x)$\neq$0 si x$\neq$0 ; aussi sur un K-espace vectoriel E l'application (.,.) : $E \times E \longrightarrow K$ est un produit intérieur si :
$(i)' x \mapsto (x,y)$ est linéaire pour tout $y \in E$.
$(ii)' (x,y) \mapsto (y,x)^*$ pour tout $x,y \in E$.
$(iii)' (x,x) \neq 0 \; si \; x \neq 0, \; x \in E$.
Pour E comme ci-dessus et $x \in E$ nous posons

$$\| x \| = \sqrt{|(x,x)|}$$

De ce point on peut avancer les théories comme dans le cas classique.

1.4.1 (**Théorème**)

Soit (.,.) un produit intérieur d'un espace de Banach E sur K tel que $|(x,x)| = \| x \|^2$ pour tout $x \in E$; supposons que chaque sous-espace fermé a un supplémentaire orthogal ; alors dimE$< \infty$.

1.4.2 (**Définition**)

Soient x, y deux éléments d'un espace normé E sur K ; nous disons que le vecteur x est orthogonal à y si la distance de x à l'espace Ky est :

$$\| x \| = \min\{\| x - \lambda y \| : \; \lambda \in K\}$$

ce minimum atteint pour $\lambda = 0$; et on note $x \perp y$.

1.4.3 (**PRINCIPE DE :A.C.M.Van.Rooij**)

$$si \; x,y \in E, \; \| x - y \| \geq \| x \|, \; alors \; \| x - y \| \geq \| y \|$$

(Démonstration)

Supposons : $\| x - y \| \geq \| x \|$ alors

$$\| y \| = \| y - x + x \| \leq \max(\| x - y \|, \| x \|) \leq \| x - y \|$$

1.4.4 (**Proposition**)

$$si\, x \perp y \;\; alors \;\; y \perp x$$

(Démonstration)

Il suffit uniquement de montrer que $\| y - \mu x \| \geq \| y \|$ pour tout $\mu \in K$. Ceci est clair pour $\mu = 0$; si $\mu \neq 0$ nous avons $\| y - \mu x \| = | \mu | \| x - \mu^{-1} y \|$, lequel par $x \perp y, \geq | \mu | \| x \| = \| \mu x \|$ et par le principe de : A. C. M. Van Rooij, $\| y - \mu x \| \geq \| y \|$.

1.4.5 (**Proposition**)

$x \perp y$ si et seulement si pour tout $\lambda, \mu \in K$

$$\| \lambda x + \mu y \| = \max(\| \lambda x \|, \| \mu y \|)$$

1.4.6 (**remarques**)

(i) K^2 muni de la norme

$$(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto \max(| \lambda_1 |, | \lambda_2 |)$$

alors (1,0)$\perp$(0,1), mais aussi on a (1,1)$\perp$(1,0) et (1,1)$\perp$(0,1).
(ii) Soit E un espace normé alors $\not\perp$ (non orthogonal) est une relation d'équivalence sur E $\setminus\{0\}$.

1.4.7 (**Définition**)

Une suite e_1, e_2, ... des vecteurs non nuls dans un espace normé est appelée orthogonale si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall \lambda_1$, λ_2, ... , $\lambda_n \in K$.

$$\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \| = \max\{\| \lambda_i e_i \| : \;\; 1 \leq i \leq n\}$$

(i. e : chaque e_i est orthogonal à tous les vecteurs de l'espace vectoriel $\{e_j : \;\; j \neq i\}$).
La suite est orthonormale si, on ajoute, $\| e_i \| = 1, \; \forall i$

1.4.8 (**Théorème de perturbation**)

Soient e_1, e_2, ...une suite orthogonale dans un espace normé E et f_1, f_2, ... $\in$ E tels que $\| f_n - e_n \| < \| e_n \|$ pour tout n ; alors la suite f_1, f_2, ...est orthogonale.

(Démonstration)

Soient λ_1, λ_2, ... , $\lambda_n \in K$, et posons :

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i$$

par supposition nous avons $\| f_i \| = \| e_i \|$ pour tout i, d'où

$$\| y - x \| = \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - e_i) \| \leq \max_i | \lambda_i | \| f_i - e_i \| < \max_i | \lambda_i | \| e_i \|$$

il suit que :

$$\| y \| = \| x \| = \max_i | \lambda_i | \| e_i \| = \max_i | \lambda_i | \| f_i \|$$

DANS LE RESTE DE CETTE SECTION, E EST UN ESPACE DE BANACH SUR K.

Il est facile de voir que :

Pour une suite orthogonale $e_1, e_2,$ .... et $\lambda_1, \lambda_2,$ ....$\in$ K avec $\| \lambda_n e_n \| \longrightarrow 0$ nous avons :

$$\| \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \| = \max_i \| \lambda_i e_i \|$$

1.4.9 (**Définition**)

La famille $(e_n)_{n\geq 1}$ est appelée base orthogonale pour E si elle est orthogonale et pour tout $x \in E$ a une expression unique de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$$

où $\lambda_i \in K$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$

1.4.10 (**Proposition**)

Si la suite $e_1, e_2,$ .... est orthogonale et $[e_1, e_2,$ ....] (le K-espace vectoriel engendré par la suite) est dense dans E alors $e_1, e_2,$ ....est une base orthogonale.

(Démonstration)

Soit $\pi \in K$, $0 <\mid \pi \mid < 1$ alors il existe $\mu_1, \mu_2,$ ....$\in K$ tels que $\mid \pi \mid \leq \| \mu_n e_n \| \leq 1$. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $(\lambda_1, \lambda_2,$.............$) \in c_0$, posons T$(\lambda_1, \lambda_2,$.............$)=\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mu_n e_n$.

Il est clair que T une application linéaire $c_0 \to E$, et que pour x=$(\lambda_1, \lambda_2,$.............$)\in c_0$

$$\mid \pi \mid \| x \| = \mid \pi \mid \max_n \mid \lambda_n \mid \leq \| Tx \| \leq \| x \|$$

donc T est un homéomorphisme, d'où Tc_0 est complet, mais Tc_0 contient toutes les combinaisons linéaires finies de $e_1, e_2,$ .... , d'où Tc_0 est dense dans E, il suit que $Tc_0 = E$, C.Q.F.D.

1.4.11 (**Exercice**)

La suite de l'exercice (1.2.4.2)

(i) Montrer que pour j $\in \{1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, p^n\}$

$$\mid \binom{p^n}{j} \mid = p^{-n}$$

(ii) Montrer que $S_{pj} = S_j$ pour chaque j$\in \mathbb{N}$.

(iii) Utiliser (i) et (ii) pour montrer

$$\mid \binom{p^n}{j} \mid = \frac{\mid p^n \mid}{\mid j \mid} \qquad (j \in \{1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, p^n\})$$

1.4.12 (**Exemple d'une base orthogonale**)

"BASE DE MAHLER"

Une base orthogonale de $C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$. Pour $x \in \mathbb{Z}_p$ et $n \in \{0, 1, 2, \ldots\ldots..\}$ nous posons $e_n(x) = \binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\ldots\ldots.(x-n+1)}{n!}$ alors nous avons

(i) e_n est un polynôme de degré n.

(ii) $e_n(m) = 0$ si $n > m$; $e_n(n) = 1$.
(iii) $e_n(-1) = (-1)^n$.
(iv) $\| e_n \|_\infty = 1$ pour tout n.
(v) e_0, e_1, ...est une suite orthogonale.

(Démonstration)

Soient λ_0, λ_1, ... , $\lambda_n \in K$; alors on donne la valeur 0 à x donc

$$\| \lambda_0 e_0 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n e_n \|_\infty \geq | \lambda_0 e_0(0) + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n e_n(0) | \geq | \lambda_0 e_0(0) | = | \lambda_0 | \| e_0 \|_\infty = \| \lambda_0 e_0 \|_\infty$$

le principe de : A. C. M. Van. Rooij

$$\| \lambda_0 e_0 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n e_n \|_\infty \geq \| \lambda_1 e_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n e_n \|_\infty$$

par la substitution de la valeur de x par 1 , il donne

$$\| \lambda_1 e_1 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n e_n \|_\infty \geq | \lambda_1 e_1(1) | = | \lambda_1 | \| e_1 \|_\infty = \| \lambda_1 e_1 \|_\infty$$

on continue le processus, nous obtenons :

$$\| \lambda_0 e_0 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_n e_n \|_\infty \geq \max\{\| \lambda_i e_i \| : \ 0 \leq i \leq n\} = \max\{| \lambda_i | : \ 0 \leq i \leq n\}$$

d'où e_0, e_1, ...est une suite orthogonale. Pour achever la démonstration, montrer que la suite est une base.
L'idée la preuve : si nous imaginons que $f \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$ a une expression :

$$f(x) = a_0\tbinom{x}{0} + a_1\tbinom{x}{1} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

cherchons les coefficients a_0, a_1,........ pour x=0 nous trouvons $f(0) = a_0$.
pour x=1 nous trouvons $f(1) = a_0 + a_1$.
pour x=2 nous trouvons $f(2) = a_0 + 2a_1 + a_2$.
.
.
.
$a_0 = f(0)$; $a_1 = f(1) - f(0)$; $a_2 = f(2) - 2f(1) + f(0)$
en général nous procédons comme suit :

$$E : C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p) \longrightarrow C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$$

l'opérateur shift

$$(Ef)(x) = f(x+1) \qquad\qquad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

alors

$$(Ef)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\tbinom{x+1}{n}$$

on utilise

$$\tbinom{x+1}{n} = \tbinom{x}{n} + \tbinom{x}{n-1} \qquad\qquad (n \geq 1)$$

on trouve

$$(Ef)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n-1} = f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{x}{n}$$

d'où

$$(E-I)f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{x}{n}$$

(I = l'opérateur identité) on applique E-I, k fois

$$(E-I)^k f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{x}{n}$$

pour x=0

$$(E-I)^k f(0) = a_k$$

puisque

$$(E-I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} E^k$$

on a

$$(*) \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(k)$$

$$(E-I)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x+k)$$

comme

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(x)$$

on obtient

$$(**) \qquad (E-I)^n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (f(x+k) - f(x))$$

on va prouver que pour

$$f \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p),$$
$$\| (E-I)^n f \|_\infty \longrightarrow 0$$

comme

$$\| f \|_\infty \geq \| (E-I) f \|_\infty \geq \| (E-I)^2 f \|_\infty \geq \ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Il suffit de montrer que $\| (E-I)^{p^n} f \|_\infty \longrightarrow 0$
Soit $\varepsilon > 0$, f uniformément continue ;

donc il existe un l tels que $| k |< p^{-l}$ implique $| f(x+k) - f(x) |< \varepsilon$ pour tout x.
Choisissons n assez grand tel que $p^{-n} < p^{-l}\varepsilon$.
Soit
$k \in \{1, \ldots\ldots\ldots, p^n\}$
si $| k |< p^{-l}$ alors $| \binom{p^n}{k}(-1)^{p^n-k}(f(x+k) - f(x)) |< \varepsilon$
si $| k |> p^{-l}$ alors $| \binom{p^n}{k}(-1)^{p^n-k}(f(x+k) - f(x)) |\leq| \binom{p^n}{k} ||\| f \|_\infty \leq \frac{|p^n|}{|k|} \| f \|_\infty$.
par (l'exercice : 1. 4. 11) $< p^{-n+l} \| f \|_\infty < \varepsilon \| f \|_\infty$.
par conséquent, $\| (E-I)^n f \|_\infty \longrightarrow 0$, utiliser (**) pour ce fait, et (*) il suit que $a_n \longrightarrow 0$ pour tout $f \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$
donc $g : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ définit une fonction continue sur $\mathbb{Z}_p$.
remarquons que si $(E-I)^n f(0) = (E-I)^n g(0)$ pour tout n, on trouve $f(0) = g(0),\ f(1) = g(1)$, ..., comme $\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{Z}_p$ nous avons $f = g$.

1.4.13 (**Théorème**)

les fonctions e_0, e_1,.........qui sont données par

$$e_n(x) = \binom{x}{n}$$

forment une base orthonormale de $C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$ si $f \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$ a une expression

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n.$$

alors

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^{n-k} f(k)$$

1.4.14 (**Corollaire**)

"VERSION P-ADIQUE DE WEIERSTRASS "

Les fonctions continues sur $\mathbb{Z}_p$ ont des approximations uniformes par des fonctions polynômiales.

ON PEUT PROUVER LA GÉNÉRALISATION SUIVANTE (STONE-WEIERSTRASS)

Soient X un espace topologique compact, H une sous-algèbre de $C(X \longrightarrow K)$ qui contient les constantes et sépare les points de X. Alors H est uniformément dense dans $C(X \longrightarrow K)$

1.4.15 (**Remarque**)

Dans l'analyse classique, la fonction de la forme $x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ s'appelle souvent la fonction intégrale de f. Dans le cas p-adique nous avons la fonction somme pour un $f \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$ défini par $F \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$.

$$F(n) = f(0) + f(1) + \ldots\ldots\ldots + f(n-1) \ , \ (n \geq 1)$$
$$F(0) = 0$$

1.4.16 (**Corollaire**)

"INTÉGRALE DE p-ADIQUE HAAR"

Soit $\varphi \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)'$ qui a la propriété $\varphi(f_1) = \varphi(f)$, $(f \in C(\mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{C}_p)$, où f_1 est le 'schift' $f_1(x) = f(x+1)$. Alors $\varphi = 0$.

1.4.17 (**Définition**)

Soit $t \in (0,1]$, une suite e_1, e_2, ... dans un espace normé est appelée t-orthogonale si pour tous $n \in \mathbb{N}\, et$, $\lambda_1, \ldots\ldots\ldots, \lambda_n \in K$.

$$\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \| \geq t \max\{\| \lambda_i e_i \|:\ i \in \{1,2,\ldots\ldots.n\}\}$$

Dans le même esprit nous avons la notion d'une base t-orthogonale d'un espace de Banach.
1-orthogonale= orthogonale

1.4.18 (**Remarque**)

Si e_1, e_2, ... est une base t-orthogonale de E, on peut introduire une nouvelle norme $\| \quad \|^{\sim}$ par $\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n \|^{\sim} = \max_n \| \lambda_n e_n \|$; alors la suite e_1, e_2, ... est une base orthogonale de E pour la norme $\| \quad \|^{\sim}$, de plus les normes $\| \quad \|$ et $\| \quad \|^{\sim}$ sont équivalentes.

1.4.19 (**t- VERSION DU PRINCIPE DE : A. C. M. Van Rooij**)

Si $t \in (0,1]$ et $\| x-y \| \geq t \| x \|$ alors $\| x-y \| \geq t \| y \|$.

1.5 **DÉNOMBRABILITÉ**

-Un espace topologique est dit séparable s'il a un sous-ensemble dénombrable dense.
-Dans un espace métrique séparable, tout sous-ensemble est séparable.
-Dans l'analyse fonctionnelle classique, certains résultats sont obtenus par les espaces de Banach séparables.
-Dans notre cas (n.a) la séparabilité n'est pas la même notion.
-Si K n'est pas séparable alors chaque espace de dimension 1 a la même propriété.

1.5.1 (**Définition**)

Un espace normé est appelé de type dénombrable s'il a un sous-ensemble dénombrable, dont l'espace vectoriel engendré est dense.

1.5.2 (**Remarque**)

Si K est séparable, alors un espace normé sur K est de type dénombrable si et seulement si, il est séparable.

1.5.3 (**Lemme**)

Tout espace de dimension finie a une base t-orthogonale, pour chaque t$\in$ (0,1).

(Démonstration)

Soit E un espace de dimension n et $x_1, x_2, ..., x_n$ la base algébrique de E, choisissons $t_1,\ t_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\ t_{n-1} \in (0,1)$ tels que leur produit $t_1 t_2 .....t_{n-1} \geq t$ (par exemple $t_i = \sqrt[n-1]{t})$; Soient $e_1 = x_1$, posons $D_1 = [e_1] = [x_1]$ ([ ] indique l'espace engendré par l'ensemble) alors D_1 est fermé, $x_2 \notin D_1$ donc dist $(x_2, D_1) > 0$ cette distance peut ne pas être atteinte, mais certainement, il existe un $d_1 \in D_1$ tel que :

$$\| x_2 - d_1 \| \leq t_1^{-1} dist(x_2, D_1)$$

Soit maintenant $e_2 = x_2 - d_1$, alors $D_2 = [e_1, e_2] = [x_1, x_2]$ et $dist(e_2, D_1) = dist(x_2, D_1)$ et

$$\| e_2 \| = \| x_2 - d_1 \| \leq t_1^{-1} dist(e_2, D_1)$$

on continue ce processus, on trouve un $d_2 \in D_2$ avec

$$\| x_3 - d_2 \| \leq t_2^{-1} dist(e_3, D_2)$$

et on prend $e_3 = x_3 - d_2$, alors on a $D_3 = [e_1, e_2, e_3] = [x_1, x_2, x_3]$ et

$$\| e_3 \| = \leq t_2^{-1} dist(e_3, D_2)$$

par induction on trouve

$$(*) \begin{cases} \| e_2 \| & \leq & t_1^{-1} dist(e_2, [e_1]) \\ \| e_3 \| & \leq & t_2^{-1} dist(e_3, [e_1, e_2]) \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ \| e_n \| & \leq & t_{n-1}^{-1} dist(e_n, [e_1, e_2, ..., e_{n-1}]) \end{cases}$$

notre revendication est que $e_1,\ e_2, \ldots\ldots\ldots\ldots,\ e_n$ est t-orthogonale. En effet : soient $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \lambda_n \in K$; montrons que :

$$\| \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \| \geq t \max\{\| \lambda_i e_i \| : \ 1 \leq i \leq n\}$$

par la dernière ligne de (*) on a si $\lambda_n \neq 0$

$$\begin{array}{rcl} \| \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \| & = & | \lambda_n | \| \lambda_n^{-1} \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n^{-1} \lambda_{n-1} e_{n-1} + e_n \| \\ & \geq & | \lambda_n | \, dist(e_n, [e_1, e_2, ..., e_{n-1}]) \\ & \geq & t_{n-1} | \lambda_n | \| e_n \| \end{array}$$

aussi on a

$$\| \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \| \geq t_{n-1} \| \lambda_n e_n \|$$

(cette formule est aussi vraie si $\lambda_n = 0$). Par l'extension du principe de : A. C. M. Van Rooij (1.4.19) on a :

$$\| \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \| \geq t_{n-1} \| \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{n-1} e_{n-1} \|$$

maintenant avec les mêmes techniques comme ci-dessus on peut prouver :

$$\| \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_{n-1} e_{n-1} \| \geq t_{n-2} \| \lambda_{n-1} e_{n-1} \|$$

d'où

$$\| \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \| \geq t_{n-1} t_{n-2} \| \lambda_{n-1} e_{n-1} \|$$

par induction nous arrivons à :

$$\begin{array}{rcl} \| \lambda_1 e_1 + ...+\lambda_n e_n \| & \geq & t_{n-1} \| \lambda_n e_n \| \\ \| \lambda_1 e_1 + ...+\lambda_n e_n \| & \geq & t_{n-1}t_{n-2} \| \lambda_{n-1} e_{n-1} \| \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ \| \lambda_1 e_1 + ...+\lambda_n e_n \| & \geq & t_{n-1}t_{n-2}.....t_1 \| \lambda_1 e_1 \| \end{array}$$

or $t_{n-1},\ t_{n-1}t_{n-2}, ..., t_{n-1}t_{n-2}.....t_1$ sont tous $\geq t$
on obtient

$$\| \lambda_1 e_1 + ...+\lambda_n e_n \| \geq t \max\{\| \lambda_i e_i \| :\ 1 \leq i \leq n\}$$

ce qui achève la démonstration.

1.5.4 (**Remarque**)

On peut montrer que si K est sphériquement complet, toutes les distances ci-dessus (dans la preuve du lemme) sont atteintes par conséquent, chaque espace de dimension finie a une base orthogonale.
Mais, si K n'est pas sphériquement complet on peut construire un espace de dimension 2 sans base orthogonale. ⌈En effet : soient $B(\lambda_1, r_1) \supset B(\lambda_1, r_1) \supset$ .... une suite de boules dans K a une intersection vide on définit pour $(\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$

$$\| (\alpha_1, \alpha_2) \| = \lim_{j \to \infty} | \alpha_1 - \alpha_2 \lambda_j |$$

alors on peut montrer que cette limite existe, et que $\| \quad \|$ est une norme sur K^2 et que $\| (\alpha_1, \alpha_2) \| \in | K |$ pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in K^2$ et on montre aussi que $(\alpha_1, \alpha_2) \perp (1, 0) \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et on déduit que deux vecteurs arbitraires non nuls dans K^2 ne sont pas orthogonaux ⌋.

1.5.5 (**Théorème**)

Soit $t \in (0, 1)$. Alors tout espace de Banach de type dénombrable a une base t-orthogonale.

(Démonstration)

Soit E un espace de Banach de dimension infinie et de type dénombrable, choisissons $t_1,\ t_2, ... \in (0, 1)$ tels que $\prod_{i=1}^{\infty} t_i \geq t$; soit $x_1,\ x_2, ...$ tel que $[x_1,\ x_2, ...]$ est dense dans E, on peut assumer que $x_1,\ x_2, ...$ sont linéairement indépendants.
Donc on continue par induction comme ce qui est fait dans la preuve du lemme (1.5.3) nous obtenons $e_1,\ e_2, ... \in E$ tel que :
$[e_1,\ e_2, ...] = [x_1,\ x_2, ...]$ est dense dans E et tel que la suite $e_1,\ e_2, ..., e_n$ est $t_1 t_2 ....t_{n-1}$-orthogonale pour tout n, alors il suit que $e_1,\ e_2, ..., e_n$ est t- orthogonale pour tout n, i. e : $e_1,\ e_2, ...$ est t-orthogonale.

1.5.6 (**Corollaire**)

Tout espace de Banach de dimension infinie et de type dénombrable est linéairement homéomorphe à c_0.

1.5.7 (**Définition et propriété**)

Une projection est un opérateur $P \in \mathcal{L}(E)$ avec $P^2 = P$ si $P \neq 0$ alors $\| p \| \geq 1$. P est une orthoprojection si $\| P \| \leq 1$, alors $ImP \perp kerP$ et $ImP \oplus kerP = E$.

1.5.8 (**Théorème**) ([42], théorème 3.9)

(i) Si E_1, E_2 sont deux sous-espaces fermés d'un espace de Banach E, qui sont supplémentaires chacun à l'autre, il est clair que l'application $E_1 \oplus E_2 \longrightarrow E$ un homéomorphisme, i. e : il existe un nombre positif t tel que :

$$\| x+y \| \geq t \max\{\| x \|, \| y \|\} \qquad (x \in E_1,\ y \in E_2)$$

(ii) Pour un sous-espace fermé D d'un espace de Banach E, les conditions suivantes sont équivalentes :
(α) D est supplémentaire.
(β) Il existe une projection de E dans D.
(γ) Si F est un espace de Banach, tout $S \in \mathcal{L}(D,F)$ a une extention $\overline{S} \in \mathcal{L}(E,F)$.
(iii) Si D est un sous-espace linéaire fermé d'un espace de Banach E, alors tout suplémentaire de D est linéairement homéomorphe à E/D.

