AUTOMATICKÉ RIADENIE 1

1. prednáška

Spojité riadenie

Prednášky a cvičenia zabezpečuje:

Jana Paulusová, ÚRK, D-411

jana.paulusova@stuba.sk

Obsah prednášok

Hodnotenie predmetu

Cvičenia – max. 50 bodov

PROJEKT - Každý študent dostane zadanú spojitú prenosovú funkciu opisujúcu reálny technologický proces a postupne vypracuje úlohy podľa zadaní na jednotlivých cvičeniach. Vypracovaný projekt treba odovzdať:

- **1. časť** odovzdať (vypracované zadania cv. 1.-6. na **7. cvičení**)
- **2. časť** odovzdať (vypracované zadania 7.-11. na **12. cvičení**)

Podmienka udelenia zápočtu:

min. 25 b (odovzdaný projekt) + aktívna účasť na cvičeniach

Skúška (písomná) – **max. 50 bodov**

Spolu – max. 100 bodov

Študijné materiály

- **prof. Kozák: Lineárne číslicové systémy I.**
- **prof. Kozák: Lineárne číslicové systémy I.**
  PRÍKLADY NA CVIČENIA
  Návrh regulátorov

- **prednášky Automatické riadenie 1**
  (v nadväznosti na Úvod do kybernetiky)
- **AIS** priečinok **PREDNASKY** – materiály k prednáškam
- **AIS** priečinok **CVICENIA** – materiály ku cvičeniam

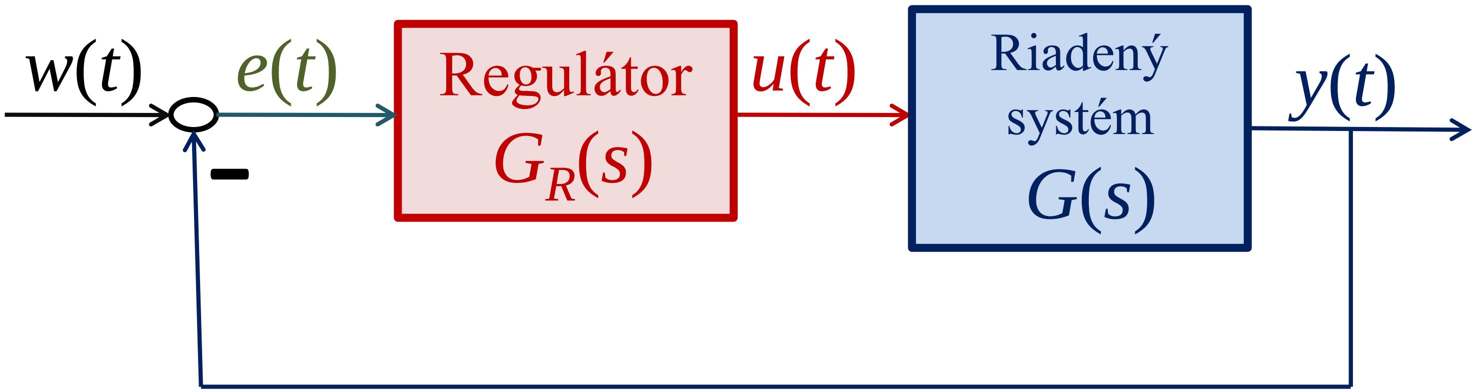
1. prednáška - OPAKOVANIE

Základný regulačný obvod

- **u**zavretý **r**egulačný **o**bvod (**URO**) a **o**tvorený **r**egulačný **o**bvod (**ORO**)
- **opis systému** pomocou **prenosovej funkcie**
- **model riadeného systému** - jeho opis, **prechodová charakteristika** a **frekvenčná charakteristika**
- **prenosové funkcie ORO a URO**
- **ch**arakteristická **r**ovnica **URO** (**CHRURO**)
- stabilita a kvalita URO
- štruktúra PID regulátora

Metódy návrhu PID regulátorov pre systémy s dopravným oneskorením

Základný regulačný obvod



$G(s)$ – prenosová funkcia riadeného systému

$G_R(s)$ – prenosová funkcia regulátora

$w(t)$ – žiadaná hodnota (referenčná veličina)

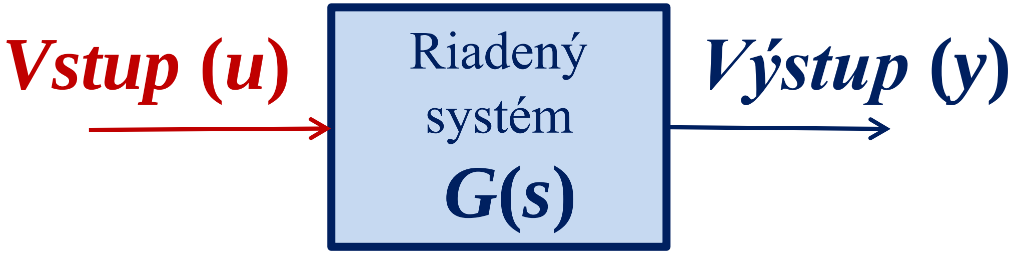
$u(t)$ – akčná veličina

$e(t)$ – regulačná odchýlka

$y(t)$ – riadená (výstupná) veličina

$$e(t) = w(t) - y(t)$$

Prenosová funkcia riadeného systému *G*(*s*)



SISO systém
(**S**ingle **I**nput – **S**ingle **O**utput)

RIADENÝ SYSTÉM je reprezentovaný pomocou definície všeobecného dynamického systému, pričom jeho vstupmi sú suroviny a vstupná energia a výstupom je výstupná energia a finálny produkt.

PRENOSOVÁ FUNKCIA systému je podiel Laplaceovho obrazu výstupnej veličiny k obrazu vstupnej veličiny pri nulových počiatočných podmienkach.

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}$$

Prechodová charakteristika systému

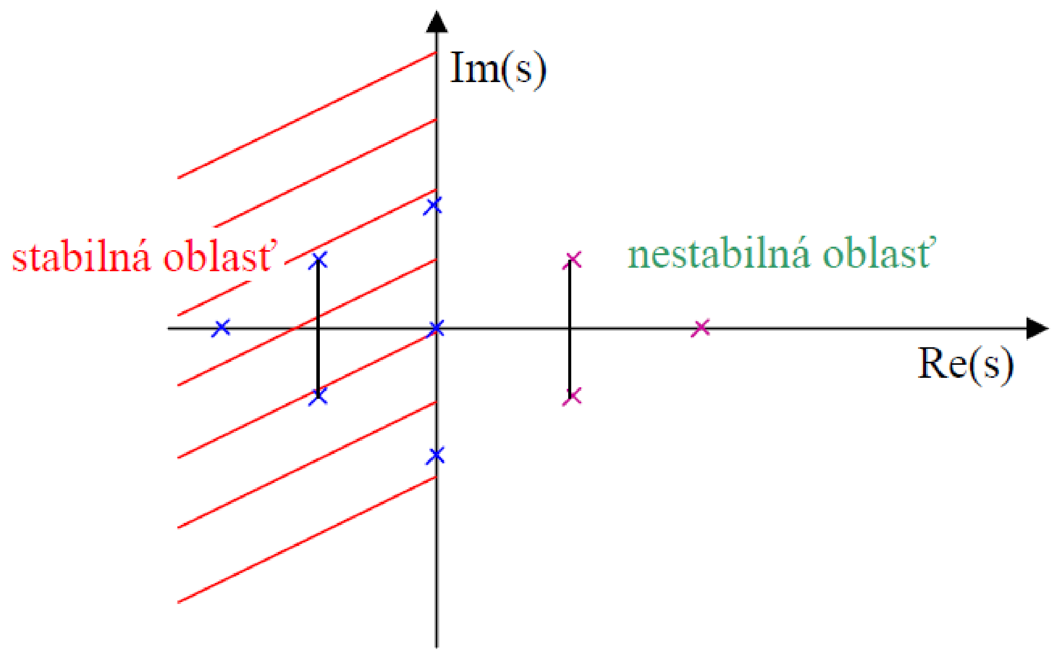
Def.: **Prechodová funkcia je odozva systému na jednotkový skok** (na vstupe) **pri nulových počiatočných podmienkach.** Označujeme ju $y(t)$. Jej grafickým znázornením je **prechodová charakteristika**.

Vzhľadom na to, že skoková funkcia vyjadruje plné frekvenčné spektrum, je informácia získaná analýzou **prechodových charakteristík** veľmi významná a spolu s informáciami získanými z **frekvenčných charakteristík** v plnej miere charakterizuje **dynamické vlastnosti systému**.

Stabilita riadeného systému

$$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

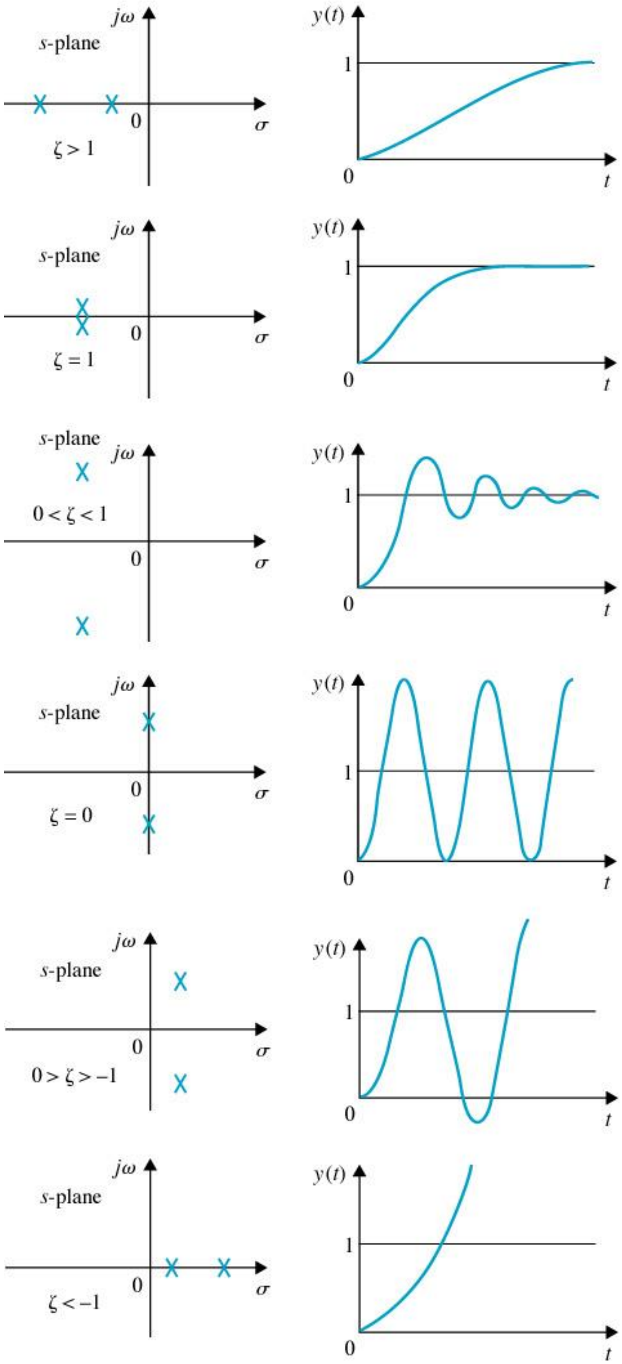
Riadený systém je stabilný, keď majú **všetky jeho póly** (korene menovateľa *A*(*s*)) **zápornú reálnu časť**. Od polohy pólov riadeného systému závisí aj priebeh prechodovej charakteristiky riadeného systému.



Priebeh prechodovej charakteristiky riadeného systému závisí od polohy jeho pólov v komplexnej rovine.

Na obrázku sú uvedené príklady priebehov prechodových charakteristík systému 2. rádu s menovateľom:

$$A(s) = s^2 + 2\zeta s + 1$$



Systém s dopravným oneskorením *D*

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\ldots+b_0}{a_n s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0}\,e^{-Ds}$$

Dopravné oneskorenie je jav, ktorý sa v zariadeniach chemických, potravinárskych a iných technológií vyskytuje veľmi často. Objavuje sa vždy, ak dochádza k transportu látky. Vzniká v dôsledku konečnej rýchlosti pohybu materiálov a konečnej rýchlosti prenosu signálov. Je definované ako čas transportu látky z technologického zariadenia do automatického analyzátora, ktorý býva spojený s technologickým zariadením potrubím. Týmto potrubím sa do automatického analyzátora dopravuje analyzovaná látka z technologického zariadenia.

Systém je minimálne fázový, ak majú všetky jeho nuly zápornú reálnu časť, inak je neminimálne fázový. **Systém s dopravným oneskorením** je **neminimálne fázový**.

Existuje niekoľko spôsobov aproximácie dopravného oneskorenia:

1. Padeho aproximácia

$$e^{-Ds} = \frac{e^{-\frac{D}{2}s}}{e^{\frac{D}{2}s}}$$

Aproximácia je vyjadrená ako pomer dvoch polynómov s rozvojom do Taylorovho radu

$$e^{-Ds} \approx \frac{P_n(s)}{Q_n(s)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{(2n)!} D^n s^n}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} D^n s^n} = \frac{1 - \frac{D}{2}s + \frac{D^2}{12}s^2 - \frac{D^3}{120}s^3 + \cdots}{1 + \frac{D}{2}s + \frac{D^2}{12}s^2 + \frac{D^3}{120}s^3 + \cdots}$$

Najčastejšie používame n=1, (kvôli realizácii)

Pre n=1 $\longrightarrow$

$$e^{-Ds} \approx \frac{1 - \frac{sD}{2}}{1 + \frac{sD}{2}}$$

Aproximácia dopravného oneskorenia (2/3)

2. Aproximácia Tayl. radom iba čitateľa:

$$e^{-Ds} \approx \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{D^n}{n!} s^n = 1 - Ds + \frac{D^2}{2} s^2 - \frac{D^3}{3!} s^3 + \cdots$$

pre n=1

$$e^{-Ds} \approx 1 - Ds$$

3. Aproximácia Tayl. radom iba menovateľa:

$$e^{-Ds} = \frac{1}{e^{sD}} \approx \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} s^n} = \frac{1}{1 + Ds + \frac{D^2}{2} s^2 + \frac{D^3}{3!} s^3 + \cdots}$$

pre n=1

$$e^{-Ds} \approx \frac{1}{1 + Ds}$$

Príklad aproximácie

$$G(s) = \frac{1}{20s+1} e^{-10s}$$

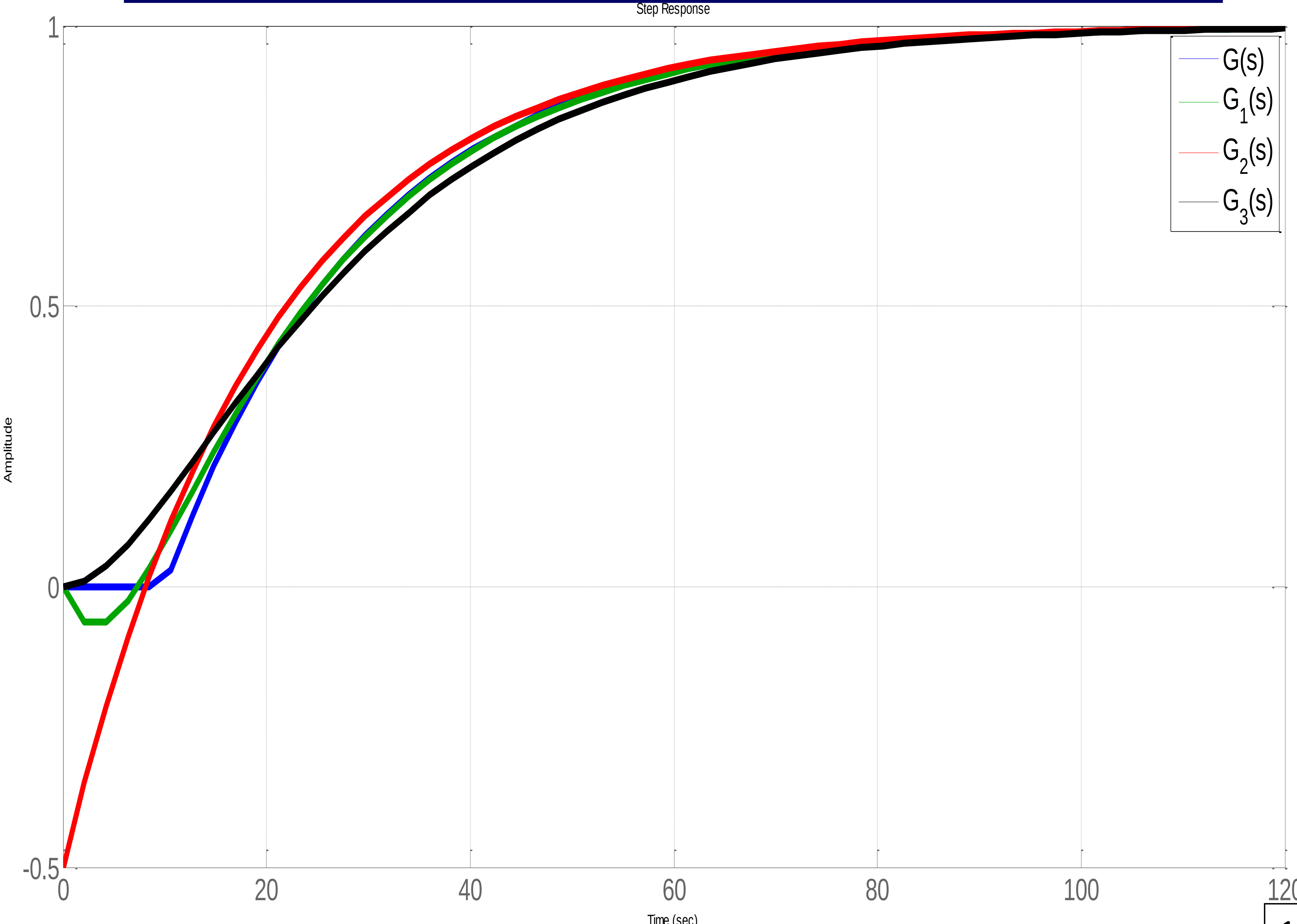
$$G_1(s) = \frac{1}{20s+1} \frac{1 - \frac{10}{2}s}{1 + \frac{10}{2}s} = \frac{1-5s}{100s^2 + 25s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{1}{20s+1} (1 - 10s) = \frac{1-10s}{20s+1}$$

Vnáša nestabilnú „nulu“

$$G_3(s) = \frac{1}{20s+1} \frac{1}{1+10s} = \frac{1}{200s^2 + 30s + 1}$$

Aproximácia dopravného oneskorenia (3/3)



PCH pri rôznych spôsoboch aproximácie dopr. oneskorenia

Frekvenčná charakteristika systému

Frekvenčná prenosová funkcia opisuje správanie sa lineárneho systému pri pôsobení harmonického vstupného signálu

$$u(t) = \sin \omega t,$$

ktorého obraz v Laplaceovej transformácii je $U(s) = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$

Frekvenčná prenosová funkcia je definovaná ako podiel Fourierových obrazov výstupnej a vstupnej veličiny pri nulových počiatočných podmienkach.

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}$$

Grafické znázornenie frekvenčnej prenosovej funkcie sa nazýva frekvenčná charakteristika.

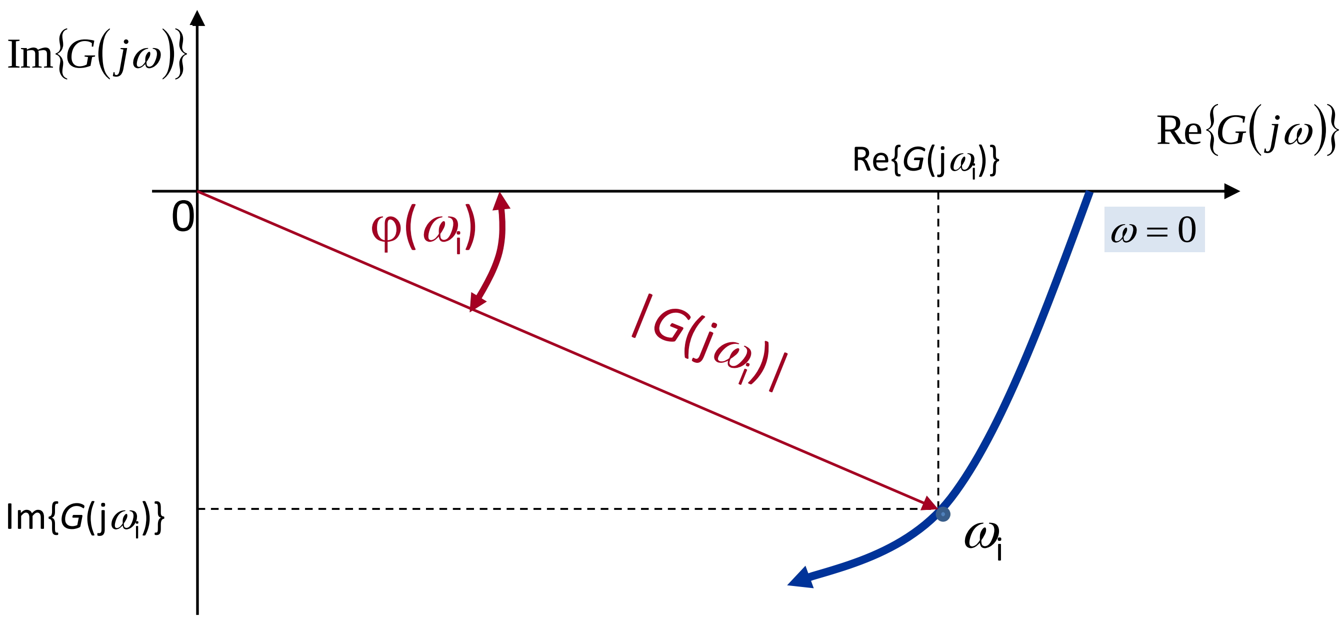
Frekvenčné charakteristiky sa zakresľujú do **komplexnej roviny** alebo do **logaritmických súradníc**.

Frekvenčná char. v komplexnej rovine (Nyquistove char.)

