Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра системного анализа

Отчёт по практикуму

«Задача оптимального управления ракетой»

Студент 315 группы
В. А. Сливинский

Руководитель практикума
к.ф.-м.н., доцент П. А. Точилин

Москва, 2018

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Исходная постановка

Движение ракеты в вертикальной плоскости над поверхностью Земли описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm - kv^2 + lu \\ \dot{m} = -u \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь, $v \in \mathbb{R}$ — скорость ракеты, m — её переменная масса, g — гравитационная постоянная, $k \geqslant 0$ — коэффициент трения, $l > 0$ — коэффициент, определяющий силу, действующую на ракету со стороны сгорающего топлива, $u \in [u_{min}, u_{max}]$ — скорость подачи топлива в сопла ($0 \leqslant u_{min} \leqslant u_{max}$). Кроме того, известна масса ракеты без топлива $M > 0$.
Задача 1: Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Необходимо, за счёт выбора программного управления $u(t)$ перевести ракету на наибольшую высоту в заданный момент времени $T > 0$.
Задача 2: Задан начальный момент времени $t_0 = 0$, начальная скорость $v(0) = 0$, начальная масса ракеты с топливом $m(0) = m_0 > M$. Необходимо, за счёт выбора программного управления $u(t)$ перевести ракету на заданную высоту $H > 0$ в заданный момент времени $T > 0$ так, чтобы минимизировать значение функционала

$$\mathcal{J}_2 = \int_0^T u^2(t)\,dt$$

В обеих задачах в начальный момент времени ракета стоит на поверхности Земли и не может двигаться вниз. Кроме того, масса ракеты с топливом m не может превышать массу ракеты без топлива M; если топливо заканчивается — двигатель отключается, т.е. $\dot{m} = 0$.

Требуется:

1. Написать в среде Matlab программу с пользовательским интерфейсом, которая по заданным значениям параметров T, M, m_0, u_{min}, u_{max}, l, k, g, H определяет, разрешима ли задача (1.1). Если задача разрешима, программа должна построить графики компонент оптимального управления, оптимальной траектории, сопряжённых переменных. Кроме того, программа должна определить количество переключений найденного оптимального управления и соответствующие моменты переключений.

2. Привести все необходимые теоретические выкладки, а также примеры оптимальных управлений и траекторий для всех качественно различных режимов оптимального управления.

1.2 Переформулировка задачи

Прежде всего, учтём приведённые в условии замечания:

$$\dot{m}(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } m(t) = M \\ -u & \text{иначе} \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $u \in [u_{min}, u_{max}]$, $t \in [t_0, T]$. Для удобства, обозначим $\mathcal{U} = [u_{min}, u_{max}]$. Высоту ракеты в обеих задачах будем обозначать буквой h. Кроме того, для первой задачи рассмотрим следующий функционал:

$$\mathcal{J}_1 = -h(T)$$

Теперь, задачи можно переформулировать в следующем виде:
Задача 1:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm - kv^2 + lu \\ \dot{m}(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } m(t) = M \\ -u & \text{иначе} \end{cases} \\ \dot{h} = v \\ v(0) = 0 \\ m(0) = m_0 > M \\ h(0) = 0 \\ \dot{v}(0) \geqslant 0 \\ \mathcal{J}_1 = -h(T) = -\displaystyle\int_0^T v(t)\,dt \to \inf_{u \in \mathcal{U}} \end{cases} \quad \text{где } u \in \mathcal{U}, \quad t \in [0, T] \tag{1.3}$$

Задача 2:

$$\begin{cases} \dot{m}v + m\dot{v} = -gm - kv^2 + lu \\ \dot{m}(t) = \begin{cases} 0 & \text{если } m(t) = M \\ -u & \text{иначе} \end{cases} \\ \dot{h} = v \\ v(0) = 0 \\ m(0) = m_0 > M \\ h(0) = 0 \\ h(T) = H \\ \dot{v}(0) \geqslant 0 \\ \mathcal{J}_2 = \displaystyle\int_0^T u^2(t)\,dt \to \inf_{u \in \mathcal{U}} \end{cases} \quad \text{где } u \in \mathcal{U}, \quad t \in [0, T] \tag{1.4}$$

Теперь, переформулировав задачи в более широком и понятном виде, приступим последовательно к их решению.

