



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# «Быстрое преобразование Фурье»

*Студент 315 группы*  
В. А. Сливинский

*Руководители практикума*  
к.ф.-м.н., доцент И. В. Рублёв  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2017

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
1.1	Общая формулировка задачи . . . . .	3
1.2	Формальная постановка задачи . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Написание функции plotFT</b>	<b>5</b>
2.1	Разбиение на подзадачи . . . . .	5
2.2	Вычисление аппроксимации преобразования Фурье . . . . .	5
2.3	Подготовка фигуры к выводу графиков . . . . .	6
2.4	Вывод графиков . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Вычисление аналитических преобразований Фурье</b>	<b>7</b>
3.1	Некоторые необходимые обозначения и соотношения . . . . .	7
3.2	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2 t } \cos(t)$ . . . . .	9
3.3	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{- t }-1}{t}$ . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Построение графиков</b>	<b>11</b>
4.1	$f_1(t) = e^{-2 t } \cos(t)$ . . . . .	11
4.2	$f_2(t) = \frac{e^{- t }-1}{t}$ . . . . .	16
4.3	$f_3(t) = \frac{\operatorname{arctg} t^2}{1+t^4}$ . . . . .	20
4.4	$f_4(t) = t^3 e^{-t^4}$ . . . . .	22
<b>A</b>	<b>Код функции plotFT</b>	<b>24</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>26</b>

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Общая формулировка задачи

Дана система функций (всюду далее, если не сказано противное, предполагается, что  $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и функция суммируема и обладает достаточной гладкостью)

$$\begin{cases} f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t) \\ f_2(t) = \frac{e^{-|t|} - 1}{t} \\ f_3(t) = \frac{\operatorname{arctg} t^2}{1 + t^4} \\ f_4(t) = t^3 e^{-t^4} \end{cases} \quad (1.1)$$

Для каждой функции из системы (1.1) требуется:

1. Получить аппроксимацию преобразования Фурье  $F(\lambda)$  для каждой функции  $f(t)$  из заданного набора при помощи быстрого преобразования Фурье (**БПФ** / **FFT**), выбирая различные шаги дискретизации исходной функции и различные окна, ограничивающие область определения  $f(t)$
2. Построить графики  $F(\lambda)$
3. Для функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  из заданного набора вычислить аналитически преобразование Фурье

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt \quad (1.2)$$

и сравнить графики  $\mathfrak{F}(\lambda)$  с графиками  $F(\lambda)$ , полученного из аппроксимации через **БПФ**

## 1.2 Формальная постановка задачи

1. Реализовать на языке MATLAB функцию `plotFT(hFigure, fHandle, fFTHandle, step, inpLimVec, outLimVec)` со следующими параметрами:
  - **hFigure** — указатель на фигуру, в которой требуется отобразить графики
  - **fHandle** — указатель на функцию (**Function Handle**), которую требуется преобразовывать ( $f(t)$ )
  - **fFTHandle** — указатель на функцию (**Function Handle**), моделирующую аналитическое преобразование Фурье (1.2) функции  $f(t)$  (может быть пустым вектором, в таком случае график аналитического преобразования строить не требуется)
  - **step** — положительное число, задающее шаг дискретизации  $\Delta t$

- **inpLimVector** — вектор-строка, задающая окно  $[a, b]$  для функции  $f(t)$ , первый элемент вектора содержит  $a$ , второй  $b$ , причём  $a < b$ , но не обязательно  $a = -b$
- **outLimVector** — вектор-строка, задающая окно  $[c, d]$  для вывода графика преобразования Фурье (пределы осей абсцисс). В случае, если передаётся пустой вектор, следует брать установленные в фигуре пределы или определять свои разумным образом

Данная функция строит графики вещественной и мнимой частей численной аппроксимации преобразования Фурье (1.2) функции  $f(t)$ , заданной в **fHandle** (и, при необходимости, соответствующие графики аналитического преобразования Фурье  $\mathfrak{F}(\lambda)$ )

Кроме того, данная функция, должна возвращать структуру, содержащую следующие параметры:

- **nPoints** — число вычисляемых узлов сеточной функции, рассчитываемое по формуле:

$$\text{nPoints} = \left\lfloor \frac{(b - a)}{\text{step}} \right\rfloor \quad (1.3)$$

- **step** — поправленное значение шага дискретизации  $\Delta t$ , рассчитываемое по формуле:

$$\text{step} = \frac{(b - a)}{\text{nPoints} - 1} \quad (1.4)$$

- **inpLimVec** — окно  $[a, b]$  для функции  $f(t)$
- **outLimVec** — окно  $[c, d]$  для вывода графика преобразования Фурье  $F(\lambda)$

2. Построить, используя написанную функцию **plotFT**, для каждой из функций системы (1.1) графики  $F(\lambda)$  для разных значений входных параметров (окон **inpLimVec**, **outLimVec** и частоты дискретизации **step**).

В частности, для некоторых функций подобрать параметры так, чтобы проиллюстрировать эффекты *наложения спектра, появления ряби и их устранения* (в случае ряби — в точках непрерывности  $F(\lambda)$ )

3. Для функций  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  из системы (1.1) вычислить аналитически их преобразования Фурье  $\mathfrak{F}(\lambda)$  и построить их графики вместе с графиками численной аппроксимации  $F(\lambda)$

## 2 Написание функции plotFT

### 2.1 Разбиение на подзадачи

Написание функции `plotFT` удобно делать по частям, разбив поставленную задачу на следующие подзадачи

1. Вычисление аппроксимации преобразования Фурье
2. Подготовка фигуры к выводу графиков
3. Вывод графиков быстрого и, при необходимости, аналитического преобразований Фурье

Соответственно, будем решать подзадачи в приведённом порядке, приводя необходимые выкладки и теоретические обоснования<sup>1</sup>.

### 2.2 Вычисление аппроксимации преобразования Фурье

1. Найдём число вычисляемых узлов сеточной функции `nPoints`, хранимое в переменной `n` по формуле (1.3):

```
a = inLimVec(1);  
b = inLimVec(2);  
n = floor((b - a) ./ step) + 1;
```

2. Откорректируем значение шага `step` в соответствии с числом точек (формула (1.4)):

```
step = (b - a) ./ (n - 1);
```

3. Вычислим на сетке  $[a, b]$ , состоящей из  $n$  точек значения самой функции  $f(t)$ , тем самым получим дискретизацию  $f_{\text{дискр}}(t)$ , затем воспользуемся функциями MATLAB `fft()` и `fftshift()`, первая из которых вычисляет дискретное преобразование Фурье (ДПФ) функции  $f_{\text{дискр}}(t)$ , однако возвращает вектор значений в зеркальном виде, а вторая — «отзеркаливает» этот вектор, приводя его к нормальному виду<sup>2</sup>. Искомая аппроксимация преобразования Фурье  $F(\lambda)$  вычисляется по следующей формуле (доказательство её справедливости приведено в [1]):

$$F(\lambda) = \text{step} \cdot F_{\text{дискр}}(\lambda) \quad (2.1)$$

Здесь  $F_{\text{дискр}}(\lambda)$  — вектор значений ДПФ функции  $f_{\text{дискр}}(t)$ , полученный путем применения `fftshift(fft(...))` к вектору значений  $f_{\text{дискр}}(t)$  на заданной сетке.