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=|G(j\omega)|e^{j\arg G(j\omega)}=\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}$$

$$|G(j\omega)|=\sqrt{(\mathrm{Re}\{G(j\omega)\})^2+(\mathrm{Im}\{G(j\omega)\})^2}$$ → Modul frekvenčného prenosu

$$\varphi(\omega)=\arg G(j\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}$$ → Fázový posun



Frekvenčná char. v komplexnej rovine – príklad (1/3)

Pr.: Určte frekvenčnú charakteristiku v komplexnej rovine pre prenosovú funkciu:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ts+1}$$

Ak za ***s*** dosadíme ***jω*** dostaneme frekvenčný prenos danej sústavy

$$G(j\omega)=\frac{1}{jT\omega+1}$$

Pre zobrazenie frekvenčnej charakteristiky potrebujeme ***G(jω)*** rozpísať na **reálnu a imaginárnu** časť:

$$G(j\omega)=\frac{1}{jT\omega+1}\left(\frac{1-jT\omega}{1-jT\omega}\right)=\frac{1-jT\omega}{1+T^2\omega^2}=\boxed{\frac{1}{1+T^2\omega^2}}+j\boxed{\frac{(-T\omega)}{1+T^2\omega^2}}$$

$$\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}=\mathrm{Re}$$

$$\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}=\mathrm{Im}$$

Frekvenčná char. v komplexnej rovine – príklad (2/3)

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+T^2\omega^2}+j\frac{(-T\omega)}{1+T^2\omega^2}$$

Pre príslušné *ω* si určíme *G*(*jω*)

$$\omega\in<0,\infty)$$

$$\omega=0 \qquad G(j\omega)=1$$

$$\omega\to\infty \qquad G(j\omega)=0$$

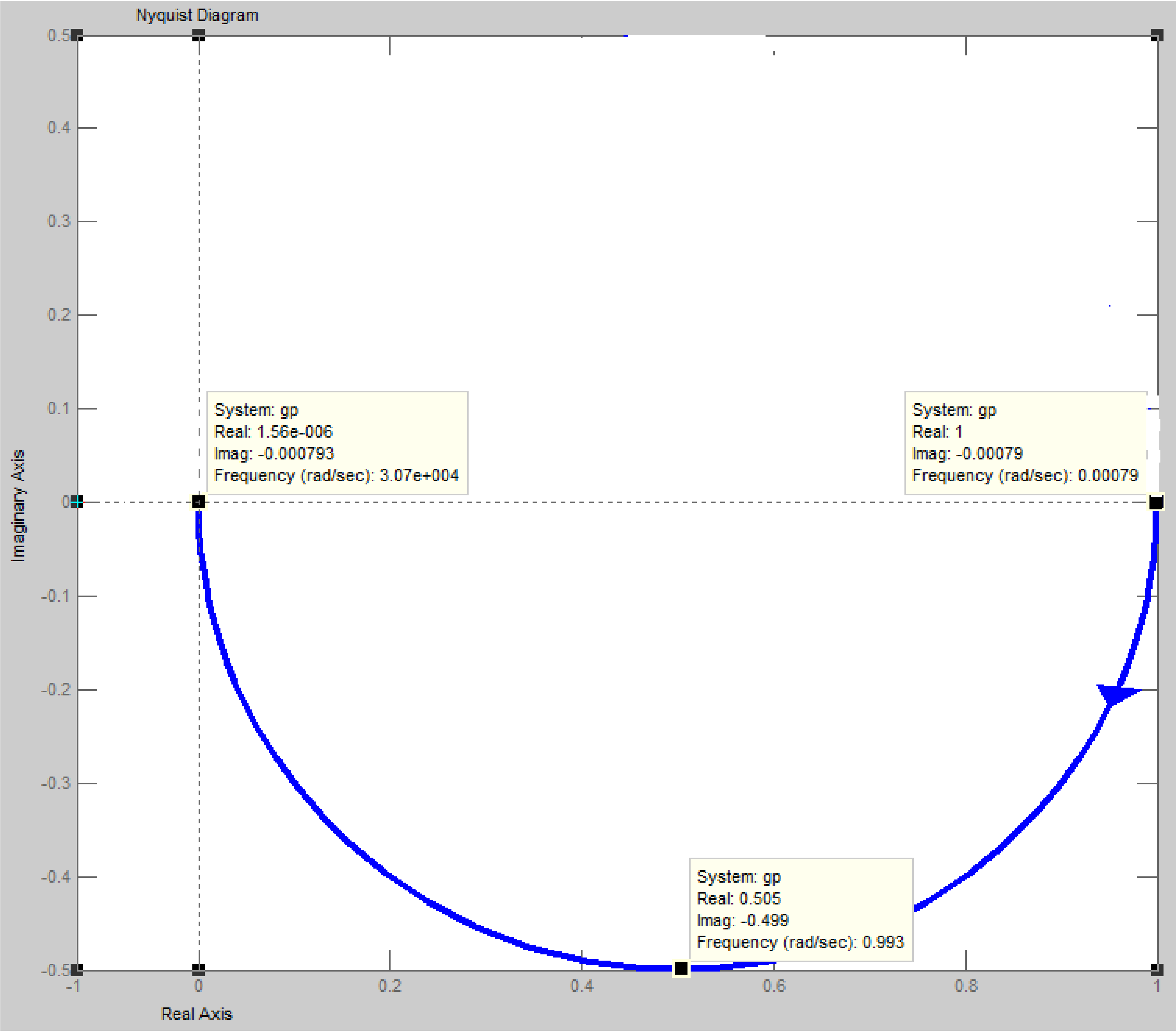
$$\omega=\frac{1}{T} \qquad G(j\omega)=\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}}e^{-j\frac{\pi}{4}}$$

Frekvenčná charakteristika bude mať tvar **polkružnice** s **polomerom 0.5**. **Začína v bode (1, *j*0)**, pretože **zosilnenie prenosovej funkcie je 1**.

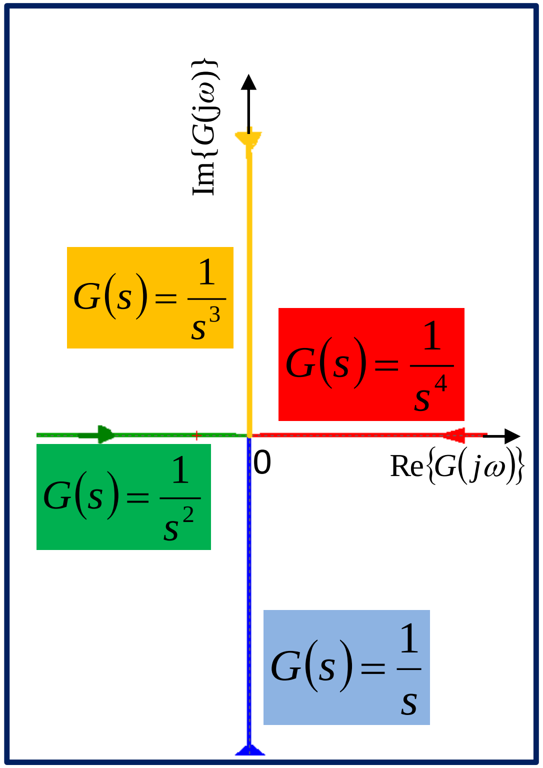
Na nasledovnom obr. (str. 1-17) je priebeh frekvenčnej charakteristiky pre prenosovú funkciu

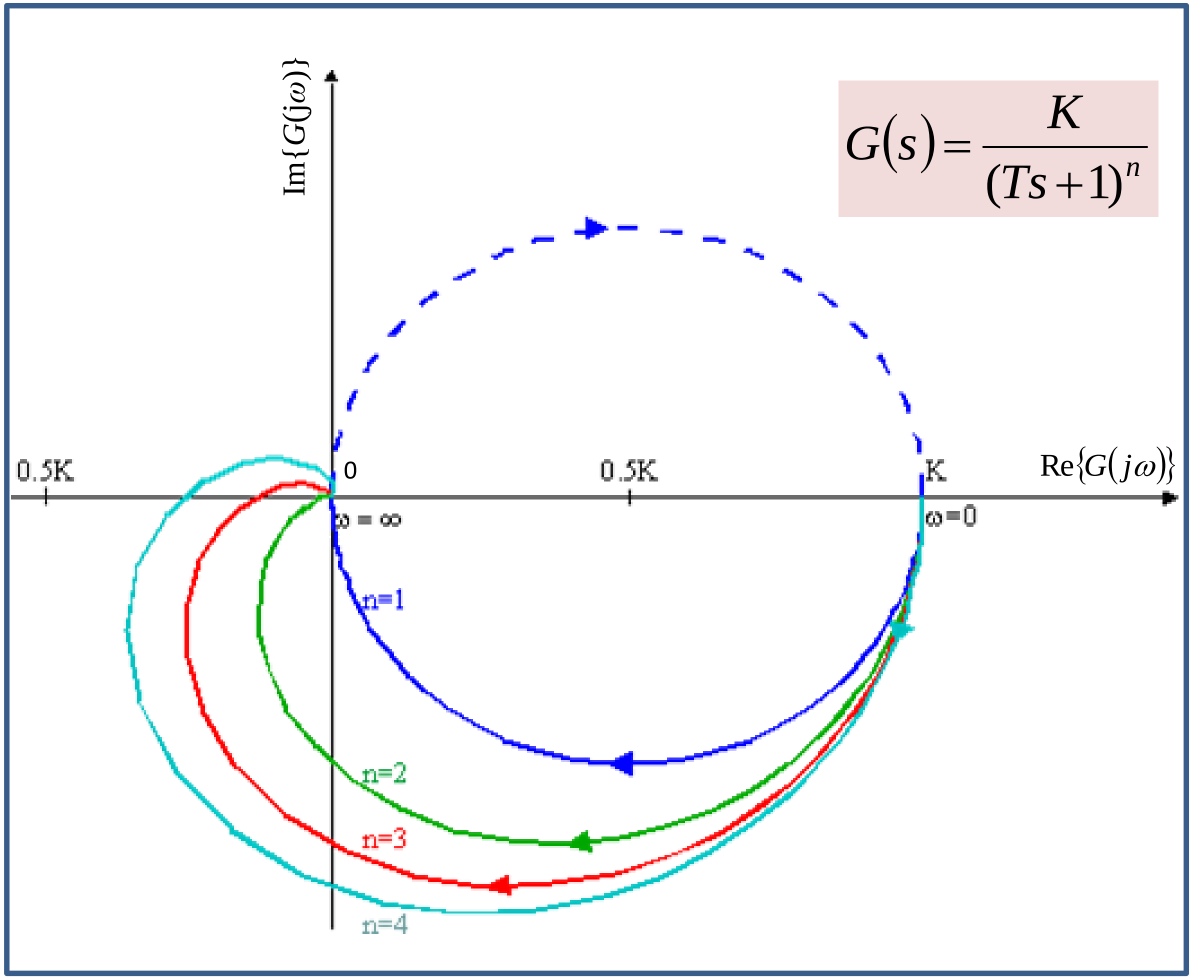
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ts+1} \qquad T=1$$

Frekvenčná char. v komplexnej rovine – príklad (3/3)

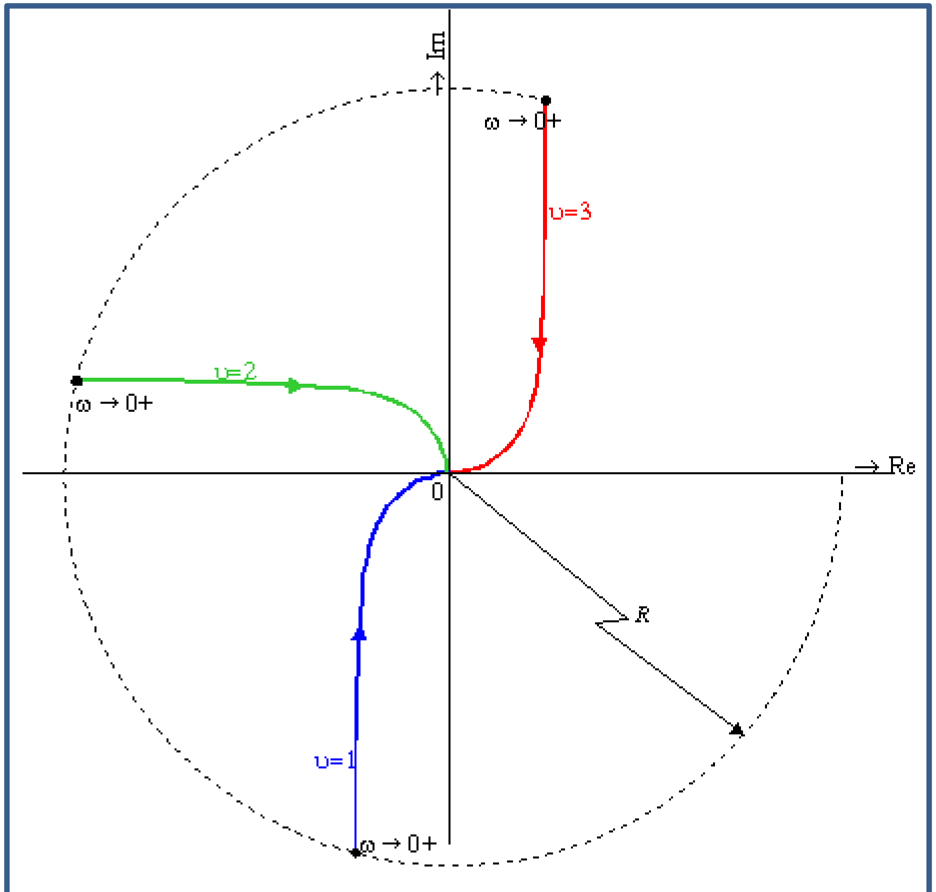


Príklady frekvenčných char. v komplexnej rovine

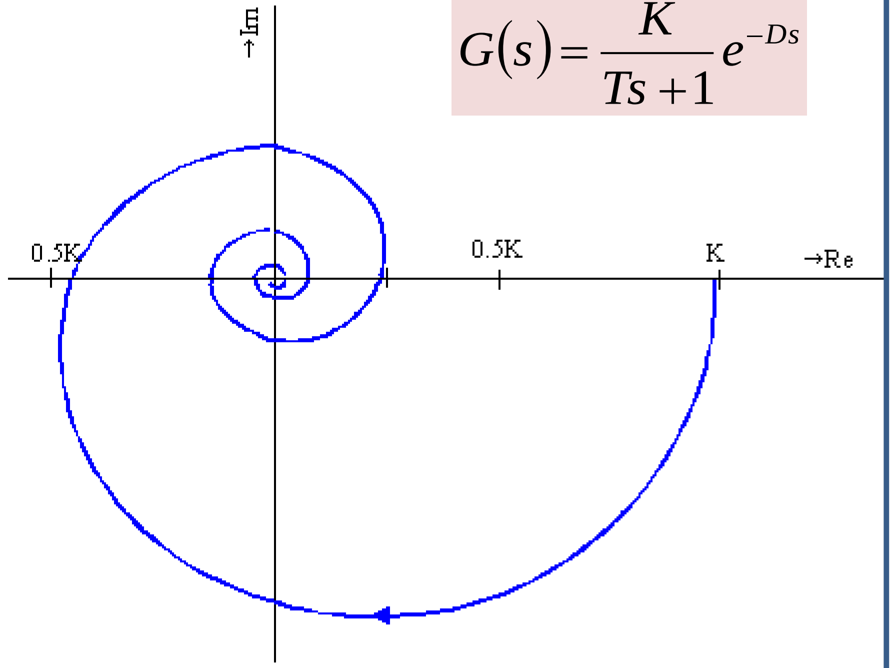




Príklady frekvenčných char. v komplexnej rovine – pokrač.



$$G(s)=\frac{K}{s^{\upsilon}(Ts+1)}$$



$$G(s)=\frac{K}{Ts+1}e^{-Ds}$$

Frekvenčné char. v logaritmických súradniciach (Bodeho diagram)

Prenosová funkcia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}$$

Frekvenčný prenos ($s=j\omega$)

$$G(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)} = \mathrm{Re}\{G(j\omega)\} + j\,\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}$$

Modul frekvenčného prenosu

$$|G(j\omega)| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{G(j\omega)\})^2 + (\mathrm{Im}\{G(j\omega)\})^2}$$

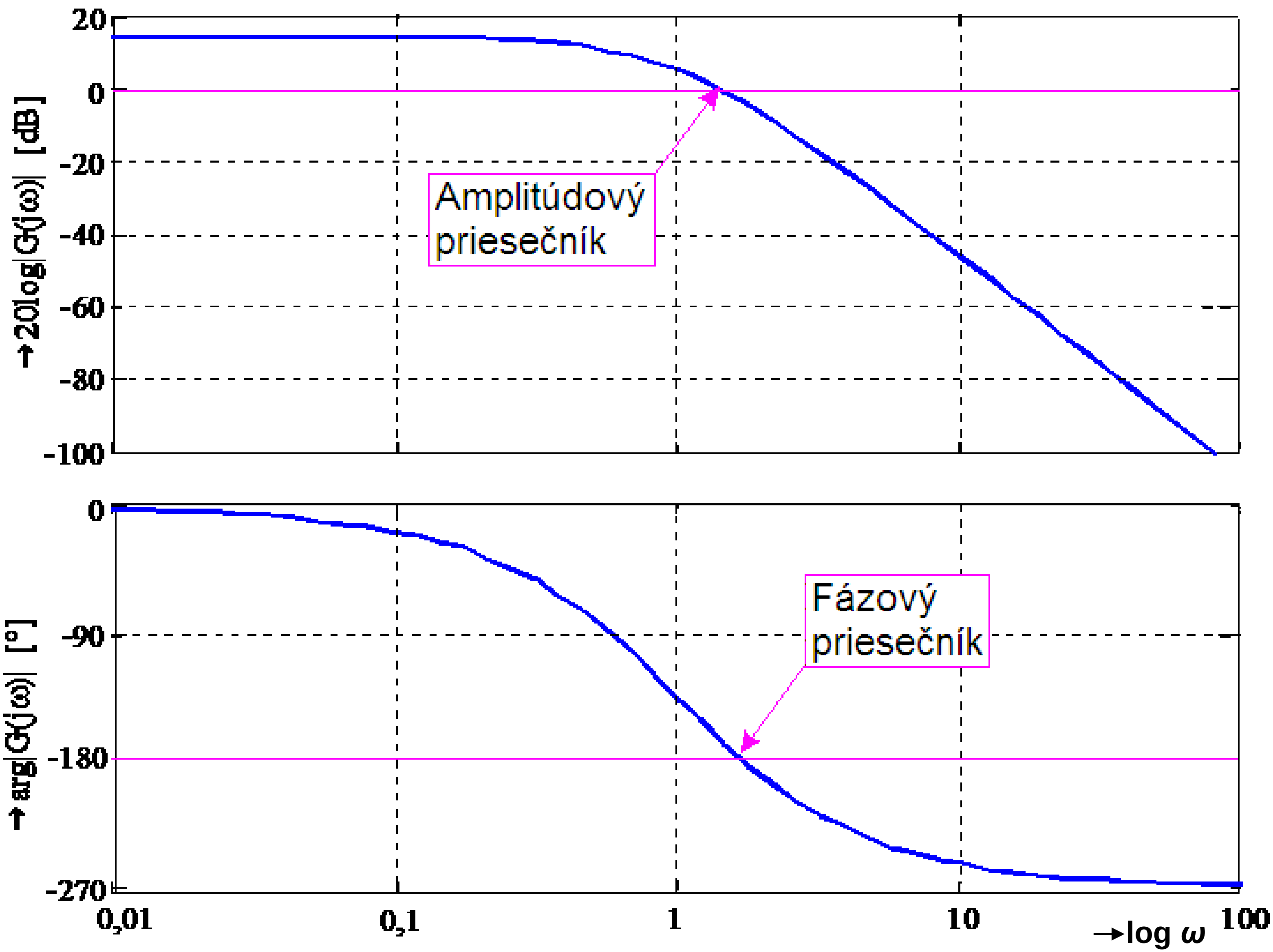
Fázový posun

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = arctg \frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}$$

Amplitúdovou frekvenčnou charakteristikou (ALFCH) budeme nazývať čiaru v systéme súradníc, ktorá vyjadruje závislosť dvadsaťnásobku dekadického logaritmu modulu frekvenčnej prenosovej funkcie $20 \log |G(j\omega)|$, ktorého jednotkou je decibel (dB), na dekadickom logaritme kruhovej frekvencie $\log \omega$.

Fázová logaritmická frekvenčná charakteristika (FLFCH) vyjadruje závislosť argumentu frekvenčnej prenosovej funkcie, ktorého jednotkou je stupeň, na dekadickom logaritme kruhovej frekvencie $\log \omega$.

