



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Быстрое преобразование Фурье»

Студент 315 группы
В. А. Сливинский

Руководители практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2017

Содержание

1	Постановка задачи	3
1.1	Общая формулировка задачи	3
1.2	Формальная постановка задачи	3
2	Написание функции plotFT	5
2.1	Разбиение на подзадачи	5
2.2	Вычисление аппроксимации преобразования Фурье	5
2.3	Подготовка фигуры к выводу графиков	6
2.4	Вывод графиков	6
3	Вычисление аналитических преобразований Фурье	7
3.1	Некоторые необходимые обозначения и соотношения	7
3.2	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2 t } \cos(t)$	9
3.3	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{- t }-1}{t}$	10
4	Построение графиков	11
4.1	$f_1(t) = e^{-2 t } \cos(t)$	11
4.2	$f_2(t) = \frac{e^{- t }-1}{t}$	16
A	Код функции plotFT	16

1 Постановка задачи

1.1 Общая формулировка задачи

Дана система функций (всюду далее, если не сказано противное, предполагается, что $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и функция суммируема и обладает достаточной гладкостью)

$$\begin{cases} f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t) \\ f_2(t) = \frac{e^{-|t|} - 1}{t} \\ f_3(t) = \frac{\operatorname{arctg} t^2}{1 + t^4} \\ f_4(t) = t^3 e^{-t^4} \end{cases} \quad (1.1)$$

Для каждой функции из системы (1.1) требуется:

1. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для каждой функции $f(t)$ из заданного набора при помощи быстрого преобразования Фурье (**БПФ** / **FFT**), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$
2. Построить графики $F(\lambda)$
3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из заданного набора вычислить аналитически преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (1.2)$$

и сравнить графики $\mathfrak{F}(\lambda)$ с графиками $F(\lambda)$, полученного из аппроксимации через **БПФ**

1.2 Формальная постановка задачи

1. Реализовать на языке MATLAB функцию `plotFT(hFigure, fHandle, fFTHandle, step, inpLimVec, outLimVec)` со следующими параметрами:
 - **hFigure** — указатель на фигуру, в которой требуется отобразить графики
 - **fHandle** — указатель на функцию (**Function Handle**), которую требуется преобразовывать ($f(t)$)
 - **fFTHandle** — указатель на функцию (**Function Handle**), моделирующую аналитическое преобразование Фурье (1.2) функции $f(t)$ (может быть пустым вектором, в таком случае график аналитического преобразования строить не требуется)
 - **step** — положительное число, задающее шаг дискретизации Δt

- **inpLimVector** — вектор-строка, задающая окно $[a, b]$ для функции $f(t)$, первый элемент вектора содержит a , второй b , причём $a < b$, но не обязательно $a = -b$
- **outLimVector** — вектор-строка, задающая окно $[c, d]$ для вывода графика преобразования Фурье (пределы осей абсцисс). В случае, если передаётся пустой вектор, следует брать установленные в фигуре пределы или определять свои разумным образом

Данная функция строит графики вещественной и мнимой частей численной аппроксимации преобразования Фурье (1.2) функции $f(t)$, заданной в **fHandle** (и, при необходимости, соответствующие графики аналитического преобразования Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$)

Кроме того, данная функция, должна возвращать структуру, содержащую следующие параметры:

- **nPoints** — число вычисляемых узлов сеточной функции, рассчитываемое по формуле:

$$nPoints = \left\lfloor \frac{(b - a)}{step} \right\rfloor \quad (1.3)$$

- **step** — поправленное значение шага дискретизации Δt , рассчитываемое по формуле:

$$step = \frac{(b - a)}{nPoints - 1} \quad (1.4)$$

- **inpLimVec** — окно $[a, b]$ для функции $f(t)$
- **outLimVec** — окно $[c, d]$ для вывода графика преобразования Фурье $F(\lambda)$

2. Построить, используя написанную функцию **plotFT**, для каждой из функций системы (1.1) графики $F(\lambda)$ для разных значений входных параметров (окон **inpLimVec**, **outLimVec** и частоты дискретизации **step**).