Приведём, в заключение, общую схему работы данного этапа:

$$f(t) \xrightarrow[\text{на сетке}]{\text{дискретизация}} f_{\text{дискр}}(t) \xrightarrow{\text{fftshift(fft())}} F_{\text{дискр}}(\lambda) \xrightarrow{(2.1)} F(\lambda)$$

---

<sup>1</sup>Полный код функции `plotFT` приведён в приложении А (стр. 24)

<sup>2</sup>Здесь и далее все использованные средства языка MATLAB и спецификации взяты из [2] и [3]

4. Преобразование Фурье рассматривается на отрезке  $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ , длины  $2\pi/\Delta t$ , разбитом на `nSteps` точек. Обратившись к [1], установим следующее свойство преобразования Фурье:

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-i\lambda t_0} F(\lambda)$$

Соответственно, для получения желаемого результата, полученный вектор значений **ДПФ** следует домножить на соответствующие значения экспоненты.

### 2.3 Подготовка фигуры к выводу графиков

В поле `UserData` фигуры `fHandle` будем хранить `handle` двух соответствующих осей (`axes`), а также окно вывода по оси абсцисс  $\lambda$ . В случае, если `UserData` у поданной фигуры пуст, сформируем его, построив две оси для вещественной и мнимой частей преобразования Фурье, соответствующим образом выбирая окно вывода: для этого просматриваем вектор значений **ДПФ** и находим левую и правую границы, на которых значение превышает некоторое  $\varepsilon$ , обозначенное в программе как `moe` (англ. *margin of error*). При наличии у фигуры поля `UserData`, но отсутствии в нём осей и/или пределов, дополним недостающие поля аналогичным образом. Наконец, сформированную структуру запишем в поле `UserData` фигуры `fHandle`.

### 2.4 Вывод графиков

Вывод графиков осуществляется стандартными средствами языка MATLAB, при этом, если поле `fFTHandle` не пусто, то выводится и график функции, на которую указывает `fFTHandle`.

### 3 Вычисление аналитических преобразований Фурье

#### 3.1 Некоторые необходимые обозначения и соотношения

Напомним, что преобразование Фурье  $\mathfrak{F}(\lambda)$  функции  $f(t)$  задаётся формулой (1.2):

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

Впредь, будем для краткости писать:

$$\boxed{f(t) \rightarrow \mathfrak{F}(\lambda)}$$

Напомним также следующие свойства преобразования Фурье:

**Свойство 3.1.** Пусть

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t), \text{ и } \begin{cases} f_1(t) \rightarrow \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$f(t) \rightarrow \alpha \cdot \mathfrak{F}_1(\lambda) + \beta \cdot \mathfrak{F}_2(\lambda)$$

**Свойство 3.2.** Пусть

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t), \text{ и } \begin{cases} f_1(t) \rightarrow \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$2\pi f_1(t) \cdot f_2(t) \rightarrow (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda), \text{ где } (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathfrak{F}_1(\lambda - s) \cdot \mathfrak{F}_2(s)] ds$$

Отметим некоторые тривиальные<sup>1</sup> преобразования Фурье:

$$\delta(\lambda) \rightarrow 1 \tag{3.1}$$

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\lambda) \tag{3.2}$$

$$e^{iat} \rightarrow 2\pi\delta(\lambda - a) \tag{3.3}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \rightarrow \pi(\delta(\lambda - 1) + \delta(\lambda + 1)) \tag{3.4}$$

$$\frac{1}{t} \rightarrow -i\pi \operatorname{sgn}(t) \tag{3.5}$$

Где  $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$  — дельта-функция Дирака, а соотношение (3.4) вытекает из свойства 3.1, с учётом (3.3).

---

<sup>1</sup>Вывод этих преобразований, а также доказательства свойств (3.1) и (3.2) можно найти в [1]

Установим также важные отношения для свёртки дельта-функции с произвольной функцией  $\varphi(t)$ :

$$\boxed{(\delta * \varphi)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s - \tau) \cdot \varphi(\tau) d\tau = \varphi(s)} \quad (3.6)$$

Докажем следующее соотношение:

**Лемма 3.1.**

$$e^{-A|t|} \rightarrow \frac{2A}{A^2 + \lambda^2} \quad (3.7)$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A|t|} \cdot e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{(A-i\lambda)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(A+i\lambda)t} dt = \\ &= \left[ e^{(A-i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A-i\lambda} \right]_{t=-\infty}^0 - \left[ e^{-(A+i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A+i\lambda} \right]_{t=0}^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{A-i\lambda} + \frac{1}{A+i\lambda} = \frac{2A}{A^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

■



### 3.2 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$

Преобразование Фурье  $\mathfrak{F}_1(\lambda)$  функции  $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$  задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} \cos(t) e^{-i\lambda t} dt$$

**Утверждение.**

$$\boxed{\mathfrak{F}_1(\lambda) = \frac{4(\lambda^2 + 5)}{\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25}} \quad (3.8)$$

*Доказательство:* Заметим, что  $f_1(t)$  представима в виде:

$$f_1(t) = g_1(t) \cdot g_2(t), \text{ где } g_1(t) = e^{-2|t|}, g_2(t) = \cos(t) \quad (3.9)$$

Пользуясь этим соотношением, выражениями для преобразований Фурье  $g_1(t)$  (3.7) и  $g_2(t)$  (3.4), установленным свойством 3.2 и соотношением (3.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4 + \tau^2} \cdot \pi(\delta(\lambda - \tau - 1) + \delta(\lambda + 1 - \tau)) d\tau = \\ &= \frac{2}{4 + (\lambda - 1)^2} + \frac{2}{4 + (\lambda + 1)^2} = \frac{4(\lambda^2 + 5)}{\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25} \end{aligned}$$

■

### 3.3 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$

Преобразование Фурье  $\mathfrak{F}_2(\lambda)$  функции  $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$  задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t} dt$$

**Утверждение.**

$$\boxed{\mathfrak{F}_2(\lambda) = i(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) - 2 \operatorname{arctg}(\lambda))} \quad (3.10)$$

*Доказательство:* Аналогично (3.9) представим  $f_2(t)$  в виде:

$$f_2(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \text{ где } g_1(t) = (e^{-|t|} - 1), g_2(t) = \frac{1}{t} \quad (3.11)$$

Пользуясь установленными свойствами 3.1, 3.2, выражениями для преобразований Фурье  $g_1(t)$  (3.7), (3.2) и  $g_2(t)$  (3.5) и соотношением (3.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned} f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{1+(\cdot)^2} - \pi \delta(\cdot) \right) * (-i\pi \operatorname{sgn}(\cdot)) \right](\lambda) = \\ &= -i \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau + i \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau + \pi i \operatorname{sgn}(\lambda) = \\ &= i(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) - 2 \operatorname{arctg}(\lambda)) \end{aligned}$$