Amplitúdová (hore) a fázová (dole) logaritmicko frekvenčná charakteristika



Frekvenčná char. v logaritmických súradniciach – príklad (1/3)

<u>Pr.:</u> Určte frekvenčnú charakteristiku v logaritmických súradniciach pre prenosovú funkciu:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{Ts+1} \xrightarrow[\textbf{s=j}\boldsymbol{\omega} \text{ frekvenčný prenos}]{} G(j\omega)=\frac{1}{jT\omega+1}$$

$$\boxed{G(j\omega)=\frac{1}{1+T^2\omega^2}+j\frac{(-T\omega)}{1+T^2\omega^2}=\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}+j\,\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}$$

Modul a fázový posun frekvenčného prenosu

$$|G(j\omega)|=\sqrt{(\mathrm{Re}\{G(j\omega)\})^2+(\mathrm{Im}\{G(j\omega)\})^2}=\sqrt{\frac{1}{1+T^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega)=\arg G(j\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}\{G(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{G(j\omega)\}}=arctg(-T\omega)$$

Potrebujeme získať hodnotu modulu v dB, teda

$$20\log|G(j\omega)|=20\log\sqrt{\frac{1}{1+T^2\omega^2}}$$

Frekvenčná char. v logaritmických súradniciach – **príklad** (2/3)

$$20\log\left|G(j\omega)\right| = 20\log\sqrt{\frac{1}{1+T^2\omega^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg G(j\omega) = arctg(-T\omega)$$

Pre príslušné ω si určíme **20 log *G(jω)*** [dB] a **arg *G(jω)*** [°]

$$\omega \in <0,\infty)$$

$\omega = 0$ $\quad 20\log\left|G(j\omega)\right| = 20\log 1 = 0dB \quad \arg G(j\omega) = artg(0) = 0°$

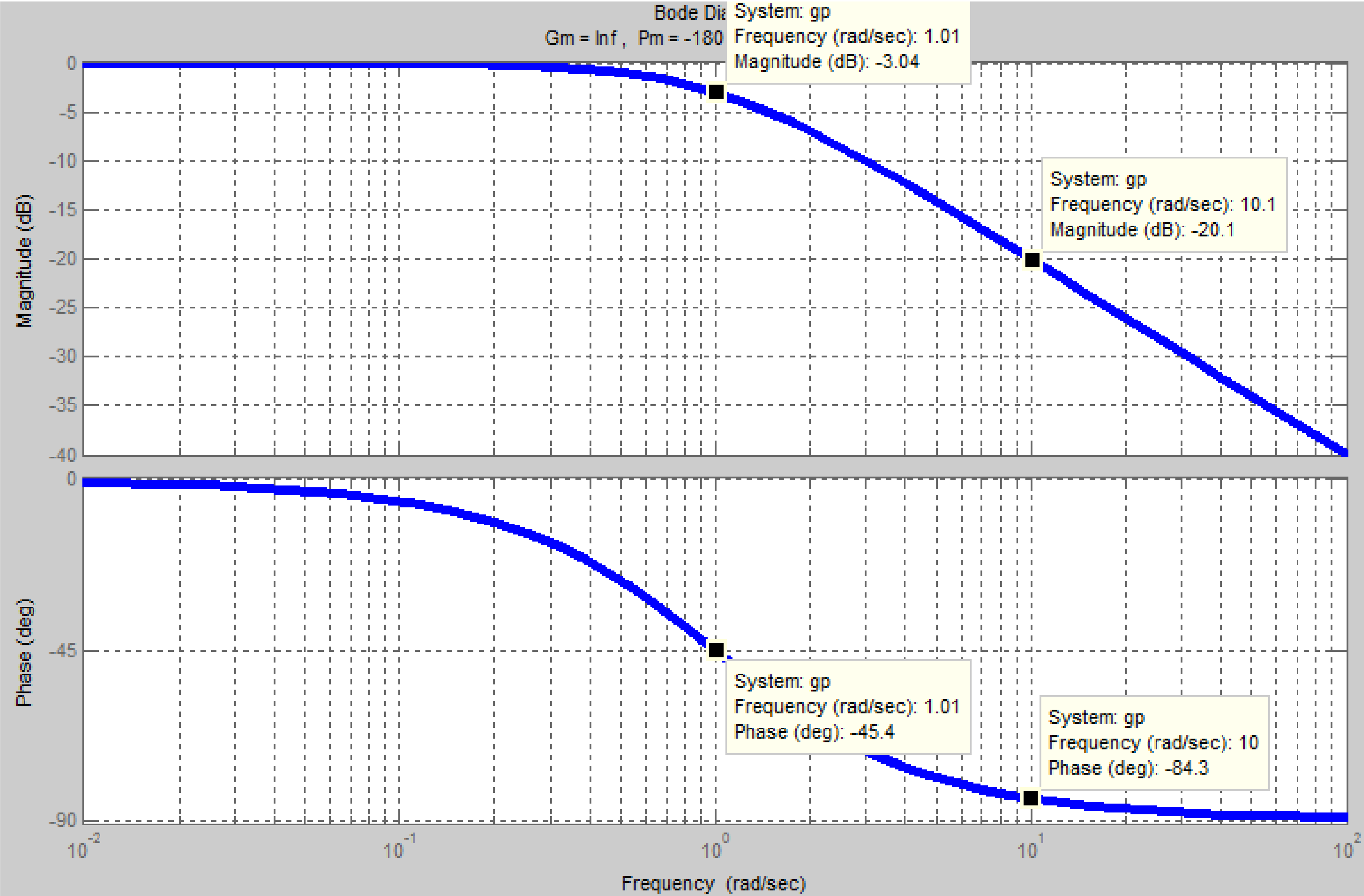
$\omega \to \infty$ $\quad 20\log\left|G(j\omega)\right| = 20\log 0 = -\infty dB \quad \arg G(j\omega) = artg(-\infty) = -90°$

$\omega = \frac{1}{T}$ $\quad 20\log\left|G(j\omega)\right| = 20\log\sqrt{0.5} = -3.0103dB \quad \arg G(j\omega) = artg(-1) = -45°$

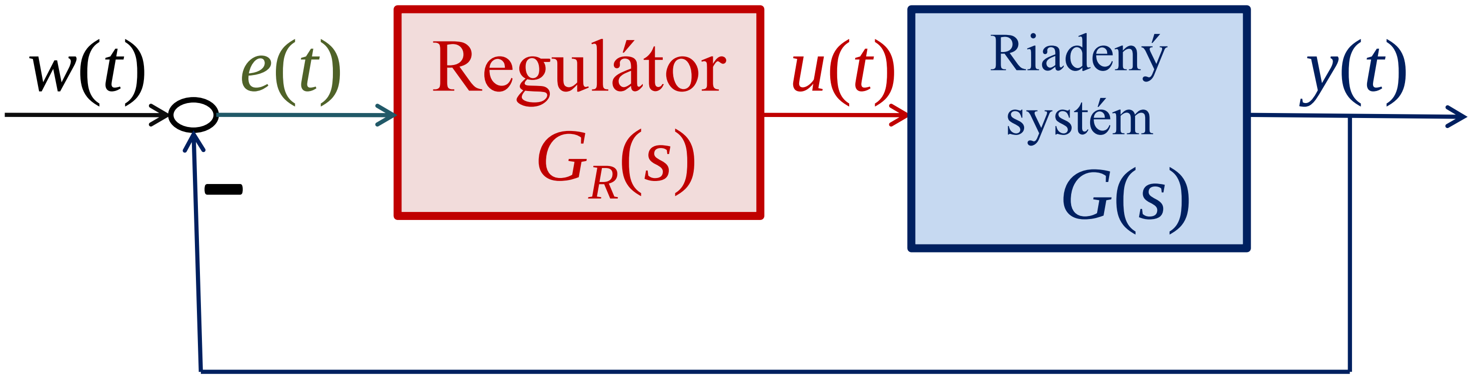
$\omega = 10$ $\quad 20\log\left|G(j\omega)\right| = 20\log\sqrt{\frac{1}{101}} = -20.0432dB, \arg G(j\omega) = artg(-10) = -84.2894°$

$(pre \quad T = 1)$

Frekvenčná char. v logaritmických súradniciach – príklad (3/3)



Stabilita URO



Všetky metódy na **vyšetrovanie stability** lineárnych systémov možno rozdeliť do dvoch kategórií:

- **Frekvenčné kritériá**, **vychádzajú z frekvenčnej prenosovej funkcie otvoreného regulačného obvodu**. Známe sú **Nyquistovo kritérium a Bodeho kritérium**.
- **Algebraické kritéria**, ktoré **vychádzajú z charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu (CHRURO) a v podstate vyšetrujú rozloženie pólov systému (koreňov CHRURO) v komplexnej rovine**. Uvedieme **Routhovo kritérium stability**.

Charakteristická rovnica URO

Prenosová funkcia URO

$$\boxed{G_{URO}(s)=G_{Y/W}(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{G(s)G_R(s)}{1+G(s)G_R(s)}=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)}}$$

Charakteristická rovnica URO (CHRURO) je, keď položíme menovateľ prenosovej funkcie URO nule

$$\boxed{1+G_O(s)=0}$$

$$G_O(s)=\boxed{G(s)}\,\boxed{G_R(s)}=\boxed{\frac{B(s)}{A(s)}}\,\boxed{\frac{C(s)}{D(s)}}$$

CHRURO - všeobecne

$$1+G_O(s)=1+G(s)G_R(s)=1+\frac{B(s)}{A(s)}\frac{C(s)}{D(s)}=\frac{\boxed{A(s)D(s)+B(s)C(s)}}{A(s)D(s)}=0$$

CHRURO $$\boxed{A(s)D(s)+B(s)C(s)=0}$$

Stabilita a kvalita URO

Stabilita = vlastnosť systému, ktorá nezávisí od vstupu, výstupu ani od porúch

Stabilita URO

- **z frekvenčných charakteristík ORO**
  – zjednodušené Nyquistovo kritérium, Bodeho kritérium
- **z charakteristickej rovnice URO (CHRURO)**
  – poloha pólov URO, Routhovo kritérium stability

Kvalita = závisí od charakteru vstupného signálu

- kvalita **v ustálených stavoch**
- kvalita **v prechodných stavoch**

Stabilita

V prípade riadiacich systémov nás zaujíma najmä **stabilita uzavretého obvodu**, t.j. stabilita systému automatického riadenia. V triede lineárnych systémov je stabilita vlastnosťou systému, čo znamená, že lineárny systém je buď stabilný alebo nestabilný.

Stabilným budeme nazývať taký systém, ktorý po vychýlení z rovnovážneho stavu a to vstupným alebo poruchovým signálom sa vráti späť do pôvodného rovnovážneho stavu alebo do blízkeho rovnovážnemu stavu.

Frekvenčné kritéria stability

Frekvenčné kritéria stability určujú stabilitu uzavretého obvodu z frekvenčnej prenosovej funkcie otvoreného obvodu:

$$G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega)$$

Existujú dve najviac používané kritériá:

- **Nyquistove kritérium** vychádza z frekvenčných charakteristík ORO v komplexnej rovine.
- **Bodeho kritérium** vychádza z logaritmických frekvenčných charakteristík ORO.

Nyquistovo kritérium stability

Nyquistova krivka = frekvenčná charakteristika + komplexne združená charakteristika

Potom platí: $N = P - \Omega$

kde

Ω je počet obehov Nyquistovej krivky okolo bodu (-1,0j) znamienko sa určí na základe orientácie charakteristiky, pričom záporná hodnota zodpovedá smeru hodinových ručičiek

P je počet nestabilných pólov ORO $G_O(s)$

N je počet nestabilných pólov URO $G_{URO}(s)$

Dá sa riešiť aj analyticky. Hranica stability je

$$\boxed{\operatorname{Re}\{G_O(j\omega)\} = -1 \qquad \operatorname{Im}\{G_O(j\omega)\} = 0}$$

Nyquistovo kritérium stability - príklad1

PR. 1

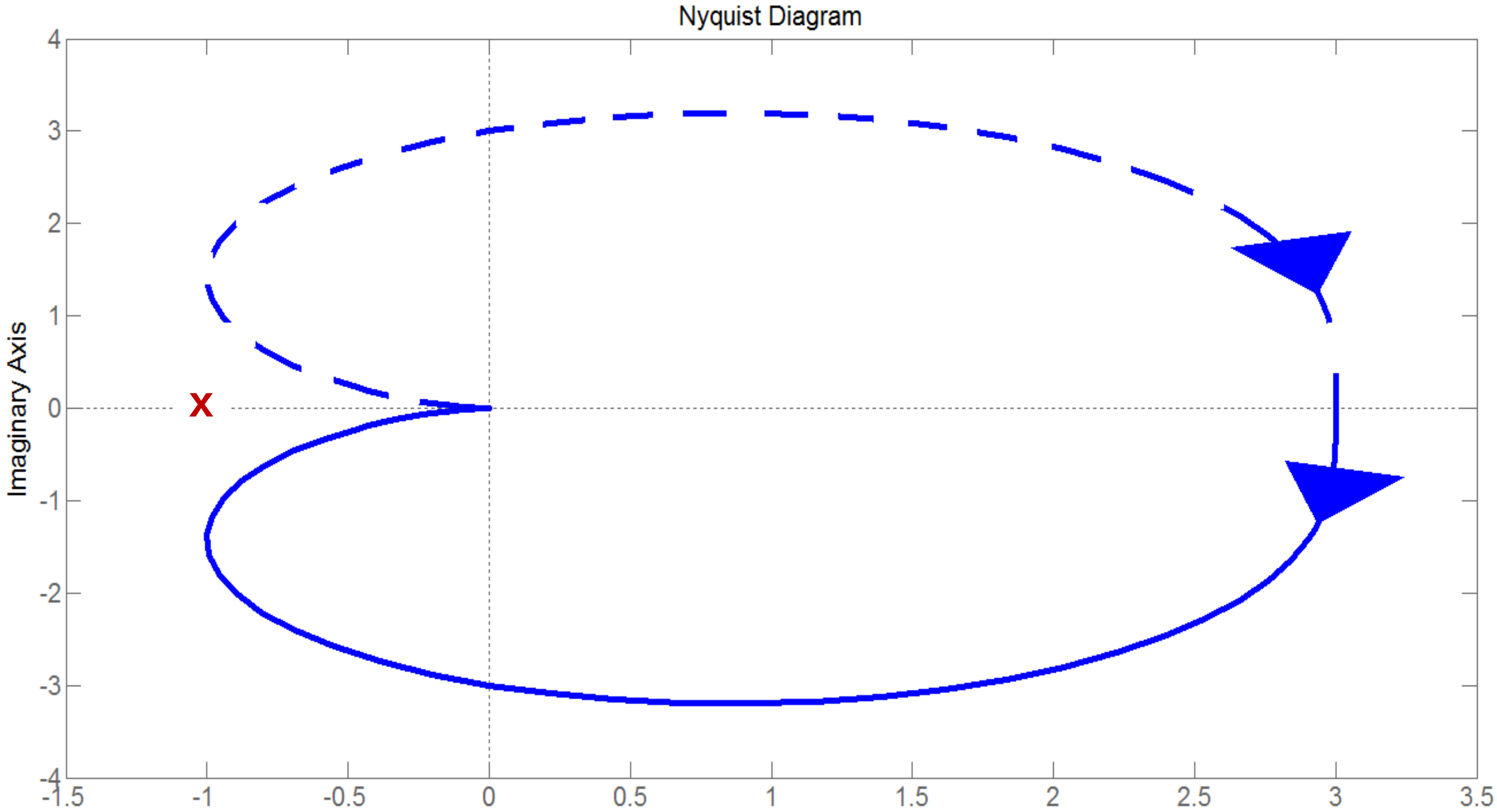
Pomocou Nyquistovho kritéria vyšetrite stabilitu systému (URO), ktorý má v otvorenej slučke prenosovú funkciu (ORO):

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(2s+1)^2}$$

Ω*=0 - *počet obehov okolo bodu (-1,0j)

***P*=0 - *počet nestabilných pólov ORO* G$_O$(s)**

$N = P - \Omega = 0$ → URO bude STABILNÝ



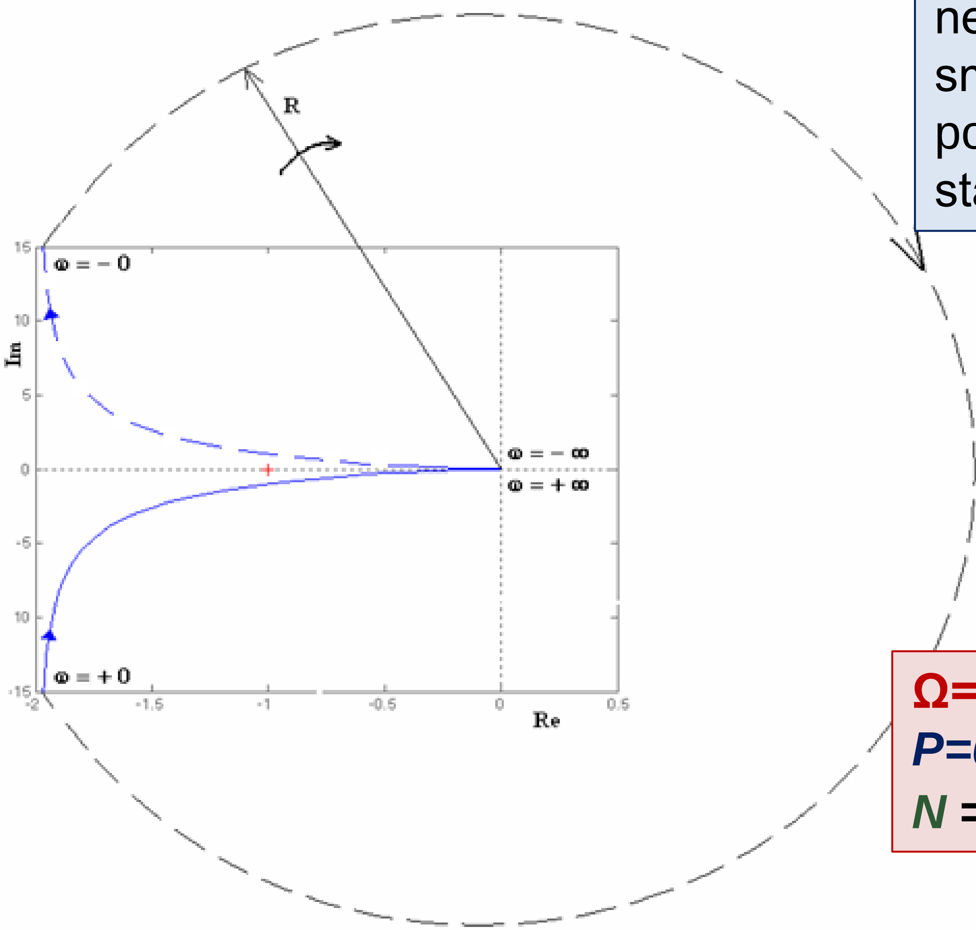
Nyquistovo kritérium stability – príklad2

PR. 2

Pomocou Nyquistovho kritéria vyšetrite stabilitu systému (URO), ktorý má v otvorenej slučke prenosovú funkciu (ORO):

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{s(2s+1)}$$

Jeden pól $G_O(s)$ sa nachádza na imaginárnej osi.
Tento pól môžeme obísť po kružnici s nekonečne malým polomerom R v kladnom smere otáčania a pričleniť ho k ľavej polrovine. Tým ho môžeme považovať za stabilný.



1-32

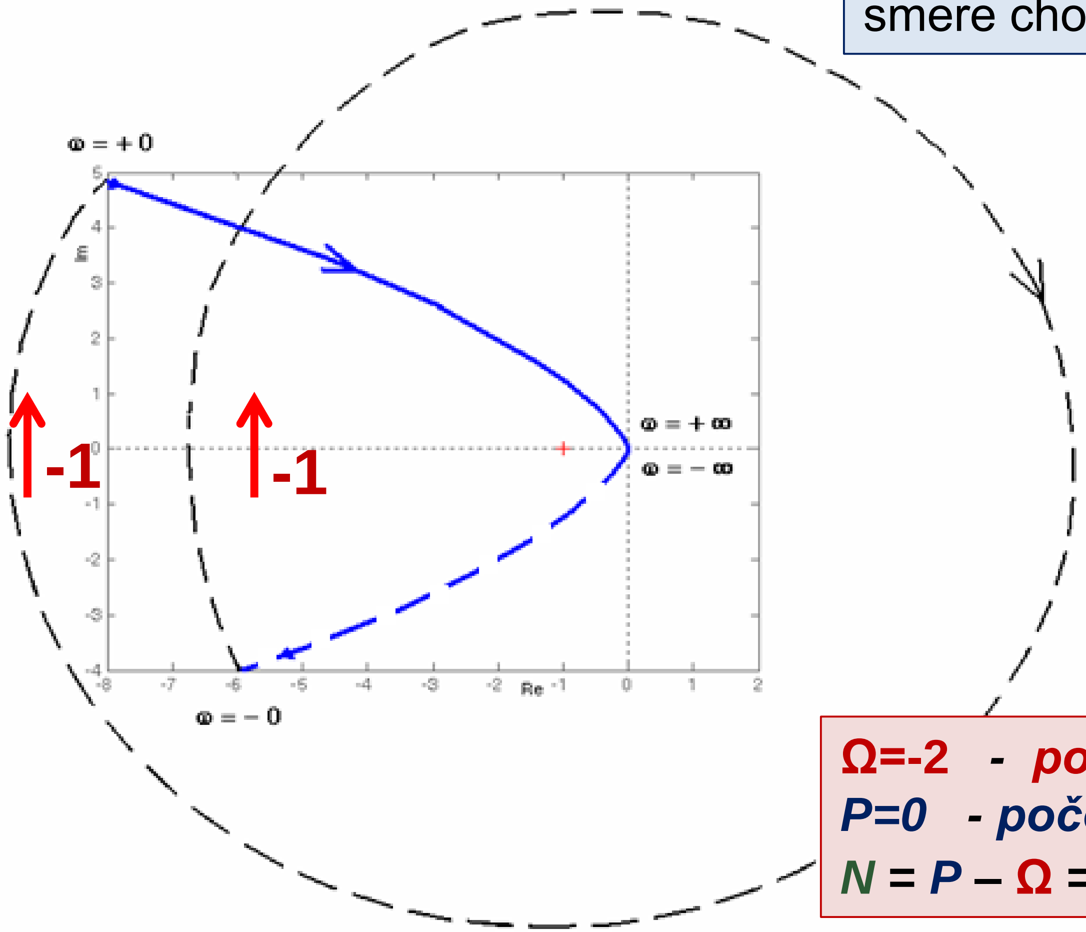
Ω=0 - počet obehov okolo bodu (-1,0j)
P=0 - počet nestabilných pólov ORO $G_O(s)$
$N = P - \Omega = 0$ → URO bude <u>STABILNÝ</u>

Nyquistovo kritérium stability – príklad3

PR. 3 Prenosová funkcia a frekvenčná prenosová funkcia ORO:

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{s^2(2s+1)}$$

Dvojnásobný astatizmus $G_O(s)$ spôsobil, že pri uzatváraní krivky opíšeme nekonečne veľkú kružnicu okolo začiatku dvakrát v smere chodu hodinových ručičiek (Ω = -2).



Ω=-2 - počet obehov okolo bodu (-1,0j)

P=0 ***- počet nestabilných pólov ORO*** $G_O(s)$

$N = P - \Omega = 2$ → **URO bude NESTABILNÝ**

Analytický výpočet kritického zosilnenia

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \qquad G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3}$$

Hranica stability je: $\mathrm{Re}\{G_O(j\omega)\} = -1, \qquad \mathrm{Im}\{G_O(j\omega)\} = 0$

$$G_O(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3} = \frac{K}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{K}{(1-3\omega^2) + j(3\omega - \omega^3)} \frac{(1-3\omega^2) - j(3\omega-\omega^3)}{(1-3\omega^2) - j(3\omega-\omega^3)}$$

$$\mathrm{Im}\{G_O(j\omega)\}_{\omega_{krit}} = 0$$

$$\mathrm{Im}\{G_O(j\omega)\}_{\omega_{krit}} = \frac{-K\omega_{krit}(3-\omega_{krit}^2)}{(1-3\omega_{krit}^2)^2 + (3\omega_{krit} - \omega_{krit}^3)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{krit} = \sqrt{3}}$$

$$\mathrm{Re}\{G_O(j\omega)\}_{K_{krit}} = -1$$

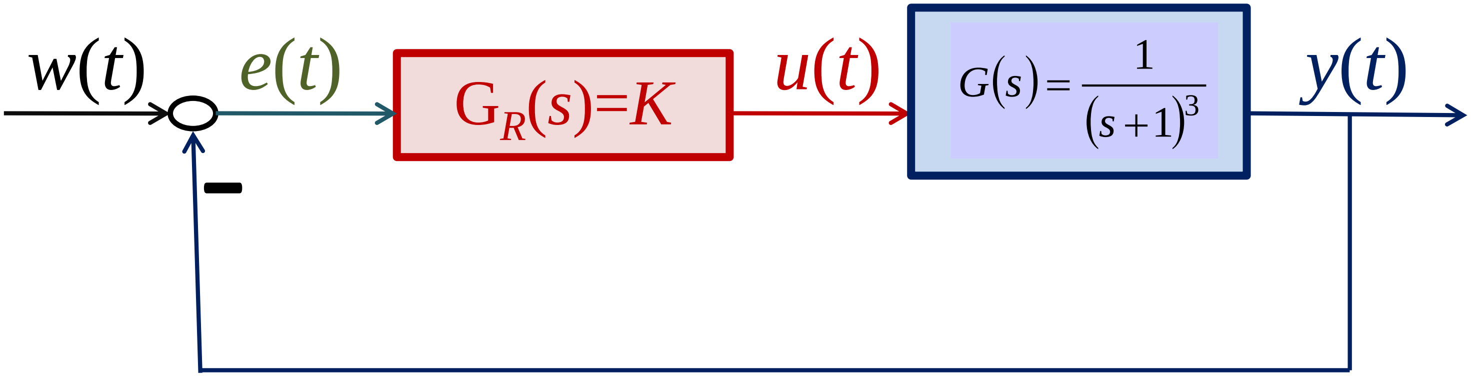
$$\mathrm{Re}\{G_O(j\omega)\}_{K_{krit}} = \frac{K_{krit}(1-3\omega_{krit}^2)}{(1-3\omega_{krit}^2)^2 + (3\omega_{krit} - \omega_{krit}^3)^2} = \frac{K_{krit}(1-9)}{(1-9)^2 + (3\sqrt{3} - 3\sqrt{3})^2} = -1 \Rightarrow \boxed{K_{krit} = 8}$$

Nyquistovo kritérium stability – príklad4 (1/2)

Nyquistovo kritérium v najjednoduchšej podobe:

Predpokladajme, že prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu má len stabilné póly (ORO je stabilný). Potom uzavretý regulačný obvod bude stabilný, ak frekvenčná charakteristika otvoreného obvodu pretína reálnu os vpravo od kritického bodu (-1, j0).

