UNIVERSITÉ DE SHERBROOOKE

Faculté de génie

Département de génie électrique et génie informatique

APP 1 : Éléments de statique et de dynamique

GEN441 02,GEN441 01

Présenté à

Ahmed Khoumsi et Jean-Baptiste Michaud

Présenté par

Shawn Miller-Morneau

Alexis Juteau

Sherbrooke - 9 août 2024

Table des matières

Table des figures

1 Cinématique

1.1 Mouvement de A dans le cas général (équations cinématiques générales)

1.1.1 Équation vecteur position de A :

$\vec{A} = \vec{OA} + \vec{BA}$

$\boxed{\vec{A} = L_1 \cos(\theta)\hat{u_x} + L_1 \sin(\theta)\hat{u_y} + L_2 \cos(\phi)\hat{u_x} + L_2 \sin(\phi)\hat{u_y}}$

1.1.2 Équation vecteur vitesse de A :

$\vec{V_A} = \frac{d}{dt}(\vec{A})$

$\vec{V_A} = \frac{d}{dt}\big[L_1 \cos(\theta)\hat{u_x} + L_1 \sin(\theta)\hat{u_y} + L_2 \cos(\phi)\hat{u_x} + L_2 \sin(\phi)\hat{u_y}\big]$

$\vec{V_A} = -l_1 \sin(\theta)\theta'\hat{u_x} + l_1 \cos(\theta)\theta'\hat{u_y} + -l_2 \sin(\phi)\phi'\hat{u_x} + l_2 \cos(\phi)\phi'\hat{u_y}$

$\boxed{\vec{V_A} = l_1\theta'(\cos(\theta)\hat{u_y} - \sin(\theta)\hat{u_x}) + l_2\phi'(\cos(\phi)\hat{u_y} - \sin(\phi)\hat{u_x})}$ ***Factoriation termes L_1, L_2, θ', ϕ'**

1.1.3 Équation vecteur acélération de A :

$\vec{A_A} = \frac{d}{dt}(\vec{V_A})$

$\vec{A_A} = \frac{d}{dt}\big[l_1\theta'(\cos(\theta)\hat{u_y} - \sin(\theta)\hat{u_x}) + l_2\phi'(\cos(\phi)\hat{u_y} - \sin(\phi)\hat{u_x}\big]$

$\vec{A_A} = l_1\frac{d}{dt}\big[(\cos(\theta)\theta'\hat{u_y} - \sin(\theta)\theta'\hat{u_x})\big] + l_2\frac{d}{dt}\big[(\cos(\phi)\phi'\hat{u_y} - \sin(\phi)\phi'\hat{u_x}\big]$

$\vec{A_A} = l_1\big[\cos(\theta)\theta'\big]'\hat{u_y} - l_1\big[\sin(\theta)\theta')\big]'\hat{u_x} + [...]$

$\vec{A_A} = l_1(cos(\theta)'\theta'\hat{u_y} + cos(\theta)\theta''\hat{u_y} - sin(\theta)'\theta'\hat{u_x} + sin(\theta)\theta''\hat{u_x}) + [...]$ **(uv)' = u'v + uv'**

$\vec{A_A} = l_1(-\theta'^2 sin(\theta)\hat{u_y} + cos(\theta)\theta''\hat{u_y} - \theta'^2 cos(\theta)\hat{u_x} + sin(\theta)\theta''\hat{u_x}) + [...]$ ***Dérivation des fonctions trigos**

Note : Dérivation partie de droite en [...]

$$\vec{A_A} = [...] + l_2\frac{d}{dt}\left[(\cos(\phi)\phi'\hat{u_y} - \sin(\phi)\phi'\hat{u_x}\right]$$

$$\vec{A_A} = [...] + l_2\left[\cos(\phi)\phi'\right]'\hat{u_y} - l_2\left[\sin(\phi)\phi')\right]'\hat{u_x}$$

$$\vec{A_A} = [...]{+}l_2(cos(\phi)'\phi'\hat{u_y}{+}cos(\theta)\theta''\hat{u_y}{-}sin(\phi)'\phi'\hat{u_x}{+}sin(\phi)\phi''\hat{u_x})$$ **Note : (uv)' = u'v + uv'**

$$\vec{A_A} = [...]{+}l_2(-\phi'^2 sin(\phi)\hat{u_y}{+}cos(\phi)\phi''\hat{u_y}{-}\phi'^2 cos(\phi)\hat{u_x}{+}sin(\phi)\phi''\hat{u_x})$$ ***Dérivation des fonctions trigos**

