Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная Задача Быстродействия»

Студент 315 группы
В. А. Сливинский

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Общая формулировка задачи

Задана линейная система ОДУ:

$$\dot{x} = Ax + u + f,\ t \in [t_0, +\infty) \tag{1.1}$$

Здесь, $x, f \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $u \in \mathbb{R}^2$. Кроме того, на управление u наложено дополнительное ограничение $u \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{X}_0$ — начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ — целевое множество значений фазового вектора. Для заданных множеств $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{P}$ необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{P} = p + \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 9x_1^2 + 4x_2^2 \leqslant r\right\},\ p \in \mathbb{R}^2; \tag{1.2}$$

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0\}; \tag{1.3}$$

$$\mathcal{X}_1 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a(x_1 - x_{11})^2 + b|x_2 - x_{12}| \leqslant c\right\},\ a, b, c > 0. \tag{1.4}$$

Требуется:

1. Написать в среде Matlab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным значениям параметров $A, f, t_0, r, p, x_0, a, b, c, x_{11}, x_{12}$ определяет, разрешима ли задача (1.1). Если задача разрешима, программа должна (приближённо) найти значение T и построить графики компонент оптимального управления, оптимальной траектории, сопряжённых переменных. Кроме того, программа должна допускать возможность улучшения решения, как локальным, так и глобальным методами.

2. Для различных значений параметров (в том числе, для различных собственных значений матрицы A) провести анализ системы (1.1), численно решить задачу и построить соответствующие графики.

1.2 Формальная постановка задачи

1. Провести необходимые исследования системы (1.1) и привести сопутствующие теоретические выкладки;

2. Разработать и описать численный метод решения задачи и возникающих подзадач;

3. Реализовать на языке MATLAB программу, удовлетворяющую условиям из 1.1 и реализующую численный метод из пункта 2. Для этого, реализовать:

   - Пользовательский интерфейс ввода исходных данных;
   - Алгоритм поиска управлений и траекторий, подозрительных на оптимальные, а также алгоритм отбора из них оптимальных (при наличии таковых);
   - Алгоритм и интерфейс построения требуемых графиков;
   - Алгоритм локального и глобального улучшения решения;
   - Алгоритм сохранения и загрузки промежуточных данных, значений параметров и полученных ответов.

4. Построить, используя написанную программу, графики для различных значений параметров и проанализировать полученные решения.

2 Некоторые необходимые теоретические выкладки

2.1 Принцип максимума

Прежде всего, установим принцип максимума Понтрягина в следующей формулировке:[1]

Принцип Максимума Понтрягина (В формулировке из [3])
Пусть $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ *— оптимальная пара.*
Тогда существует $\psi(t) \in AC[t_0, t_1], \psi(t) \neq 0 \ \forall t \in [t_0, t_1]$:

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \tag{2.1}$$
$$\langle Bu^*(t), \psi(t) \rangle = \rho(\psi(t) | B\mathcal{P}) \tag{2.2}$$
$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0) \tag{2.3}$$
$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) | \mathcal{X}_1) \tag{2.4}$$

Систему (2.1) называют *сопряжённой системой*, её решение $\psi = \psi(t)$ — *сопряжёнными переменными*, а условия (2.3) и (2.4) — *условиями трансверсальности*. Условие (2.2) позволяет выделить из всех возможных управлений семейство «подозрительных» на оптимальные.

2.2 Исследование сопряжённой системы

Для того, чтобы однозначно определить решение системы (2.1), нам необходимо присовокупить к ней некоторые начальные условия. Мы, для удобства решения, будем рассматривать $\psi(t_0) = \psi_0$. В результате получим задачу Коши для сопряжённой системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t), \ t \in [t_0, t_1] \\ \psi(t_0) = \psi_0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Тогда, решение этой системы представимо в виде:

$$\psi(t) = e^{-A^T (t - t_0)} \psi_0 \tag{2.6}$$

2.3 Выделение нужных управлений и траекторий

Условие (2.2), в силу свойств скалярного произведения, можно переписать в следующем виде:

$$\left\langle B^T \psi(t), u^*(t) \right\rangle = \rho(B^T \psi(t) | \mathcal{P})$$