В частности, для некоторых функций подобрать параметры так, чтобы проиллюстрировать эффекты *наложения спектра, появления ряби и их устранения* (в случае ряби — в точках непрерывности $F(\lambda)$)

3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из системы (1.1) вычислить аналитически их преобразования Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$ и построить их графики вместе с графиками численной аппроксимации $F(\lambda)$

2 Написание функции plotFT

2.1 Разбиение на подзадачи

Написание функции `plotFT` удобно делать по частям, разбив поставленную задачу на следующие подзадачи

1. Вычисление аппроксимации преобразования Фурье
2. Подготовка фигуры к выводу графиков
3. Вывод графиков быстрого и, при необходимости, аналитического преобразований Фурье

Соответственно, будем решать подзадачи в приведённом порядке, приводя необходимые выкладки и теоретические обоснования¹.

2.2 Вычисление аппроксимации преобразования Фурье

1. Найдем число вычисляемых узлов сеточной функции `nPoints`, хранимое в переменной `n` по формуле (1.3):

```
a = inLimVec(1);  
b = inLimVec(2);  
n = floor((b - a) ./ step) + 1;
```

2. Откорректируем значение шага `step` в соответствии с числом точек (формула (1.4)):

```
step = (b - a) ./ (n - 1);
```

3. Вычислим на сетке $[a, b]$, состоящей из n точек значения самой функции $f(t)$, тем самым получим дискретизацию $f_{\text{дискр}}(t)$, затем воспользуемся функциями MATLAB `fft()` и `fftshift()`, первая из которых вычисляет дискретное преобразование Фурье (ДПФ) функции $f_{\text{дискр}}(t)$, однако возвращает вектор значений в зеркальном виде, а вторая — «отзеркаливает» этот вектор, приводя его к нормальному виду. Искомая аппроксимация преобразования Фурье $F(\lambda)$ вычисляется по следующей формуле (доказательство её справедливости приведено в [1]):

$$F(\lambda) = \text{step} \cdot F_{\text{дискр}}(\lambda) \quad (2.1)$$

Здесь $F_{\text{дискр}}(\lambda)$ — вектор значений ДПФ функции $f_{\text{дискр}}(t)$, полученный путем применения `fftshift(fft(...))` к вектору значений $f_{\text{дискр}}(t)$ на заданной сетке. Приведём, в заключение, общую схему работы данного этапа:

$$f(t) \xrightarrow[\text{на сетке}]{\text{дискретизация}} f_{\text{дискр}}(t) \xrightarrow{\text{fftshift(fft())}} F_{\text{дискр}}(\lambda) \xrightarrow{(2.1)} F(\lambda)$$

¹Полный код функции `plotFT` приведён в приложении А (стр. 16)

4. Преобразование Фурье рассматривается на отрезке $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$, длины $2\pi/\Delta t$, разбитом на `nSteps` точек. Обратившись к [1], установим следующее свойство преобразования Фурье:

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-i\lambda t_0} F(\lambda)$$

Соответственно, для получения желаемого результата, полученный вектор значений **ДПФ** следует домножить на соответствующие значения экспоненты.

2.3 Подготовка фигуры к выводу графиков

В поле `UserData` фигуры `fHandle` будем хранить `handle` двух соответствующих осей (`axes`), а также окно вывода по оси абсцисс λ . В случае, если `UserData` у поданной фигуры пусто, сформируем его, построив две оси для вещественной и мнимой частей преобразования Фурье, соответствующим образом выбирая окно вывода: для этого просматриваем вектор значений **ДПФ** и находим левую и правую границы, на которых значение превышает некоторое ε , обозначенное в программе как `moe` (англ. *margin of error*). При наличии у фигуры поля `UserData`, но отсутствии в нём осей и/или пределов, дополним недостающие поля аналогичным образом. Наконец, сформированную структуру запишем в поле `UserData` фигуры `fHandle`.

