msu-eps-converted-to.pdf

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Быстрое преобразование Фурье»

Студент 315 группы
В. А. Сливинский

Руководители практикума
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2017

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Общая формулировка задачи

Дана система функций (всюду далее, если не сказано противное, предполагается, что $f(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и функция суммируема и обладает достаточной гладкостью)

$$\begin{cases} f_1(t) = e^{-2|t|}\cos(t) \\ f_2(t) = \dfrac{e^{-|t|}-1}{t} \\ f_3(t) = \dfrac{\operatorname{arctg} t^2}{1+t^4} \\ f_4(t) = t^3 e^{-t^4} \end{cases} \tag{1.1}$$

Для каждой функции из системы (1.1) требуется:

1. Получить аппроксимацию преобразования Фурье $F(\lambda)$ для каждой функции $f(t)$ из заданного набора при помощи быстрого преобразования Фурье (**БПФ** / **FFT**), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения $f(t)$

2. Построить графики $F(\lambda)$

3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из заданного набора вычислить аналитически преобразование Фурье

$$\boxed{\mathfrak{F}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt} \tag{1.2}$$

   и сравнить графики $\mathfrak{F}(\lambda)$ с графиками $F(\lambda)$, полученного из аппроксимации через **БПФ**

1.2 Формальная постановка задачи

1. Реализовать на языке MATLAB функцию
`plotFT(hFigure, fHandle, fFTHandle, step, inpLimVec, outLimVec)`
со следующими параметрами:

   - **hFigure** — указатель на фигуру, в которой требуется отобразить графики
   - **fHandle** — указатель на функцию (`Function Handle`), которую требуется преобразовывать ($f(t)$)
   - **fFTHandle** — указатель на функцию (`Function Handle`), моделирующую аналитическое преобразование Фурье (1.2) функции $f(t)$ (может быть пустым вектором, в таком случае график аналитического преобразования строить не требуется)
   - **step** — положительное число, задающее шаг дискретизации Δt

- **inpLimVector** — вектор-строка, задающая окно $[a, b]$ для функции $f(t)$, первый элемент вектора содержит a, второй b, причём $a < b$, но не обязательно $a = -b$
- **outLimVector** — вектор-строка, задающая окно $[c, d]$ *для вывода* графика преобразования Фурье (пределы осей абсцисс). В случае, если передаётся пустой вектор, следует брать установленные в фигуре пределы или определять свои разумным образом

Данная функция строит графики вещественной и мнимой частей численной аппроксимации преобразования Фурье (1.2) функции $f(t)$, заданной в `fHandle` (и, при необходимости, соответствующие графики аналитического преобразования Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$)
Кроме того, данная функция, должна возвращать структуру, содержащую следующие параметры:

- **nPoints** — число вычисляемых узлов сеточной функции, рассчитываемое по формуле:
$$nPoints = \left\lfloor \frac{(b-a)}{step} \right\rfloor \tag{1.3}$$
- **step** — поправленное значение шага дискретизации Δt, рассчитываемое по формуле:
$$step = \frac{(b-a)}{nPoints - 1} \tag{1.4}$$
- **inpLimVec** — окно $[a, b]$ для функции $f(t)$
- **outLimVec** — окно для вывода графика преобразования Фурье $F(\lambda)$

2. Построить, используя написанную функцию `plotFT`, для каждой из функций системы (1.1) графики $F(\lambda)$ для разных значений входных параметров (окон **inpLimVec, outLimVec** и частоты дискретизации **step**).
В частности, для некоторых функций подобрать параметры так, чтобы проиллюстрировать эффекты *наложения спектра, появления ряби и их устранения* (в случае ряби — в точках непрерывности $F(\lambda)$)

3. Для функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ из системы (1.1) вычислить аналитически их преобразования Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$ и построить их графики вместе с графиками численной аппроксимации $F(\lambda)$

2 Написание функции `plotFT`

2.1 Разбиение на подзадачи

Написание функции `plotFT` удобно делать по частям, разбив поставленнию задачу на следующие подзадачи

1. Вычисление аппроксимации преобразования Фурье
2. Подготовка фигуры к выводу графиков
3. Вывод графиков быстрого и, при необходимости, аналитического преобразований Фурье

Соответственно, будем решать подзадачи в приведённом порядке, приводя необходимые выкладки и теоретические обоснования. [1]

2.2 Вычисление аппроксимации преобразования Фурье

1. Найдем число вычисляемых узлов сеточной функции `nPoints`, хранимое в переменной `n` по формуле (1.3):

   ```
   a = inpLimVec(1);
   b = inpLimVec(2);
   n = floor((b - a) ./ step) + 1;
   ```

