

Méthodes Stochastiques Innovantes pour l'Étude des Systèmes Dynamiques

M. Khalid EL BAKKIOUI

Sous la direction du Prof. Adel SETTATTI

- 1. Introduction**
- 2. Conditions nécessaires et suffisantes**
- 3. Modèle SIRS stochastique à sauts**
- 4. Conclusion et perspectives**
- 5. Bibliographie**

1. Introduction

Historique

Premiers développements théoriques



Daniel Bernoulli (1700-1782)

- ✿ En 1760, un modèle mathématique rigoureux a été développé en épidémiologie.
- ✿ Il portait sur la variole et la variolisation, estimant une hausse de l'espérance de vie de 3 ans.

Modélisation des maladies vectorielles



Sir Ronald Ross (1857-1932)

- ✿ Au début du XX^e siècle, la modélisation des maladies vectorielles commence (sont des infections transmises par des vecteurs).
- ✿ Le lien paludisme-moustiques est établi et récompensé par un Nobel en 1902.

Historique

Naissance des modèles compartimentaux



W.O. Kermack
(1898-1970)

- En 1927, le modèle SIR pose les bases de l'épidémiologie mathématique.
- Il divise la population en Susceptibles, Infectés et Rétablis, et introduit le seuil épidémique R_0 .



A.G. McKendrick
(1876-1943)

Approches modernes



Roy M. Anderson
(1947-)

- Anderson et May ont pionnié les modèles intégrant démographie et hétérogénéités.
- Leurs travaux sur VIH, rougeole et grippe ont influencé la santé publique moderne.



Robert M. May
(1936-2020)

Panorama des modèles

Modèles compartimentaux classiques

- ▶ **SI** : Susceptibles → Infectés.
- ▶ **SIS** : Susceptibles ↔ Infectés (ex. : rhume, méningite).
- ▶ **SIR** : Susceptibles → Infectés → Retirés (ex. : rougeole).
- ▶ **SIRS** : SIR avec perte d'immunité (ex. : grippe, choléra).
- ▶ **SEIR** : Susceptibles → Exposés → Infectés → Retirés (ex. : fièvre jaune, COVID-19).
- ▶ **SEIRS** : SEIR avec perte d'immunité.
- ▶ **SIRD** : SIR avec décès (ex. : Ebola).
- ▶ **MSIR** : Immunité maternelle (ex. : rougeole infantile).
- ▶ **SVEIR** : SEIR avec vaccinés.
- ▶ **SIQV, SEAIHRD** : Ajout de quarantaine, asymptomatiques, hospitalisés, décédés (ex. : COVID-19).

Extensions et modèles avancés

- ▶ **SEA(Q)IR, SEASIR, SEICRD, etc.** : Avec confinement, quarantaine, hospitalisation, soins intensifs.
- ▶ **Modèle EHESP** : Modèle français COVID-19 (S, E, Ip, I, A, H, Inh, R).
- ▶ **Modèle multi-groupes** : Par âge, risque, comportement.
- ▶ **Modèle hôte-vecteur** : Deux populations (ex. : paludisme, dengue, Zika).
- ▶ **Modèles stochastiques** : Aléa dans la transmission.
- ▶ **Modèles spatiaux** : Diffusion géographique, mobilité.
- ▶ **Modèles sur réseaux** : Propagation sur graphes sociaux.
- ▶ **Agent-Based Models** : Simulation individuelle et comportements.

Problématique et contexte

Enjeu

Intégrer les incertitudes dans la modélisation des dynamiques SIRS pour des prévisions robustes et réalistes.

Problématique

Les modèles déterministes ne prennent pas en compte les aléas, ce qui réduit leur précision et leur fiabilité en conditions réelles.

Approches stochastiques

- * Bruit brownien et chaînes de Markov : fluctuations continues.
- * Sauts de Poisson : fluctuations discontinues..

Comparaison

- * **Modèles déterministes** : trajectoires fixes, analyse simple, réalisme limité face aux incertitudes.
- * **Modèles stochastiques** : trajectoires probabilistes, incertitudes mieux captées, complexité élevée.

Objectifs principaux

Modèles SIRS avec fluctuations

- ✚ Condition nécessaire et suffisante pour l'extinction et la persistance.
- ✚ Stabilité globale.
- ✚ Stabilité exponentielle presque sûre.
- ✚ Stabilité au q -ième moment.
- ✚ Prise en compte des régimes environnementaux et du bruit blanc.
- ✚ Incidence non bilinéaire (exposant).

Modèles SIRS perturbés

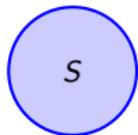
- ✚ Conditions suffisantes d'extinction et de persistance.
- ✚ Impact des sauts stochastiques modélisés par une mesure de Poisson.

Validation

- ✚ Validation des résultats théoriques par des simulations numériques rigoureuses.

2. Conditions nécessaires et suffisantes

Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- ✚ Paramètres indexés par le régime *j*.
- ✚ – = Sortie (diminution) du compartiment.
- ✚ + = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

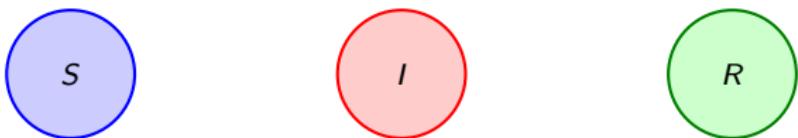
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- ✚ Paramètres indexés par le régime j .
- ✚ - = Sortie (diminution) du compartiment.
- ✚ + = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

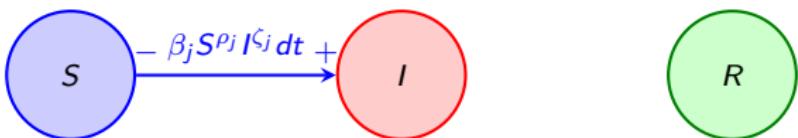
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- ✚ Paramètres indexés par le régime j .
- ✚ – = Sortie (diminution) du compartiment.
- ✚ + = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

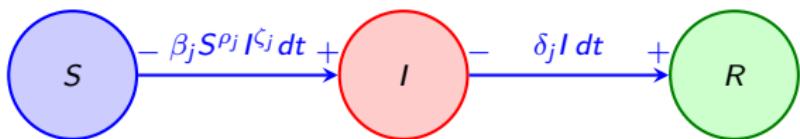
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- Paramètres indexés par le régime j .
- $-$ = Sortie (diminution) du compartiment.
- $+$ = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

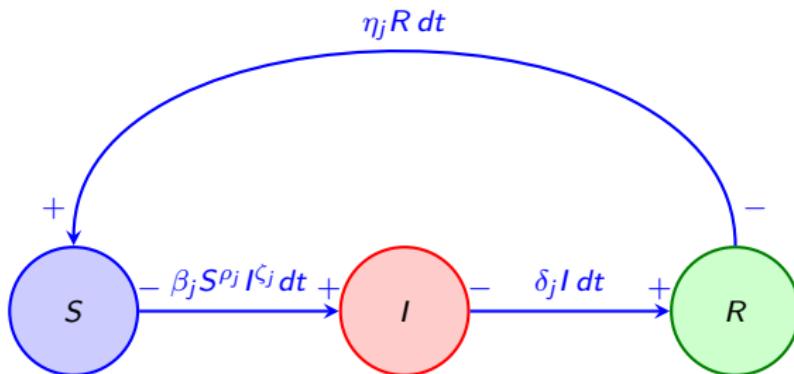
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- ✚ Paramètres indexés par le régime j .
- ✚ $-$ = Sortie (diminution) du compartiment.
- ✚ $+$ = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

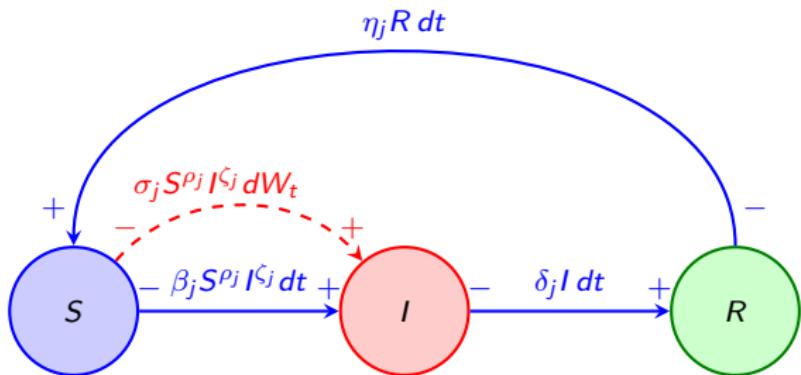
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- Paramètres indexés par le régime j .
- $-$ = Sortie (diminution) du compartiment.
- $+$ = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

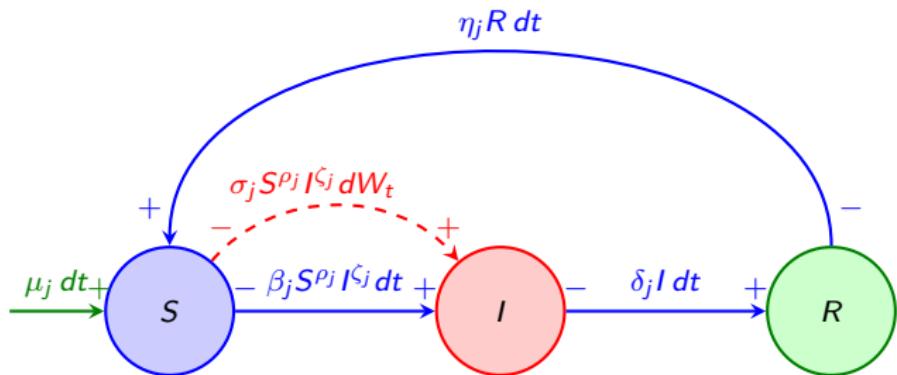
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- Paramètres indexés par le régime j .
- – = Sortie (diminution) du compartiment.
- + = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

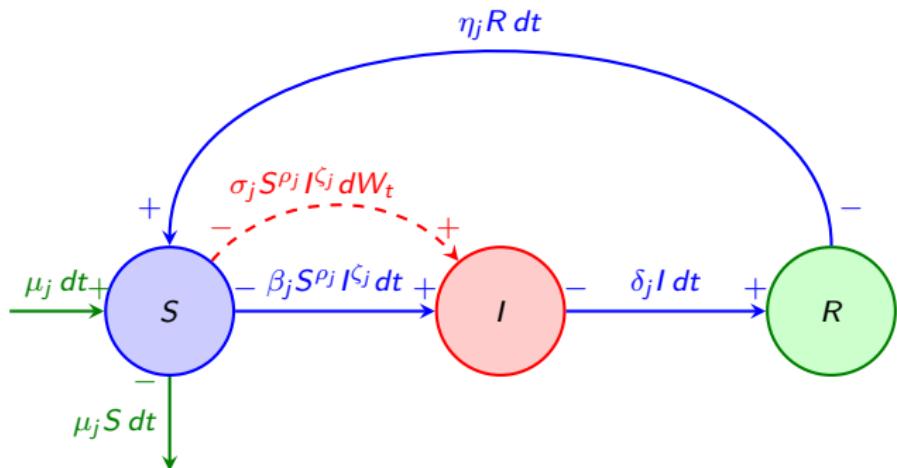
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- Paramètres indexés par le régime j .
- $-$ = Sortie (diminution) du compartiment.
- $+$ = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

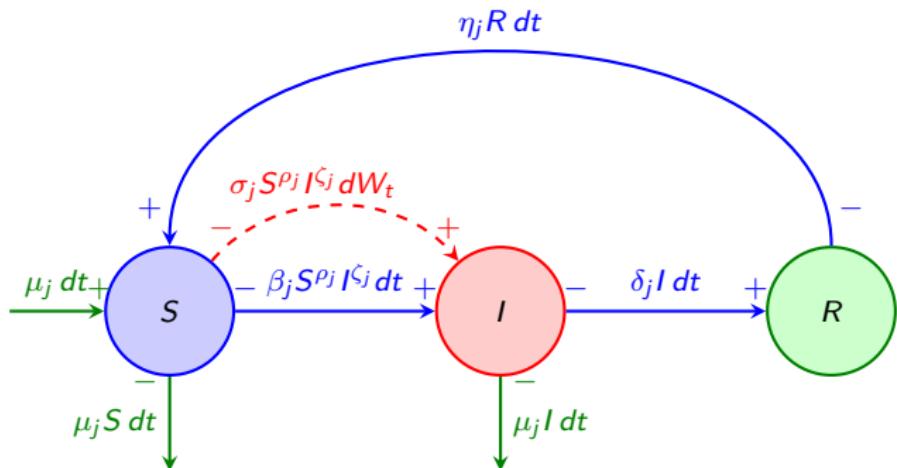
Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- Paramètres indexés par le régime j .
- – = Sortie (diminution) du compartiment.
- + = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- Paramètres indexés par le régime j .
- – = Sortie (diminution) du compartiment.
- + = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

Diagramme du modèle SIRS stochastique

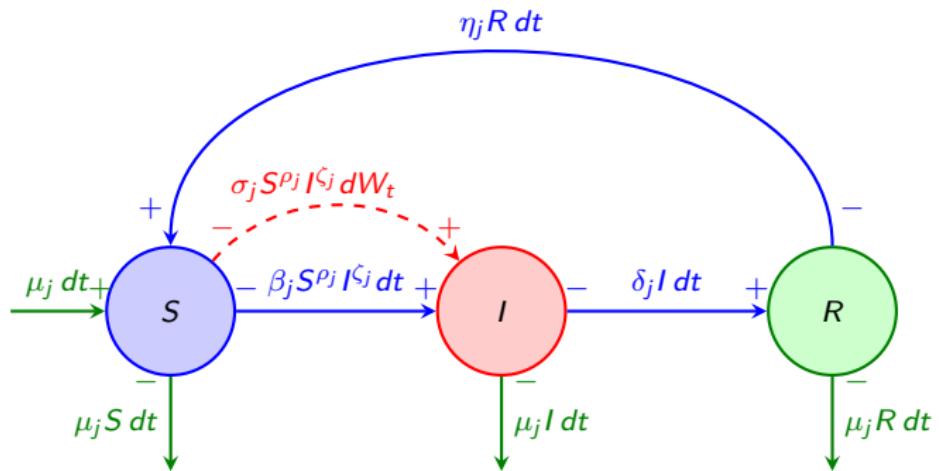
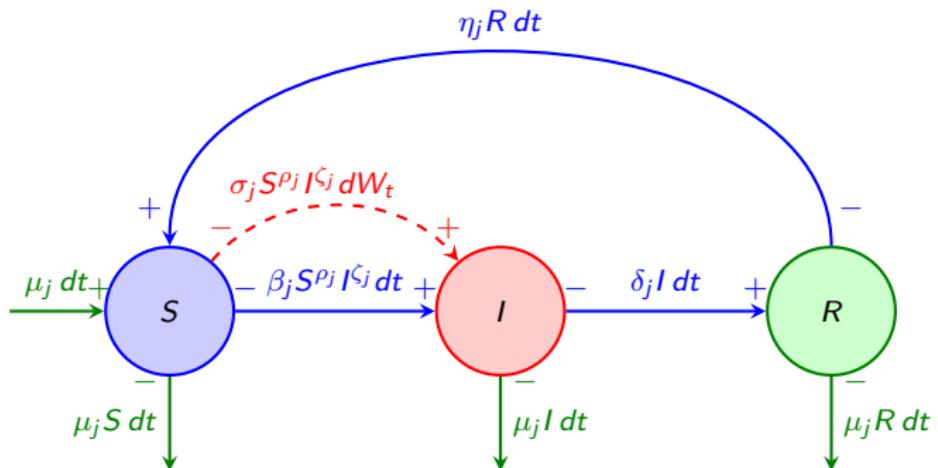


Diagramme du modèle SIRS stochastique



Légende

- Transitions épidémiologiques (déterministes).
- Bruit stochastique (Wiener).
- Dynamique démographique.
- Paramètres indexés par le régime j .
- – = Sortie (diminution) du compartiment.
- + = Entrée (augmentation) dans le compartiment.