2.4 Вывод графиков

Вывод графиков осуществляется стандартными средствами языка MATLAB, при этом, если поле `fFTHandle` не пусто, то выводится и график функции, на которую указывает `fFTHandle`.

3 Вычисление аналитических преобразований Фурье

3.1 Некоторые необходимые обозначения и соотношения

Напомним, что преобразование Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$ функции $f(t)$ задаётся формулой (1.2):

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

Впредь, будем для краткости писать:

$$\boxed{f(t) \rightarrow \mathfrak{F}(\lambda)}$$

Напомним также следующие свойства преобразования Фурье:

Свойство 3.1. Пусть

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t), \text{ и } \begin{cases} f_1(t) \rightarrow \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$f(t) \rightarrow \alpha \cdot \mathfrak{F}_1(\lambda) + \beta \cdot \mathfrak{F}_2(\lambda)$$

Свойство 3.2. Пусть

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t), \text{ и } \begin{cases} f_1(t) \rightarrow \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$2\pi f_1(t) \cdot f_2(t) \rightarrow (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda), \text{ где } (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathfrak{F}_1(\lambda - s) \cdot \mathfrak{F}_2(s)] ds$$

Отметим некоторые тривиальные¹ преобразования Фурье:

$$\delta(\lambda) \rightarrow 1 \tag{3.1}$$

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\lambda) \tag{3.2}$$

$$e^{iat} \rightarrow 2\pi\delta(\lambda - a) \tag{3.3}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \rightarrow \pi(\delta(\lambda - 1) + \delta(\lambda + 1)) \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{t} \rightarrow -i\pi \operatorname{sgn}(t) \tag{3.5}$$

Где $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ — дельта-функция Дирака, а соотношение (3.4) вытекает из свойства 3.1, с учётом (3.3).

¹Вывод этих преобразований, а также доказательства свойств (3.1) и (3.2) можно найти в [1]

Установим также важные отношения для свёртки дельта-функции с произвольной функцией $\varphi(t)$:

$$\boxed{(\delta * \varphi)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s - \tau) \cdot \varphi(\tau) d\tau = \varphi(s)} \quad (3.6)$$

Докажем следующее соотношение:

Лемма 3.1.

$$e^{-A|t|} \rightarrow \frac{2A}{A^2 + \lambda^2} \quad (3.7)$$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A|t|} \cdot e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{(A-i\lambda)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(A+i\lambda)t} dt = \\ &= \left[e^{(A-i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A-i\lambda} \right]_{t=-\infty}^0 - \left[e^{-(A+i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A+i\lambda} \right]_{t=0}^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{A-i\lambda} + \frac{1}{A+i\lambda} = \frac{2A}{A^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

■

3.2 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$

Преобразование Фурье $\mathfrak{F}_1(\lambda)$ функции $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$ задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} \cos(t) e^{-i\lambda t} dt$$

Утверждение.

$$\boxed{\mathfrak{F}_1(\lambda) = \frac{4(\lambda^2 + 5)}{\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25}} \quad (3.8)$$

Доказательство: Заметим, что $f_1(t)$ представима в виде:

$$f_1(t) = g_1(t) \cdot g_2(t), \text{ где } g_1(t) = e^{-2|t|}, g_2(t) = \cos(t) \quad (3.9)$$

Пользуясь этим соотношением, выражениями для преобразований Фурье $g_1(t)$ (3.7) и $g_2(t)$ (3.4), установленным свойством 3.2 и соотношением (3.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4 + \tau^2} \cdot \pi(\delta(\lambda - \tau - 1) + \delta(\lambda + 1 - \tau)) d\tau = \\ &= \frac{2}{4 + (\lambda - 1)^2} + \frac{2}{4 + (\lambda + 1)^2} = \frac{4(\lambda^2 + 5)}{\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25} \end{aligned}$$

■

3.3 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$

Преобразование Фурье $\mathfrak{F}_2(\lambda)$ функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$ задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t} dt$$

