Aplikovaná matematika

doc. Ing. Miroslav Halás, PhD.
miroslav.halas@stuba.sk

zimný semester, 2016

Štruktúra predmetu

Info

- Prednášky - c801
- Cvičenia - d328/d330

Body

- Semester - 40b
- Skúška - 60b
- Bonus - 5 až 10b

Literatúra

- Huba M., Hubinský P., Žáková K.: Teória systémov. Vydavateľstvo STU Bratislava, 2002.
- Kubík S. a kol.: Teorie automatického řízení I. Lineární a nelineární systémy. SNTL Praha, 1982.
- Callier, F., Desoer, Ch.: Linear System Theory. Springer, 1991.

Dynamické systémy

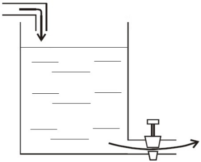
Príklady dynamických systémov

- auto na vozovke

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = \frac{1}{m}u$$

- nádrž s otvorom

$$\dot{y} + \frac{k\sqrt{2g}}{A}\sqrt{y} = \frac{1}{A}u$$



Dynamické systémy

Príklady dynamických systémov

- teplota v miestnosti
- RLC obvod
- populácia zajacov a vlkov v oblasti
- správanie sa vírusu (HIV)
- turbína
- vrtuľník
- tlak v kotli
- počet neutrónov v reaktore
- chemická reakcia
- rádioaktívny rozpad
- ...

Dynamické systémy

Možné opisy dynamických systémov

- lineárna diferenciálna rovnica

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_m u^{(m)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

- nelineárna diferenciálna rovnica

$$y^{(n)} = \varphi(y, \dot{y}, \ldots, y^{(n-1)}, u, \dot{u}, \ldots, u^{(m)})$$

- diferenčné rovnice
- ...

Laplaceova transformácia

- nástroj riešenia lineárnych diferenciálnych rovníc
- nástroj opisu dynamických systémov a signálov v nich

Priama

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \qquad F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) \mathrm{d}t$$

Spätná

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \qquad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma - iT}^{\gamma + iT} e^{st} F(s) \mathrm{d}s$$

Laplaceova transformácia

Tabuľka

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$1(t)$	$\dfrac{1}{s}$	$\cos \omega t$	$\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$	$\dfrac{1}{s}F(s)$
$f(t-T)$	$F(s)e^{-sT}$		
$\int_0^t f(x)g(t-x)dx$	$F(s)G(s)$		

FVT: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

IVT: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

Laplaceova transformácia

Example

Pomocou Laplaceovej transformácie vypočítajte, ako sa bude meniť dráha auta na vozovke, ak má počiatočnú rýchlosť 25 $m \cdot s^{-1}$ a počiatočnú polohu 0 m.

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}\dot{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 Y(s) - 25 + \frac{k}{m} s Y(s) = 0$$

$$Y(s) = \frac{25}{s(s+\frac{k}{m})} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} y(t) &= 25\,\frac{m}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ y(\infty) &= 25\,\frac{m}{k} \end{aligned}$$

Prenosová funkcia

Definition

Pomer Laplaceovho obrazu výstupu systému k Laplaceovmu obrazu vstupu systému pri nulových počiatočných podmienkach.

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Nezávisí od konkrétneho signálu, ktorý na vstup dáme!

Example

Nájdite prenosovú funkciu integrátora.

Example

Nájdite prenosovú funkciu auta pohybujúceho sa na vozovke.

Bloková schéma a jej modifikácia
Základné zapojenia

- sériové
$$F(s) = F_A(s) \cdot F_B(s)$$
- paralelné
$$F(s) = F_A(s) + F_B(s)$$
- spätnoväzobné
$$F(s) = \frac{F_A(s)}{1 - F_A(s) \cdot F_B(s)}$$

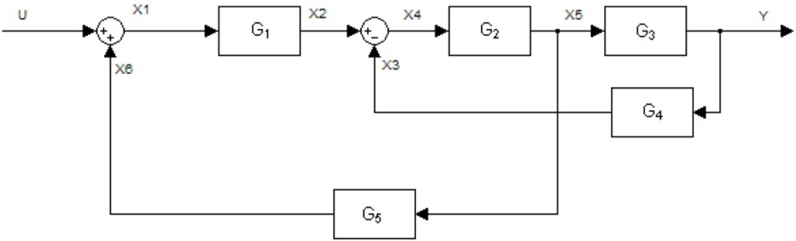
Každá bloková schéma sa dá pomocou úprav zjednodušiť na niektoré z týchto základných zapojení. A to pomocou:

- presunutia súčtového člena
- presunutia uzlu

Bloková schéma a jej modifikácia
Úprava blokovej schémy

Example

Pomocou úprav blokovej schémy nájdite výslednú prenosovú funkciu.