В свою очередь, раскрыв определение опорной функции множества $\mathcal{P}$ в направлении $B^T \psi(t)$, окончательно получим:

$$\left\langle B^T \psi(t), u^*(t) \right\rangle = \sup_{u(t) \in \mathcal{P}} \left\langle B^T \psi(t), u(t) \right\rangle \tag{2.7}$$

Заметим, что множество $\mathcal{P}$ (см. (1.2)) есть эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$, где $P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{r}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} \end{pmatrix}$ — матрица конфигурации. Из [1] известно, что решение $u^*(t)$ уравнения (2.7) представимо в

[1] Доказательство приведено, например, в [4]

виде:

$$u^*(t) = p + \frac{PB^T\psi(t)}{\sqrt{\langle B^T\psi(t), PB^T\psi(t)\rangle}} \tag{2.8}$$

Данное выражение корректно при $B \neq 0$, так как $\psi(t) \neq 0$ для любого допустимого t, а $P \neq 0$.

С учётом того, что множество $\mathcal{X}_0$ состоит из одной точки (см. (1.3)) и первого условия трансверсальности (2.3), любая «подозрительная» на оптимальную траектория $x^*(t)$ выходит из точки x_0, т.е. $x^*(t_0) = x_0$. Тогда, подстановкой в (1.1) недостающих значений из (2.8), (2.6) и значения $x^*(t_0) = x_0$ окончательно получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + u^*(t) + f, \ t \in [t_0, +\infty) \\ x^*(t_0) = x_0 \\ u^*(t) = p + \dfrac{PB^T\psi(t)}{\sqrt{\langle B^T\psi(t), PB^T\psi(t)\rangle}} \\ \psi(t) = e^{-A^T(t-t_0)}\psi_0 \end{cases} \tag{2.9}$$

2.4 Оценка погрешности

Поскольку численное решение задачи сопряжено с погрешностью, требуется ввести некоторую меру погрешности условия трансверсальности на правом конце (2.4): оно равносильно сонаправленности вектора $-\psi(t_1)$ и вектора внешней единичной нормали к границе множества $\mathcal{X}_1$ в точке $x^*(t_1)$. Множество $\mathcal{X}_1$ представляет собой область, заключённую внутри двух парабол; для удобства, перепишем (1.4) в следующем виде:

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{a}{b}(x_1 - x_{11})^2 - (\frac{c}{b} - x_{12}) \leqslant x_2 \leqslant x_{12} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1 - x_{11})^2 \right\}, \ a, b, c > 0.$$

Отсюда явно видно, что эти две параболы пересекаются в точках $\left(x_{11} \pm \sqrt{\frac{c}{a}}, \ x_{12}\right)$

Уравнение касательной к верхней параболе в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$:

$$x_2 - x_2^0 = -\frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11})(x_1 - x_1^0)$$

$$\frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11})(x_1 - x_1^0) + (x_2 - x_2^0) = 0;$$

Отсюда, вектор нормали $\vec{n}_u$ и единичной нормали $\vec{\nu}_u$ к верхней параболе в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$:

$$\vec{n}_u = \left\{ \frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11}), \ 1 \right\}$$

$$\vec{\nu}_u = \frac{\vec{n}}{\|n\|}$$

Аналогично, для нижней параболы имеем:

$$\vec{n}_l = \left\{ \frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11}), \ -1 \right\}$$

$$\vec{\nu}_l = \frac{\vec{n}}{\|n\|}$$

Отметим, что в точках пересечения парабол $\left(x_{11} \pm \sqrt{\frac{c}{a}}, \ x_{12}\right)$ граница множества $\mathcal{X}_1$ не является гладкой, следовательно существует целый сектор направлений, по которым выполняется условие (2.4).

Список литературы

[1] И. В. Рублёв. *Лекционный курс Оптимальное Управление (Линейные Системы)*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017

[2] И. В. Рублёв. *Лекционный курс Оптимальное Управление (Нелинейные Системы)*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2018

[3] Точилин П. А. *Лекционный курс Программирование на языке* `MATLAB`, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017 – 2018

[4] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, — М.: Наука, 1976.

[5] Справочные средства языка `MATLAB`