



Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики  
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

# «Линейная Задача Быстродействия»

*Студент 315 группы*  
В. А. Сливинский

*Руководитель практикума*  
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>3</b>
1.1	Общая формулировка задачи . . . . .	3
1.2	Формальная постановка задачи . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Некоторые необходимые теоретические выкладки</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Написание функции plotFT</b>	<b>5</b>
3.1	Разбиение на подзадачи . . . . .	5
3.2	Вычисление аппроксимации преобразования Фурье . . . . .	5
3.3	Подготовка фигуры к выводу графиков . . . . .	7
3.4	Вывод графиков . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Вычисление аналитических преобразований Фурье</b>	<b>8</b>
4.1	Некоторые необходимые обозначения и соотношения . . . . .	8
4.2	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2 t } \cos(t)$ . . . . .	10
4.3	Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{- t }-1}{t}$ . . . . .	11
	<b>Список литературы</b>	<b>12</b>

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Общая формулировка задачи

Задана линейная система ОДУ:

$$\dot{x} = Ax + u + f, \quad t \in [t_0, +\infty) \quad (1.1)$$

Здесь,  $x, f \in \mathbb{R}^2$ ,  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ . Кроме того, на управление  $u$  наложено дополнительное ограничение  $u \in \mathcal{P}$ . Пусть  $\mathcal{X}_0$  — начальное множество значений фазового вектора,  $\mathcal{X}_1$  — целевое множество значений фазового вектора. Для заданных множеств  $\mathcal{X}_0$ ,  $\mathcal{X}_1$ ,  $\mathcal{P}$  необходимо решить задачу быстродействия, т.е. найти минимальное время  $T > 0$ , за которое траектория системы, выпущенная в момент времени  $t_0$  из некоторой точки множества  $\mathcal{X}_0$ , может попасть в некоторую точку множества  $\mathcal{X}_1$ .

$$\mathcal{P} = p + \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 9x_1^2 + 4x_2^2 \leq r\}, \quad p \in \mathbb{R}^2; \quad (1.2)$$

$$\mathcal{X}_0 = \{x_0\}; \quad (1.3)$$

$$\mathcal{X}_1 = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a(x_1 - x_{11})^2 + b|x_2 - x_{12}| \leq c\}, \quad a, b, c > 0. \quad (1.4)$$

Требуется:

1. Написать в среде Matlab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным значениям параметров  $A, f, t_0, r, p, x_0, a, b, c, x_{11}, x_{12}$  определяет, разрешима ли задача (1.1). Если задача разрешима, программа должна (приблизённо) найти значение  $T$  и построить графики компонент оптимального управления, оптимальной траектории, сопряжённых переменных. Кроме того, программа должна допускать возможность улучшения решения, как локальным, так и глобальным методами.
2. Для различных значений параметров (в том числе, для различных собственных значений матрицы  $A$ ) провести анализ системы (1.1), численно решить задачу и построить соответствующие графики.

## 1.2 Формальная постановка задачи

1. Провести необходимые исследования системы (1.1) и привести сопутствующие теоретические выкладки;
2. Реализовать на языке MATLAB программу, удовлетворяющую условиям из 1.1. Для этого, реализовать:
  - Пользовательский интерфейс ввода исходных данных;
  - Алгоритм проверки разрешимости системы (1.1) при введённых значениях параметров;
  - Алгоритм поиска управлений и траекторий, подозрительных на оптимальные, а также алгоритм отбора из них оптимальных;
  - Алгоритм и интерфейс построения требуемых графиков;
  - Алгоритм локального и глобального улучшения решения;
  - Алгоритм сохранения и загрузки промежуточных данных, значений параметров и полученных ответов.
3. Построить, используя написанную программу, графики для различных значений параметров и проанализировать полученные решения.

## 2 Некоторые необходимые теоретические выкладки

Прежде всего, установим принцип максимума Понтрягина в следующей формулировке:<sup>1</sup>

**Принцип Максимума Понтрягина** (В формулировке из [1])

Пусть  $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$  — оптимальная пара. Тогда  $\exists \psi(t) \in C^1[t_0, t_1]$ ,  $t \in [t_0, t_1]$ :

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \quad (2.1)$$

$$\langle Bu^*(t), \psi(t) \rangle = \rho(\psi(t)|BP) \quad (2.2)$$

$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0)|\mathcal{X}_0) \quad (2.3)$$

$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1)|\mathcal{X}_1) \quad (2.4)$$

## 3 Написание функции plotFT

### 3.1 Разбиение на подзадачи

Написание функции `plotFT` удобно делать по частям, разбив поставленную задачу на следующие подзадачи

1. Вычисление аппроксимации преобразования Фурье
2. Подготовка фигуры к выводу графиков
3. Вывод графиков быстрого и, при необходимости, аналитического преобразований Фурье

Соответственно, будем решать подзадачи в приведённом порядке, приводя необходимые выкладки и теоретические обоснования<sup>2</sup>.