Signálový diagram - Masonov vzorec

- vetva - spojenie dvoch uzlov
- vlákno - prepojenie vstupného a výstupného uzla pomocou radu sériovo zapojených vetiev
- slučka - do seba uzavreté spojenie jednej alebo viacerých vetiev
- prenos vlákna $F_v(s)$ - súčin prenosov všetkých vetiev zapojených do vlákna
- prenos slučky $F_s(s)$ - súčin prenosov všetkých vetiev zapojených do slučky

Signálový diagram - Masonov vzorec

$$F(s) = \frac{1}{\Delta} \sum_i F_{vi}(s) \cdot \Delta_i$$

kde $\Delta = 1 - \sum_i F_{s1i}(s) + \sum_j F_{s2j}(s) - \sum_k F_{s3k}(s) + \cdots$ je determinant signálového diagramu.

- $F_{s1i}(s)$ - prenos i-tej slučky v signálovom diagrame
- $F_{s2j}(s)$ - súčin prenosov dvoch navzájom sa nedotýkajúcich slučiek
- $F_{s3k}(s)$ - súčin prenosov troch navzájom sa nedotýkajúcich slučiek

Δ_i - subdeterminant i-teho vlákna - počíta sa rovnako ako Δ, ale vynechajú sa všetky slučky dotýkajúce sa daného vlákna

Metóda eliminácie premenných

- spočíva v rozpísaní celej schémy do niekoľkých rovníc:

- rovnice pre súčtové členy
- rovnice pre jednotlivé bloky

Následným riešením sústavy týchto rovníc nájdeme výsledný prenos

Example

Nájdite výsledný prenos blokovej schémy z predošlého príkladu pomocou:

- Masonovho vzorca
- metódy eliminácie premenných

Charakteristiky systémov

(Najdôležitejšiou) charakteristikou systému je jeho rád

Ďalej systémy delíme na:

- lineárne
- nelineárne

- statické
- astatické

- bez oneskorenia
- s oneskorením

Charakteristiky systémov

Prevodová charakteristika

- závislosť výstupu systému na jeho vstupe v ustálenom stave

Vieme zistiť z diferenciálnej rovnice, z prenosovej funkcie alebo experimentom

Prechodová charakteristika

- odozva systému na jednotkový skok

Vieme zistiť z prenosovej funkcie alebo experimentom

Impulzná charakteristika

- odozva systému na Diracov impulz

Vieme zistiť z prenosovej funkcie alebo experimentom

Charakteristiky systémov

Vzťah medzi impulznou charakteristikou - $k(t)$, a prechodovou charakteristikou - $y(t)$

$$y(t) = \int_0^t k(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad\qquad k(t) = \dot{y}(t)$$

Example

Nájdite impulznú charakteristiku auta pohybujúceho sa na vozovke

Example

Nájdite prechodovú charakteristiku systému opísaného diferenciálnou rovnicou $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3\dot{y} = \dot{u} + u$

Frekvenčný prenos a frekvenčné charakteristiky

Definition

Pomer Fourierovho obrazu výstupu systému k Fourierovmu obrazu vstupu systému pri nulových počiatočných podmienkach.

$$F(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}\{F(j\omega)\} + j \cdot \mathrm{Im}\{F(j\omega)\}$$

alebo

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg F(j\omega)}$$

Frekvenčný prenos a frekvenčné charakteristiky

Odozva systému na harmonický vstupný signál s frekvenciou ω a s jednotkovou amplitúdou

$$u(t) = \sin(\omega t) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = A(\omega)\sin(\omega t + \varphi(\omega))$$

Amplitúda výstupu

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \sqrt{(\mathrm{Re}\{F(j\omega)\})^2 + (\mathrm{Im}\{F(j\omega)\})^2}$$

Fázový posun výstupu (voči vstupu)

$$\varphi(\omega) = \arg F(j\omega) = \arctan \frac{\mathrm{Im}\{F(j\omega)\}}{\mathrm{Re}\{F(j\omega)\}}$$

Frekvenčný prenos a frekvenčné charakteristiky

Frekvenčná charakteristika - grafické zobrazenie frekvenčného prenosu

Nyquist-ova charakteristika

- v komplexnej rovine

$$F(j\omega) = \mathrm{Re}\{F(j\omega)\} + j \cdot \mathrm{Im}\{F(j\omega)\} \quad ; \qquad \omega = 0 \dots \infty$$

Bode-ho charakteristiky

- v logaritmických súradniciach

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg F(j\omega)} \quad ; \qquad \omega = 0 \dots \infty$$

– amplitúdová: $20 \log |F(j\omega)| \times \log \omega$ $[dB]$

– fázová: $\arg F(j\omega) \times \log \omega$ $[rad]$

Stavový priestor

Matematický model dynamického systému:

- vstupno-výstupná diferenciálna rovnica n-tého rádu, alebo druhá možnosť
- n diferenciálnych rovníc prvého rádu - stavový opis

Stavový opis systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

kde u je vstup, y je výstup a x je stav systému (vektor).

