Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Линейная Задача Быстродействия»

Студент 315 группы
В. А. Сливинский

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Общая формулировка задачи

Задана линейная система ОДУ:

$$\dot{x} = Ax + u + f,\ t \in [t_0, +\infty) \tag{1.1}$$

Здесь, $x, f \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $u \in \mathbb{R}^2$. Кроме того, на управление u наложено дополнительное ограничение $u \in \mathcal{P}$. Пусть $\mathcal{X}_0$ — начальное множество значений фазового вектора, $\mathcal{X}_1$ — целевое множество значений фазового вектора. Для заданных множеств $\mathcal{X}_0$, $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{P}$ необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время $T > 0$, за которое траектория системы, выпущенная в момент времени t_0 из некоторой точки множества $\mathcal{X}_0$, может попасть в некоторую точку множества $\mathcal{X}_1$.

$$\mathcal{P} = p + \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 9x_1^2 + 4x_2^2 \leqslant r\right\},\ p \in \mathbb{R}^2; \tag{1.2}$$

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0\}; \tag{1.3}$$

$$\mathcal{X}_1 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a(x_1 - x_{11})^2 + b|x_2 - x_{12}| \leqslant c\right\},\ a, b, c > 0. \tag{1.4}$$

Требуется:

1. Написать в среде Matlab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным значениям параметров $A, f, t_0, r, p, x_0, a, b, c, x_{11}, x_{12}$ определяет, разрешима ли задача (1.1). Если задача разрешима, программа должна (приближённо) найти значение T и построить графики компонент оптимального управления, оптимальной траектории, сопряжённых переменных. Кроме того, программа должна допускать возможность улучшения решения, как локальным, так и глобальным методами.

2. Для различных значений параметров (в том числе, для различных собственных значений матрицы A) провести анализ системы (1.1), численно решить задачу и построить соответствующие графики.

1.2 Формальная постановка задачи

1. Провести необходимые исследования системы (1.1) и привести сопутствующие теоретические выкладки;

2. Разработать и описать численный метод решения задачи и возникающих подзадач;

3. Реализовать на языке MATLAB программу, удовлетворяющую условиям из 1.1 и реализующую численный метод из пункта 2. Для этого, реализовать:

   - Пользовательский интерфейс ввода исходных данных;
   - Алгоритм поиска управлений и траекторий, подозрительных на оптимальные, а также алгоритм отбора из них оптимальных (при наличии таковых);
   - Алгоритм и интерфейс построения требуемых графиков;
   - Алгоритм локального и глобального улучшения решения;

- Алгоритм сохранения и загрузки промежуточных данных, значений параметров и полученных ответов.

4. Построить, используя написанную программу, графики для различных значений параметров и проанализировать полученные решения.

2 Некоторые необходимые теоретические выкладки

Прежде всего, установим принцип максимума Понтрягина в следующей формулировке:[1]

Принцип Максимума Понтрягина (В формулировке из [3])
Пусть $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ *— оптимальная пара. Тогда существует* $\psi(t) \in AC[t_0, t_1]$, $t \in [t_0, t_1]$:

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \tag{2.1}$$
$$\langle Bu^*(t), \psi(t)\rangle = \rho(\psi(t)|B\mathcal{P}) \tag{2.2}$$
$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0)\rangle = \rho(\psi(t_0)|\mathcal{X}_0) \tag{2.3}$$
$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1)\rangle = \rho(-\psi(t_1)|\mathcal{X}_1) \tag{2.4}$$

Систему (2.1) называют *сопряжённой системой*, её решение $\psi = \psi(t)$ — *сопряжёнными переменными*, а условия (2.3) и (2.4) — *условиями трансверсальности*. Условие (2.2) позволяет выделить из всех возможных управлений семейство «подозрительных» на оптимальные.
Для того, чтобы однозначно определить решение системы (2.1), нам необходимо присовокупить к ней некоторые начальные условия. В результате получим задачу Коши для сопряжённой системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T\psi(t), \ t \in [t_0, t_1] \\ \left[\begin{array}{l} \psi(t_0) = \psi_0 \\ \psi(t_1) = \psi_1 \end{array}\right. \end{cases} \tag{2.5}$$

Условие (2.2), в силу свойств скалярного произведения, можно переписать в следующем виде:

$$\left\langle B^T\psi(t), u^*(t)\right\rangle = \rho(B^T\psi(t)|\mathcal{P})$$

В свою очередь, раскрыв определение опорной функции множества $\mathcal{P}$ в направлении $B^T\psi(t)$, окончательно получим:

$$\left\langle B^T\psi(t), u^*(t)\right\rangle = \sup_{u(t)\in\mathcal{P}} \left\langle B^T\psi(t), u(t)\right\rangle \tag{2.6}$$

Заметим, что множество $\mathcal{P}$ (см. (1.2)) есть эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$, где $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ — матрица конфигурации. Из [1] известно, что решение уравнения (2.6) $u^*(t)$ представимо в виде:

$$u^*(t) = p + \frac{PB^T\psi(t)}{\sqrt{\langle B^T\psi(t), PB^T\psi(t)\rangle}} \tag{2.7}$$

Данное выражение корректно при $B \neq 0$, так как из [2] и [4] известно, что $\psi(t) \neq 0$ для любого допустимого t, а $P \neq 0$.