2. Откорректируем значение шага `step` в соответствии с числом точек (формула (1.4)):

   ```
   step = (b - a) ./ (n - 1);
   ```

3. Вычислим на сетке $[a, b]$, состоящей из `n` точек значения самой функции $f(t)$, тем самым получим дискретизацию $f_{\text{дискр}}(t)$, затем воспользуемся функциями MATLAB `fft()` и `fftshift()`, первая из которых вычисляет дискретное преобразование Фурье (**ДПФ**) функции $f_{\text{дискр}}(t)$, однако возвращает вектор значений в зеркальном виде, а вторая — «отзеркаливает» этот вектор, приводя его к нормальному виду. Искомая аппроксимация преобразования Фурье $F(\lambda)$ вычисляется по следующей формуле (доказательство её справедливости приведено в [1]):

   $$F(\lambda) = \Delta t \cdot F_{\text{дискр}}(\lambda)$$

   Здесь $F_{\text{дискр}}(\lambda)$ — вектор значений **ДПФ** функции $f_{\text{дискр}}(t)$, полученный путем применения

[1] Полный код функции `plotFT` приведён в приложении A (стр. 9)

3 Вычисление аналитических преобразований Фурье

3.1 Некоторые необходимые обозначения и соотношения

Напомним, что преобразование Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$ функции $f(t)$ задаётся формулой (1.2):

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

Впредь, будем для краткости писать:

$$\boxed{f(t) \to \mathfrak{F}(\lambda)}$$

Напомним также следующие свойства преобразования Фурье:

Свойство 3.1. *Пусть*

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t) \text{ , и } \begin{cases} f_1(t) \to \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \to \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$f(t) \to \alpha \cdot \mathfrak{F}_1(\lambda) + \beta \cdot \mathfrak{F}_2(\lambda)$$

Свойство 3.2. *Пусть*

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t) \text{ , и } \begin{cases} f_1(t) \to \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \to \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$2\pi f_1(t) \cdot f_2(t) \to (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda) \text{ , где } (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\mathfrak{F}_1(\lambda - s) \cdot \mathfrak{F}_2(s)\right] ds$$

Отметим некоторые тривиальные преобразования Фурье:

$$\delta(\lambda) \to 1 \tag{3.1}$$

$$1 \to 2\pi\delta(\lambda) \tag{3.2}$$

$$e^{iat} \to 2\pi\delta(\lambda - a) \tag{3.3}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \to \pi(\delta(\lambda - 1) + \delta(\lambda + 1)) \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{t} \to -i\pi\,\mathrm{sgn}(t) \tag{3.5}$$

Где $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ — дельта-функция Дирака, а соотношение (3.4) вытекает из свойства 3.1, с учётом (3.3).

Вывод этих преобразований, а также доказательства свойств (3.1) и (3.2) можно найти в [1]

Установим также важное отношения для свёртки дельта-функции с произвольной функцией $\varphi(t)$:

$$\boxed{(\delta * \varphi)(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(s-\tau) \cdot \varphi(\tau)\, d\tau = \varphi(s)} \tag{3.6}$$

Докажем следующее соотношение:

Лемма 3.1.

$$e^{-A|t|} \to \frac{2A}{A^2+\lambda^2} \tag{3.7}$$

Доказательство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-A|t|} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(A-i\lambda)t}\, dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(A+i\lambda)t}\, dt =$$

$$= \left[e^{(A-i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A-i\lambda}\right]_{t=-\infty}^{0} - \left[e^{-(A+i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A+i\lambda}\right]_{t=0}^{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{A-i\lambda} + \frac{1}{A+i\lambda} = \frac{2A}{A^2+\lambda^2}$$

■

3.2 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2|t|}\cos(t)$

Преобразование Фурье $\mathfrak{F}_1(\lambda)$ функции $f_1(t) = e^{-2|t|}\cos(t)$ задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}\cos(t) e^{-i\lambda t}\, dt$$

Утверждение.

$$\boxed{\mathfrak{F}_1(\lambda) = \frac{4(\lambda^2+5)}{\lambda^4+6\lambda^2+25}} \tag{3.8}$$

Доказательство: Заметим, что $f_1(t)$ представима в виде:

$$f_1(t) = g_1(t) \cdot g_2(t), \text{ где } g_1(t) = e^{-2|t|},\ g_2(t) = \cos(t) \tag{3.9}$$

Пользуясь этим соотношением, выражениями для преобразований Фурье $g_1(t)$ (3.7) и $g_2(t)$ (3.4), установленным свойством 3.2 и соотношением (3.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\mathfrak{F}_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4+\tau^2} \cdot \pi(\delta(\lambda-\tau-1) + \delta(\lambda+1-\tau))\, d\tau =$$

$$= \frac{2}{4+(\lambda-1)^2} + \frac{2}{4+(\lambda+1)^2} = \frac{4(\lambda^2+5)}{\lambda^4+6\lambda^2+25}$$