Note : Regroupement des expressions dérivées précédentes

$$\vec{A_A} = l_1(-\theta'^2 sin(\theta)\hat{u_y} + cos(\theta)\theta''\hat{u_y} - \theta'^2 cos(\theta)\hat{u_x} + sin(\theta)\theta''\hat{u_x}) +$$

$$l_2(-\phi'^2 sin(\phi)\hat{u_y} + cos(\phi)\phi''\hat{u_y} - \phi'^2 cos(\phi)\hat{u_x} + sin(\phi)\phi''\hat{u_x})$$

$$\boxed{\vec{A_A} = l_1(-\theta'^2(sin(\theta)\hat{u_y} + cos(\theta)\hat{u_x}) + \theta''(sin(\theta)\hat{u_x} + cos(\theta)\hat{u_y}) +}$$

$$\boxed{l_2(-\phi'^2(sin(\phi)\hat{u_y} + cos(\phi)\hat{u_x}) + \phi''(sin(\phi)\hat{u_y} + cos(\phi)\hat{u_x})}$$

1.2 Mouvement horizontal de A

1.3 Configurations initiale et finale pour le mouvement horizontal

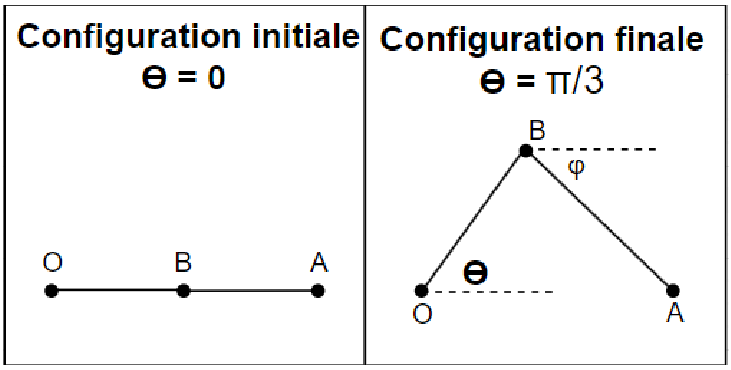


Figure 1 – Diagrammes configurations horizontales

1.3.1 Relation entre Θ et Φ pour le mouvement horizontal

Puisque A est au même niveau que O, le vecteur Y est donc nul. De plus, $l_1 = l_2$

$$v_Y = l_1 sin\theta + l_2 sin\phi$$

$$0 = l_1 sin\theta + l_2 sin\phi$$

$$-l sin\theta = l sin\phi$$

Note : Résultat suivant par la définition du sinus : $sin(-x) = -sin(x)$

$$\boxed{\theta = -\phi}$$

1.3.2 Équation vecteur position de A :

Note : Les composantes Y on été annulé et ϕ remplacé par $-\theta$

$$\vec{A} = L_1 \cos(\theta)\hat{u_x} + L_2 \cos(-\theta)\hat{u_x}$$

$\vec{A} = l\cos(\theta)\hat{u_x} + l\cos(\theta)\hat{u_x}$ **Note :** $cos(-x) = cos(x)$ **et** $l_1 = l_2 = l$

$$\boxed{\vec{A} = 2l\cos(\theta)\hat{u_x}}$$

1.3.3 Équation vecteur vitesse de A :

$$\vec{V_A} = l_1\theta'(\cos(\theta)\hat{u_y} - \sin(\theta)\hat{u_x}) + l_2\phi'(\cos(\phi)\hat{u_y} - \sin(\phi)\hat{u_x})$$

Note : Les composantes Y on été annulé et ϕ remplacé par $-\theta$

$\vec{V_A} = l\theta'(-\sin(\theta)\hat{u_x}) - l\theta'(-\sin(-\theta)\hat{u_x})$ **Note :** $l_1 = l_2 = l$

$\vec{V_A} = -l\theta'(\sin(\theta)\hat{u_x} + \sin(\theta)\hat{u_x})$ **Note :** $sin(-x) = -sin(x)$

$$\boxed{\vec{V_A} = -2l\theta'\sin(\theta)\hat{u_x}}$$

1.3.4 Équation vecteur accélération de A :

$$\vec{A_A} = l_1(-\theta'^2(sin(\theta)\hat{u_y} + cos(\theta)\hat{u_x}) + \theta''(sin(\theta)\hat{u_x} + cos(\theta)\hat{u_y})+$$

$$l_2(-\phi'^2(sin(\phi)\hat{u_y} + cos(\phi)\hat{u_x}) + \phi''(sin(\phi)\hat{u_y} + cos(\phi)\hat{u_x})$$

