Devoir Libre N°1

Durée : 4 heures

CONSIGNES GÉNÉRALES

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot **FIN** à la fin de votre composition.

Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.

+212 661 645600

Problème 1 : polynômes de Legendre

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul. Les polynômes considérés sont dans $\mathbb{R}[X]$.
On confondra polynôme et fonction polynomiale.

Partie 1.1 — Interpolation de Lagrange

Soient $x_1, \ldots, x_n$ n réels distincts de l'intervalle $[-1,1]$. On considère les polynômes suivants :
$P_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k)$ et, pour $1 \leq j \leq n$, $\quad Q_j = \dfrac{P_n}{X - x_j}$.
Soit enfin f une application continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme g de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $\forall k \in \{1, \ldots, n\}$ $g(x_k) = f(x_k)$.
   Exprimer g à l'aide de f, des Q_j et des x_j.
2. Pour calculer une valeur approchée de $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$, on calcule $J(f) = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt$.
   a. Montrer que l'application qui à f associe $J(f)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel des applications continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que, si f est un polynôme de degré au plus égal à $n-1$, alors : $J(f) = I(f)$.

Partie 1.2 — Choix des points d'interpolation

On cherche dans cette partie à choisir $x_1, \ldots, x_n$ de façon à ce que $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de degré au plus égal à p, avec p le plus grand possible.

1. Soit p un entier naturel supérieur ou égal à n. Montrer que $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de $\mathbb{R}_p[X]$ si et seulement si P_n vérifie la propriété suivante :
   $\forall Q \in \mathbb{R}_{p-n}[X]$, $\int_{-1}^{1} P_n(t) \cdot Q(t)\,dt = 0$.
   Montrer que, si cette propriété est vérifiée, alors $p \leq 2n-1$.
2. Montrer par récurrence l'existence d'une unique suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ telle que, pour tout n, L_n soit unitaire, de degré n et que
   $\forall (k,n) \in \mathbb{N}^2$, $k < n \Rightarrow \int_{-1}^{1} L_k(t) \cdot L_n(t)\,dt = 0.$
   (On pourra rechercher L_n sous la forme : $X^n + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j L_j$.)
3. a. En utilisant l'unicité établie au 2) et à l'aide d'intégrations par parties, établir que
   $L_n = \dfrac{n!}{(2n)!} \cdot U_n^{(n)}$ (dérivée n-ième du polynôme $U_n = (X^2-1)^n$).
   b. En partant de cette expression et à l'aide du théorème de Rolle, démontrer que, pour n non nul, L_n possède n racines distinctes dans $]-1,1[$. Etudier la parité de L_n.

4. Montrer que, si l'on choisit $P_n = L_n$, alors $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de degré au plus égal à $2n-1$.

Partie 1.3 — Exemple : formule de Gauss à l'ordre 3

1. Montrer que L_3 s'écrit : $L_3 = X(X^2 - \alpha^2)$ avec $\alpha \in]0,1[$ à préciser.
2. Avec les notations des parties précédentes, on choisit $P_3 = L_3$. On a donc $J(f) = I(f)$ pour tout polynôme f de $\mathbb{R}_5[X]$. Montrer que, pour toute application f continue de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$, $J(f)$ s'écrit :
$J(f) = u.f(0) + v.[f(-\alpha) + f(\alpha)]$ avec u, v réels à préciser.
Pour majorer l'erreur de méthode, on considère désormais une application f de classe C^6 sur $[-1,1]$.
3. a. À l'aide de l'application de $\mathbb{R}_5[X]$ dans $\mathbb{R}^6$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_5[X]$ associe $\langle P(0), P'(0), P(-\alpha), P'(-\alpha), P(\alpha), P'(\alpha)\rangle$,
montrer qu'il existe un unique polynôme G de $\mathbb{R}_5[X]$ tel que
$G(0) = f(0); \quad G'(0) = f'(0); \quad G(-\alpha) = f(-\alpha); \quad G'(-\alpha) = f'(-\alpha);$
$G(\alpha) = f(\alpha); \quad G'(\alpha) = f'(\alpha).$
   b. Établir
   $\forall x \in [-1,1], |f(x) - G(x)| \leq \dfrac{M_6}{720} \cdot [L_3(x)]^2$ où $M_6 = \sup_{[-1,1]} |f^{(6)}|$.
   (On pourra appliquer le théorème de Rolle à la fonction auxiliaire
   $\phi : t \mapsto f(t) - G(t) - A.[L_3(t)]^2$, le réel A étant choisi tel que $\phi(x) = 0$.)
   c. En déduire que
   $|I(f) - J(f)| \leq \dfrac{M_6}{15750}$.