$\blacksquare$

3.3 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$

Преобразование Фурье $\mathfrak{F}_2(\lambda)$ функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$ задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t}\, dt$$

Утверждение.

$$\boxed{\mathfrak{F}_2(\lambda) = i\left(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) - 2 \operatorname{arctg}(\lambda)\right)} \tag{3.10}$$

Доказательство: (Аналогично (3.9) представим $f_2(t)$ в виде:

$$f_2(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \text{ где } g_1(t) = \left(e^{-|t|} - 1\right),\ g_2(t) = \frac{1}{t} \tag{3.11}$$

Пользуясь установленными свойствами 3.1, 3.2, выражениями для преобразований Фурье $g_1(t)$ (3.7), (3.2) и $g_2(t)$ (3.5) и соотношением (3.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned}
f_2(t) \to \mathfrak{F}_2(\lambda) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1+(\cdot)^2} - \pi\delta(\cdot)\right) * \left(-i\pi \operatorname{sgn}(\cdot)\right)\right](\lambda) = \\
&= -i \int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau + i \int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{1+\tau^2}\, d\tau + \pi i \operatorname{sgn}(\lambda) = \\
&= i\left(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) + 2 \operatorname{arctg}(\lambda)\right)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

A Код функции plotFT

```
function [ res ] = plotFT( hFigure, fHandle, fFTHandle, step, inpLimVec, outLimVec)
    res = struct('nPoints', [], 'Step', []);
    res.inpLimVec = inpLimVec;

    moe = .001;
    a = inpLimVec(1);
    b = inpLimVec(2);
    n = floor((b - a) ./ step) + 1;
    step = (b - a) ./ (n - 1);
    res.nPoints = n;
    res.Step = step;

    lsp = linspace(inpLimVec(1), inpLimVec(2), n);

    func = fHandle(lsp);

    fourier = step .* fftshift(fft(func));
    lsp = linspace(0, 2 * pi ./ step, n);

    lsp = lsp - lsp(floor(n ./ 2 + 1));  %symmetrical partition
    fourier = fourier .* exp(-1i.*lsp.*a) ; %shifting the fourier transform

    SPlotInfo = get(hFigure, 'UserData');

    if isempty(SPlotInfo)
        if isempty(outLimVec)
            limits = [0 0];
            for i = 1:n
                if abs(fourier(i)) > moe
                    if limits(1) == 0
                        limits(1) = i;
                    end
                    limits(2) = i;
                end
            end
            outLimVec = [lsp(limits(1)), lsp(limits(2))];
            res.outLimVec = outLimVec;
        end

        clf(hFigure); %clear figure window

        axRe = subplot(1, 2, 1);
        set(axRe, 'XLim', outLimVec);
        axRe.Title.String = 'Real part of fft';
        axRe.XLabel.String = '\Lambda';
```

```
        axRe.YLabel.String = 'Re(fft)';

        axIm = subplot(1, 2, 2);
        set(axIm, 'XLim', outLimVec);
        axIm.Title.String = 'Imaginary part of fft';
        axIm.XLabel.String = '\Lambda';
        axIm.YLabel.String = 'Im(fft)';

        SPlotInfo = struct('axRe', axRe, 'axIm', axIm);
    end

    if isempty(outLimVec)
        outLimVec = get(SPlotInfo.axRe, 'xLim');
    else
        set(SPlotInfo.axRe, 'XLim', outLimVec);
        set(SPlotInfo.axIm, 'XLim', outLimVec);
    end
    set(hFigure, 'UserData', SPlotInfo);

    % drawing graphs
    hFigure.CurrentAxes = SPlotInfo.axRe;
    hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'replacechildren';
    plot(lsp, real(fourier), 'Color', [0 0 0]);
    legend('Re fft');

    if ~isempty(fFTHandle)
        hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'add';
        plot(lsp, real(fFTHandle(lsp)), 'r');
        legend('Re fft', 'Re analytical fourier transform');
    end

    hFigure.CurrentAxes = SPlotInfo.axIm;
    hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'replacechildren';
    plot(lsp, imag(fourier), 'Color', [0 0 0]);
    legend('Im fft');

    if ~isempty(fFTHandle)
        hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'add';
        plot(lsp, imag(fFTHandle(lsp)), 'r');
        legend('Im fft', 'Im analytical fourier transform');
    end
end
```

Список литературы

[1] И. В. Рублёв, *курс лекций «Преобразования Лапласа-Фурье»*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017