Modèle SIRS à régimes stochastiques non bilinéaire

Modèle SIRS à régimes stochastiques non bilinéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t = (\underbrace{\mu_{\xi(t)}(1 - S_t) + \eta_{\xi(t)}R_t - \beta_{\xi(t)}S_t^{\rho_{\xi(t)}}I_t^{\zeta_{\xi(t)}}}_{\text{Terme de dérive}})dt - \underbrace{\sigma_{\xi(t)}S_t^{\rho_{\xi(t)}}I_t^{\zeta_{\xi(t)}}dW_t}_{\text{Terme stochastique}}, \\ dl_t = (\underbrace{\beta_{\xi(t)}S_t^{\rho_{\xi(t)}}I_t^{\zeta_{\xi(t)}}}_{\text{Terme de dérive}} - (\mu_{\xi(t)} + \delta_{\xi(t)})I_t)dt + \underbrace{\sigma_{\xi(t)}S_t^{\rho_{\xi(t)}}I_t^{\zeta_{\xi(t)}}dW_t}_{\text{Terme stochastique}}, \\ dR_t = (\underbrace{\delta_{\xi(t)}I_t - (\mu_{\xi(t)} + \eta_{\xi(t)})R_t}_{\text{Terme de dérive}})dt. \end{array} \right. \quad (1)$$

La formule d'Itô appliquée au système stochastique est :

$$df(t, X_t, \xi_t) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t, \xi_t) + b(t, X_t, \xi_t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t, \xi_t) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, X_t, \xi_t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t, \xi_t) \right) dt}_{\text{Terme déterministe} + \text{Terme de diffusion}} + \underbrace{\sigma(t, X_t, \xi_t) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t, \xi_t) dW_t}_{\text{Terme stochastique}} + \underbrace{\sum_{j \neq \xi_t} Q_{\xi_t j} [f(t, X_t, j) - f(t, X_t, \xi_t)] dt}_{\text{Terme de saut markovien}}.$$

X_t : un processus stochastique continu	ξ_t : un processus de saut markovien à états discrets
W_t : un mouvement brownien standard	$Q = (Q_{ij})$: matrice de générateur infinitésimal de ξ_t

Formulation et résultats auxiliaires

- * **Processus de Markov à états finis** : $\xi(t)$, avec espace d'état $\mathcal{E} = \{1, \dots, r\}$.
- * **Sa distribution stationnaire** : $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_r)$.
- * **Dynamique infinitésimale** :

$$\mathbb{P}(\xi(t + \varsigma) = j \mid \xi(t) = i) = \begin{cases} \gamma_{ij}\varsigma + o(\varsigma), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\varsigma + o(\varsigma), & i = j. \end{cases}$$

- * $\Delta = \{x \in \mathbb{R}_+^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.
- * **Processus stochastique** : $X(t) = (S(t), I(t), R(t))$, défini par l'EDS : $dX(t) = b(X(t), \xi(t)) dt + h(X(t), \xi(t)) dW(t)$.
- * **Générateur infinitésimal \mathcal{L}** :

$$\mathcal{L}V(x, j) = b^T(x, j)\nabla V(x, j) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left(h^T(x, j)\nabla^2 V(x, j)h(x, j) \right) + \Gamma V(x, \cdot)(j),$$

avec :

$$\Gamma V(x, \cdot)(j) = \sum_{k \neq j} \gamma_{jk} (V(x, k) - V(x, j)).$$

Theorem 1 (Théorème d'invariance positive)

L'ensemble Δ est presque sûrement positivement invariant pour le système (1). C'est-à-dire que, pour toute condition initiale $(S_0, I_0, R_0, \xi_0) \in \Delta \times \mathcal{E}$, on a :

$$\mathbb{P}((S(t), I(t), R(t), \xi(t)) \in \Delta \times \mathcal{E}, \text{ pour tout } t \geq 0) = 1.$$

Références

- * Khasminskii2007, Yuan2004.

Lemme essentiel

Lemma 2

Soient $p, q > 0$. La fonction $f_{(p,q)}(x, y) = x^p y^q$ définie sur

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x + y \leq 1 \right\},$$

vérifie les propriétés suivantes :

- * Elle atteint son maximum global en $\left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q} \right)$.
- * La valeur maximale est $\frac{p^p q^q}{(p+q)^{p+q}}$.
- * Elle atteint son minimum global, égal à 0, lorsque $x = 0$ ou $y = 0$.
- * Elle vérifie les inégalités :

$$f_{(p,q)}(x, y) \leq f_{(p,q)} \left(x, \frac{q}{p+q} \right) \leq f_{(p,q)} \left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q} \right),$$

$$f_{(p,q)}(x, y) \leq f_{(p,q)} \left(\frac{p}{p+q}, y \right) \leq f_{(p,q)} \left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q} \right),$$

pour $x \in \left(0, \frac{p}{p+q} \right]$ et $y \in \left(0, \frac{q}{p+q} \right]$.

Différents types d'extinction stochastique

Seuil

La condition de seuil Λ entre extinction et persistance est donnée par :

$$\Lambda = \begin{cases} \sum_{j=1}^r \pi_j \bar{\Lambda}_j & \begin{cases} \sum_{j=1}^r \pi_j \Theta_j \left(\frac{\rho_j (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right), & \text{si } \frac{\beta_j}{\sigma_j^2} \geq \frac{\rho_j (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \text{ et } \zeta_j \geq 1, \\ \sum_{j=1}^r \pi_j \left(\frac{\beta_j^2}{2\sigma_j^2} - (\mu_j + \delta_j) \right), & \text{si } \frac{\beta_j}{\sigma_j^2} \leq \frac{\rho_j (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \text{ et } \zeta_j \geq 1, \end{cases} \\ \sum_{j=1}^r \pi_j \tilde{\Lambda}_j & \sum_{j=1}^r \pi_j \left(\frac{\beta_j^2}{2(1 - \zeta_j)\sigma_j^2} - (\mu_j + \delta_j) \right), \quad \text{si } \zeta_j < 1. \end{cases}$$

Avec

$$\Theta_j(x) = -\frac{1}{2}\sigma_j^2 x^2 + \beta_j x - (\mu_j + \delta_j).$$

Theorem 3 (Stabilité asymptotique globale de l'équilibre sans maladie (1))

Soit $(S_0, I_0, R_0, \xi_0) \in \Delta \times \mathcal{E}$. L'état d'équilibre sans maladie E_0 est globalement asymptotiquement stable en probabilité si la condition suivante est satisfaite :

$$\Lambda < 0.$$

Idée de la démonstration

Fonction de Lyapunov : $V(S, I, R, j) = \vartheta_1(1 - S)^2 + \left(\frac{1}{\varphi} + b_j\right) I^\varphi + \vartheta_2 R^2$, avec $\vartheta_1, \vartheta_2, \varphi > 0$ et b_j à ajuster.

- * Application de la formule d'Itô : obtention de $\mathcal{L}V$;
- * Étude de deux cas :
 - $\zeta_j < 1$: majoration quadratique ;
 - $\zeta_j \geq 1$: optimisation sur $[0, 1]$.
- * Système de Poisson : $-\Gamma B = \Lambda - \bar{\Lambda}$, où $\bar{\Lambda} = \sum_{j=1}^r \pi_j \Lambda(j)$, avec $B = (b_1, \dots, b_r)$ tel que $\sum_{j=1}^r \pi_j b_j = 0$;
- * Choix judicieux des paramètres : $\varphi, \vartheta_1, \vartheta_2$.

Résultat :

$$\mathcal{L}V \leq - \underbrace{\left(A_j(1 - S)^2 + D_j I^\varphi + B_j R^2 \right)}_{\text{Définie positive}},$$

où :

$$A_j = 2\vartheta_1 \mu_j > 0, \quad B_j = 2\vartheta_2 (\mu_j + \eta_j) > 0,$$

$$D_j = -(1 + b_j \varphi) \left[\frac{\vartheta_1(2\beta_j + \sigma_j^2)}{1 + b_j \varphi} + \frac{1}{2} \varphi \sigma_j^2 + \frac{b_j \varphi}{1 + b_j \varphi} \left(\bar{\Lambda}_j - \sum_{k=1}^r \pi_k \bar{\Lambda}_k \right) + \sum_{k=1}^r \pi_k \bar{\Lambda}_k \right] > 0.$$

D'où la stabilité globale asymptotique en probabilité de E_0 .

Stabilité exponentielle p.s. de l'équilibre sans maladie

Theorem 4 (Stabilité exponentielle sans maladie)

Soient $(S_0, I_0, R_0, \xi_0) \in \Delta \times \mathcal{E}$ et $\zeta_j \geq 1$. L'équilibre sans maladie E_0 du système (1) est exponentiellement stable, presque sûrement, si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) Si $\frac{\beta_j}{2\sigma_j^2} > \frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j-1)^{\zeta_j-1}}{2(\rho_j+\zeta_j-1)^{\rho_j+\zeta_j-1}}$, $\forall j \in \mathcal{E}$, et

$$\sum_{j=1}^r \pi_j \tilde{\Psi}_j \left(\frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j-1)^{\zeta_j-1}}{2(\rho_j+\zeta_j-1)^{\rho_j+\zeta_j-1}} \right) < 0, \quad (2)$$

où

$$\tilde{\Psi}_j(x) = -\mu_j + 2\beta_j x - 2\sigma_j^2 x^2, \quad j \in \mathcal{E}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Si $\frac{\beta_j}{2\sigma_j^2} \leq \frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j-1)^{\zeta_j-1}}{2(\rho_j+\zeta_j-1)^{\rho_j+\zeta_j-1}}$, $\forall j \in \mathcal{E}$, et

$$\sum_{j=1}^r \pi_j \left(\frac{\beta_j^2 - 2\mu_j \sigma_j^2}{2\sigma_j^2} \right) < 0. \quad (3)$$

Idées clés de la démonstration

Fonction de Lyapunov : $U(S, I, R, j) = \ln(1 - S + I + R)$.

- Application du lemme d'Itô à U .
- Simplification de dU via une fonction quadratique $\tilde{\Psi}_j$.
- Intégration :

$$U(t) = U(0) + \int_0^t \tilde{\Psi}_j \left(\frac{\rho_j^{\rho_j} (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{2(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right) ds + M_t,$$

avec M_t martingale.

- Loi des grands nombres : $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{t} = 0$ p.s..
- Usage de $\frac{\beta_j}{2\sigma_j^2}$ et théorème ergodique de Birkhoff.

Deux cas :

- Si $\frac{\beta_j}{2\sigma_j^2} > \frac{\rho_j^{\rho_j} (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{2(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}}$,
alors presque sûrement,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [1 - S(t) + I(t) + R(t)] \leq \sum_{j=1}^r \pi_j \tilde{\Psi}_j \left(\frac{\rho_j^{\rho_j} (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{2(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right) < 0, \quad \text{p.s.}.$$

- Sinon,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [1 - S(t) + I(t) + R(t)] \leq \sum_{j=1}^r \pi_j \frac{\beta_j^2 - 2\mu_j \sigma_j^2}{2\sigma_j^2} < 0, \quad \text{p.s.}.$$

Stabilité exponentielle en moments de l'état sain

L'état sans infection est stable exponentiellement en moments d'ordre $q > 0$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- * Le rapport $\frac{\beta_j}{2\sigma_j^2}$ dépasse un seuil, et une condition de type quadratique, dépendant de q , est négative en moyenne :

$$\sum_{j=1}^r \pi_j \left[-\mu_j + 2\beta_j x_j + 2(q-1)\sigma_j^2 x_j^2 \right] < 0,$$

avec $x_j = \frac{\rho_j^{\rho_j} (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}}$.

- * Si ce rapport est inférieur ou égal à ce seuil, une autre condition suffit :

$$\sum_{j=1}^r \pi_j \left(\frac{\beta_j^2 - 2\mu_j \sigma_j^2}{2\sigma_j^2} + \frac{1}{2} q \sigma_j^2 x_j^2 \right) < 0.$$

Cela garantit que toutes les puissances d'ordre q décroissent exponentiellement avec le temps.