### 3.2 Вычисление аппроксимации преобразования Фурье

1. Найдём число вычисляемых узлов сеточной функции `nPoints`, хранимое в переменной `n` по формуле (??):

```
a = inLimVec(1);  
b = inLimVec(2);  
n = floor((b - a) ./ step) + 1;
```

2. Откорректируем значение шага `step` в соответствии с числом точек (формула (??)):

```
step = (b - a) ./ (n - 1);
```

---

<sup>1</sup>Доказательство приведено, например, в [2]

<sup>2</sup>Полный код функции `plotFT` приведён в приложении ?? (стр. ??)

3. Вычислим на сетке  $[a, b]$ , состоящей из  $n$  точек значения самой функции  $f(t)$ , тем самым получим дискретизацию  $f_{\text{дискр}}(t)$ , затем воспользуемся функциями MATLAB `fft()` и `fftshift()`, первая из которых вычисляет дискретное преобразование Фурье (ДПФ) функции  $f_{\text{дискр}}(t)$ , однако возвращает вектор значений в зеркальном виде, а вторая — «отзеркаливает» этот вектор, приводя его к нормальному виду<sup>1</sup>. Искомая аппроксимация преобразования Фурье  $F(\lambda)$  вычисляется по следующей формуле (доказательство её справедливости приведено в [?]):

$$F(\lambda) = \text{step} \cdot F_{\text{дискр}}(\lambda) \quad (3.1)$$

Здесь  $F_{\text{дискр}}(\lambda)$  — вектор значений ДПФ функции  $f_{\text{дискр}}(t)$ , полученный путем применения `fftshift(fft(...))` к вектору значений  $f_{\text{дискр}}(t)$  на заданной сетке. Приведём, в заключение, общую схему работы данного этапа:

$$f(t) \xrightarrow[\text{на сетке}]{\text{дискретизация}} f_{\text{дискр}}(t) \xrightarrow{\text{fftshift(fft())}} F_{\text{дискр}}(\lambda) \xrightarrow{(3.1)} F(\lambda)$$

---

<sup>1</sup>Здесь и далее все использованные средства языка MATLAB и спецификации взяты из [1] и [3]

4. Преобразование Фурье рассматривается на отрезке  $[-\frac{\pi}{\Delta t}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ , длины  $2\pi/\Delta t$ , разбитом на `nSteps` точек. Обратившись к [?], установим следующее свойство преобразования Фурье:

$$f(t - t_0) \rightarrow e^{-i\lambda t_0} F(\lambda)$$

Соответственно, для получения желаемого результата, полученный вектор значений **ДПФ** следует домножить на соответствующие значения экспоненты.

### 3.3 Подготовка фигуры к выводу графиков

В поле `UserData` фигуры `fHandle` будем хранить `handle` двух соответствующих осей (`axes`), а также окно вывода по оси абсцисс  $\lambda$ . В случае, если `UserData` у поданной фигуры пусто, сформируем его, построив две оси для вещественной и мнимой частей преобразования Фурье, соответствующим образом выбирая окно вывода: для этого просматриваем вектор значений **ДПФ** и находим левую и правую границы, на которых значение превышает некоторое  $\varepsilon$ , обозначенное в программе как `moe` (англ. *margin of error*). При наличии у фигуры поля `UserData`, но отсутствии в нём осей и/или пределов, дополним недостающие поля аналогичным образом. Наконец, сформированную структуру запишем в поле `UserData` фигуры `fHandle`.

### 3.4 Вывод графиков

Вывод графиков осуществляется стандартными средствами языка MATLAB, при этом, если поле `fFTHandle` не пусто, то выводится и график функции, на которую указывает `fFTHandle`.

## 4 Вычисление аналитических преобразований Фурье

### 4.1 Некоторые необходимые обозначения и соотношения

Напомним, что преобразование Фурье  $\mathfrak{F}(\lambda)$  функции  $f(t)$  задаётся формулой (??):

$$\mathfrak{F}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

Впредь, будем для краткости писать:

$$\boxed{f(t) \rightarrow \mathfrak{F}(\lambda)}$$

Напомним также следующие свойства преобразования Фурье:

**Свойство 4.1.** Пусть

$$f(t) = \alpha \cdot f_1(t) + \beta \cdot f_2(t), \text{ и } \begin{cases} f_1(t) \rightarrow \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$f(t) \rightarrow \alpha \cdot \mathfrak{F}_1(\lambda) + \beta \cdot \mathfrak{F}_2(\lambda)$$

**Свойство 4.2.** Пусть

$$f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t), \text{ и } \begin{cases} f_1(t) \rightarrow \mathfrak{F}_1(\lambda) \\ f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) \end{cases}$$

Тогда:

$$2\pi f_1(t) \cdot f_2(t) \rightarrow (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda), \text{ где } (\mathfrak{F}_1 * \mathfrak{F}_2)(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\mathfrak{F}_1(\lambda - s) \cdot \mathfrak{F}_2(s)] ds$$

Отметим некоторые тривиальные<sup>1</sup> преобразования Фурье:

$$\delta(\lambda) \rightarrow 1 \tag{4.1}$$

$$1 \rightarrow 2\pi\delta(\lambda) \tag{4.2}$$

$$e^{iat} \rightarrow 2\pi\delta(\lambda - a) \tag{4.3}$$

$$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \rightarrow \pi(\delta(\lambda - 1) + \delta(\lambda + 1)) \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{t} \rightarrow -i\pi \operatorname{sgn}(t) \tag{4.5}$$

Где  $\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$  — дельта-функция Дирака, а соотношение (4.4) вытекает из свойства 4.1, с учётом (4.3).