2 Аналитическое решение задачи 1

2.1 Случай «достаточного» количества топлива

Предположим, что $m_0 - u_{max} \cdot T \geqslant M$, то есть топлива в баке ракеты достаточно для того, чтобы на протяжении всего времени T выбрасывать его с максимальной скоростью.

Утверждение. *Если в задаче* (1.3) $m_0 - u_{max} \cdot T \geqslant M$, *то* $u^*(t) = u_{max}$ $\dot{\forall} t \in [0, T]$ — *оптимальное управление.*

Доказательство: Предположим противное: пусть $u^*(t)$ — оптимальное управление и существует $t_1, t_2 \in [0, T]$ такие, что $t_1 < t_2$ и $u^*(\tilde{t}) < u_{max}$ $\forall \tilde{t} \in [t_1, t_2]$. В силу предположения теоремы и второго уравнения из (1.3), $\dot{m}(t) = -u(t)$ $\forall t \in [0, T]$ и, следовательно, $m(t) = m_0 - \int_0^t u^*(\tau)\, d\tau$. Тогда для высоты получим следующее выражение:

$$h(t) = \int_0^t v(\tau)\, d\tau, \text{ но, в силу (1.3), } \dot{m}v + m\dot{v} = -gm - kv^2 + lu$$

Отсюда, выполняя соответствующие подстановки, получаем:

$$\dot{v} = -g - \frac{1}{m_0 - \int_0^t u^*(\tau)\, d\tau} \cdot \big((l+v)u^* - kv^2\big) = \frac{1}{\int_0^t u^*(\tau)\, d\tau - m_0} \cdot \big((l+v)u^* - kv^2\big) - g$$

До момента времени t_1 скорости и массы для управлений u^* и $u = u_{max}$ изменяются одинаково. Не ограничивая общности суждений, положим $v(t_1) = 0$, $m(t_1) = m_1 > M$, $t_1 = 0$. Тогда при $t_1 < \tau \leqslant t_2$ имеем:

$$\dot{v}(t_1) = \frac{lu^*(t_1)}{m_1} - g \tag{2.1}$$

$$v(\tau) = v(t_1) + \dot{v}(t_1) \cdot (\tau - t_1) + \mathrm{O}((\tau - t_0)^2) = (\frac{lu^*(t_1)}{m_1} - g) \cdot \tau + \mathrm{O}(\tau^2) \tag{2.2}$$

Выражение (2.2) представляет собой разложение в ряд Тейлора с центром в точке t_1. Аналогичным образом, разложим в ряд Тейлора скорость v_{max}, отвечающую управлению $u = u_{max}$:

$$\dot{v}_{max}(t_1) = \frac{lu_{max}}{m_1} - g \tag{2.3}$$

$$v_{max}(\tau) = v_{max}(t_1) + \dot{v}(t_1) \cdot (\tau - t_1) + \mathrm{O}((\tau - t_0)^2) = (\frac{lu_{max}}{m_1} - g) \cdot \tau + \mathrm{O}(\tau^2) \tag{2.4}$$

Теперь, вычтем из (2.2) (2.4):

$$v(\tau) - v_{max}(\tau) = \frac{l(u^*(\tau) - u_{max})}{m_1} \cdot \tau + \mathrm{O}(\tau^2)$$

По предположению, $u^*(\tilde{t}) < u_{max}$ $\forall \tilde{t} \in [t_1, t_2]$, стало быть, $\dfrac{l(u^*(\tau) - u_{max})}{m_1} < 0$, тогда, при достаточно малом $0 < \tau < 1$:

$$\frac{v(\tau) - v_{max}(\tau)}{\tau} < 0 \tag{2.5}$$

Отсюда, так как $\tau > 0$ получаем, что $v(\tau) - v_{max}(\tau) < 0$.
Повторяя аналогичные рассуждения для всего отрезка $[t_1, t_2]$, получим, что всюду внутри отрезка $v(\tau) < v_{max}$, что противоречит предположению об оптимальности управления $u^*(t)$. Полученное противоречие доказывает утверждение. ■

