# Corrigé de deux problèmes de devoir libre N°1

## Problème 1 : polynômes de Legendre

### Partie 1.1 Interpolation de Lagrange

1. **Unicité :** si deux polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ conviennent, leur différence est un polynôme de degré au plus égal à $n-1$ qui admet $n$ racines distinctes (à savoir $x_1, \ldots, x_n$) : c'est donc le polynôme nul.
   **Existence :** on vérifie aisément que
   $$g(X) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) \frac{Q_j(X)}{Q_j(x_j)}$$
   convient.
2. (a) Il vient, grâce à la linéarité de l'intégrale, d'après la question précédente,
   $$J(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j) \quad \text{où} \quad \lambda_j = \int_{-1}^{1} \frac{Q(t)}{Q(x_j)} dt$$
   est un scalaire indépendant de $f$.
   Il en résulte immédiatement que $f \mapsto J(f)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$.
   (b) Si $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, le polynôme $g$ étudié au 1) n'est autre que $f$ (d'après l'unicité, puisqu'il est clair que $f$ convient !), donc Si $f \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors $J(f) = I(f)$.

### Partie 1.2 Choix des points d'interpolation

1. Remarquons tout d'abord que, lorsque $f$ est un polynôme, le polynôme d'interpolation $g$ qu'on lui associe comme dans la partie I n'est autre que le reste de la division euclidienne

de $f$ par $P_n$ : en effet ce reste est de degré strictement inférieur à $n$ et coïncide avec $f$ en $x_1, \ldots, x_n$ (si $f = P_nQ + R$, alors, pour tout $k$, $f(x_k) = R(x_k)$, puisque $x_k$ est racine de $P_n$).

• Pour montrer une première implication, je suppose que $J(f) = I(f)$ pour tout $f$ de $\mathbb{R}_p[X]$ ; soit alors $Q \in \mathbb{R}_{p-n}[X]$ : $P_n$ étant de degré $n$, $f = P_nQ$ est dans $\mathbb{R}_p[X]$, donc, par hypothèse,

$$J(f) = \int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\, dt.$$

Or, puisque $f$ est multiple de $P_n$, le polynôme $g$ associé à $f$ pour le calcul de $J(f)$ est d'après la remarque précédente le polynôme nul : $J(f) = 0$, d'où finalement

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\, dt = 0,$$

et cela pour tout $Q$ dans $\mathbb{R}_{p-n}[X]$, ce qui prouve la première implication.

• Je suppose maintenant que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{p-n}[X], \quad \int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\, dt = 0$$

et je considère $f \in \mathbb{R}_p[X]$ ; la division euclidienne de $f$ par $P_n$ s'écrit $f = P_nQ + g$, où $g$ est le polynôme associé à $f$ comme dans la première partie. Donc

$$J(f) = I(g) = I(f) - I(P_nQ) = I(f)$$

par hypothèse, et cela pour tout $f$ de $\mathbb{R}_p[X]$, ce qui prouve finalement l'équivalence demandée.

• Enfin, si $p \geq 2n$, la propriété ne peut être vérifiée, puisque $Q = P_n \in \mathbb{R}_{p-n}[X]$, alors que

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\, dt = \int_{-1}^{1} P_n^2(t)\, dt > 0,$$

car $P_n^2$ est une fonction continue, positive et non nulle. Par contraposition, j'ai montré que : Si la propriété est vérifiée, alors $p \leq 2n - 1$.

2. Je montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que la propriété $P_n$ suivante : "il existe une unique famille $(L_0, \ldots, L_n)$ de polynômes tels que, pour tout $k$ de $\{0, \ldots, n\}$, $L_k$ soit unitaire, de degré $k$, vérifiant

$$\forall (i,j) \in \{0, \ldots, n\}^2, \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_iL_j = 0$$

" est vraie pour tout $n$, ce qui prouvera le résultat demandé.

• Il est clair que $P_0$ est vraie, avec $L_0 = 1$.