Утверждение.

$$\boxed{\mathfrak{F}_2(\lambda) = i(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) - 2 \operatorname{arctg}(\lambda))} \quad (3.10)$$

Доказательство: (Аналогично (3.9) представим $f_2(t)$ в виде:

$$f_2(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \text{ где } g_1(t) = (e^{-|t|} - 1), g_2(t) = \frac{1}{t} \quad (3.11)$$

Пользуясь установленными свойствами 3.1, 3.2, выражениями для преобразований Фурье $g_1(t)$ (3.7), (3.2) и $g_2(t)$ (3.5) и соотношением (3.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned} f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{1}{1+(\cdot)^2} - \pi \delta(\cdot) \right) * (-i\pi \operatorname{sgn}(\cdot)) \right] (\lambda) = \\ &= -i \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau + i \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau + \pi i \operatorname{sgn}(\lambda) = \\ &= i(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) + 2 \operatorname{arctg}(\lambda)) \end{aligned}$$

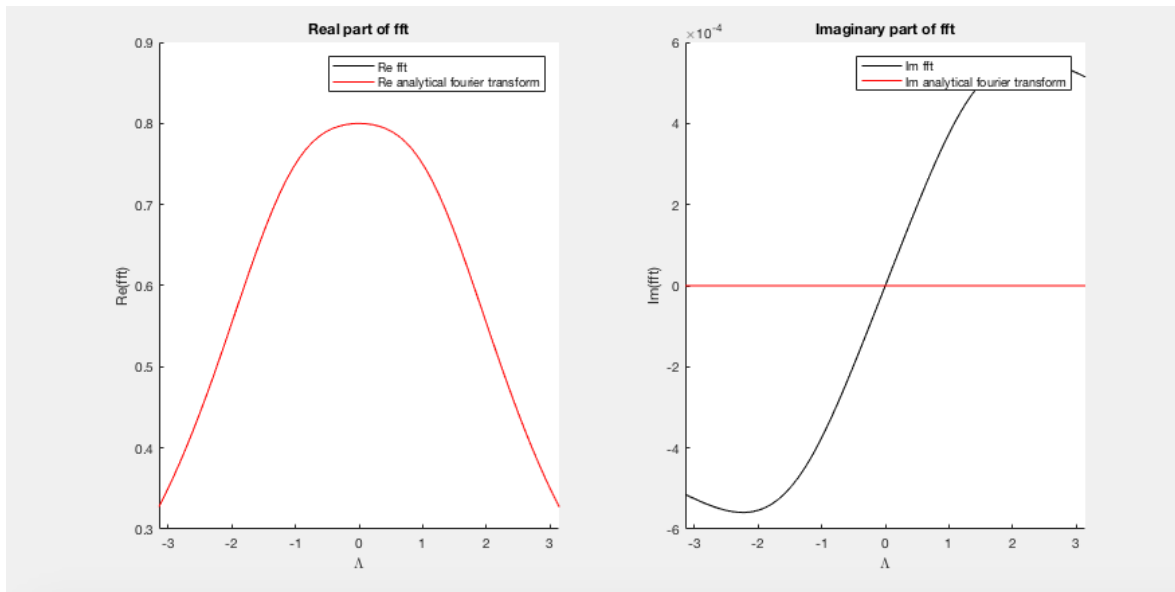
■

4 Построение графиков

4.1 $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$

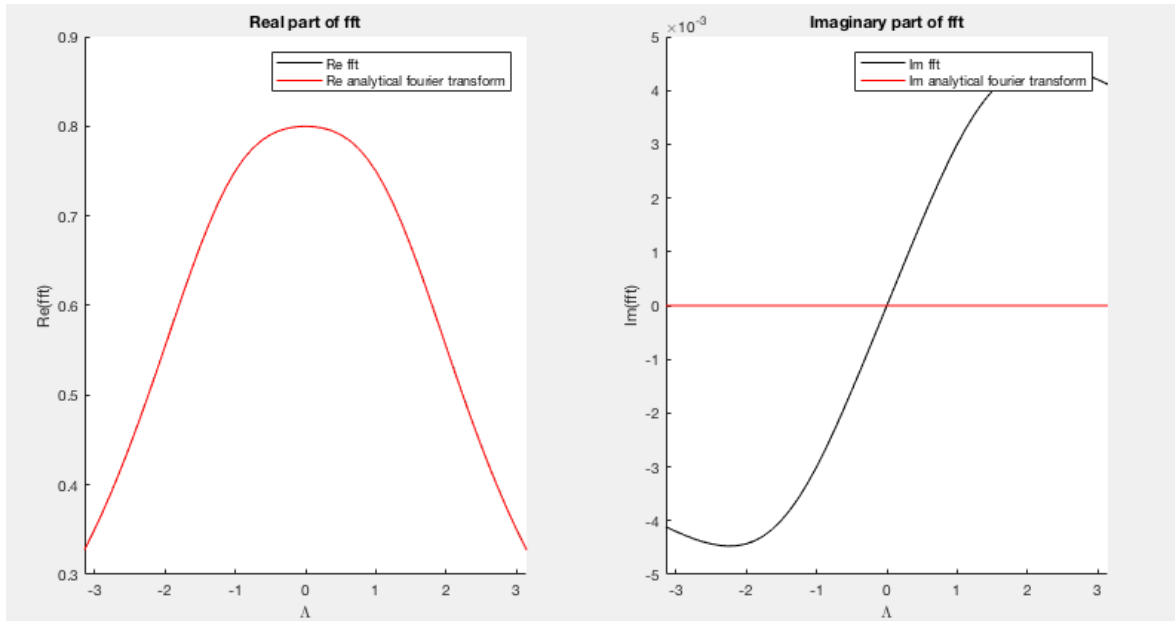
Данная функция непрерывна на всей числовой прямой вместе со своим преобразованием Фурье (3.8). Рассмотрим результат работы `plotFT` для данной функции и различного значения параметров Δt (`step`), $[a, b]$ (`inpLimVec`) и $[c, d]$ (`outLimVec`):

1. `step` = 10^{-3} , `inpLimVec` = $[-30, 30]$, `outLimVec` = $[-\pi, \pi]$



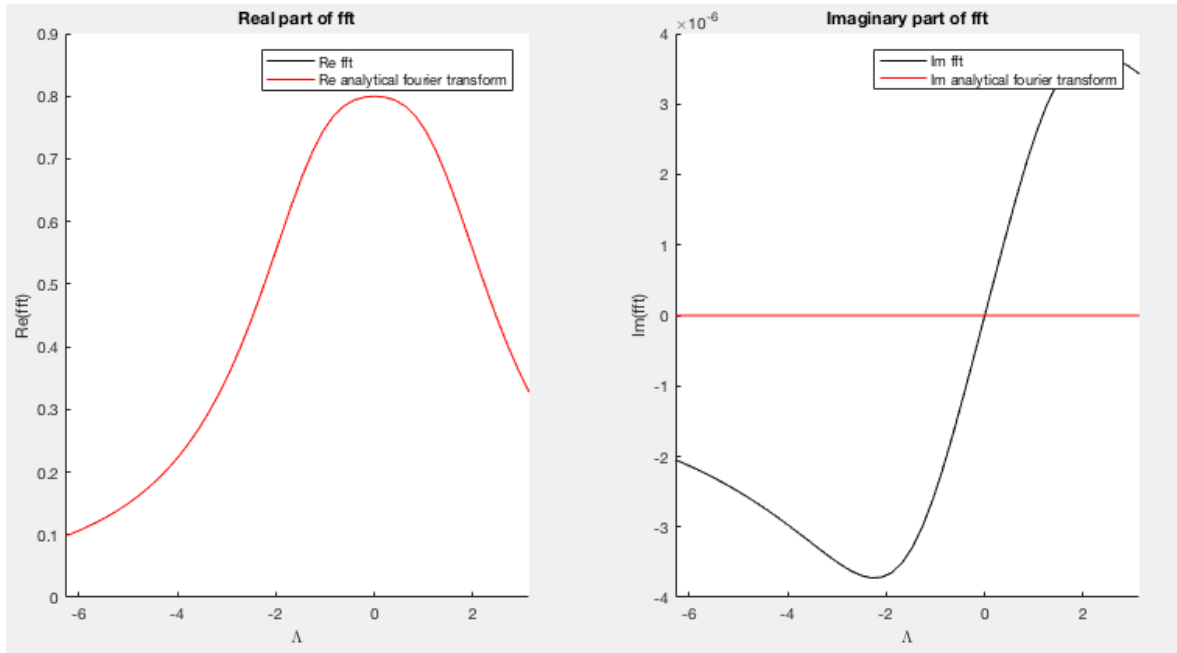
Вещественные части графиков аналитического преобразования и вычисленной аппроксимации практически совпадают, а погрешность во мнимой части сравнима с величиной шага дискретизации `step`