Persistance Stochastique

Lemma 5 (Nguyen2018)

Soit X une variable aléatoire et soient $\alpha_0 > 0$ et $C_1 > 0$ des constantes positives. Supposons que $\mathbb{E}[\exp(\alpha_0 X)] + \mathbb{E}[\exp(-\alpha_0 X)] \leq C_1$.

Alors, la transformée logarithmique de Laplace $\varphi(\alpha) = \ln \mathbb{E}[\exp(\alpha X)]$ est deux fois différentiable sur $[0, \frac{\alpha_0}{2})$, et il existe $C_2 > 0$ telle que

$$\varphi(\alpha) \leq \alpha \mathbb{E}[X] + \alpha^2 C_2, \quad \text{pour } \alpha \in \left[0, \frac{\alpha_0}{2}\right).$$

Theorem 6

Si $\Lambda > 0$, la maladie persiste stochastiquement, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $v > 0$ telle que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P}_{X_0, j} (I(t) \geq v) > 1 - \varepsilon, \quad \text{pour tout } (X_0, j) \in \Delta \times \mathcal{E}.$$

Idées de la démonstration

Fonction de Lyapunov :

$$V_\alpha(S, I, R, j) = I^\alpha, \quad \alpha \in (0, 1).$$

On définit :

$$M_\alpha = \sup_{\Delta \times \mathcal{E}} \left\{ \alpha \left[-(\mu_j + \delta_j) + \beta_j S^{\rho_j} I^{\zeta_j-1} + \frac{\alpha-1}{2} \sigma_j^2 S^{2\rho_j} I^{2(\zeta_j-1)} \right] \right\}.$$

- Calcul : $\mathcal{L} V_\alpha \leq M_\alpha V_\alpha$.
- Dynkin + Gronwall \Rightarrow borne sur $\mathbb{E}[I^\alpha(t)]$ et analyse stochastique de $\ln(I_0/I(t))$.
- Application du lemme 5 et estimation via TCD pour borner $\mathbb{E}[I^{-\alpha}(t)]$ à long terme.
- Inégalités de Markov et Chebyshev \Rightarrow probabilité asymptotique sur $I(t)$.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[I^{-\alpha}(t)] = \frac{C}{1 - \kappa} e^{M_{-\alpha} T} \triangleq \Upsilon, \quad C = \varrho^{-\alpha} e^{M_{-\alpha} T}, \quad \kappa = e^{-\frac{\Lambda_\alpha}{4} T}.$$

Conséquence :

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(I(t) \geq v) > 1 - \epsilon, \quad v = \left(\frac{\epsilon}{\Upsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \epsilon > 0.$$

Modèle SIRS déterministe non bilinéaire

$\sigma = 0$, Élimination de la chaîne de Markov

Liu1986 ; Liu1987 ; Hethcote1989 ; Korobeinikov2007.

Modèle SIRS déterministe non bilinéaire

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \mu(1 - S_t) + \eta R_t - \beta S_t^\rho I_t^\zeta, \\ \frac{dI}{dt} = \beta S_t^\rho I_t^\zeta - (\mu + \delta) I_t, \\ \frac{dR}{dt} = \delta I_t - (\mu + \eta) R_t. \end{cases}$$

Seuils :

$$(4) \quad \Lambda_d^* = \frac{(\zeta + \rho - 1)^{\zeta + \rho - 1}}{(H(\zeta - 1))^{\zeta - 1} \rho^\rho}, \quad \Lambda_d = \frac{\beta}{\mu + \delta}, \quad H = \frac{\mu + \eta}{\delta + \mu + \eta}.$$

Comportement selon ζ

- ✿ $\zeta = 1$:
 - * $\Lambda_d \leq 1$: Maladie éteinte,
 - * $\Lambda_d > 1$: Endémie (équilibre unique).
- ✿ $0 < \zeta < 1$:
 - * Pas de seuil \rightarrow Endémie persistante.

Comportement selon ζ (suite)

- ✿ $\zeta > 1$:
 - * $\Lambda_d < \Lambda_d^*$: Maladie éteinte,
 - * $\Lambda_d > \Lambda_d^*$:
 - Petit équilibre : Selle instable,
 - Grand équilibre : Stabilité variable.

Modèle stochastique SIRS bilinéaire avec bruit blanc

$\rho_{\xi(t)} = \zeta_{\xi(t)} = 1$, Élimination de la chaîne de Markov

Lahrouz2014.

Modèle stochastique SIRS bilinéaire avec bruit blanc

$$\begin{cases} dS_t = (\mu(1 - S_t) - \beta S_t I_t + \eta R_t) dt - \sigma S_t I_t dB_t, \\ dI_t = (-(\mu + \delta)I_t + \beta S_t I_t) dt + \sigma S_t I_t dB_t, \\ dR_t = (-(\mu + \eta)R_t + \delta I_t) dt. \end{cases}$$

Seuil

$$(5) \quad \Lambda_b = \beta - \mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2.$$

Conditions d'extinction

- $\Lambda_b < 0$: Alors l'état d'équilibre sans maladie est GASP.

pour $\frac{\beta_j}{\sigma_j^2} \geq \frac{\rho_j^{\rho_j} (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}}$ et $\zeta_j \geq 1$,

$$\Lambda = \sum_{j=1}^r \pi_j \left(-\frac{1}{2} \sigma_j^2 \left(\frac{\rho_j^{\rho_j} (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right)^2 + \beta_j \left(\frac{\rho_j^{\rho_j} (\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right) - (\mu_j + \delta_j) \right).$$

Conditions de persistance

- $\Lambda_b > 0$: Alors les solutions sont fortement persistantes en moyenne.

Modèle SIRS bilinéaire à régimes commutés avec bruit blanc

$\rho_{\xi(t)} = \zeta_{\xi(t)} = 1$ Settati2016

Modèle SIRS bilinéaire à régimes commutés avec bruit blanc

$$\begin{cases} dS_t = (\mu_{\xi(t)}(1 - S_t) - \beta_{\xi(t)}S_t I_t + \eta_{\xi(t)}R_t) dt - \sigma_{\xi(t)}S_t I_t dB_t, \\ dI_t = (-(\mu_{\xi(t)} + \delta_{\xi(t)})I_t + \beta_{\xi(t)}S_t I_t) dt + \sigma_{\xi(t)}S_t I_t dB_t, \\ dR_t = (-(\mu_{\xi(t)} + \eta_{\xi(t)})R_t + \delta_{\xi(t)}I_t) dt. \end{cases}$$

Seuil

• $\Lambda_s = \sum_{j=1}^r \pi_j \Lambda_s^j$, où
 $\Lambda_s^j = \beta_j - \mu_j - \delta_j - \frac{1}{2}\sigma_j^2$.

- Si $\Lambda_s < 0$, alors l'équilibre sans maladie est GASP.
- Si $\forall j \in \mathcal{E}_<; \Lambda_s^j > 0$ et $\sum_{j \in \mathcal{E}_\geq} \pi_j \Lambda_s^j > 0$, alors la maladie est stochastiquement persistante.

$$\text{Où : } \mathcal{E}_\geq = \left\{ j \in \mathcal{E} \mid \frac{\beta_j}{\sigma_j^2} \geq 1 \right\}, \quad \mathcal{E}_< = \left\{ j \in \mathcal{E} \mid \frac{\beta_j}{\sigma_j^2} < 1 \right\}.$$

- pour $\frac{\beta_j}{\sigma_j^2} \geq \frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}}$, et $\zeta_j \geq 1$,

$$\Lambda = \sum_{j=1}^r \pi_j \left(-\frac{1}{2} \sigma_j^2 \left(\frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right)^2 + \beta_j \left(\frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right) - (\mu_j + \delta_j) \right).$$

Modèle SIRS avec bruit blanc non bilinéaire

$\zeta_{\xi(t)} = 1$, Élimination de la chaîne de Markov et $S_{\xi(t)}^\rho = g(S)$

Settati2021.

Modèle SIRS avec bruit blanc non bilinéaire

$$\begin{cases} dS_t = (\mu(1 - S_t) - \beta g(S_t)I_t + \eta R_t) dt - \sigma g(S_t)I_t dB_t, \\ dI_t = (-(\mu + \delta)I_t + \beta g(S_t)I_t) dt + \sigma g(S_t)I_t dB_t, \\ dR_t = (-(\mu + \eta)R_t + \delta I_t) dt. \end{cases}$$

Seuil

$$(6) \quad \Lambda_g = \beta g(1) - \mu - \delta - \frac{1}{2}\sigma^2 g^2(1).$$

Condition d'extinction

- Si $\Lambda_g < 0$: alors l'équilibre sans maladie est GASP.

pour $\frac{\beta_j}{\sigma_j^2} \geq \frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}}$ et $\zeta_j \geq 1$,

$$\Lambda = \sum_{j=1}^r \pi_j \left(-\frac{1}{2} \sigma_j^2 \left(\frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right)^2 + \beta_j \left(\frac{\rho_j^{\rho_j}(\zeta_j - 1)^{\zeta_j - 1}}{(\rho_j + \zeta_j - 1)^{\rho_j + \zeta_j - 1}} \right) - (\mu_j + \delta_j) \right).$$

Condition de persistance

- Si $\Lambda_g > 0$ alors la maladie est fortement persistante en moyenne.

Simulations Numériques

- ✿ Méthode d'Euler-Maruyama pour les EDS.
- ✿ Implémentation Python (Spyder, Jupyter).

Système discréteisé :

$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k + [\mu_k - \mu_k S_k^{\rho_k} I_k^{\zeta_k} + \eta_k R_k] \varsigma - \sigma_k S_k^{\rho_k} I_k^{\zeta_k} \Delta W_k, \\ I_{k+1} = I_k + [-(\mu_k + \delta_k) I_k + \beta_k S_k^{\rho_k} I_k^{\zeta_k}] \varsigma + \sigma_k S_k^{\rho_k} I_k^{\zeta_k} \Delta W_k, \\ R_{k+1} = R_k + [-(\mu_k + \eta_k) R_k + \delta_k I_k] \varsigma. \end{cases}$$

Chaîne 1

Matrice génératrice :

$$\eta = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Distribution stationnaire :

$$\pi = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7} \right)$$

Chaîne 2

Matrice génératrice :

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Distribution stationnaire :

$$\pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

Cas (a) : $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \Lambda < 0$ et $\zeta_j < 1$

Paramètres initiaux et coefficients

- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.35, 0.55, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (0.5, 0.3)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.5)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.999, 0.887)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.3, 0.4)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.9899, 0.988)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.9999, 0.8899)$.

Calcul des paramètres critiques

$$\tilde{\Lambda}_1 \approx -1.8989 < 0, \quad \tilde{\Lambda}_2 \approx -1.875 < 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \tilde{\Lambda}_j \approx \begin{cases} -1.890 < 0 & \text{pour } \pi = \left(\frac{4}{7}, \frac{3}{7}\right) \approx (0.5714, 0.4286), \\ -1.891 < 0 & \text{pour } \pi = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \approx (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (a) : $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \Lambda < 0$ et $\zeta_j < 1$

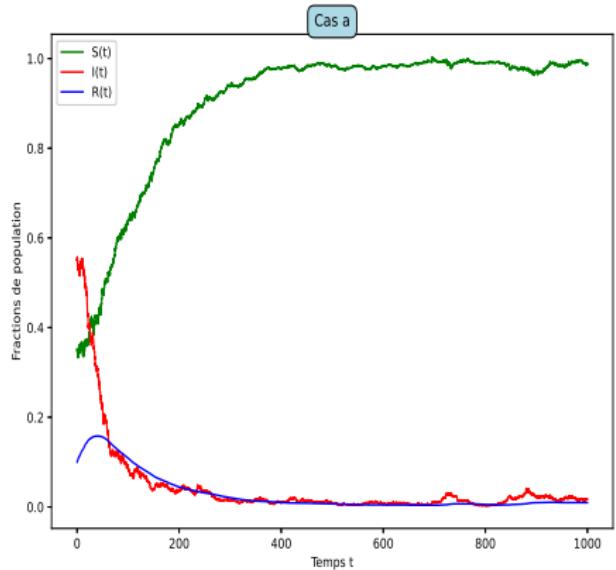


Figure 1 – Chaîne 1, $\pi \approx (0.5714, 0.4286)$

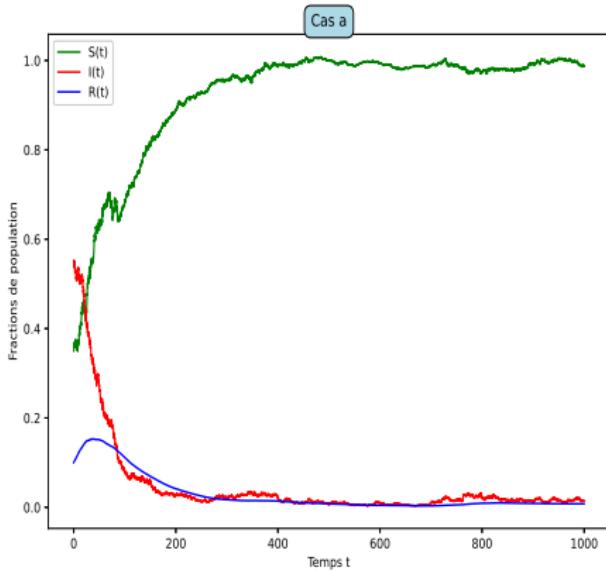


Figure 2 – Chaîne 2, $\pi \approx (0.6667, 0.3333)$

- * I_t décroît exponentiellement ($\tilde{\Lambda}_1 \approx -1.90, \tilde{\Lambda}_2 \approx -1.88 < 0$)
- * S_t, R_t se stabilisent
- * Validation des prédictions théoriques $\Lambda < 0$ (≈ -1.89)

Cas (b) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres

- ✿ **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.35, 0.55, 0.1)$.
- ✿ **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.5, 1.1)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.7)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.9999, 0.61)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.1, 0.3)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.3)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.5, 0.3)$, $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.8, 0.9)$.