• Je suppose, en guise d'hypothèse de récurrence, que $P_{n-1}$ vraie, pour un certain $n \geq 1$ et je cherche $(L_0, \ldots, L_n)$ vérifiant les conditions : nécessairement, $(L_0, \ldots, L_{n-1})$ est la famille fournie par l'hypothèse de récurrence, et $L_n$, qui doit être unitaire et de degré $n$, est nécessairement de la forme

$$L_n = X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j L_j, \quad \text{avec } (\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$$

(en effet, $(L_0, \dots, L_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, puisque c'est une famille libre (degrés échelonnés) de $n$ vecteurs de cet espace de dimension $n$). Enfin, pour tout $k$ de $\{0, \dots, n-1\}$, $\lambda_k$ est caractérisé par la condition

$$\int_{-1}^{1} L_k L_n = 0,$$

qui s'écrit, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$\int_{-1}^{1} L_k X^n + \lambda_k \int_{-1}^{1} L_k^2 = 0.$$

$\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$ sont ainsi entièrement déterminés et $L_n$, s'il existe, est donc unique. Enfin le polynôme $L_n$ défini ci-dessus, avec ces valeurs de $\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}$, est bien unitaire, de degré $n$, et j'ai bien :

$$\forall (i,j) \in \{0, \dots, n\}^2, \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_i L_j = 0$$

(d'après l'hypothèse de récurrence pour $j < n$, grâce au choix des $\lambda_k$ pour $j = n$). Ainsi, $P_n$ est vérifiée, ce qui achève la démonstration.

NB : le lecteur avisé aura reconnu l'algorithme de Gram-Schmidt.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; $U_n$ est unitaire, de degré $2n$, donc $U_n^{(n)}$ est de degré $n$, de coefficient dominant

$$2n(2n-1)\dots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Ainsi le polynôme $L_n^* = \frac{n!}{(2n)!} U_n^{(n)}$ est unitaire, de degré $n$, cela étant vrai aussi pour $n = 0$. Compte tenu de l'unicité prouvée à la question précédente, il suffit maintenant de montrer que

$$\forall (i,j) \in \{0, \dots, n\}^2, \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_i^* L_j^* = 0,$$

ou encore, à un coefficient multiplicatif près, que

$$\forall (i,j) \in \{0, \dots, n\}^2, \quad i < j \Rightarrow \int_{-1}^{1} U_i^{(i)} U_j^{(j)} = 0.$$

Soit donc $(i,j) \in \{0, \dots, n\}^2$, tel que $i < j$ ; j'effectue $j$ intégrations par parties successives (en dérivant "du côté de $U_i$" et en intégrant "du côté de $U_j$") : tous les "crochets" sont nuls car $-1$ et $1$ sont racines de $U_j^{(j-1)}, \dots, U_j$ et il reste

$$\int_{-1}^{1} U_i^{(i)} U_j^{(j)} = (-1)^j \int_{-1}^{1} U_i^{(i+j)} U_j = 0$$

car $U_i^{(i+j)} = 0$, puisque $i + j > 2i$ alors que $U_i$ est de degré $2i$. Finalement la suite $(L_n^*)$ est bien la suite $(L_n)$ :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad L_n = \frac{n!}{(2n)!} U_n^{(n)}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ ; il est aisé, à l'aide du théorème de Rolle, de prouver par récurrence sur $k$ que la propriété "$U_n^{(k)}$ admet $-1$ et $1$ pour racines d'ordre $n-k$ et $k$ racines distinctes dans $]-1,1[$" est vraie pour tout $k$ dans $\{0,\ldots,n-1\}$. $U_n^{(n-1)}$ admet donc $2+n-1$, soit $n+1$ racines distinctes dans $[-1,1]$ qui y délimitent $n$ intervalles où j'applique à nouveau le théorème de Rolle pour conclure : $L_n$ admet $n$ racines distinctes dans $]-1,1[$.

Pour tout $n$, $U_n$ est pair ; or le polynôme dérivé d'un polynôme pair (resp. impair) et impair (resp. pair). Il en résulte grâce à une récurrence immédiate : $U_n$ est de la même parité que $n$.