1.5.9 (**Définition et propriété**)

(i) Soient X un ensemble non vide et S une fonction $X \longrightarrow (0,\infty)$; pour $f : X \longrightarrow K$ posons

$$\| f \|_s = \sup\{| f(x) | S(x) :\ x \in X\}$$

l'ensemble des fonctions $f : X \longrightarrow K$ pour lesquelles $\| f \|_s$ est finie forme un espace vectoriel $\ell^\infty(X : S)$, qui est un espace de Banach sous la norme $\| \quad \|_s$.
(ii) Notons par $c_0(X : S)$ le sous-espace fermé de $\ell^\infty(X : S)$ constitué des fonctions f avec la propriété pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in X : | f(x) | S(x) \geq \varepsilon\}$ est fini.
(iii) $c_0(X : S)$ est l'enveloppe fermée dans $\ell^\infty(X : S)$ de l'ensemble de toutes les fonctions caractéristiques des sous-enembles constitués d'un seul point.
Trivialement : $\ell^\infty(X : 1)$=$\ell^\infty(X)$; $c_0(X : 1) = c_0(X)$.

1.5.10 (**Théorème**) ([42], théorème 3.16)

Soit E un espace de Banach de dimension infinie et de type dénombrable.
(i) Pour toute suite t_1, t_2,........... d'éléments réels dans l'intervalle (0,1), E a une base $\{e_i :\ i \in \mathbb{N}\}$ telle que

$$\| \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \| \geq \max\{t_i \| \alpha_i e_i \| :\ i \in \{1,2,......m\}\}$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et α_1, α_2,...........,$\alpha_m \in K$.
(ii) Pour tout $t \in (0,1)$ E contient une suite t-orthogonale qui forme une base pour E et de plus E est linéairement homéomorphe à c_0.
(iii) Pour tout $t \in (0,1)$ il existe une fonction
$S : \mathbb{N} \longrightarrow (0,1)$ et une bijection linéaire $S : c_0(\mathbb{N} : S) \longrightarrow E$ telle que

$$t \| x \| \leq \| Sx \| \leq \| x \| \qquad (x \in c_0(\mathbb{N} : S))$$

(iv) E est pseudo-réflexif.
(v) Soit D un sous-espace fermé de E, alors D et E/D sont de type dénombrables, de plus D est supplémentaire. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une projection de E dans D de norme inférieure ou égale à $1+\varepsilon$.
(vi) Soit D un sous-espace de E, soit $f \in D'$ et $\varepsilon > 0$ alors f a une extention $\overline{f} \in E'$ avec

$$\| \overline{f} \| \leq (1+\varepsilon) \| f \|$$

le résultat (vi) s'appelle (1+ε) HAHN-BANACH.

1.6 **DUALITÉ**

1.6.1 (**Théorème de Hahn Banach**)

Soient K un corps valué sphériquement complet et E un espace normé sur K. Alors pour tout sous-espace fermé D et pour tout $f \in D'$ a une extension $\overline{f} \in E'$ telle que $\| \overline{f} \| = \| f \|$.

(Démonstration)

Comme dans le cas classique, la démonstration est achevée par une application du lemme de Zorn.
Il suffit de la montrer pour $E = D + Ka$ avec $a \in E \backslash D$, par linéarité, si nous fixons $\eta = \overline{f}(a)$ alors $\overline{f}$ est déterminée par :

$$\lambda a + d \longmapsto \lambda\eta + f(d) \qquad (\lambda \in K,\ d \in D)$$

notre besoin est : $\| \overline{f} \| \leq \| f \|$ c-à-d :

$$(*) \qquad | \lambda\eta + f(d) | \leq \| f \| \| \lambda a + d \| \qquad (\lambda \in K,\ d \in D)$$

alors (*) est vraie pour $\lambda = 0$, pour que nous ayons (*) pour $\lambda \neq 0$ il suffit pour $\lambda = 1$:

$$| \eta + f(d) | \leq \| f \| \| a + d \| \qquad (d \in D)$$

par conséquent :

$$\eta \in B(-f(d), \| f \| \| a + d \|) \qquad (d \in D)$$

pour que nous soyons capables de choisir η il faut que les boules $B(-f(d), \| f \| \| a+d \|)$ aient une intersection non vide quand d parcourt D. Par la complétude sphérique il suffit de montrer que deux boules quelconques de la famille ont une intersection non vide i. e : la distance entre deux centres quelconques $-f(d_1),\ -f(d_2)$; ≤ le maximum de $\| f \| \| a+d_1 \|, \| f \| \| a+d_2 \|$
mais ceci est vrai en effet :
$| f(d_1) - f(d_2) | \leq \| f \| \| d_1 - d_2 \| \leq \| f \| \| d_1 + a - a - d_2 \| \leq \max(\| f \| \| a+d_1 \|, \| f \| \| a+d_2 \|)$

⌈ On peut généraliser ce théorème, en remplaçant K par F s'il est sphériquement complet ⌋.

1.6.2 (**Définition**)

Pour tout espace normé E sur K, nous avons comme dans le cas complexe, l'application $j_E : E \longrightarrow E''$ est donnée par

$$j_E(x)(f) = f(x) \qquad (f \in E',\ x \in E)$$

1.6.3 (**Résultats**)

(α) j_E est une application linéaire continue telle que :

$$\| j_E \| \leq 1.$$

(β) Si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, avec F un second espace normé alors $T' : F' \longrightarrow E'$ est défini par $T'(f) = f \circ T$, $(f \in F')$. T' est appelé l'adjoint de T et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & F \\ \downarrow j_E & & \downarrow j_F \\ E'' & \xrightarrow{T''} & F'' \end{array}$$

est commutatif.
(γ) Si E est un espace de Banach de type dénombrable ou si K est sphériquement complet. Alors l'application canonique $j_E : E \longrightarrow E''$ est une isométrie.
(δ) Un espace normé est appelé réflexif si j_E est une isométrie bijective de $E \longrightarrow E''$.
(ε) Les espaces réflexifs sont complets.
(ζ) Tout espace de dimension finie est réflexif.

1.6.4 (**Lemme**)

Soient K sphériquement complet et E un espace de Banach réflexif sur K. Alors tout sous-espace fermé de E est réflexif.

(Démonstration)

Soit D un sous-espace fermé de E, $i : D \to E$ l'inclusion et $\pi : E \longrightarrow E/D$ l'application quotient alors d'après (1.6.3 :(β)) on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} D & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{\pi} & E/D \\ \downarrow j_D & & \downarrow j_E & & \downarrow j_{E/D} \\ D'' & \xrightarrow{i''} & E'' & \xrightarrow{\pi''} & (E/D)'' \end{array}$$

remarquer que $\pi \circ i = 0$, d'où $\pi'' \circ i'' = 0$; d'après (γ) et (δ) de (1.6.3) il suffit uniquement de montrer que j_D est surjectif, soit $\theta \in D''$, alors $i''(\theta) \in E''$ par réflexivité de E il existe $x \in E$ tel que $j_E(x) = i''(\theta)$ comme $0 = \pi'' \circ i''(\theta) = \pi'' \circ j_E(x) = j_{E/D} \circ \pi(x)$; et par l'injectivité de $j_{E/D}$ on a $\pi(x) = 0$ i. e : $x = i(d)$ pour un certain $d \in D$ aussi $i'' \circ j_D(d) = i''(\theta)$ i.e :$j_D(d) - \theta \in ker(i'')$ et par le théorème de Hahn Banach $i' : E' \longrightarrow D'$ est surjectif et i'' est injectif d'où il suit que $\theta = j_D(d)$.

1.6.5 (**Propriété**)

Soit K sphériquement complet, si E et F sont linéairement homéomorphes et E est réflexif alors F l'est aussi.

1.6.6 (**Lemme**)

Soit K sphériquement complet. Alors c_0 est non réflexif.

(Démonstration)

On va construire un $\theta \in c_0''$ qui ne sera pas dans $j_{c_0}(c_0)$; soit pour $n \in \mathbb{N}$, δ_n la $n^{ième}$ fonction coordonnée :

$$\begin{array}{ccc} c_0 & \longrightarrow & K \\ (\xi_1, \xi_2, \ldots..) & \longmapsto & \xi_n \end{array}$$

alors $\delta_n \in c_0'$
et

$$D = [\delta_1, \delta_2, ...] \subset c_0'$$

la fonction

$$(\xi_1, \xi_2, ...) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

est un élément de c_0', mais n'est pas un élément de D d'où $D \neq c_0'$ et par conséquent $c_0'/D \neq \{0\}$ et il existe ω non nul $\in (c_0'/D)'$ (car K est sphériquement complet).
Alors

$$\theta : c_0' \xrightarrow{\pi} c_0'/D \xrightarrow{\omega} K$$

nous trouvons un $\theta \in c_0''$, $\theta = 0$ sur D ce θ n'est pas un élément de $Im\, j_{c_0}$, en effet : supposons que nous avons un $x \in c_0$ avec $j_{c_0}(x) = \theta$ i. e : $\theta(f) = f(x)$ pour tout $f \in c_0'$ alors pour $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$ et $f = \delta_n$ on trouve

$$\xi_n = \delta_n(x) = \theta(\delta_n) = 0$$

ce qui implique que x = 0 d'où $\theta = 0$ ce qui est absurde.

1.6.7 (**Théorème**)

Soit K sphériquement complet, alors les espaces réflexifs sont seulement de dimension finie.

(Démonstration)

Supposons qu'il existe un espace E de dimension infinie réflexif, alors on peut trouver une suite infinie x_1, x_2, ... dont les éléments sont linéairement indépendants, d'après (1.6.4) $\overline{[x_1, x_2, ...]}$ est réflexif de type dénombrable et isomorphe à c_0 (1.5.6). et par (1.6.5) c_0 est réflexif ; ce qui est en contradiction avec (1.6.6).

1.6.8 (**Lemme**)

Soient E un espace de Banach sphériquement complet (aucune condition sur K) et D un sous-espace fermé de E. Alors E/D est aussi sphériquement complet.

(Démonstration)

Soit $B(y_1, r_1^-) \supset B(y_2, r_2^-) \supset ......$ une suite de boules ouvertes dans E/D ; il suffit de montrer qu'elles ont une intersection non vide, soit $\pi : E \longrightarrow E/D$ l'application quotient ; choisissons un $x_1 \in E$ avec $\pi(x_1) = y_1$ alors, d'après la formule de la norme sur E/D, on peut déduire que $\pi(B(x_1, r_1^-)) = B(y_1, r_1^-)$ alors on peut choisir un $x_2 \in B(x_1, r_1^-)$ avec $\pi(x_2) = y_2$ et $\pi(B(x_2, r_2^-)) = B(y_2, r_2^-)$, etc........
Comme E est sphériquement complet il existe un $x \in \bigcap_n B(x_n, r_n^-)$ d'où $\pi(x) \in \bigcap_n B(y_n, r_n^-)$.

1.6.9 (**Théorème de ANTI-HAHN BANACH**)

Soit E un espace de Banach sur K, si E est sphériquement complet et K ne l'est pas alors $E' = \{0\}$.

(Démonstration)

Soit $f \in E'$, $f \neq 0$ on décompose f comme suit :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & K \\ & f_1 \searrow \quad \nearrow \rho & \\ & E/ker f & \end{array}$$

(sur $E/ker f$ la norme canonique. ρ est l'unique application pour la fabrication du diagramme commutatif) d'après (1.6.8) l'espace $E/ker f$ est sphériquement complet, mais ρ est un homéomorphisme linéaire entre deux espaces de dimension 1 ($E/ker f$, K) ; alors il existe une constante c$>$ 0 telle que $\mid \rho(x) \mid = c \parallel x \parallel$ pour tout $x \in E/ker f$ d'où l'image d'une boule par ρ est une boule, donc K doit être sphériquement complet, ce qui est absurde.

1.6.10 (**Proposition**)

L'espace ℓ^∞/c_0 est sphériquement complet.

(Démonstration)

Soit $\pi : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty/c_0$ l'application quotient, pour $x = (\xi_1, \xi_2, ...) \in \ell^\infty$ nous avons

$$\parallel \pi(x) \parallel = \lim_{n\to\infty} \sup(\mid \xi_n \mid, \mid \xi_{n+1} \mid, ...)$$

comme dans (1.6.8) on peut trouver pour une suite de boules données $B(y_1, r_1^-) \supset B(y_2, r_2^-) \supset ......$ dans ℓ^∞/c_0 une suite de boules $B(x_1, r_1^-) \supset B(x_2, r_2^-) \supset ......$ dans ℓ^∞ telles que $\pi(x_n) = y_n$, $\pi(B(x_n, r_n^-)) = B(y_n, r_n^-)$ pour tout n.
on a

$$\begin{array}{ccl} x_1 & = & (x_{11}, \quad x_{12}, \quad ......) \\ x_2 & = & (x_{21}, \quad x_{22}, \quad ......) \\ & . & \\ & . & \\ & . & \\ & . & \end{array}$$

et on prend la suite diagonale

$$a = (x_{11}, x_{22}, ...)$$

Il est clair que $\mid x_{nn} \mid \leq \parallel x_n \parallel_\infty$ pour tout n d'où $\parallel a \parallel_\infty \leq \sup_n \parallel x_n \parallel_\infty < \infty$ et nous voyons que $a \in \ell^\infty$, notre question est : est-ce que $\pi(a) \in B(y_n, r_n^-)$ pour tout n ce qui finira la démonstration, i. e : on doit montrer que :

$$\parallel \pi(a) - \pi(x_n) \parallel < r_n.$$

En effet :

$$\begin{array}{rcl} \parallel \pi(a) - \pi(x_n) \parallel & = & \lim_{k\to\infty} \sup(\mid x_{kk} - x_{nk} \mid, \mid x_{k+1,k+1} - x_{n,k+1} \mid, ...) \\ & \leq & \sup(\mid x_{n+1,n+1} - x_{n,n+1} \mid, \mid x_{n+2,n+2} - x_{n,n+2} \mid, ...) \\ & \leq & \sup(\parallel x_{n+1} - x_n \parallel_\infty, \parallel x_{n+2} - x_n \parallel_\infty, ...) \\ & \leq & r_n \end{array}$$

C.Q.F.D.
$\lceil$ plus général ; soient E_1, E_2,...... une suite d'espaces de Banach, alors $\times_n E_n / \oplus_n E_n$ est sphériquement complet où $\times_n E_n$ le produit direct et $\oplus_n E_n$ la somme directe $\rfloor$.

1.6.11 (**Corollaire**)

Soit K un corps valué non sphériquement complet alors $(\ell^\infty/c_0)' = \{0\}$ si $f \in (\ell^\infty)'$ et $f = 0$ sur (c_0) alors f est identiquement nul.

(Démonstration)

D'après (1.6.10) (ℓ^∞/c_0) est sphériquement complet or K est non sphériquement complet, d'après (1.6.9) $(\ell^\infty/c_0)' = \{0\}$. Remarquer que $f = 0$ sur c_0 implique que (avec $\pi : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty/c_0$ l'application canonique) $\pi(x) \longmapsto f(x)$ $(x \in \ell^\infty)$ définit un élément de $(\ell^\infty/c_0)'$, lequel est nul donc $f = 0$.

1.6.12 (**Proposition**)

Soit K un corps valué non sphériquement complet alors

$$f : (\xi_1, \xi_2, \dots\dots..) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \quad ; \quad ((\xi_1, \xi_2, \dots\dots..) \in c_0)$$

n'admet pas une extension à un élément de $(\ell^\infty)'$.

(Démonstration)

Supposons qu'il a une extension donnée par la fonction $h \in (\ell^\infty)'$, définissons le opérateur shift à droit :

$$\begin{array}{llll} \Omega : & \ell^\infty & \longrightarrow & \ell^\infty \\ & (\xi_1, \xi_2, \dots\dots..) & \longmapsto & (0, \xi_1, \xi_2, \dots\dots..) \end{array}$$

alors Ω est une application de c_0 dans c_0 et $f \circ \Omega = f$; donc $h \circ \Omega$ est aussi une extension de f par (1.6.11) $h \circ \Omega = h$ soit $x \in \ell^\infty$, $x = (\xi_1, \xi_2, \dots\dots..)$ et $s = (-\xi_1, -\xi_1 - \xi_2, -\xi_1 - \xi_2 - \xi_3, \dots\dots..)$ alors $s \in \ell^\infty$ et $\Omega(s) - s = x$ donc $h(x) = (h \circ \Omega - h)(s) = 0$ ce qui est absurde.
On peut généraliser les résultats de (1.6.12) et (1.6.1) par le théorème suivant.

1.6.13 (**Théorème**) ([42], théorème 4.11)

Soit E un espace normé, les affirmations suivantes sont équivalentes :
(α) E est sphériquement complet.
(β) l'application $S : \oplus_{n\in\mathbb{N}} E_n \longrightarrow E$ définie par $S(x_1, x_2, \dots\dots..) = \sum_n x_n$, a une extension linéaire $\overline{S} : \times_{n\in\mathbb{N}} E_n \longrightarrow E$ de norme égale 1.

1.6.14 (**Proposition**)

Soient K un corps valué non sphériquement complet et $(a_1, a_2, \dots\dots\dots.) \in \ell^\infty$ alors

$$f : (\xi_1, \xi_2, \dots\dots..) \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n \quad ; \quad ((\xi_1, \xi_2, \dots\dots..) \in c_0)$$

a une extension à un élément de $(\ell^\infty)'$ si et seulement si $(a_1, a_2, \dots\dots\dots.) \in c_0$.

(Démonstration)

Montrons que si $(a_1, a_2, \dots\dots\dots.) \notin c_0$ alors f n'admet pas d'extension.
Donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$X = \{n \in \mathbb{N} : \quad |\, a_n \,| \geq \varepsilon\} \qquad est \quad infini$$

soit $n_1, n_2, \ldots\ldots$ une énumération des éléments de X.
Définissons une application linéaire continue
$T : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ par $T(\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots) = (b_1, b_2, \ldots\ldots)$ avec

$$b_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \notin X \\ a_{n_i}^{-1}\xi_i & si \quad n = n_i \end{cases}$$

nous avons pour $(\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots) \in c_0$

$$(*) \qquad \begin{aligned} (f \circ T)(\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots) &= f(b_1, b_2, \ldots\ldots) \\ &= \textstyle\sum_{n \in X} a_n b_n \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^\infty a_{n_i} b_{n_i} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^\infty \xi_i \end{aligned}$$

si f a une extension $\overline{f} \in (\ell^\infty)'$ alors $\overline{f} \circ T$ est une extension de $f \circ T$, mais ceci est impossible d'après (*) et (1.6.12).

1.6.15 (**Théorème**)

(c_0 et ℓ^∞ sont réflexifs)
Soient K un corps valué non sphériquement complet, pour chaque $x \in c_0$ on définit $f_x \in (\ell^\infty)'$ par :

$$f_x(y) = \langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^\infty \xi_n \eta_n \qquad (y \in \ell^\infty)$$

$(x = (\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots)\ ;\ y = (\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots))$ alors $x \longmapsto f_x$ est une isométrie isomorphe. i. e : $c_0 \simeq (\ell^\infty)'$

(Démonstration)

D'après (1.6.14) $x \longmapsto f_x$ est surjective et clairement linéaire. On a pour $x \in c_0$ et $y \in \ell^\infty$
$| f_x(y) | = | \langle x, y \rangle | = | \sum_{n=1}^\infty \xi_n \eta_n | \leq \max | \xi_n || \eta_n | \leq \| x \|_\infty \| y \|_\infty$
d'où $\| f_x \| \leq \| x \|$ mais, si nous prenons $y = e_n$ (e_n est le $n^{ième}$ vecteur unité) ; on obtient

$$\| f_x \| = \| e_n \| \| f_x \| \geq | f_x(e_n) | = | \xi_n |$$

ceci implique

$$\| f_x \| \geq \max_n | \xi_n | = \| x \|_\infty$$

1.7 ESPACES POLAIRES ET ESPACES FORTEMENT POLAIRES

1.7.1 (**Définition**)

Une semi-norme p sur un K-espace vectoriel E est dite polaire si $p = \sup\{| f | : \ f \in E^*, \ | f | \leq p\}$.

1.7.2 (**Remarques**)

-La collection de toutes les semi-normes polaires sur E est fermée par le sup et la multiplication par un élément de $| \overline{K} |$
-Si p est une semi-norme polaire sur un K-espace vectoriel F et $T : E \longrightarrow F$ est une application K-linéaire alors $p \circ T$ est une semi-norme polaire sur E.

-Si K est sphériquement complet chaque semi-norme sur E (E un.e.l.c) est polaire.
-Si K est non sphériquement complet nous avons $(\ell^\infty/c_0)' = \{0\}$ donc la norme canonique sur (ℓ^∞/c_0) n'est pas polaire.

1.7.3 (**Proposition**) ([44], proposition 3.2)

Soient p une semi-norme sur un K-espace vectoriel E et $A = \{x \in E : \ p(x) \leq 1\}$ la p-boule unité ; les assertions suivantes sont équivalentes :
(α) p est polaire.
(β) Si $a \in E$, $\lambda \in K$, $\mid \lambda \mid < p(a)$ alors il existe un $f \in E^*$ avec $f(a) = \lambda$ et $\mid f \mid \leq p$.
(γ) Pour chaque sous-espace D de dimension 1, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $f \in D^*$ avec $\mid f \mid \leq p$ sur D il existe une extension $\overline{f} \in E^*$ de f tels que $\mid \overline{f} \mid \leq (1+\varepsilon)p$ sur E.
(δ) Pour tout $a \in E \backslash A$ il existe un $f \in E^*$ tel que $\mid f(A) \mid \leq 1$ et $\mid f(a) \mid > 1$.
Remarquer que si K est sphériquement complet les propriétés (α)-(δ) sont vraies pour toute semi-norme p (de plus on peut prendre $\mid \lambda \mid \leq p(a)$ dans (β) et $\varepsilon \geq 0$ dans (γ)).

1.7.4 (**Définition**)

Soient E un espace localement convexe sur K et $A \subset E$ posons :

$$A^\circ = \{f \in E' \ : \mid f(x) \mid \leq 1 \ \ pour \ \ tout \ x \in A\}$$
$$A^{\circ\circ} = \{x \in E \ \ : \mid f(x) \mid \leq 1 \ \ pour \ \ tout \ \ f \in A^\circ\}$$

A est polaire si $A = A^{\circ\circ}$.

1.7.5 (**Définitions**)

-Soient E un espace localement convexe sur K. E est dit fortement polaire si toute semi-norme continue sur E est polaire.
-E est un espace polaire si sa topologie est définie par une famille de semi-normes polaires.

1.7.6 (**Remarques**)

-Si K est sphériquement complet, tout espace localement convexe sur K est fortement polaire.
-Si K non sphériquement complet ℓ^∞/c_0 (d'où ℓ^∞) n'est pas fortement polaire.
-L'image d'un espace fortement polaire par une application linéaire continue (en particulier, un quotient d'un espace fortement polaire) est un espace fortement polaire.

1.7.7 (**Proposition**)

Tout sous-espace d'un espace fortement polaire est un espace fortement polaire.

