Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Курсовая работа

«Динамические системы и модели биологии»

Студенты 315 группы
В. А. Кузнецов
В. А. Сливинский

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор А. С. Братусь

Москва, 2018

Содержание

1 Динамические системы с дискретным временем

1.1 Постановка задачи

Дана следующая многомерная динамическая система с дискретным временем:

$$\begin{cases} u_{t+1} = au_t(1-u_t) - u_t v_t \\ v_{t+1} = \frac{1}{b} u_t v_t \end{cases} \qquad u, v, a, b > 0 \tag{1.1}$$

Для системы (1.1) требуется:

1. Найти неподвижные точки
2. Исследовать неподвижные точки на устойчивость
3. Построить бифуркационную диаграмму
4. Проверить существование циклов длины 2 и 3
5. Проверить существование бифуркации Неймарка–Сакера и в случае её обнаружение построить инвариантную кривую

1.2 Биологическая интерпретация задачи

Система (1.1) представляет собой модель «Хищник–Жертва»; в ней u_t это относительная численность жертв в момент времени t (отношение числа жертв к максимально возможной, определяемой потенциальной ёмкостью экосистемы), v_t — относительная численность хищников, параметр a определяет скорость роста популяции жертв в отсутствии хищника (рождаемость или условный «естественный прирост»), а параметр b обратно пропорционален выгоде хищников. Численность жертв в отсутствии хищников описывается дискретным логистическим уравнением $u_{t+1} = au_t(1-u_t)$, влияние хищников описывается билинейной функцией $u_t v_t$, а в отсутствии пищи хищники вымирают за одно поколение (одну единицу времени).

1.3 Некоторые разумные ограничения на параметры системы

В главе 3 [1] при исследовании дискретного логистического уравнения была получена следующая оценка для параметра a:

$$0 < a < 4 \tag{1.2}$$

Помимо этого, исходя из условий неотрицательности траекторий, из первого уравнения системы (1.1) выводятся следующие ограничения:

$$0 < u_t < 1 \tag{1.3}$$

$$0 < v_t < \frac{au_t(1-u_t)}{u_t} \tag{1.4}$$

1.4 Поиск неподвижных точек

Для начала, введём понятие неподвижной точки для многомерной дискретной динамической системы:

Определение 1.1. Пусть дана дискретная динамическая система, определяемая отображением f:

$$u \mapsto f(u) = f(u, r) \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad r \in \mathbb{R}^m, \quad n, m \in \mathbb{N} \tag{1.5}$$

Тогда, точка u^* называется *неподвижной точкой* системы (1.5), если:

$$u^* = f(u^*)$$

Замечание. В системе (1.5) вектор r — вектор параметров системы

Для системы (1.1) $n = m = 2, u = (u, v), f = (f_1, f_2)$, где

$$\begin{aligned} f_1(u) &= au_t(1 - u_t) - u_t v_t \\ f_2(u) &= \frac{1}{b} u_t v_t \end{aligned}$$

Для нахождения неподвижных точек системы (1.5) достаточно разрешить по (u_t, v_t) следующую систему:

$$\begin{cases} u_t = au_t(1 - u_t) - u_t v_t \\ v_t = \dfrac{1}{b} u_t v_t \end{cases} \tag{1.6}$$

Приступим к решению системы (1.6):

$$\begin{cases} u_t = au_t(1 - u_t) - u_t v_t \\ v_t = \dfrac{1}{b} u_t v_t \end{cases} \iff \begin{cases} u_t(-au_t + (a - v_t - 1)) = 0 \\ v_t(\dfrac{u_t}{b} - 1) = 0 \end{cases}$$

У второго

Список литературы

[1] Братусь А. С. Динамические системы и модели биологии / Братусь А. С., Новожилов А. С., Платонов А. П. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010