4. Si l'on choisit $P_n = L_n$, $(L_0,\ldots,L_{n-1})$ étant, comme je l'ai déjà vu, une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, en combinant les relations

$$\forall i \in \{0,\ldots,n-1\}, \quad \int_{-1}^{1} L_i L_n = 0,$$

j'obtiens

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_{-1}^{1} Q L_n = 0.$$

Le résultat du 1) s'applique alors, avec $p = 2n-1$ : Si $P_n = L_n$, alors : $\forall f \in \mathbb{R}_{2n-1}[X] \quad J(f) = I(f)$.

## Partie 1.3 Exemple : formule de Gauss à l'ordre 3

1. En développant $U_3 = (X^2-1)^3$ et en dérivant 3 fois, j'obtiens

$$L_3 = X(X^2 - \alpha^2) \quad \text{avec } \alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

2. En posant $x_1 = 0$, $x_2 = -\alpha$ et $x_3 = \alpha$, j'ai, en reprenant les notations du I, pour $f \in \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$,

$$J(f) = \lambda_1 f(0) + \lambda_2 f(-\alpha) + \lambda_3 f(\alpha),$$

avec

$$\lambda_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(t+\alpha)(t-\alpha)}{\alpha.(-\alpha)} dt, \quad \lambda_2 = \int_{-1}^{1} \frac{t(t-\alpha)}{(-\alpha)(-2\alpha)} dt, \quad \lambda_3 = \int_{-1}^{1} \frac{t(t+\alpha)}{\alpha.(2\alpha)} dt,$$

soit, tous calculs faits

$$J(f) = \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9}[f(-\alpha) + f(\alpha)].$$

3. (a) L'application $\Phi$ définie dans l'énoncé est clairement linéaire ; elle est injective car, si $P \in \operatorname{Ker}\Phi$, $P$ est de degré au plus égal à 5 et admet $0, -\alpha, \alpha$ comme racines d'ordre au moins égal à 2 : $P$ ne peut être que le polynôme nul. Enfin, $\mathbb{R}_5[X]$ et $\mathbb{R}^6$ sont tous deux de dimension 6, $\Phi$ est donc un isomorphisme : $\Phi$ est en particulier une bijection et donc Il existe un unique polynôme $G$ de $\mathbb{R}_5[X]$ vérifiant

$$\Phi(G) = (f(0), f'(0), f(-\alpha), f'(-\alpha), f(\alpha), f'(\alpha))$$

.

(b) D'après le choix de $G$, l'inégalité cherchée est triviale pour $x \in \{0, -\alpha, \alpha\}$. Soient donc $x \in [-1,1] \setminus \{0, -\alpha, \alpha\}$ et $\phi$ la fonction auxiliaire définie dans l'énoncé. Le choix de $A$ tel que $\phi(x) = 0$ est possible grâce au fait que $L_3(x) \neq 0$. $\phi$ est de classe $\mathcal{C}^6$ sur $[-1,1]$ et s'annule en quatre points distincts de cet intervalle : $x, 0, -\alpha, \alpha$. En appliquant le théorème de Rolle sur les trois intervalles adjacents délimités par ces quatre points, j'obtiens trois points distincts (et différents de $0$, de $-\alpha$ et de $\alpha$) où $\phi'$ s'annule ; comme en outre $\phi'$ s'annule en $0, -\alpha$ et $\alpha$, je dispose de six points distincts où $\phi'$ s'annule. En continuant alors à appliquer le théorème de Rolle, j'obtiens, pour $k = 6, 5, 4, 3, 2, 1$, $k$ points distincts où $\phi^{(7-k)}$ s'annule. Finalement, $\phi^{(6)}$ s'annule en un point $c$ de $[-1,1]$, d'où, puisque $G^{(6)} = 0$ et $L_3^{(6)} = 720$,

$$f^{(6)}(c) - 720A = 0.$$

Il en résulte que $|A| \leq \frac{M_6}{720}$, or, puisque $\phi(x) = 0$,

$$|f(x) - G(x)| \leq |A| \cdot [L_3(x)]^2.$$

En conclusion,

$$\forall x \in [-1,1], \quad |f(x) - G(x)| \leq \frac{M_6}{720} \cdot [L_3(x)]^2.$$