(Démonstration)

Soient D un sous-espace d'un espace fortement polaire et p une semi-norme continue sur D, comme D est muni de la topologie induite par celle de E alors il existe une semi-norme continue q sur E telle que $p \leq q$ sur D. La formule $r(x) = \inf_{d \in D} \max(p(d), q(x-d))$ définit une semi-norme r sur E et on a $r \leq q$ (aussi r est continue) et r = p sur D. r est polaire d'où sa restriction p.

1.7.8 (**Théorème**)

Pour un espace localement convexe E sur K ; les affirmations suivantes sont équivalentes :
(α) E est fortement polaire.
(β) ((1+ε) propriété de Hahn Banach)
pour tout sous-espace D, pour toute semi-norme continue p, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $f \in D'$ avec $\mid f \mid \leq p$ sur D il existe une extension $\overline{f} \in E'$de f telle que $\mid \overline{f} \mid \leq (1+\varepsilon)p$ sur E.

(Démonstration)

(β) $\Longrightarrow$ (α) d'après (1.7.3 : (γ) $\Longrightarrow$ (α)).
(α) $\Longrightarrow$ (β) on peut supposer que $f \neq 0$ et posons $S = ker f$, et $\pi : E \longrightarrow E/S$ l'application quotient, choisissons $x \in D \backslash S$ et soit g l'application K-linéaire définie sur $K\pi(x)$ telle que $g(\pi(x)) = f(x)$, pour tout $y \in E$ avec $\pi(y) = \pi(x)$ alors on a $y \in D$ et $f(x) = f(y)$, par $\mid f \mid \leq p$ sur D, $\mid g(\pi(x)) \mid = \mid f(x) \mid \leq \inf_{y \in E}\{p(y) : \pi(y) = \pi(x)\}$ Il suit que $\mid g \mid \leq \tilde{p}$ sur $K\pi(x)$, avec $\tilde{p}$ est la semi-norme quotient de p sur E/S.
Comme E/D est fortement polaire on utilise (1.7.3 : (α)) on obtient une extension $\overline{g} \in (E/S)'$ de g telle que $\mid \overline{g} \mid \leq (1+\varepsilon)\tilde{p}$ sur E/S, alors $\overline{f} = \overline{g} \circ \pi \in E^*$, $\overline{f}$ est une extension de f et pour tout $z \in E$ on a

$$\mid \overline{f}(z) \mid = \mid \overline{g}(\pi(z)) \mid \leq (1+\varepsilon)\tilde{p}(\pi(z)) \leq (1+\varepsilon)p(z)$$

1.7.9 (**Définition et Rappel**)

-Un espace normé sur K est de type dénombrable s'il existe un sous-enemble dénombrable dont l'espace engendré est dense.
-Un espace localement convexe sur K est de type dénombrable si pour toute semi-norme continue p l'espace normé $E_p = E/ker p$ est de type dénombrable.

1.7.10 (**Remarque**)

Un espace localement convexe E est de type dénombrable si et seulement si pour toute semi-norme continue p il existe un sous-espace de dimension au plus dénombrable, qui est p-dense, (i. e : dense pour la topologie induite par la seule semi-norme p).

1.7.11 (**Théorème**)

Un espace localement convexe de type dénombrable est fortement polaire.

(Démonstration)

Soit p une semi-norme continue sur l'espace E. Il suffit de montrer que E_p est fortement polaire ; E_p est de type dénombrable, aussi l'espace de Banach $\hat{E}_p$ (sa complétude) est de type dénombrable et par (1.5.10 :(vi)) $\hat{E}_p$ vérifie la propriété (1+ε) de Hahn Banach et par (1.7.7 : (β) $\Longrightarrow$ (α)) $\hat{E}_p$ est fortement polaire et par (1.7.6) E_p est fortement polaire.

1.7.12 (**Remarque**)

Si D est un sous-espace dense d'un espace localement convexe E. Alors D est fortement polaire si et seulement si E est fortement polaire, en particulier la complétude d'un espace fortement polaire séparé est fortement polaire.

1.7.13 (**Proposition**)

Soit E un espace localement convexe sur K.
(i) Si E est de type dénombrable et D un sous-espace de E ; alors D et E/D sont aussi de type dénombrable.
(ii) Si D est un sous-espace dense de E alors D est de type dénombrable si et seulement si E est de type dénombrable.
(iii) L'ensemble des espaces de type dénombrale est fermé par le produit et espace localement convexe somme directe dénombrable.
(iv) Si E_1, E_2,......... des sous-espaces de type dénombrable de E tels que $\bigcup_{n\geq 1} E_n$ dense dans E alors E est de type dénombrable.

(Démonstration)

(i) Soit p une semi-norme continue sur D, il existe une semi-norme continue q sur E telle que sa restriction à D est p. Dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi_q} & \hat{E}_q \\ \uparrow i & & \uparrow j \\ D & \xrightarrow{\pi_p} & \hat{D}_p \end{array}$$

(où i est une inclusion) l'application j est une isométrie linéaire. $\hat{E}_q$ est un espace de Banach de type dénombrable d'où d'après (1.5.10 :(v)) est aussi $\hat{D}_p$ de type dénombrable. Il est facile de voir que l'espace normé D_p (est un sous-espace dense dans $\hat{D}_p$) est aussi de type dénombrable. Il suit que D est de type dénombrable de la même façon, si p est une semi-norme continue sur E/D alors $p\circ\pi$ (avec $\pi : E \longrightarrow E/D$ est l'application quotient) est une semi-norme continue sur E, l'application $E_{p\circ\pi} \longrightarrow (E/D)_p$ est une surjection continue, l'espace normé $E_{p\circ\pi}$ est de type dénombrable d'où $(E/D)_p$ l'est aussi ; il suit que E/D est de type dénombrable.
(ii) Si D est dense l'application j dans le diagramme ci-dessus est une isométrie surjective aussi si D est de type dénombrable, alors pour toute semi-norme continue q sur E (avec sa restriction p sur D) l'espace $\hat{D}_p$ est de type dénombrable ; d'où $\hat{E}_q$ et E_q le sont aussi par conséquence E est de type dénombrable.
(iii) $1^{ère}$ étape, soient E_1 et E_2 deux espaces de type dénombrable, alors $E_1 \times E_2$ l'est aussi. Il suffit de montrer que $(E_1 \times E_2)_{p_1\times p_2}$ est de type dénombrable ; pour p_1 (resp p_2) une semi-norme continue sur E_1 (resp E_2) et $(p_1 \times p_2)(x,y) = \max(p_1(x), p_2(y))$, $((x,y) \in E_1 \times E_2)$, mais $(E_1 \times E_2)_{p_1\times p_2}$ est isométriquement isomorphe à $(E_1)_{p_1} \times (E_2)_{p_2}$ avec ce dernier espace un sous-espace de $c_0 \circ c_0 \simeq c_0$ il suit que l'ensemble des espaces de type dénombrables soit fermé par le produit fini.
$2^{ième}$ étape, le cas général, soit I un ensemble d'indice et pour tout $i \in I$, E_i est un espace de type dénombrable. Soit p une semi-norme continue sur $\prod_i E_i$ comme la p-boule unité ouverte dans l'espace produit, il contient un sous-ensemble de la forme $\prod_i U_i$, avec U_i est un ouvert de E_i pour tout i, $U_i \neq E_i$ uniquement pour $i \in \{i_1, \ldots\ldots, i_n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ en conséquence on peut factoriser p par passage à $\prod_{j=1}^n E_{i_j}$

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} E_i & \xrightarrow{p} & |\,\overline{K}\,| \\ \searrow g & & \nearrow \tilde{p} \\ & \prod_{j=1}^n E_{i_j} & \end{array}$$

avec g est la projection canonique, la semi-norme $\tilde{p}$ est continue et d'après la $1^{ère}$ étape il existe un sous-ensemble dénombrable A dans $\prod_{j=1}^n E_{i_j}$ tel que $[A]$ est $\tilde{p}$-dense dans $\prod_{j=1}^n E_{i_j}$. Alors, si B est un ensemble dénombrable dans $\prod_{i\in I} E_i$ tel que g(B)=A. L'ensemble [B] est p-dense dans $\prod_{i\in I} E_i$ par conséquent l'ensemble des espaces de type dénombrable est fermé par un produit quelconque.
-Maintenant soit $E = \oplus_{i\in\mathbb{N}} E_i$ l'espace localement convexe somme directe des espaces E_1, E_2 ,........ qui sont de type dénombrable. Pour $n \in \mathbb{N}$, $F_n = \oplus_{i=1}^n E_i$, considéré comme un sous-espace de E alors $F_n \simeq \prod_{i=1}^n E_i$ aussi, d'après ce qui précede, F_n est de type dénombrable, le résultat E est de type dénombrable, il vient de (iv).
(iv) : par (ii) on peut assumer que $\bigcup_{n\geq 1} E_n = E$ soit p une semi-norme continue sur E pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un ensemble dénombrable $A_n \subset E_n$ tel que $[A_n]$ est p-dense dans E_n alors $A = \bigcup A_n$est dénombrable et [A] est p-dense dans E.

1.7.14 (**Proposition**) ([44], proposition 5.2)

Soit E un espace localement convexe , les propriétés suivantes sont équivalentes :
(α) E est un espace polaire.
(β) Pour toute semi-norme continue q sur E il existe une semi-norme continue polaire p sur E telle que $p \geq q$.
(γ) Les voisinages polaires de 0 forment une base de voisinages de 0 pour la topologie de E.

1.7.15 (**Proposition**) ([44], proposition 5.3)

Les limites projectives (en particulier, sous-espace et produit) des espaces polaires sont polaires.

1.7.16 (**Remarque**)

Le quotient d'un espace polaire n'est pas polaire (ℓ^∞/c_0 pour K non sphériquement complet).

1.7.17 (**Proposition**) ([44], proposition 5.4)

L'espace localement convexe somme directe d'une collection d'espaces polaires est polaire.

1.7.18 (**Proposition**) ([44], proposition 5.5)

Soit E un sous-espace dense d'un espace localement convexe F. Alors E est polaire si et seulement si F est polaire, en particulier, la complétude d'un espace polaire séparé est polaire.

1.7.19 (**Proposition**) ([44], proposition 5.6)

Soit D un sous-espace de dimension finie d'un espace séparé polaire E.
(i) Pour $f \in D'$, a une extension $\overline{f} \in E'$.
(ii) D est un ensemble polaire.

1.8 **ENSEMBLES TOTALEMENT C-BORNÉS**

-Ce paragraphe traite la troisième notion importante (après, orthogonalité et dénombrabilité) c'est-à-dire ensemble totalement c-borné.
-Un sous-ensemble X d'un espace de Banach E (sur K ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est appelé précompact, si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε. Dans une autre définition, X est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fini $F \subset E$ tel que :

$$X \subset B(0,\varepsilon) + F$$

- On peut prouver que X est précompact si et seulement si sa fermeture $\overline{X}$ dans E est compacte (pour ceci nécessairement E doit être complet).
-Dans les théories classiques les ensembles convexes et compacts jouent un rôle important dans l'analyse fonctionnelle.
(par exemple : Théorème d'Alaoglu-Bourbaki, Théorème de Krein -Milman, Théorème de Choquet).

1.8.1 (**Définition**)

Un sous-ensemble C d'un K-espace vectoriel est absolument convexe si $0 \in C$ et pour tout $x, y \in C$ et $\lambda, \mu \in K$, $|\lambda| \leq 1$, $|\mu| \leq 1$ nous avons $\lambda x + \mu y \in C$.

1.8.2 (**Remarque**)

Si A est un sous-ensemble de E borné de dimension finie, il est contenu dans l'enveloppe absolument convexe d'un ensemble fini.

1.8.3 (**Remarque**)

Si K n'est pas localement compact l'unique sous-ensemble absolument convexe et compact d'un espace de Banach est $\{0\}$.

1.8.4 (**Définition**)

Soit E un espace localement convexe, un absolument convexe $A \subset E$ est dit totalement c-borné, si pour tout U voisinage de 0, il existe un sous-ensemble fini F de E tel que $A \subset U + co(F)$.

1.8.5 (**Proposition**)

Si K est localement compact, alors un ensemble absolument convexe est totalment c-borné si et seulement si il est précompact.

1.8.6 (**Proposition**)

(i) Un sous-ensemble absolument convexe d'un ensemble totalement c-borné, est totalement c-borné.
(ii) Si A est totalement c-borné, λA est totalement c-borné pour tout $\lambda \in K$.
(iii) Si A et B sont totalement c-bornés, A+B et $A \cup B$ sont totalement c-bornés. Et si (x_n) est une suite nulle dans E, $co((x_n)_n)$ est totalement c-borné.

1.8.7 (**Proposition**)

Tout sous-ensemble totalement c-borné est borné.

(Démonstration)

Soit A un sous-ensemble de E, totalement c-borné pour tout V voisinage de 0, il existe U voisinage de 0 tel que $U + U \subset V$, soit $A_\circ$ fini $\subset E$ tel que $A \subset U + co(A_\circ)$. $co(A_\circ)$ borné, donc il existe $|\lambda| \geq 1$ tel que $co(A_\circ) \subset \lambda U$; on a $A \subset U + \lambda U \subset \lambda U + \lambda U \subset \lambda V$.
La réciproque de la proposition (1.8.7) est vraie si E est un espace normé de dimension finie.

1.8.8 (**Proposition**)

(i) L'enveloppe absolument convexe d'un sous-ensemble totalement c-bornée, est totalement c-bornée.
(ii) La fermeture d'un sous-ensemble totalement c-borné, est un sous-ensemble totalement c-borné.
(iii) L'image d'un sous-ensemble totalement c-borné par une application linéaire continue, est un sous-ensemble totalement c-borné.

(Démonstration)

(i) Soit A un sous-ensemble de E totalement c-borné, pour tout U voisinage absolument convexe de 0, il existe $A_\circ$fini$\subset E$ tel que $A \subset U + co(A_\circ)$ et alors $co(A) \subset U + co(A_\circ)$.
(ii) Soit A un sous-ensemble de E totalement c-borné, et soit V un voisinage de 0, il existe U un voisinage de 0 tel que $U + U \subseteq V$. Soit $A_\circ$ fini $\subseteq E$ tel que $A \subset U + co(A_\circ)$, $\overline{A} \subseteq \overline{U + co(A_\circ)} \subset U + co(A_\circ) + U \subset V + co(A_\circ)$.
(iii) Soient F un espace localement convexe et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire continue. Si A est un sous-ensemble de E totalement c-borné, pour tout V voisinage de 0 dans F, il existe U un voisinage de 0 dans E tel que $f(U) = V$. Soit $A_\circ$fini $\subset E$ tel que $A \subset U + co(A_\circ)$; on a $f(A) \subseteq V + co(f(A_\circ))$.

1.8.9 (**Proposition**)

Soit A un ensemble totalement c-borné dans un espace localement convexe E sur K. Alors [A] est de type dénombrable.

(Démonstration)

On peut supposer que E=[A]. Pour toute semi-norme continue p, soit π_p l'application canonique de E dans l'espace normé $E_p = E/ker p$, alors $\pi_p(A)$ est totalement c-borné dans E_p (voir [44]) il existe e_1, e_2,..........$\in E_p$ avec $\pi_p(A) \subset \overline{co}(e_1, e_2, ...)$ aussi que $E_p = \overline{[e_1, e_2, ...]}$ est de type dénombrable alors est aussi $\prod_p E_p$ de type dénombrable d'après (1.7.13 : (iii)) et comme E linéairement homéomorphe à un sous-espace de $\prod_p E_p$, il est aussi de type dénombrable.

1.8.10 (**Proposition**) ([56], proposition 2. (iv) et (v))

(i) Tout produit d'espace totalement c-bornés est totalement c-borné.
(ii) Si X$\subset$E (E e.l.c) est précompact, alors co(X) est totalement c-borné.

1.8.11 (**Théorème**) ([44], proposition 8.2)

Soient A un ensemble absolument convexe, métrisable et totalement c-borné d'un espace localement convexe E sur K. Soit $\lambda \in K$, $|\lambda| > 1$ si la valuation est dense, $\lambda = 1$ si la valuation est discrète. Alors il existe un ensemble compact $X \subset \lambda A$ tel que $A \subset \overline{co(X)}$, pour X on peut choisir un ensemble de la forme $\{0, e_1, e_2, ...\}$ avec $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$.

1.8.12 (**Théorème**)

Soit X un sous-ensemble borné d'un K-espace de Banach (E, $\|\quad\|$). Alors X est un totalemment c-borné si et seulement si toute suite t-orthogonale dans X tend vers 0, pour tout $t \in (0,1)$.

(Démonstration)

On va montrer que si X est borné et n'est pas totalement c-borné, alors il existe, pour un certain $t \in (0,1)$, et une suite t-orthogonale e_1, e_2,..........dans X avec $\inf_n \| e_n \| > 0$. On peut assumer que X est dénombrable ([47], lemme 3.5) sans perdre la généralité, supposons que E est de type dénombrable (voir [42]) il existe un sous-espace fermé de dimension infinie D de E tel que $\overline{co}(X) \cap D$ est ouvert dans D. Soit $P : E \longrightarrow D$ la projection linéaire continue (d'après 1.5.10 : (v)), comme

$$\overline{co}(X) \cap D \subset P(\overline{co}(X)) \subset \overline{co}(PX)$$

l'ensemble $\overline{co}(PX)$ est (borné) ouvert dans D et par ([50]) il existe un s$\in$(0,1) et une suite e_1, e_2 ,......... dans X tels que Pe_1, Pe_2,......... est s-orthogonale et $\rho = \inf_n \| Pe_n \| > 0$ pour λ_1, λ_2,... ..... , $\lambda_n \in K$ nous avons, pour $M = \sup_n \| e_n \|$, $\| P \| \| \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \| \geq \| \sum_{i=1}^n \lambda_i P e_i \| \geq s \max_i \| \lambda_i P e_i \| \geq s\rho \max_i |\lambda_i| \geq s\rho M^{-1} \max_i \| \lambda_i e_i \|$
il suit que e_1, e_2,........ est t-orthogonale avec $t = s\rho M^{-1} \| P \|^{-1}$ finalement, $\inf_n \| e_n \| \geq \inf_n \| P \|^{-1} \| Pe_n \| \geq \| P \|^{-1} \rho > 0$.

1.8.13 (**Théorème**) ([45], théorème 3.2)

Soit A un ensemble absolument convexe complet, métrisable et totalement c-borné dans un espace localement convexe séparé (E, τ) sur K. Soit τ' une topologie localement convexe séparée sur E faible que τ. Alors $\tau = \tau'$sur

A.

1.8.14 (**Théorème**) ([48], théorème 6.1)

Soit A un ensemble absolument convexe d'un espace localement convexe séparé F sur K ; les affirmations suivantes sont équivalentes :
(α) A est métrisable totalement c-borné.
(β) A muni de B(0,1)-module topologique est isomorphe à un sous-module de $B(0,1)^{\mathbb{N}}$.
(γ) A muni de B(0,1)-module topologique est isomorphe à un totalement c-borné de c_0.
(δ) Pour chaque $\lambda \in K$, $\mid \lambda \mid > 1$ il existe $(e_n)_n \subset \lambda A$ avec $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ et $A \subset \overline{co}(e_1, e_2, ...)$.
(ε) Il existe $(e_n)_n \subset F$ avec $\lim_{n\to\infty} e_n = 0$ et $A \subset \overline{co}(e_1, e_2, ...)$.
(η) Il existe un compact $X \subset F$ ultramétrisable avec $A \subset \overline{co}(X)$.

CHAPITRE : 2 ***OPÉRATEURS COMPACTS ET PROPRIÉTÉ D'ORLICZ-PETTIS EN ANALYSE p-ADIQUE***

DANS TOUT CE CHAPITRE, ON SUPPOSE QUE LES ESPACES LOCALEMENT CONVEXES SONT SÉPARÉS.

Noter que la topologie faible $\sigma(E,E')$ de E est séparée si et seulement si E' sépare les points de E.

2.1 **(O.P)-ESPACES**

2.1.1 (**Rappel**)

L'espace de Banach ℓ^1 (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) a la propriété suivante : Toute suite faiblement convergente est convergente en norme ; ce théorème est connu sous le nom : Propriété d'Orlicz-Pettis.

2.1.2 (**Définition**)

Un espace localement convexe E sur K est appelé un espace d'Orlicz-Pettis ((O.P)-espace), si toute suite faiblement convergente, est convergente pour la topologie originelle.

2.1.3 (**Remarques**)

(1) Nous verrons que c_0 est un (O.P)-espace (car c_0 est un espace de Banach qui a une base).
(2) Tout (O.P)-espace E son dual topologique sépare ses points.
(3) Si K est non sphériquement complet d'après le chapitre 1 $(\ell^\infty)' = c_0$ et le dual $(\ell^\infty)'$ sépare les points de (ℓ^∞), mais n'est pas un (O.P)-espace.

(En effet)

(1) Nous trouverons la réponse dans le théorème (2.1.11 : (vi)).
(2) Supposons que E est un (O.P)-espace, mais que E' ne sépare pas les points de E, alors il existe $x \in E$, $x \neq 0$ tel que pour tout $f \in E'$, $f(x) = 0$; si on considére la suite stationnaire $(x_n)_{n\geq 1}$, $x_n = x$ pour tout $n \geq 1$, alors $f(x_n) = 0\ \forall n \geq 1$, or E est un (O.P)-espace alors pour toute semi-norme continue sur E, $p(x_n) = 0$ c-à-d p(x)=0, ce qui est en contradiction avec E séparé.
(3) Si K est non sphériquement complet $(\ell^\infty)' = c_0$ la suite de vecteurs unités de (ℓ^∞) ; $(e_n)_{n\geq 1}$ où $e_n = (0,.....,0,1^{n^{ième}place},0,.....)$ est convergente faiblement vers 0. Car $\forall (\lambda_n)_{n\geq 1} \subset c_0$ on a $\lambda_n \longrightarrow o$ et $((\lambda_n)_{n\geq 1})(e_m) = \lambda_m \longrightarrow 0$ donc $e_n \xrightarrow{\sigma(\ell^\infty,(\ell^\infty)')} 0$, mais $\lim_{n\to\infty} \| e_n \|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup(0,1) = 1$. Ce qui implique que ℓ^∞ n'est pas un (O.P)-espace, si K est non sphériquement complet.

2.1.4 (**Proposition**)

(a) Tout sous-espace d'un (O.P)-espace est un (O.P)-espace.
(b) Le produit d'une famille de (O.P)-espaces est un (O.P)-espace.

(Démonstration)

(a) Soient D un sous-espace d'un (O.P)-espace (E, τ) et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans D qui converge faiblement vers 0 pour $\sigma(D,D')$, alors aussi $x_n \longrightarrow 0$ pour $\sigma(E,E')$ et comme E est un (O.P)-espace $x_n \xrightarrow{\tau} 0$.
(b) Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille de (O.P)-espaces, où I est un ensemble et $((x^n_{i\in I})_{n\geq 1})$ une suite dans l'espace produit $\prod_{i\in I} E_i$ faiblement convergente vers 0 ; par la continuité de l'application projection $\pi_j : \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ la suite $(x^n_j)_{n\geq 1}$ est faiblement convergente vers 0 dans E_j pour chaque $j \in I$ d'où $(x^n_j)_{n\geq 1}$ est convergente vers

0 pour la topologie originelle de E_j ce qui entraine que $((x^n_{i\in I})_{n\geq 1})$ est convergente vers 0 pour la topologie originelle.