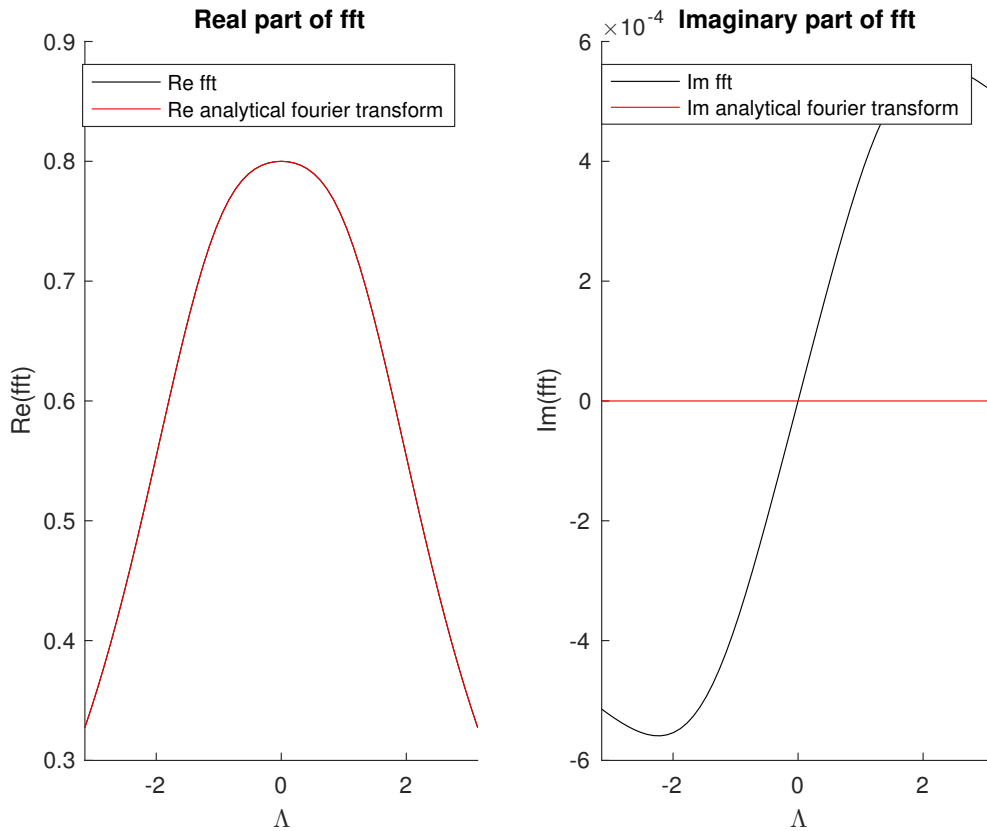
■

## 4 Построение графиков

4.1  $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$

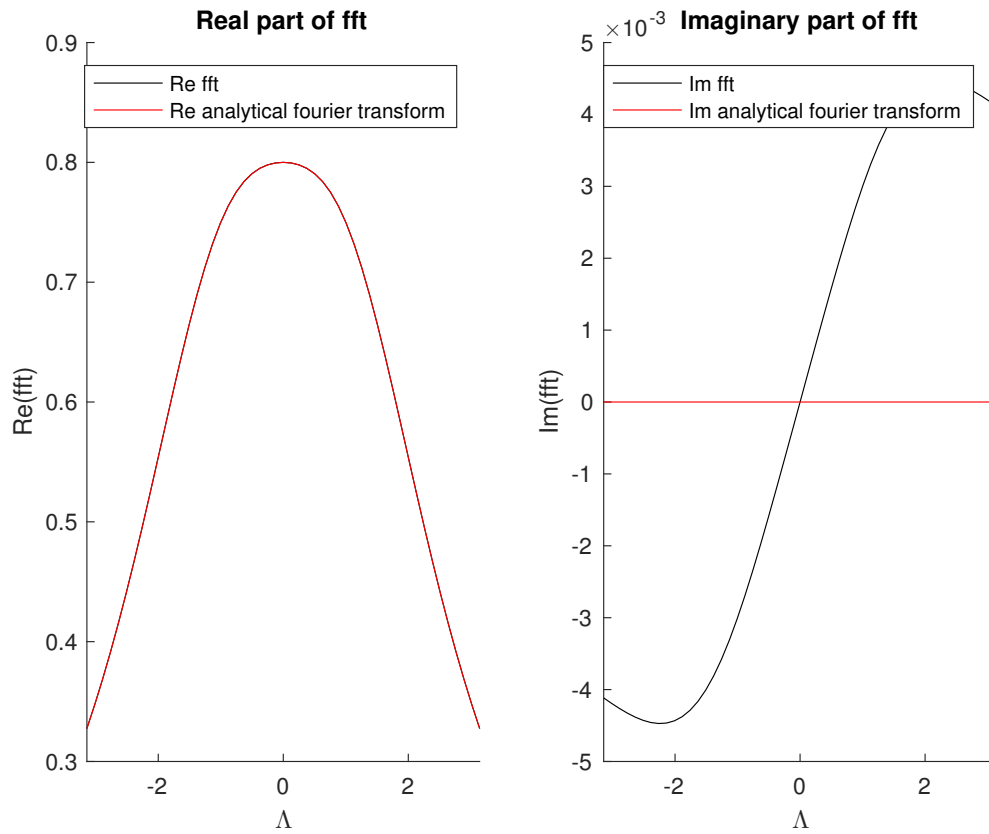
Данная функция непрерывна на всей числовой прямой вместе со своим преобразованием Фурье (3.8). Рассмотрим результат работы `plotFT` для данной функции и различного значения параметров  $\Delta t$  (`step`),  $[a, b]$  (`inpLimVec`) и  $[c, d]$  (`outLimVec`):

1. `step` =  $10^{-3}$ , `inpLimVec` =  $[-30, 30]$ , `outLimVec` =  $[-\pi, \pi]$