PR. 4



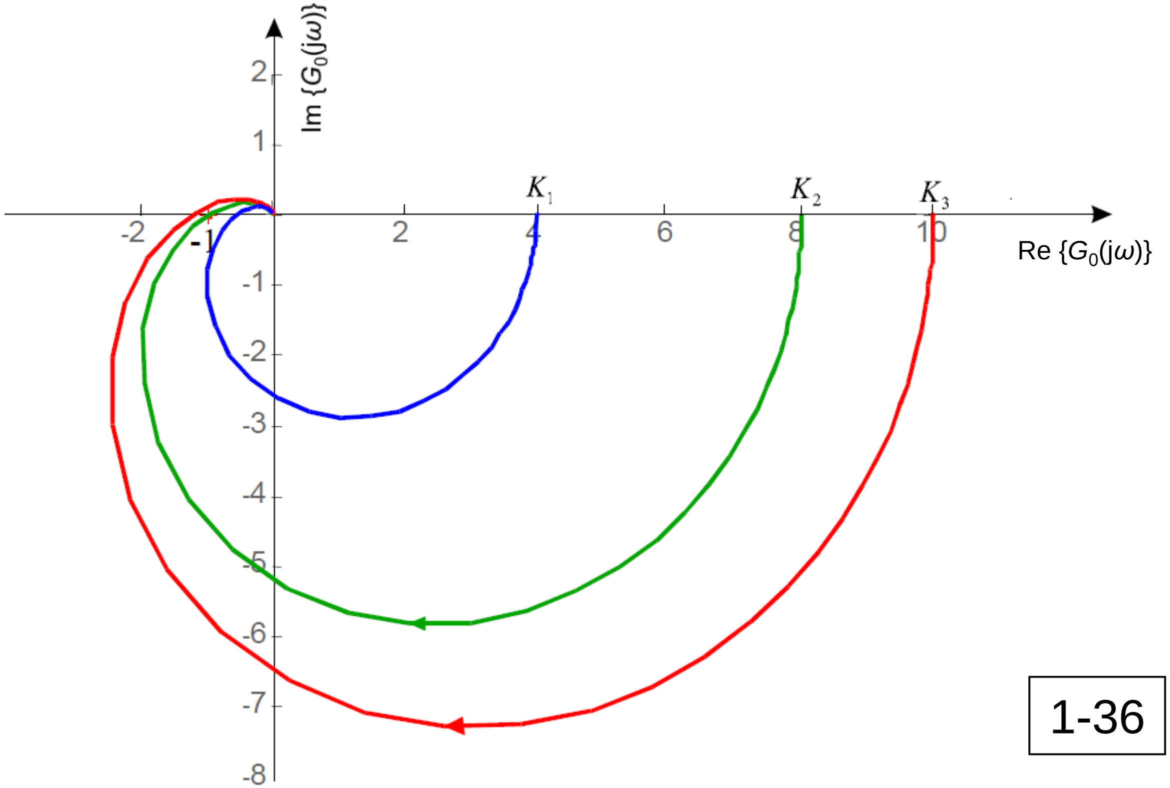
Pre jednoduchý regulačný obvod analyzujte stabilitu uzavretého obvodu pre rôzne veľkosti zosilnenia K ($K_1=4$, $K_2=8$ a $K_3=10$).

Nyquistovo kritérium stability – príklad4 (2/2)

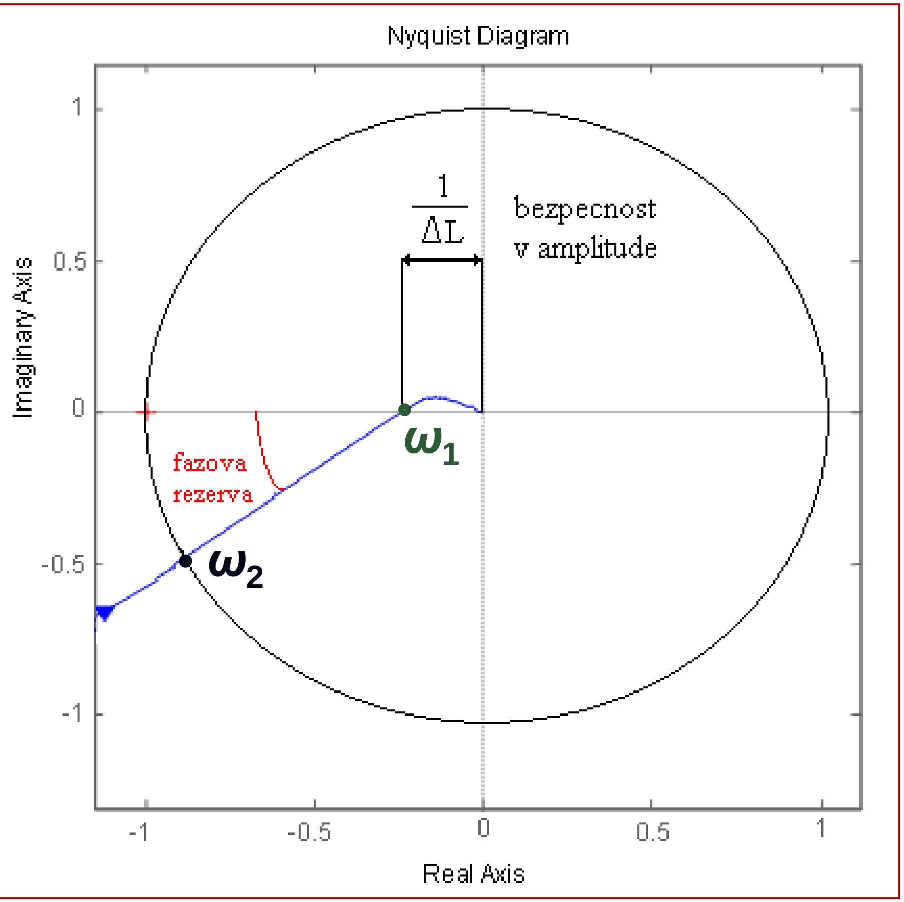
Prenosová funkcia a frekvenčná prenosová funkcia ORO:

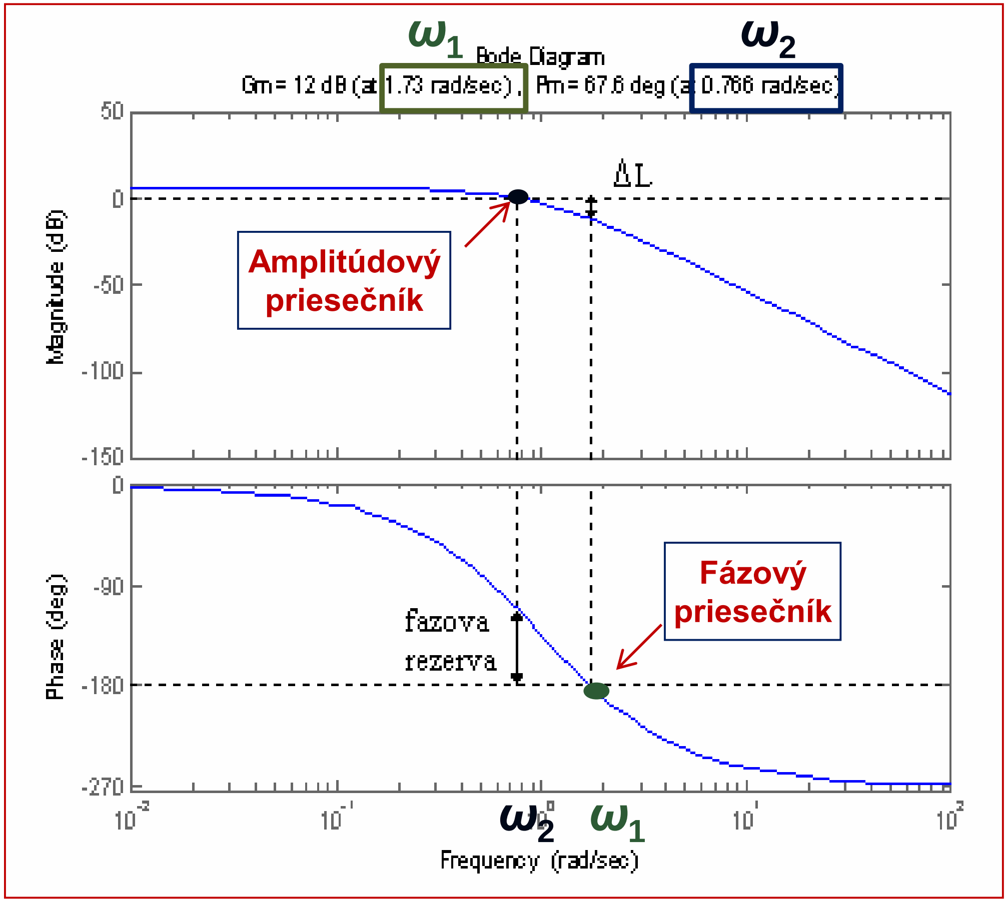
$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \qquad G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3}$$

Prenosová funkcia ORO má tri stabilné póly v -1 a teda môžeme použiť zjednodušené Nyquistovo kritérium. Vykreslíme Nyquistove charakteristiky ORO pre K_1**=4**, K_2**=8** a K_3**=10**:



- Uzavretý regulačný obvod bude <u>**stabilný**</u>, ak **frekvenčná charakteristika otvoreného obvodu pretína reálnu os vpravo od kritického bodu (-1, j0)**.
- Obvod je na <u>**hranici stability**</u> ak **frekvenčná charakteristika prechádza bodom −1 na reálnej osi**.
- Obvod bude <u>**nestabilný**</u>, ak **frekvenčná charakteristika pretína reálnu os vľavo od kritického bodu (-1, j0)**.


Nyquist Diagram
Imaginary Axis
Real Axis
1
ΔL
bezpecnost
v amplitude
fazova
rezerva
ω1
ω2

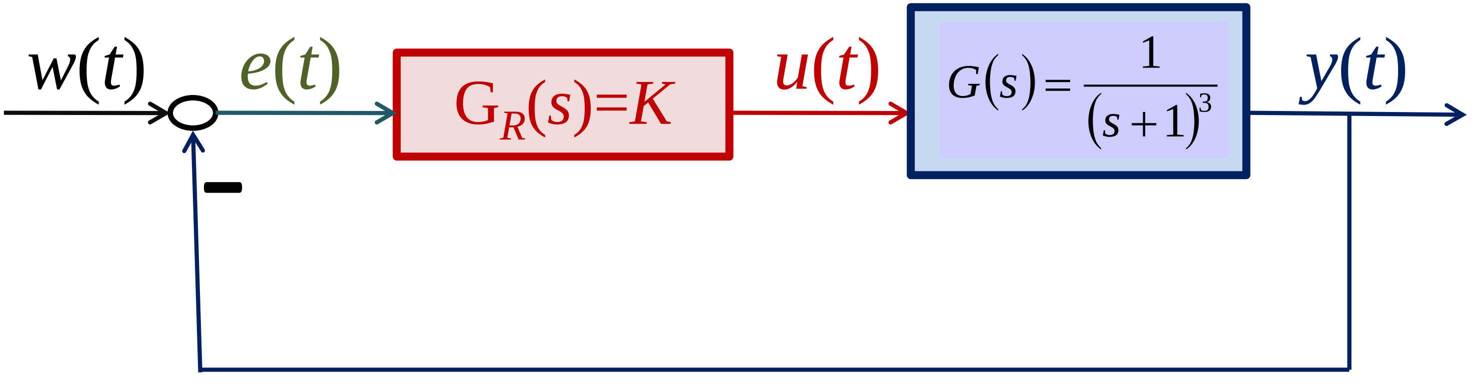

ω1
ω2
Bode Diagram
Gm = 12 dB (at 1.73 rad/sec) , Pm = 67.6 deg (at 0.766 rad/sec)
ΔL
Amplitúdový priesečník
Fázový priesečník
fazova
rezerva
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)

Bodeho kritérium stability – príklad (1/2)

Bodeho kritérium stability pre stabilný otvorený regulačný obvod:

Uzavretý regulačný obvod bude stabilný, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky väčšia ako −180°.

PR.



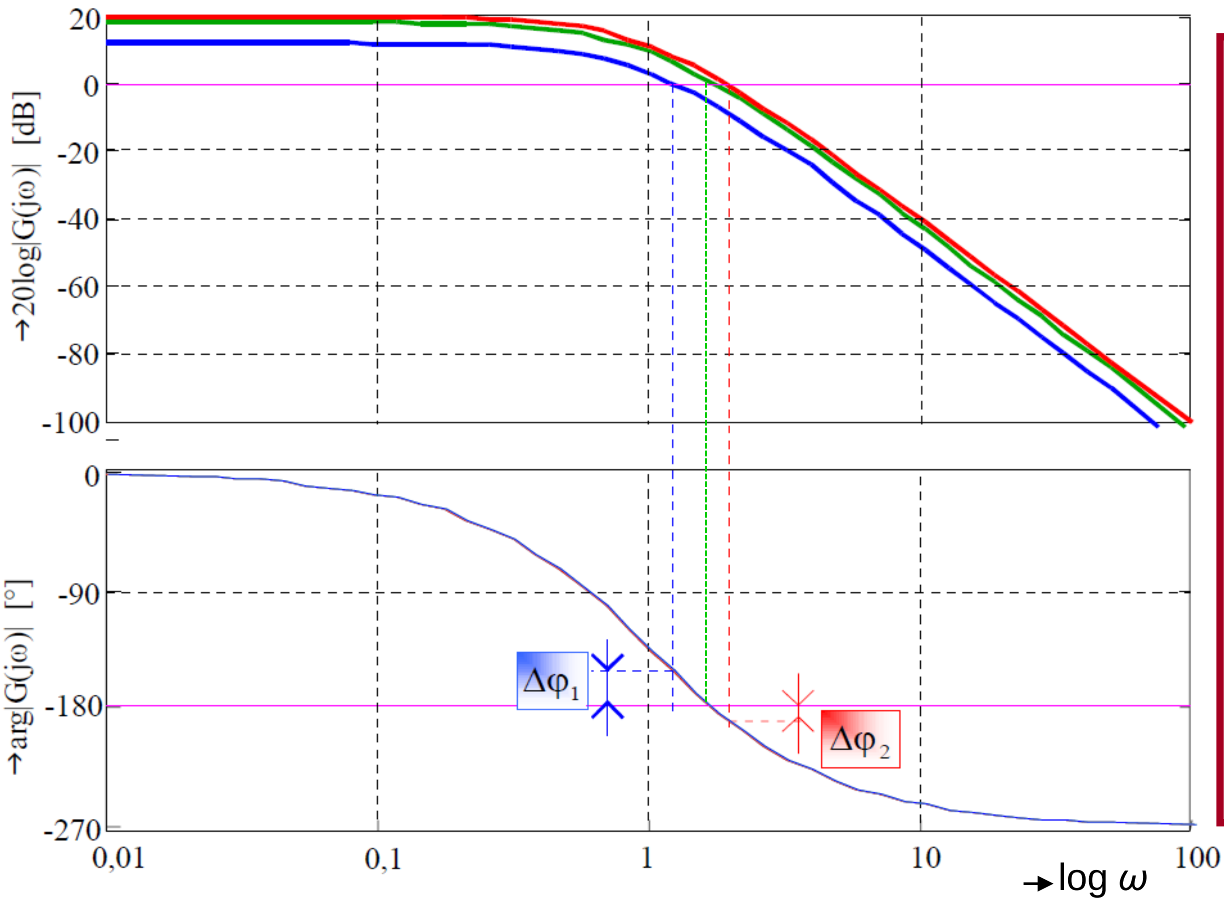
Pre jednoduchý regulačný obvod analyzujte stabilitu uzavretého obvodu pre rôzne veľkosti zosilnenia K (**K_1=4**, **K_2=8** a **K_3=10**).

Bodeho kritérium stability – príklad (2/2)

Prenosová funkcia a frekvenčná prenosová funkcia ORO:

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \qquad G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega) = \frac{K}{(j\omega+1)^3}$$

Vykreslíme Bodeho charakteristiky ORO pre $K_1=4$, $K_2=8$ a $K_3=10$:



- URO je stabilný, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky väčšia ako −180°. Pre $K_1=4$ je hodnota fázovej charakteristiky asi −150°.
- URO je na hranici stability, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky rovná −180°, platí to pre $K_2=8$.
- URO je nestabilný, ak pri frekvencii amplitúdového priesečníka je hodnota fázovej charakteristiky menšia ako −180°. Pre $K_3=10$ je hodnota fázovej charakteristiky asi −195°.

Algebraické kritéria stability – Routhovo kritérium

Algebraické kritéria stability vychádzajú z charakteristickej rovnice uzavretého regulačného obvodu (CHRURO) a v podstate vyšetrujú rozloženie pólov systému v komplexnej rovine. Jednotlivé kritériá majú rôznu techniku analýzy, ale všetky vyšetrujú len rozloženie pólov v komplexnej rovine.

Medzi najznámejšie patrí **Routhovo kritérium stability**.

Sústava s charakteristickým polynómom uzavretého obvodu $P(s)$ je stabilná, ak nutnú podmienku stability ($p_i > 0$; $i = 1, \dots, n$) spĺňajú okrem polynómu $P(s)$ všetky polynómy, ktoré vzniknú jeho redukciou podľa Routhovho algoritmu.

Stodolova podmienka stability

Nutnou podmienkou (nie postačujúcou) stability regulačného obvodu je, aby všetky koeficienty charakteristického polynómu boli kladné.

Pre systémy 1. a 2. rádu je nutnou aj postačujúcou podmienkou stability.

$$G_O(s) = G(s)G_R(s) = \frac{B(s)}{A(s)}\frac{C(s)}{D(s)}$$

čitateľ $1 + G_O(s)$

Charakteristický polynóm

$$A(s)D(s) + B(s)C(s) = P(s)$$

Ak je $P(s)$ 1. alebo 2. rádu a ak pre všetky p_i (i=0,1 alebo i=0,1,2) platí $p_i > 0$ môžeme povedať, že URO je stabilný.

Pre systémy s $P(s) = \sum_{i=0}^{n} p_i s^i$ pre $n>2$ ak p_i (i=0,1,...n) platí $p_i > 0$ (iba nutná podmienka stability) musíme posudiť stabilitu pomocou Routhovho algoritmu.

Routhovo kritérium stability

$$P(s)=\sum_{i=0}^{n} p_i s^i = p_n s^n + p_{n-1}s^{n-1} + \ldots + p_1 s + p_0$$

Routhova tabuľka

	s^n	p_n	p_{n-2}	p_{n-4}	$\cdots$
$k_1=\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$	s^{n-1}	p_{n-1}	p_{n-3}	p_{n-5}	$\cdots$
$k_2=\dfrac{p_{n-1}}{b_{n-2}}$	s^{n-2}	$\boxed{b_{n-2}}$	b_{n-4}	b_{n-6}	$\cdots$
$k_3=\dfrac{b_{n-2}}{c_{n-3}}$	s^{n-3}	c_{n-3}	c_{n-5}	c_{n-7}	
$\vdots$					
$k_{n-1}=\dfrac{d_2}{e_1}$	s	e_1	0		
$k_n=\dfrac{e_1}{f_0}$	s^0	f_0			

$$b_{n-2}=\frac{p_{n-1}p_{n-2}-p_n p_{n-3}}{p_{n-1}}$$

$$b_{n-4}=\frac{p_{n-1}p_{n-4}-p_n p_{n-5}}{p_{n-1}}$$

$$c_{n-3}=\frac{b_{n-2}p_{n-3}-p_{n-1}b_{n-4}}{b_{n-2}}$$

$$c_{n-5}=\frac{b_{n-2}p_{n-5}-p_{n-1}b_{n-6}}{b_{n-2}}$$

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že $k_i>0$, ($i=1,\ldots,n$).

Routhovo kritérium stability – príklad1

PR. 1

Vyšetrite stabilitu URO s charakteristickým polynómom

a) $P_1(s) = s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24$

b) $P_2(s) = 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 10$

a)

	s^4	1	35	24
$k_1 = \frac{1}{10}$	s^3	10	50	
$k_2 = \frac{10}{30}$	s^2	30	24	
$k_3 = \frac{30}{42}$	s	42		
$k_4 = \frac{42}{24}$	s^0	24		

b)

	s^4	2	3	10
$k_1 = \frac{2}{1}$	s^3	1	5	
$k_2 = -\frac{1}{7}$	s^2	-7	10	
$k_3 = -\frac{7}{6.43}$	s	6.43		
$k_4 = \frac{6.43}{10}$	s^0	10		

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že $k_i>0$, (i=1,...,4). URO s charakteristickým polynómom **a)** $P_1(s)$ je **STABILNÝ** a **b)** $P_2(s)$ je **NESTABILNÝ**.

Routhovo kritérium stability – príklad2

PR. 2

Vyšetrite stabilitu URO s charakteristickým polynómom

$$P(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

	s^5	1	2	11
$k_1 = \frac{1}{2}$	s^4	2	4	10
$k_2 = \frac{2}{\varepsilon}$	s^3	$0 \to \varepsilon$	6	
$k_3 = -\frac{\varepsilon^2}{12}$	s^2	$4 - \frac{12}{\varepsilon}$	10	
$k_4 = -\frac{2}{\varepsilon}$	s	$6 + \frac{10\varepsilon^2}{12}$		
$k_5 = \frac{6}{10}$	s^0	10		

Ak sa pri výpočte objaví v 1. stĺpci nulový prvok a ostatné prvky v riadku sú nenulové, v riešení pokračujeme tak, že nulu nahradíme nekonečne malým kladným číslom ***ε***. Počet **záporných k_i** udáva počet **nestabilných pólov**. V prípade, že všetky k_i **budú kladné**, tak nulový prvok signalizuje, že systém bude **na hranici stability**.

