

**FACULDADE DE TECNOLOGIA DE SÃO JOSÉ DOS CAMPOS
FATEC PROFESSOR JESSEN VIDAL**

JONAS ALVES BUENO

**SISTEMAS DE NUMERAÇÃO:
HISTÓRIA E APLICAÇÕES**

São José dos Campos
2022

JONAS ALVES BUENO

**SISTEMAS DE NUMERAÇÃO:
HISTÓRIA E APLICAÇÕES**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas.

Orientador: Prof. Me. Antônio Egydio Graça

São José dos Campos
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Divisão de Informação e Documentação

BUENO, Jonas Alves
Sistemas de Numeração: História e Aplicações
São José dos Campos, 2022.
26f.

Trabalho de Graduação – Curso de Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas.
FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal, 2022.
Orientador Interno ou Principal: Prof. Me. Antônio Egydio Graça.

1. Sistemas de Numeração 2. Computação 3. Contagem 4. Binário 5. Matemática
I. Faculdade de Tecnologia. FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal. Divisão de
Informação e Documentação. II. Sistemas de Numeração: História e Aplicações

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

BUENO, Jonas Alves. Sistemas de Numeração: História e Aplicações. 2022. 99f.
Trabalho de Graduação - FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal.

CESSÃO DE DIREITOS

NOME DO AUTOR: Jonas Alves Bueno
TÍTULO DO TRABALHO: Sistemas Numéricos
TIPO DO TRABALHO/ANO: Trabalho de Graduação/2022.

É concedida à FATEC de São José dos Campos: Professor Jessen Vidal permissão para reproduzir cópias deste Trabalho e para emprestar ou vender cópias somente para propósitos acadêmicos e científicos. O autor reserva outros direitos de publicação e nenhuma parte deste Trabalho pode ser reproduzida sem a autorização do autor.

Jonas Alves Bueno
São José dos Campos, SP

JONAS ALVES BUENO

**SISTEMAS DE NUMERAÇÃO:
HISTÓRIA E APLICAÇÕES**

Trabalho de Graduação apresentado à Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Tecnólogo em Análise e Desenvolvimento de Sistemas.

Me. Antônio Egydio Graça – Fatec São José dos Campos

____/____/____

DATA DA APROVAÇÃO

A Malba Tahan que, mesmo sem existir em carne e osso, encantou milhares de pessoas com as belezas do mundo dos números.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e amigos por me apoiarem na decisão de trocar de carreira mesmo após 5 anos cursando uma graduação em Serviço Social; À minha companheira Bianca por esta linda relação de reciprocidade que nutrimos há anos, onde um sempre provê forças quando o outro pensa em desistir. Aos professores e colegas do curso de Análise e Desenvolvimento de Sistemas por confirmarem a suspeita que eu tinha de que trabalhar com tecnologia é realmente o que desejo fazer da minha vida e por renovarem a esperança de ela pode ser usada à favor da emancipação humana. A todos que dedicam suas vidas aos projetos coletivos e à transformação social.

*Já faz tempo que estão acostumando as
mentes das nossas crianças
Com jogos de guerra, simuladores de
combate no shopping, simuladores de
caça do exército
Será que estamos jogando videogame ou
matando civis inocentes pilotando outro
drone
do lado do deserto?*

Edgar

RESUMO

Existiram diversos métodos de contagem e sistemas de numeração ao longo da história da humanidade; Embora o sistema decimal tenha se tornado o mais utilizado em nosso cotidiano, outros sistemas podem ser mais eficazes para determinadas tarefas, especialmente na era digital. Este trabalho pretende apresentar a evolução dos sistemas de numeração ao longo da história para em seguida discutir diversas aplicações para cada um deles, além de abordar temas como notação posicional, conversão entre sistemas e operações aritméticas com números binários. Apesar de citar outros sistemas (como o octal e o hexadecimal), buscaremos nos aprofundar no sistema de numeração binário, pois este se tornou efetivamente o sistema mais importante para a área da tecnologia da informação, depois do decimal. Para alcançar tal objetivo, se utiliza da revisão bibliográfica como principal método de investigação e tem a obra “Informática: Conceitos e Aplicações” de Marcelo Marçula e Pio Benini Filho como principal referência.