2. Сразу после построения предыдущего графика, вызовем `plotFT` с тем же параметром `hFigure` и следующим набором параметров:
`step = 10-2, inpLimVec = [-20, 30], outLimVec = []`



Несмотря на несимметричное окно `inpLimVec`, графики вещественных частей по-прежнему совпадают, а мнимых — различаются на величину порядка `step`. Отметим, что, так как был передан пустой вектор `outLimVec`, то пределы по оси абсцисс λ на графиках не изменились

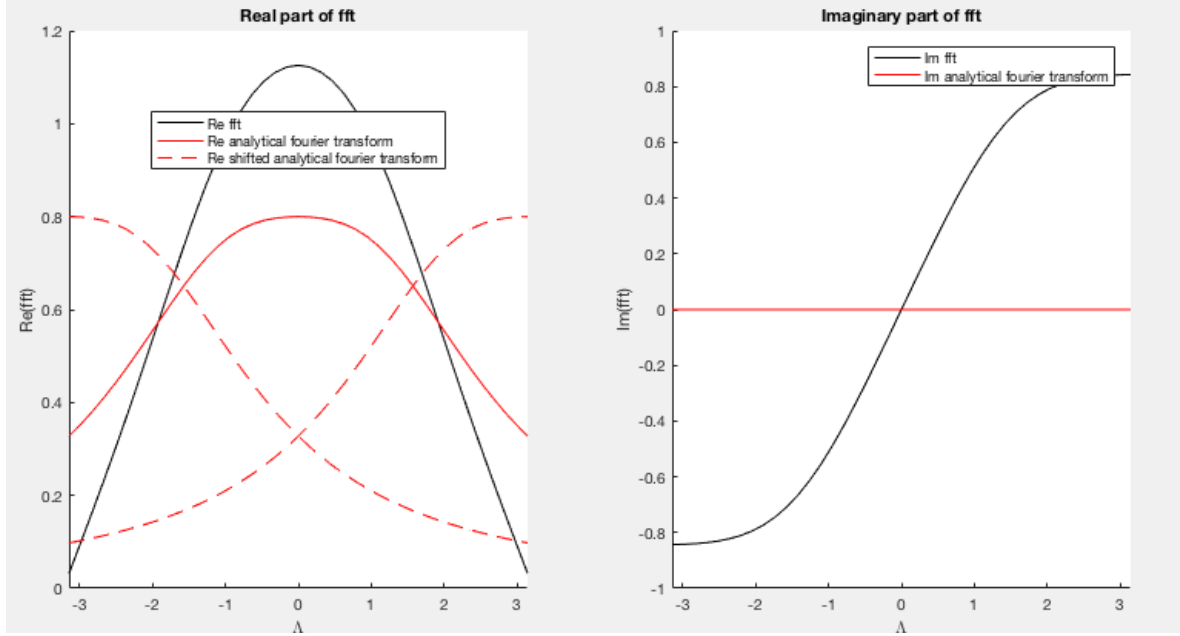
3. $\text{step} = 10^{-5}$, $\text{inpLimVec} = [-10, 20]$, $\text{outLimVec} = [-2\pi, \pi]$