---

<sup>1</sup>Вывод этих преобразований, а также доказательства свойств (4.1) и (4.2) можно найти в [?]



Установим также важные отношения для свёртки дельта-функции с произвольной функцией  $\varphi(t)$ :

$$\boxed{(\delta * \varphi)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(s - \tau) \cdot \varphi(\tau) d\tau = \varphi(s)} \quad (4.6)$$

Докажем следующее соотношение:

**Лемма 4.1.**

$$e^{-A|t|} \rightarrow \frac{2A}{A^2 + \lambda^2} \quad (4.7)$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-A|t|} \cdot e^{-i\lambda t} dt &= \int_{-\infty}^0 e^{(A-i\lambda)t} dt + \int_0^{+\infty} e^{-(A+i\lambda)t} dt = \\ &= \left[ e^{(A-i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A-i\lambda} \right]_{t=-\infty}^0 - \left[ e^{-(A+i\lambda)t} \cdot \frac{1}{A+i\lambda} \right]_{t=0}^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{A-i\lambda} + \frac{1}{A+i\lambda} = \frac{2A}{A^2 + \lambda^2} \end{aligned}$$

■

## 4.2 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$

Преобразование Фурье  $\mathfrak{F}_1(\lambda)$  функции  $f_1(t) = e^{-2|t|} \cos(t)$  задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_1(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2|t|} \cos(t) e^{-i\lambda t} dt$$

**Утверждение.**

$$\boxed{\mathfrak{F}_1(\lambda) = \frac{4(\lambda^2 + 5)}{\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25}} \quad (4.8)$$

*Доказательство:* Заметим, что  $f_1(t)$  представима в виде:

$$f_1(t) = g_1(t) \cdot g_2(t), \text{ где } g_1(t) = e^{-2|t|}, g_2(t) = \cos(t) \quad (4.9)$$

Пользуясь этим соотношением, выражениями для преобразований Фурье  $g_1(t)$  (4.7) и  $g_2(t)$  (4.4), установленным свойством 4.2 и соотношением (4.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_1(\lambda) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{4 + \tau^2} \cdot \pi(\delta(\lambda - \tau - 1) + \delta(\lambda + 1 - \tau)) d\tau = \\ &= \frac{2}{4 + (\lambda - 1)^2} + \frac{2}{4 + (\lambda + 1)^2} = \frac{4(\lambda^2 + 5)}{\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25} \end{aligned}$$

■

### 4.3 Вычисление аналитического преобразования Фурье функции $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$

Преобразование Фурье  $\mathfrak{F}_2(\lambda)$  функции  $f_2(t) = \frac{e^{-|t|}-1}{t}$  задаётся формулой:

$$\mathfrak{F}_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t} dt$$

**Утверждение.**

$$\boxed{\mathfrak{F}_2(\lambda) = i(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) - 2 \operatorname{arctg}(\lambda))} \quad (4.10)$$

*Доказательство:* Аналогично (4.9) представим  $f_2(t)$  в виде:

$$f_2(t) = g_1(t) \cdot g_2(t) \text{ где } g_1(t) = (e^{-|t|} - 1), g_2(t) = \frac{1}{t} \quad (4.11)$$

Пользуясь установленными свойствами 4.1, 4.2, выражениями для преобразований Фурье  $g_1(t)$  (4.7), (4.2) и  $g_2(t)$  (4.5) и соотношением (4.6) для свёртки с дельта-функцией, получим:

$$\begin{aligned} f_2(t) \rightarrow \mathfrak{F}_2(\lambda) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|t|}-1}{t} e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\pi} \left[ \left( \frac{1}{1+(\cdot)^2} - \pi \delta(\cdot) \right) * (-i\pi \operatorname{sgn}(\cdot)) \right](\lambda) = \\ &= -i \int_{\lambda}^{+\infty} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau + i \int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{1+\tau^2} d\tau + \pi i \operatorname{sgn}(\lambda) = \\ &= i(\pi \operatorname{sgn}(\lambda) - 2 \operatorname{arctg}(\lambda)) \end{aligned}$$

■

## Список литературы

- [1] Точилин П. А. . *Лекционный курс Программирование на языке **MATLAB***, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017
- [2] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, — М.: Наука, 1976.
- [3] Справочные средства языка **MATLAB**