Note : Les composantes Y on été annulé et remplacé par relation θ et ϕ

$\vec{A_A} = l(-\theta'^2(cos(\theta)\hat{u_x}) + \theta''(sin(\theta)\hat{u_x})) + l(-\theta'^2(cos(-\theta)\hat{u_x}) - \theta''(cos(-\theta)\hat{u_x}))$ **Note :** $l_1 = l_2 = l$

$\vec{A_A} = l(-\theta'^2(cos(\theta)\hat{u_x}) + \theta''(sin(\theta)\hat{u_x})) + l(-\theta'^2(cos(\theta)\hat{u_x}) - \theta''(cos(\theta)\hat{u_x}))$ **Note :** $cos(-x) = cos(x)$

$\vec{A_A} = l(-\theta'^2(cos(\theta)\hat{u_x})) + l(-\theta'^2(cos(\theta)\hat{u_x})))$ **Note :** $\theta'' = 0$ **, car** $\theta' =$ **const**

$$\vec{A_A} = -\theta'^2 l(cos(\theta)\hat{u_x} + cos(\theta)\hat{u_x})$$

$$\boxed{\vec{A_A} = -2\theta'^2 l(cos(\theta)\hat{u_x})}$$

1.4 Mouvement vertical de A

1.5 Configurations initiale et finale pour le mouvement vertical

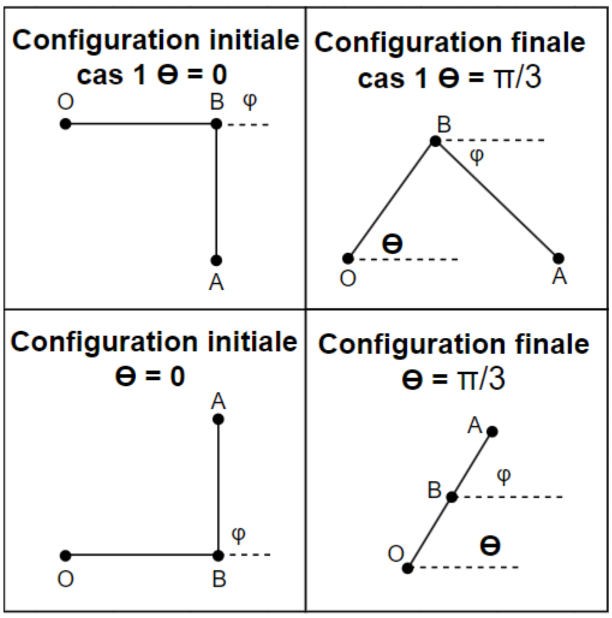


Figure 2 – Diagrammes configurations verticales

1.5.1 Relations entre Θ et Φ pour le mouvement vertical

$$cos(\theta) + cos(\phi) = Constante$$

Note : Constante = 1, pour simplifier les équations

$$cos(\theta) + cos(\phi) = 1$$

$$\frac{d}{dt}(cos(\theta)) + \frac{d}{dt}(cos(\phi)) = \frac{d}{dt}(1)$$

$$\theta' \cdot -sin(\theta) + \phi' \cdot -sin(\phi) = 0$$

$$\frac{-sin(\theta)\theta'}{sin(\phi)} = \phi'$$

$$cos^2(\phi) = (1 - cos(\theta))(1 - cos(\theta))$$

$$cos^2(\phi) = 1 - 2cos(\theta) + cos^2(\theta)$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$sin^2(\phi) + cos^2(\phi) = 1$$

$$sin(\phi) = \sqrt{1 - cos^2(\phi)}$$

$sin(\phi) = \sqrt{1 - (1 - 2cos(\theta) + cos^2(\theta))}$ **Note : Substitution** $cos^2(\phi)$

$$\boxed{sin(\phi) = \sqrt{2cos(\theta) - cos^2(\theta)}}$$

$\boxed{\phi' = \frac{-sin(\theta)\theta'}{\sqrt{2cos(\theta) - cos^2(\theta)}}}$ **Note : Substitution** $sin(\phi)$

1.5.2 Équation vecteur position de A :