Calcul des indicateurs critiques

$$\bar{\Lambda}_1 \approx -1.4921 < 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx -0.3438 < 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx -0.8544 < 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx -0.3568 < 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} -1.3327 < 0 & \text{pour } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ -1.2796 < 0 & \text{pour } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (b) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

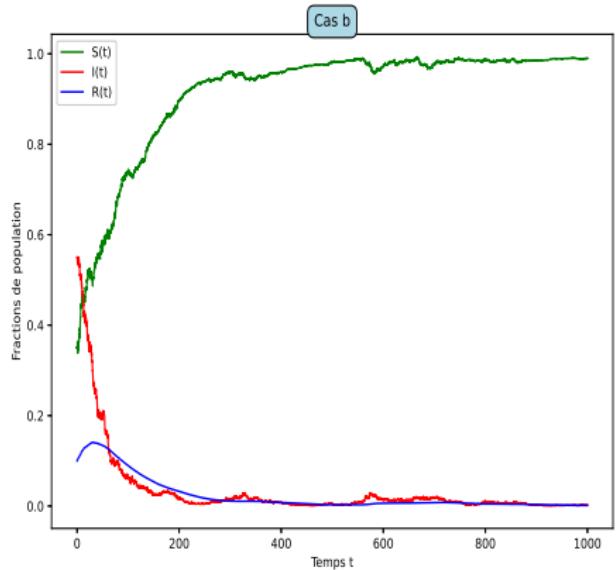


Figure 3 – Extinction rapide pour $\pi \approx (0.5714, 0.4286)$ (Chaîne 1)

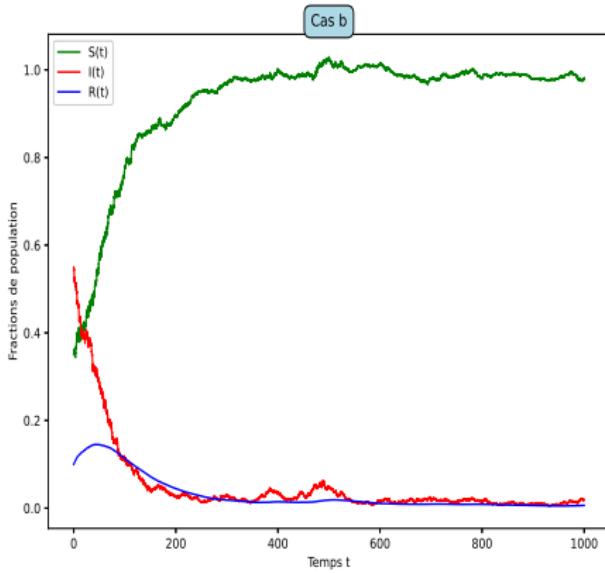


Figure 4 – Extinction similaire pour $\pi \approx (0.6667, 0.3333)$ (Chaîne 2)

- Population converge vers extinction de l'infection.
- Vitesses de convergence varient selon la distribution stationnaire.
- Simulations confirment $\bar{\Lambda}_i < 0$.

Cas (c) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres du système

- ✿ **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.35, 0.55, 0.1)$.
- ✿ **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.2, 1.5)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.6, 0.8)$, $(\mu_1, \mu_2) = (2, 2.5)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (2.75, 2.5)$, $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.003, 0.001)$.

Analyse des conditions

$$\bar{\Lambda}_1 \approx -3.6313 < 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx 305554.92 > 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx -4.3057 < 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx 2.5 \times 10^6 > 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} -3.7999 < 0 & \text{pour } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ -3.8561 < 0 & \text{pour } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (c) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

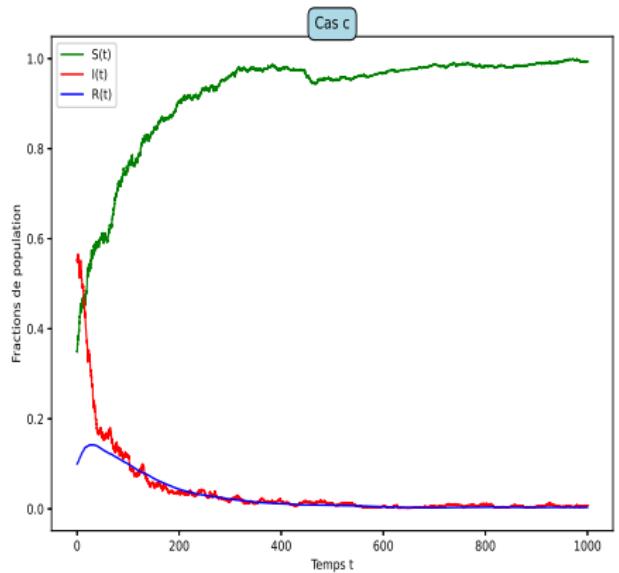


Figure 5 – Chaîne 1 ($\pi \approx (0.57, 0.43)$) :
Décroissance rapide des I_t , stabilisation S_t/R_t .

- * Extinction rapide des I_t ($\bar{\Lambda}_1 \approx -3.63$, $\bar{\Lambda}_2 \approx -4.31$),
- * S_t se stabilise à 0.9-1.0, R_t faible ($\Lambda < 0$ confirmé).

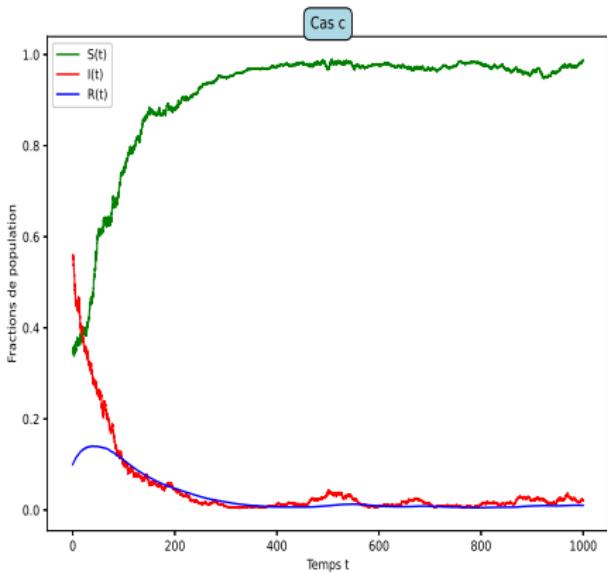


Figure 6 – Chaîne 2 ($\pi \approx (0.67, 0.33)$) : I_t fluctuante
puis extinction, S_t stable.

Cas (d) : $\tilde{\Lambda}_1 < 0, \tilde{\Lambda}_2 > 0, \Lambda < 0$ et $\zeta_j < 1$

Paramètres du système

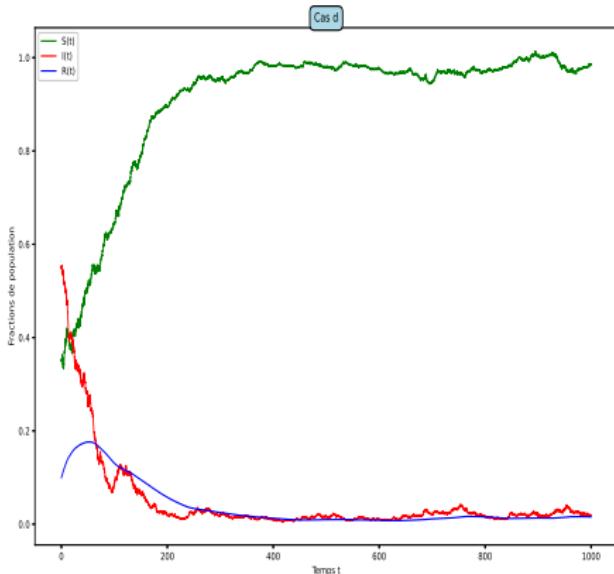
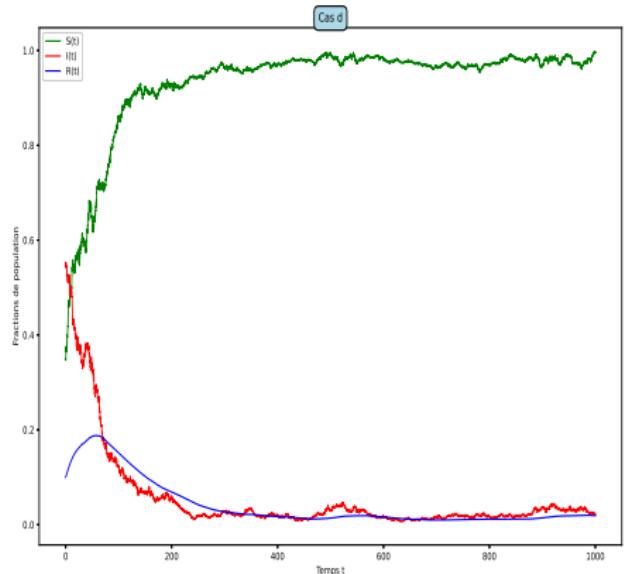
- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.35, 0.55, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (0.5, 0.3)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.5)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.9998, 0.05)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.45, 0.4)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.9989, 0.006)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.99999, 0.99999)$.

Analyse des conditions

$$\tilde{\Lambda}_1 \approx -1.7961 < 0, \quad \tilde{\Lambda}_2 \approx 0.0583 > 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \tilde{\Lambda}_j \approx \begin{cases} -1.33257 < 0 & \text{pour } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ -1.178096 < 0 & \text{pour } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (d) : $\tilde{\Lambda}_1 < 0$, $\tilde{\Lambda}_2 > 0$, $\Lambda < 0$ et $\zeta_j < 1$



- * I_t décroît dans les deux cas ($\tilde{\Lambda}_1 < 0$, $\tilde{\Lambda}_2 > 0$) — extinction plus lente en Chaîne 2.
- * $S_t \nearrow 1$, $R_t \approx 0$: très peu de guérisons.

Cas (e) : $\bar{\Lambda}_1 < 0, \bar{\Lambda}_2 > 0, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres du système

- ✿ **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.35, 0.55, 0.1)$.
- ✿ **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.5, 1.1)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.7)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.9999, 0.0001)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.1, 0.3)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.99999, 0.0003)$, $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.8, 0.9)$.

Analyse des conditions

$$\bar{\Lambda}_1 \approx -1.9920 < 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx -0.09375 < 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx 0.0552 > 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx -0.36863 < 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} -1.4803 < 0 & \text{pour } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ -1.3097 < 0 & \text{pour } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (e) : $\bar{\Lambda}_1 < 0, \bar{\Lambda}_2 > 0, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

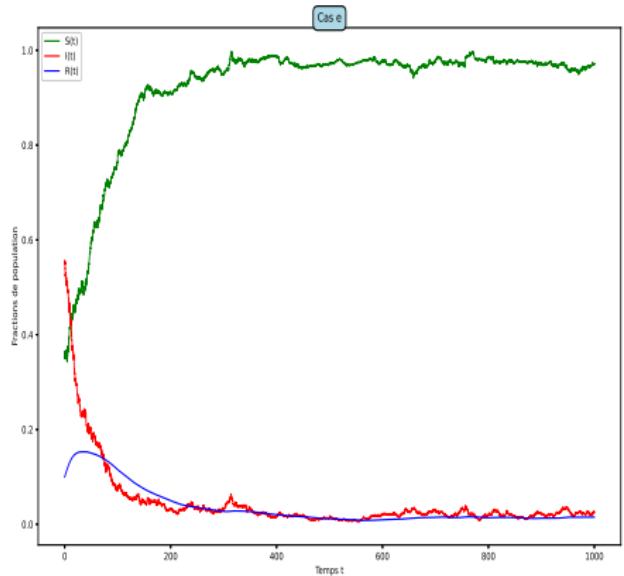


Figure 9 – Chaîne 1 : $\pi \approx (0,5714; 0,4286)$

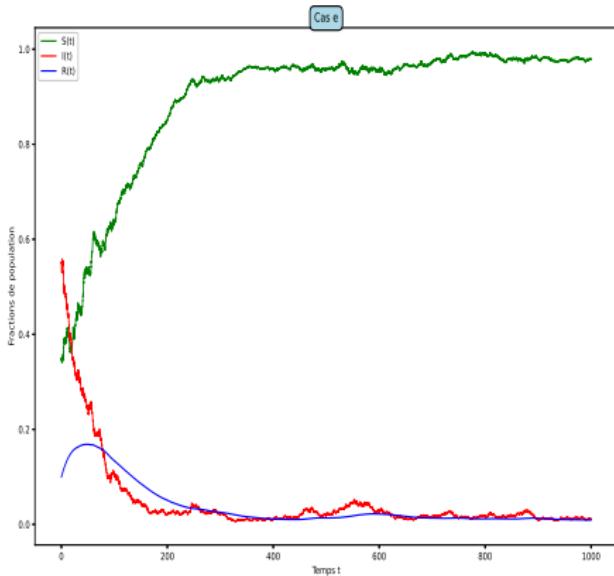


Figure 10 – Chaîne 2 : $\pi \approx (0,6667; 0,3333)$

- * I_t décroît, $S_t \rightarrow 1$, $R_t \approx 0$.
- * $\Lambda \approx -1,4803, -1,3097 \longrightarrow$ extinction stable.

Cas (f) : $\bar{\Lambda}_1 < 0, \bar{\Lambda}_2 > 0, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres du système

- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.35, 0.55, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.5, 1.2)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.8, 0.6)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.9999, 0.23)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.9999, 0.9)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.99998, 0.34)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.001, 0.003)$.