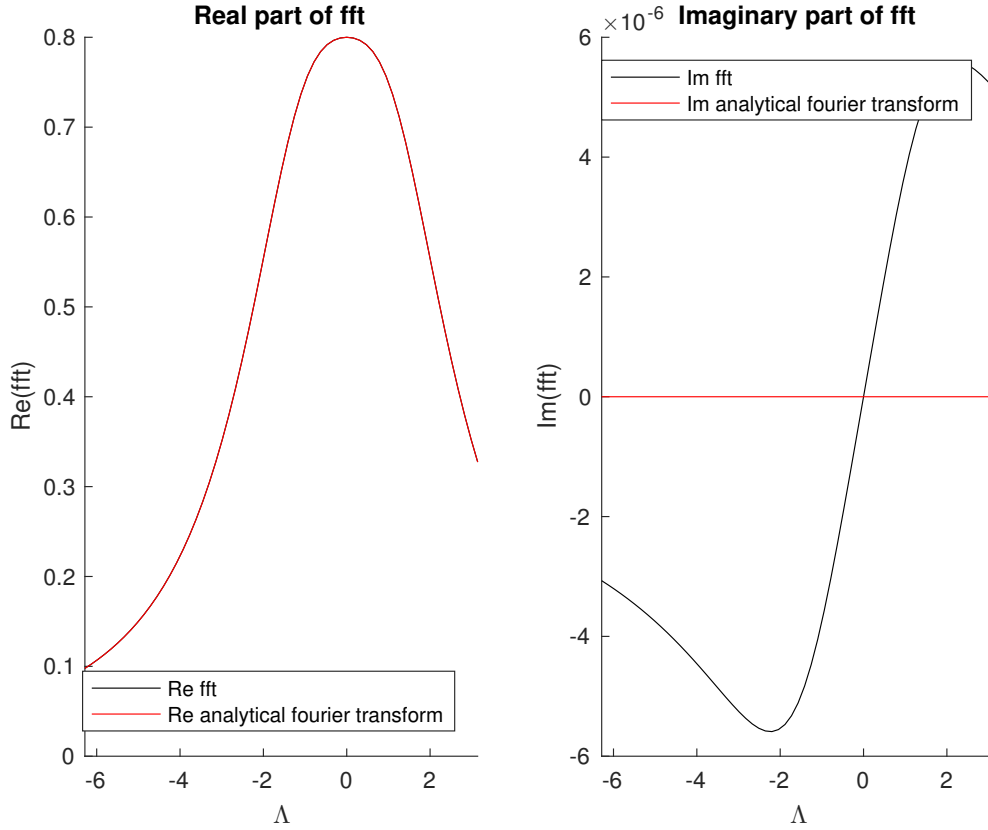
Вещественные части графиков аналитического преобразования и вычисленной аппроксимации практически совпадают, а погрешность во мнимой части сравнима с величиной шага дискретизации `step`.

2. Сразу после построения предыдущего графика, вызовем `plotFT` с тем же параметром `hFigure` и следующим набором параметров:  
`step = 10-2`, `inpLimVec = [-20, 30]`, `outLimVec = []`



Несмотря на несимметричное окно `inpLimVec`, графики вещественных частей по-прежнему совпадают, а мнимых — различаются на величину порядка `step`. Отметим, что, так как был передан пустой вектор `outLimVec`, то пределы по оси абсцисс  $\lambda$  на графиках не изменились.

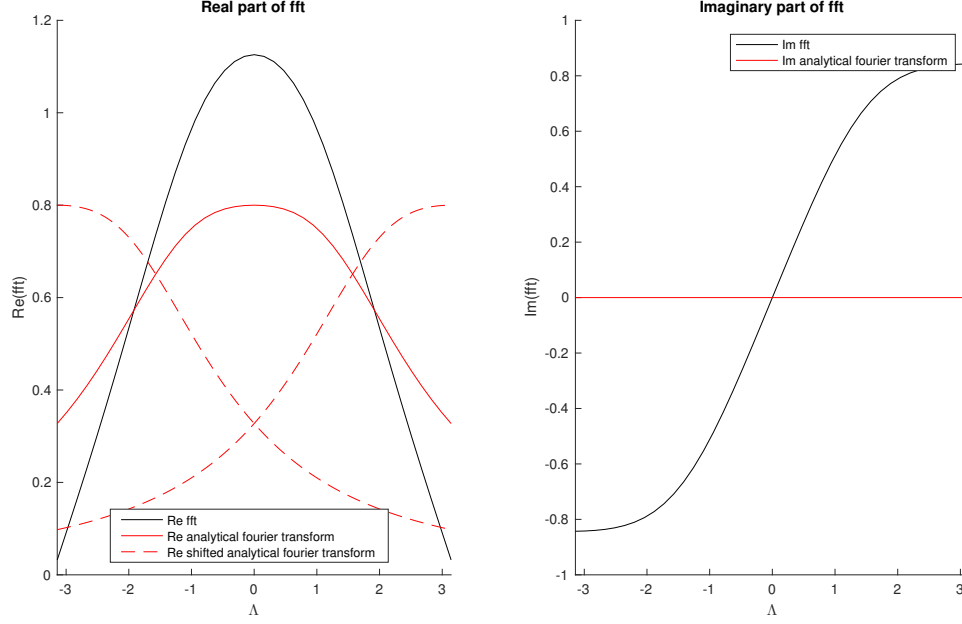
3.  $\text{step} = 10^{-5}$ ,  $\text{inpLimVec} = [-10, 20]$ ,  $\text{outLimVec} = [-2\pi, \pi]$



В данном случае используется несимметричное окно для вывода ( $\text{outLimVec}$ )

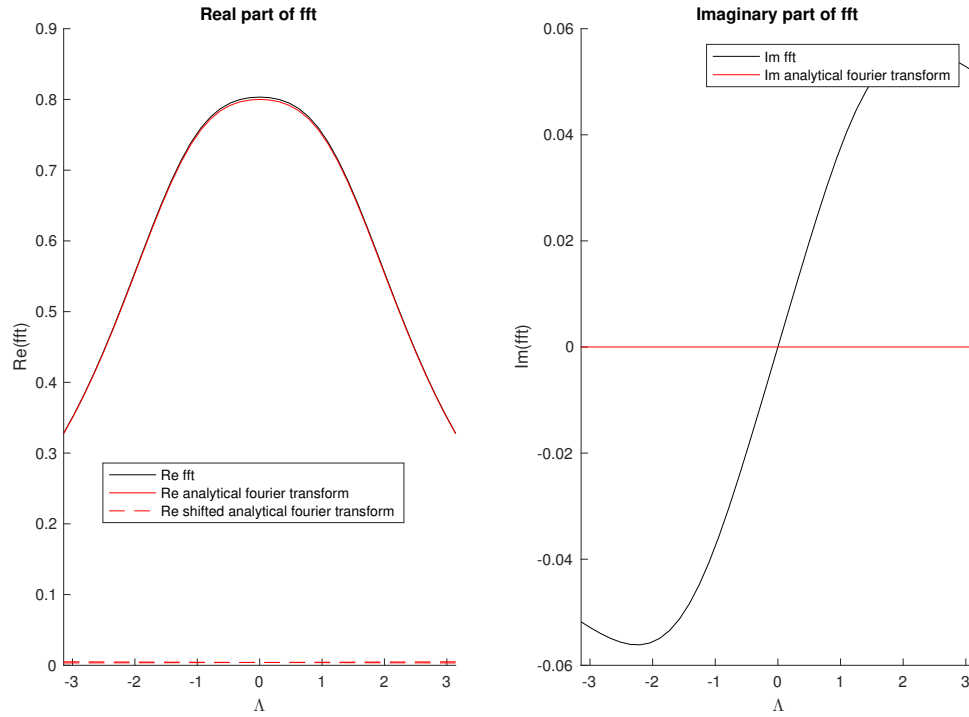
Кроме того, на примере данной функции проиллюстрируем *эффект наложения спектра (aliasing)*: для этого, отобразим на графике не только аналитическое преобразование Фурье, но и его же, сдвинутое влево и вправо на  $\frac{\pi}{\Delta t}$ , где  $\Delta t = \text{step}$  — частота дискретизации. Из [1] известно, что численная аппроксимация  $F(\lambda)$  есть сумма аналитического преобразования и сдвинутых аналитических преобразований  $\forall \lambda \in [-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ .

4. `step = 1`, `inpLimVec = [-20, 20]`, `outLimVec = [- $\pi$ ,  $\pi$ ]`



Для преобразований Фурье  $\mathfrak{F}(\lambda)$  ограниченного спектра (таких, что  $\exists \Lambda : \mathfrak{F}(\lambda) = 0, \forall \lambda: |\lambda| > \Lambda$ ) из [1] известно, что эффект не будет проявляться при  $\Delta t \leq \Delta_t^H$ , где  $\Delta_t^H = \frac{\pi}{\Lambda}$  — так называемая частота Найквиста (Nyquist rate). Однако, в силу того, что спектр полученного аналитически преобразования Фурье (3.8) неограничен (т.е.  $\forall \Lambda \exists \lambda: |\lambda| > \Lambda, \mathfrak{F}_1(\lambda) \neq 0$ ), полное устранение данного эффекта невозможно; но, т.к. аналитическое преобразование достаточно быстро стремится к нулю (со скоростью порядка  $\frac{1}{\lambda^2}$ ), то уменьшением шага дискретизации эффект наложения спектра можно свести к незначительному (см. 5).

5.  $\text{step} = 10^{-1}$ ,  $\text{inpLimVec} = [-20, 20]$ ,  $\text{outLimVec} = [-\pi, \pi]$



Здесь хорошо видно, что, хотя эффект наложения спектра не устранён полностью, он практически незаметен, а сдвинутые части аналитического преобразования почти равны нулю.

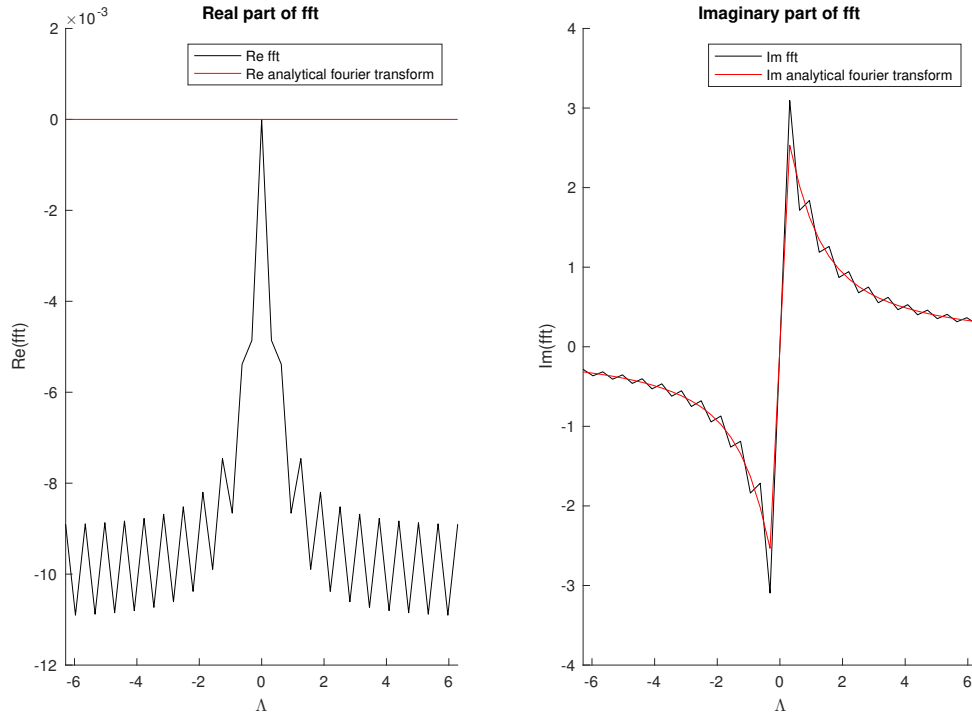
**4.2**  $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$

Данная функция имеет разрыв типа «скачок» в точке 0, равно как и мнимая часть её преобразования Фурье (3.10):

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} f_2(t) \neq \lim_{t \rightarrow 0-0} f_2(t)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \text{Im}(\mathfrak{F}_2(\lambda)) \neq \lim_{\lambda \rightarrow 0-0} \text{Im}(\mathfrak{F}_2(\lambda))$$

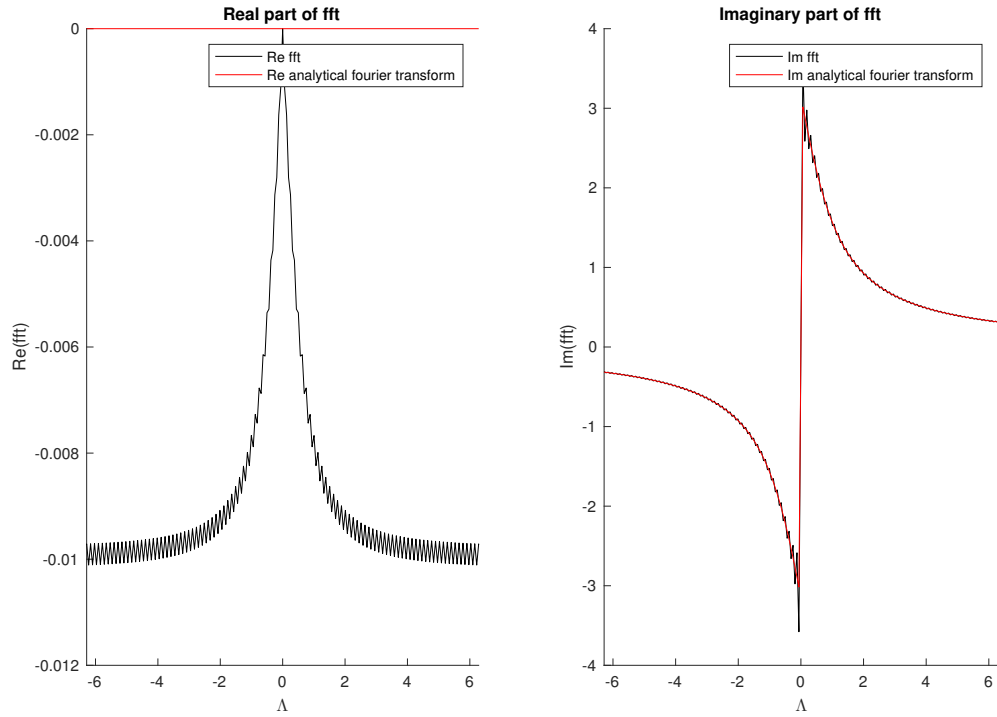
1.  $\text{step} = 10^{-2}$ ,  $\text{inpLimVec} = [-10, 10]$ ,  $\text{outLimVec} = [-2\pi, 2\pi]$



Отклонение вещественной численной аппроксимации от аналитического значения есть величина порядка **step**, а мнимые части графиков практически совпадают во всех точках. Заметим, что в точке 0 разрыва функции  $\mathfrak{F}_2$ , а также в некоторых других точках непрерывности возникла *рябь*. Её появление в точке разрыва первого рода обуславливается свойством преобразования Фурье разрывной функции из [1], а в некоторых точках непрерывности — малым размером окна  $[a, b]$  (**inpLimVec**). Устранить рябь в точке разрыва не представляется возможным, однако можно сгладить её в остальных точках, увеличив окно **inpLimVec**. Отметим в заключение, что график вещественной части напоминает визуально **ГЗ МГУ**.