Palavras-Chave: Sistemas; Numeração; Bases; Matemática; Informática.

ABSTRACT

There have been several counting methods and numbering systems throughout human history; although the decimal system has become the most widely used in our daily life, other systems can be more effective for certain tasks, especially in the digital age. This work intends to present the evolution of numbering systems throughout history to then discuss several applications for each of them, besides addressing issues such as positional notation, conversion between systems and arithmetic operations with binary numbers. Despite mentioning other systems (such as octal and hexadecimal), we will seek to deepen in the binary numbering system, because this has effectively become the most important system for the area of information technology, after the decimal. To achieve this goal, the bibliographic review is used as the main research method and has the book "Informática: Conceitos e Aplicações" by Marcelo Marçula and Pio Benini Filho as the main reference.

Keywords: Systems; Numbering; Bases; Mathematics; Computing.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	13
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
3. HISTÓRIA E APLICAÇÕES DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO	15
3.1. Definição e História	15
3.2. Sistemas de numeração modernos	17
3.2.1. Sistema de numeração octal	17
3.2.2. Sistemas de numeração hexadecimal	18
3.2.3. Sistemas de numeração binário	19
3.2.4. Operações aritméticas básicas	21
3.2.5. Métodos de conversão	22
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS	24
REFERÊNCIAS	25
ANEXOS	26

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Sistema numérica Maia e legenda dos valores em decimal.	17
Figura 2 - Adição binária.	22
Figura 3 - Multiplicação binária.	22
Figura 4 - Conversão decimal para binário utilizando o método das divisões sucessivas.	23
Figura 5 - Conversão decimal para binário utilizando o método da notação posicional.	24
Figura 6 - Conversão binário para decimal utilizando a fórmula geral de conversão.	24

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Relação entre os sistemas decimal e octal.	17
Tabela 1 - Relação entre os sistemas decimal e hexadecimal, a partir do 9º elemento.	18
Tabela 1 - Relação entre os sistemas decimal e binário.	20

1. INTRODUÇÃO

Um sistema de numeração é uma convenção ou padronização que utiliza símbolos para representar valores numéricos. Dessa forma, o sistema decimal, por exemplo, utiliza dez símbolos para representar qualquer valor contido no conjunto dos números reais.

Atualmente é comum tomar o sistema decimal como algo naturalmente estabelecido, já que o utilizamos em praticamente todos os lugares. Porém este não foi o único sistema de numeração utilizado ao longo da história e nem é o ideal para todas as aplicações. Este trabalho se propõe a explorar um pouco da história destes sistemas para, em seguida, investigar algumas aplicações onde outros sistemas (como o binário ou hexadecimal) são, na verdade, mais apropriados do que o sistema decimal.

Também iremos explorar em mais detalhes a natureza de cada sistema de numeração, nos aprofundando especialmente no sistema de numeração binário, já que este é, atualmente, o sistema mais relevante para a computação. Portanto iremos investigar, além da notação, pontos como a conversão entre bases numéricas, como realizar operações aritméticas utilizando a representação binária de valores e por que ela é tão importante para a computação.

Para atingir tais objetivos iremos utilizar a revisão bibliográfica como metodologia principal, nos apoiando especialmente na produção teórica de Marcelo Marçula e Pio Benini Filho.

O trabalho está estruturado em 4 Capítulos, que apresentam os seguintes temas:

O Capítulo 1 consiste nesta introdução ao tema e ao trabalho;

O Capítulo 2 tem seu foco na história da contagem e dos sistemas numéricos. Iremos analisar seus impactos para o desenvolvimento das civilizações e conhecer quais foram os principais sistemas ao longo da história e quais “resistiram à prova do tempo” e permaneceram como os mais utilizados até os dias atuais.

No Capítulo 3, já conhecendo os principais sistemas de numeração, nos aprofundamos nos principais sistemas de numeração ao apresentar como se dá a notação de cada um, como são realizadas conversões entre bases e como são realizadas operações aritméticas.