Analyse des conditions

$$\bar{\Lambda}_1 \approx -1.5794 < 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx 999899.57 > 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx 0.0039 > 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx 99999.36 > 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} -0.3919 < 0 & \text{pour } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ -0.5238 < 0 & \text{pour } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (f) : $\bar{\Lambda}_1 < 0, \bar{\Lambda}_2 > 0, \Lambda < 0$ et $\zeta_j \geq 1$

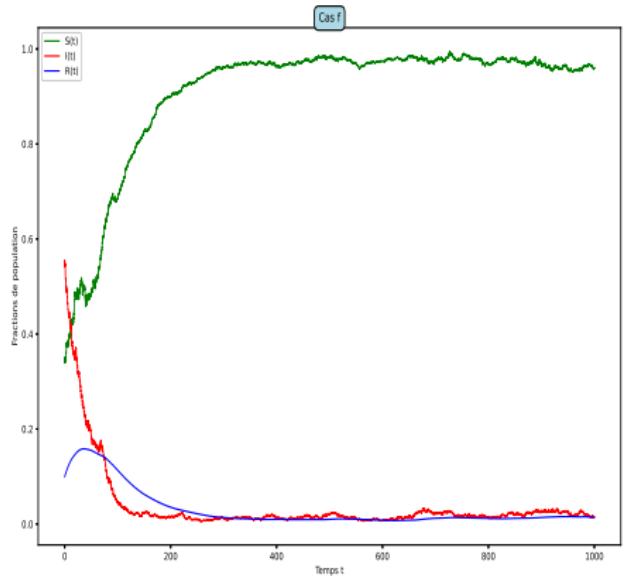


Figure 11 – Chaîne 1 : $\pi \approx (0.5714, 0.4286)$

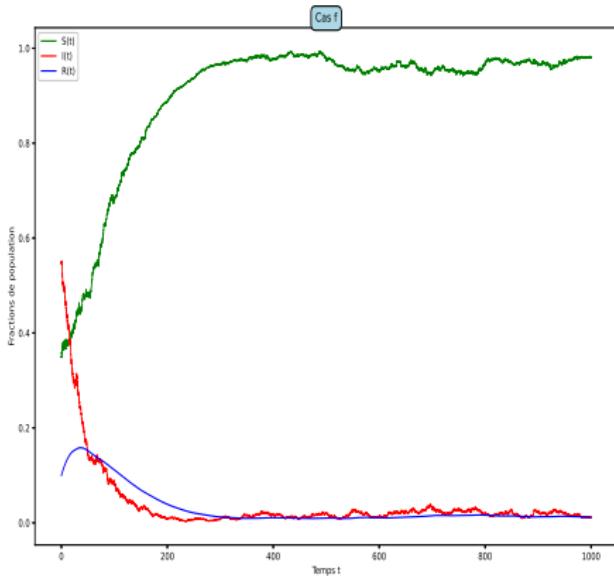


Figure 12 – Chaîne 2 : $\pi \approx (0.6667, 0.3333)$

- I_t décroît rapidement ; $S_t \rightarrow 1$, R_t reste faible.
- Λ moyen $\approx (-0.39, -0.52) \Rightarrow$ extinction à long terme.
- Le faible bruit (σ_1, σ_2) amplifie cette extinction.

Cas (g) : $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j < 1$

Paramètres du système

- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.55, 0.35, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (0.25, 0.15)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.5)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.001, 0.005)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.88, 0.99)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.001, 0.006)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.26, 0.67)$.

Analyse des conditions de persistance

$$\tilde{\Lambda}_1 \approx 0.2423 > 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\Lambda}_2 \approx 0.1827 > 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \tilde{\Lambda}_j \approx \begin{cases} 0.2274 > 0 & \text{pour } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ 0.2224 > 0 & \text{pour } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (g) : $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j < 1$

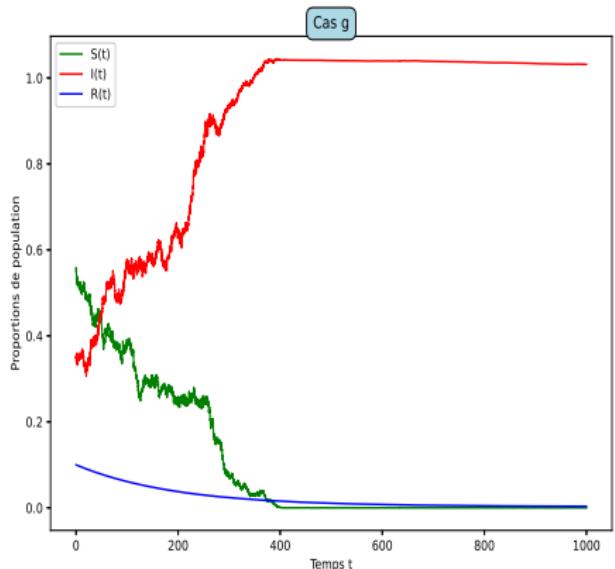


Figure 13 – Dynamique des compartiments épidémiologiques : Chaîne 1 ($\pi \approx (0.5714, 0.4286)$)

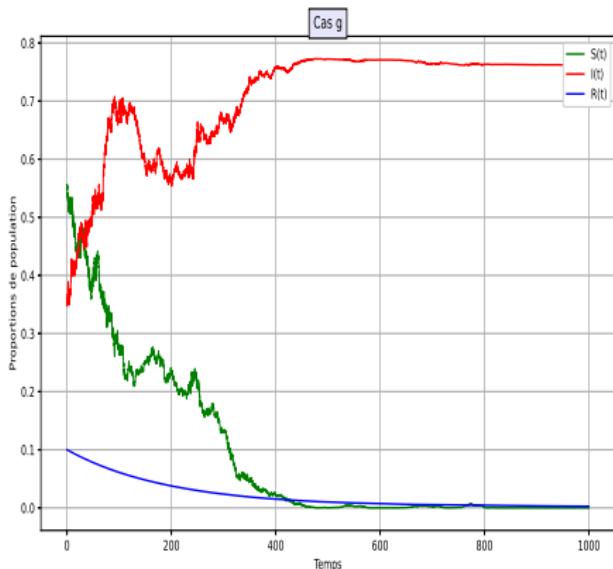


Figure 14 – Dynamique des compartiments épidémiologiques : Chaîne 2 ($\pi \approx (0.6667, 0.3333)$)

- ✿ **Persistante élevée des infectés :** $I_t \approx 0.8-1.0$ pour $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2 > 0$; S_t décroît, $R_t \approx 0$.
- ✿ $\Lambda > 0$ ($\approx 0.227, 0.222$) : **endémie confirmée** avec fluctuations stochastiques.
- ✿ Oscillations dues à la stochasticité

Cas (h) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres du système

- ✿ **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.55, 0.35, 0.1)$.
- ✿ **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.5, 1.1)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.7)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.001, 0.006)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.28, 0.35)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.002, 0.003)$, $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.75, 0.7)$.

Analyse des conditions de persistance

$$\bar{\Lambda}_1 \approx 0.0666 > 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx -0.0022 < 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx 0.1159 > 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx -0.0254 < 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} 0.079 > 0, & \text{si } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ 0.0831 > 0, & \text{si } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (h) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

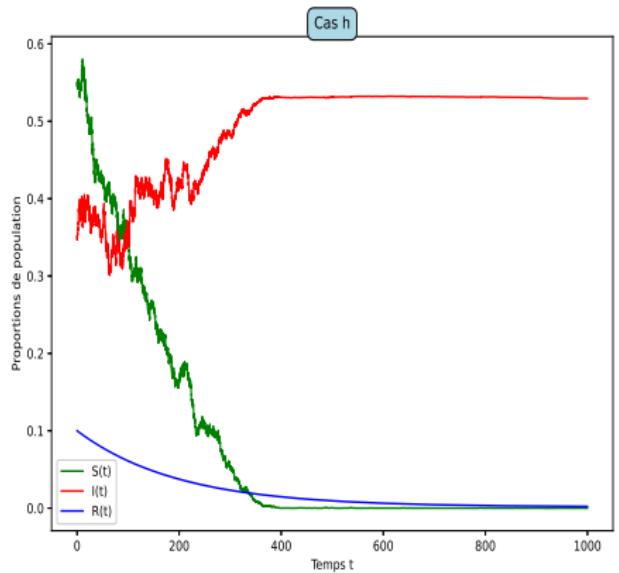


Figure 15 – Chaîne 1 ($\pi \approx (0.5714, 0.4286)$)

- Les infectés (I_t) se maintiennent entre 0,4 et 0,6 ;
- Les susceptibles (S_t) diminuent rapidement ;
- Les guéris (R_t) restent négligeables ($\Lambda > 0$).

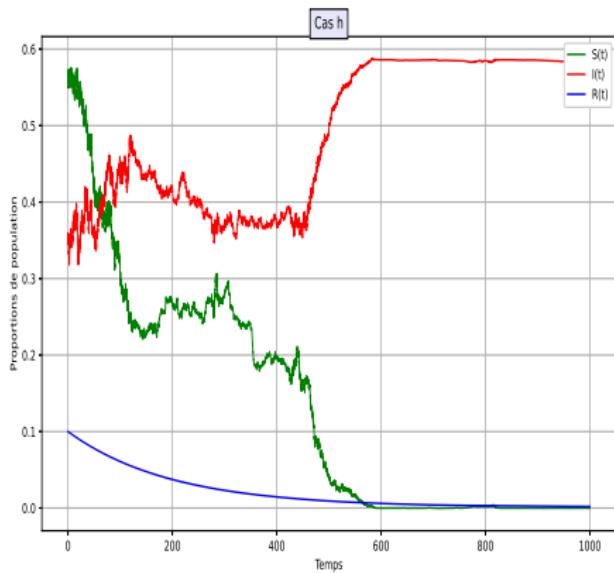


Figure 16 – Chaîne 2 ($\pi \approx (0.6667, 0.3333)$)

Cas (i) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres du système

- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.55, 0.35, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.2, 1.5)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.6, 0.8)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.002, 0.003)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.999, 0.999)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.001, 0.002)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.003, 0.001)$.

Analyse des conditions de persistance

$$\bar{\Lambda}_1 \approx 0.6341 > 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx 110999.36 > 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx 0.0679 > 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx 9989.57 > 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} 0.4925 > 0, & \text{si } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ 0.4454 > 0, & \text{si } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (i) : $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

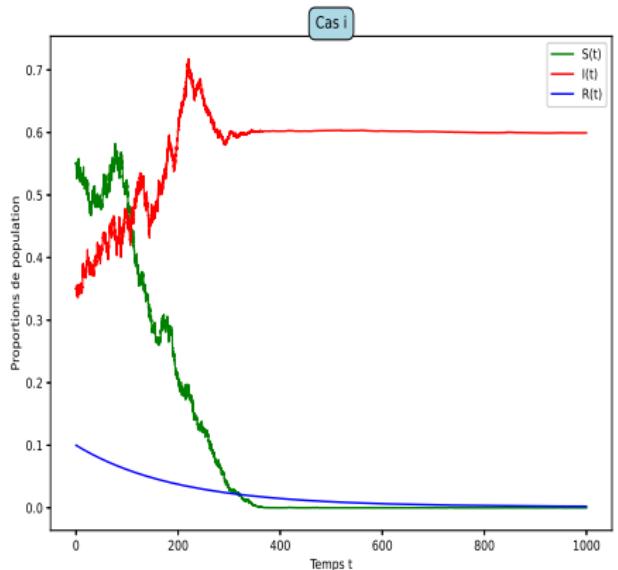


Figure 17 – Dynamique des compartiments épidémiologiques : Chaîne 1 ($\pi \approx (0.5714, 0.4286)$)

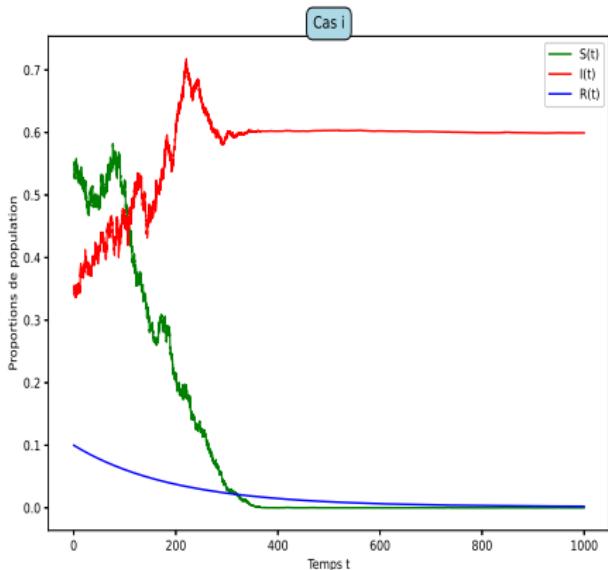


Figure 18 – Dynamique des compartiments épidémiologiques : Chaîne 2 ($\pi \approx (0.6667, 0.3333)$)

- La persistance épidémique est confirmée, car $\Lambda > 0$.
- $I(t)$ démarre avec une dynamique forte.
- $S(t)$ décroît rapidement, tandis que $R(t)$ reste faible.

Cas (j) : $\tilde{\Lambda}_1 < 0$, $\tilde{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j < 1$

Paramètres du système

- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.55, 0.35, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (0.5, 0.3)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.5)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.112, 0.05)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.45, 0.69)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.0906, 0.006)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.99999, 0.999)$.

Analyse des conditions de persistance

$$\tilde{\Lambda}_1 \approx -0.0001 < 0, \quad \tilde{\Lambda}_2 \approx 0.2847 > 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \tilde{\Lambda}_j \approx \begin{cases} 0.07112 > 0, & \text{si } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ 0.09484 > 0, & \text{si } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (j) : $\tilde{\Lambda}_1 < 0$, $\tilde{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j < 1$

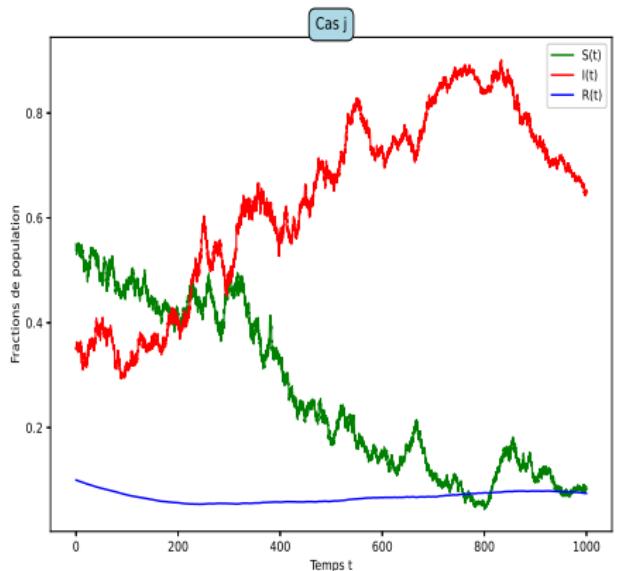


Figure 19 – Évolution des proportions ($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$) pour $\pi \approx (0.5714, 0.4286)$ (chaîne 1).