Ak Routhova tabuľka obsahuje čo len jeden záporný koeficient k_i, je systém nestabilný. k_1, k_2, k_5 >0 a k_3, k_4<0 to znamená, že polynóm má 3 stabilné a 2 nestabilné póly $\longrightarrow$ **NESTABILNÝ SYSTÉM**

Routhovo kritérium stability – príklad3

PR. 3

Vyšetrite stabilitu URO s charakteristickým polynómom

$$P(s) = s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 4s + 4$$

	s^5	1	5	4
$k_1 = 1$	s^4	1	5	4
	s^3	0	0	
$k_2 = \frac{1}{4}$	s^3	4	10	
$k_3 = 1.6$	s^2	2.5	4	
$k_4 = 0.695$	s	3.6		
$k_5 = 0.9$	s^0	4		

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 5s^2 + 4) = 4s^3 + 10s$$

Ak Routhova tabuľka obsahuje celý nulový riadok, nahradíme ho príslušnou deriváciou a pokračujeme ďalej vo výpočte. Keďže všetky koeficienty k_i sú kladné, tak nulový riadok naznačuje, že polynóm má 2 jednoduché póly na imaginárnej osi a teda URO je NA HRANICI STABILITY.

Routhovo kritérium stability – príklad4

PR. 4

Vyšetrite stabilitu URO s charakteristickým polynómom

$$P(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 4s + 4$$

	s^5	1	4	4
$k_1 = 1$	s^4	1	4	4
	s^3	0	0	
$k_2 = \frac{1}{4}$	s^3	4	8	
$k_3 = 2$	s^2	2	4	
	s	0	0	
$k_4 = \frac{1}{2}$	s	4		
$k_5 = 1$	s^0	4		

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 4s^2 + 4) = 4s^3 + 8s$$

$$\frac{d}{ds}(2s^2 + 4) = 4s$$

Ak sa v Routhovej tabuľke vyskytuje dvakrát nulový riadok, signalizuje to, že na imaginárnej osi sa nachádzajú dva páry komplexne združených koreňov. URO je NESTABILNÝ.

Routhovo kritérium stability – príklad5

PR. 5

Vyšetrite stabilitu URO s charakteristickým polynómom

$$P(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 4s^2 + 5s + 5$$

	s^5	1	4	5
$k_1 = 1$	s^4	1	4	5
	s^3	0	0	
$k_2 = \frac{1}{4}$	s^3	4	8	
$k_3 = 2$	s^2	2	5	
$k_4 = -1$	s	-2		
$k_5 = -\frac{2}{5}$	s^0	5		

$$\frac{d}{ds}(s^4 + 4s^2 + 5) = 4s^3 + 8s$$

Ak Routhova tabuľka obsahuje čo len jeden záporný koeficient k_i , je systém nestabilný. Dva koeficienty k_i sú záporné, ide teda o URO NESTABILNÝ.

Routhovo kritérium stability – príklad6 (1/2)

PR. 6 K zadanému systému s prenosovou funkciou $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)^2}$

a pre regulátor s prenosovou funkciou $G_R(s) = 1 + \dfrac{0.75}{s}$

vyšetrite stabilitu URO pomocou Routhovho kritéria stability.

Charakteristická rovnica URO:

$$1 + G_O(s) = 1 + G(s)G_R(s) = 1 + \frac{1}{(s+1)^2}\frac{s+0.75}{s}$$

Charakteristický polynóm:

$$P(s) = 1 + G_O(s) = 0$$

$$1 + G(s)G_R(s) = s(s+1)^2 + (s+0.75) = \boxed{s^3 + 2s^2 + 2s + 0.75} = 0$$

Routhovo kritérium stability – príklad6 (2/2)

$$P(s) = s^3 + 2s^2 + 2s + 0.75$$

	s^3	1	2
$k_1 = \dfrac{1}{2}$	s^2	2	0.75
$k_2 = \dfrac{2}{1.625}$	s	1.625	
$k_3 = \dfrac{1.625}{0.75}$	s^0	0.75	

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že $k_i > 0$, (i=1,2,3).

URO s charakteristickým polynómom $P(s)$ je **STABILNÝ**

Routhovo kritérium stability – príklad7 (1/2)

PR. 7

Je daná prenosová funkcia otvoreného regulačného obvodu:

$$G_O(s) = \frac{K}{s(8s+1)^2}$$

Treba určiť pomocou Rothovho kritéria stability pre aké *K* bude URO stabilný.

Charakteristická rovnica URO:

$$1 + G_O(s) = 1 + \frac{K}{s(8s+1)^2} = \frac{s(8s+1)^2 + K}{s(8s+1)^2}$$

Charakteristický polynóm:

$$P(s) = 1 + G_O(s) = 0$$

$$P(s) = 64\ \mathrm{s}^3 + 16\,\mathrm{s}^2 + \mathrm{s} + \mathrm{K} = 0$$

Routhovo kritérium stability – príklad7 (2/2)

$$P(s) = 64s^3 + 16s^2 + s + K$$

	s^3	64	1
$k_1 = \dfrac{64}{16}$	s^2	16	K
$k_2 = \dfrac{16}{1-4K}$	s	$1-4K$	
$k_3 = \dfrac{1-4K}{K}$	s^0	K	

Nutnou a postačujúcou podmienkou stability je požiadavka, že k_i>0, (i=1,2,3). Takže musia byť splnené dve nerovnice, z ktorých vyplýva:

$$1-4K > 0 \rightarrow K < \frac{1}{4}$$

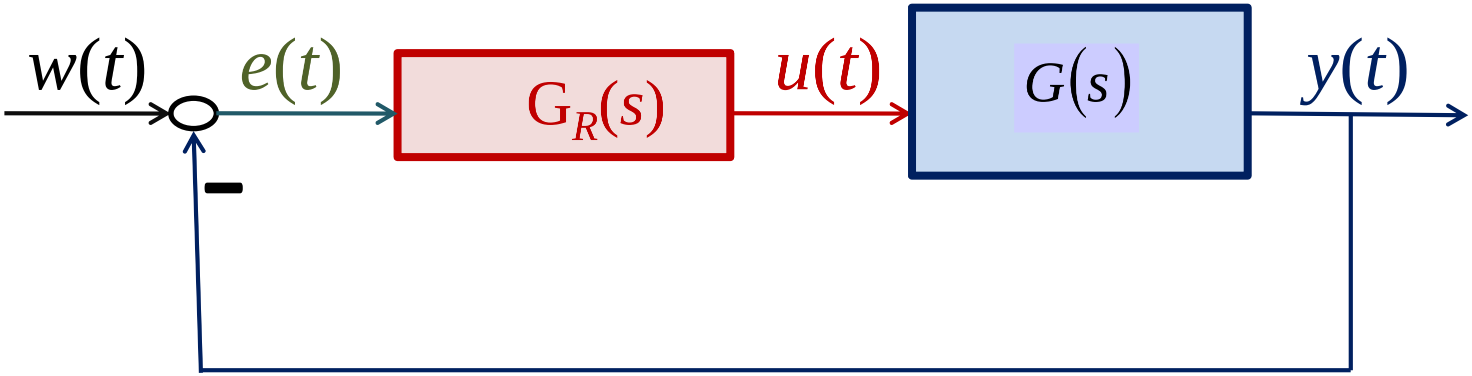
$$K > 0$$

Interval stabilných hodnôt *K*:

$$K \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Kvalita riadenia

Pri návrhu riadiacich obvodov treba zabezpečiť okrem nevyhnutnej podmienky, ktorou je stabilita uzavretého obvodu aj ďalšie požiadavky, ktoré sú spolu zahrnuté do pojmu kvality regulácie. Rozlišujeme **kvalitu regulácie v ustálených stavoch**, ktorou je určená presnosť regulácie a **kvalitu riadenia v prechodných javoch**, ktorou je určená dynamika uzavretého obvodu.



Regulačná odchýlka je definovaná ako rozdiel žiadanej hodnoty (*w*) a výstupnej veličiny (*y*)

$e(t)=w(t)-y(t)$

Využitím Laplaceovej transformácie je

$$E(s)=\frac{W(s)}{1+G(s)G_R(s)}$$

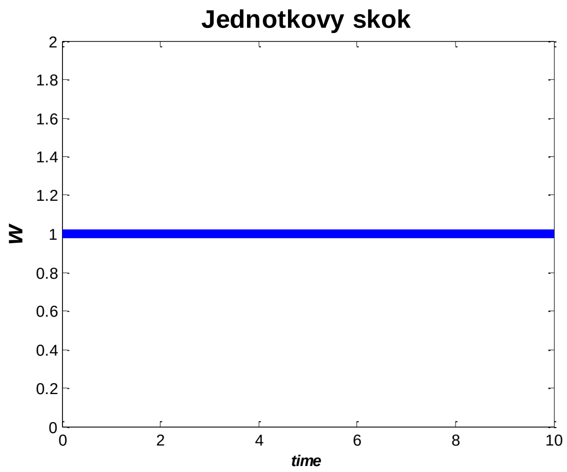
Kvalita riadenia v ustálených stavoch

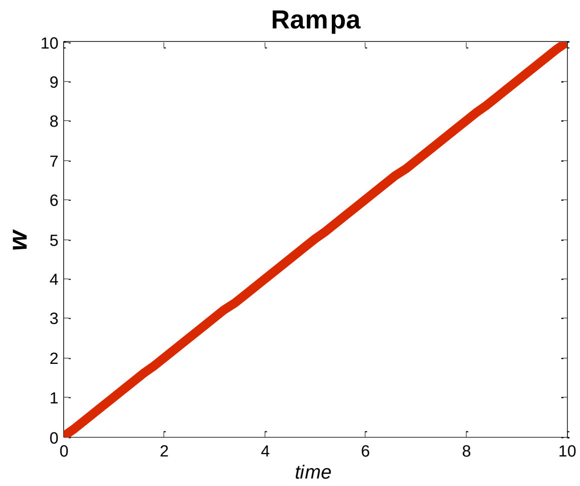
Presnosť riadenia je určená **trvalou regulačnou odchýlkou *e*(∞)**:

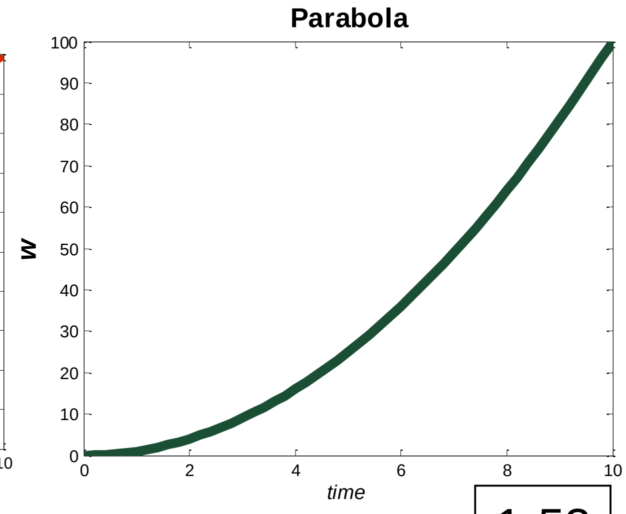
$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sW(s)}{1+G(s)G_R(s)}\overset{!}{=}\min$$

Trvalá regulačná odchýlka závisí od **typu vstupného signálu** a od **stupňa astatizmu otvoreného regulačného obvodu** $G_O(s)=G(s)G_R(s)$.

Časové odozvy vstupného signálu ***w*(*t*)** - **jednotkový skok** (skok polohy), **rampa** (skok rýchlosti), **parabola** (skok zrýchlenia):







Kvalita riadenia v ustálených stavoch

Vstupný signál opíšeme funkciou $w(t)=w_q t^q$

$q=0$: $w(t)=w_0$ -- skok polohy
$q=1$: $w(t)=w_1 t$ -- skok rýchlosti
$q=2$: $w(t)=w_2 t^2$ -- skok zrýchlenia

q je stupeň vstupného signálu
υ je rád astatizmu ORO

Laplaceovou transformáciou dostaneme

$$W(s)=\frac{q!}{s^{q+1}}w_q$$

Pre trvalú regulačnú odchýlku platí

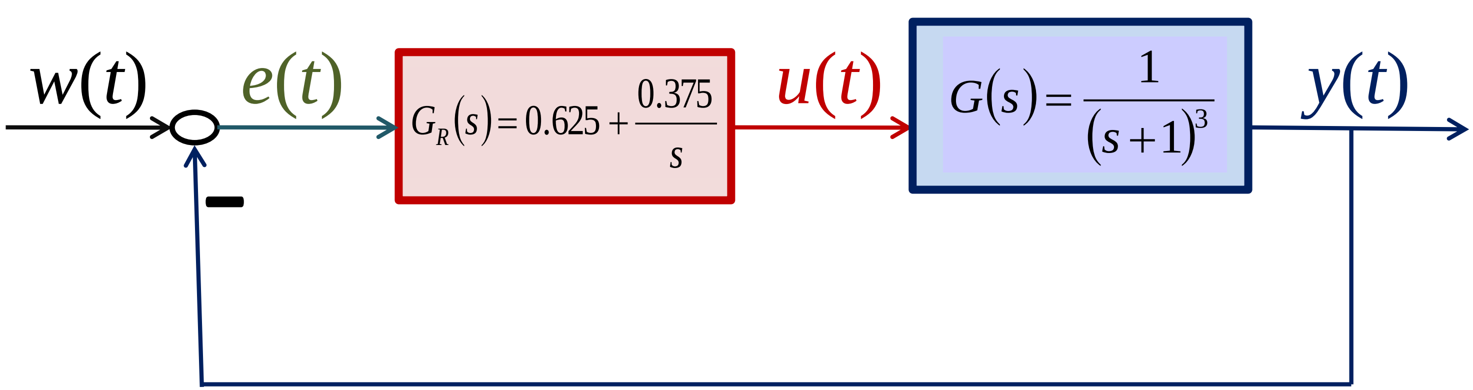
$$e(\infty)=q!\,w_q\lim_{s\to 0}\frac{s^{\nu-q}}{s^{\nu}+K}$$

ν/q	0	1	2
0	$e(\infty)=\frac{w_0}{1+K}$	$e(\infty)=\infty$	$e(\infty)=\infty$
1	$e(\infty)=0$	$e(\infty)=\frac{w_1}{K}$	$e(\infty)=\infty$
2	$e(\infty)=0$	$e(\infty)=0$	$e(\infty)=\frac{2w_2}{K}$

Ak $\boldsymbol{\upsilon>q}$ potom $\boldsymbol{e(\infty)=0}$ riadenie v ustálenom stave je ideálne

Kvalitu riadenia v ustálených stavoch – príklad (1/2)

PR.



Pre regulačný obvod vyšetrite kvalitu riadenia v ustálenom stave, ak je vstupný signál jednotkový skok ($w(t)$=1).

$$W(s)=\frac{1}{s}$$

q =0 vstupný signál je jednotkový skok

$\boxed{\upsilon = 1}$ je rád astatizmu ORO

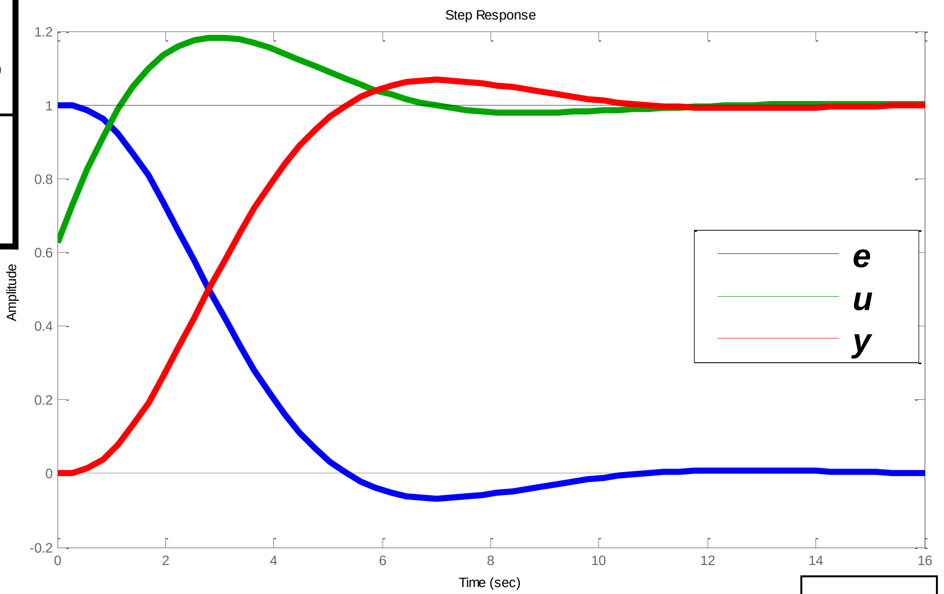
$$G_O(s)=G(s)G_R(s)=\frac{1}{(s+1)^3}\frac{0.625s+0.375}{s}=\frac{0.625s+0.375}{s(s^3+3s^2+3s+1)}$$

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{W(s)}{1+G_O(s)}=\lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{0.625s+0.375}{s\left(s^3+3s^2+3s+1\right)}}$$

Kvalitu riadenia v ustálených stavoch – **príklad** (2/2)

$$e(\infty)=\lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{0.625s+0.375}{s\left(s^3+3s^2+3s+1\right)}}=\lim_{s\to 0}\frac{s\left(s^3+3s^2+3s+1\right)}{s^4+3s^3+3s^2+1.625s+0.375}=0$$

ν/q	0	1	2
0	$e(\infty)=\frac{w_0}{1+K}$	$e(\infty)=\infty$	$e(\infty)=\infty$
1	$\boxed{e(\infty)=0}$	$e(\infty)=\frac{w_1}{K}$	$e(\infty)=\infty$
2	$e(\infty)=0$	$e(\infty)=0$	$e(\infty)=\frac{2w_2}{K}$



Kvalita riadenia v prechodných stavoch – ukazovatele kvality

Pri posudzovaní **kvality riadenia v prechodných stavoch** sa používajú jednak **ukazovatele kvality** (**čas regulácie, maximálne preregulovanie**, čas nábehu, čas oneskorenia) a **integrálne kritériá kvality riadenia** (kritérium lineárnej regulačnej plochy, kritérium absolútnej regulačnej plochy, kritérium časom váhovanej regulačnej plochy, kritérium kvadratickej regulačnej plochy).

Ukazovatele kvality riadenia:

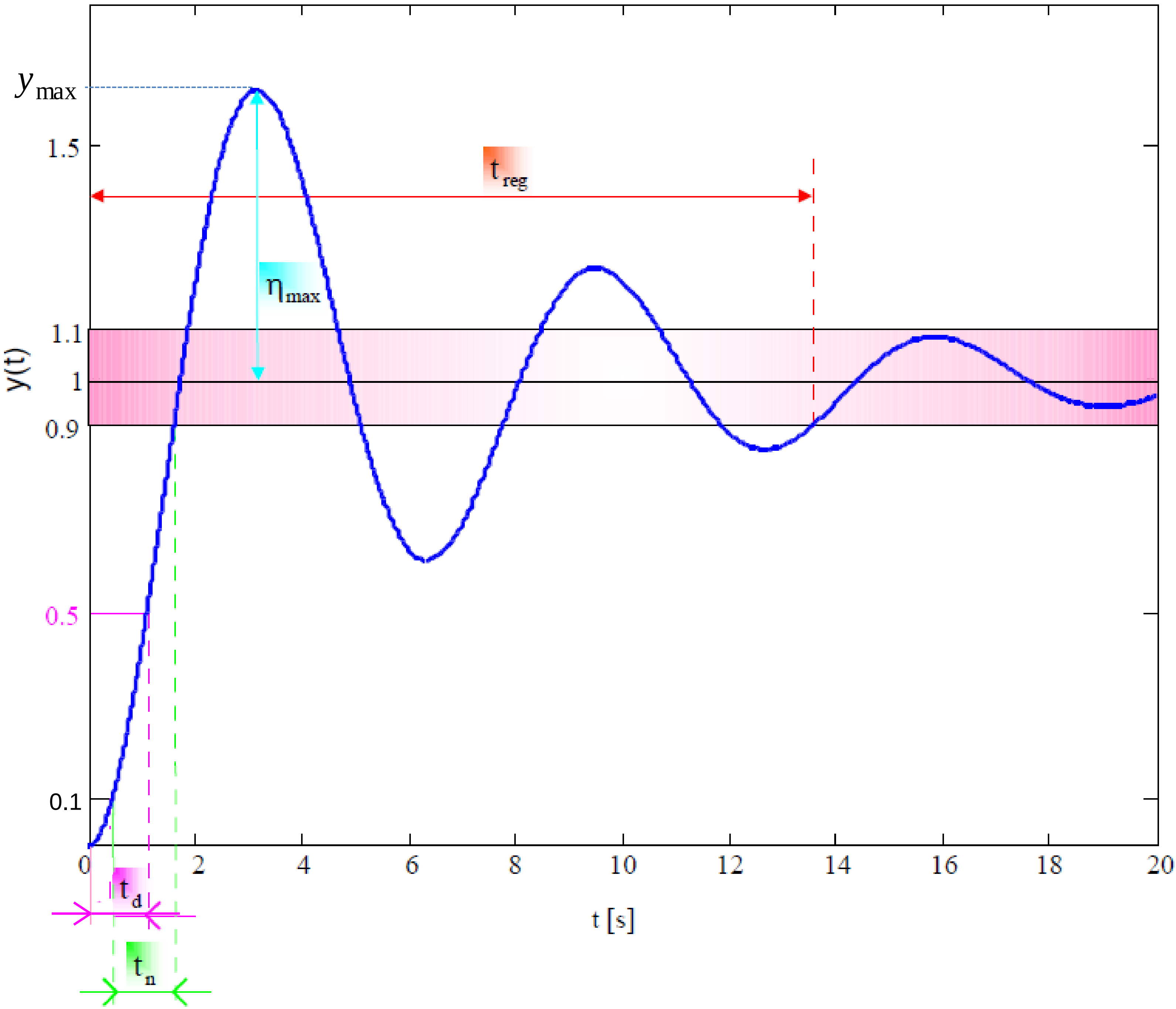
Čas regulácie (t_{reg} [s]) je čas za ktorý sa prechodová charakteristika dostane do pásma okolo ustálenej hodnoty, pričom šírka pásma sa obyčajne volí ±1% $y(\infty)$ až ± 5% $y(\infty)$.