Finalmente, o Capítulo 4 apresenta as considerações finais do trabalho a partir da investigação e descobertas realizadas.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como o presente trabalho se divide em duas partes centrais: revisão/contextualização histórica e aprofundamento nos principais sistemas numéricos da atualidade, também utilizamos duas referências principais.

Para a primeira parte, nos apoiamos na obra “The Hindu-Arabic numerals” de David Eugene Smith e Louis Charles Karpinski. Já a segunda parte tem como principal referência o trabalho “Informática: Conceitos e Aplicações” dos autores Marcelo Marçula e Pio Benini Filho.

3. HISTÓRIA E APLICAÇÕES DOS SISTEMAS DE NUMERAÇÃO

3.1. Definição e História

Um sistema de numeração é composto por **números** e **numerais**. Os números são os valores a serem representados, e os numerais são os símbolos escolhidos para representar cada valor.

O ser humano começou a usar símbolos para representar valores e quantidades logo após ter dominado a domesticação de animais. Ao final do dia, um pastor de ovelhas, por exemplo, contava nos dedos das mãos quantas ovelhas tinham no pasto. Ao completar 10 ovelhas (ou seja, todos os dedos das duas mãos), colocava um graveto ou pedra no chão representando essa “mão completa”, ou dezena. No dia seguinte era só conferir se o número de ovelhas ainda correspondia ao número de gravetos no chão. Daí nasce o sistema **decimal**, ou base 10. Usar partes do corpo para realizar contagens foi uma prática comum em diversas civilizações – os povos Maias usavam a base 20, por exemplo, pois usavam os dedos tanto dos pés quanto das mãos. Eles também foram os primeiros a usarem um símbolo para representar o zero. Outros povos chegaram a usar a base 60.

Os romanos criaram os símbolos “*I, V, X, M, C e L*” que podiam ser combinados de inúmeras maneiras para representar *quase* todos os números reais existentes (não existia uma representação para zero). Apesar de inovador, de certa forma, o grande problema desse sistema (e similares, como o babilônico ou o egípcio antigo) era que, para representar largas quantidades era necessário utilizar uma também larga quantidade de símbolos, dificultando bastante tanto a leitura quanto a escrita de tais valores.

Este problema foi solucionado pela invenção da chamada *notação posicional*, uma elegante solução para a representação de valores. Nos sistemas posicionais, cada símbolo tem um valor diferente dependendo da posição que ocupa na representação. O valor da posição é definido da seguinte forma:

1. Primeiro define-se a base numérica;
2. Em seguida, define-se um valor para cada posição, começando com zero na posição mais à direita e incrementando por um à medida que se passa mais à esquerda;
3. Multiplica-se o algarismo de cada casa pela base numérica elevada ao valor da posição;
4. Soma-se todos os produtos para se chegar ao valor final.

Assim, no número 1937 (base 10), este processo se daria da seguinte maneira:

1. A base utilizada é 10.

2. 1 9 3 7

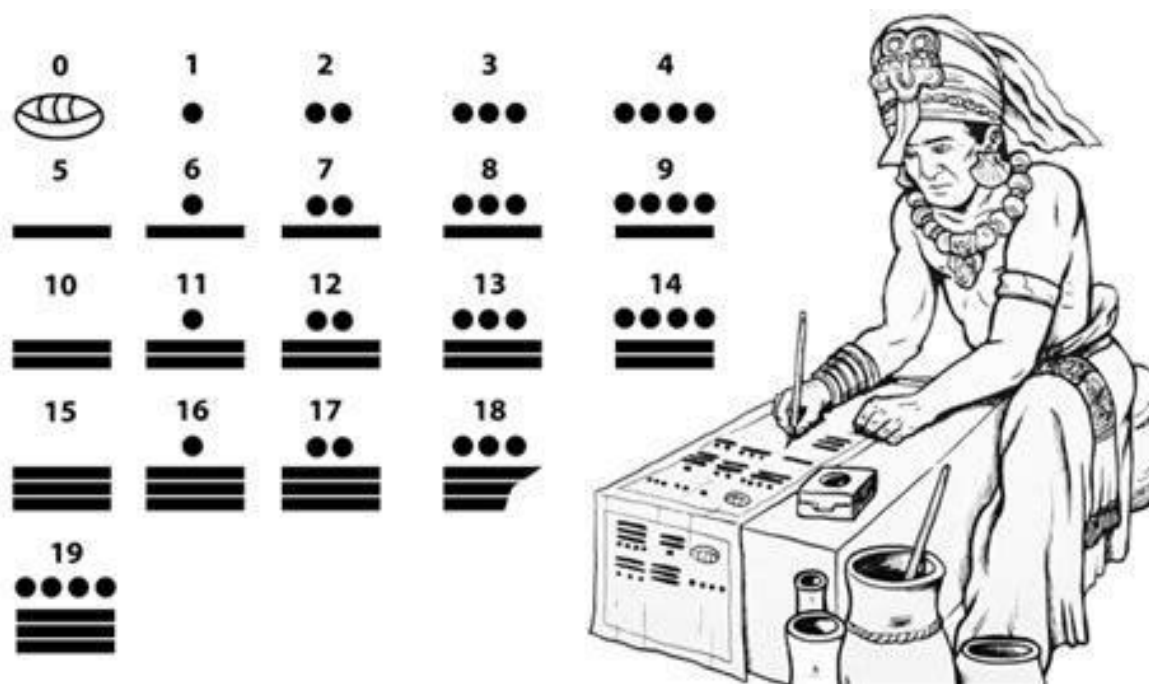
(posição 3) (posição 2) (posição 1) (posição 0)

3. $1 * 10^3 + 9 * 10^2 + 3 * 10^1 + 7 * 10^0 = 1 * 1000 + 9 * 100 + 3 * 10 + 7 * 1$

4. $1000 + 900 + 30 + 7 = 1937$

Algumas civilizações antigas já utilizavam notação posicional com outros símbolos (como os Maias e Babilônios), como representado na Figura 1:

Figura 1: Sistema numérico Maia e legenda dos valores em decimal.



Fonte: <https://www.explore.mx/el-sistema-numerico-de-los-mayas/>. Acesso em 20 de Novembro de 2022.

Porém a notação posicional utilizando os símbolos modernos de 0 a 9 foi uma invenção indo arábica que se espalhou pela Europa através de comerciantes árabes e acabou se estabelecendo como norma pela facilidade de representar números grandes e realizar cálculos complexos.

Contudo, mesmo que o sistema decimal seja atualmente o sistema hegemônico, nós não utilizamos apenas a base 10 em nosso cotidiano. A base 12, por exemplo, é utilizada sempre que fazemos cálculos de tempo ou de preço de itens vendidos pela dúzia. Diversos cientistas argumentam que a base 12 (ou sistema duodecimal) seria, inclusive, uma base

melhor do que a decimal, pelo fato de que 12 é um número altamente composto e pode representar frações comuns como números naturais.

3.2. Sistemas de numeração modernos

Os sistemas numéricos que resistiram ao “teste do tempo” são aqueles que cumprem com alguns requisitos, entre eles: ter a capacidade de representar uma grande quantidade de números (como todos os números do conjunto dos inteiros, naturais ou reais); ter uma identidade (ou representação) única para cada número; ter a capacidade de reproduzir as estruturas algébricas e aritméticas dos números. Dos que cumprem estes requisitos, vamos ver em mais detalhes os três sistemas alternativos que são mais utilizados pela computação: os sistemas de base dois, oito e dezesseis.

Todos os sistemas que veremos a seguir possuem a semelhança de que qualquer zero à esquerda do primeiro dígito significativo pode ser ignorado sem alteração do valor representado.