$\vec{A} = L_1(\cos(\theta)\hat{u_x} + \sin(\theta)\hat{u_y}) + L_2(\cos(\phi)\hat{u_x} + \sin(\phi)\hat{u_y})$ **Note :** $l_1 = l_2 = l$

Note : Les composantes X on été annulé et remplacé

$\vec{A} = l(\sin(\theta)\hat{u_y} + \sin(\phi)\hat{u_y})$ **Note :** $sin(\phi) = \sqrt{2cos(\theta) - cos^2(\theta)}$

$$\boxed{\vec{A} = l(\sin(\theta)\hat{u_y} + \sqrt{2cos(\theta) - cos^2(\theta)}\hat{u_y})}$$

1.5.3 Équation vecteur vitesse de A :

$\vec{V_A} = l_1\theta'(\cos(\theta)\hat{u_y} - \sin(\theta)\hat{u_x}) + l_2\phi'(\cos(\phi)\hat{u_y} - \sin(\phi)\hat{u_x})$

Note : Les composantes X on été annulé et remplacé par relation θ et ϕ

$\vec{V_A} = l\theta' \cos(\theta)\hat{u_y} + l\phi' \cos(\phi)\hat{u_y}$ **Note :** $l_1 = l_2 = l$

$$\vec{V_A} = l\theta' \cos(\theta)\hat{u_y} + l(\frac{-sin(\theta)\theta'}{\sqrt{2cos(\theta) - cos^2(\theta)}}(1 - \cos(\theta))\hat{u_y})$$

$$\boxed{\vec{V_A} = l\theta'(\cos(\theta) + \frac{-sin(\theta)}{\sqrt{2cos(\theta) - cos^2(\theta)}}(1 - \cos(\theta)))\hat{u_y}}$$