Следствие. *Если в задаче* (1.3) $m_0 - u_{max} \cdot T \geqslant M$, *то* $u^*(t) = u_{max}$ $\forall t \in [0, T]$ — *оптимальное управление.*

Доказательство: Заметим, что если оптимальное управление отличается от $u^* = u_{max}$ на множестве меры ноль, то это никоим образом не повлияет на значение функционала $\mathcal{J}_1 = -\int_0^T v(t)\,dt$ ■

2.2 Случай «ограниченного» количества топлива

Рассмотрим теперь второй качественный случай, когда $m_0 - u_{max} \cdot T < M$, то есть топлива в баке ракеты недостаточно для того, чтобы на протяжении всего времени T выбрасывать его с максимальной скоростью.

2.3 Принцип максимума

Прежде всего, установим принцип максимума Понтрягина в следующей формулировке:[1]

Принцип Максимума Понтрягина (В формулировке из [2])
Пусть $(u^*(\cdot), x^*(\cdot))$ — *оптимальная пара.*
Тогда существует $\psi(t) \in AC[t_0, t_1], \psi(t) \neq 0$ $\forall t \in [t_0, t_1]$:

$$\dot{\psi} = -A^T \psi \tag{2.6}$$
$$\langle Bu^*(t), \psi(t) \rangle = \rho(\psi(t) | B\mathcal{P}) \tag{2.7}$$
$$\langle \psi(t_0), x^*(t_0) \rangle = \rho(\psi(t_0) | \mathcal{X}_0) \tag{2.8}$$
$$\langle -\psi(t_1), x^*(t_1) \rangle = \rho(-\psi(t_1) | \mathcal{X}_1) \tag{2.9}$$

Систему (2.6) называют *сопряжённой системой*, её решение $\psi = \psi(t)$ — *сопряжёнными переменными*, а условия (2.8) и (2.9) — *условиями трансверсальности.* Условие (2.7) позволяет выделить из всех возможных управлений семейство «подозрительных» на оптимальные.

2.4 Исследование сопряжённой системы

Для того, чтобы однозначно определить решение системы (2.6), нам необходимо присовокупить к ней некоторые начальные условия. Мы, для удобства решения, будем рассматривать $\psi(t_0) = \psi_0$. В результате получим задачу Коши для сопряжённой системы:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = -A^T \psi(t), \ t \in [t_0, t_1] \\ \psi(t_0) = \psi_0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Тогда, решение этой системы представимо в виде:

$$\psi(t) = e^{-A^T (t - t_0)} \psi_0 \tag{2.11}$$

[1] Доказательство приведено, например, в [3]

2.5 Выделение управлений и траекторий, «подозрительных» на оптимальные

Условие (2.7), в силу свойств скалярного произведения, можно переписать в следующем виде:

$$\langle B^T\psi(t), u^*(t)\,\rangle = \rho(B^T\psi(t)|\mathcal{P})$$

В свою очередь, раскрыв определение опорной функции множества $\mathcal{P}$ в направлении $B^T\psi(t)$, окончательно получим:

$$\langle B^T\psi(t), u^*(t)\,\rangle = \sup_{u(t)\in\mathcal{P}} \langle B^T\psi(t), u(t)\,\rangle \tag{2.12}$$

Заметим, что множество $\mathcal{P}$ (см. (**??**)) есть эллипсоид $\mathcal{E}(p, P)$, где $P = \begin{pmatrix} \frac{r}{9} & 0 \\ 0 & \frac{r}{4} \end{pmatrix}$ — матрица конфигурации. Учтём также, что $B = E$; из [1] известно, что решение $u^*(t)$ уравнения (2.12) представимо в виде:

$$u^*(t) = p + \frac{P\psi(t)}{\sqrt{\langle \psi(t), P\psi(t)\,\rangle}} \tag{2.13}$$