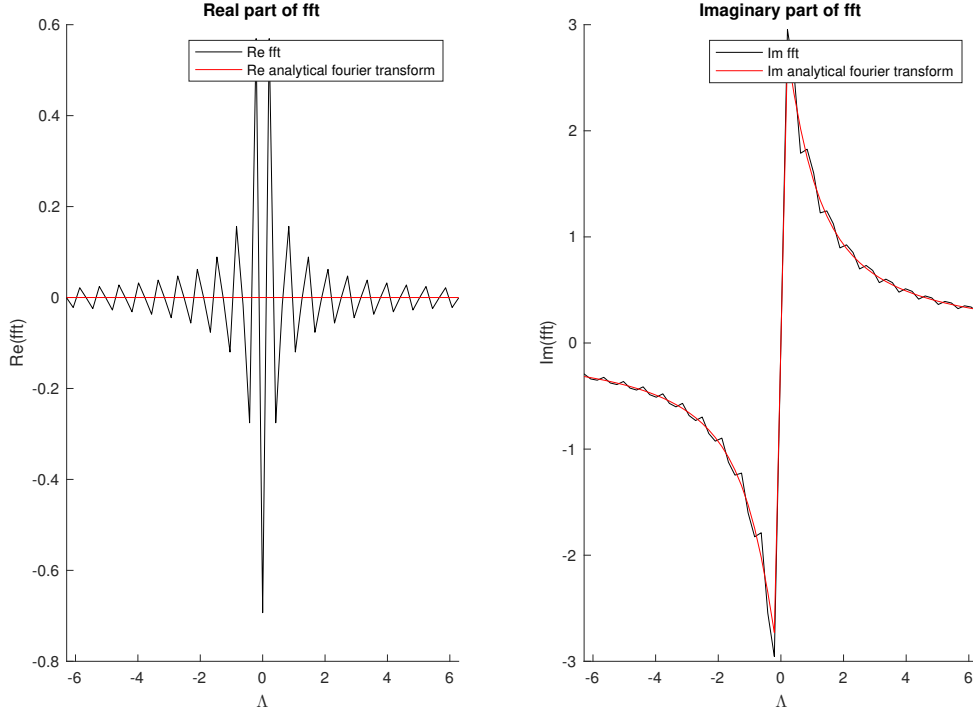


2.  $\text{step} = 10^{-2}$ ,  $\text{inpLimVec} = [-50, 50]$ ,  $\text{outLimVec} = [-2\pi, 2\pi]$



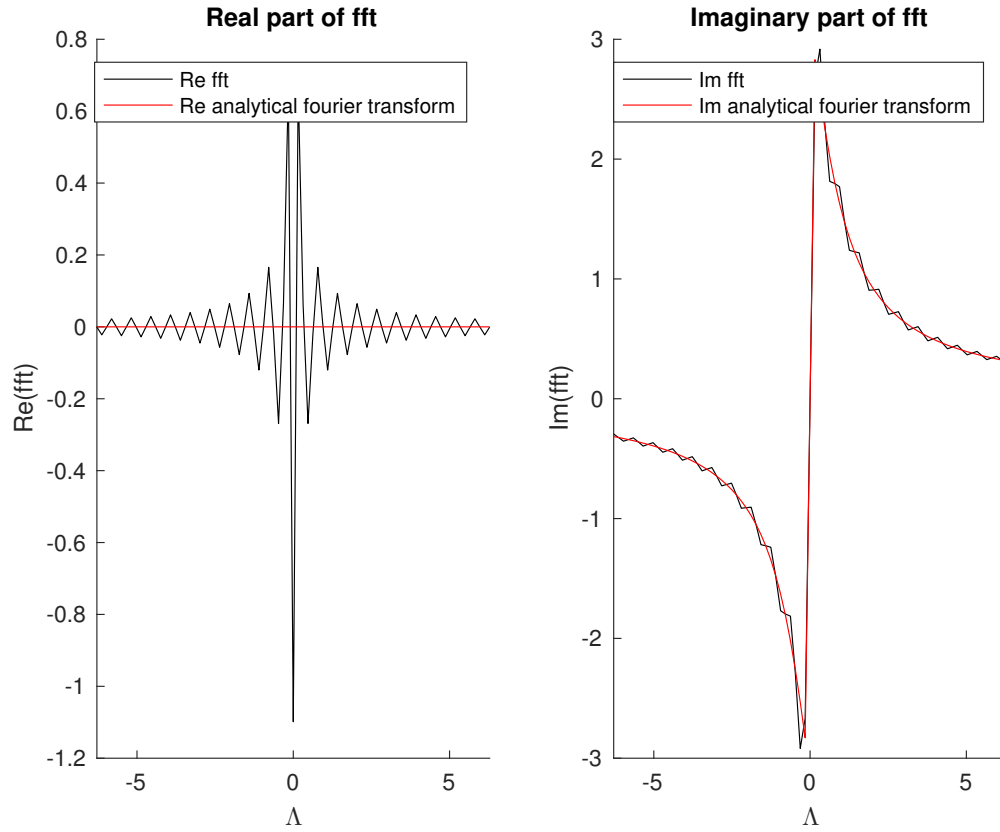
Как можно видеть, размер ряби стал значительно меньше. Как и в предыдущем случае, отклонение вещественной части численной аппроксимации от аналитического значения есть величина порядка **step**.