1.6 Analyse des courbes obtenues avec Matlab

1.6.1 Courbes mouvement horizontal

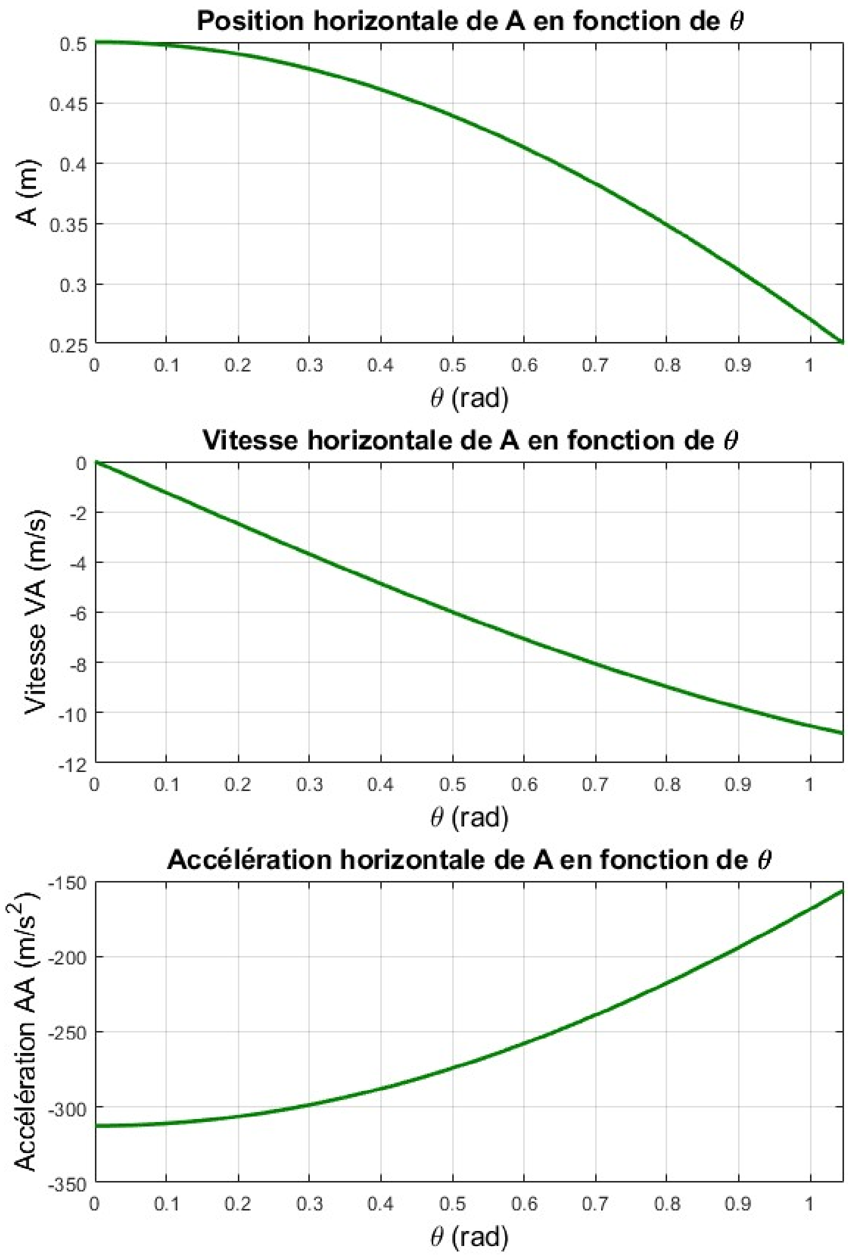
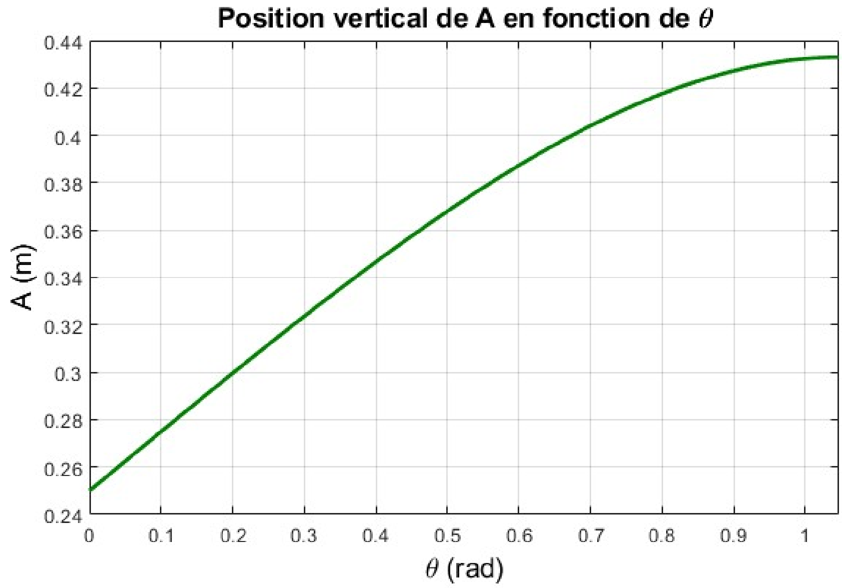


FIGURE 3 – Courbes MATLAB horizontales position, vitesse et accélération

1.6.2 Courbes mouvement vertical



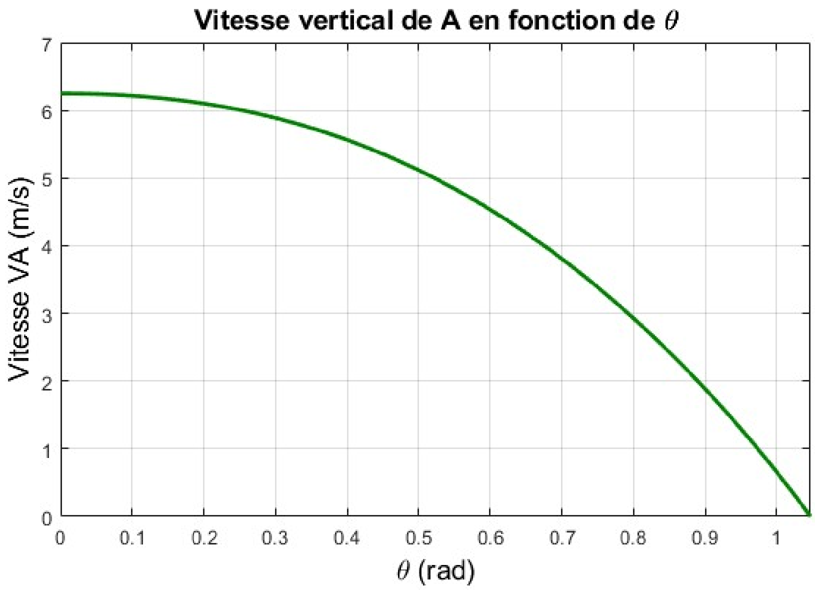


FIGURE 4 – Courbes MATLAB verticales position et vitesse

1.7 Relation entre Θ et Φ et les commandes de M_O et M_B

En ce qui concerne la relation entre les angles θ et ϕ, la commande M_0 permet de modifier la valeur de l'angle θ, tandis que pour M_B, le même principe s'applique à l'angle ϕ. Qui plus est, il est à noter que les commandes M_O et M_B représentent respectivement l'origine absolue des angles.