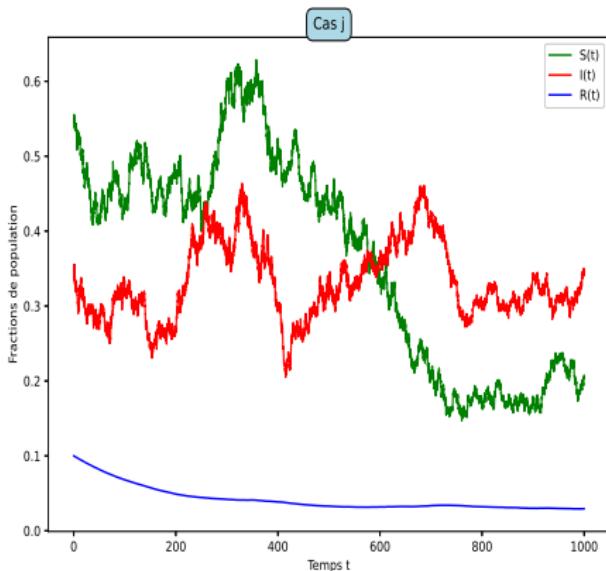


Figure 20 – Évolution des proportions ($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$) pour $\pi \approx (0.6667, 0.3333)$ (chaîne 2).

- * La persistance est assurée car $\tilde{\Lambda}_2 > 0$ domine, même si $\tilde{\Lambda}_1 < 0$.
- * Le second régime maintient $I(t)$ élevé sur le long terme.
- * La distribution stationnaire π influence fortement Λ et la dynamique épidémique.

Cas (k) : $\bar{\Lambda}_1 < 0, \bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres du système

- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.55, 0.35, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.5, 1.1)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.5, 0.2)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.021, 0.061)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.075, 0.402)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.01234, 0.0061)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.8, 0.7)$.

Analyse des conditions de persistance

$$\bar{\Lambda}_1 \approx -0.0289 < 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx -0.3828 < 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx 0.0978 > 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx -0.0057 < 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} 0.0027 > 0, & \text{si } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ 0.0132 > 0, & \text{si } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (k) : $\bar{\Lambda}_1 < 0$, $\bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

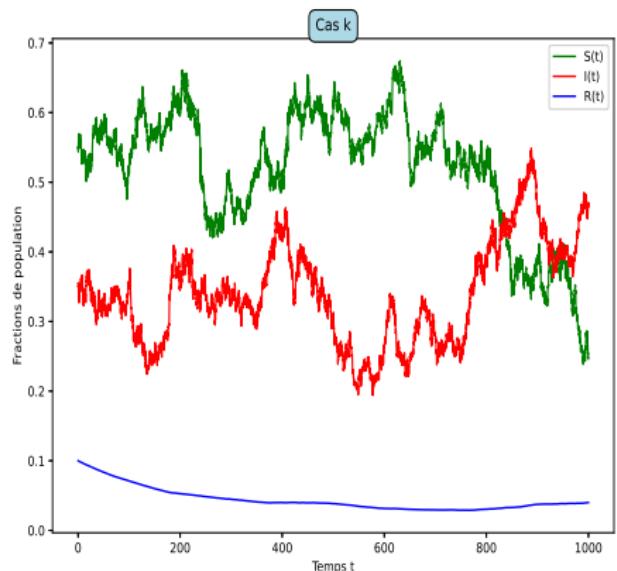


Figure 21 – Évolution des fractions de population ($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$) pour $\pi \approx (0.57, 0.42)$ (chaîne 1).

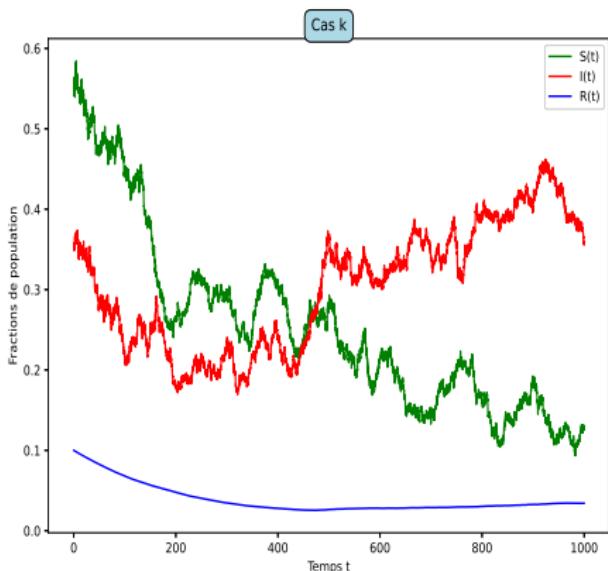


Figure 22 – Évolution des fractions de population ($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$) pour $\pi \approx (0.66, 0.33)$ (chaîne 2).

- ✿ Persistance faible mais réelle : $\Lambda > 0$ malgré $\bar{\Lambda}_1 < 0$.
- ✿ $I(t)$ reste positif mais à un niveau modéré.
- ✿ La distribution stationnaire π influence fortement Λ et la dynamique des courbes.

Cas (I) : $\bar{\Lambda}_1 < 0, \bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

Paramètres du système

- * **États initiaux** : $(S_0, I_0, R_0) = (0.55, 0.35, 0.1)$.
- * **Paramètres** : $(\zeta_1, \zeta_2) = (1.5, 1.2)$, $(\rho_1, \rho_2) = (0.8, 0.6)$, $(\mu_1, \mu_2) = (0.19, 0.002)$,
 $(\beta_1, \beta_2) = (0.999, 0.999)$, $(\eta_1, \eta_2) = (0.5, 0.5)$, $(\delta_1, \delta_2) = (0.29998, 0.001)$,
 $(\sigma_1, \sigma_2) = (0.001, 0.003)$.

Analyse des conditions de persistance

$$\bar{\Lambda}_1 \approx -0.0698 < 0, \quad \frac{\beta_1}{\sigma_1^2} - \frac{\rho_1^{\rho_1} (\zeta_1 - 1)^{\zeta_1 - 1}}{(\rho_1 + \zeta_1 - 1)^{\rho_1 + \zeta_1 - 1}} \approx 998999.57 > 0,$$

$$\bar{\Lambda}_2 \approx 0.6341 > 0, \quad \frac{\beta_2}{\sigma_2^2} - \frac{\rho_2^{\rho_2} (\zeta_2 - 1)^{\zeta_2 - 1}}{(\rho_2 + \zeta_2 - 1)^{\rho_2 + \zeta_2 - 1}} \approx 110999.36 > 0,$$

$$\Lambda = \sum_{j=1}^2 \pi_j \bar{\Lambda}_j \approx \begin{cases} 0.4581 > 0, & \text{si } \pi = (0.5714, 0.4286), \\ 0.3995 > 0, & \text{si } \pi = (0.6667, 0.3333). \end{cases}$$

Cas (I) : $\bar{\Lambda}_1 < 0$, $\bar{\Lambda}_2, \Lambda > 0$ et $\zeta_j \geq 1$

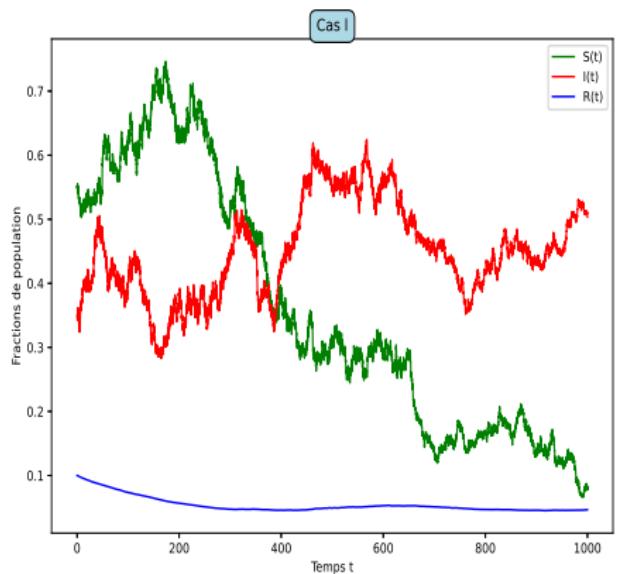


Figure 23 – Évolution des fractions de population ($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$) pour $\pi \approx (0.5714, 0.4286)$ (chaîne 1).

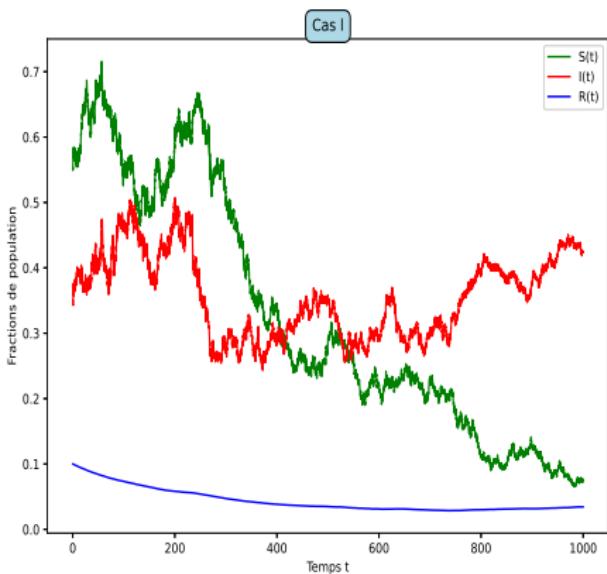
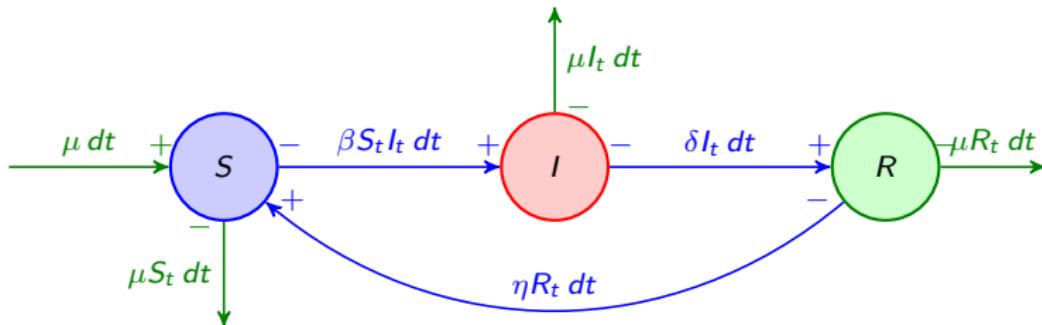


Figure 24 – Évolution des fractions de population ($S(t)$, $I(t)$, $R(t)$) pour $\pi \approx (0.6667, 0.3333)$ (chaîne 2).

- Persistance positive : $\bar{\Lambda}_2 > 0$ compense $\bar{\Lambda}_1 < 0$.
- $I(t)$ reste stable à un niveau modéré dans les deux cas.
- La distribution stationnaire π module la valeur de Λ et la dynamique des courbes.

3. Modèle SIRS stochastique à sauts

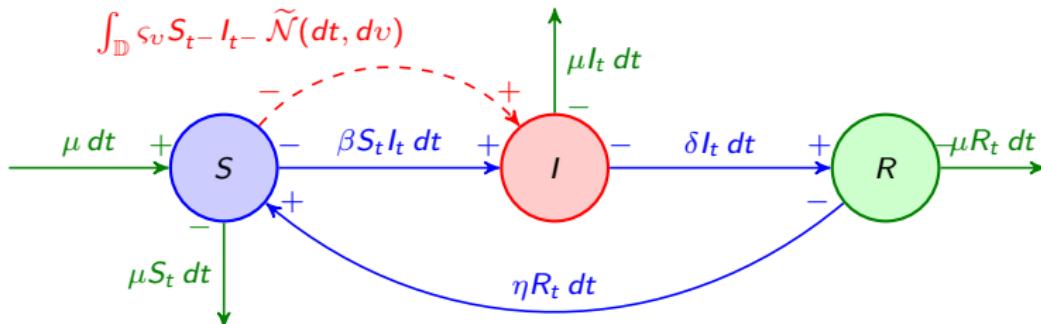
Diagramme des transitions du modèle SIRS avec sauts



Légende

- Transitions déterministes (propagation, guérison, perte d'immunité).
- Sauts stochastiques dus à des chocs aléatoires (processus de Poisson compensé).
- Dynamique démographique (naissances et décès).

Diagramme des transitions du modèle SIRS avec sauts



Légende

- Transitions déterministes (propagation, guérison, perte d'immunité).
- Sauts stochastiques dus à des chocs aléatoires (processus de Poisson compensé).
- Dynamique démographique (naissances et décès).

Modèle SIRS stochastique à sauts

Équations différentielles stochastiques (EDS)

$$\left\{ \begin{array}{l} dS_t = \underbrace{[\mu(1 - S_t) + \eta R_t - \beta S_t I_t] dt}_{\text{Dynamique déterministe}} - \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \varsigma_v S_{t-} I_t \tilde{\mathcal{N}}(dt, dv)}_{\text{Terme stochastique}}, \\ dl_t = \underbrace{[\beta S_t I_t - (\mu + \delta) I_t] dt}_{\text{Dynamique déterministe}} + \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \varsigma_v S_{t-} I_t \tilde{\mathcal{N}}(dt, dv)}_{\text{Terme stochastique}}, \\ dR_t = \underbrace{[\delta I_t - (\mu + \eta) R_t] dt}_{\text{Dynamique déterministe}}. \end{array} \right. \quad (7)$$

X_t est de la forme : $dX_t = b(t, X_t)dt + \int_{\mathbb{D}} c(t, X_{t-}, v)\tilde{\mathcal{N}}(dt, dv)$, et $f(t, X_t)$ de classe \mathcal{C}^2 , la formule d'Itô s'écrit :

$$df(t, X_t) = \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} b(t, X_t) \right] dt}_{\text{Terme de dérive}} + \underbrace{\int_{\mathbb{D}} [f(t, X_{t-} + c(t, X_{t-}, v)) - f(t, X_{t-})] \tilde{\mathcal{N}}(dt, dv)}_{\text{Terme de saut compensé}} + \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \left[f(t, X_{t-} + c(t, X_{t-}, v)) - f(t, X_{t-}) - \frac{\partial f}{\partial x} c(t, X_{t-}, v) \right] \pi(dv) dt}_{\text{Terme compensateur}}.$$

Théorème d'existence et d'unicité

Theorem 7 (Existence et unicité)

Soit $v \in \mathbb{D}$, $(S, I) \in (0, 1)^2$, et on définit $\Psi(v, S, I) = [1 - \varsigma_v I] [1 + \varsigma_v S]$, si

$$\sup_{0 < S, I < 1} \int_{\mathbb{D}} \ln [\Psi^{-1}(v, S, I)] \pi(dv) < \infty. \quad (8)$$

Alors pour chaque valeur initiale $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$, il existe une unique solution $(S_t, I_t, R_t) \in \Delta$ pour le système (7).