2.1.5 (**Rappel**)

L'espace localement convexe somme directe d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ d'espaces localement convexes est noté par $\oplus_{i\in I}E_i$ et pour chaque $e\in\oplus_{i\in I}E_i$ a une décomposition unique $e=\sum_{i\in I}e_i$ avec $e_i\in E_i$ pour chaque i, et l'ensemble $\{i\in I:\ \ e_i\neq 0\}$ est fini.

2.1.6 (**Lemme**)

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces localement convexes telle que la topologie faible sur chaque E_i est séparée, alors pour un ensemble faiblement borné $X\subset\oplus_{i\in I}E_i$ l'ensemble $J=\{i\in I:\ \textit{il existe un}\, x\in X\ \textit{avec}\ \ x_i\neq 0\}$ est fini.

(Démonstration)

Supposons que J est infini, soit $i_1\in J$ i. e : il existe $x^1\in X$ tel que $x^1_{i_1}\neq 0$ or $x^1\in X\subset(\oplus_{i\in I}E_i)$ il existe K_{i_1} fini $\subset J\subset I$ tel que $\forall i\in K_{i_1}\ x^1_i\neq 0$ et $x^1_j=0$ pour $j\in I\backslash K_{i_1}$; comme J est infini il existe $i_2\in J\backslash K_{i_1}$ et $x^2\in X$ avec $x^2_{i_2}\neq 0$ donc automatiquement $x^1_{i_2}=0$ supposons que nous avons construit i_1, i_2,............ , i_n et x^1, x^2, ... , $x^n\in X$ tels que $x^j_{i_m}=0$ si $j<m$ et $x^m_{i_m}\neq 0$ pour chaque $m\in\{1,2,.........,n\}$ comme J est infini et K_{i_m} est fini pour $m\in\{1,2,.........,n\}$ alors $\cup^n_{m=1}K_{i_m}$ est aussi fini, soit $i_{n+1}\in J\backslash\cup^n_{m=1}K_{i_m}$ et $x^{n+1}\in X$ avec $x^{n+1}_{i_{n+1}}\neq 0$ d'où $x^j_{i_{n+1}}=0$ pour $j<n+1$ donc par induction la propriété est vraie pour tout n, c-à-d on peut trouver $(i_n)_{n\geq 1}\subset I$ et $(x^n)_{n\geq 1}\subseteq X$ tels que $x^j_{i_m}=0$ si $j<m$ et $x^m_{i_m}\neq 0$ pour chaque $m\in\{1,2,........\}$ comme $x^1_{i_1}\in E_{i_1}$ et $x^1_{i_1}\neq 0$ et $\sigma(E_{i_1},(E_{i_1})')$ séparée ; alors il existe $g_{i_1}\in(E_{i_1})'$ tel que $g_{i_1}(x^1_{i_1})\neq 0$ pour $f_{i_1}=\lambda\frac{g_{i_1}}{|g_{i_1}(x^1_{i_1})|}$ où $\lambda\in K$ tel que $|\lambda|\geq 1$ alors $|\ f_{i_1}(x^1_{i_1})\ |\geq 1$, $x^2_{i_2}\in E_{i_2}$, $x^2_{i_2}\neq 0$ et $\sigma(E_{i_2},(E_{i_2})')$ séparée ; alors il existe $g_{i_2}\in(E_{i_2})'$ tel que $g_{i_2}(x^2_{i_2})\neq 0$ pour $f_{i_2}=\lambda(2+|\sum_{1\leq k<2}f_{i_k}(x^2_{i_k})\ |)\frac{g_{i_2}}{|g_{i_2}(x^2_{i_2})|}$ où $\lambda\in K$ tel que $|\lambda|\geq 1$ qui $=\lambda(2+|\ f_{i_1}(x^2_{i_1})\ |)\frac{g_{i_2}}{|g_{i_2}(x^2_{i_2})|}\in E'_{i_2}$ et $|\ f_{i_2}(x^2_{i_2})\ |\geq(2+|\ f_{i_1}(x^2_{i_1})\ |)$, supposons que la propriété est vraie à l'ordre n et montrons qu'elle l'est aussi à l'ordre n+1.
$x^{n+1}_{i_{n+1}}\in E_{i_{n+1}}$, $x^{n+1}_{i_{n+1}}\neq 0$ et $\sigma(E_{i_{n+1}},(E_{i_{n+1}})')$ séparée alors il existe $g_{i_{n+1}}\in(E_{i_{n+1}})'$ tel que $g_{i_{n+1}}(x^{n+1}_{i_{n+1}})\neq 0$ pour $f_{i_{n+1}}=\lambda(n+1+|\sum_{1\leq k<n+1}f_{i_k}(x^{n+1}_{i_k})\ |)\frac{g_{i_{n+1}}}{|g_{i_{n+1}}(x^{n+1}_{i_{n+1}})|}$ où $\lambda\in K$ tel que $|\lambda|\geq 1$, $f_{i_{n+1}}\in E'_{i_{n+1}}$ et $|\ f_{i_{n+1}}(x^{n+1}_{i_{n+1}})\ |\geq$ $(n+1+|\sum_{1\leq k<n+1}f_{i_k}(x^{n+1}_{i_k})\ |)$ donc pour tout $m\in\mathbb{N}$ il existe $f_{i_m}\in E'_{i_m}$ tel que

$$|\ f_{i_m}(x^m_{i_m})\ |\geq(m+|\sum_{k<m}f_{i_k}(x^m_{i_k})\ |)\qquad\qquad(*)$$

et pour $i\in I\backslash\{(i_n)_{n\geq 1}\}$ nous définissons $f_i\in E_i$ tel que $f_i=\theta$ (θ la forme linéaire nulle), alors la formule $f(\sum_{i\in I}e_i)=\sum_{i\in I}f_i(e_i)$ définit un élément de $(\oplus_{i\in I}E_i)'$ et pour chaque $m\in\mathbb{N}$ nous avons :

$$\begin{array}{rcl}|\ f(x^m)\ | & = & |\sum_{i\in I}f_i(x^m_i)\ | \\ & = & |\sum_{k\in\mathbb{N}}f_{i_k}(x^m_{i_k})\ | \\ & = & |\sum_{k\leq m}f_{i_k}(x^m_{i_k})\ | \\ & = & |\ f_{i_m}(x^m_{i_m})+\sum_{k<m}f_{i_k}(x^m_{i_k})\ | \\ & \geq & |\ f_{i_m}(x^m_{i_m})\ |-|\sum_{k<m}f_{i_k}(x^m_{i_k})\ |\end{array}$$

et par (*)

$$|\ f(x^m)\ |\geq m$$

ce qui implique que la suite $(x^m)_{m\geq 1}$ n'est pas faiblement bornée or $(x^m)_{m\geq 1}\subset X$ il suit que l'ensemble X n'est pas faiblement borné, ce qui est absurde.

2.1.7 (**Proposition**)

L'espace localement convexe somme directe d'une famille de (O.P)-espaces est un (O.P)-espace.

(Démonstration)

Soient $(E_i)_{n\geq 1}$une famille de (O.P)-espaces et $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans $\oplus_{i\in I}E_i$ qui est faiblement convergente vers 0, alors l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}^*\}$ est faiblement borné dans $\oplus_{i\in I}E_i$, or E_i est un (O.P)-espace pour chaque $i \in I$ et d'après (la remarque (2.1.3 : (2)) $\sigma(E_i, E_i')$ séparée pour chaque $i \in I$, et d'après (le lemme (2.1.6)) $\{x_n : n \in \mathbb{N}^*\} \subseteq \oplus_{i\in J}E_i \simeq \prod_{i\in J} E_i$ pour un ensemble J fini $\subset I$, donc $(x_n)_n$ est aussi faiblement convergente dans ce dernier espace, et par (la proposition (2.1.4 : (b)) $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente pour la topologie originelle de $\oplus_{i\in J}E_i \subset \oplus_{i\in I}E_i$ (i. e : topologie restrictive).

2.1.8 (**Proposition**)

Soient E un espace localement convexe et D un sous-espace de dimension finie.
(i) Si E est un (O.P)-espace alors E/D l'est aussi.
(ii) Si E' sépare les points de E et E/D est un (O.P)-espace, alors E l'est aussi.

(Démonstration)

D'abord, nous montrons que si E' sépare les points de E, alors tout sous-espace de dimension finie D a un supplémentaire topologique dans E. Comme E' sépare les points de E, alors tout sous-espace de dimension 1 a un supplémentaire topologique dans E et pour finir, il suffit de montrer que pour tout sous-espace D de E qui a un sous-espace D_1 de codimension 1, lequel est supplémentaire dans E, alors D est aussi supplémentaire dans E.
Donc pour chaque D et D_1 d'après (1.5.8) il existe une projection P de E dans D_1 et il existe un élément $a \in D$, $a \neq 0$ tel que Pa=0, il existe une projection Q de E dans [a] (l'espace engendré par a), alors $Q \circ (I-P)$ est une projection de E dans [a] et $P \circ Q \circ (I-P) = 0$, $Q \circ (I-P) \circ P = 0$ il suit que $P + Q \circ (I-P)$ est une projection de E dans $D_1 + [a]$ qui est aussi dans D. D'après (1.5.8) il existe un sous-espace fermé H de E ; $E = D \oplus H$ et H linéairement homéomorphe à E/D.
(i) D'après la proposition (2.1.4 :(a)) H est un (O.P)-espace donc E/D l'est aussi.
(ii) Si E/D est un (O.P)-espace alors H l'est aussi, comme D est de dimension finie alors D est un (O.P)-espace et d'après la proposition (2.1.7) $D \oplus H$ est un (O.P)-espace. Donc E est un (O.P)-espace.

2.1.9 (**Rappel**)

Un espace localement convexe E a la propriété (*) si pour chaque sous-espace D de type dénombrable, chaque $f \in D'$ a une extension linéaire continue $\overline{f} \in E'$.

2.1.10 (**Remarque**)

La classe de (O.P)-espaces n'est pas fermée pour former le quotient, en effet : Si K non sphériquement complet on sait que l'espace de Banach ℓ^∞ n'est pas un (O.P)-espace d'autre part, pour $B = \{y \in \ell^\infty, \parallel y \parallel_\infty \leq 1\}$ on peut trouver l'application quotient

$$\begin{array}{rlcl} \varphi : & c_0(B) & \longrightarrow & \ell^\infty \\ & \sum_{y\in B} \lambda_y e_y & \longmapsto & \varphi(\sum_{y\in B} \lambda_y e_y) = \sum_{y\in B} \lambda_y y \end{array}$$

où $\lambda_y \in K \quad \forall y \in B$ et $(e_y)_{y\in B}$ la base de $c_0(B)$ qui est un espace de Banach a une base, donc il est un (O.P)-espace et $c_0(B)/ker\varphi \simeq \ell^\infty$ n'est pas un (O.P)-espace [nous verrons dans le théorème suivant que tout espace de Banach qui a une base est un (O.P)-espace].

2.1.11 (**Théorème**)

Les espaces suivants sont (O.P).
(i) Un espace localement convexe tel que pour toute semi-norme continue p sur E, l'espace normé associé E_p est un (O.P)-espace.
(ii) Tout espace localement convexe de type dénombrable.
(iii) Tout espace localement convexe qui a la propriété (*).
(iv) Tout espace fortement polaire.
(v) Tout espace localement convexe sur un corps sphériquement complet.
(vi) Tout espace de Banach qui a une base.
(vii) Tout espace vectoriel muni de la topologie localement convexe $\sigma(E,E^*)$.

(Démonstration)

(i) Si $\mathcal{P}$ est la famille de semi-normes qui définit la topologie de E, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \psi: & E & \longrightarrow & \prod_{p\in\mathcal{P}} E_p \\ & x & \longmapsto & (\overline{x}_p)_{p\in\mathcal{P}} \end{array}$$

linéaire, continue et injective ; donc on peut considérer E comme un sous-espace de $\prod_{p\in\mathcal{P}} E_p$ qui est un (O.P)-espace car c'est le produit de (O.P)-espaces d'après la proposition (2.1.4 :(b)) E est aussi un (O.P)-espace.
(ii) Soit E un espace localement convexe de type dénombrable, alors E est un sous-espace de $\prod_{p\in\mathcal{P}} \hat{E_p}$, où $\forall p \in \mathcal{P}$, p est une semi-norme continue sur E ; E_p l'espace normé associé et $\hat{E_p}$ la complétude de E_p, donc pour chaque $p \in \mathcal{P}$, $\hat{E_p}$ est un espace de Banach de type dénombrable, (1.5.10 :(ii)) pour tout $t \in (0,1)$, $\hat{E_p}$ contient une suite t-orthogonale qui forme une base pour $\hat{E_p}$. D'où $\hat{E_p}$ est linéairement homéomorphe à c_0. (c_0 : espace des suites nulles) comme E est un sous-espace de $\prod_{p\in\mathcal{P}} \hat{E_p}$ et le produit de (O.P)-espaces est un (O.P)-espace. Il suffit de montrer que tout espace de Banach de type dénombrable est un (O.P)-espace.
Soit maintenant $(e_i)_{i\geq 1}$ la base t-orthogonale de $\hat{E_p}$, supposons que $\{x^n\}_{n\geq 1}$ est une suite qui converge faiblement vers 0. Alors pour chaque $n \geq 1$ $x^n = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n e_i$ (1.3.1.13) toute forme linéaire continue f s'écrit

$$f(x^n) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^n \text{ où } x^n = (x_i^n)_{i\geq 1} \text{ et } c_i \in K \text{ tel que } \sup_{1\leq i<\infty} \mid c_i \mid < \infty$$

donc $(x^n)_{n\geq 1}$ converge faiblement vers 0 ; i. e : $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^n = 0$ pour toute suite $(c_i)_{i\geq 1} \in \ell^\infty$.
Il faut montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leq i<\infty} \mid x_i^n \mid = 0$
par substitution de

$$c_i = \begin{cases} 1 & pour \quad i = i_0 \\ 0 & pour \quad i \neq i_0 \end{cases}$$

on voit qu'on a pour chaque valeur i_0 de i

$$\lim_{n\to\infty} x_{i_0}^n = 0 \qquad (1)$$

supposons maintenant qu'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_i \mid x_i^n \mid > \varepsilon > 0 \qquad (2)$$

Soit n_1 la plus petite valeur de n telle qu'on a

$$\sup_{1\leq i<\infty} \mid x_i^n \mid > \varepsilon > 0 \qquad (3)$$

cette valeur existe en vertu de (2)
soit ensuite r_1 la plus petite valeur de r telle qu'on a simultanément

$$\sup_{1\leq i\leq r_1} \mid x_i^{n_1} \mid > \varepsilon \qquad (4)$$

et

$$\sup_{r_1+1\leq i<\infty} \mid x_i^{n_1} \mid < \varepsilon \qquad (5)$$

cette valeur r_1 existe en vertu de (3) et puisque on a pour tout n

$$\lim_{i\to\infty} x_i^n = 0 \qquad (6)$$

soit $1 \leq i_1 \leq r$ une valeur de i telle qu'on a

$$\sup_{1\leq i\leq r_1} \mid x_i^{n_1} \mid = \mid x_{i_1}^{n_1} \mid .$$

Déterminons ensuite successivement une suite bornée d'éléments de K
choisissons $c_{i_1} \in K$ tel que

$$\mid c_{i_1} \mid = 1$$

et $c_i = 0$ pour $1 \leq i \leq r_1$, $i \neq i_1$.
A ce moment les c_i pour $i \geq r_1 + 1$ restent indéterminés, à condition qu'on ait $\mid c_i \mid \leq 1$.
Il suit alors de (4) et (5) et l'inégalité triangulaire forte

$$\mid \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^{n_1} \mid = \mid c_{i_1} \mid \mid x_{i_1}^{n_1} \mid > \varepsilon \qquad (7).$$

Déterminons, en partant de n_1 et r_1, les suites croissantes $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ comme suit :
Soit n_k le plus petit nombre $> n_{k-1}$ tel que

$$\sup_{1\leq i<\infty} \mid x_i^{n_k} \mid > \varepsilon \qquad (8)$$

$$\sup_{1\leq i\leq r_{k-1}} \mid x_i^{n_k} \mid < \varepsilon \qquad (9).$$

Il suit de (1) et (2) que ce nombre existe. Puis, soit r_k le plus petit nombre $> r_{k-1}$ tel que

$$\sup_{r_{k-1}+1\leq i\leq r_k} \mid x_i^{n_k} \mid > \varepsilon \qquad (10)$$

$$\sup_{r_k+1\leq i<\infty} \mid x_i^{n_k} \mid < \varepsilon \qquad (11)$$

Il suit de (6), (8), (9) que ce nombre existe. Soit $r_{k-1} + 1 \leq i_k \leq r_k$ une valeur de i telle qu'on a

$$\sup_{r_{k-1}+1\leq i\leq r_k} \mid x_i^{n_k} \mid = \mid x_{i_k}^{n_k} \mid \qquad (12)$$

Déterminons ensuite les éléments c_i pour $i \geq r_1 + 1$ qui en premier lieu sont restés arbitraires à condition qu'on ait $\mid c_i \mid \leq 1$ on pose :

$$\mid c_{i_k} \mid = 1$$

$c_i = 0$ pour $r_{k-1} + 1 \leq i \leq r_k$, $i \neq i_k$
on a ainsi déterminé une suite bornée $(c_i)_{i\in\mathbb{N}}$, en vertu de (9), (10), (11), (12) on a :

$$\mid \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^{n_k} \mid = \mid c_{i_k} \mid \mid x_{i_k}^{n_k} \mid > \varepsilon \qquad (13)$$

cependant on a

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i^{n_k} \mid = 0$$

en contradiction avec (13), (ii) est ainsi démontré.
(iii) Soit x^1, x^2,.......... une suite faiblement convergente, on doit montrer qu'elle est convergente pour la topologie originelle. On peut supposer que la limite faible est 0. Soit D l'enveloppe linéaire fermée de $\{x^n : n \in \mathbb{N}\}$, nous voyons que la topologie faible de D est la restriction de la topologie faible de E, car l'application : $E' \longrightarrow D'$ est bien surjective, d'où on peut supposer que E=D et la démonstration est achevée d'après (ii).
(iv) Voir (1.7.8 : $(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$)
(v) Soit E un espace localement convexe sur un corps valué sphériquement complet ; on va montrer que E vérifie la propriété (*).
Soient $x_0 \in E$, et V un sous-espace de E tel que $x_0 \notin V$ et p une semi-norme sur E et T une application linéaire bornée de V dans K, cela veut dire que, en posant

$$\| T \| = \sup_{p(x)\neq 0} \frac{| T(x) |}{p(x)}$$

on a $\| T \| < \infty$ et $| T(y) | \leq \| T \| \, p(y)$, $y \in V$.
nous allons démontrer qu'il existe un prolongement linéaire de T à $V + Kx_0$, cela étant prouvé la démonstration sera achevée par une application du lemme de Zorn voir (1.6.1)
(vi) Soit E un espace de Banach qui a une base, on va montrer que E vérifie la propriété (*).
Soit E un espace de Banach qui a une base X et D un sous-espace fermé de E de type dénombrable, D contient un ensemble Y dénombrable avec [Y]=D.
Tout $y \in Y$ peut s'écrire comme $y = \sum_{x\in X} \lambda_{xy} x \; où \; \lambda_{xy} \in K$ pour tout $y \in Y$ il existe uniquement un ensemble dénombrable des $x \in X$ pour lequel $\lambda_{xy} \neq 0$, d'où l'ensemble $Z = \{x \in X : \; il \;\; existe \;\; un \, y \in Y \; tel \;\; que \; \lambda_{xy} \neq 0\}$ est dénombrable.
Maintenant il est clair que $[X/Z]$ est un supplémentaire de [Z] dans E d'après (1.5.10 :(v)) D a un supplémentaire dans [Z]. Par l'utilisation de l'équivalence entre (α) et (β) dans (1.5.8 : (ii) $(\alpha) \Longleftrightarrow (\beta)$) il suit facilement que D est supplémentaire dans E par l'équivalence de (α) et (γ) du théorème (1.5.8) on obtient que E vérifie la propriété (*).
(vii) On sait que $(E, \sigma(E,E^*))$ est un espace localemet convexe, donc il suffit de montrer que $(E, \sigma(E,E^*))$ est de type dénombrable. Soit $\mathcal{P}$ la famille de toutes les semi-normes $\sigma(E,E^*)$-continues d'où E est un sous-espace de $\prod_{p\in\mathcal{P}} \hat{E_p}$ (produit cartésien) pour terminer la démonstration, on doit montrer :
(a)Pour chaque $p \in \mathcal{P}$; l'espace $\hat{E_p}$ est dénombrable (car un espace dénombrable, est de type dénombrable).
(b) Le produit d'une famille des espaces de type dénombrable, est de type dénombrable (déjà vu dans 1.7.13 : (iii)).
(a) Soit $p \in \mathcal{P}$, alors il existe un U voisinage de 0 pour $\sigma(E,E^*)$ tel que $p(x) \leq 1$ pour tout $x \in U$
où

$$U = \{x \in E : | \, f_i(x) \, | \leq \varepsilon ; \;\; f_i \in E^* \;\; pour \;\; i = 1, \ldots\ldots, n ; \; \varepsilon > 0 \; ; \; n \in \mathbb{N}^*\}$$

si $x \in \cap_{i=1}^{n} ker\, f_i$ alors $\forall\alpha \in K \;\; \alpha x \in \cap_{i=1}^{n} ker\, f_i$ donc $\forall i = 1, \ldots\ldots., n ; \; | \; f_i(\alpha x) \; | = 0 \leq \varepsilon \Rightarrow p(\alpha x) \leq 1$ d'où $| \, \alpha \, | \; p(x) \leq 1, \forall \alpha \in K$ ce qui entraine p(x)=0 c-à-d : $\cap_{i=1}^{n} ker\, f_i \subset ker p$ i. e : $(ker p)^c \subset (\cap_{i=1}^{n} ker\, f_i)^c$ or $\forall i = 1, \ldots.., n ;$ $codim \; ker\, f_i \leq 1$ alors $dim(\cap_{i=1}^{n} ker\, f_i)^c \leq n$ d'où $codim \; ker p \leq n$ donc l'espace $\hat{E_p}$ est dénombrable.

2.2 COMME (O.P)-ESPACES

2.2.1 (**Définition**)

Soit E un espace localement convexe sur K.
(a) E est appelé un (B.O.P)-espace, si toute suite bornée et faiblement convergente est convergente.

(b) E est appelé un (C.O.P)-espace, si toute suite de Cauchy et faiblement convergente est convergente.

2.2.2 (**Remarques**)

Soit E un espace localement convexe sur K.
(1) E est un (O.P)-espace $\Longrightarrow$ E est un (B.O.P)-espace $\Longrightarrow$ E est un (C.O.P)-espace.
(2) Le dual E' d'un (C.O.P)-espace E, sépare les points de E.
(3) La classe de (B.O.P)-espaces (resp de (C.O.P)-espaces) est stable par le sous-espace, le produit, l'espace localement convexe somme directe et le quotient par un sous-espace de dimension finie.
(4) Si E est un espace normé on a :
E est un (B.O.P)-espace si et seulement si E est un (O.P)-espace.
(5) L'espace ℓ^∞ sur K non sphériquement complet est un (C.O.P)-espace, mais comme nous avons vu dans (2.1.3 :(3)) n'est pas un (O.P)-espace c'est à dire n'est pas un (B.O.P)-espace, (car ℓ^∞ est un espace normé).