(c) En intégrant $f - G$ de $-1$ à $1$, compte tenu de $\int_{-1}^{1} L_3^2 = \frac{8}{175}$, on aura

$$|I(f) - I(G)| \leq \frac{M_6}{15750}.$$

Or, grâce au choix de $P_3$, $G$ étant de degré au plus égal à 5, j'ai $I(G) = J(G)$ et, d'après 2), $J(G) = J(f)$ puisque $G$ et $f$ coïncident en $0, -\alpha$ et $\alpha$. Donc :

$$|I(f) - J(f)| \leq \frac{M_6}{15750}.$$

# Problème 2 : splines cubiques

## Partie 2.1 Interpolation de $f$ par une fonction de $\mathbb{S}$

1. (a) Soit $(a_0, a_1, b_0, b_1) \in \mathbb{R}^4$ et $P$ le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par

$$P(X) = a_0(x_k - X)^3 + b_0(X - x_{k-1})^3 + a_1(x_k - X) + b_1(X - x_{k-1}).$$

Il apparaît que :

$$P(x_{k-1}) = a_0h^3 + a_1h; \quad P(x_k) = b_0h^3 + b_1h; \quad P''(x_{k-1}) = 6a_0h; \quad P''(x_k) = 6b_0h.$$

J'en déduis tout d'abord que la famille de 4 polynômes

$$\mathcal{B} = \left\{(x_k - X)^3, (X - x_{k-1})^3, (x_k - X), (X - x_{k-1})\right\}$$

est libre (si une combinaison linéaire telle que $P$ est le polynôme nul, j'en déduis $a_0 = b_0 = 0$, car $P'' = 0$, puis $a_1 = b_1 = 0$, car $P = 0$ !). C'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$, qui est de dimension 4.

Je résous maintenant la question par **analyse—synthèse :**

• **Analyse :** si un polynôme $P$ vérifie les condition de l'énoncé, ses coordonnées $(a_0, a_1, b_0, b_1)$ dans $\mathcal{B}$ vérifient nécessairement

$$a_0 = \frac{m_{k-1}}{6h}; \quad b_0 = \frac{m_k}{6h}; \quad a_1 = \frac{1}{h}\left(f_{k-1} - \frac{m_{k-1}}{6h}h^3\right); \quad b_1 = \frac{1}{h}\left(f_k - \frac{m_k}{6h}h^3\right)$$

• **Synthèse :** soit $P$ le polynôme dont les coordonnées dans $\mathcal{B}$ sont :

$$a_0 = \frac{m_{k-1}}{6h}; \quad a_1 = \frac{f_{k-1}}{h} - \frac{hm_{k-1}}{6}; \quad b_0 = \frac{m_k}{6h}; \quad b_1 = \frac{f_k}{h} - \frac{hm_k}{6}$$

D'après la remarque préliminaire, $P$ est bien solution et c'est la seule d'après l'analyse : Il existe un unique polynôme $P_k$ vérifiant les conditions de l'énoncé et

$$a_0 = \frac{m_{k-1}}{6h}; \quad a_1 = \frac{f_{k-1}}{h} - \frac{hm_{k-1}}{6}; \quad b_0 = \frac{m_k}{6h}; \quad b_1 = \frac{f_k}{h} - \frac{hm_k}{6}.$$

(b) Le seul problème potentiel dans la définition de $g$ serait une "double définition" en $x_k$, pour $k = 1, \ldots, n-1$, puisque $x_k$ appartient à $[x_{k-1}, x_k]$, où $g$ coïncide avec $P_k$, et à $[x_k, x_{k+1}]$, où $g$ coïncide avec $P_{k+1}$ ; mais, par construction :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k) = f_k.$$

Par conséquent, $g$ est bien définie.