Problème 2 : splines cubiques

Soient $a < b$ deux réels et $n \geq 3$ un entier.
On désigne par $C^2[a,b]$ l'ensemble des fonctions numériques de classe C^2 sur $[a,b]$.
On divise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de longueur $h = \dfrac{b-a}{n}$ et on considère les $(n+1)$ points de $[a,b]$: $x_k = a + k \cdot h$, $k = 0, \ldots, n$.
On se donne une fonction numérique f définie sur $[a,b]$ et on note f_k ses valeurs aux points x_k, c'est-à-dire : $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$ $f_k = f(x_k)$.
Si α et β sont deux réels donnés, on désigne par $W(f, \alpha, \beta)$ l'ensemble des fonctions numériques u qui vérifient les trois propriétés :
P1) u appartient à $C^2[a,b]$.
P2) u coïncide avec f en chaque point x_k : $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$ $u(x_k) = f_k$.
P3) $u'(a) = \alpha$, $u'(b) = \beta$.
On désigne par S l'ensemble des fonctions numériques u de $C^2[a,b]$ qui vérifient la propriété :
P4) Sur chaque intervalle $]x_{k-1}, x_k[$ ($k = 1, \ldots, n$), u est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
On désigne par $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$ et on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ à des matrices à $(n+1)$ lignes et une colonne.
On note par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{n+1}$: pour
$a = (a_0, \ldots, a_n)$ et $b = (b_0, \ldots, b_n)$, $\langle a, b \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$.

Partie 2.1 — Interpolation de f par une fonction de S

Les réels α, β étant donnés, on cherche une fonction G de $W(f,\alpha,\beta)$ qui soit dans S.

1. Soit $m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} m_k.e_k$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, donné par ses composantes sur la base canonique.
   a. Soit k un entier de $\{1,\ldots,n\}$, montrer qu'il existe un unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré inférieur ou égal à 3, P_k, tel que :
   $P_k(x_{k-1}) = f_{k-1}; P_k(x_k) = f_k; P''_k(x_{k-1}) = m_{k-1}; P''_k(x_k) = m_k$.
   On cherchera P_k sous la forme :
   $P_k(x) = a_0(x_k - x)^3 + b_0(x - x_{k-1})^3 + a_1(x_k - x) + b_1(x - x_{k-1})$ et on explicitera les coefficients (a_0, a_1, b_0, b_1) en fonction de $(f_{k-1}, f_k, m_{k-1}, m_k, h)$.
   b. On considère la fonction g dont la restriction à $[x_{k-1}, x_k]$, ($k = 1,\ldots,n$) est P_k.
   Vérifier que g est bien définie et montrer qu'une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que g soit de classe C^2 sur $[a,b]$ est que :
   $m_{k-1} + 4m_k + m_{k+1} = \dfrac{6}{h^2}(f_{k-1} - 2f_k + f_{k+1})$, $k = 1,\ldots,n-1$.
   c. En déduire qu'une CNS pour que g soit de classe C^2 sur $[a,b]$ et vérifie $g'(a) = \alpha$, $g'(b) = \beta$, est que le vecteur m soit solution d'un système linéaire de la forme :
   (S) $A \cdot m = b$,
   où A est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont (2, 4, 4, …, 4, 2) et b un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, que l'on précisera. On ne cherchera pas à résoudre ce système.
   Que remarque-t-on quant à la forme de A ?
2. Soit $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k.e_k$ un vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$, donné par ses composantes sur la base canonique.
   a. Montrer que $\langle A \cdot v, v\rangle \geq \langle v, v\rangle$.
   Déterminer les vecteurs v pour lesquels l'inégalité précédente est une égalité.
   b. En déduire que A est inversible.
   c. En déduire l'existence et l'unicité de la fonction G cherchée.
3. On suppose pour cette question que $\alpha = \beta = 0$. Montrer que le vecteur b du membre de droite de (S) est de la forme $b = H \cdot f$, où $f = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k.e_k$ et H est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ que l'on précisera.
   Déterminer le noyau de H. Pouvait-on le prévoir sans expliciter H ?

Partie 2.2 — Une propriété "extrémale" des fonctions de S

1. Montrer que S est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Indiquer sa dimension : il pourra être utile d'exhiber une application linéaire de S dans un certain $\mathbb{R}^p$.

2. À chaque fonction u de $C^2[a,b]$ on associe le nombre $\Phi(u)$ défini par :
$\Phi(u) = \displaystyle\int_a^b [u''(x)]^2\,dx$.
Les réels α, β étant donnés, G désigne la fonction de S déterminée à la partie précédente.
   a. Montrer que, pour tout u de $W(f,\alpha,\beta)$, on a : $\Phi(u-G) = \Phi(u) - \Phi(G)$.
   b. En déduire que : $\Phi(G) = \inf_{u\in W(f,\alpha,\beta)} \Phi(u)$.

Fin du Devoir libre
Bon courage !