Данное выражение корректно, так как $\psi(t) \neq 0$ для любого допустимого t, а $P \neq 0$. Кроме того, оно показывает, что для каждого ψ_0 существует единственное «подозрительное» на оптимальное управление.
С учётом того, что множество $\mathcal{X}_0$ состоит из одной точки (см. (**??**)) и первого условия трансверсальности (2.8), любая «подозрительная» на оптимальную траектория $x^*(t)$ выходит из точки x_0, т.е. $x^*(t_0) = x_0$. Тогда, подстановкой в (1.1) недостающих значений из (2.13), (2.11) и значения $x^*(t_0) = x_0$ окончательно получим систему:

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = Ax^*(t) + u^*(t) + f,\ t \in [t_0, +\infty) \\ x^*(t_0) = x_0 \\ u^*(t) = p + \dfrac{P\psi(t)}{\sqrt{\langle \psi(t), P\psi(t)\,\rangle}} \\ \psi(t) = e^{-A^T(t-t_0)}\psi_0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Решение данной системы $x^*(t)$ есть траектория, «подозрительная» на оптимальную, соответствующая управлению $u^*(t)$ из (2.13). Заметим, что и это управление $u^*(t)$, и соответствующая ему траектория $x^*(t)$ однозначно определяются (при фиксированных параметрах из **??**) лишь значением $\psi(t_0) = \psi_0$.

2.6 Оценка погрешности

Поскольку численное решение задачи сопряжено с погрешностью, требуется ввести некоторую меру погрешности условия трансверсальности на правом конце (2.9): оно равносильно сонаправленности вектора $-\psi(t_1)$ и вектора внешней единичной нормали к границе множества $\mathcal{X}_1$ в точке $x^*(t_1)$. Множество $\mathcal{X}_1$ представляет собой область, заключённую внутри двух парабол; для удобства, перепишем (**??**) в следующем виде:

$$\mathcal{X}_1 = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{a}{b}(x_1 - x_{11})^2 - (\frac{c}{b} - x_{12}) \leqslant x_2 \leqslant x_{12} + \frac{c}{b} - \frac{a}{b}(x_1 - x_{11})^2 \right\},\ a, b, c > 0.$$

Отсюда явно видно, что эти две параболы пересекаются в точках $\left(x_{11} \pm \sqrt{\frac{c}{a}},\ x_{12}\right)$
Уравнение касательной к верхней параболе в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$[1]:

$$x_2 - x_2^0 = -\frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11})(x_1 - x_1^0)$$
$$\frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11})(x_1 - x_1^0) + (x_2 - x_2^0) = 0;$$

Отсюда, вектор нормали $\vec{n}_u$ и единичной нормали $\vec{\nu}_u$ к верхней параболе в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$:

$$\vec{n}_u = \left(\frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11}),\ 1\right)$$
$$\vec{\nu}_u = \frac{\vec{n}}{\|n\|}$$

Аналогично, для нижней параболы имеем:

$$\vec{n}_l = \left(\frac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11}),\ -1\right)$$
$$\vec{\nu}_l = \frac{\vec{n}}{\|n\|}$$

Таким образом, запишем общую формулу для внешней нормали к границе множества $\mathcal{X}_1$ в точке $\left(x_1^0, x_2^0\right)$, при условии, что $\left(x_1^0, x_2^0\right) \neq \left(x_{11} \pm \sqrt{\frac{c}{a}},\ x_{12}\right)$:

$$\vec{n} = \begin{cases} \left(\dfrac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11}),\ 1\right) & \text{если } x_2^0 > x_{12} \\ \left(\dfrac{2a}{b}(x_1^0 - x_{11}),\ -1\right) & \text{если } x_2^0 < x_{12} \end{cases} \tag{2.15}$$

Отметим, что в точках пересечения парабол $\left(x_{11} \pm \sqrt{\frac{c}{a}},\ x_{12}\right)$ граница множества $\mathcal{X}_1$ не является гладкой, следовательно, существует целый сектор направлений, по которым выполняется условие (2.9).
В качестве меры погрешности в случае, если $x^*(t_1) = \left(x_{11} \pm \sqrt{\frac{c}{a}},\ x_{12}\right)$ возьмём модуль синуса угла между $-\psi(t_1)$ и вектором внешней нормали к границе (2.15), а если $x^*(t_1) = \left(x_{11} \pm \sqrt{\frac{c}{a}},\ x_{12}\right)$[2] — модуль синуса угла отклонения от соответстующего сектора «нормалей» (или 0, если $-\psi(t_1)$ лежит в этом секторе). Для нахождения модуля синуса угла между векторами воспользуемся основным тригонометрическим тождеством, и тем фактом, что для векторов $-\vec{\psi}(t_1)$ и $\vec{n}$ косинус угла φ между ними равен:

$$\cos\varphi = \frac{\langle -\vec{\psi}(t_1), \vec{n}\,\rangle}{\|-\psi(t_1)\|\|n\|},$$