Plus précisément, $g$ est même continue sur $[a, b]$. Comme elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur les $]x_{k-1}, x_k[$, il reste à examiner la régularité des raccordements aux points $x_k$, pour $k = 1, \ldots, n-1$. D'après la question précédente, en gardant les mêmes notations, j'ai pour tout $k$ de $[\![1, n]\!]$ :

$$P_k'(x_{k-1}) = -3a_0h^2 - a_1 + b_1 = \cdots = -\frac{h}{3}m_{k-1} - \frac{h}{6}m_k + \frac{1}{h}(f_k - f_{k-1})$$

$$P'_k(x_k) = 3b_0h^2 - a_1 + b_1 = \cdots = \frac{h}{6}m_{k-1} + \frac{h}{3}m_k + \frac{1}{h}(f_k - f_{k-1})$$

Ainsi, $g$ admet des dérivées à gauche et à droite en chaque $x_k$, pour $k = 1, \ldots, n-1$, avec :

$$g'_g(x_k) = P'_k(x_k) = \frac{h}{6}m_{k-1} + \frac{h}{3}m_k + \frac{1}{h}(f_k - f_{k-1})$$

d'après la deuxième relation ci-dessus, et

$$g'_d(x_k) = P'_{k+1}(x_k) = -\frac{h}{3}m_k - \frac{h}{6}m_{k+1} + \frac{1}{h}(f_{k+1} - f_k)$$

d'après la première relation où j'ai remplacé $k$ par $k+1$ (attention aux notations $a_0, \ldots$ qui dépendent de $k$ !). $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ si et seulement si $g'_g(x_k) = g'_d(x_k)$ pour tout $k$ de $[1, n-1]$ (pas de problème aux extrémités !), soit si et seulement si :

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \frac{6}{h^2}(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1}) \quad \text{(égalité notée } (L_k)).$$

Cette condition est donc a fortiori nécessaire pour que $g$ soit de classe $\mathcal{C}^2$ ! Il se trouve qu'elle est aussi suffisante puisque, dès que $g$ est $\mathcal{C}^1$, ses dérivées secondes à gauche et à droite en chaque $x_k$, pour $k = 1, \ldots, n-1$, sont égales à $m_k$, d'après les conditions imposées aux $P_k$ ; $g$ est alors de classe $\mathcal{C}^2$ et finalement : $g$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ si et seulement si $(L_k)$ est vérifiée pour $k = 1, \ldots, n-1$.

(c) D'après les calculs de la question précédente,

$$g'(a) = P'_1(x_0) = -\frac{h}{3}m_0 - \frac{h}{6}m_1 + \frac{1}{h}(f_1 - f_0)$$

et

$$g'(b) = P'_n(x_n) = \frac{h}{6}m_{n-1} + \frac{h}{3}m_n + \frac{1}{h}(f_n - f_{n-1})$$

donc

$$g'(a) = \alpha \Leftrightarrow 2m_0 + m_1 = b_0 \quad \text{où} \quad b_0 = \frac{6}{h^2}(f_1 - f_0 - h\alpha)$$

et

$$g'(b) = \beta \Leftrightarrow m_{n-1} + 2m_n = b_n \quad \text{où} \quad b_n = -\frac{6}{h^2}(f_n - f_{n-1} - h\beta)$$

Ainsi, en notant pour $k = 1, \ldots, n-1$ :

$$b_k = \frac{6}{h^2}(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1})$$

le second membre de l'égalité $(L_k)$, une CNS pour que $g$ soit de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et vérifie $g'(a) = \alpha$, $g'(b) = \beta$, est que le vecteur $m$ soit solution du système linéaire :

$$(S) \quad A \cdot m = b, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & (0) \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ (0) & & & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \text{ et } b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$$

La matrice $A$ est tridiagonale symétrique.