(En effet)

(1) est trivial.
(2) Soit E un (C.O.P)-espace, supposons que E' ne sépare pas les points de E i. e : il existe $x \in E$, $x \neq 0$ et $f(x) = 0\ \forall f \in E'$ pour la suite stationnaire $(x_n)_{n\geq 1}$ où $x_n = x\ \ \forall n \geq 1$; alors $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy et faiblement convergente vers 0, or E est un (C.O.P)-espace alors $(x_n)_n$ est convergente vers 0 c-à-d $p(x_n) = 0\ \ \forall n \geq 1$ entraine $p(x) = 0$, or E séparé alors x=0 ce qui est absurde.
(3) On suit les mêmes démonstrations utilisées dans le paragraphe (2.1).
(4) Il suffit de montrer que si E est un (B.O.P)-espace, alors E est un (O.P)-espace.
supposons que E n'est pas un (O.P)-espace i. e : il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0 faiblement mais $\| x_n \| \longrightarrow \infty$ posons

$$\mu_n = \inf\{\mu \in K : \| x_n \| \leq |\ \mu\ |\}$$

d'où
$\rho \leq \frac{\|x_n\|}{|\mu_n|} \leq 1$ où $\rho \in \overline{|\ K\ |}$ donc il existe une suite $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ où $\lambda_n = \frac{1}{\mu_n}$ telle que $\rho \leq \| \lambda_n x_n \| \leq 1$ où $\lambda_n \longrightarrow 0$. Alors la suite $(\lambda_n x_n)_{n\geq 1}$ est bornée et $\lambda_n x_n \longrightarrow 0$ faiblement, d'où $\| \lambda_n x_n \| \longrightarrow 0$, ce qui est absurde.
(5) On sait d'après une remarque dans le paragraphe (2.1) l'espace ℓ^∞ sur K non sphériquement complet, n'est pas un (O.P)-espace i. e que l'espace ℓ^∞ n'est pas un (B.O.P)-espace. Mais ℓ^∞ est un espace de Banach donc toute suite de Cauchy faiblement convergente vers 0 et aussi converge vers 0 (car, si de Cauchy est convergente vers un x, d'où est convergente faiblement vers x et l'unicité de la convergence faible implique que x=0).

2.2.3 (**Rappel**)

Un sous-ensemble absolument convexe A d'un espace localement convexe E est dit totalement c-borné, si pour chaque voisinage U de 0 dans E il existe un ensemble fini $H \subset E$ tels que $A \subset U + co(H)$.

2.2.4 (**Théorème**)

Pour un espace localement convexe E, les affirmations suivantes sont équivalentes :
(i) E est un (C.O.P)-espace.
(ii) Sur les ensembles métrisables et totalement c-bornés, la topologie faible $\sigma(E,E')$ et la topologie originelle τ coïncident.
(iii) Pour tout ensemble métrisable et totalement c-borné $A \subset E$, on a $\overline{A}^{\sigma(E,E')} = \overline{A}^{\tau}$.
(iv) Pour tout sous-ensemble de E fermé, métrisable et totalement c-borné, est faiblement fermé.

(Démonstration)

(i)$\Longrightarrow$(ii) Soient $A \subset E$ un sous-ensemble métrisable et totalement c-borné de E et $\hat{E}$ la complétude de E.
Posons :
$E^s = \{x \in \hat{E} : \ il \ existe \ une \ suite \ (x_n)_{n\geq 1} \subset E \ telle \ que \ x_n \to x \ dans \ E\}$ donc $\overline{A}^{E^s}$ est aussi un sous-ensemble métrisable et totalement c-borné de E^s muni de la topologie induite par celle de $\hat{E}$ (or A absolument convexe sa métrique invariante par translation) ; ce qui implique que $\overline{A}$ est aussi métrisable. A est un sous-ensemble de E totalement c-borné, soit V un voisinage de 0, il existe U un voisinage de 0 tel que $U + U \subset V$; soit $A_\circ$ fini $\subset E$ tel que $A \subset U + co(A_\circ)$; $\overline{A} \subset \overline{U + co(A_\circ)} \subset U + co(A_\circ) + U \subset V + co(A_\circ)$, donc $\overline{A}$ métrisable totalement c-borné ; aussi $\overline{A}^{E^s}$ est complet.
Soit $x \in E^s \backslash E$ (car si $x \in E$ qui est un (C.O.P)-espace donc il existe $f \in E'$ tel que $f(x) \neq 0$ et f a une extention à E^s par continuité de f) donc il existe $(x_n)_n \subset E$ telle que $x_n \to x$ c-à-d $\forall p$ semi-norme continue et $\forall \varepsilon > 0$ $p(x - x_n) < \varepsilon$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N \ \ p(x) = p(x_n)$ or $x \neq 0 \Longrightarrow \exists p' \ tel \ que \ p'(x) \neq 0$ (car E séparé) d'où pour $n \geq N \ \ p'(x_n) \neq 0 \Longrightarrow x_n \neq 0$ pour $n \geq N$ et $x_n \in E \Longrightarrow \exists f \in E'$ tel que $f(x_n) \neq 0$ or $x_n \to x$ ce qui implique que $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ dans K. Donc $\forall f \in E' \ f(x_n) \longrightarrow f(x)$ c-à-d $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\mid f(x_n) \mid = \mid f(x) \mid$ donc pour $N_2 = \max(N, N_1)$ on a $\mid f(x_n) \mid = \mid f(x) \mid \neq 0$ ce qui implique $f(x) \neq 0$ c-à-d $\sigma(E^s, (E^s)')$ séparée ; et d'après (1.8.12) on a :

$$\sigma(E^s, (E^s)')/\overline{A}^{E^s} = \tau^s/\overline{A}^{E^s}$$

i. e :

$$\sigma(E, E')/A = \tau/A$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ et $(iii) \Longrightarrow (iv)$ sont évidentes.
(iv)$\Longrightarrow$(i) Soit $(x_n)_n$une suite de Cauchy faiblement convergente vers 0. Donc $x_{n+1} - x_n \longrightarrow 0$ ce qui implique d'après (1.8.14 : (ε) ⇒ (α)) que $\overline{co}(x_1, x_1 - x_2, ...)$ est métrisable et totalement c-borné, on a : $A = \overline{co}(x_1, x_2, ...) = \overline{co}(x_1, x_1 - x_2, ...)$ par la métrisabilité de A. Il existe une suite $U_1 \supset U_2 \supset .... \supset U_n \supset ....$ de voisinages de 0 qui sont à la fois ouverts et fermés et tels que :
$\{U_n \cap A : \ n \in \mathbb{N}\}$ engendre la topologie τ/A.
Pour $m \in \mathbb{N}$, comme $(x_n)_n$est une suite de Cauchy nous avons $x_k - x_l \in U_m \cap A$ pour k, l suffisament grands, or $U_m \cap A$ est un ensemble, métrisable, totalement c-borné et fermé d'après (iv), est faiblement fermé et (x_l) converge faiblement vers 0, nous concluons que $x_k \in U_m \cap A$ pour k assez grand, par conséquent $(x_n)_n$ est convergente vers 0 pour la topologie τ.

2.2.5 (**Corollaire**)

Pour un espace localement convexe E, les propriétés suivantes sont équivalentes.
(i) E est un (B.O.P)-espace.
(ii) E est un (C.O.P)-espace et tout ensemble absolument convexe, borné et $\sigma(E, E')$-métrisable est métrisable et totalement c-borné.
(iii) E' sépare les points de E et sur tout ensemble absolument convexe, borné et $\sigma(E, E')$-métrisable dans E, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie originelle τ coïncident.

(Démonstration)

(i)$\Longrightarrow$(ii) Il est clair que si E est un (B.O.P)-espace, alors E est un (C.O.P)-espace.
Soient $A \subset E$ un sous-ensemble absolument convexe, borné et $\sigma(E, E')$-métrisable de E et $\lambda \in K$, $\mid \lambda \mid > 1$ si la valuation est dense, $\lambda = 1$ si la valuation est discrete d'après (1.8.11) il existe une suite $(e_i)_{i\geq 1}$ dans λA (d'où c'est une suite bornée) avec $\lim_{i\to\infty} e_i = 0$ pour $\sigma(E, E')$ et telle que $A \subset \overline{co}^{\sigma(E,E')}(e_1, e_2, ...)$ comme E est un (B.O.P)-espace, nous avons $e_n \to 0$ pour τ d'après (1.8.14) $co(e_1, e_2, ...)$ est un ensemble métrisable et totalement c-borné et par le théorème précédent, il suit que $\overline{co}^{\sigma(E,E')}(e_1, e_2, ...)$ est un ensemble métrisable totalement c-borné, d'où A l'est aussi.
(ii)$\Longrightarrow$ (iii) D'après le théorème précédent.
(iii)$\Longrightarrow$(i) Soit $(x_n)_n$ une suite bornée telle que $x_n \to 0$ faiblement, alors $A = co(x_1, x_2, ...)$ est un sous-ensemble borné et $\sigma(E, E')$-métrisable de E d'après (iii), on obtient $x_n \to 0$ pour τ.

2.2.6 (**Corollaire**)

Pour un espace localement convexe, les assertions suivantes sont équivalentes.
(i) E est un (O.P)-espace.
(ii) E est un (B.O.P)-espace et tout ensemle faiblement borné est borné.
(iii) E est un (C.O.P)-espace et tout sous-ensemble absolument convexe, faiblement borné et $\sigma(E,E')$-métrisable de E est métrisable et totalement c-borné.
(iv) E' sépare les points de E et pour tout ensemble absolument convexe, faiblement borné et $\sigma(E,E')$-métrisable de E, la topologie faible $\sigma(E,E')$ et la topologie originelle coïncident.

(Démonstration)

(i)⇒(ii) Il suffit de montrer que si E est un (O.P)-espace alors tout ensemble faiblement borné est borné.
Soit $X \subset E$ faiblement borné mais non τ- borné, alors il existe une semi-norme p τ-continue et une suite $(x_n)_n \subset X$ telles que $p(x_n) \geq n$ pour chaque n, comme dans la remaque il existe $\rho > 0$ et il existe $(\lambda_n)_n \subset K$ tels que $\rho \leq p(\lambda_n x_n) \leq 1$ pour chaque n, alors $\lambda_n \longrightarrow 0$ et comme $(x_n)_n$ faiblement borné, $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = 0$ faiblement et par (i) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n x_n = 0$ pour τ lequel est impossible car $p(\lambda_n x_n) \geq \rho$ pour tout n.
(ii)⟹(iii) D'après le corollaire précédent ((i)⇒(ii)).
(iii)⟹(iv) D'après le corollaire précédent ((i)⇒(ii)).
(iv)⟹(i) Soit $(x_n)_n$ une suite telle que $x_n \longrightarrow 0$ faiblement, d'après (1.8.14) $A = co((x_n)_n)$ est faiblement borné et $\sigma(E,E')$-métrisable et par (iv) $\tau/A = \sigma(E,E')/A$, d'où $x_n \to 0$ pour τ.

2.3 **OPÉRATEURS COMPACTS**

2.3.1 (**Définition**)

Soient E et F deux espaces de Banach. Une application linéaire $T : E \longrightarrow F$ est dite compacte si $T(B_E)$ est un ensemble totalement c- borné, avec $B_E = \{x \in E : \| x \| \leq 1\}$.

2.3.2 (**Remarques**)

-En particulier, si T est compact alors il est continu.
-Si K est localement compact, T est compact si et seulement si $T(B_E)$ est relativement compact.

2.3.3 (**Théorème**)

Soient E et F deux espaces de Banach, $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors T est compact si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $S \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $S(E)$ est de dimension finie et $\| T - S \| \leq \varepsilon$.

(Démonstration)

Soit T un compact, $\varepsilon > 0$, d'après ([42] th : 4. 37 $(\alpha) \Rightarrow (\gamma)$) il existe un espace de dimension finie $D \subset \overline{T(E)}$ tel que $T(B_E) \subset D + B_E(0,\varepsilon)$ comme $\overline{T(E)}$ est de type dénombrable d'après (1.8.9) il existe une projection P de $\overline{T(E)}$ dans D pour lequel $\| P \| \leq 2$ ceci d'après (1.5.10 : (v)) pour S=PT alors $S \in \mathcal{L}(E,F)$ et S(E) de dimension finie. Si $x \in B_E$ alors il existe un $y \in D$ avec $\| Tx - y \| \leq \varepsilon$, et $\| (S-T)x \| = \| (P-I)Tx \| = \| (P-I)(Tx-y) \| \leq \| P - I \| \| Tx - y \| \leq 2\varepsilon$, d'où $\| S - T \| < 2\varepsilon$.
Inversement : Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $S_\varepsilon \in \mathcal{L}(E,F)$ tel que $S_\varepsilon(E)$ est de dimension finie et $\| S - T \| \leq \varepsilon$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons $T(B_E) \subset S_\varepsilon(E) + B_E(0,\varepsilon)$ la compacité de T vient de l'implication $((\gamma) \Rightarrow (\alpha)$ th : 4.37 de [42]).

2.3.4 (**Notation**)

Pour les espaces de Banach E et F, nous notons par $\mathcal{C}(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires compactes de E vers F. De plus $\mathcal{C}(E) = \mathcal{C}(E,E)$.

2.3.5 (**Propriétés**)

(i) $\mathcal{C}(E,F)$ est un sous-espace fermé de $\mathcal{L}(E,F)$.
(En effet)
C'est la fermeture de l'ensemble de tous les éléments de $\mathcal{L}(E,F)$ qui ont des images de dimension finie.
(ii) Si $T \in \mathcal{C}(E,F)$ et si D est un espace de Banach alors $TU \in \mathcal{C}(D,F)$ pour tout $U \in \mathcal{L}(D,E)$, alors que $ST \in \mathcal{C}(E,D)$ pour tout $S \in \mathcal{L}(F,D)$.

2.3.6 (**Remarque**)

Si l'application identité de E est compacte, alors E est de dimension finie.

2.3.7 (**Exemple**)

Pour tout $a \in \ell^\infty$ on détermine un $M_a \in \mathcal{L}(\ell^\infty)$ par

$$M_a x = (a_1x_1, a_2x_2, \ldots\ldots\ldots) \qquad (x \in \ell^\infty)$$

avec $a = (a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots)$ et $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots)$.
Il est facile de voir que $M_a \in \mathcal{C}(\ell^\infty, c_0)$ dès que $a \in c_0$.

2.3.8 (**Théorème**)

Soient E et F deux espaces de Banach et $T \in \mathcal{L}(E,F)$, les conditions ci-dessous sont équivalentes.
(α) T est compact.
(β) Pour tout sous-espace fermé D de E qui est de type dénombrable, la restriction de T à D est compacte.
(γ) T(E) ne contient pas un sous-espace de dimension infinie qui est fermé dans F.
(δ) Il existe $a \in c_0$, $U \in \mathcal{L}(E,\ell^\infty)$ et $S \in \mathcal{L}(c_0,F)$ tels que $T = SM_aU$.
(ε) Il existe $a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots \in F$ et $g_1, g_2, \ldots\ldots\ldots \in E'$ tels que $\lim \| a_n \| \| g_n \| = 0$ et $Tx = \sum g_n(x)a_n \quad (x \in E)$.
(ζ) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $V_n(T) = \inf\{\| T/D \| : D\, est\, un\, sous-espace\, de\, E\, de\, codimension \leq n\}$ alors $\lim V_n(T) = 0$, (T/D est la restriction de T à D).
(η) Si D est un sous-espace de dimension infinie de E alors

$$\inf\{\| Tx \| \,/\, \| x \| :\; x \in D,\; x \neq 0\} = 0$$

(Démonstration)

(Voir th : 4. 40 de [42]).

2.3.9 (**proposition**)

Soient $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et $T' \in \mathcal{L}(F',E')$ son adjoint alors :
(i) $\| T' \| \leq \| T \|$.
(ii) Si T est d'image finie, alors T' l'est aussi.
(iii) Si T est compact, alors T' l'est aussi.

(Démonstration)

Pour (i) et (ii) sont faciles.
Montrons (iii) soit $n \longrightarrow T_n \in \mathcal{L}(E,F)$ une suite d'opérateurs d'images finies et convergente vers T (d'après 2.3.3) alors chaque T_n' est d'image finie et $\| T' - T_n' \| \leq \| T - T_n \| \longrightarrow 0$ d'où T' est compact.

DANS TOUT LE RESTE DE CE CHAPITRE SAUF LE PARAGRAGHE 2.8, K EST UN CORPS VALUÉ NON ARCHIMÉDIEN, NON TRIVIAL ET NON SPHÉRIQUEMENT COMPLET.

2.4 (∞)-ESPACES

2.4.1 (**Rappel et définition**)

Soient E et F deux espaces localement convexes sur K.
(a) Une application $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compacte s'il existe un voisinage U de 0 dans E tel que TU est un ensemble totalement c-borné dans F.
(b) E est appelé un (∞)-espace, si toute application linéaire continue $T : \ell^\infty \longrightarrow E$ est compacte.

2.4.2 (**Théorème**)

Pour un espace localement convexe (E, τ), considérons les propriétés suivantes :
(α) E est un (O.P)-espace.
(β) E est un (∞)-espace et tout ensemble faiblement borné est borné.
(γ) E est un (∞)-espace, E' sépare les points de E et tout ensemble absolument convexe, faiblement borné et $\sigma(E,E')$-métrisable est borné.
Alors $(\alpha) \Rightarrow (\beta) \Leftrightarrow (\gamma)$.
Si de plus E est faiblement séquentiellement complet, les trois propriétés ci-dessus sont équivalentes.

(Démonstration)

$(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$: D'après un corollaire du paragraphe (2.2). Il suffit de montrer que E est un (∞)- espace.
Soient $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty,E)$ et $e_1 = (1,0,0,........)$, $e_2 = (0,1,0,........), ...$ les vecteurs unités de ℓ^∞, comme K est non sphériquement complet d'après (1.6.15) $(\ell^\infty)' = c_0$ par conséquent pour chaque $y = (\eta_1, \eta_2, ...)$ dans ℓ^∞ nous avons $y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \eta_i e_i$ faiblement et par la continuité faible de T :

$$Ty = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \eta_i Te_i$$

faiblement et d'après (α)

$$Ty = \tau - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \eta_i Te_i$$

par conséquence

$$TB_{\ell^\infty} \subseteq \overline{co}^\tau (Te_1, Te_2, ...)$$

lequel est un ensemble totalement c-borné (car $Te_n \to 0$).
d'où nous concluons que T est compact et que E est un (∞)-espace.
$(\beta) \Longrightarrow (\gamma)$ triviale.
$(\gamma) \Longrightarrow (\beta)$ Supposons qu'il existe $X \subset E$ faiblement borné, mais non borné, alors il existe une semi-norme p continue et une suite $x_1, x_2, ...$ dans X telles que $p(x_n) \to \infty$ d'où il existe $(\lambda_n)_{n\geq 1} \subset K$ tel que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$ et $p(\lambda_n x_n) \to \infty$; comme $\lambda_n \to 0$ et $\{x_1, x_2, ...\}$ est faiblement borné nous avons $\lambda_n x_n \to 0$ faiblement.
Alors $co(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ...)$ est faiblement métrisable, faiblement borné et absolument convexe, et par (γ) est

borné, ce qui est en contradiction avec $p(\lambda_n x_n) \to \infty$.
Maintenant supposons que E est faiblement séquentiellement complet et montrons que $(\gamma) \Leftrightarrow (\alpha)$:
Soit $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots$ une suite dans E qui est faiblement convergente vers 0. Alors comme E est séquentiellement faiblement complet, la formule :

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots) \overset{T}{\longmapsto} \sigma(E, E') - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i$$

définit une application linéaire $T : \ell^\infty \longrightarrow E$ et $TB_{\ell^\infty} \subset \overline{co}^{\sigma(E,E')}(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ comme $x_n \longrightarrow 0$ faiblement nous avons $\overline{co}^{\sigma(E,E')}(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ absolument convexe, faiblement borné et $\sigma(E, E')$-métrisable et par (γ) ; $\overline{co}^{\sigma(E,E')}(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)$ est borné, d'où TB_{ℓ^∞} est contenu dans un borné ce qui montre que T est continu, or E est un (∞)-espace alors T est compacte ; i. e : $T\ell^\infty$ est un espace de type dénombrable (1.8.9) nous avons $x_n = Te_n \longrightarrow 0$ pour la topologie $\sigma(T\ell^\infty, (T\ell^\infty)')$ et d'après le dernier théorème dans le paragraphe (2.1) $x_n \overset{\tau}{\longrightarrow} 0$.

2.4.3 (**Théorème**)

Pour un espace localement convexe (E, τ), considérons les propriétés suivantes :
(α) E est un (B.O.P)-espace.
(β) E est un (∞)-espace, E' sépare les points de E et pour tout ensemble absolument convexe, borné et $\sigma(E, E')$-métrisable $A \subset E$, $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$, est borné.
Alors $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$.
Si de plus E est faiblement séquentiellement complet, on a aussi $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$.

(Démonstration)

$(\alpha) \Longrightarrow (\beta)$ D'après un carollaire du paragraphe (2.2). Il suffit de montrer que E est un (∞)-espace. Soient $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ et $e_1 = (1, 0, 0, \ldots\ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots\ldots)$, ... les vecteurs unités de ℓ^∞ et K non sphériquement complet ($(\ell^\infty)' = c_0$) par conséquent pour chaque $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots\ldots)$ dans ℓ^∞ nous avons $y = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$ faiblement ; par continuité de T, $Ty = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i Te_i$ faiblement et la suite $(\sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i)_{n\geq 1}$ est bornée, d'où $(\sum_{i=1}^{n} \eta_i Te_i)_{n\geq 1}$ est borné et par (α) $Ty = \tau - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i Te_i$ donc $TB_{\ell^\infty} \subseteq \overline{co}^{\tau}(Te_1, Te_2, \ldots\ldots\ldots)$ lequel est un ensemble totalement c-borné (car $Te_n \overset{\tau}{\longrightarrow} 0$), nous concluons donc que T est compact, i. e : E est un (∞)-espace.
$(\beta) \Longrightarrow (\alpha)$ Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dans E qui est faiblement convergente vers 0 et bornée, alors comme E est faiblement séquentiellement complet, la formule :

$$(\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots\ldots) \overset{T}{\longmapsto} \sigma(E, E') - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \eta_i x_i$$

définit, une application linéaire $T : \ell^\infty \longrightarrow E$ et $TB_{\ell^\infty} \subseteq A$ où $A = \overline{co}^{\sigma(E,E')}((x_i)_{i\geq 1})$, comme $x_n \to 0$ faiblement nous avons A est faiblement borné et $\sigma(E, E')$-métrisable et comme $(x_i)_{i\geq 1}$ est borné i. e : $co((x_i)_{i\geq 1})$ est borné et d'après (β) A est borné. Ce qui implique TB_{ℓ^∞} est borné, donc T est continue c-à-d T est compacte, ce qui implique $T\ell^\infty$ est un espace de type dénombrable, on a : $x_n = Te_n \longrightarrow 0$ pour la topologie $\sigma(T\ell^\infty, (T\ell^\infty)')$, en fin $x_n \overset{\tau}{\longmapsto} 0$.