Maximálne preregulovanie (η_{max} [%]) je hodnota najväčšieho preregulovania.

$$\eta_{\max} = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} 100 \quad [\%]$$

Čas nábehu (t_n [s]) je čas, ktorý uplynie pri nábehu prechodovej charakteristiky od 10% do 90% ustálenej hodnoty.

Čas oneskorenia (t_d [s]) je čas, za ktorý charakteristika dosiahne 50% ustálenej hodnoty.



y_{max}
1.5
t_{reg}
η_{max}
1.1
1
0.9
y(t)
0.5
0.1
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
t [s]
t_d
t_n

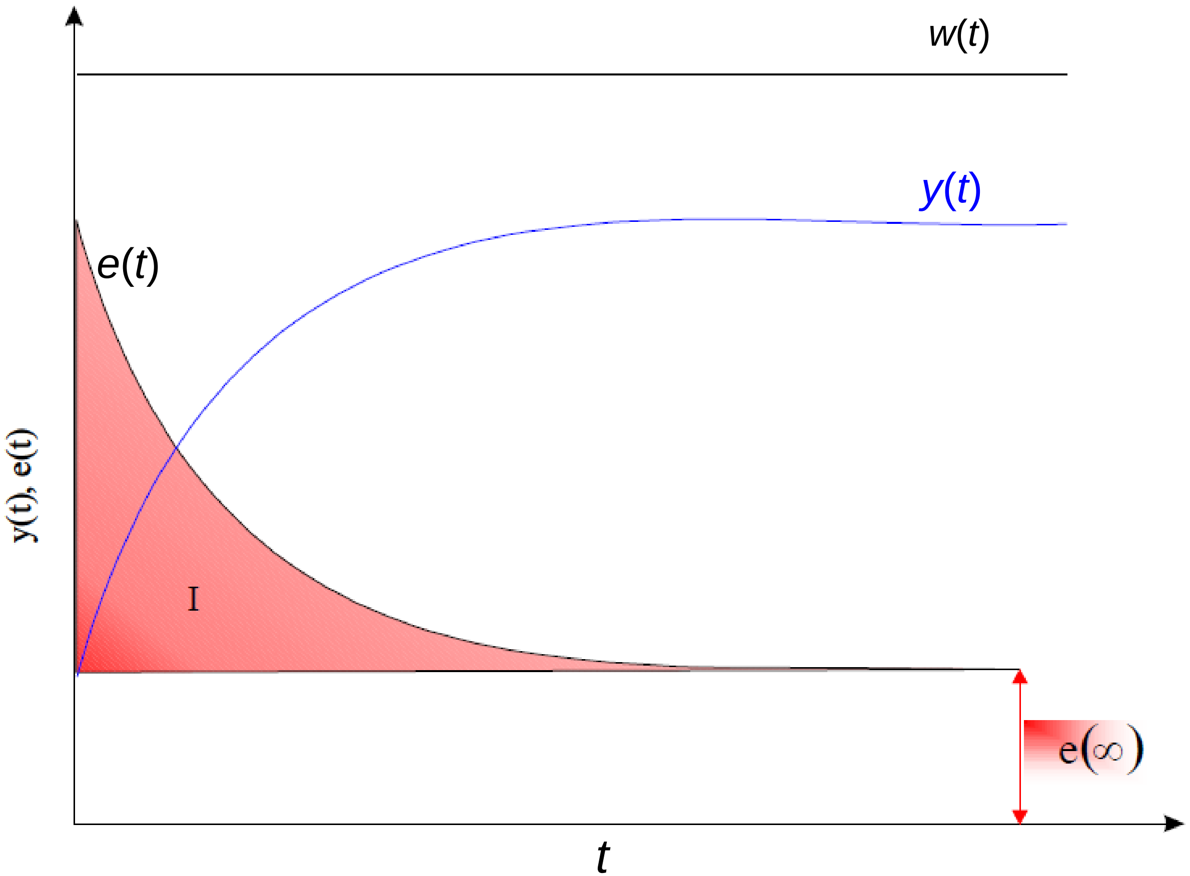
Kvalita riadenia v prechodných stavoch – integrálne kritéria (1/2)

Integrálne kritéria kvality riadenia:

$$I = \int_0^\infty [e(t) - e(\infty)]\, dt \quad \rightarrow \quad \min$$

a) Kritérium lineárnej regulačnej plochy

Kritérium lineárnej regulačnej plochy je definované ako minimum plochy, ktorá je ohraničená priebehom regulačnej odchýlky.



Kvalita riadenia v prechodných stavoch – integrálne kritéria (2/2)

b) Kritérium absolútnej regulačnej plochy

Kritérium lineárnej regulačnej plochy je použiteľné len pre aperiodické prechodné deje, lebo v prípade kmitavého priebehu, by sa spočítavali plochy s kladným a záporným znamienkom. Kladné znamienko by mali plochy kde je regulačná odchýlka kladná a záporné znamienko by mali plochy, kde je regulačná odchýlka záporná. Túto nevýhodu kritéria lineárnej regulačnej plochy odstraňuje kritérium absolútnej regulačnej plochy definované:

$$I_{AE} = \int_0^{\infty} \left| e(t) - e(\infty) \right| dt \quad \rightarrow \quad \min$$

c) Kritérium kvadratickej regulačnej plochy

Nevýhody vyššie opísaných kritérií odstraňuje kritérium kvadratickej regulačnej plochy, ktoré je použiteľné pre aperiodické aj kmitavé priebehy. Je definované integrálom:

$$I_{SE} = \int_0^{\infty} \left[e(t) - e(\infty) \right]^2 dt \quad \rightarrow \quad \min$$

PID regulátor

- štruktúra
- prenosová funkcia

URO s PID regulátorom

- voľba štruktúry PID regulátora
- kvalita (v prechodnom a ustálenom stave)

PID regulátor

PID v časovej oblasti

$$u(t) = Pe(t) + I\int_0^t e(\tau)\,d\tau + D\frac{de(t)}{dt}$$

Prenosová funkcia PID – **Interakčný vzťah**:

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

$\boldsymbol{P}$ – zosilnenie proporcionálnej zložky regulátora
$\boldsymbol{T_I}$ – integračná časová konštanta
$\boldsymbol{T_D}$ – derivačná konštanta

Prenosová funkcia PID – **Zložkový tvar**:

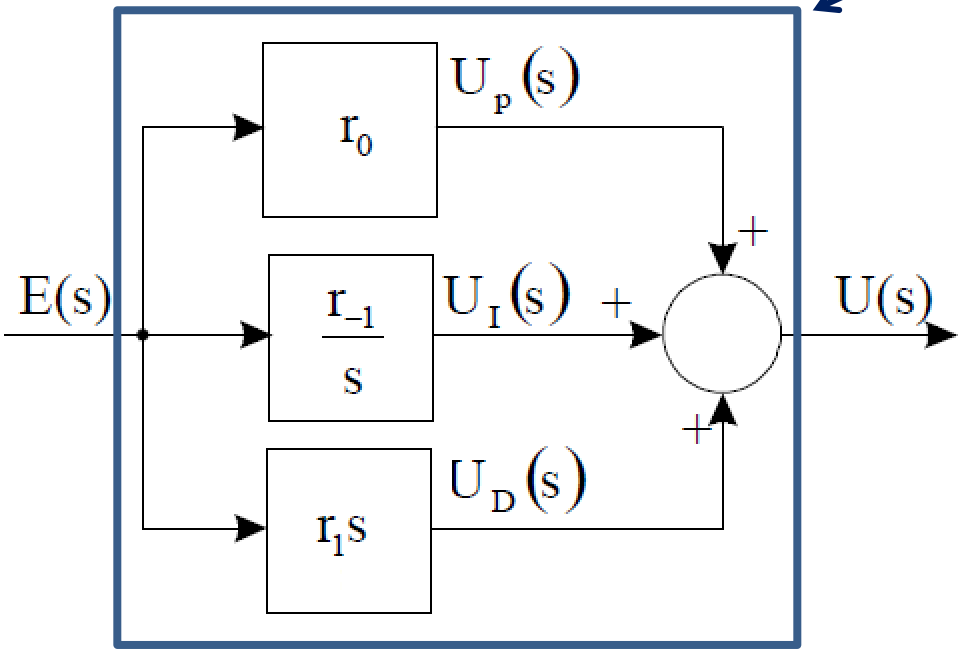
$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s = P + \frac{I}{s} + Ds$$

Vzťahy medzi interakčným a zložkovým tvarom

$$T_I = \frac{P}{r_{-1}} = \frac{r_0}{r_{-1}}, \qquad T_D = \frac{r_1}{P} = \frac{r_1}{r_0}$$

$$r_0 = P, \quad r_{-1} = \frac{P}{T_I}, \quad r_1 = PT_D$$

REGULÁTOR



Typy regulátorov a ich prenosové f.:

- **P** $G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = P$
- **I** $G_R(s) = \frac{1}{T_I s}$
- **D** $G_R(s) = T_D s$
- **PI** $G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$
- **PD** $G_R(s) = P(1 + T_D s)$
- **PID** $G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$

Voľba štruktúry PID regulátora

Pri výbere vhodnej **štruktúry PID regulátora** pre jednoduché sústavy budeme uvažovať **kritérium minimálnej trvalej regulačnej odchýlky** a **požadovanej kvality prechodných procesov**.

Trvalá regulačná odchýlka je $\boldsymbol{e(\infty)=w(\infty)-y(\infty)}$**,** ak $w(t)=1$, teda na vstupe URO je jednotkový skok, čiže aj $w(\infty)=1$.

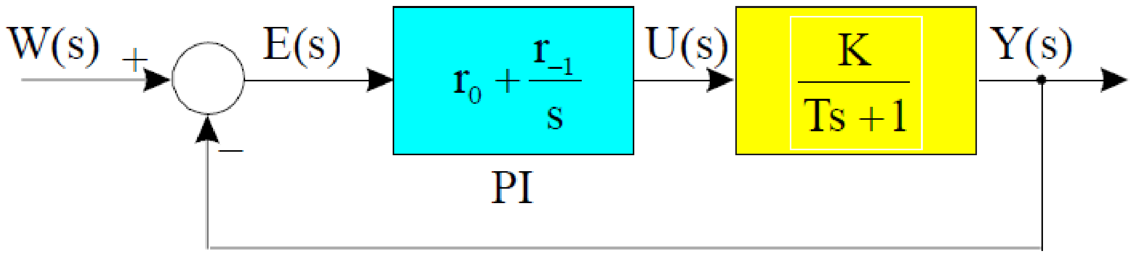
Ak je URO stabilný (a na vstupe je jednotkový skok), pre ustálený stav platí $\boldsymbol{y(\infty)=1}$ a trvalá regulačná odchýlka je nulová $\boldsymbol{e(\infty)=0}$.

Kvalita regulácie v prechodných procesoch je daná pólmi prenosovej funkcie uzavretého obvodu (koreňmi charakteristickej rovnice URO).

- **Ak budú póly prenosovej funkcie uzavretého obvodu reálne a záporné, bude prechodný proces aperiodický.**
- **Ak budú póly prenosovej funkcie uzavretého obvodu komplexne združené so zápornou reálnou časťou, bude prechodný proces kmitavý.**

Riadenie statickej sústavy 1. rádu PI reg.

$W(s)=1/s$, teda na vstupe je jednotkový skok. Prechodová charakteristika samotnej sústavy je silno aperiodická.



Trvalá regulačná odchýlka je ***e*(∞)=*w* (∞)-*y*(∞)**

Prenosová funkcia určujúca **vplyv žiadanej hodnoty *w*(*t*) na regulačnú odchýlku *e*(*t*)**

$$G_{E/W}(s)=\frac{E(s)}{W(s)}=\frac{1}{1+G(s)G_R(s)}=\frac{1}{1+G_O(s)} \longrightarrow E(s)=\frac{1}{1+G(s)G_R(s)}W(s)$$

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{W(s)}{1+G(s)G_R(s)}=\lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{K}{Ts+1}\frac{r_0 s+r_{-1}}{s}}=0$$

r_0, r_{-1}>0

Kvalita regulácie v prechodných procesoch je daná pólmi prenosovej funkcie URO

Riadenie statickej sústavy 1. rádu PI reg.- pokrač.

Prenosová funkcia URO

$$G_{Y/W}(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{G(s)G_R(s)}{1+G(s)G_R(s)}=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)}=\frac{\dfrac{K}{Ts+1}\,\dfrac{r_0 s+r_{-1}}{s}}{1+\dfrac{K}{Ts+1}\,\dfrac{r_0 s+r_{-1}}{s}}=\frac{K(r_0 s+r_{-1})}{Ts^2+(1+Kr_0)s+Kr_{-1}}$$

Kvalita regulácie závisí od polohy pólov URO, teda koreňov menovateľa (λ_i) URO

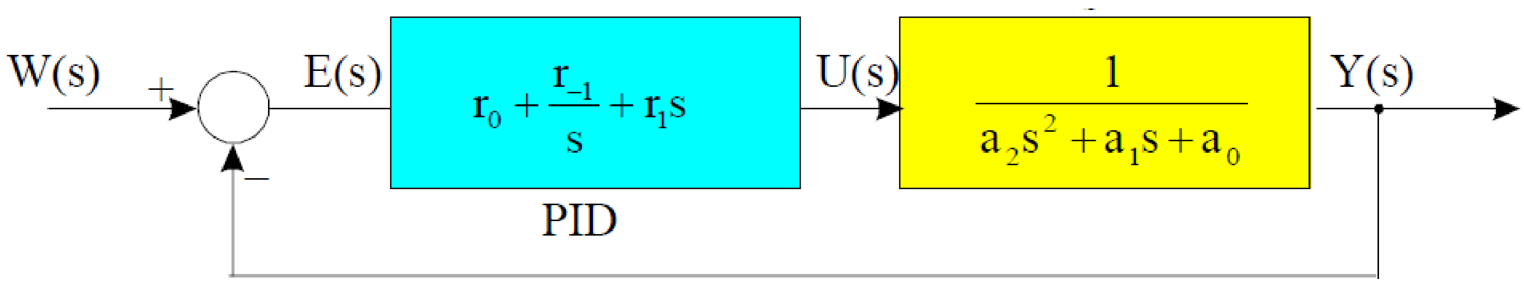
$$\boxed{Ts^2+(1+Kr_0)s+Kr_{-1}=0} \longrightarrow \lambda_{1,2}=-\frac{1+Kr_0}{2T}\pm\sqrt{\left(\frac{1+Kr_0}{2T}\right)^2-\frac{Kr_{-1}}{T}}$$

Pri **riadení statickej sústavy 1.rádu PI regulátorom** je **zabezpečená stabilita regulácie pri kladnom proporcionálnom zosilnení, kedy je reálna časť pólov záporná a možno dosiahnuť prakticky ľubovoľný priebeh prechodného procesu**:

- **Ak budú póly prenosovej funkcie uzavretého obvodu reálne, bude prechodný proces aperiodický.**
- **Ak budú póly prenosovej funkcie uzavretého obvodu komplexne združené so zápornou reálnou časťou, bude prechodný proces kmitavý.**

Riadenie sústavy 2. rádu bez astatizmu PID reg.

$W(s)=1/s$, teda na vstupe je jednotkový skok.



Trvalá regulačná odchýlka je ***e*(∞)=*w* (∞)-*y*(∞)**

Prenosová funkcia určujúca **vplyv žiadanej hodnoty *w*(*t*) na regulačnú odchýlku *e*(*t*)**

$$G_{E/W}(s)=\frac{E(s)}{W(s)}=\frac{1}{1+G(s)G_R(s)}=\frac{1}{1+G_O(s)} \longrightarrow E(s)=\frac{1}{1+G(s)G_R(s)}W(s)$$

$$e(\infty)=\lim_{t\to\infty} e(t)=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{W(s)}{1+G(s)G_R(s)}=\lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{a_2s^2+a_1s+a_0}\frac{r_1s^2+r_0s+r_{-1}}{s}}=0$$

Kvalita regulácie v prechodných procesoch je daná pólmi prenosovej funkcie URO

Návrh optimálnych parametrov PID regulátora

Metódy výpočtu koeficientov spojitých regulátorov na ZÁKLADE ZNALOSTI MATEMATICKÉHO MODELU

Delíme ich na metódy:

- **klasické metódy (konvenčné)**: ***metóda optimálneho modulu***, *metóda Naslina, štandardné tvary* a pod.
- **moderné metódy** zaručujúce stabilitu a dobrú kvalitu regulácie: ***metóda sumy časových konštánt***, ***metóda inverzie dynamiky***

Metódy pre určenie optimálnych parametrov PID regulátora:

- **metóda OPTIMÁLNEHO MODULU**
- **metóda sumy časových konštánt**
- **Inverzia dynamiky (metóda priamej syntézy)**

Metóda optimálneho modulu - princíp

Vychádza z predstavy **ideálnej prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu**, ktorá by mala byť **jednotková**, t.j.

$$G_{Y/W}(s)=\frac{Y(s)}{W(s)}=\frac{G(s)G_R(s)}{1+G(s)G_R(s)}=\frac{G_O(s)}{1+G_O(s)}\stackrel{!}{=}1$$

Nakoľko táto predstava nie je reálna, je snahou navrhnúť regulátor tak, aby aspoň **kvadrát modulu frekvenčnej prenosovej funkcie bol rovný 1** pri všetkých frekvenciách.

$$\left|G_{Y/W}(j\omega)\right|^2=M^2(\omega)=M(\omega)M(-\omega)\stackrel{!}{=}1$$

Po zavedení označenia: $G_O(j\omega)=U(\omega)+jV(\omega)$

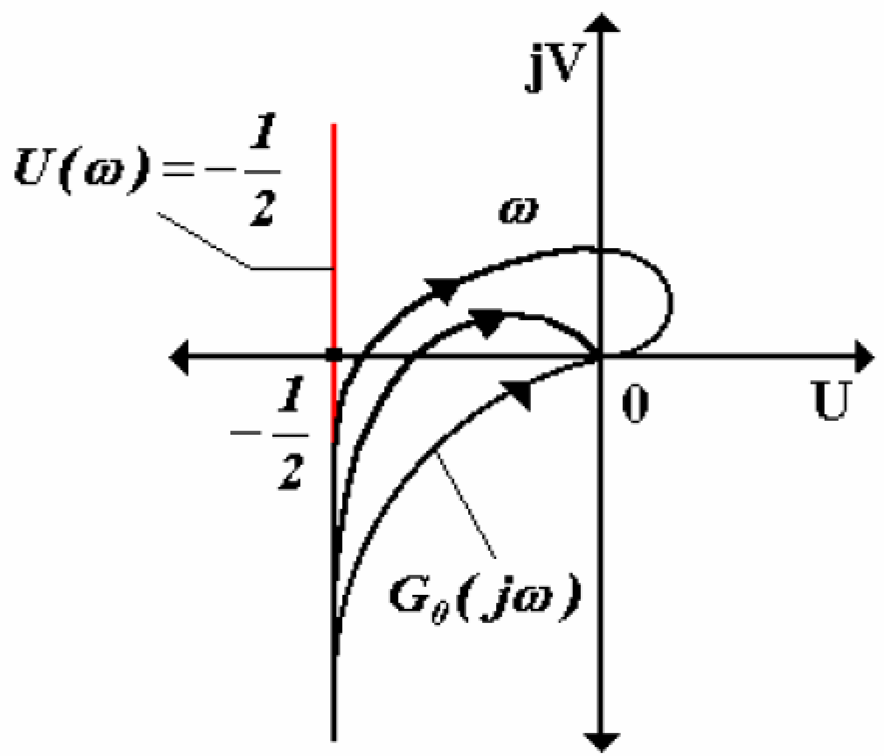
$$M^2(\omega)=\left|\frac{G_O(j\omega)}{1+G_O(j\omega)}\right|^2=\left|\frac{U(\omega)+jV(\omega)}{1+U(\omega)+jV(\omega)}\right|^2=\frac{U^2+V^2}{1+2U+U^2+V^2}\stackrel{!}{=}1$$

Metóda optimálneho modulu – princíp (pokrač.)

$$M^2(\omega) = \frac{U^2 + V^2}{1 + 2U + U^2 + V^2} \overset{!}{=} 1$$

Podmienka sa splní ak:

$$1 + 2U = 0 \Rightarrow \boxed{\mathrm{Re}\{G_O(j\omega)\} = U(\omega) = -0.5}$$



Frekvenčné charakteristiky v komplexnej rovine

Metóda optimálneho modulu – postup návrhu

<u>Postup návrhu :</u>

• Určíme **frekvenčnú prenosovú funkciu otvoreného regulačného obvodu**:

$$G_O(j\omega) = G(j\omega)G_R(j\omega)$$

• **Rozložíme na reálnu a imaginárnu zložku**, pričom funkcie $U(\omega)$ a $V(\omega)$ sú závislé od parametrov regulátora.

$$G_O(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

• **Reálnu zložku položíme rovnú –0.5**:

$$U(\omega) = -0.5$$

• **Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách *ω* získame rovnice pre výpočet parametrov regulátora**.

Metóda optimálneho modulu – odvodenie parametrov PID

Prenosová funkcia systému:

$$G(s)=K\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{K}{N(s)/M(s)}=\frac{K}{1+a_1s+a_2s^2+\ldots+a_ns^n}$$

Prenosová funkcia PID regulátora: $G_R(s)=r_0+\frac{r_{-1}}{s}+r_1s$

1. Určíme **frekvenčnú prenosovú funkciu ORO**

$s\approx j\omega \quad s^2\approx-\omega^2 \quad s^3\approx-j\omega^3 \quad s^4\approx\omega^4$

$$G_O(j\omega)=G(j\omega)G_R(j\omega)=\frac{K\left(r_0+\frac{r_{-1}}{j\omega}+r_1j\omega\right)}{1+j\omega a_1-\omega^2a_2-j\omega^3a_3+\omega^4a_4+j\omega^5a_5+\ldots}$$

$$G_O(j\omega)=\frac{K\left(r_0+j\left(\omega r_1-\frac{r_{-1}}{\omega}\right)\right)}{1-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots+j\left(a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots\right)}\boxed{\frac{1-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots-j\left(a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots\right)}{1-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots-j\left(a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots\right)}}$$

Vynásobíme komplexne združeným číslom, aby sme dostali **Re** a **Im** zložku

Metóda optimálneho modulu – odvodenie parametrov PID (pokrač.)