Idée de la preuve

On définit $N_t = S_t + I_t + R_t$

$$dN_t = -\mu(N_t - 1)dt \Rightarrow N_t = 1 + (N_0 - 1)e^{-\mu t}.$$

Par intégration, on montre que $\lim_{t \rightarrow \infty} N_t = 1$ p.s..

Par continuité locale Lipschitz des coefficients, il existe une **solution locale maximale**.
En appliquant la formule d'Itô à $\Sigma_t = -\ln(S_t I_t R_t)$:

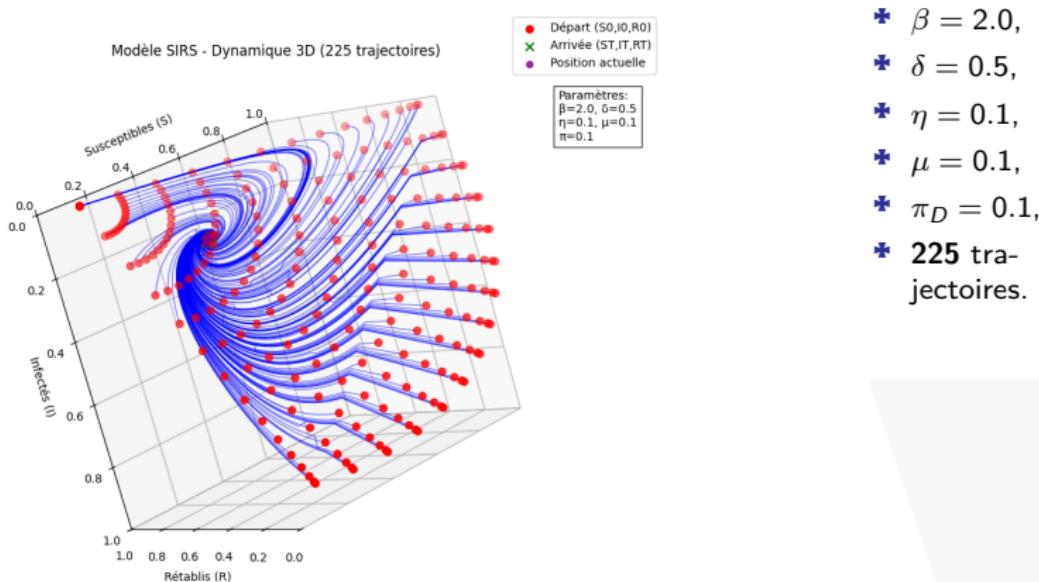
$$\begin{aligned} d\Sigma_s &\leq \underbrace{\left[3\mu + \delta + \eta + \beta + \pi(\mathbb{D}) + \sup_{0 < S, I < 1} \int_{\mathbb{D}} \ln [\Psi^{-1}(v, S, I)] \pi(dv) \right] ds}_{\text{Termes déterministes} \\ (\text{dérive} + \text{sauts compensés})} \\ &+ \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \ln [(1 + \varsigma_v S_s)(1 - \varsigma_v I_s)] \tilde{\mathcal{N}}(ds, dv)}_{\text{Martingale locale} \\ (\text{sauts compensés})}. \end{aligned} \tag{9}$$

On obtient ainsi une **majoration déterministe**.

Si $\tau_e < \infty$ (temps d'explosion),

Conclusion : $\tau_e = \infty$ p.s. et la solution est **globale**.

Dynamique SIRS : de la diversité initiale à l'équilibre



Évolution 3D du modèle SIRS : les trajectoires issues de conditions initiales variées (●, en rouge) convergent vers un point d'équilibre épidémique (●, en vert), où les variables S , I et R se stabilisent. Les courbes d'évolution (●, en bleu) illustrent cette dynamique de convergence.

Théorème d'extinction

Theorem 8 (Extinction exponentielle)

Soit $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$ et supposons que (8) soit vérifiée. Supposons également que

$$\sup_{0 < y < 1} \int_{\mathbb{D}} \ln^2(1 + \varsigma_v y) \pi(dy) < \infty. \quad (10)$$

Nous définissons les seuils

$$\mathcal{T}^3 = \beta \left[\mu + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dy) \right]^{-1}, \quad (11)$$

et

$$\mathcal{T}^4 = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dy). \quad (12)$$

Si $\mathcal{T}^3 < 1$ et $\beta \geq \mathcal{T}^4$, alors le système (7) présente une extinction avec un taux de décroissance exponentielle.

Idée de la preuve

On pose $\Sigma_t = \ln(Z_t)$ avec $Z_t = I_t + R_t$.

Par la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} d\Sigma_t &\leq \underbrace{\left[-\mu + \beta \frac{S_t I_t}{Z_t} - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dv) \left(\frac{S_t I_t}{Z_t} \right)^2 \right] dt + \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \ln \left(1 + \varsigma_v \frac{S_t I_t}{Z_t} \right) \tilde{\mathcal{N}}(dt, dv)}_{\text{Martingale locale (sauts compensés)}}}_{\text{Termes déterministes (dérive et diffusion)}} \\ &\leq \underbrace{\left[-\mu + \beta \delta - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dv) \delta^2 \right] dt + \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \ln(1 + \varsigma_v \delta) \tilde{\mathcal{N}}(dt, dv)}_{\text{Martingale locale (forme simplifiée)}},}_{\text{Majoration des termes déterministes}} \end{aligned} \tag{13}$$

où $\delta = \frac{S_t I_t}{Z_t}$ et M_t martingale locale.

En intégrant et utilisant $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M_t}{t} = 0$ p.s..

Par suite :

$$\Sigma_t \leq \Sigma_0 + \int_0^t \left(-\mu + \beta - \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dv) \right) ds + M_t.$$

Sous les conditions données, validant la stabilité du système.

Équations et Paramètres de Régulation du Système

Le système est régi par les équations et paramètres suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(S) = -(\mu + \delta) + \beta S - \left[\frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dv) \right] S^2, \\ \mathcal{T}^1 = \frac{\beta}{\mu + \delta + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dv)}, \\ \Pi(S) = -(\mu + \delta) + \beta S - \left[\frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dv) \right] S^2, \\ \mathcal{T}^2 = \frac{\beta}{\mu + \delta + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{D}} \varsigma_v^2 \pi(dv)}. \end{array} \right. \quad (14)$$

Remarque

- * $\mathcal{T}^1 > \mathcal{T}^2$ montre que \mathcal{T}^1 est le seuil le plus conservateur.
- * $H(S) > \Pi(S)$ indique que $H(S)$ présente une plus grande sensibilité que $\Pi(S)$.

Théorème de persistance

Theorem 9

Sous les hypothèses (8), $|\varsigma_v| < 1$ et

$$\sup_{0 < y < 1} \int_{\mathbb{D}} \ln^2(1 + \varsigma_v y) \pi(dy) < \infty, \quad (15)$$

pour $(S_0, I_0, R_0) \in \Delta$, si $\mathcal{T}^1 > 1$ et $\mathcal{T}^2 > 1$ pour tout $v \in \mathbb{D}$, alors :

(i) $\limsup_{t \rightarrow \infty} S_t \geq \varrho \quad p.s.$,

(iv) $\liminf_{t \rightarrow \infty} S_t \leq \varrho' \quad p.s.$,

(ii) $\liminf_{t \rightarrow \infty} I_t \leq \frac{(\mu + \eta)(1 - \varrho)}{\mu + \eta + \delta} \quad p.s.$,

(v) $\limsup_{t \rightarrow \infty} I_t \geq \frac{(\mu + \eta)(1 - \varrho')}{\mu + \eta + \delta} \quad p.s.$,

(iii) $\liminf_{t \rightarrow \infty} R_t \leq \frac{\delta(1 - \varrho)}{\mu + \eta + \delta} \quad p.s.$,

(vi) $\limsup_{t \rightarrow \infty} R_t \geq \frac{\delta(1 - \varrho')}{\mu + \eta + \delta} \quad p.s.$,

où ϱ et ϱ' désignent les racines positives sur l'intervalle $(0, 1)$ des équations $H(S) = 0$ et $\Pi(S) = 0$ respectivement.

Remarque importante

- * $\Pi(S) < H(S)$ et donc $\varrho < \varrho'$.

Idée de la preuve

- (i) On utilise la formule d'Itô pour $\ln(I_t)$

$$\begin{aligned}\ln(I_t) = & \underbrace{\ln(I_0)}_{\text{Valeur initiale}} - \underbrace{\int_0^t [(\mu + \delta) - \beta S_s] ds}_{\text{Décroissance déterministe}} + \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \int_0^t [\ln(1 + \varsigma_v S_s) - \varsigma_v S_s] \pi(dv)}_{\text{Correction des sauts (drift compensateur)}} \\ & + \underbrace{\int_{\mathbb{D}} \int_0^t \ln[1 + \varsigma_v S_s] \tilde{\mathcal{N}}(ds, dv)}_{\text{Processus de sauts compensés (martingale)}}.\end{aligned}\tag{16}$$

- On montre que $H(S) < 0$ pour $S < \varrho$ conduit à $I_t \rightarrow 0$ et $S_t \rightarrow 1$, d'où contradiction,
- (iv) Même approche mais avec une minoration et $\Pi(S) > 0$ pour $S > \varrho'$,
- (ii) et (v) Combinaison de (i) et (iv) avec le lemme de Fatou sur R_t ,
- (iii) et (vi) Conséquences directes des autres points.

Méthode Numérique : Euler-Maruyama avec Sauts

Discrétisation du système SIRS stochastique

Pour $\Delta t > 0$ fixé et $t_k = k\Delta t$, le schéma s'écrit :

$$\begin{cases} S_{k+1} = S_k + [\mu(1 - S_k) + \eta R_k - \beta S_k I_k] \Delta t - \sum_{i=1}^{N_k} \varsigma_{v_i} S_k I_k, \\ I_{k+1} = I_k + [\beta S_k I_k - (\mu + \delta) I_k] \Delta t + \sum_{i=1}^{N_k} \varsigma_{v_i} S_k I_k, \\ R_{k+1} = R_k + [\delta I_k - (\mu + \eta) R_k] \Delta t. \end{cases}$$

- **Processus de sauts** : $N_k \sim \mathcal{P}(\pi(\mathbb{D})\Delta t)$ (loi de Poisson),
- **Amplitudes** : $\varsigma_{v_i} \sim \pi(dv)$ (mesure de Lévy sur \mathbb{D}),
- **Contrainte** : $S_k + I_k + R_k = 1$ (conservation de la population).

Paramètres Recommandés

- Δt : 0.01 jour (stabilité numérique),
- $\pi(\mathbb{D})$: intensité de la mesure de Lévy (typiquement 0.1),
- ς_v : amplitudes selon le domaine \mathbb{D} .

Convergence du schéma

Nous renvoyons à **Higham2001** (voir le théorème de Platen et Bruti-Liberati).

Simulations du théorème 8

Cas 2: Dynamique stochastique SIRS avec sauts - Théorème d'extinction

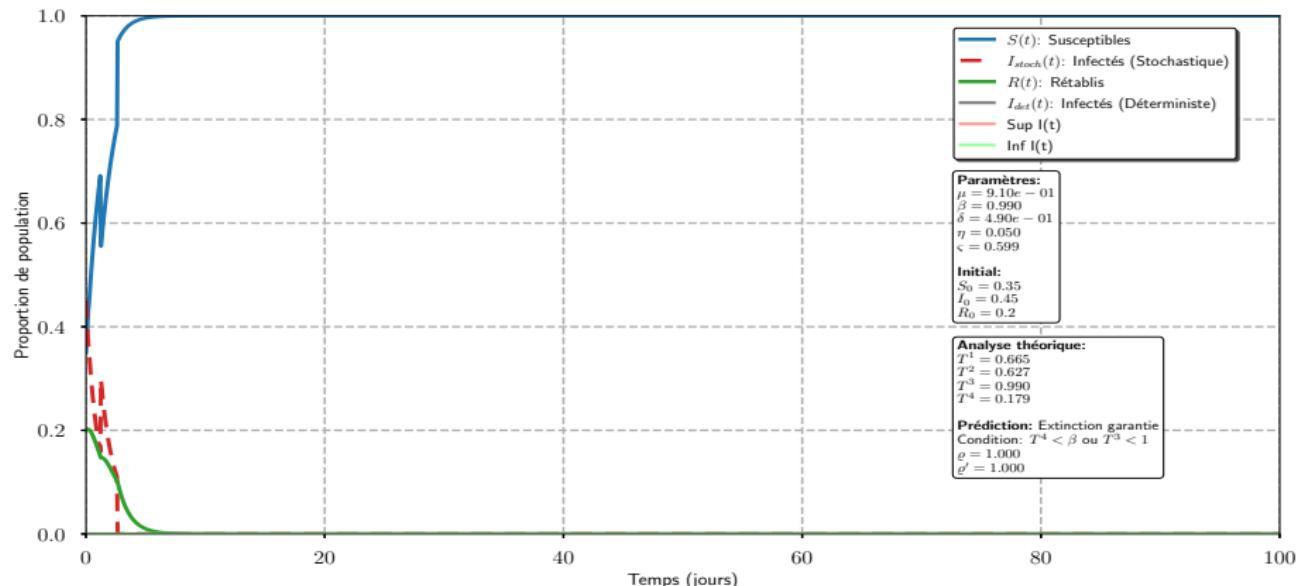


Figure 25 – Extinction exponentielle conforme au théorème

- Les deux conditions du théorème sont satisfaites : $T^4 = 0,179 < \beta = 0,99$ et $T^3 = 0,952 < 1$.