2.4.4 (**Remarques**)

(1) Il existe des (C.O.P)-espaces, qui ne sont pas des (∞)-espaces.
(2) Dans les théorèmes précédents (2.4.2 et 2.4.3) $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ n'est pas vraie, si K est sphériquement complet.

(En effet)

(1) ℓ^∞ espace des suites bornées est un (C.O.P)-espace d'après le paragraphe (2.2), mais ℓ^∞ n'est pas un (∞)-espace, car $id : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ n'est pas compact.
(2) Si K est sphériquement complet ℓ^∞ est un (O.P)-espace, donc aussi un (B.O.P)-espace, mais ℓ^∞ n'est pas un (∞)-espace "$id : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$" n'est pas compacte.

2.4.5 (**Définition**)

Soient (G_1,d_1) et (G_2,d_2) deux groupes ultramétriques, un homomorphisme surjectif $\varphi : (G_1,d_1) \longrightarrow (G_2,d_2)$ est appelé une application quotient si :

$$d_2(\varphi(x),0) = \inf\{d_1(y,0) :\ y \in G_1,\ \varphi(y) = \varphi(x)\}$$

pour chaque $x \in G_1$.

2.4.6 (**Théorème**)

Soient E et F deux espaces de Banach sur K et $\varphi : E \longrightarrow F$ une application quotient, $D = ker(\varphi)$, alors si F est sphériquement complet nous avons pour chaque $f \in E'$:

$$\sup_{x\in B_E} \mid f(x) \mid = \sup_{x\in B_D} \mid f(x) \mid \qquad (I)$$

(où B_E et B_D sont les boules unités fermées dans E et D respectivement).

(Démonstration)

Par l'absurde, supposons qu'il existe un $f \in E'$ tel que $\| f \| = 1$ et $\mid f(B_D) \mid \leq r$ pour un certain $r < 1$. Soit

$$\rho : B_K \longrightarrow B_K/\{\lambda \in K : \mid \lambda \mid \leq r\} = k_r$$

la surjection canonique, avec la métrique quotient naturelle, k_r est un groupe ultramétrique, lequel est non sphériquement complet et ρ est une application quotient car pour tout $\mu \in B_K$

$$\begin{aligned} d(\overline{\mu},\overline{0}) &= \inf\{d(\mu_1,\{\lambda \in K,\ \mid \lambda \mid \leq r\}) :\ \mu_1 \in B_K,\ \overline{\mu_1} = \overline{\mu}\} \\ &= \inf\{d(\mu_1,0) :\ \mu_1 \in B_K,\ \overline{\mu_1} = \overline{\mu}\} \\ &= \inf\{d(\mu_1,0) :\ \mu_1 \in B_K,\ \rho(\mu_1) = \rho(\mu)\} \end{aligned}$$

Alors $\rho \circ f : B_E \longrightarrow k_r$ est une application quotient, fixons $x \in B_E$ et $y \in B_E$ quelconque tel que

$$\rho \circ f(x) = \rho \circ f(y)$$

alors on a $\mid f(x) \mid \leq \| f \| \| x \|_{B_E}$ par définition de la norme or $\| f \| = 1$ alors $\mid f(x) \mid \leq \| x \|_{B_E}$ ce qui implique que $\mid f(x) \mid \leq \inf_{y\neq 0,\, y\in B_E} \| y \|_{B_E}$ où $\rho \circ f(x) = \rho \circ f(y)$; reste à montrer que $\inf_{y\neq 0,\, y\in B_E} \| y \|_{B_E} \leq \mid f(x) \mid$ où $\rho \circ f(x) = \rho \circ f(y)$ sinon_on_obtient $\| f \| < 1$ ce qui est absurde donc $\mid f(x) \mid = \inf_{y\neq 0,\, y\in B_E} \| y \|_{B_E}$ où $\rho \circ f(x) = \rho \circ f(y)$ d'où $d(f(x),\overline{0}) = \inf\{d(y,0) :\ y \in B_E,\ \rho \circ f(x) = \rho \circ f(y)\}$ de plus l'application $\rho \circ f$ est nulle sur B_D et la restriction de φ à B_E est une application quotient $\varphi : B_E \longrightarrow \varphi(B_E)$ de noyau est B_D. Donc il existe un homomorphisme ψ des groupes unique tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} B_E & & \xrightarrow{\rho\circ f} & & k_r \\ & \searrow & \varphi & \nearrow & \exists!\psi \\ & & \varphi(B_E) & & \end{array}$$

comme φ et $\rho \circ f$ sont des applications quotients, ψ l'est aussi.
Comme φ est une application quotient alors $\varphi(B_E)$ est fermé, or F est sphériquement complet alors $\varphi(B_E)$ est sphériquement complet, or ψ est une application quotient et $\varphi(B_E)$ convexe et sphériquement complet alors k_r

l'est aussi, ce qui est absurde.

2.4.7 (**Théorème**)

Soient E un (∞)-espace de Banach et supposons qu'il existe un sous-espace fermé $D \neq E$ tel que pour chaque $f \in E'$

$$\sup_{x \in B_E} \mid f(x) \mid = \sup_{x \in B_D} \mid f(x) \mid \qquad (I)$$

pour chaque $n \in \mathbb{N}$, soit E_n l'espace E muni de la norme

$$N_n(x) = \max(\| x \|,\ n\, dist(x, D))$$

alors

$$G = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} E_n :\ \lim_{n \to \infty} N_n(x_n) = 0\}$$

où la norme est donnée par

$$N(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots) = \sup_n N_n(x_n)$$

est un (∞)-espace de Banach lequel n'est pas un (O.P)-espace.

2.4.8 (**Exemple**)

"Pour l'existence de l'espace E et le sous-espace D tel que : (I) est vraie"
Prenons $E = c_0(X)$ avec X est la boule unité de $F = \ell^\infty / c_0$, $D = ker\varphi$ et $\varphi : E \longrightarrow F$ définie par $\varphi(\sum_{x \in X} \lambda_x e_x) = \sum_{x \in X} \lambda_x x$.

(Démonstration)

Remarquons que $\| x \| \leq N_n(x) \leq n \| x \|$ i. e : les normes N_n et $\| x \|$ sont équivalentes, d'où $E' = E'_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ par la propriété (I) il suit que l'application identité $id : E' \longrightarrow E'_n$ est une isométrie.
Montrons maitemant que G est un (∞)-espace, soit $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, G)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit $\pi_n : G \longrightarrow E_n$ la projection continue, alors $\pi_n \circ T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E_n) = \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ est un compact (car E est un (∞)-espace), donc $\pi_n T(\ell^\infty)$ est de type dénombrable et $T(\ell^\infty)$ est N-fermeture de $\sum_n \pi_n T(\ell^\infty)$ et par conséquent de type dénombrable (2.4.12 : $(\alpha) \Leftrightarrow (\gamma)$). D'où G est un ($\infty$)-espace.
Finalement, montrons que (G,N) n'est pas un (O.P)-espace.
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ choisissons $u_n \in E_n$ tel que :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \leq dist(u_n, D) \leq \| u_n \| \leq \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$$

et $z_n = (0, 0, \ldots\ldots, 0, u_n^{n^{ième}\,place}, 0, \ldots\ldots\ldots) \in G$, $N(z_n) = N_n(u_n) \geq n\, dist(u_n, D) \geq \sqrt{n}$, donc la suite $(z_n)_{n \geq 1}$ n'est pas bornée dans (G,N), d'autre part soit $f \in (G, N)'$ d'après ([42] ex : Q, p : 61) il existe $f_n \in E'_n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$f((x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots)) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_n) \qquad ((x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots) \in G)$$

tant que

$$M = \sup_n N_n(f_n) < \infty$$

nous avons
$\mid f(z_n) \mid = \mid f_n(u_n) \mid \leq \| f_n \| \| u_n \| = N_n(f_n) \| u_n \| \leq M \| u_n \| \leq \frac{M}{\sqrt[4]{n}}$ ce qui implique $z_n \longrightarrow 0$ faiblement, par

conséquent (G,N) n'est pas un (O.P)-espace.

2.4.9 (**Lemme**)

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces localement convexes, alors pour un ensemble borné $X \subseteq \oplus_{i\in I} E_i$

$$J = \{i \in I : \text{ il existe un } x \in X \text{ avec } x_i \neq 0\}$$

est un ensemble fini.

(Démonstration)

Supposons que J est infini et soit $i_1 \in J$ donc il existe $x^1 \in X$ tel que $x^1_{i_1} \neq 0$, comme $X \subseteq \oplus_{i\in I} E_i$ il existe K_{i_1} fini $\subseteq J \subseteq I$ tel que $\forall i \in K_{i_1}$, $x^1_i \neq 0$ et $x^1_i = 0$ si $i \notin K_{i_1}$. J est infini d'où il existe un $i_2 \in J \backslash K_{i_1}$ et $x^2_{i_2} \neq 0$ et $x^1_{i_2} = 0$, pour un $x^2 \in X \subseteq \oplus_{i\in I} E_i$ et il existe K_{i_2} fini $\subseteq J \subseteq I$ tel que $\forall i \in K_{i_2}$, $x^2_i \neq 0$ et $x^2_i = 0$ si $i \notin K_{i_2}$; ...... par induction on trouve une suite $(i_n)_{n\geq 1} \subset I$ d'éléments distingués, telle que pour chaque n ; il existe un $x^n \in X$, avec $x^n_{i_n} \neq 0$ et $x^j_{i_n} = 0$ si $j < n$; or pour chaque n, $x^n_{i_n} \in E_n$ et les $(E_i)_{i\in I}$ sont séparés il existe q_{i_n} semi-norme continue sur E_{i_n} pour chaque n, telle que $q_{i_n}(x^n_{i_n}) \geq n$, pour $i \notin \{i_1, i_2, ...\}$ nous définissons $q_i = 0$ sur E_i. Alors

$$\begin{array}{rccl} q : & \oplus_{i\in I} E_i & \longrightarrow & |\,\overline{K}\,| \\ & z & \longmapsto & \sup_{i\in I} q_i(z_i) \end{array}$$

est une semi-norme continue sur $\oplus_{i\in I} E_i$. Nous avons $q(x^n) \geq q_{i_n}(x^n_{i_n}) \geq n$ pour chaque n ce qui implique que X n'est pas borné .C.Q.F.D.

2.4.10 (**Proposition**)

(a) Un sous-espace d'un (∞)-espace est un (∞)-espace.
(b) Le produit d'une famille de (∞)-espaces est un (∞)-espace.
(c) L'espace localement convexe somme directe d'une famille de (∞)-espaces est un (∞)-espace.
(d) Si E est un espace localement convexe, tel que E' sépare les points de E et D est un sous-espace de dimension finie de E, alors :
d.i) Si E est un (∞)-espace, alors E/D l'est aussi.
d.ii) Si E/D est un (∞)-espace, alors E l'est aussi.

(Démonstration)

(a) Soient E un (∞)-espace et D un sous-espace de E et $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, D)$, l'application $id : D \longrightarrow E$ linéaire continue d'où $id \circ T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$, or E est un (∞)-espace, alors $id \circ T$ est compact, i. e : $id \circ T(\ell^\infty)$ est de type dénombrable, comme id est injective alors aussi $T(\ell^\infty)$ est de type dénombrable, ce qui implique que D est un (∞)-espace.
(b) Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille de (∞)-espaces et $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \prod_{i\in I} E_i)$ alors $\pi_i \circ T$ est compact pour chaque i ; avec $\pi_j : \prod_{i\in I} E_i \longrightarrow E_j$ c-à-d $\pi_i \circ T(B_{\ell^\infty})$ est un ensemble totalement c-borné, or $T(B_{\ell^\infty}) \subset \prod_{i\in I} \pi_i \circ T(B_{\ell^\infty})$ et le produit d'une famille d'ensembles totalement c-bornés est totalement c-borné ; alors $T(B_{\ell^\infty})$ est totalement c-borné, d'où T est compact ce qui montre que $\prod_{i\in I} E_i$ est un (∞)-espace.
(c) Soient $(E_i)_{i\in I}$ une famille de (∞)-espaces et $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, \oplus_{i\in I} E_i)$ alors $T(B_{\ell^\infty})$ est borné et d'après le lemme précédent ∃ J fini $\subset I$ tel que $T(B_{\ell^\infty}) \subset \oplus_{i\in J} E_i \simeq \prod_{i\in J} E_i$; comme $\prod_{i\in J} E_i$ est un (∞)-espace, alors $T(B_{\ell^\infty})$ est un ensemble totalement c-borné, donc T compact et d'où $\oplus_{i\in I} E_i$ est un (∞)-espace.
(d) Comme E' sépare les points de E et D est de dimension finie, par un raisonnement déjà vu dans le paragraphe (2.1) dans une proposition il existe un sous-espace fermé $H \subset E$, tel que $E = D \oplus H$.
d.i) $E/D \simeq H$ et E est un (∞)-espace, alors H l'est aussi c-à-d E/D.
d.ii) Si E/D est un (∞)-espace, alors H l'est aussi. Donc E est un (∞)-espace comme espace localement convexe somme directe de deux (∞)-espaces.

2.4.11 (**Lemme**)

Soient (E, τ) un espace localement convexe et $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$; alors T est compact, si et seulement si T est de la forme :

$$\begin{array}{rlcl} T: & \ell^\infty & \longrightarrow & (E,\tau) \\ & (\eta_1,\eta_2,\ldots\ldots\ldots) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i \end{array}$$

avec $(x_i)_{i\geq 1} \subset E$, $x_i \xrightarrow{\tau} 0$, en particulier, si T est compact alors TB_{ℓ^∞} est totalement c-borné et métrisable.

(Démonstration)

Supposons que T est compact, la suite $(x_i)_{i\geq 1}$ où $x_i = Te_i$ et $e_1, e_2, \ldots\ldots\ldots$ sont les vecteurs unités de ℓ^∞ ; comme $e_n \longrightarrow 0$ faiblement alors aussi $x_n \longrightarrow 0$ faiblement dans $F = T\ell^\infty$, ce dernier est un espace de type dénombrable, d'où $x_n \xrightarrow{\tau} 0$ et

$$\begin{array}{rcl} T(\eta_1,\eta_2,\ldots\ldots\ldots) & = & \sigma(E,E') - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\eta_i x_i \\ & = & \tau - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\eta_i x_i \\ & = & \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i \end{array}$$

pour chaque $(\eta_i)_{i\geq 1} \in \ell^\infty$
Inversement : si T est de la forme

$$\begin{array}{rlcl} T: & \ell^\infty & \longrightarrow & (E,\tau) \\ & (\eta_1,\eta_2,\ldots\ldots\ldots) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i \end{array}$$

avec $(x_i)_{i\geq 1} \subset E$, $x_i \xrightarrow{\tau} 0$, alors $TB_{\ell^\infty} \subset \overline{co}^{\tau}(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots)$ d'après (1.8.14) TB_{ℓ^∞} est un totalement c-borné et τ-métrisable.

2.4.12 (**Théorème**)

Pour un espace localement convexe, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(α) E est un (∞)-espace.
(β) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$, l'image de la boule unité est un totalement c-borné et métrisable.
(γ) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$, $T(\ell^\infty)$ est de type dénombrable.
(δ) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$, $T(\ell^\infty)$ est un (O.P)-espace.
(ε) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$, $T(\ell^\infty)$ est un (∞)-espace.
(η) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ et pour toute suite faiblement convergente $(y_n)_{n\geq 1}$ dans ℓ^∞ son image $(Ty_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente dans E.

(Démonstration)

(α) $\Rightarrow$ (β) vient directement du lemme précédent.
(β) $\Rightarrow$ (γ) $\Rightarrow$ (δ) $\Rightarrow$ (ε) $\Rightarrow$ (α) sont déjà vu.
(δ) $\Rightarrow$ (η) et (η) $\Rightarrow$ (α) découlent aussi du lemme précédent.

2.4.13 (**Lemme**)

Soient E un espace localement convexe et D un sous-espace fermé de type dénombrable . Si S est un sous-espace de type dénombrable de E/D, alors $\pi^{-1}(S)$ est aussi de type dénombrable, où $\pi : E \longrightarrow E/D$ est l'application quotient.

(Démonstration)

Soient p une semi-norme continue sur E et S un sous-espace de type dénombrable de E/D, donc il existe un ensemble dénombrable $F \subset S$ tel que [F] est $\bar{p}$-dense dans S (avec $\bar{p}$ est la semi-norme quotient de p sur E/D) choisissons un ensemble dénombrable $Y \subset \pi^{-1}(S)$ avec $\pi(Y) = F$ et un ensemble dénombrable $Z \subset D$ tel que [Z] est p-dense dans D. Posons X=Y+Z et montrons que [X] est p-dense dans $\pi^{-1}(S)$, soit $x \in \pi^{-1}(S)$ et $\varepsilon > 0$, il existe un $y \in [Y]$ tel que $\bar{p}\pi(x-y) < \varepsilon$, d'où il existe un $d \in D$ avec $p(x-y-d) < \varepsilon$ et il existe un $z \in [Z]$ avec $p(d-z) < \varepsilon$. Alors $p(x-(y+z)) = p((x-y-d)-(z-d)) \leq \max(p(x-y-d), p(z-d)) \leq \varepsilon$, ce qui fournit la fin de la démonstration.

2.4.14 (**Remarque**)

D'après le lemme précédent, on remarque que si D et E/D sont de type dénombrable, alors E l'est aussi.

2.4.15 (**Proposition**)

Soient E un espace localement convexe et D un sous-espace fermé de type dénombrable, alors si E/D est un (∞)-espace, E l'est aussi.

(Démonstration)

Soient $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ et $\pi : E \longrightarrow E/D$ l'application quotient. Alors $\pi \circ T$ est compact i. e : $(\pi \circ T)(\ell^\infty)$ est de type dénombrable dans E/D, par le lemme précédent $\pi^{-1}(\pi \circ T(\ell^\infty))$ est de type dénombrable dans E, d'où $T(\ell^\infty))$ l'est aussi et par le théorème (2.4.12 :$(\gamma) \Rightarrow (\alpha)$) E est un (∞)-espace.

2.4.16 (**Théorème**)

Soient E un espace de Fréchet et D un sous-espace fermé de E. Si D et E/D sont des (∞)-espaces, alors E l'est aussi.

(Démonstration)

Soient $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ et $\pi : E \longrightarrow E/D$ l'application quotient, donc $\pi \circ T$ est compact, d'après le lemme (2.4.11) $\pi \circ T$ est de la forme :

$$\begin{array}{llll} \pi \circ T : & \ell^\infty & \longrightarrow & E/D \\ & (\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots\ldots) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i x_i \end{array}$$

avec $(x_i)_{i \geq 1} \subset E/D$, $x_i \xrightarrow{\tau_{E/D}} 0$, par la métrisabilité on peut trouver une suite $(y_i)_{i \geq 1} \subset E$ avec $y_i \xrightarrow{\tau} 0$ et $\pi(y_i) = x_i$ pour tout i, par la complétude la formule :

$$\begin{array}{llll} V : & \ell^\infty & \longrightarrow & E \\ & (\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots\ldots) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{\infty} \eta_i y_i \end{array}$$

définit une application compacte.
Nous avons $\pi(T-V) = 0$ et que $T - V \in \mathcal{L}(\ell^\infty, D)$ comme D est un (∞)-espace, alors T-V est compact T=(T-V)+V l'est aussi.

2.5 **POLARITÉ**

2.5.1 (**Rappel**)

-Un espace localement convexe E est polaire si sa topologie est engendrée par une famille de semi-normes polaires.

-Une semi-norme est polaire si

$$p = \sup\{\mid f \mid :\ f \in E^*,\ \mid f \mid \leq p\}.$$

2.5.2 (**Proposition**)

Soit (E,τ) un (O.P)-espace admet une semi-norme p continue et non triviale, pour tout $f \in E^*$, $\mid f \mid \leq p \Rightarrow f = 0$, alors il existe une topologie localement convexe τ_1 avec $\sigma(E,E') \subseteq \tau_1 \subseteq \tau$ telle que l'espace (E,τ_1) n'est pas polaire, mais il est un (O.P)-espace.

(Démonstration)

On peut assumer que τ est polaire (sinon prendre $\tau = \tau_1$). Soit τ_1 la topologie localement convexe définie par $\sigma(E,E')$ et la seule semi-norme p alors il est clair que $\sigma(E,E') \subseteq \tau_1 \subseteq \tau$, d'où (E,τ_1) est un (O.P)-espace.
Supposons (E,τ_1) est polaire, nous arrivons à une contradition, en effet :
Il existe une semi-norme q τ_1-continue polaire telle que $p \leq q$. comme $\sigma(E,E')$ et p engendrent la topologie τ_1 ; nous avons $q \leq \max(cp,r)$ pour un certain c>0 et une certaine semi-norme r $\sigma(E,E')$-continue. Sans perdre la généralité $r = \max(\mid f_1 \mid, \mid f_2 \mid, \ldots\ldots\ldots\ldots, \mid f_n \mid)$ avec $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_n \in E'$. Soit $H = \cap_{i=1}^{n} ker(f_i)$, alors sur H nous avons $p \leq q \leq cp$, on peut trouver $g \in E'$ non trivial avec $\mid g \mid \leq \frac{1}{2c}q$, alors $\mid g \mid \leq \frac{1}{2}p$ sur H et comme H est de codimension finie on peut prolonger g à $\tilde{g} \in E^*$ telle que $\mid \tilde{g} \mid \leq p$ sur E, ce qui est absurde.

2.5.3 (**Exemple**)

(D'un (O.P)-espace qui n'est pas polaire)
On prend un ensemble I avec un cardinal assez grand pour fabriquer la surjection linéaire $\pi : c_0(I) \longrightarrow \ell^\infty/c_0$. Alors $p : x \longmapsto \parallel \pi(x) \parallel \quad (x \in c_0(I))$ satisfait le besoin de la proposition (2.5.2) et $(c_0(I),\tau_1)$ c'est l'espace qu'on cherche, où τ_1 est la topologie engendrée par la topologie faible et la seule semi-norme p.

2.5.4 (**Lemme**)

Soient E un K-espace vectoriel et τ_1, τ_2 deux topologies localement convexes, chacune est définie par une famille dénombrable de semi-normes. Supposons τ_1-borné=τ_2-borné pour tout sous-ensemble de E. Alors $\tau_1 = \tau_2$.