3.2.1. Sistema de numeração octal

O sistema de numeração octal (base oito) utiliza oito numerais para representar seus valores: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Este sistema deriva do sistema binário, tendo surgido como uma alternativa para representar valores binários de forma mais compacta. Porém, atualmente é mais comum utilizar a base hexadecimal para esta finalidade, por possuir uma representação ainda mais compacta. Sua progressão, bem como sua relação com o sistema decimal, são ilustrados na Tabela 1:

Tabela 1: Relação entre os sistemas decimal e octal.

Decimal	Octal
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	10

9	11
10	12
11	13
12	14
13	15
14	16
15	17
16	20

Elaborado pelo autor. (2022)

3.2.2. Sistemas de numeração hexadecimal

O Sistema de numeração hexadecimal utiliza a base 16 e, portanto, conta com 16 símbolos para representar seus valores: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, e F. Ele surgiu como uma forma mais compacta de representar valores binários pois a conversão entre as bases 2 e 16 é relativamente simples (por 16 ser múltiplo de 2). O maior número de símbolos possibilita a representação de valores altos com menos dígitos. Enquanto o valor de um milhão precisa de 20 dígitos para ser representado na base 2 (11110100001001000000), na base 16 são necessários apenas 5 (F4240). Na informática é comum encontrar valores hexadecimais na representação de cores ou em endereços de memória - ambos campos onde números gigantescos precisam ser representados de maneira compacta.

Sua progressão, bem como sua relação com a base 10, estão ilustradas pela Tabela 2:

Tabela 2: Relação entre os sistemas decimal e hexadecimal, a partir do 9º elemento.

Decimal	Hexadecimal
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F
16	10

17	11
18	12
19	13
20	14
21	15
22	16
23	17
24	18
25	19
26	1A
27	1B

Elaborado pelo autor. (2022)

3.2.3. Sistemas de numeração binário

O sistema binário é sem dúvidas o mais importante para o universo da computação. Ele utiliza apenas dois símbolos, 0 e 1. Nos primórdios dos computadores, cientistas e engenheiros escolheram a base 2 para programar os computadores baseados em dois fatores principais: em primeiro lugar a facilidade em representar os estados da eletricidade com os valores 0 e 1 (ligado ou desligado, com ou sem pulso de energia). Em segundo lugar, pela pequena margem de erros que este sistema possui por não existirem números intermediários para cada dígito, garantindo um maior nível de confiabilidade.

A utilização deste sistema, contudo, só foi possível graças ao trabalho de matemáticos como George Boole, que esquematizou como seria possível realizar não só complexas operações aritméticas com a base 2 mas também criar tabelas lógicas à partir da representação dos valores “zero” e “um” como “falso” e “verdadeiro”. Conhecido como **lógica booleana**, esta área da matemática propiciou que atualmente volumes gigantescos de dados sejam processados em binário e renderizados como gráficos complexos de jogos ou filmes em alta resolução, por exemplo.

A progressão desse sistema, bem sua relação com a base 10, são ilustradas pela Tabela 3:

Tabela 3: Relação entre os sistemas decimal e binário.

Decimal	Binário
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010
11	1011
12	1100
13	1101
14	1110
15	1111
16	10000

Elaborado pelo autor. (2022)

3.2.4. Operações aritméticas básicas

É possível realizar operações aritméticas na base 2 de maneira similar à que utilizamos com a base 10. As figuras abaixo ilustram como realizar as operações de adição e multiplicação com números binários.

Figura 2: Adição binária.

$$\begin{array}{r} \text{"vai um"} \longrightarrow 1 \quad 1 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 \\ + 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0_2 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1_2 \end{array}$$

Elaborado pelo autor. (2022)

Figura 3: Multiplicação binária.

$$\begin{array}{r} 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1_2 \\ 1 \quad 0 \quad 1_2 \times \\ \hline 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \\ \hline 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1_2 \end{array}$$

Elaborado pelo autor. (2022)

3.2.5. Métodos de conversão

Existem diversos métodos para converter a representação de um valor de uma base para outra e estes métodos variam de acordo com o sistema com o qual estamos trabalhando. Existe uma fórmula geral ilustrada pelo algoritmo em quatro etapas citado no último capítulo ou é realizado um somatório dos produtos de cada numeral elevado à posição ocupada na representação.