3.  $\text{step} = 10^{-3}$ ,  $\text{inpLimVec} = [-10, 20]$ ,  $\text{outLimVec} = [-2\pi, 2\pi]$



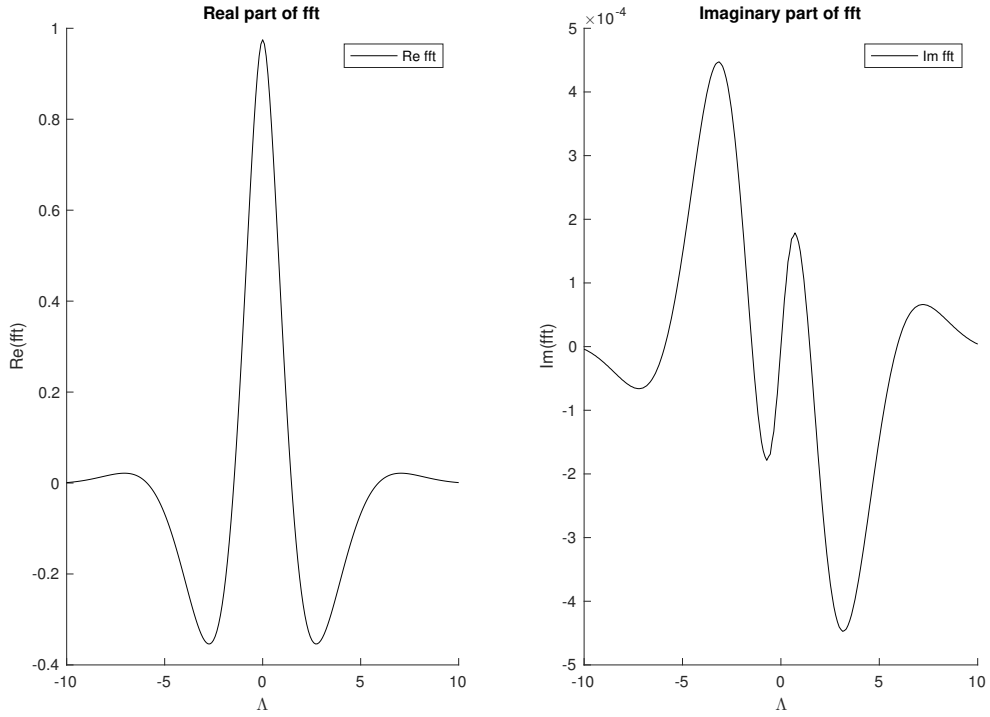
В точке разрыва на графике вещественной части у численной аппроксимации наблюдается шум иного рода, порядка выше **step**; это обуславливается тем, что в данном случае остаются «нескомпенсированные» частоты, вносящие существенную ошибку в численную аппроксимацию. При увеличении размеров несимметричного окна происходит увеличение частоты шума (так как значения рассчитываются в большем числе точек), а при уменьшении «симметричности» окна  $|b| - |a|$  увеличивается верхняя оценка внесенной погрешности (так как остаётся больше высоких «нескомпенсированных» частот).

4.  $\text{step} = 10^{-3}$ ,  $\text{inpLimVec} = [-10, 30]$ ,  $\text{outLimVec} = [-2\pi, 2\pi]$



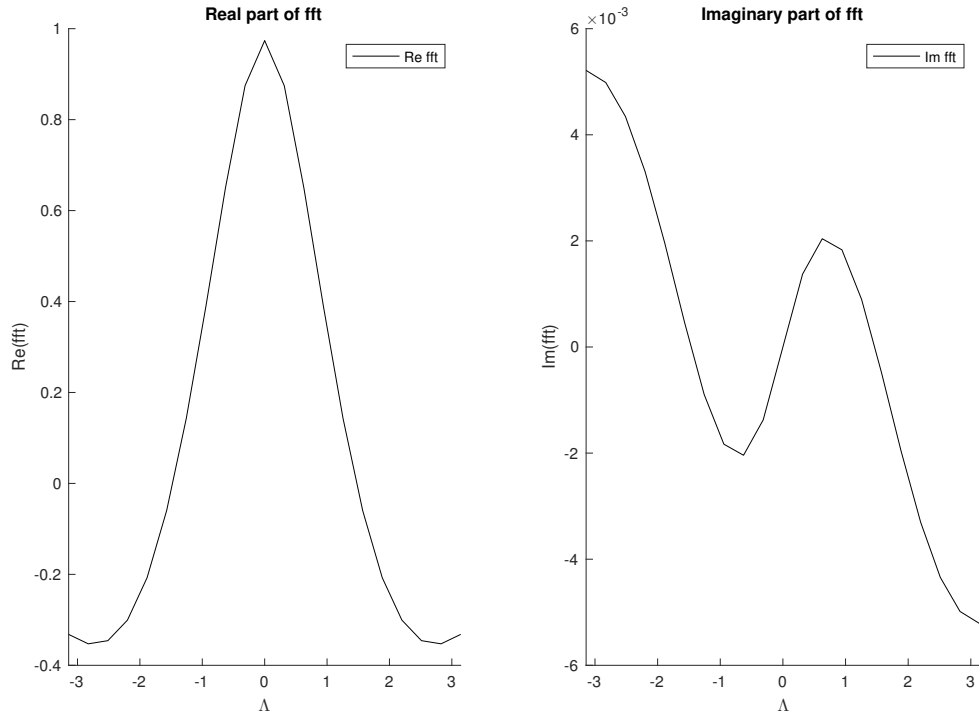
**4.3**  $f_3(t) = \frac{\arctg t^2}{1 + t^4}$

1.  $\text{step} = 10^{-3}$ ,  $\text{inLimVec} = [-30, 40]$ ,  $\text{outLimVec} = [-10, 10]$



Из того, что отклонение мнимой части аппроксимации от нуля есть величина порядка  $\text{step}$  можно заключить, что  $\text{Im}(\mathfrak{F}(\lambda)) = 0, \forall \lambda$ .

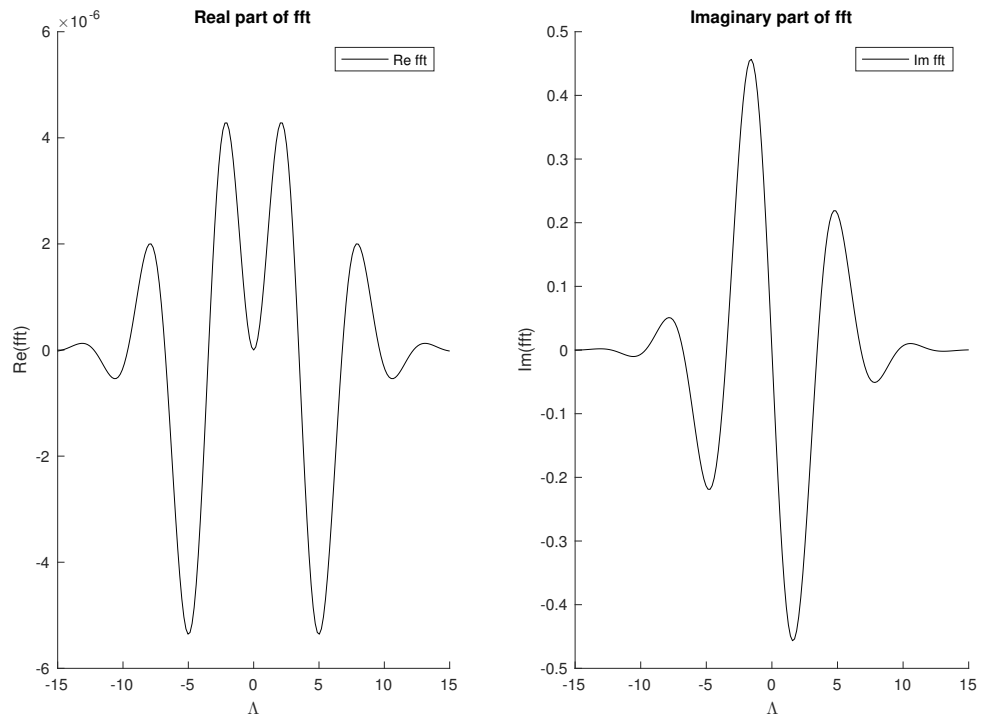
2.  $\text{step} = 10^{-2}$ ,  $\text{inpLimVec} = [-10, 10]$ ,  $\text{outLimVec} = [-\pi, \pi]$



Несмотря на изменение всех параметров, вид графиков существенно не поменялся.