(Démonstration)

Soient $p_1 \leq p_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq p_n \leq \ldots\ldots$ une suite de semi-normes définissant τ_2 et $q_1 \leq q_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq q_n \leq \ldots\ldots$ une suite de semi-normes définissant τ_1. Il suffit de montrer que $\tau_2 \leq \tau_1$.
c-à-d : pour tout $i \in \{1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$ $\quad p_i \leq cq_n$ pour une certaine constante $c > 0$ et un certain $n \in \mathbb{N}$, sinon $p_i \leq cq_1$ n'est pas vraie pour $c > 0$. Donc il existe une suite $x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dans E avec $q_1(x_{1n}) \leq 1$ pour tout n et $p_1(x_{1n}) \geq n$ pour tout n ; aussi $p_1 \leq cq_2$ n'est pas vraie pour $c > 0$, il existe une suite $x_{21}, x_{22}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ dans E avec $q_2(x_{2n}) \leq 1$ pour tout n et $p_1(x_{2n}) \geq n$ pour tout n ; etc
par induction nous trouvons la suite à double indice :

$$\begin{array}{cccccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & . & . & . \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{array}$$

dans E telle que $q_k(x_{kn}) \leq 1$ pour tous k et n et $p_1(x_{kn}) \geq n$ pour tous k et n ; nous voyons que la suite diagonale $x_{11}, x_{22}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ est q_k-bornée pour tout k, donc elle est τ_1-bornée. Mais $p_1(x_{nn}) \geq n$, lequel implique que la

suite $x_{11}, x_{22}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ n'est pas τ_2-bornée ce qui est absurde.
De la même façon, on peut prouver que $p_2, p_3, \ldots\ldots$ sont majorées par la multiplication d'une constante positive et une certaine semi-norme q_n, il suit que $\tau_2 \leq \tau_1$.

2.5.5 (**Théorème**)

Soit (E, τ) un espace localemet convexe métrisable tel que tout ensemble faiblement borné est borné. Alors E est polaire.

(Démonstration)

Soit $p_1 \leq p_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq p_n \leq \ldots\ldots$ une suite de semi-normes qui définit la topologie τ. Pour tout n, $\tilde{p}_n$ la semi-norme polaire associée à p (i. e : $\tilde{p}_n = \sup\{| f |: \ f \in E^*, \ | f | \leq p_n\}$) nous avons $\tilde{p}_1 \leq \tilde{p}_2 \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \tilde{p}_n \leq \ldots\ldots$ et cette suite définit la topologie $\tilde{\tau}$ qui est polaire (fortement polaire) et que $\tilde{\tau} \subseteq \tau$. Maintenant, soit $X \subseteq E$ par ([44], th 7.5) on a X est faiblement borné $\Leftrightarrow$ $\tilde{\tau}$-borné et par supposition tout ensemble faiblement borné est borné alors τ-borné = $\tilde{\tau}$-borné, alors $\tau = \tilde{\tau}$ par le lemme (2.5.4). i. e : τ est polaire.

2.5.6 (**Corollaire**)

Un (O.P)-espace métrisable est polaire .

(Démonstration)

C'est une conséquence du corollaire (2.2.6 : (i)$\Rightarrow$(ii)) et du théorème (2.5.5).

2.5.7 (**Remarque**)

Il existe des (C.O.P)-espaces métrisables qui ne sont pas polaires.
Par exemple : prendre $E = \oplus_n \ell_n^\infty$ où pour tout n, l'ensemble ℓ_n^∞ est un espace de Banach c'est l'espace vectoriel ℓ^∞ muni de la norme $x \longmapsto \max(\| x \|, n \, dist(x, c_0)) \ \ (x \in \ell^\infty)$ comme E' sépare les points de E alors E est un (C.O.P)-espace et par E n'est pas polaire.

PROBLÈME

Est-ce que si E est un (B.O.P)-espace métrisable, alors E est polaire ?

2.5.8 (**Lemme**)

Soit (E, τ) un espace localement convexe polaire. Supposons que E ne contient pas (un sous-espace linéairement homéomorphe à) ℓ^∞. Alors E est un (∞)-espace.

(Démonstration)

Soient $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ non compact et $e_1, e_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$ les vecteurs unités de ℓ^∞. Alors $\{Te_1, Te_2, \ldots\ldots\ldots\}$ n'est pas un totalement c-borné (sinon, TB_{ℓ^∞} est un sous-ensemble de la fermeture faible de $co\{Te_1, Te_2, \ldots\ldots\ldots\}$ qui est totalement c-borné, d'où T est compact). Donc il existe une semi-norme p continue polaire telle que $\{Te_1, Te_2, \ldots\ldots\ldots\}$ n'est pas p-totalement c-borné d'après le théorème (1.8.12) il existe un $t \in (0, 1)$ et une sous-suite $z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$ de $Te_1, Te_2, \ldots\ldots\ldots$ qui est t-orthogonale pour p et tels que $\inf_n p(z_n) > 0$. Supposons $p(z_n) > 1$ pour tout n.
Maintenant on va construire une sous-suite $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$ de $z_1, z_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$ et $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots\ldots \in E'$ tels que $| f_n | \leq 2t^{-1} p$ pour tout n et

$$| f_m(u_n) | = \begin{cases} 0 & si \quad m > n \\ 1 & si \quad m = n \\ | f_m(u_n) | \leq \frac{1}{2} & si \quad m < n \end{cases}$$

la fonction $h_1 : \lambda z_1 \longmapsto \lambda \quad (\lambda \in K)$ satisfait $| h_1 | \leq p$ par polarité h_1 a une extension $f_1 \in E'$ telle que $| f_1 | \leq 2p$ soit $u_1 = z_1$. Supposons qu'on a construit $f_1, f_2, \ldots\ldots\ldots, f_{m-1}$ et $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots, u_{m-1}$ sont choisis avec le besoin de la propriété.
Comme $Te_n \longrightarrow 0$ faiblement nous avons $z_n \longrightarrow 0$ faiblement, on peut trouver un k tel que $| f_1(z_n) | \leq \frac{1}{2}$, $| f_2(z_n) | \leq \frac{1}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, | f_{m-1}(z_n) | \leq \frac{1}{2}$, pour $n \geq k$ choisissons $u_m = z_k$, la fonction $h_m : \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \ldots\ldots\ldots + \lambda_m z_m \longmapsto \lambda_m \quad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda_m \in K)$ satisfait $| h_m | \leq t^{-1} p$ qui a une extension $f_m \in E'$ telle que $| f_m | \leq 2t^{-1} p$, nous voyons que $f_1, \ldots\ldots\ldots, f_m$ répond à la question.
Maintenant, nous avons $u_1, u_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$ est une sous-suite, dire $Te_{i_1}, Te_{i_2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ de $Te_1, Te_2, \ldots\ldots\ldots\ldots$
Définir l'isométrie linéaire $\Omega : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty$ par la formule :

$$(\Omega(y_1, y_2, \ldots\ldots.))_n = \begin{cases} 0 & si \quad n \notin \{i_1, i_2, \ldots\ldots.\} \\ y_n & si \quad n \in \{i_1, i_2, \ldots\ldots.\} \end{cases}$$

et posons $S = T \circ \Omega$. Alors $S \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ et la formule explicite de S est $S(y_1, y_2, \ldots\ldots.) = \sigma(E, E') - \sum_{i=1}^{\infty} y_n u_n$ finalement, soit $y = (y_1, y_2, \ldots\ldots.) \in \ell^\infty$, $y \neq 0$ il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que $| y_m | > \frac{1}{2} \| y \|$, nous avons $p(Sy) \geq \frac{1}{2} t \mid f_m(Sy) | = \frac{1}{2} t \mid \sum_{n \geq m} y_n f_m(u_n) |$ si $n > m$ nous avons $| y_n f_m(u_n) | \leq \frac{1}{2} | y_n | \leq \frac{1}{2} \| y \|$ alors que $| y_m f_m(u_m) | = | y_m | \geq \frac{1}{2} \| y \|$ comme $p(Sy) \geq \frac{1}{2} \| y \|$ implique que S est un homéomorphisme linéaire de ℓ^∞ dans $S(\ell^\infty) \subset E$ lequel donne une contradiction.

2.5.9 (**Lemme**)

Soient E un espace localement convexe polaire et $i : \ell^\infty \longrightarrow E$ un homéomorphisme linéaire de ℓ^∞ dans $i(\ell^\infty)$. Alors il existe une application linéaire continue $P : E \longrightarrow \ell^\infty$ telle que $P \circ i$ est l'identité de ℓ^∞.

(Démonstration)

Il existe une semi-norme p continue polaire sur E telle que $x \longmapsto p(i(x))$, $(x \in \ell^\infty)$ est équivalente à la norme standard de ℓ^∞ ; soient $\overline{p} : E/kerp \longrightarrow [0, \infty)$ la norme quotient de p et $\pi : E \longrightarrow E/kerp$ l'application quotient, alors

$$\pi \circ i : \ell^\infty \longrightarrow E \longrightarrow E/kerp$$

est un homéomorphisme de ℓ^∞ dans l'espace normé $(E/kerp, \overline{p})$. Alors (voir [51]) il existe une application linéaire continue $Q : (E/kerp, \overline{p}) \longrightarrow \ell^\infty$ telle que $Q \circ \pi \circ i$ est l'identité de ℓ^∞, donc pour $P = Q \circ \pi$ répond à la question.

2.5.10 (**Corollaire**)

Pour un espace localement convexe polaire (E, τ) les affirmations suivantes sont équivalentes :
(a) E est un (∞)-espace.
(b) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$; $Te_n \longrightarrow 0$ dans E (où $e_1, e_2, \ldots\ldots\ldots$ sont les vecteurs unités de ℓ^∞).
(c) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ la restriction T/c_0 est compacte.
(d) E ne contient pas un sous-espace linéairement homéomorphe à ℓ^∞.
(e) E ne contient pas un sous-espace supplémentaire linéairement homéomorphe à ℓ^∞.
Si on ajoute que E est faiblement séquentiellement complet, les propriétés (a)-(e) sont équivalentes à :
(f) E est un (O.P)-espace.
(g) Tout ensemble absolument convexe borné et $\sigma(E, E')$-métrisable de E est totalement c-borné.
(h) Si F est un espace localement convexe et $T \in \mathcal{L}(F, E)$ alors T transforme toute suite faiblement convergente dans F en une suite convergente dans E.

(Démonstration)

(a)⇒(b) vient du théorème (2.4.12 : $(\alpha) \Rightarrow (\eta)$).
(b)⇒(c) Soit $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ et $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_n e_n$ dans c_0 nous avons $Tx = \sum_{i=1}^{\infty} x_n Te_n$ comme l'image de la boule unité de c_0 par T est dans $\overline{co}(Te_1, Te_2, \dots\dots\dots)$ laquelle est un ensemble totalement c-borné, car $Te_n \longrightarrow 0$.
(c)⇒(d) Par l'absurde supposons que (c) est vraie et non (d), donc E contient un sous-espace linéairement homéomorphe à ℓ^∞ d'après (c) $T/c_0 : c_0 \longrightarrow \ell^\infty$ compact $\Longrightarrow TB_{c_0}$ est totalement c-borné c-à-d : $\overline{TB_{c_0}}$ totalement c-borné et complet (car ℓ^∞ est un espace de Banach) donc $\overline{TB_{c_0}}$ est un c-compact voisinage de 0 donc ℓ^∞ localement c-compact, ce qui implique $dim\ \ell^\infty < \infty$, ce qui est absurde.
(d)⇒(e) évident.
(e)⇒(a) Montrons que non (a) ⇒ non (e).
Si E n'est pas un (∞)-espace d'après le lemme (2.5.8) E contient un sous-espace linéairement homéomorphe à ℓ^∞ et d'après le lemme (2.5.9) E contient un sous-espace supplémentaire linéairement homéomorphe à ℓ^∞.
Maintenant supposons que E est faiblement séquentiellement complet.
L'équivalence (a)⇔ (f) est une conséquence directe du théorème (2.4.2 : $(\alpha) \Leftrightarrow (\beta)$) (car E est polaire).
L'implication $(f) \Rightarrow (g)$ découle du corollaire (2.2.6 :(i)⇒(iii)).
(g)⇒(h) Soient F un espace localement convexe et $T \in \mathcal{L}(F, E)$. Si $x_n \to 0$ faiblement dans F alors $Tx_n \to 0$ faiblement dans E d'après le théorème (1.8.14) $\overline{co}^{\sigma(E,E')}(Tx_1, Tx_2, \dots\dots.)$ est $\sigma(E,E')$-métrisable et par (g), est un ensemble totalement c-borné, par conséquence $Tx_n \to 0$ dans (E, τ).
Finalement, remarquer que si on prend $F = \ell^\infty$ dans la propriété (h) il donne la propriété (η) du théorème (2.4.12) et d'où E est un (∞)-espace.

2.6 **(O.P)- ESPACES MÉTRISABLES**

2.6.1 (**Proposition**)

Soient (E, τ) un espace localement convexe métrisable et D un sous-espace dense de E, si D est un (O.P)-espace, alors E l'est aussi.

(Démonstration)

Il existe une métrique d invariante sur E qui définit la topologie τ. Soit $x_1, x_2, \dots\dots\dots$ une suite dans E telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ dans $\sigma(E,E')$ pour chaque n, choisissons $y_n \in D$ avec $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n}$ alors $x_n - y_n \xrightarrow{\tau} 0$ d'où $x_n - y_n \longrightarrow 0$ dans $\sigma(E,E')$ et $y_n = y_n - x_n + x_n \to 0$ dans $\sigma(E,E')$ d'où dans $\sigma(D,D')$, comme D est un (O.P)-espace $y_n \xrightarrow{\tau} 0$ donc $x_n = x_n - y_n + y_n \xrightarrow{\tau} 0$.

2.6.2 (**Lemme**)

Soient (E, τ_1) et (F, τ_2) deux espaces de Fréchet et $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Supposons que $(F, \tau_2)'$ sépare les points de F et que $T : (E, \tau_1) \longrightarrow (F, \sigma(F,F'))$ est continue. Alors $T : (E, \tau_1) \longrightarrow (F, \tau_2)$ est continue.

(Démonstration)

Soit $(x_n)_{n\geq 1} \subseteq E$ tel que $x_n \xrightarrow{\tau_1} 0$ et $Tx_n \xrightarrow{\tau_2} y$ si $y \neq 0$, $\exists y^* \in (F, \tau_2)', y^*(y) \neq 0$, (car $(F, \tau_2)'$ sépare les points de F)
$y^*(y) = \lim_{n\to\infty} y^*(Tx_n)$ (car E est métrisable) $y^*(T)$ est continue de $(E, \tau_1) \longrightarrow K$ et $x_n \xrightarrow{\tau_1} 0 \Rightarrow y^*(Tx_n) \xrightarrow{|\ \ |} 0$ donc $y^*(y) = 0$ contradiction, d'où $y = 0$, théorème du graphe fermé ⇒ $T : (E, \tau_1) \longrightarrow (E, \tau_2)$ est continue.

2.6.3 (**Théorème**)

Pour un espace de Fréchet E, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(α) E est un (O.P)-espace.

(β) E' sépare les points de E et E est faiblement séquentiellement complet et (∞)-espace.

(Démonstration)

(α) $\Rightarrow$ (β) : E est un (∞)-espace et E' sépare les points de E, il suit du théorème (2.4.2 : (α) $\Rightarrow$ (γ)) reste à montrer qu'il est faiblement séquentiellement complet. En effet : soit $(x_n)_{n\geq 1}$, une suite faiblement de Cauchy dans E alors $x_{n+1} - x_n \to 0$ faiblement, d'où $x_{n+1} - x_n \to 0$ fortement. Comme E est un espace de Fréchet (complet) $x_n \to x$ fortement pour un certain $x \in E$, d'où $x_n \to x$ faiblement, alors E est faiblement séquentiellement complet.
(β) $\Rightarrow$ (α) : Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite dans E qui est faiblement convergente vers 0. Alors la formule :

$$(\eta_n)_{n\geq 1} \overset{T}{\longmapsto} \sigma(E,E') - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n x_n$$

est une application linéaire bien définie car E est faiblement séquentiellement complet, $T : \ell^\infty \longrightarrow E$, il est facile de voir que $T : (\ell^\infty, \|\quad\|_\infty) \longrightarrow (E, \sigma(E,E'))$ est continue et d'après le lemme (2.6.2) T est continue et par le théorème (2.4.12 : (α) $\Leftrightarrow$ (η)) nous concluons que $x_n \longrightarrow 0$ pour la topologie originelle de E.

2.6.4 (**Théorème**)

Pour un espace localement convexe métrisable E, les assertions suivantes sont équivalentes.
(α) E est un (O.P)-espace complet.
(β) E est un (∞)-espace, polaire et faiblement séquentiellement complet.

(Démonstration)

(α) $\Rightarrow$ (β) Il suit du théorème (2.6.3) et du corollaire (2.5.6).
(β) $\Rightarrow$ (α) Du théorème (2.4.2 : (β) $\Rightarrow$ (α)) il suit que E est un (O.P)-espace (car E est polaire) reste à montrer la complétude de E, soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy dans E, elle est faiblement de Cauchy, d'après (β) $x_n \longrightarrow x$ faiblement pour un certain $x \in E$. Comme E est un (O.P)-espace, nous concluons que $x_n \longrightarrow x$ dans la topologie originelle de E.

2.6.5 (**Définition**)

Une application linéaire continue $T : E \longrightarrow F$ est appelée semi-Fredholm, si ker(T) est de dimension finie et Im(T) est fermée.

2.6.6 (**Proposition**)

Pour un espace de Fréchet polaire, les affirmations suivantes sont équivalentes.
(α) E est un (∞)-espace.
(β) Il n'existe pas une application linéaire continue $T : \ell^\infty \longrightarrow E$ semi-Fredholm.
(γ) Pour tout $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ il existe une application compacte $S \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ telle que ker (T-S) est de dimension infinie.

(Démonstration)

(α) $\Rightarrow$ (β) Supposons qu'il existe une application semi-Fredholm $T : \ell^\infty \longrightarrow E$ alors la bijection $\ell^\infty/kerT \longrightarrow T\ell^\infty$ est un isomorphisme linéaire ([37], coro : 2.75) or T est compacte par (α) ce qui implique que l'application quotient $\pi : \ell^\infty \longrightarrow \ell^\infty/kerT$ est compacte, ce qui est une contradiction.
(β) $\Rightarrow$ (α)) Il vient directement du corollaire (2.5.10 : (d)$\Rightarrow$(a)).
(α) $\Rightarrow$ (γ) Evident (choisir : S=T).
(γ) $\Rightarrow$ (α) Par le corollaire (2.5.10 : (d)$\Rightarrow$(a)) remarquer que s'il existe une injection $i : \ell^\infty \longrightarrow E$ telle que

$i(\ell^\infty)$ est isomorphe à ℓ^∞, alors par (γ) il existe une application compacte $S \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ telle que ker(i-S) est de dimension infinie, comme $i/ker(i-S) = S/ker(i-S)$ alors la restriction $i/ker(i-S)$ est une application compacte, ce qui est impossible d'après le théorème (2.3.8).

2.7 **(O.P)-ESPACES DE BANACH**

2.7.1 (**Définition**)

Un espace localement convexe E est appelé un (0)-espace, si toute application linéaire continue $T : E \longrightarrow c_0$ est compacte (i. e : il existe une semi-norme continue p sur E telle que $T\{x \in E : \; p(x) \leq 1\}$ est un totalement c-borné dans c_0).

2.7.2 (**Théorème**)

Pour un espace de Banach E, les affirmations suivantes sont équivalentes.
(α) E est un (0)-espace.
(β) E ne contient pas un sous-espace supplémentaire linéairement homéomorphe à c_0 (Rappel : tout espace de Banach de dimension infinie contient un sous-espace isomorphe à c_0).
(γ) Il n'existe pas un quotient de E isomorphe à c_0.
(δ) Dans E' toute suite $\sigma(E', E)$-convergente est convergente en norme.
(ε) Soit (T_n) une suite d'applications linéaires continues compactes de E à valeurs dans un espace de Banach F, qui converge simplement (ponctuellement) vers T, alors T est compacte.
(η) L'espace $\mathcal{C}(E, c_0)$ des applications linéaires continues compactes de E dans c_0 est supplémentaire dans $\mathcal{L}(E, c_0)$.

(Démonstration)

(α) $\Rightarrow$ (ε) Soit (T_n) et T comme dans (ε) alors T est continue par le théorème de Banach Steinhaus (voir : [33]). Comme tout espace $T_n(E)$ est de type dénombrable d'après (1.8.9), donc l'espace fermé Z de l'ensemble $\cup_n T_n(E)$ est aussi de type dénombrable, de plus si $x \in E$, alors $T_n(x) \in Z$ pour $n = 1, 2, ...$ et par conséquent $T(x) \in Z$, or Z est isomorphe à l'espace c_0, alors T est un opérateur compact (par (α)) de E dans Z (c'est-à-dire de E dans F).
(ε) $\Rightarrow$ (δ) Soit $(a_n)_n$ une suite dans E' faiblement star convergente vers 0, et considérons l'application linéaire :

$$\begin{array}{rccc} T : & E & \longrightarrow & c_0 \\ & x & \longmapsto & (\langle x, a_n \rangle)_n \end{array}$$

l'application T est la limite simple d'une suite d'opérateurs à images finies (donc compactes)

$$\begin{array}{rccl} T_n : & E & \longrightarrow & c_0 \\ & x & \longmapsto & (\langle x, a_1 \rangle, \langle x, a_2 \rangle, ..., \langle x, a_n \rangle, 0, 0, ...) \end{array}$$

et par (ε) T est un opérateur compact, ce qui implique que la suite $(a_n)_n$ est convergente vers 0 en norme d'après ([11] prop 19).
(δ) $\Rightarrow$ (α) Tout opérateur de E dans c_0 est donné par :

$$T(x) = (\langle x, a_n \rangle)_n$$

où $(a_n)_n$ est une suite dans E' qui est faiblement star convergente vers 0 et par (δ) $(a_n)_n$ est convergente en norme, ce qui implique que T est compact d'après ([11], prop : 19).
(α) $\Rightarrow$ (γ) Soit Y un sous-espace fermé de E tel que E/Y est de dimension infinie et soit $\phi : E \longrightarrow E/Y$ la surjection canonique standard, comme ϕ est une application ouverte, elle ne peut pas être compacte et par (α) E/Y n'est pas isomorphe à c_0.
(γ) $\Rightarrow$ (α) (voir Gruson [15], p : 297)

$(\gamma) \Rightarrow (\beta)$ Evident.
$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ Supposons qu'il existe un opérateur qui n'est pas compact $T : E \longrightarrow c_0$ (l'identification : c_0 avec un sous-espace de E) ; alors (voir[30], p : 163) il existe un sous-espace $F \subseteq E$ dénombrable tel que la restriction T_1 de T à F a un inverse continu, aussi $T(F) \simeq F \simeq c_0$ ($\simeq$ = isomorphe) par l'identification d'espaces isomorphes, on peut assumer que T est surjectif. Finalement, après une fabrication par les identifications nécessaires des espaces isomorphes, nous obtenons que $(T_1^{-1} \circ T)$ est une projection continue de E dans c_0. Ceci est en contradiction avec (β).
$(\alpha) \Rightarrow (\eta)$ Evident.
$(\eta) \Rightarrow (\delta)$ ([23], th : 14).