В данном случае используется несимметричное окно для вывода (outLimVec)

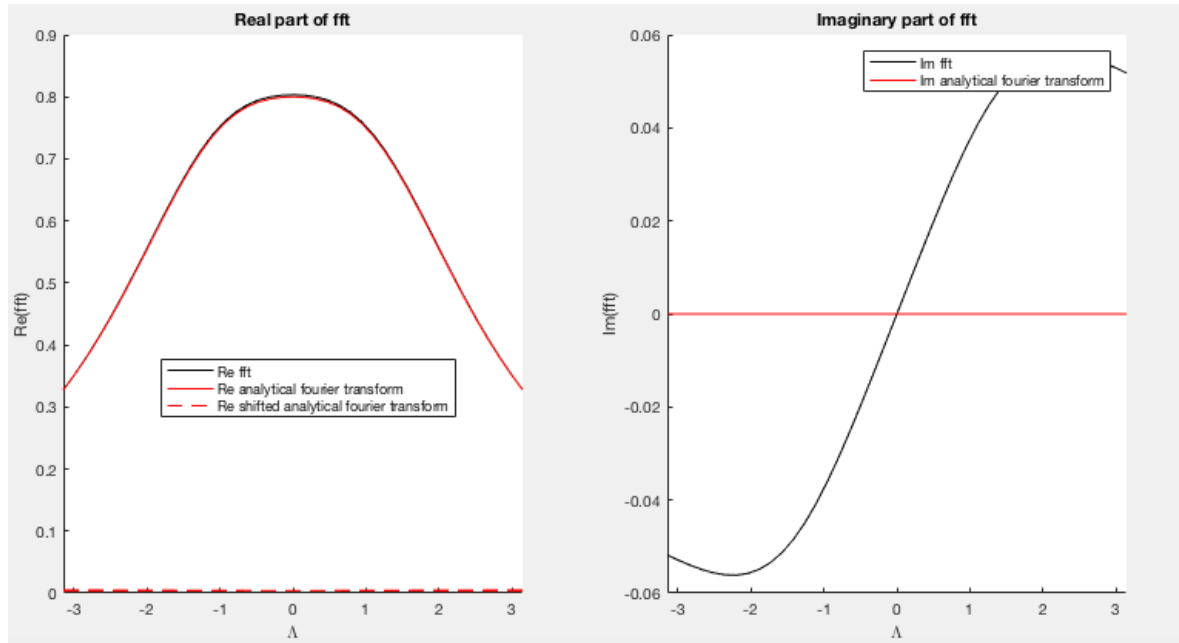
Кроме того, на примере данной функции проиллюстрируем *эффект наложения спектра (aliasing)*: для этого, отобразим на графике не только аналитическое преобразование Фурье, но и его же, сдвинутое влево и вправо на $\frac{\pi}{\Delta t}$, где $\Delta t = \text{step}$ — частота дискретизации. Из [1] известно, что численная аппроксимация $F(\lambda)$ есть сумма аналитического преобразования и сдвинутых аналитических преобразований $\forall \lambda \in [-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$.

4. `step = 1`, `inpLimVec = [-20, 20]`, `outLimVec = [π , π]`



Для преобразований Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$ ограниченного спектра (таких, что $\exists \Lambda : \mathfrak{F}(\lambda) = 0, \forall \lambda : |\lambda| > \Lambda$) из [1] известно, что эффект не будет проявляться при $\Delta t \leq \Delta_t^H$, где $\Delta_t^H = \frac{\pi}{\Lambda}$ — так называемая частота Найквиста (Nyquist gate). Однако, в силу того, что спектр полученного аналитически преобразования Фурье (3.8) неограничен (т.е. $\nexists \Lambda : \mathfrak{F}_1(\lambda) = 0, \forall \lambda : |\lambda| > \Lambda$), полное устранение данного эффекта невозможно; но, т.к. аналитическое преобразование достаточно быстро стремится к нулю (со скоростью порядка $\frac{1}{\lambda^2}$), то уменьшением шага дискретизации эффект наложения спектра можно свести к незначительному (см. 5)