Figura 4: Conversão decimal para binário utilizando o método das divisões sucessivas.

2022/11/30 16:42

Conversão Decimal → Binário
método das divisões sucessivas

$127_{10} = X_2$

127 | 2
126 | 63 | 2
1 | 62 | 31 | 2
1 | 30 | 15 | 2
1 | 14 | 7 | 2
1 | 6 | 3 | 2
1 | 2 | 1 | 2
1 | 0 | 0
1

portanto,

$127_{10} = 1111111_2$

Elaborado pelo autor. (2022)

Figura 5: Conversão decimal para binário dois utilizando o método da notação posicional.

Conversão Binário-Decimal
método da notação posicional

$10011011_2 = X_{10}$

2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
128	64	32	16	8	4	2	1
1	0	0	1	1	0	1	1

$128 + 0 + 0 + 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 155$

$\therefore 10011011_2 = 155_{10}$

Elaborado pelo autor. (2022)

Figura 6: Conversão binário para decimal utilizando a fórmula geral de conversão.

Conversão Binário - Decimal

$110101_2 = X_{10}$

fórmula: $\sum \text{numeral} \cdot \text{base}^{\text{posição}}$

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$

$$= 32 + 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 53$$

Assim, $110101_2 = 53_{10}$

2022/11/30 16:35

Elaborado pelo autor. (2022)

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram discutidos os diversos sistemas de numeração utilizados pelas civilizações ao longo da história; foi aprofundado o conhecimento acerca de cada um dos sistemas de numeração modernos como os sistemas binário, octal e hexadecimal, entendendo o propósito de utilizar cada um deles na atualidade; foi elucidado como realizar conversões entre bases e como realizar operações aritméticas básicas.

Embora seja importante conhecer a história, nosso foco principal foi em compreender a lógica interna dos sistemas de numeração que são amplamente utilizados no universo da ciência da computação e da informática, a saber os sistemas binário, octal e hexadecimal.

Conhecer em profundidade estes sistemas é imprescindível para se tornar um bom profissional na área, pois as linguagens de programação são apenas uma interface para nos comunicarmos com os computadores: sua verdadeira linguagem consiste apenas em zeros e uns.

REFERÊNCIAS

Internet:

Conversor online de bases numéricas. Disponível em:

<https://www.rapidtables.com/convert/number/decimal-to-binary.html>. Acesso em: 20 de Novembro de 2022.

O Sistema numérico Maia. Disponível em:

<http://www.invivo.fiocruz.br/cienciaetecnologia/o-sistema-numerico-maia/>. Acesso em: 20 de Novembro de 2022.

Lógico Booleana: saiba um pouco mais sobre esta lógica e como ela funciona.

Disponível em:

<https://www.tecmundo.com.br/programacao/1527-logica-booleana-saiba-um-pouco-mais-sobre-esta-logica-e-como-ela-funciona.htm>. Acesso em: 20 de Novembro de 2022.

Sistemas de numeração. Disponível em:

<https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm>. Acesso em: 20 de Novembro de 2022.

Uma Breve História dos Sistemas de Numeração. Disponível em:

<https://www.youtube.com/watch?v=cZH0YnFpjwU&t>. Acesso em: 20 de Novembro de 2022.

Livros:

GONICK, Larry. **Introdução Ilustrada à Computação**. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1984. 242 p.

Marçula, Marcelo. **Informática: conceitos e aplicações** / Marcelo Marçula, Pio Armando Benini Filho. – 5 ed. – São Paulo: Érica, 2019. 408 p.

SMITH, David Eugene; KARPINSKI, Louis Charles. **The Hindu-Arabic Numerals**. Ginn and Company, 1911.

ANEXOS

A.1. Apêndice A: Relação entre Sistemas Decimal, Binário, Octal e Hexadecimal

Decimal	Binário	Octal	Hexadecimal
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14
30	11110	36	1E
50	110010	62	32
100	1100100	144	64
1,000	1111101000	1750	3E8
1,000,000	11110100001001000000	3641100	F4240