2.7.3 (**Corollaire**)

Pour un espace de Banach polaire E, nous avons ce qui suit :
(i) E est un (0)-espace $\Leftrightarrow E'$ est un (O.P)-espace $\Leftrightarrow E'$ est un (∞)-espace.
(ii) E' est un (0)-espace $\Rightarrow$ E est un (∞)-espace.
Si on ajoute, qu'il existe un sous-espace fermé D de E'' (bidual de E) tel que D est un (∞)-espace et E''/D est isomorphe à E (par exemple : E est réflexif) alors :
(iii) E est un (∞)-espace $\Rightarrow E'$ est un (0)-espace.

(Démonstration)

(i) Supposons que E est un (0)-espace et soit $f_1, f_2, \ldots\ldots..$ une suite dans E' telle que $f_n \to 0$ dans $\sigma(E', E'')$. Alors $f_n \to 0$ dans $\sigma(E', E)$ et d'après (2.7.2 : $(\alpha) \Rightarrow (\delta)$) nous obtenons que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est convergente en norme dans E' i. e : E' est un (O.P)-espace .
Clairement d'après (2.4.2 : $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$) si E' est un (O.P)-espace, alors E' est un (∞)-espace.
Maintenant, supposons que E' est un (∞)-espace et soit $T \in \mathcal{L}(E, c_0)$, comme $T' \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E')$ est compact et d'après ([49], pro : 5.8) T est compact, i. e : E est un (0)-espace.
(ii) Il suit directement des définitions de (∞) et (0)-espace et de ([49], prop 5.8).
(iii) D'après (2.4.16) et la supposition (iii), E'' est un (∞)- espace et par (i) nous concluons que E' est un (o)-espace.

(***PROBLÈME***)

Soit E un espace de Banach.
Si E est un (∞)-espace $\Rightarrow E'$ est un (o)-espace.

2.7.4 (**Remarque**)

Soit I un ensemble petit (i. e de cardinal non mesurable) par ([42]) $c_0(I)$ est un espace de Banach réflexif et par (2.1.11 : (vi)) est aussi un (∞)-espace et d'après (2.7.3 : (iii)) on obtient que $\ell^\infty(I)$ est un (0)-espace.

2.7.5 (**Proposition**)

Si K est petit alors pour tout ensemble d'indice I, $\ell^\infty(I)$ est un (0)-espace.

(Démonstration)

Soit $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty(I), c_0)$, comme K est petit, c_0 est aussi petit. Donc il existe un ensemble petit $A \subseteq \ell^\infty(I)$ tel que $TA = T\ell^\infty(I)$.
Définir dans I la relation d'équivalence suivante :

$$i_1 \sim i_2 \Leftrightarrow a(i_1) = a(i_2) \;\; \forall a \in A$$

et soit [i] la classe de $i \in I$. Soit J la collection de ces classes et soit $\pi : I \longrightarrow J$ la surjection canonique, alors π induite une application linéaire continue $P : \ell^\infty(J) \longrightarrow \ell^\infty(I)$ il est facile de voir que $A \subseteq P\ell^\infty(J)$.
Il existe aussi une injection $J \xrightarrow{\varphi} K^A$ donnée par :
Si $[i] \in J$, alors $\varphi([i])$ est l'application $a \longmapsto a(i)$ par conséquent et la remarque (2.7.4), $T \circ P : \ell^\infty(J) \longrightarrow c_0$ est compact. Mais $(T \circ P)(\ell^\infty(J)) \supseteq T(A) = T\ell^\infty(I)$. D'où T est compact d'après (2.3.8).

2.7.6 (**Proposition**)

Soit E un espace de Banach faiblement séquentiellement complet tel que E' sépare les points de E. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
(α) E est un (O.P)-espace.
(β) Soient F un (0)-espace de Banach et (T_n) une suite d'applications linéaires continues compactes de F dans E tels que $T_n(y) \longrightarrow T(y)$ dans $\sigma(E,E')$ pour tout $y \in F$. Alors T est compacte.

(Démonstration)

$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ Soient F et $(T_n)_n$ comme dans (β), or E est un (O.P)-espace on a $T_n(y) \longrightarrow T(y)$ en norme pour tout $y \in F$ et d'après (2.7.2 : $(\alpha) \Rightarrow (\varepsilon)$) T est compact.
$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ Par (2.6.3), il suffit de montrer que E est un (∞)-espace. Soit $T \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ et pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $T_m : \ell^\infty \longrightarrow E$ est donné par :
$(\eta_1, \eta_2, \ldots\ldots..) \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \eta_n T e_n$, il suit que $T_m(x) \longrightarrow T(x)$ dans $\sigma(E,E')$ pour tout $x \in \ell^\infty$. Tout T_m est une application linéaire continue d'image finie, donc compacte et par (β) nous concluons que T est compacte.

2.7.7 (**Remarque**)

Remaquer que dans la propriété (β) de la proposition (2.7.6) "la condition F est un (0)-espace " on ne peut pas supprimer. En effet : prendre $E = F = c_0$ et $T : c_0 \longrightarrow c_0$ est défini par :

$$T_n(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots) = (x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n, 0, 0, \ldots..) \ \ (n \in \mathbb{N})$$

alors $(T_n)_n$ est une suite d'applications linéaires continues, et pour tout n, T_n d'image finie (d'où compact) et la suite est convergente simplement vers l'application identité de c_0 qui n'est pas compacte.

2.7.8 (**Proposition**)

Pour un espace de Banach E nous considérons les propriétés suivantes :
(α) E est un (O.P)-espace.
(β) L'espace $\mathcal{C}(\ell^\infty, E)$ de toutes les applications linéaires continues compactes de ℓ^∞ dans E est supplémentaire dans $\mathcal{L}(\ell^\infty, E)$, tout ensemble faiblement borné dans E est borné.
Alors $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$.
Si on ajoute que E est faiblement séquentiellement complet nous avons $(\beta) \Rightarrow (\alpha)$.

(Démonstration)

$(\alpha) \Rightarrow (\beta)$ D'après le théorème (2.4.2 : $(\alpha) \Rightarrow (\beta)$).
$(\beta) \Rightarrow (\alpha)$ Remarquer que si E n'est pas un (O.P)-espace, il existe une suite $(x_n)_n$ dans E telle que $x_n \longrightarrow 0$ dans $\sigma(E,E')$ et $1 \leq \| x_n \| \leq \frac{1}{|\pi|}$ $\forall n$ (avec $\pi \in K$, $\mid \pi \mid <$fixé) pour $\lambda = (\lambda_n)_n \in \ell^\infty$ nous définissons $H_\lambda \in \mathcal{L}(\ell^\infty, E)$ par $H_\lambda(\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots.) = \sigma(E,E') - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_n \lambda_n x_n$ $((\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots.) \in \ell^\infty)$ (maintenant on peut suivre la démonstration comme dans le th :14 de [23]).

2.8 **(O.P)-ESPACES DES FONCTIONS CONTINUES**

2.8.1 (**Définition**)

Soient E et F deux K-espaces vectoriels, si p (resp q) une semi-norme sur E (resp sur F) ; nous notons : $p\otimes q$ la semi-norme $z\longmapsto \inf\{\max_{1\leq i\leq n} p(x_i)q(y_i) :\ n\in\mathbb{N},\ z=\sum_{i=1}^{n} x_i\otimes y_i,\ x_i\in E,\ y_i\in F\}$ sur $E\otimes F$.

2.8.2 (**Définition**)

Soient E et F deux espaces localement convexes ; sur le produit tensoriel $E\otimes F$, nous considérons la topologie engendrée par les semi-normes $p\otimes q$ où p et q sont des semi-normes continues sur E et F (respectivement).

2.8.3 (**Théorème**)

Si E et F sont (O.P)-espaces, alors $E\otimes F$ l'est aussi.

(Démonstration)

Soient $(z_i)_{i\geq 1}$ une suite dans $E\otimes F$ qui converge faiblement vers 0 et p (resp q) la semi-norme continue sur E (resp sur F). Nous allons montrer que $(p\otimes q)(z_n)\longrightarrow 0$, soit $0<t<1$ par une modification simple du théorème (4.30 : (ii) dans [42]) (voir aussi [7] lemme : 2.1) pour chaque $n\in\mathbb{N}$ il existe $x_1^n,........,x_{m_n}^n\in E$ et $y_1^n,........,y_{m_n}^n\in F$ tels que :
(i) $z_n=\sum_{k=1}^{m_n} x_k^n\otimes y_k^n$.
(ii) $y_1^n,........,y_{m_n}^n$ sont t-orthogonals pour q.
(iii) $1\leq q(y_k^n)\leq 2$ $(k\in\{1,2,.......,m_n\})$.
Maintenant, soit $f\in E'$ l'application $f\otimes 1: E\otimes F\longrightarrow F$ envoie la suite faiblement convergente $(z_i)_{i\geq 1}$ à une suite dans F, d'où cette dernière suite est convergente i. e :

$$\lim_{n\to\infty} q(\sum_{k=1}^{m_n} f(x_k^n)y_k^n)=0$$

par t-orthogonalité et (iii) :

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leq k\leq m_n} \mid f(x_k^n)\mid = 0$$

comme ceci est vrai pour tout $f\in E'$ la suite $x_1^1,x_2^1,.......,x_{m_1}^1;x_1^2,x_2^2,.......,x_{m_2}^2;........$ converge faiblement vers 0 dans (O.P)-espace E, pour p alors aussi on a :
$(p\otimes q)(z_n)\leq \max_{1\leq k\leq m_n} p(x_k^n)q(y_k^n)\leq 2\max_{1\leq k\leq m_n} p(x_k^n)\longrightarrow 0$ pour $n\longrightarrow\infty$ ce qui implique $(p\otimes q)(z_n)\longrightarrow 0$.

2.8.4 (**Définition et Rappel**)

(1) Soit X un ensemble muni d'une topologie, l'ensemble de toutes les fonctions continues bornées $f: X\longrightarrow K$ forme le sous-espace fermé BC(X), de $\ell^\infty(X)$. Ce BC(X) est la fermeture dans $\ell^\infty(X)$ de l'ensemble de toutes les fonctions bornées localement constantes $f: X\longrightarrow K$.
(2) L'ensemble de toutes les fonctions continues $f: X\longrightarrow K$ pour lesquelles $f(X)$ est précompact et forme le sous-espace fermé PC(X) de BC(X). Ce PC(X) est l'enveloppe fermée dans BC(X) (ou dans $\ell^\infty(X)$) de $\{\xi_U :\ U\in B(X)\}$ (où B(X) l'ensemble des ouverts et fermés (of) de X).

2.8.5 (**Théorème**)

Soit E un espace de Fréchet. Alors PC(X,E) est un (O.P)-espace, si et seulement si E est un (O.P)-espace.

(Démonstration)

-Les fonctions constantes forment un sous-espace de PC(X,E) qui est linéairement homéomorphe à E, ce qui montre la condition nécessaire.
- La condition suffisante, soit E un (O.P)-espace, alors comme PC(X,K) a une base ([42], cor : 5.23) nous avons par le théorème (2.1.11 : (vi)) $PC(X,K)\otimes E$ est un (O.P)-espace métrisable. Il est facile de voir que l'application $T : PC(X,K)\otimes E \longrightarrow PC(X,E)$ est définie par la formule :
$T(\sum_{j=1}^{n} f_j \otimes a_j)(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)a_j \quad (x \in X)$ est un homéomorphisme linéaire à valeurs dans un sous-espace dense de PC(X,E). Alors PC(X,E) est un (O.P)-espace d'après (2.6.1).

2.8.6 (**Corollaire**)

Soit E un espace de Fréchet, alors C(X,E) (l'espace des fonctions continues) est un (O.P)-espace, si et seulement si E est un (O.P)-espace.

(Démonstration)

Montrons la condition suffisante :
Soient E un (O.P)-espace et $f_1, f_2, ...$ une suite dans C(X,E) qui converge faiblement vers 0. Alors pour tout ensemble compact H dans X, la suite $n \longmapsto f_n/H$ converge faiblement vers 0 dans PC(H,E), par le théorème (2.8.5) $f_n \longrightarrow 0$ uniformément sur H, ce qui donne la conclusion.

2.8.7 (**Définitions**)

Soient X un espace localement compact et E un espace localement convexe, on note par $C_b(X,E)$ l'espace de toutes les fonctions continues bornées.
Pour un sous-ensemble $A \subseteq X$ si f est une fonction de X dans E et p une semi-norme sur E, nous définissons $\parallel f \parallel_{A,p}$ et $\parallel f \parallel_p$ par :

$$\parallel f \parallel_{A,p} = \sup\{p(f(x)) : \; x \in A\}, \;\; \parallel f \parallel_p = \parallel f \parallel_{X,p} .$$

Pour une fonction g sur X à valeurs dans K (K est un corps valué (n.a)), nous définissons

$$\parallel g \parallel_A = \sup\{\mid g(x) \mid : \; x \in A\}, \;\; \parallel g \parallel = \parallel g \parallel_X .$$

Soit $\mathcal{P}$ la famille de toutes les semi-normes continues (n.a) sur E (généralise la topologie de E).
Pour $p \in \mathcal{P}$, nous notons τ_c la topologie de la convergence compacte est généralisée par la famille de semi-normes (n.a) $\{\parallel \;\; \parallel_{A,p} : \; p \in \mathcal{P}, \; A \; compact \; de \, X\}$.
(De la même façon on définit τ_b la topologie de la convergence bornée, en remplaçant A compact par A borné).

2.8.8 (**Corollaire**)

Soit E un espace de Fréchet. Alors $C_b(X,E)$ est un (O.P)-espace, si et seulement si E est un (O.P)-espace.

(Démonstration)

Nous allons montrer la condition suffisante :
Soient E un (O.P)-espace et $f_1, f_2, ...$ une suite dans $C_b(X,E)$ qui converge faiblement vers 0, comme $\tau_c \subset \tau_b$ cette suite aussi est convergente faiblement vers 0 dans $(C_b(X,E),\tau_c)$. Ce dernier est un sous-espace de $(C(X,E),\tau_c)$, qui est un (O.P)-espace d'après le corollaire (2.8.6), d'où $f_n \longrightarrow 0$ uniformément sur les compacts. De plus E est polaire, alors $(C_b(X,E),\tau_b))$ l'est aussi, implique $\{f_1, f_2, ...\}$ est τ_b-bornée ; nous appelons (la proposition 2.11 et le corollaire 2.12 de [19]) ce qui conclut que $f_n \longrightarrow 0$ dans τ_b.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Y. Amice, Les nombres p-adic, Colletion Sup, Presses Universitaires de France 1975.

[2] J. Araujo, J. Martínez-Maurica, The nonarchimedean Banach-Stone Theorem, Lect. Notes in Math. 1454, Springer, 1990, 64-79.

[3] J. Araujo, Wim H. Schikhof, The Weierstrass-Stone approximation theorem for p-adic C^n-functions, Ann. Math. Blaise Pascal, 1 (1994), 61-74.

[4] G. Bachman, Introduction to p-adic numbres and valuation theory, Academic Press, New-York, 1964.

[5] E. Beckenstien, L. Narici, A non-archimedean Banach-Stone Theorem, Proc. A. M. S., 100 (1987), 242-246.

[6] G. Christol, Z. Mebkhout, topological p-adic Vector spaces, Ann. Math. Blaise Pascal, 2 (1995), 93-98.

[7] N. De Grande-de Kimpe and S. Navarro, Non-archimedean nuclearity and spaces of continuous functions, Indag. Mth. N. S. 2 (1991), 201-206.

[8] N. De Grande-de Kimpe, On the structure of locally K-convex spaces with a Shauder bases, Indag. Math., 34 (1972), 396-406.

[9] N. De Grande-de Kimpe, Non-archimedean Banach Spaces for which all the operators are compact, Nieuw Archief Voor Wiskunde XX, 242-245 (1972).

[10] N. De Grande-de Kimpe, Structure theorms for locally K-convex Spaces, Proc. kon. Ned. Akad. v. Wet. A80, 11-22 (1977).

[11] N. De Grande-de Kimpe, On spaces of operators between locally K-convex spaces, Proc. Kon. Ned. Akad. v. wet. A75, 113-129 (1972).

[12] N. De Grande-de Kimpe, On the Grothendieck approximation property in non-archimedean analysis, Nieuw Archief v. Wiskunde(3) XX, 242-245 (1972).

[13] K. Eda, T. Kiyosawa, H. Ohta, N-compactness and its applications, in : Topics in General Topology, edited by K. Morita and J. Nagata, Elsevier Science Publishers, (1989), 459-521.

[14] T. E. Gilsdorf, J. Kakol, On some non-archimedean closed graph theorems, in : p-Adic Functional Analysis, Lectures notes in pure and applied mathematics 192, edited by W. H. Schikhof, C. Pérez-García and J. Kakol. Marcel Dekker, (1997) ; 153-158.

[15] L. Gruson, Catégories d'espaces de Banach ultramétriques, Bull. Soc. Math France, 94 (1966), 287-299.

[16] L. Gruson, M. Van Der Put, Banach spaces, Bull. Soc. math. Franc, Mém., 39-40 (1974), 55-100.

[17] A. K. Katsaras, On compact operators between non-archimedean spaces, Ann. Soc. Scientifique Bruxelles Série I, 96 (1982), 129-137.

[18] A. K. Katsaras, On non-archimedean locally convex spaces, Bull. Greek Math. Soc., 29 (1990), 61-83.

[19] A. K. Katsaras, The strict topology in non-archimedean vector Valued Functions spaces, Proc. Kon. Ned. Akad. wet A87 (1984), 189-201.

[20] A. K. Katsaras, A. Beloyionnis, On the Topology of compact convergence in non-archimedean Spaces, Ann. Math. Blaise Pascal, 3 (1996), 135-153.

[21] T. Kiyosawa, Banach closed range theorem and Fredholm alternative theorem in non-archimedean Banach spaces, 111. J. Math., 28 (1984), 353-369.

[22] A. Yu. Khrennikov, Ultrametric Hilbert space representation of quantum mechanics with a finite exactness, Found. of Physics, 26 (1996), 1033-1054.

[23] T. Kiyosawa, On spaces of compact operators in non-archimedean Banach spaces, Canad, Math. Bull. Vol. 32(4), 450-458, (1989).

[24] N. Koblitz, P-adic numbres, p-adic analysis and zeta functions, springer-verlag, New-York, 1977.

[25] A. N. Kochubei, p-adic commutation relations, J. Phys. A : Math. Gen., 29 (1996), 6375-6378.

[26] K. Mahler, P-adic numbers and their functions, Cambridge Tracts in mathematics 76 (1980), Cambridge University Press.

[27] J. Martínez-Maurica, C. Pérez-Garcia, The Hahn-Banach extension property in a class of normed spaces, Quoestiones Math. 8 (1986), 335-341.

[28] J. Martínez-Maurica, C. Pérez-Garcia, The three-space property for a class of normed spaces, Bull. Soc. Math. Bel., 39 Sér. B (1987), 209-215.

[29] J. Martínez-Maurica, C. Pérez-Garcia, Non-archimedean K-spaces, Houston J. Math., 14 (1988), 529-534.

[30] Madlener, K-Ideals de Riez en espacios localement K-convexos. Revista colombiana de Ma. VIII, 155-176 (1974).

[31] L. Narici, E. beckenstein, G. Bachman, Functional Analysis and Valuation Theory, Marcel Dekker, New-York, 1971.

[32] A. F. MONNA, Analyse Non-Archimédienne, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[33] A. F. Monna, Sur le théorème de Banach-Steinhaus, Proc. Kon. Akad. V. wet. A66, 121-131 (1963).

[34] S. Oortwijn, W. H. Schikhof, Locally convex modules over the unit disc, in : p-adic Functional Analysis, Lectures notes in pure and applied mathematics 192, edited by W. H. Schikhof, C. Pérez-Garcia and J. Kakol Marcel Dekker, 1997, 305-326.

[35] C. Pérez-Garcia and W. H. Schikhof, Non-reflexive and non-spherically complete subspaces of the p-adic space ℓ^∞, Indag. Mathem. N. S., 6 (1995), 121-127.

[36] J. B. Prolla and A Verdoodt, Uniform approximation of functions with values in Topological rings, in : p-adic Functional Analysis, Lecture notes in pure and applied mathematics 192, edited by W. H. Schikhof and C. Pérez-Garcia and J. Kakol Marcel Dekker, 1997, 327-337.

[37] J. B. Prolla, Topics in functional analysis over valued division rings, North Holland Pub, 1982.

[38] P. Ribenboin, Théorie des valuations, Univ. de Montréal, Dept. de Math. Montréal, 1964.

[39] A. Robert, A course in p-adic analysis, to appear in Graduate texts in Mathematics, Springer.

[40] A. C. M. Van Rooij, Notes on p-adic Banach Spaces, Report 7633, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, the Netherlands, 1-62 (1976).

[41] A. C. M. Van Rooij, Notes on p-adic Banach Spaces, vi. convexity, Report 7725, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, the Netherlands, 1-52 (1977).

[42] A. C. M. Van Rooij, Non-archimedean Fonctional Analysis, Marcel Dekker, New-York (1978).

[43] W. H. Schikhof, Ultrametric calculus, Cambridge Studies in advanced mathematics 4, cambridge University Press (1984), 1-306.

[44] W. H. Schikhof, Locally convex spaces over non spherically complete Valued fields, I, II, Bull. Soc. Math. Bel., Ser. B, 38 (1986), 187-224.

[45] W. H. Schikhof, Topological stability of p-adic compactoids under continuous injections, Report 8644, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, 1-21 (1986).

[46] W. H. Schikhof, Some properties of c-compact sets in p-adic Spaces. Report 8632, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, 1986), 1-19.

[47] W. H. Schikhof, On weakly precompact sets in non archimedean Banach spaces. Report 8645, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, (1986), 1-14.

[48] W. H. Schikhof, A connection between p-adic Banach spaces and locally convex compactoids. Report 8736, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, (1987), 1-16.

[49] W. H. Schikhof, On p-adic compact operators. Report 8911, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, (1989), 1-28.

[50] W. H. Schikhof, P-adic nonconvex compactoids, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. A92, 339-342, (1989).

[51] W. H. Schikhof, The complementation property of ℓ^∞ in p-adic Banach spaces, To appear in the Proceedings of the Conference on p-adic analysis, Trento, Italy (1989).

[52] W. H. Schikhof, Zero sequences in p-adic compactoids, in : p-adic Functional Analysis, edited by J. M. Bayod, N. De Grande-De Kimpe and J. Martínez-Maurica, Marcel Dekker, New-York, 1991, 209-219.

[53] W. H. Schikhof, More on duality between p-adic Banach spaces and compactoids. Report 9301, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, (1993).

[54] W. H. Schikhof, A perfet duality between p-adic Banach spaces and compactoids. Indag. Mathem. N. S., 6 (1995), 325-339.

[55] W. H. Schikhof, and C. Pérez-Garcia, Compacts operators and the Orlicz-Pettis Property in P-adic Analysis. Report 9101, Department of Mathematics, Catholic University, Nijmegen, The Netherlands, (1991).

[56] W. H. Schikhof, Compact-Like sets in non-archimedean Functional Analysis. Proceedings of the conference on P-adic analysis, Hengelhoef (1986), 137-147.

[57] J. P. Serre, Endomorhpismes complètement continus des espaces de Banach P-adiques, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 12 (1962), 69-85.

[58] T. A. Springer, Une notion de compacité dans la théorie des espaces Vectoriels topologiques, Indag. Math., 27 (1965), 182- 189.