



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

# «Динамические системы и модели биологии»

*Студенты 315 группы*

В. А. Кузнецов

В. А. Сливинский

*Научный руководитель*

д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2018

## Содержание

<b>1</b>	<b>Динамические системы с дискретным временем</b>	<b>3</b>
1.1	Постановка задачи . . . . .	3
1.2	Биологическая интерпретация задачи . . . . .	3
1.3	Некоторые разумные ограничения на параметры системы . . . . .	3
1.4	Поиск неподвижных точек . . . . .	4
	<b>Список литературы</b>	<b>5</b>

# 1 Динамические системы с дискретным временем

## 1.1 Постановка задачи

Дана следующая многомерная динамическая система с дискретным временем:

$$\begin{cases} u_{t+1} = au_t(1 - u_t) - u_tv_t \\ v_{t+1} = \frac{1}{b}u_tv_t \end{cases} \quad u, v, a, b > 0 \quad (1.1)$$

Для системы (1.1) требуется:

1. Найти неподвижные точки
2. Исследовать неподвижные точки на устойчивость
3. Построить бифуркационную диаграмму
4. Проверить существование циклов длины 2 и 3
5. Проверить существование бифуркации Неймарка–Сакера и в случае её обнаружения построить инвариантную кривую

## 1.2 Биологическая интерпретация задачи

Система (1.1) представляет собой модель «Хищник–Жертва»; в ней  $u_t$  это относительная численность жертв в момент времени  $t$  (отношение числа жертв к максимально возможной, определяемой потенциальной ёмкостью экосистемы),  $v_t$  — относительная численность хищников, параметр  $a$  определяет скорость роста популяции жертв в отсутствие хищника (рождаемость или условный «естественный прирост»), а параметр  $b$  обратно пропорционален выгоде хищников. Численность жертв в отсутствие хищников описывается дискретным логистическим уравнением  $u_{t+1} = au_t(1 - u_t)$ , влияние хищников описывается билинейной функцией  $u_tv_t$ , а в отсутствие пищи хищники вымирают за одно поколение (одну единицу времени).

## 1.3 Некоторые разумные ограничения на параметры системы

В главе 3 [1] при исследовании дискретного логистического уравнения была получена следующая оценка для параметра  $a$ :

$$0 < a < 4 \quad (1.2)$$

Помимо этого, исходя из условий неотрицательности траекторий, из первого уравнения системы (1.1) выводятся следующие ограничения:

$$0 < u_t < 1 \quad (1.3)$$

$$0 < v_t < \frac{au_t(1 - u_t)}{u_t} \quad (1.4)$$

## 1.4 Поиск неподвижных точек

Для начала, введём понятие неподвижной точки для многомерной дискретной динамической системы:

**Определение 1.1.** Пусть дана дискретная динамическая система, определяемая отображением  $f$ :

$$u \mapsto f(u) = f(u, r) \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

Тогда, точка  $u^*$  называется *неподвижной точкой* системы (1.5), если:

$$u^* = f(u^*)$$

*Замечание.* В системе (1.5) вектор  $r$  — вектор параметров системы

Для системы (1.1)  $n = m = 2$ ,  $u = (u, v)$ ,  $f = (f_1, f_2)$ , где

$$\begin{aligned} f_1(u) &= au_t(1 - u_t) - u_tv_t \\ f_2(u) &= \frac{1}{b}u_tv_t \end{aligned}$$

Для нахождения неподвижных точек системы (1.5) достаточно разрешить по  $(u_t, v_t)$  следующую систему:

$$\begin{cases} u_t = au_t(1 - u_t) - u_tv_t \\ v_t = \frac{1}{b}u_tv_t \end{cases} \quad (1.6)$$

Приступим к решению системы (1.6):

$$\begin{cases} u_t = au_t(1 - u_t) - u_tv_t \\ v_t = \frac{1}{b}u_tv_t \end{cases} \iff \begin{cases} u_t(-au_t + (a - v_t - 1)) = 0 \\ v_t(\frac{u_t}{b} - 1) = 0 \end{cases}$$

Второе уравнение системы обращается в ноль при  $v_t = 0$  и  $u_t = b$ . Исследуем первое уравнение системы для этих значений:

## Список литературы

- [1] Братусь А. С. Динамические системы и модели биологии / Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010