2. Rozložíme na **reálnu** a **imaginárnu zložku**

$$\mathrm{Re}\{G_O(j\omega)\} = \frac{Kr_0\left(1-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots\right)+K\left(\omega r_1-\dfrac{r_{-1}}{\omega}\right)\left(a_1\omega-a_3\omega^3+\ldots\right)}{\left(1-a_2\omega^2+a_4\omega^4-\ldots\right)^2+\left(a_1\omega-a_3\omega^3+a_5\omega^5-\ldots\right)^2}$$

3. Reálnu zložku položíme rovnú –0.5

$$U(\omega)=\frac{K\left(r_0-r_{-1}a_1\right)+\omega^2K\left(-a_2r_0+a_1r_1+a_3r_{-1}\right)+\omega^4K\left(a_4r_0-a_3r_1-a_5r_{-1}\right)+\ldots}{1+\omega^2\left(a_1^2-2a_2\right)+\omega^4\left(a_2^2+2a_4-2a_1a_3\right)+\ldots}=-0.5$$

4. Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách ω získame rovnice pre výpočet parametrov regulátora

$$\omega^0: r_0-r_{-1}a_1=-\frac{1}{2K}$$

$$\omega^2: -a_2r_0+a_1r_1+a_3r_{-1}=-\frac{1}{2K}\left(a_1^2-2a_2\right)$$

$$\omega^4: a_4r_0-a_3r_1-a_5r_{-1}=-\frac{1}{2K}\left(a_2^2-2a_1a_3+2a_4\right)$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix}=\frac{1}{2K}\begin{pmatrix} 1 \\ -a_1^2+2a_2 \\ a_2^2-2a_1a_3+2a_4 \end{pmatrix}$$

Metóda optimálneho modulu – parametre regulátora

PID regulátor

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} + r_1 s$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 & 0 \\ a_3 & -a_2 & a_1 \\ a_5 & -a_4 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{-1} \\ r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4 \end{pmatrix}$$

PI regulátor

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & -1 \\ a_3 & -a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{-1} \\ r_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} 1 \\ -a_1^2 + 2a_2 \end{pmatrix}$$

PD regulátor

$$G_R(s) = r_0 + r_1 s$$

$$\begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ -a_4 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_0 \\ r_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2K} \begin{pmatrix} -a_1^2 + 2a_2 \\ a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4 \end{pmatrix}$$

I regulátor

$$G_R(s) = \frac{r_{-1}}{s}$$

$$r_{-1} = \frac{1}{2K} \frac{1}{a_1}$$

Metóda optimálneho modulu pre systém s dopravným oneskorením

Lineárny spojitý systém:

$$G(s)=K\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(1+\tau_j s\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1+T_i s\right)}e^{-Ds}$$

$$p_k=\sum_{i=1}^{n}T_i^{\,k}-\sum_{j=1}^{m}\tau_j^{\,k}+D\,\delta_{1k}$$

kde koeficienty $\delta_{1\kappa}=1$ pre $k=1$, inak $\delta_{1\kappa}=0$

$$a_0=1$$

$$a_1=p_1$$

$$a_2=\left(p_1^{\,2}-p_2\right)/2$$

$$a_3=\left(p_1^{\,3}-3p_1p_2+2p_3\right)/6$$

$$a_4=\left(p_1^{\,4}-6p_1^{\,2}p_2+8p_1p_3+3p_2^{\,2}-6p_4\right)/24$$

$$a_5=\left(p_1^{\,5}-10p_1^{\,3}p_2+20p_1^{\,2}p_3+15p_1p_2^{\,2}-30p_1p_4-20p_2p_3+24p_5\right)/120$$

→ pokrač. dosadením do vzorcov na str. 1-76, vypočítame parametre regulátora

Metóda sumy časových konštánt pre systém s dopravným oneskorením

Určenie koeficientov spojitého regulátora je možné realizovať z prenosovej funkcie modelu riadeného procesu:

$$G(s) = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(1+\tau_j s)}{\prod_{i=1}^{n}(1+T_i s)}e^{-Ds}$$

pričom $T_S = \sum_{i=1}^{n} T_i - \sum_{j=1}^{m} \tau_j + D$, $K_S = K$

Normálna verzia		P	T_I	T_D
	P	$1/K_s$	-	-
	PD	$1/K_s$	-	$0.33T_s$
	PI	$0.5/K_s$	$0.5T_s$	-
	PID	$1/K_s$	$0.66T_s$	$0.167T_s$
Rýchla verzia	PI	$1/K_s$	$0.7T_s$	-
	PID	$2/K_s$	$0.8T_s$	$0.194T_s$

$$G_R(s) = P\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$$

Inverzia dynamiky (metóda priamej syntézy)

Navrhujeme diskrétny regulátor pre riadený systém s prenosovou funkciou 1. alebo 2. rádu:

$$G(s) = \frac{K}{s} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s + 1} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{s(T_1 s + 1)} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-Ds}$$

$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds} = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} e^{-Ds}$$

$$T_1 = T\left(b + \sqrt{b^2 - 1}\right)$$

$$T_2 = T\left(b - \sqrt{b^2 - 1}\right)$$

Ak navrhujeme regulátor pre riadený systém s prenosovou funkciou 3. alebo vyššieho rádu, prenosovú funkciu redukujeme na nižší rád

Redukcia *n*-tého rádu aperiodického systému

Ak navrhujeme diskrétny regulátor pre riadený systém s prenosovou funkciou 3. alebo vyššieho rádu, prenosovú funkciu redukujeme na nižší rád podľa tab.:

$\frac{K}{(T_n s+1)^n} e^{-D_n s}$		$\overbrace{1}^{}$	2	3	4	5	6
$\frac{K}{(T_1 s+1)} e^{-D_1 s}$	$\frac{T_1}{T_n}$	1	1.568	1.980	2.320	2.615	2.881
	$\frac{D_1 - D_n}{T_n}$	0	0.552	1.232	1.969	2.741	3.537
$\frac{K}{(T_2 s+1)^2} e^{-D_2 s}$	$\frac{T_2}{T_n}$	0.638	1	1.263	1.480	1.668	1.838
	$\frac{D_2 - D_n}{T_n}$	0.352	0	0.535	1.153	1.821	2.523

Redukcia *n*-tého rádu aperiodického systému – príklad (1/2)

PR.: Systém je zadaný prenosovou funkciou 3. rádu. Nahraďte prenosovú funkciu prenosovou funkciou 2. rádu.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} e^{-0.1s}$$

Prenosovú funkciu $G(s)$ nahradíme prenosovou funkciou 2. rádu – $G_1(s)$ podľa tabuľky z predchádzajúcej strany.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3} e^{-0.1s} \longrightarrow$$

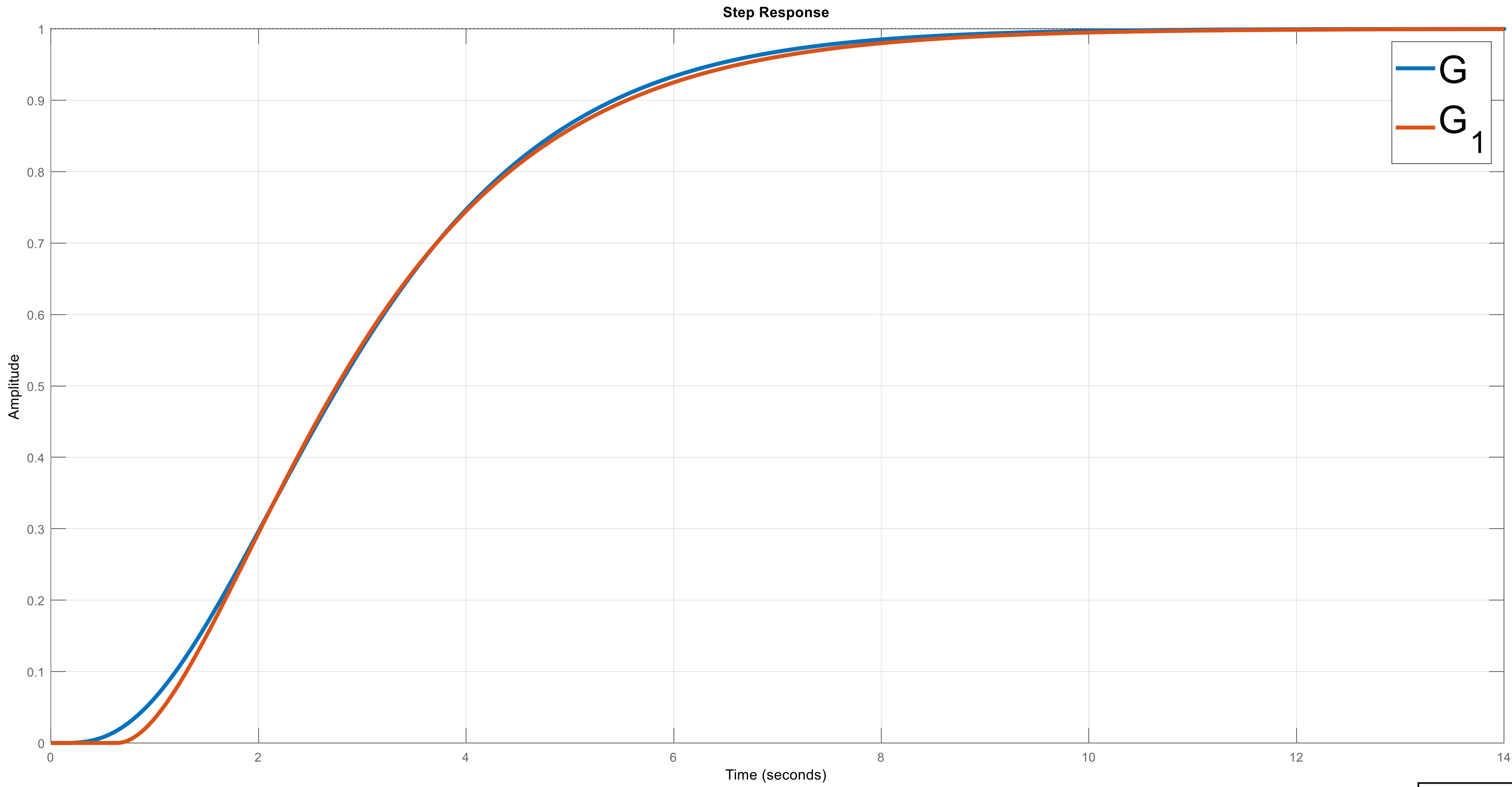
$n=3$, $D_3=0.1$, $T_3=1$

$$G_1(s) = \frac{K}{(T_2 s+1)^2} e^{-D_2 s} \longrightarrow \quad \frac{T_2}{T_3} = 1.263, \quad \frac{D_2 - D_3}{T_3} = 0.535 \quad \Rightarrow \quad T_2 = 1.263, \quad D_2 = 0.635$$

$$\boxed{G_1(s) = \frac{K}{(T_2 s+1)^2} e^{-D_2 s} = \frac{1}{(1.263s+1)^2} e^{-0.635s}}$$

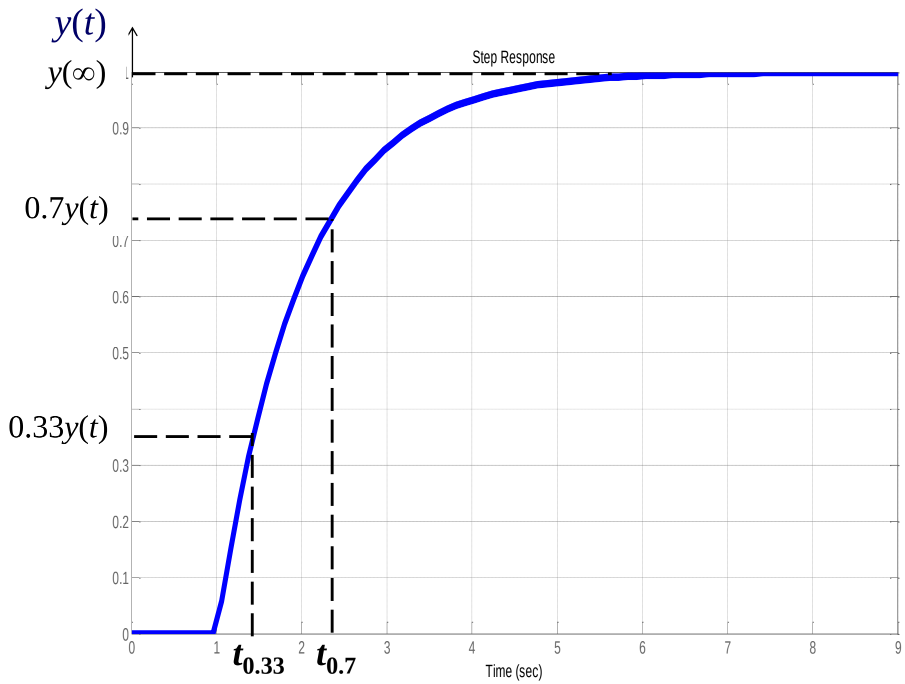
Redukcia *n*-tého rádu aperiodického systému – príklad (1/2)

Porovnanie prechodovej charakteristiky prenosovej funkcie 3. rádu - $G(s)$ s prenosovou funkciou 2. rádu – $G_1(s)$.



Získanie modelu z prechodovej char. aperiodického systému – príklad

Prechodová charakteristika systému



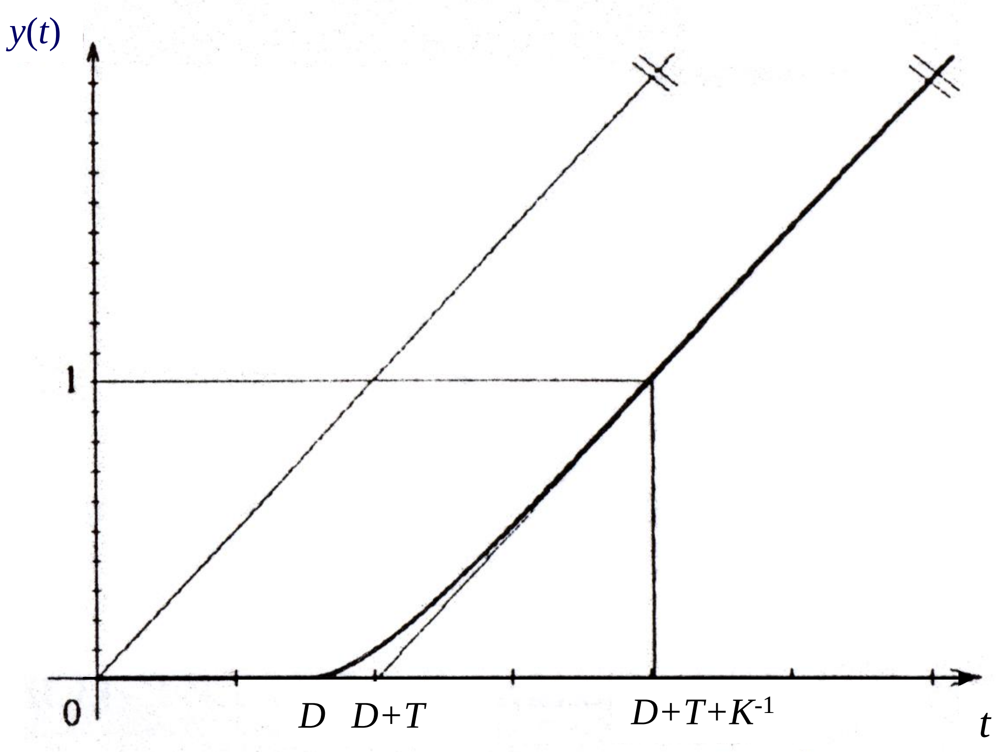
$$K = y(\infty) \quad príp. \quad K = \frac{\Delta y}{\Delta u}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 1.245\left(t_{0.7} - t_{0.33}\right) \\ D_1 &= 1.498\,t_{0.33} - 0.498\,t_{0.7} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad G(s) \approx \frac{K}{T_1 s + 1} e^{-D_1 s}$$

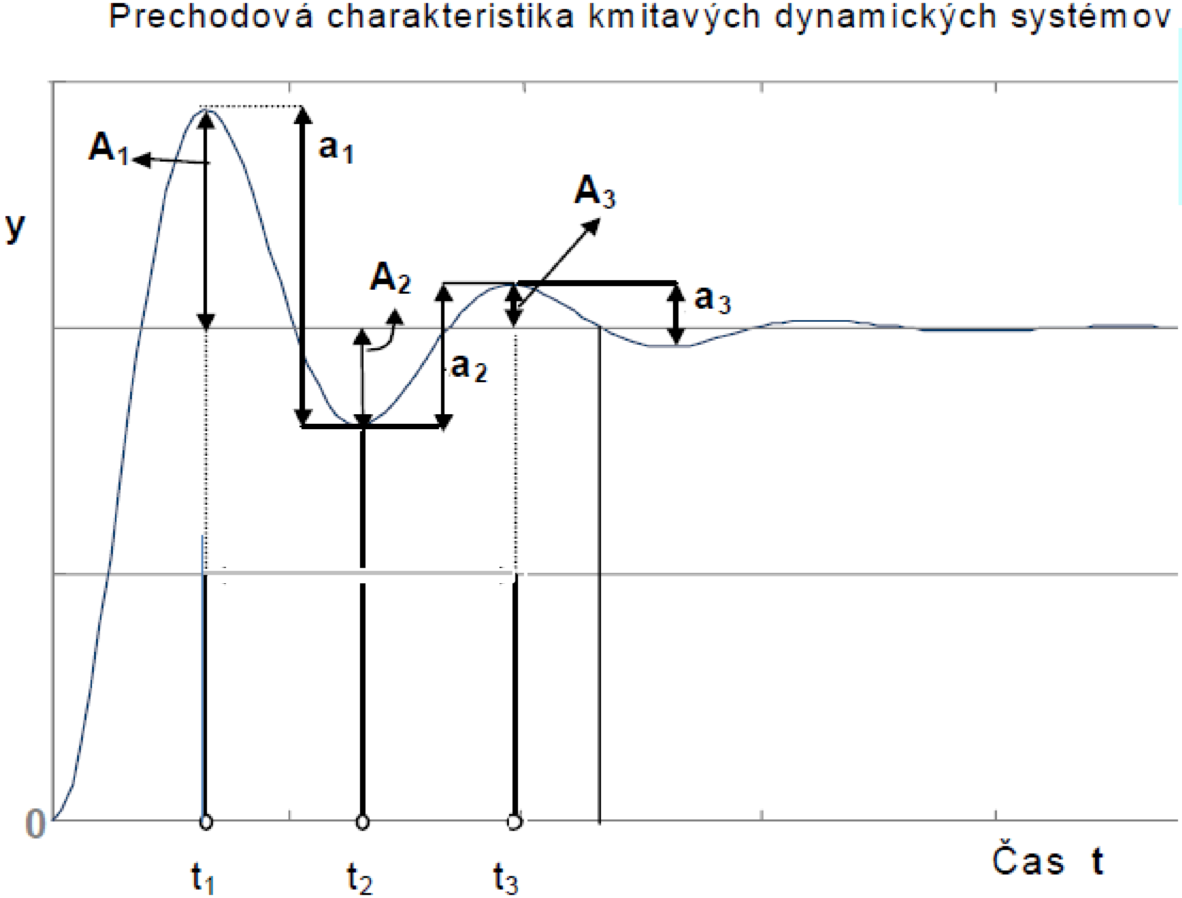
$$\left.\begin{aligned} T_2 &= 0.794\left(t_{0.7} - t_{0.33}\right) \\ D_2 &= 1.937\,t_{0.33} - 0.937\,t_{0.7} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad G(s) \approx \frac{K}{\left(T_2 s + 1\right)^2} e^{-D_2 s}$$

Získanie modelu z prechodovej char. astatického systému – príklad

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} e^{-Ds}$$



Redukcia *n*-tého rádu kmitavého systému, získanie modelu z prech. char. kmitavého systému



$$G(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds}$$

$$b = -\frac{\ln \frac{a_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+1}}{a_i}}}$$

resp.

$$b = -\frac{\ln \frac{a_{i+2}}{a_i}}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+2}}{a_i}}}$$

q – počet uvažovaných úsekov

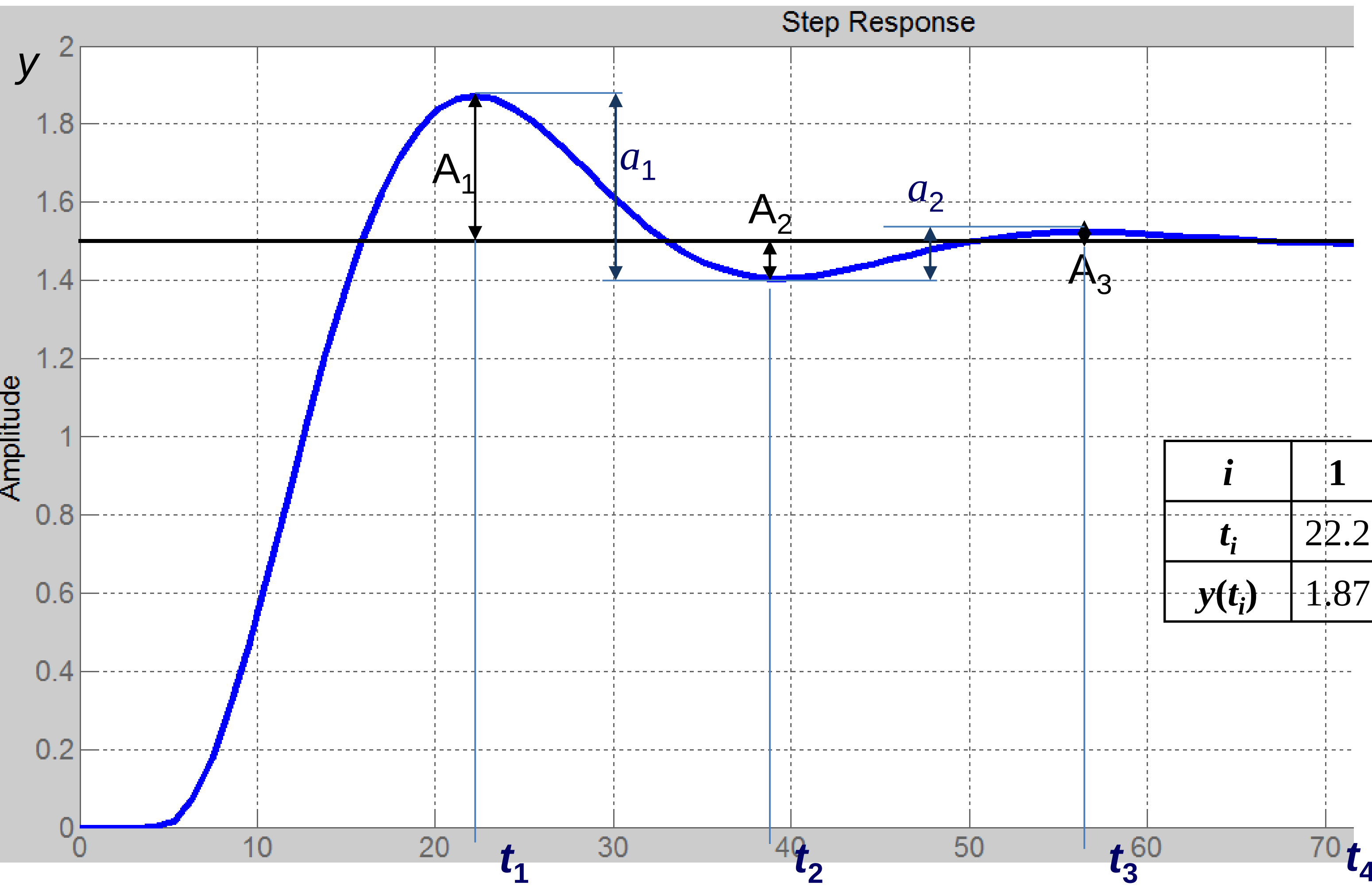
$$D = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} t_i - \frac{q+1}{2}(t_{q+1} - t_1)$$

$$T = \frac{1}{\pi q}(t_{q+1} - t_1)\sqrt{1 - b^2}$$

Redukcia *n*-tého rádu kmitavého systému – príklad (1/4)