3 Написание функции `plotFT`

3.1 Разбиение на подзадачи

Написание функции `plotFT` удобно делать по частям, разбив поставленнию задачу на следующие подзадачи

[1] Доказательство приведено, например, в [4]

1. Вычисление аппроксимации преобразования Фурье
2. Подготовка фигуры к выводу графиков
3. Вывод графиков быстрого и, при необходимости, аналитического преобразований Фурье

Соответственно, будем решать подзадачи в приведённом порядке, приводя необходимые выкладки и теоретические обоснования[1].

3.2 Вычисление аппроксимации преобразования Фурье

1. Найдем число вычисляемых узлов сеточной функции `nPoints`, хранимое в переменной `n` по формуле (**??**):

   ```
   a = inpLimVec(1);
   b = inpLimVec(2);
   n = floor((b - a) ./ step) + 1;
   ```

2. Откорректируем значение шага `step` в соответствии с числом точек (формула (**??**)):

   ```
   step = (b - a) ./ (n - 1);
   ```

3. Вычислим на сетке $[a, b]$, состоящей из `n` точек значения самой функции $f(t)$, тем самым получим дискретизацию $f_{\text{дискр}}(t)$, затем воспользуемся функциями MATLAB `fft()` и `fftshift()`, первая из которых вычисляет дискретное преобразование Фурье (**ДПФ**) функции $f_{\text{дискр}}(t)$, однако возвращает вектор значений в зеркальном виде, а вторая — «отзеркаливает» этот вектор, приводя его к нормальному виду[2]. Искомая аппроксимация преобразования Фурье $F(\lambda)$ вычисляется по следующей формуле (доказательство её справедливости приведено в [**?**]):

   $$F(\lambda) = \texttt{step} \cdot F_{\text{дискр}}(\lambda) \tag{3.1}$$

   Здесь $F_{\text{дискр}}(\lambda)$ — вектор значений **ДПФ** функции $f_{\text{дискр}}(t)$, полученный путем применения `fftshift(fft(...))` к вектору значений $f_{\text{дискр}}(t)$ на заданной сетке. Приведём, в заключение, общую схему работы данного этапа:

   $$f(t) \xrightarrow[\text{на сетке}]{\text{дискретизация}} f_{\text{дискр}}(t) \xrightarrow{\texttt{fftshift(fft())}} F_{\text{дискр}}(\lambda) \xrightarrow{(3.1)} F(\lambda)$$

[1] Полный код функции `plotFT` приведён в приложении **??** (стр. **??**)

[2] Здесь и далее все использованные средства языка `MATLAB` и спецификации взяты из [3] и [5]

4. Преобразование Фурье рассматривается на отрезке $\left[\frac{-\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}\right]$, длины $2\pi/\Delta t$, разбитом на nSteps точек. Обратившись к [?], установим следующее свойство преобразования Фурье:

$$\boxed{f(t-t_0) \to e^{-i\lambda t_0}F(\lambda)}$$

Соответственно, для получения желаемого результата, полученный вектор значений **ДПФ** следует домножить на соответствующие значения экспоненты.

3.3 Подготовка фигуры к выводу графиков

В поле `UserData` фигуры `fHandle` будем хранить `handle` двух соответствующих осей (`axes`), а также окно вывода по оси абсцисс λ. В случае, если `UserData` у поданной фигуры пуст, сформируем его, построив две оси для вещественной и мнимой частей преобразования Фурье, соответствующим образом выбирая окно вывода: для этого просматриваем вектор значений **ДПФ** и находим левую и правую границы, на которых значение превышает некоторое ε, обозначенное в программе как `moe` (англ. *margin of error*). При наличии у фигуры поля `UserData`, но отсутствии в нём осей и/или пределов, дополним недостающие поля аналогичным образом. Наконец, сформированную структуру запишем в поле `UserData` фигуры `fHandle`.

3.4 Вывод графиков

Вывод графиков осуществляется стандартными средствами языка MATLAB, при этом, если поле `fFTHandle` не пусто, то выводится и график функции, на которую указывает `fFTHandle`.

4 Вычисление аналитических преобразований Фурье

4.1 Некоторые необходимые обозначения и соотношения

Напомним, что преобразование Фурье $\mathfrak{F}(\lambda)$ функции $f(t)$ задаётся формулой (**??**):

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\lambda t}\,dt$$

Впредь, будем для краткости писать:

$$\boxed{f(t) \to \mathfrak{F}(\lambda)}$$

Напомним также следующие свойства преобразования Фурье:

Свойство 4.1. *Пусть*

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t),\ \textit{и}\ \begin{cases} f_1(t) \to \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \to \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$f(t) \to \alpha \cdot \mathfrak{F}_1(\lambda) + \beta \cdot \mathfrak{F}_2(\lambda)$$