5. $\text{step} = 10^{-1}$, $\text{inpLimVec} = [-20, 20]$, $\text{outLimVec} = [\pi, \pi]$



Здесь хорошо видно, что, хотя эффект наложения спектра не устранён полностью, он практически незаметен.

4.2 $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$

A Код функции plotFT

```
function [ res ] = plotFT( hFigure, fHandle, fFTHandle, ...
                        step, inpLimVec, outLimVec)
    res = struct('nPoints', [], 'Step', []);
    res.inpLimVec = inpLimVec;

    moe = .001;
    a = inpLimVec(1);
    b = inpLimVec(2);
    n = floor((b - a) ./ step) + 1;
    step = (b - a) ./ (n - 1);
    res.nPoints = n;
    res.Step = step;

    lsp = linspace(inpLimVec(1), inpLimVec(2), n);

    func = fHandle(lsp);

    fourier = step .* fftshift(fft(func));
    lsp = linspace(0, 2 * pi ./ step, n);

    lsp = lsp - lsp(floor(n ./ 2 + 1)); %symmetrical partition
    fourier = fourier .* exp(-1i.*lsp.*a) ; %shifting the fourier transform

    SPlotInfo = get(hFigure, 'UserData');

    if isempty(SPlotInfo)
        if isempty(outLimVec)
            limits = [0 0];
            for i = 1:n
                if abs(fourier(i)) > moe
                    if limits(1) == 0
                        limits(1) = i;
                    end
                    limits(2) = i;
                end
            end
            outLimVec = [lsp(limits(1)), lsp(limits(2))];
            res.outLimVec = outLimVec;
        end

        clf(hFigure); %clear figure window

        axRe = subplot(1, 2, 1);
```



```

    set(axRe, 'XLim', outLimVec);
    axRe.Title.String = 'Real part of fft';
    axRe.XLabel.String = '\Lambda';
    axRe.YLabel.String = 'Re(fft)';

    axIm = subplot(1, 2, 2);
    set(axIm, 'XLim', outLimVec);
    axIm.Title.String = 'Imaginary part of fft';
    axIm.XLabel.String = '\Lambda';
    axIm.YLabel.String = 'Im(fft)';

    SPlotInfo = struct('axRe', axRe, 'axIm', axIm);
end

if isempty(outLimVec)
    outLimVec = get(SPlotInfo.axRe, 'xLim');
else
    set(SPlotInfo.axRe, 'XLim', outLimVec);
    set(SPlotInfo.axIm, 'XLim', outLimVec);
end
set(hFigure, 'UserData', SPlotInfo);

% drawing graphs
hFigure.CurrentAxes = SPlotInfo.axRe;
hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'replacechildren';
plot(lsp, real(fourier), 'Color', [0 0 0]);
legend('Re fft');

if ~isempty(fFTHandle)
    hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'add';
    plot(lsp, real(fFTHandle(lsp)), 'r');
    legend('Re fft', 'Re analytical fourier transform');
end

hFigure.CurrentAxes = SPlotInfo.axIm;
hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'replacechildren';
plot(lsp, imag(fourier), 'Color', [0 0 0]);
legend('Im fft');

if ~isempty(fFTHandle)
    hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'add';
    plot(lsp, imag(fFTHandle(lsp)), 'r');
    legend('Im fft', 'Im analytical fourier transform');
end
end
end

```

Список литературы

- [1] И. В. Рублёв. Лекционный курс *Преобразования Лапласа-Фурье*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017
- [2] И. В. Рублёв, П. А. Точилин. Лекционный курс *Программирование на языке MATLAB*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017