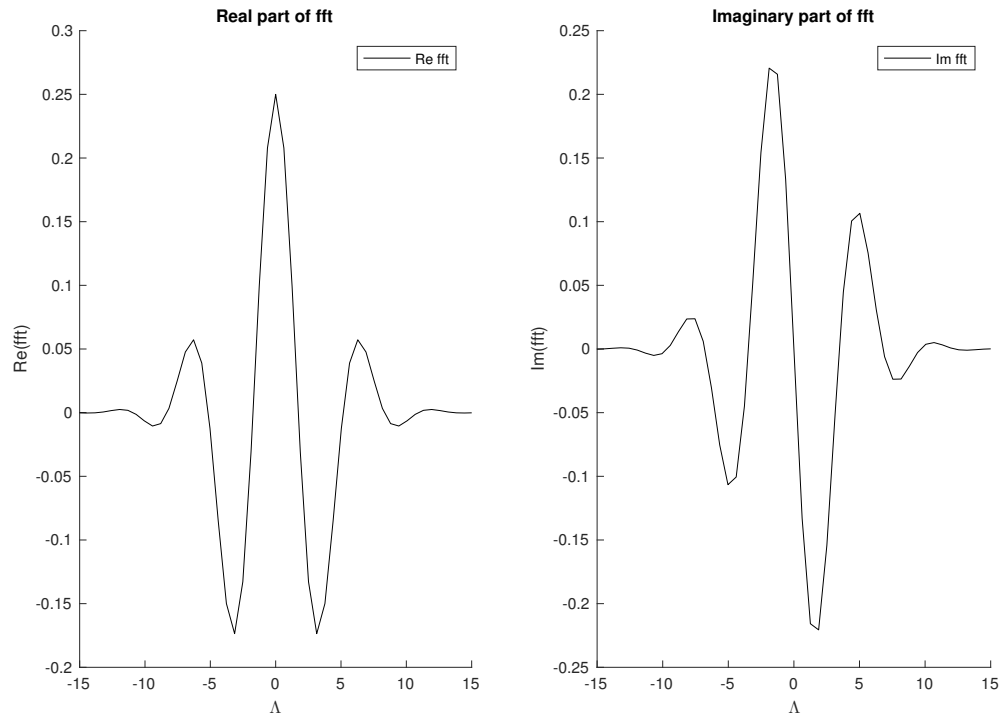
4.4  $f_4(t) = t^3 e^{-t^4}$

1.  $\text{step} = 10^{-5}$ ,  $\text{inLimVec} = [-20, 20]$ ,  $\text{outLimVec} = [-15, 15]$



Аналогично 4.2.?? можно сделать вывод, что  $\text{Re}(\mathfrak{F}(\lambda)) = 0, \forall \lambda$ .

2.  $\text{step} = 10^{-3}$ ,  $\text{inpLimVec} = [0, 10]$ ,  $\text{outLimVec} = [-15, 15]$



Изменение параметров также не влияет на вид графиков

## A Код функции plotFT

```
function [ res ] = plotFT( hFigure, fHandle, fFTHandle, ...
                        step, inpLimVec, outLimVec)
    res = struct('nPoints', [], 'Step', []);
    res.inpLimVec = inpLimVec;

    moe = .001;
    a = inpLimVec(1);
    b = inpLimVec(2);
    n = floor((b - a) ./ step) + 1;
    step = (b - a) ./ (n - 1);
    res.nPoints = n;
    res.Step = step;

    lsp = linspace(inpLimVec(1), inpLimVec(2), n);

    func = fHandle(lsp);

    fourier = step .* fftshift(fft(func));
    lsp = linspace(0, 2 * pi ./ step, n);

    lsp = lsp - lsp(floor(n ./ 2 + 1)); %symmetrical partition
    fourier = fourier .* exp(-1i.*lsp.*a) ; %shifting the fourier transform

    SPlotInfo = get(hFigure, 'UserData');

    if isempty(SPlotInfo)
        if isempty(outLimVec)
            limits = [0 0];
            for i = 1:n
                if abs(fourier(i)) > moe
                    if limits(1) == 0
                        limits(1) = i;
                    end
                    limits(2) = i;
                end
            end
            outLimVec = [lsp(limits(1)), lsp(limits(2))];
            res.outLimVec = outLimVec;
        end

        clf(hFigure); %clear figure window

        axRe = subplot(1, 2, 1);
        set(axRe, 'XLim', outLimVec);
        axRe.Title.String = 'Real part of fft';
```



```

    axRe.XLabel.String = '\Lambda';
    axRe.YLabel.String = 'Re(fft)';

    axIm = subplot(1, 2, 2);
    set(axIm, 'XLim', outLimVec);
    axIm.Title.String = 'Imaginary part of fft';
    axIm.XLabel.String = '\Lambda';
    axIm.YLabel.String = 'Im(fft)';

    SPlotInfo = struct('axRe', axRe, 'axIm', axIm);
end

if isempty(outLimVec)
    outLimVec = get(SPlotInfo.axRe, 'xLim');
else
    set(SPlotInfo.axRe, 'XLim', outLimVec);
    set(SPlotInfo.axIm, 'XLim', outLimVec);
end
set(hFigure, 'UserData', SPlotInfo);

% drawing graphs
hFigure.CurrentAxes = SPlotInfo.axRe;
hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'replacechildren';
plot(lsp, real(fourier), 'Color', [0 0 0]);
legend('Re fft');

if ~isempty(fFTHandle)
    hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'add';
    plot(lsp, real(fFTHandle(lsp)), 'r');
    legend('Re fft', 'Re analytical fourier transform');
end

hFigure.CurrentAxes = SPlotInfo.axIm;
hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'replacechildren';
plot(lsp, imag(fourier), 'Color', [0 0 0]);
legend('Im fft');

if ~isempty(fFTHandle)
    hFigure.CurrentAxes.NextPlot = 'add';
    plot(lsp, imag(fFTHandle(lsp)), 'r');
    legend('Im fft', 'Im analytical fourier transform');
end
end
end

```

## Список литературы

- [1] И. В. Рублёв. *Лекционный курс Преобразования Лапласа-Фурье*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017
- [2] И. В. Рублёв, П. А. Точилин. *Лекционный курс Программирование на языке MATLAB*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017
- [3] Справочные средства языка MATLAB