Свойство 4.2. *Пусть*

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)\ ,\ \textit{и}\ \begin{cases} f_1(t) \to \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \to \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$2\pi f_1(t) \cdot f_2(t) \to (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda)\ ,\ \textit{где}\ (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \big[\mathfrak{F}_1(\lambda - s) \cdot \mathfrak{F}_2(s)\big]\,ds$$

Отметим некоторые тривиальные[1] преобразования Фурье:

$$\delta(\lambda) \to 1 \tag{4.1}$$
$$1 \to 2\pi\delta(\lambda) \tag{4.2}$$
$$e^{iat} \to 2\pi\delta(\lambda - a) \tag{4.3}$$
$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \to \pi(\delta(\lambda - 1) + \delta(\lambda + 1)) \tag{4.4}$$
$$\frac{1}{t} \to -i\pi\,\mathrm{sgn}(t) \tag{4.5}$$

Где $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$ — дельта-функция Дирака, а соотношение (4.4) вытекает из свойства 4.1, с учётом (4.3).

[1]Вывод этих преобразований, а также доказательства свойств (4.1) и (4.2) можно найти в [?]

Установим также важное отношения для свёртки дельта-функции с произвольной функцией $\varphi(t)$:

$$\boxed{(\delta * \varphi)(s) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(s-T) \cdot \varphi(T)\, dT = \varphi(s)} \tag{4.6}$$

Докажем следующее соотношение:

Лемма 4.1.

$$e^{-A|t|} \to \frac{2A}{A^2+\lambda^2} \tag{4.7}$$

Доказательство:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-A|t|} \cdot e^{-i\lambda t}\, dt = \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(A-i\lambda)t}\, dt + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-(A+i\lambda)t}\, dt =$$
$$= \left[e^{(A-i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A-i\lambda} \right]_{t=-\infty}^{0} - \left[e^{-(A+i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A+i\lambda} \right]_{t=0}^{+\infty} =$$
$$= \frac{1}{A-i\lambda} + \frac{1}{A+i\lambda} = \frac{2A}{A^2+\lambda^2}$$

■

4.2 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2|t|}\cos(t)$

Преобразование Фурье $\mathfrak{F}_1(\lambda)$ функции $f_1(t) = e^{-2|t|}\cos(t)$ задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_1(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|}\cos(t) e^{-i\lambda t}\, dt$$

Утверждение.

$$\boxed{\mathfrak{F}_1(\lambda) = \frac{4(\lambda^2+5)}{\lambda^4+6\lambda^2+25}} \tag{4.8}$$

Доказательство: Заметим, что $f_1(t)$ представима в виде:

$$f_1(t) = g_1(t)\cdot g_2(t), \text{ где } g_1(t) = e^{-2|t|},\ g_2(t) = \cos(t) \tag{4.9}$$

Пользуясь этим соотношением, выражениями для преобразований Фурье $g_1(t)$ (4.7) и $g_2(t)$ (4.4), установленным свойством 4.2 и соотношением (4.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\mathfrak{F}_1(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4+T^2}\cdot \pi(\delta(\lambda - T - 1) + \delta(\lambda + 1 - T))\, dT =$$
$$= \frac{2}{4+(\lambda-1)^2} + \frac{2}{4+(\lambda+1)^2} = \frac{4(\lambda^2+5)}{\lambda^4+6\lambda^2+25}$$

■

4.3 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$

Преобразование Фурье $\mathfrak{F}_2(\lambda)$ функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$ задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t}\,dt$$

Утверждение.

$$\boxed{\mathfrak{F}_2(\lambda) = i\left(\pi\,\mathrm{sgn}(\lambda) - 2\,\mathrm{arctg}(\lambda)\right)} \tag{4.10}$$

Доказательство: Аналогично (4.9) представим $f_2(t)$ в виде:

$$f_2(t) = g_1(t)\cdot g_2(t) \text{ где } g_1(t) = \left(e^{-|t|}-1\right),\ g_2(t) = \frac{1}{t} \tag{4.11}$$

Пользуясь установленными свойствами 4.1, 4.2, выражениями для преобразований Фурье $g_1(t)$ (4.7), (4.2) и $g_2(t)$ (4.5) и соотношением (4.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned} f_2(t) \to \mathfrak{F}_2(\lambda) &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{1+(\cdot)^2} - \pi\delta(\cdot)\right) * \left(-i\pi\,\mathrm{sgn}(\cdot)\right)\right](\lambda) = \\ &= -i\int\limits_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{1+T^2}\,dT + i\int\limits_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{1+T^2}\,dT + \pi i\,\mathrm{sgn}(\lambda) = \\ &= i\left(\pi\,\mathrm{sgn}(\lambda) - 2\,\mathrm{arctg}(\lambda)\right) \end{aligned}$$

■

Список литературы

[1] И. В. Рублёв. *Лекционный курс Оптимальное Управление (Линейные Системы)*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017

[2] И. В. Рублёв. *Лекционный курс Оптимальное Управление (Нелинейные Системы)*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2018

[3] Точилин П. А. *Лекционный курс Программирование на языке* ***MATLAB***, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017 – 2018

[4] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, — М.: Наука, 1976.

[5] Справочные средства языка `MATLAB`