2 Statique

2.1 Déterminer les expressions de F_B et C_B lorsque le système est en équilibre

$$\sum F = 0$$

$$0 = F_B + m_1 g + F_A$$

$$F_B = -m_1 g - F_A$$

$$F_B = -m_1 g - m_A g$$

$$\boxed{F_B = -g(m_1 + m_A)}$$

$$\vec{M} = \vec{r} X \vec{F}$$

$$\sum M = 0$$

$$0 = M_B + \frac{l}{2} m_1 g + l m_A g$$

$$\boxed{C_B = -\frac{l}{2} g(m_1 + m_A) cos(\phi)}$$

3 Dynamique

3.1 Déterminer les expressions de F_B et C_B lorsque le système est en mouvement

$F_{Bx} = m\vec{a}$

$F_{Bx} = (m_1 + m_A) * (-\phi'' * lcos\phi - \phi'^2 lsin\phi)$

$\boxed{F_{By} = (m_1 + m_A) * (-\phi'' * lsin\phi - \phi'^2 lcos\phi) + g}$

$M_A + M_1 - C_B = (I_A + I_1) * \alpha$

$C_B = (I_A + I_1) * \alpha_1 + M_1 + M_A$

$\boxed{C_B = (\frac{m_1 l^2}{3} + m_A l^2) * \alpha_1 cos\phi + lgcos\phi(m_A + \frac{m_1}{2})}$

3.2 Représentation avec Matlab des courbes de C_B et analyse pour la statique et la dynamique

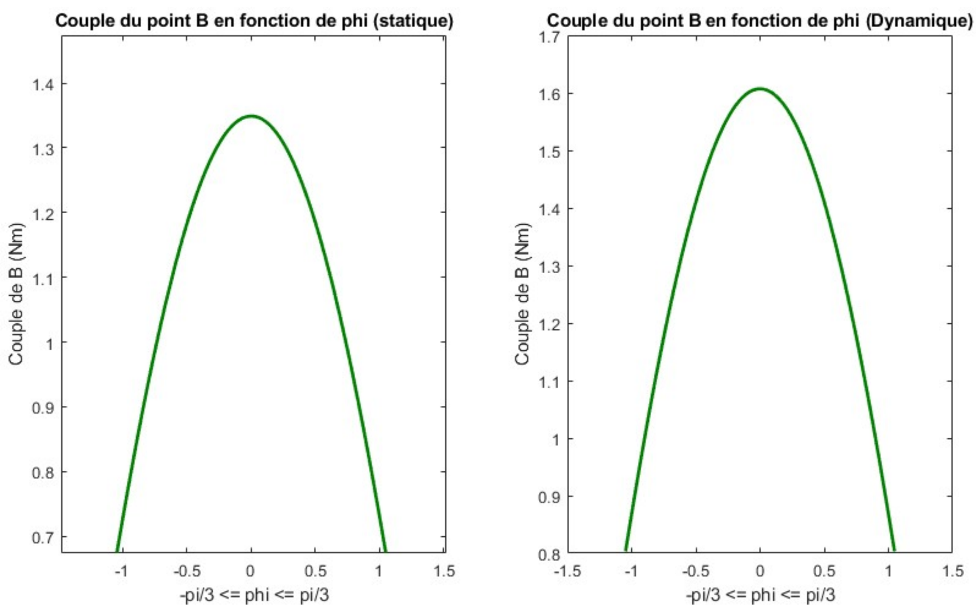


Figure 5 – Courbes MATLAB du couple au point B

D'une part, il est à noter que la courbe de C_B pour la dynamique est d'une amplitude plus grande que celle de la statique. De cette observation, on peut déduire que lorsque le système n'est pas à l'équilibre (dynamique), sa capacité à subir une rotation est plus élevée.

Références

[1] Ahmed Khoumsi, *Guide de l'étudiant - Élément de statique et dynamique - App1 - S5*, Département de génie électrique et de génie informatique, Université de Sherbrooke