PR. : Systém je zadaný prenosovou funkciou 3. rádu. Nahraďte prenosovú funkciu prenosovou funkciou 2. rádu.

$$G(s) = \frac{1.5}{25s^3 + 29s^2 + 5s + 1} e^{-4s} \longrightarrow G_1(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds}$$



i	1	2	3	4
t_i	22.2	39.3	56.5	73.6
$y(t_i)$	1.87	1.41	1.52	1.49

Redukcia *n*-tého rádu kmitavého systému – príklad (2/4)

$$a_i = \left| y(t_i) - y(t_{i+1}) \right|, \quad i = 1, 2, 3$$

$$a_1 = \left| 1.87 - 1.41 \right| = 0.46$$

$$a_2 = \left| 1.41 - 1.52 \right| = 0.11$$

$$a_3 = \left| 1.52 - 1.49 \right| = 0.03$$

$$\underbrace{\frac{a_{i+1}}{a_i} : \frac{a_2}{a_1} = \frac{0.11}{0.49} = 0.24, \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{0.03}{0.11} = 0.27}$$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = 0.255 \rightarrow$$ stredná hodnota

$$\frac{a_{i+2}}{a_i} : \frac{a_3}{a_1} = \frac{0.03}{0.46} = 0.07$$

$$b = -\frac{\ln \frac{a_{i+1}}{a_i}}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+1}}{a_i}}} = 0.4$$

resp.

$$b = -\frac{\ln \frac{a_{i+2}}{a_i}}{\sqrt{4\pi^2 + \ln^2 \frac{a_{i+2}}{a_i}}} = 0.4$$

Redukcia *n*-tého rádu kmitavého systému – príklad (3/4)

q – počet uvažovaných úsekov (q=3)

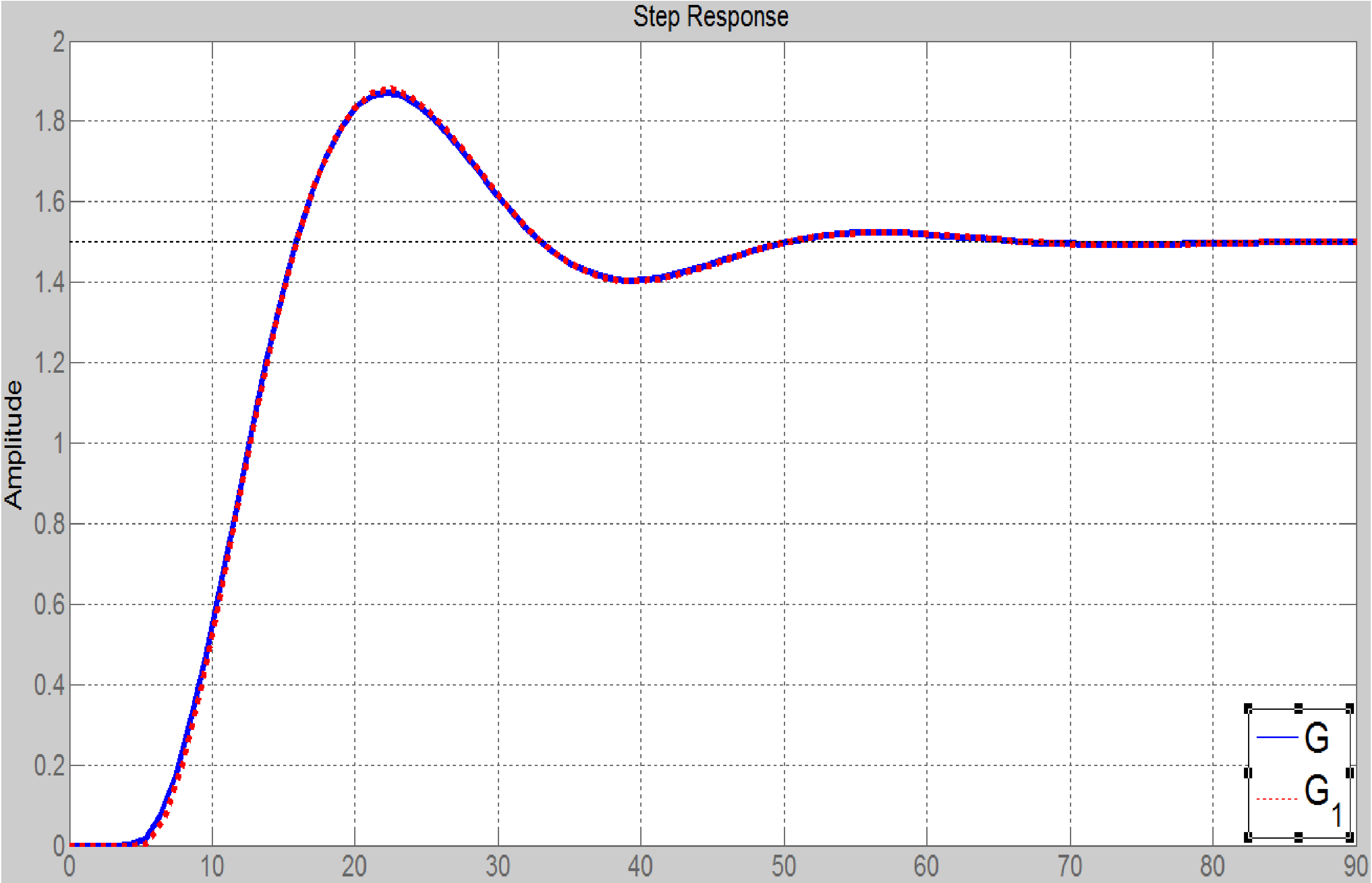
$$T = \frac{1}{\pi q}(t_{q+1} - t_1)\sqrt{1-b^2} = \frac{1}{3\pi}(73.6 - 22.2)\sqrt{1-0.4^2} \doteq 5$$

$$D = \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} t_i - \frac{q+1}{2}(t_{q+1} - t_1) = \frac{1}{3}\left[\left(22.2 + 39.3 + 56.5\right) - \frac{4}{2}\left(73.6 - 22.2\right)\right] = 5.1$$

$$G_1(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2bTs + 1} e^{-Ds} = \frac{1.5}{25s^2 + 4s + 1} e^{-5.1s}$$

Redukcia *n*-tého rádu kmitavého systému – príklad (4/4)

Porovnanie prechodovej charakteristiky prenosovej funkcie 3. rádu - $G(s)$ s prenosovou funkciou 2. rádu – $G_1(s)$.



Inverzia dynamiky – postup návrhu regulátora (1/3)

Postup pre získanie prenosovej funkcie spojitého regulátora je $T=0$
(***T*** - perióda vzork.,***D*** – dopravné oneskorenie):

Pozn. ak $D=0$, volíme časovú konštantu URO – T_W a body 1., 2. vynecháme začíname bodom 3.

1. Vyberieme si požadovanú hodnotu preregulovania $\boldsymbol{\eta}$ pre URO. Tejto hodnote zároveň odpovedajú hodnoty koeficientov $\boldsymbol{\alpha}$ a $\boldsymbol{\beta}$ podľa tabuľky:

η	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.40	0.45
α	1.282	0.984	0.884	0.832	0.763	0.697	0.669	0.640	0.618	0.599
β	2.718	1.944	1.720	1.561	1.473	1.337	1.248	1.172	1.104	1.045

2. Vypočítame hodnotu zosilnenia ORO – a podľa vzorca:

$$a = \frac{1}{\alpha T + \beta D}$$

3. Na základe hodnoty zosilnenia a alebo zvolenej časovej konštanty URO - $\boldsymbol{T_W}$ a parametrov modelu riadeného procesu vypočítame parametre regulátora podľa nasledovnej tabuľky:

Inverzia dynamiky – postup návrhu regulátora (2/3)

parametre spojitého regulátora (T=0)

$G(s)$	Typ regulátora	D=0 P	D>0 P	T_I	T_D
$\frac{K}{s}e^{-Ds}$	**P**	$\frac{2}{K(2T_W+T)}$	$\frac{a}{K}$	-	-
$\frac{K}{T_1 s+1}e^{-Ds}$	**PI**	$\frac{2T_I}{K(2T_W+T)}$	$\frac{a}{K}T_I$	$T_1-\frac{T}{2}$	-
$\frac{K}{s(T_1 s+1)}e^{-Ds}$	**PD**	$\frac{2}{K(2T_W+T)}$	$\frac{a}{K}$	-	$T_1-\frac{T}{2}$
$\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}e^{-Ds}$	**PID**	$\frac{2T_I}{K(2T_W+T)}$	$\frac{a}{K}T_I$	T_1+T_2-T	$\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}-\frac{T}{4}$
$\frac{K}{T_1^2 s^2+2bT_1 s+1}e^{-Ds}$	**PID**	$\frac{2T_I}{K(2T_W+T)}$	$\frac{a}{K}T_I$	$2bT_1-T$	$\frac{T_1}{2b}-\frac{T}{4}$

Inverzia dynamiky – postup návrhu regulátora (3/3)

4. Parametre regulátora dosadíme do prenosovej funkcie $G_R(s)$ podľa tab.

Typ regulátora	$G_R(s)$
P	P
I	$\frac{1}{T_I s}$
PI	$P\left(1+\frac{1}{T_I s}\right)$
PD	$P(1+T_D s)$
PID	$P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)$

Inverzia dynamiky – príklad1 (1/2)

PR. 1: Navrhnite spojitý regulátor metódou inverzie dynamiky pre systém:

$$G(s) = \frac{0.75}{(4.35s+1)(1.15s+1)}$$

1-93

Keďže systém nemá dopravné oneskorenie (D=0), volíme časovú konštantu URO – T_W .
Podľa tabuľky vypočítame parametre spojitého (T=0) PID regulátora.

$G(s)$	Typ regulátora	D=0 P	D>0 P	T_I	T_D
$\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} e^{-Ds}$	***PID***	$\frac{2T_I}{K(2T_W+T)}$	$\frac{a}{K}T_I$	T_1+T_2-T	$\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}-\frac{T}{4}$

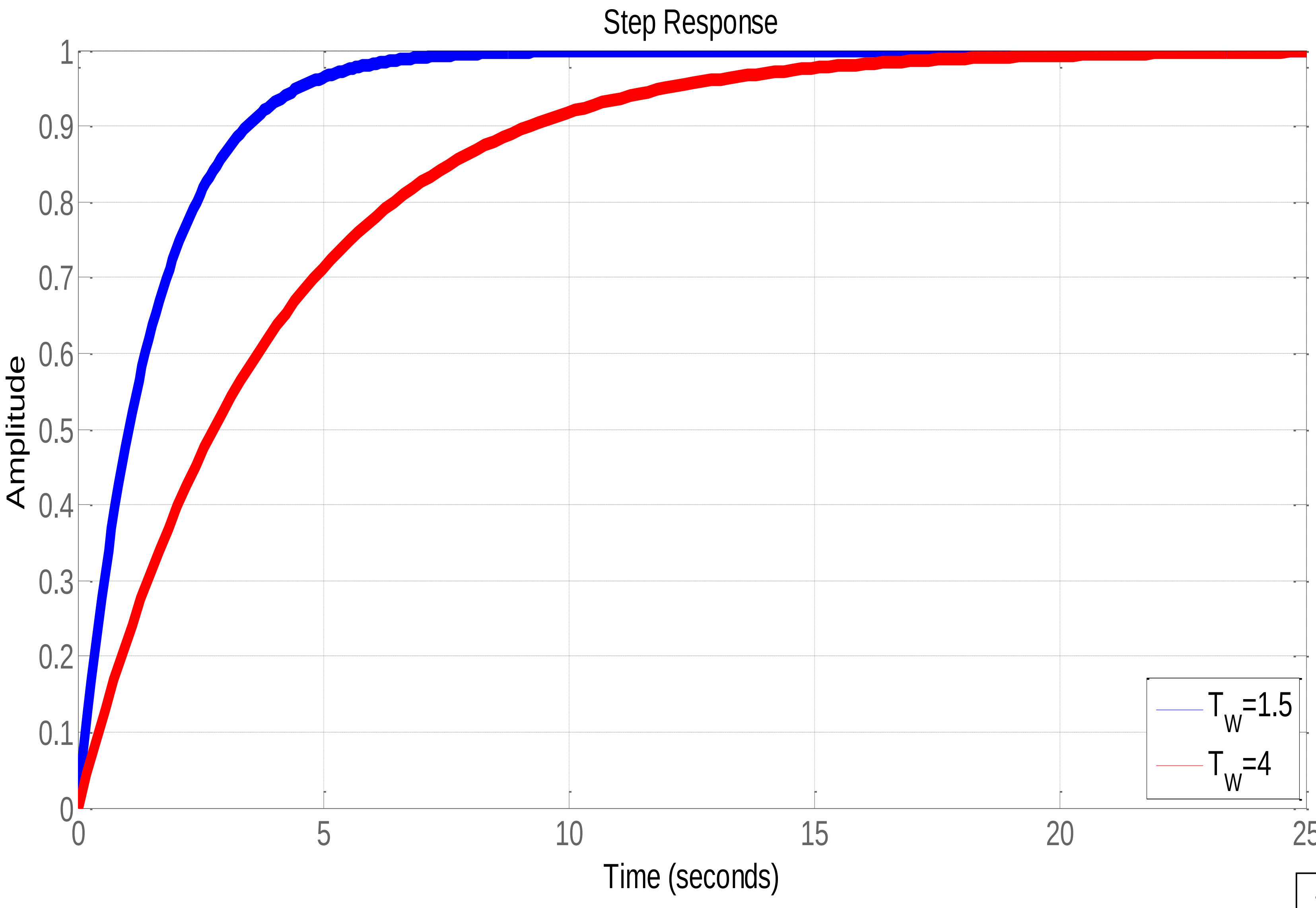
$$P = \frac{T_I}{KT_W} \doteq \frac{7.333}{T_W}$$

$$T_I = T_1 + T_2 = 5.5$$

$$T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1+T_2} \doteq 0.9095$$

$$\boxed{G_R(s) = P\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)}$$

Inverzia dynamiky – príklad1 (1/2)



Inverzia dynamiky – príklad2 (1/2)

PR. 2: Navrhnite spojitý regulátor metódou inverzie dynamiky pre systém **s dopravným oneskorením**:

$$G(s)=\frac{0.75}{(4.35s+1)(1.15s+1)}e^{-2s}$$

1-95

Navrhujeme **spojitý** regulátor, preto ***T*=0**. Keďže systém má dopravné oneskorenie (***D*=2**), vyberieme si požadovanú hodnotu preregulovania 5% pre URO (***η*=0.05**). Tejto hodnote zároveň odpovedajú hodnoty koeficientov ***α*=0.984** a ***β*=1.944**. Vypočítame hodnotu zosilnenia ORO – ***a***.

$$a=\frac{1}{\alpha T+\beta D}=0.2572$$

Podľa tabuľky vypočítame parametre spojitého PID regulátora.

$G(s)$	Typ regulátora	$D=0$ P	$D>0$ P	T_I	T_D
$\frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}e^{-Ds}$	***PID***	$\frac{2T_I}{K(2T_W+T)}$	$\frac{a}{K}T_I$	T_1+T_2-T	$\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}-\frac{T}{4}$

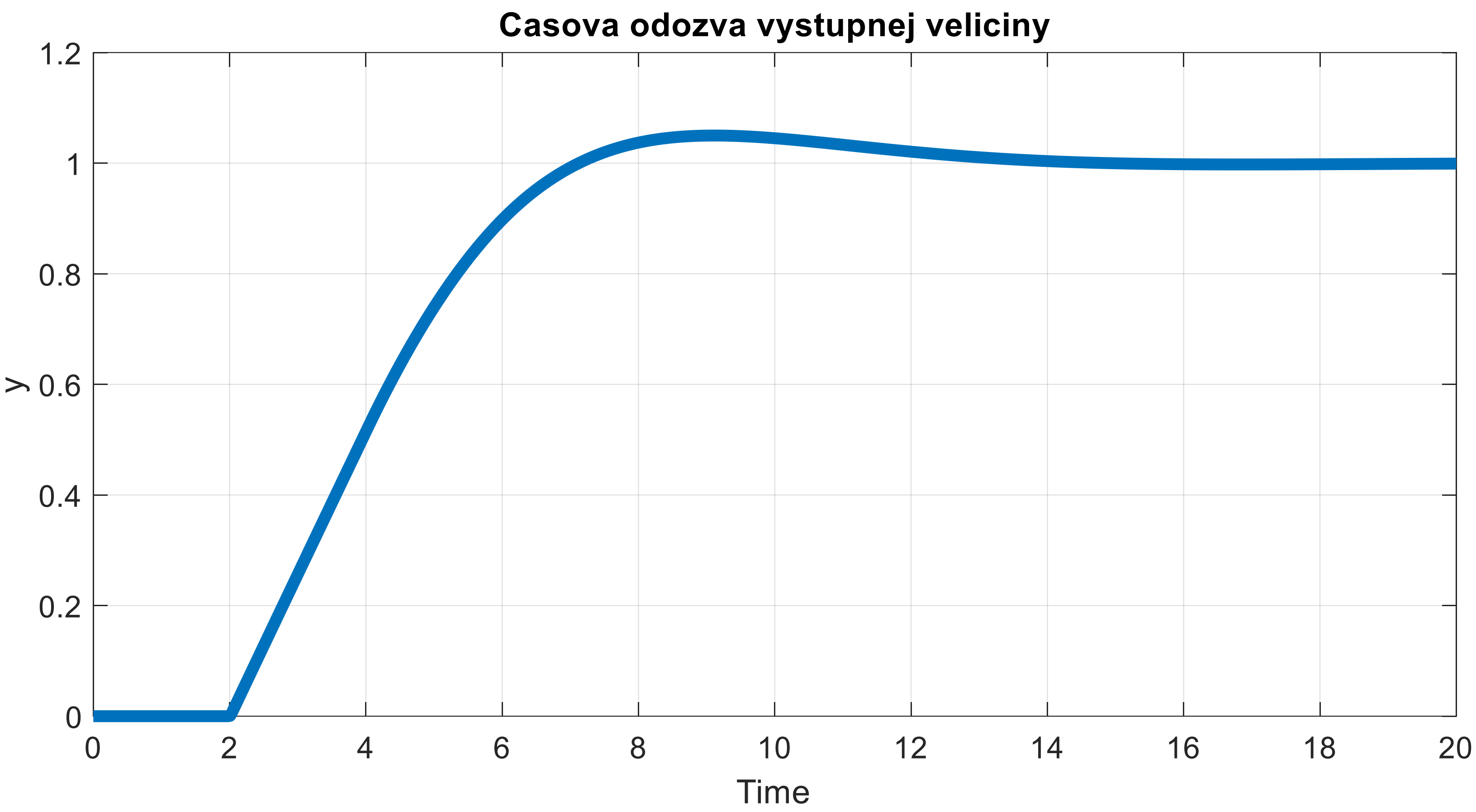
$$P=\frac{a}{K}T_I=1.8861$$

$$T_I=T_1+T_2=5.5$$

$$T_D=\frac{T_1T_2}{T_1+T_2}\doteq 0.9095$$

$$G_R(s)=P\left(1+\frac{1}{T_Is}+T_Ds\right)$$

Inverzia dynamiky – príklad2 (2/2)



stepinfo

RiseTime: 3.6234
SettlingTime: 12.0634
SettlingMin: 0.9032
SettlingMax: 1.0499
Overshoot: 4.9942
Undershoot: 0
Peak: 1.0499
PeakTime: 9.1034

Čo treba vedieť z 1. prednášky?

- Nakresliť základný regulačný obvod a popísať v ňom všetky veličiny
- Vysvetliť princíp spätnej väzby
- Opísať model riadeného systému, určiť jeho póly a nuly
- Definovať prechodovú charakteristiku systému, nakresliť priebeh (približne) pre systém 1. a 2. rádu
- Definovať frekvenčnú charakteristiku systému, napísať postup pre jej získanie v komplexnej rovine (nyquist) a v logaritmických súradniciach (bode)
- Napísať prenosovú funkciu ORO a URO (+ $G_{E/W}(s)$, $G_{U/W}(s)$)
- Napísať CHRURO

Čo treba vedieť z 1. prednášky?

- Vymenovať kritéria stability pre URO
- Vymenovať aké frekvenčné charakteristiky existujú (nakresliť osi, naznačiť charakteristiky pre stabilné a nestabilné systémy)
- Naznačiť postup získania Nyquistovej frekvenčnej charakteristiky pre ORO
- Naznačiť postup získania Bodeho frekvenčnej charakteristiky pre ORO
- Definíciu zjednodušeného Nyquistoveho kritéria stability
- Definíciu Bodeho kritéria stability
- Vymenovať ukazovatele kvality
- Definovať ukazovatele kvality v ustálenom stave
- Definovať ukazovatele kvality v prechodnom stave

Čo treba vedieť z 1. prednášky?

- Vymenovať aké tri zložky má PID regulátor
- Nakresliť prechodové charakteristiky P, I, D, PI, PD a PID regulátora
- Napísať rovnicu PID v časovej oblasti
- Napísať prenosovú funkciu PID (P, I, D, PI, PD) regulátora v interakčnom tvare aj zložkovom tvare
- Vedieť vzťahy medzi (parametrami) interakčným a zložkovým tvarom
- Napísať aké kritéria uvažujeme pri výbere vhodnej štruktúry regulátora pre vybrané systémy
- Určiť vhodnú štruktúru regulátora pre zadaný systém a $W(s)$
- Overiť stabilitu zadaného URO
- Pojednať o kvalite zadaného URO

Ktoré princípy metód pre návrh PID regulátora treba vedieť z 1. prednášky?

Metóda OPTIMÁLNEHO MODULU

Metóda sumy časových konštánt

Metóda inverzie dynamiky

- vedieť princíp návrhu jednotlivých metód
- vysvetliť postup pre výpočet parametrov reg.
- pre zadanú prenosovú funkciu systému určiť parametre regulátora