Simulations illustrant le théorème 9

Cas 1: Dynamique Stochastique SIRS avec sauts pour le théorème de persistance

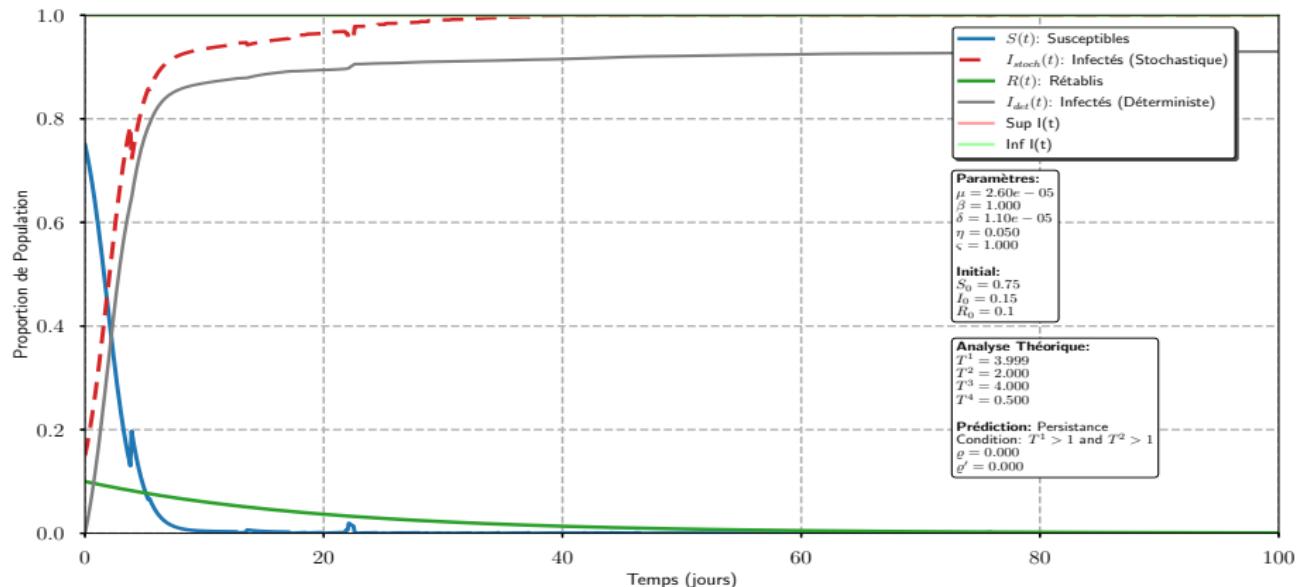


Figure 26 – Persistance marquée, avec une dynamique stable et prédominance d'infectés.

- * $T^1 = 3,999 > 1$ et $T^2 = 2,000 > 1$ indiquent une **dynamique stable**.

Diagramme des seuils du SIRS stochastique avec sauts

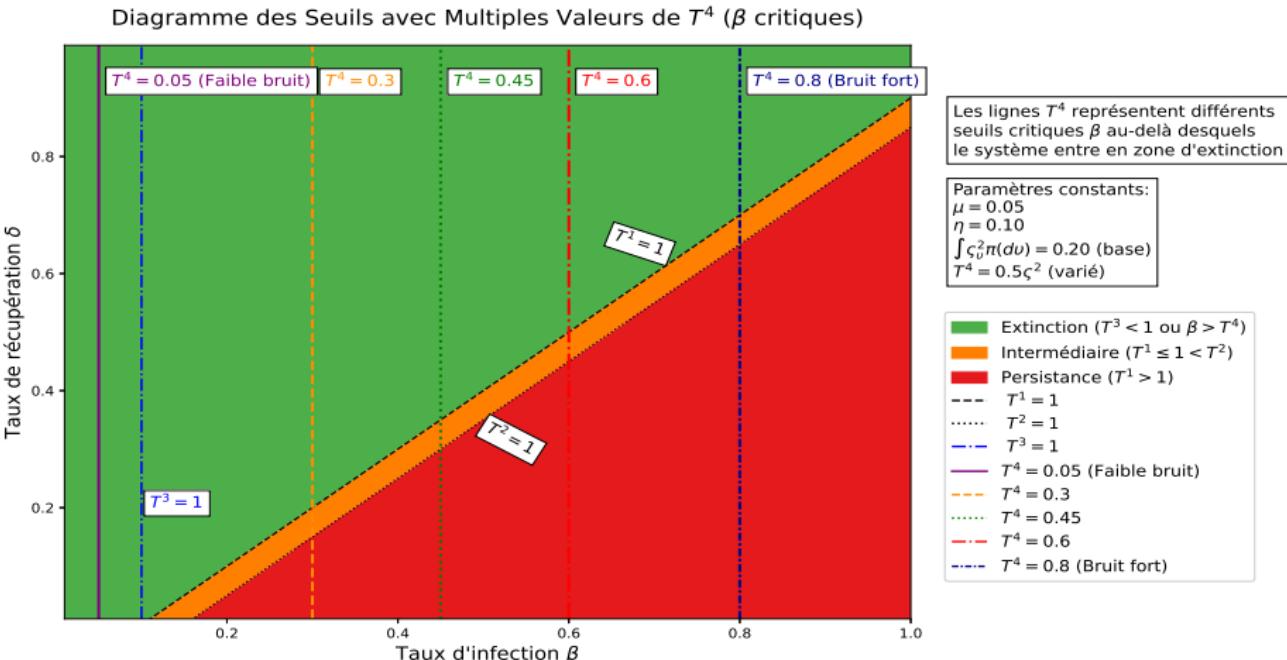


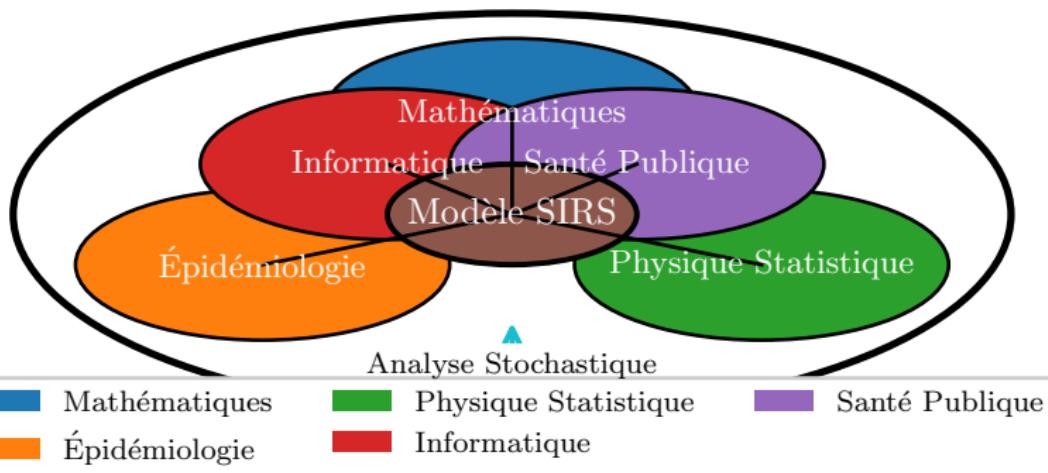
Figure 27 – Diagramme des seuils SIRS stochastique : extinction (vert), intermédiaire (orange), persistance (rouge). Lignes critiques T^1 , T^2 , T^3 et $T^4 \in [0.05, 0.8]$.

4. Conclusion et perspectives

Applications en santé publique et prévention

- * **Seuils d'alerte (Λ, \mathcal{T}^i)** : outils pour anticiper et gérer les événements rares.
- * **Interventions dynamiques** : modèles SIRS pour des stratégies rapides et ciblées.
- * **Surveillance avancée** : suivi en temps réel via chaînes de Markov, sauts de Lévy et bruit blanc.

Approche Interdisciplinaire



Combinaison innovante de mathématiques, informatique, physique statistique, santé publique et épidémiologie pour une modélisation robuste et réaliste du SIRS.



Question Centrale

Comment prédire et maîtriser la persistance ou l'extinction des maladies infectieuses ?

Synthèse des résultats

- * **Modèle markovien perturbé par bruit blanc** : seuil critique Λ définissant l'extinction ($\Lambda < 0$) ou la persistance ($\Lambda > 0$).
- * **Modèle à sauts de Lévy** : seuils \mathcal{T}^i pour anticiper les événements rares à fort impact.

Axes de recherche futurs

Axes de recherche futurs

- ✚ Développer des modèles hybrides combinant chaînes de Markov, sauts de Lévy et bruit blanc.
- ✚ Intégrer la dimension spatiale multi-patch pour capturer l'hétérogénéité.
- ✚ Estimer les paramètres via des techniques d'apprentissage automatique.
- ✚ Appliquer ces modèles aux maladies émergentes pour relever les défis sanitaires.
- ✚ Renforcer la collaboration avec les épidémiologistes et décideurs pour une gestion proactive.

La stochasticité : un levier clé pour une gestion résiliente et éclairée des épidémies.

5. Bibliographie

Bibliographie I



Korobeinikov, A.

Global properties of infectious disease models with nonlinear incidence.
Bull. Math. Biol., 69(6) :1871–1886, 2007.



Hethcote, H. W., Lewis, M. A., vanden Driessche, P.

An epidemiological model with a delay and a nonlinear incidence rate.
J. Math. Biol., 27(1) :49–64, 1989.



Liu, W., Levin, S. A., Iwasa, Y.

Influence of nonlinear incidence rates on the dynamics of SIRS epidemiological models.
Math. Biosci., 67(3) :865–872, 1986.



Liu, W., Hethcote, H. W., Levin, S. A.

Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates.
J. Math. Biol., 25(4) :359–380, 1987.



Settati, A., Lahrouz, A., Zahri, M., Tridane, A., El Fatini, M., El Mahjour, H., Seaid, M.

A stochastic threshold to predict extinction and persistence of an epidemic SIRS system with a general incidence rate.

Chaos, Solitons & Fractals, 144 :110690, 2021.



Higham, D. J.

An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations.
SIAM review, 43(3) :525–546, 2001.

Bibliographie II



Lahrouz, A., Settati, A.

Necessary and sufficient conditions for extinction and persistence in an SIRS system with random perturbation.

Appl. Math. Comput., 233 :10–19, 2014.



A. Settati, A. Lahrouz, M. El Jarroudi, M. El Jarroudi.

Dynamics of hybrid switching diffusions SIRS model.

J. Appl. Math. Comput., 52 :101–123, 2016.



Caraballo Garrido, T., Settati, A., El Fatini, M., Lahrouz, A., & Imlahi, A.

Global stability and positive recurrence of a stochastic SIS model with Lévy noise perturbation.

Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, 523 :677–690, 2019.



A. Settati, A. Lahrouz, M. El Fatini, A. El Haitami, M. El Jarroudi, M. Erriani.

A Markovian switching diffusion for an SIS model incorporating Lévy processes.

Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, 28(1) :123–145, 2023.



R. Z. Khasminskii, C. Zhu, G. Yin.

Stability of regime-switching diffusions.

Stochastic Processes Appl., 117 :1037–1051, 2007.

Bibliographie III



C. Yuan, X. Mao.

Robust stability and controllability of stochastic differential delay equations with Markovian switching.

Automatica, 40 :343–354, 2004.



D. H. Nguyen, G. Yin.

Stability of regime-switching diffusion systems with discrete state spaces.

SIAM J. Control Optim., 56(5) :3893–3917, 2018.

Publications scientifiques

- El Bakkioui, K., El Khalfi, Y., Boutouil, S., Harchaoui, B., El Idrissi, M., Settati, A., & Lahrouz, A. (2025). *Exploring the Impact of Jump Perturbations on Stochastic SIRS Dynamics*. **Applied Mathematics & Information Sciences**, 19(3), 1–10.
<https://www.scilit.com/publications/d0d8609e917fdabc8772ceccaab93322>
- Aznague, S., Settati, A., Lahrouz, A., Harchaoui, B., El Bakkioui, K., & Nait Brahim, A. (2025). *Threshold Dynamics of Stochastic SIS Epidemic Models with Logistic Recruitment Rate*. **New Mathematics and Natural Computation**.
<https://www.worldscientific.com/doi/epdf/10.1142/S1793005727500074>
- El Bakkioui, K., Settati, A., Harchaoui, B., Lahrouz, A., & Tridane, A. (2025). *Necessary and sufficient criteria for stochastic SIRS epidemic models under switched transmission rate exponents*. **Results in Physics**, [Under Revision ; Manuscript ID : RINP-D-25-00486].
<https://www.editorialmanager.com/RINP/>.
- Settati, A., Caraballo, T., Harchaoui, B., Lahrouz, A., El Bakkioui, K., & El Haitami, A. (2025). *Impact of Scale-Free Network Structures on Stochastic SIRS Epidemics*. **Journal of Theoretical Biology**, 123456, 128745. <https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2025.128745>
- Esseroukh, M., Harchaoui, B., El Khatib, B., El Bakkioui, K., Aznague, S., Lahrouz, A., & Settati, A. (2024). *Logistic Growth and Relapse in the Stochastic Dynamics of SIRI Epidemics*. **Applied Mathematics & Information Sciences**. [Submitted]
- El Khatib, B., Harchaoui, B., Esseroukh, M., Aznague, S., El Bakkioui, K., El Khalfi, Y., Settati, A., & Lahrouz, A. (2025). *Stochastic Analysis of COVID-19 Epidemics under Quarantine Measures*. **New Mathematics and Natural Computation**. [Submitted]

That's all folks !

Merci pour votre attention !

*Des questions ?
(Ou commentaires)*