2. (a) Je calcule, avec une petite réindexation :

$$\begin{aligned}
\langle A\cdot v, v\rangle &= (2v_0+v_1)v_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(v_{k-1}+4v_k+v_{k+1})v_k + (v_{n-1}+2v_n)v_n \\
&= 2v_0^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} v_k^2 + 2v_n^2 + v_0v_1 + \sum_{k=1}^{n-1} v_kv_{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} v_{k-1}v_k + v_{n-1}v_n \\
&= 2\left(\sum_{k=0}^{n-1} v_k^2 + \sum_{k=1}^{n} v_k^2\right) + 2\sum_{k=1}^{n} v_{k-1}v_k \\
&= \langle v, v\rangle + \sum_{k=1}^{n}(v_{k-1}+v_k)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} v_k^2
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle A\cdot v, v\rangle \geq \langle v, v\rangle$ et une condition nécessaire pour avoir l'égalité est que les $v_k$, $k\in[\![1, n-1]\!]$ soient tous nuls, autrement dit $v\in \mathrm{Vect}(e_0, e_n)$. Or, si $v = v_0e_0 + v_ne_n$, j'ai

$$\langle A\cdot v, v\rangle = 2(v_0^2+v_n^2) \quad \text{et} \quad \langle v, v\rangle = v_0^2+v_n^2$$

donc :

$$\langle A\cdot v, v\rangle \geq \langle v, v\rangle \quad \text{avec égalité si et seulement si } v=0.$$

(b) Soit $f = \mathrm{Can}\, A$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^{n+1}$ de matrice $A$ dans la base canonique ; la minoration précédente montre que $f(v) = 0 \Rightarrow v = 0$, ainsi $f$ est injective, donc bijective puisque c'est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Autrement dit : $A$ est inversible.

(c) **Analyse :** si $G$ existe, je note $P_k$ le polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ coïncidant avec $G$ sur $]x_{k-1}, x_k[$ (fourni par P4)) ; d'après P1), P2), P3) et le 1)c), les $m_k = G''(x_k)$ vérifient nécessairement le système $(S)$, avec le vecteur $b$ défini ci-dessus ; comme ce système admet une solution unique (il est de Cramer d'après b)), les $m_k$, donc les $P_k$, donc $G$ sont entièrement déterminés.

**Synthèse :** soit $G$ la fonction coïncidant sur $]x_{k-1}, x_k[$ avec le polynôme $P_k$ défini au 1), en prenant pour valeurs $m_k$ la solution de $(S)$ ; $G$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ (d'après 1)c)) et vérifie P2), P3), P4) par construction, donc $G$ est bien solution, or c'est la seule possible d'après l'analyse : Il existe une unique fonction $G$ de $\mathcal{W}(f,\alpha,\beta)$ qui soit dans $\mathbb{S}$.

3. On suppose ici $\alpha=\beta=0$. Alors, d'après les relations obtenues aux questions 1)b) et 1)c),

$$b = H\cdot f, \quad \text{où} \quad H = \frac{6}{h^2}\cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & & & (0) \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -2 & 1 \\ (0) & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le vecteur $x = \sum_{k=0}^{n} x_k e_k$ appartient au noyau de $H$ si et seulement si :

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ \vdots \\ x_{n-2} - 2x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} - x_n = 0 \end{cases}$$

Grâce aux opérations élémentaires successives $L_k \leftarrow L_k + L_{k-1}$, pour $k = 2, \dots, n-1$, je constate que ce système équivaut à $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, ainsi Le noyau de $H$ est la droite $\mathrm{Vect}(1, \dots, 1)$.

On pouvait effectivement prévoir ce résultat : les vecteurs $f$ du noyau de $H$ sont ceux pour lesquels le vecteur $b$ est nul, autrement dit pour lesquels le vecteur $m$ est nul (puisque $A$ est inversible) ; j'en déduis que :

• si $f$ appartient au noyau de $H$, alors les $m_k$ sont nuls, donc la fonction $G$ est affine (car affine par morceaux et de classe $\mathcal{C}^2$) ; mais comme $G'(a) = \alpha = 0$ par hypothèse, c'est que $G$ est constante et donc tous les $f_k$ sont égaux ;

• réciproquement, si tous les $f_k$ sont égaux, la fonction $G$ constante (égale à la valeur commune des $f_k$) est solution, c'est donc la solution (on a montré son unicité), avec des $m_k$ tous nuls donc $b$ nul, d'où $f$ élément du noyau de $H$.