откуда

$$\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{\langle -\vec{\psi}(t_1), \vec{n}\,\rangle}{\|-\psi(t_1)\|\|n\|}\right)^2}.$$

[1]Здесь и далее, по понятным причинам, предполагаем, что точка $\left(x_1^0, x_2^0\right)$ принадлежит границе множества $\mathcal{X}_1$

[2]При решении в числах, это равенство равносильно тому, что точка $x^*(t_1)$ лежит в некоторой достаточно малой окрестности точки пересечения парабол

3 Описание численного метода

1. Задаём все параметры системы (загрузкой или вводом с клавиатуры), длину временного интервала T, инициализируем конфигурационную матрицу эллипса $\mathcal{P}$, соответствующие функции для множества $\mathcal{X}_1$, функцию попадания во множество $\mathcal{X}_1$;

2. Проверяем, не находится ли точка x_0 во множестве $\mathcal{X}_1$ изначально;

3. Для решения сопряжённой системы используется функция `solveConj` со следующей спецификацией:

```
function [ tMaj, tRet, xMaj, psi0Maj, alphaMaj, xSusp ] = solveConj( tMaj, ...
A, f, p, P, x0, t0, T, alphaSpace, opts )
```

4. В отдельной функции `solveConj` на единичной сфере перебираем всевозможные значения $\psi_0 = (\sin(\alpha),\, \cos(\alpha))^T$, рассматривая α на сетке `alphaSpace`. Для каждого значения ψ_0 решаем сопряженную систему при помощи функции `ode45`, реализующей метод Рунге-Кутты четвёртого порядка с параметром `events`, соответствующим функции попадания во множество $\mathcal{X}_1$;

5. В случае попадания во множество $\mathcal{X}_1$ за отведённое время, фиксируем данное время как оптимальное, если оно меньше предыдущего минимума (в начале алгоритма полагаем это время равным переданному в `solveConj` значению параметра `tMaj`, при первом запуске — $+\infty$), сохраняем соответствующие этому времени значения ψ_0, $x^*(t)$, α^*;

6. Таким образом, функция `solveConj` либо возвращает в качестве оптимального времени $+\infty$, что соответствует случаю отсутствия решения (на данной сетке), либо возвращает набор, состоящий из оптимального времени t^*, оптимальной траектории $x^*(t)$, оптимального начального условия для сопряжённой системы ψ_0 и соответствующего ему угла α^*, а также коллекцию тестовых («подозрительных») траекторий `xSusp`; по этим данным однозначно восстанавливается оптимальное управление $u^*(t)$ и значение сопряжённых переменных $\psi(t_1)$;

7. Ошибка второго условия трансверсальности рассчитывается согласно пункту 2.6 в функции `calcError`;

8. Производится построение графиков согласно требованиям;

9. При необходимости, повторно вызвав функцию `solveConj` с параметром `tMaj` равным оптимальному времени t^*, полученному на предыдущем шаге, можно осуществить локальное или глобальное улучшение решения. Для локального улучшения подаём на вход функции (параметр `alphaSpace`) разбиение некоторой окрестности α^*, а для глобального — сетку большего размера

Список литературы

[1] И. В. Рублёв. *Лекционный курс Оптимальное Управление (Линейные Системы)*, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017

[2] Точилин П. А. *Лекционный курс Программирование на языке* ***MATLAB***, кафедра Системного Анализа, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, МГУ им. М. В. Ломоносова, 2017 – 2018

[3] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*, — М.: Наука, 1976.

[4] Справочные средства языка MATLAB