## Partie 2.2 Une propriété "extrémale" des fonctions de $\mathbb{S}$

1. $\mathbb{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2[a,b]$ : $\mathbb{S}$ est par définition une partie de $\mathcal{C}^2[a,b]$, non vide (j'ai déjà signalé que $0 \in \mathbb{S}$ !) et stable par combinaisons linéaires (clair au vu de P4), puisque $\mathbb{R}_3[X]$ est lui-même stable par combinaisons linéaires). Ainsi, $\mathbb{S}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\phi$ l'application de $\mathbb{S}$ dans $\mathbb{R}^{n+3}$, qui à toute fonction $g$ de $\mathbb{S}$ associe $(g(x_0), \dots, g(x_n), g'(a), g'(b))$. $\phi$ est linéaire (banal) et nous avons montré au $\mathrm{I}$. que tout élément $(f_0, \dots, f_n, \alpha, \beta)$ de $\mathbb{R}^{n+3}$ admet un antécédent unique dans $\mathbb{S}$ ; autrement dit, $\phi$ est une bijection ! Finalement $\phi$ est un isomorphisme et il en résulte : $\dim \mathbb{S} = n+3$.
2. (a) Soient $\alpha, \beta$ réels, $u$ dans $\mathcal{W}(f, \alpha, \beta)$ et $G$ la fonction de $\mathbb{S}$ déterminée à la partie $\mathrm{I}$. Après simplification :

$$\Phi(u-G) - [\Phi(u) - \Phi(G)] = \int_a^b (2G''^2 - 2u''G'') = 2\int_a^b G'' \cdot (G'' - u'').$$

Pour tout $k$ dans $[\![1, n]\!]$, j'intègre par parties sur $[x_{k-1}, x_k]$ (en notant encore, pour simplifier, $G$ et $u$ les polynômes coïncidant avec $G$ et $u$ sur $[x_{k-1}, x_k]$, polynômes bien sûr de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[x_{k-1}, x_k]$) :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} G'' \cdot (G'' - u'') = [G'' \cdot (G' - u')]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} G^{(3)} \cdot (G' - u')$$

et, en intégrant à nouveau par parties

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} G^{(3)} \cdot (G' - u') = [G^{(3)} \cdot (G - u)]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} G^{(4)} \cdot (G - u) = 0.$$

Le crochet est nul, puisque $G$ et $u$ coïncident en $x_{k-1}$ et $x_k$ (car elles coïncident avec $f$) ; la dernière intégrale est nulle, puisque $G^{(4)} = 0$ (dérivée d'ordre 4 d'un polynôme de degré au plus 3). En sommant, j'obtiens alors grâce à la relation de Chasles :

$$\int_a^b G'' \cdot (G'' - u'') = [G'' \cdot (G' - u')]_a^b = 0$$

puisque $G'$ et $u'$ coïncident en $a$ et en $b$ (valant $\alpha$ et $\beta$). En conclusion : Pour tout $u$ de $\mathcal{W}(f, \alpha, \beta)$, on a : $\Phi(u - G) = \Phi(u) - \Phi(G)$.

(b) Puisque $\Phi$ est à valeurs positives, le résultat précédent montre que :

$$\forall u \in \mathcal{W}(f, \alpha, \beta), \quad \Phi(u) - \Phi(G) \geq 0$$

donc, comme $G$ elle-même est dans $\mathcal{W}(f, \alpha, \beta)$ :

$$\Phi(G) = \inf_{u \in \mathcal{W}(f, \alpha, \beta)} \Phi(u).$$

Il s'agit en fait d'un plus petit élément, on pourrait écrire min au lieu de inf !

*Fin du Corrigé du devoir libre*

*Thats' all folks ! !*