Stavový opis zobrazuje aj vnútornú štruktúru systému (stavy systému a vzájomné vzťahy medzi nimi).

Stavový priestor

Riešenie rovníc - pomocou Laplace-ovej transformácie:

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= x(0) + BU(s) \\ X(s) &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= C(sI - A)^{-1}x(0) + C(sI - A)^{-1}BU(s) \end{aligned}$$

Prenosová funkcia

Pre nulové počiatočné podmienky dostávame

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

Definition

Stav systému $x \neq 0$ sa nazýva riaditeľný, ak existuje taký vstup $u(t)$, ktorým sa systém za konečný čas prevedie do nuly.
Systém sa nazýva riaditeľný, ak sú všetky stavy riaditeľné.

Matica riaditeľnosti

$$Q_R = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$$

Theorem

Systém je riaditeľný vtedy a len vtedy, ak

$$\mathrm{rank}\, Q_R = n$$

Definition

Stav systému x sa nazýva pozorovateľný, ak sa dá určiť pomocou budúcich hodnôt výstupu $y(t)$ za konečný čas. Systém sa nazýva pozorovateľný, ak sú všetky stavy pozorovateľné.

Matica pozorovateľnosti

$$Q_P = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

Theorem

Systém je pozorovateľný vtedy a len vtedy, ak

$$\mathrm{rank}\, Q_P = n$$

Stavové transformácie

Zmena súradnicového systému

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad \rightarrow \quad z = Tx \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{z} &= \bar{A}z + \bar{B}u \\ y &= \bar{C}z \end{aligned}$$

Transformačné vzťahy:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= TAT^{-1} \\ \bar{B} &= TB \\ \bar{C} &= CT^{-1} \end{aligned}$$

Prenosová funkcia systému je invariantná voči stavovým transformáciám.

Stavové transformácie

Kanonická forma riaditeľnosti

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_R x + B_R u \\ y &= C_R x\end{aligned}$$

kde

$$A_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B_R = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C_R = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

Stavové transformácie

Kanonická forma pozorovateľnosti

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= A_P x + B_P u \\
y &= C_P x
\end{aligned}
$$

kde

$$
A_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \quad B_P = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix}
$$

$$
C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Stabilita

- štrukturálna vlastnosť systémov

Prvoradou a najdôležitejšou podmienkou návrhu akéhokoľvek riadenia je aby bol výsledný regulačný obvod stabilný.

Theorem

Lineárny systém s prenosovou funkciou

$$F(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b(s)}{(s-\alpha_n)\cdots(s-\alpha_2)(s-\alpha_1)}$$

je asymptoticky stabilný vtedy a len vtedy, ak všetky korene menovateľa (charakteristického polynómu) ležia v ľavej komplexnej polrovine

$$\mathrm{Re}\{\alpha_i\} < 0\,; \quad i = 1, \ldots, n$$

Stabilita

Ak

- $\mathrm{Re}\{\alpha_i\} > 0$ pre jedno či viaceré i, systém je nestabilný,
- $\mathrm{Re}\{\alpha_i\} = 0$ pre jedno či viaceré i (a $\mathrm{Re}\{\alpha_i\} < 0$ pre ostatné), systém je na hranici stability.

Pre systém v stavovom priestore

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \qquad F(s) = C(sI - A)^{-1}B = \frac{b(s)}{a(s)}$$

platí $a(s) = \det(sI - A)$.

Takže α_i, $i = 1, \ldots, n$, sú vlastné čísla matice A.

Metódy vyšetrovania stability

Problem

Ak má otvorený regulačný obvod (ORO) prenos

$$F_o(s) = K\frac{b(s)}{a(s)}$$

pre aký rozsah zosilnení K bude uzavretý regulačný obvod (URO) stabilný?

- Routhovo kritérium stability,
- geometrické miesto koreňov (GMK),
- Nyquistovo kritérium stability,
- ...

Routhovo kritérium stability

Nech $A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$ je charakteristický polynóm URO $F_u(s)$

	s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
$k_{n-1} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$	s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
$k_{n-2} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-2}}$	s^{n-2}	$b_{n-2} = a_{n-2} - k_{n-1} a_{n-3}$	$b_{n-4} = a_{n-4} - k_{n-1} a_{n-5}$	$b_{n-6} = \cdots$	
$k_{n-3} = \frac{b_{n-2}}{c_{n-3}}$	s^{n-3}	$c_{n-3} = a_{n-3} - k_{n-2} b_{n-4}$	$c_{n-5} = a_{n-5} - k_{n-2} b_{n-6}$		
	$\vdots$				
$k_1 = \frac{d_2}{e_2}$	s^1	e_1	0		
$k_0 = \frac{e_1}{f_0}$	s^0	f_0	0		
		0			

$\uparrow$

Počet znamienkových zmien v prvom stĺpci je rovný počtu nestabilných koreňov (ak sú všetky kladné, systém je stabilný).

Geometrické miesto koreňov - GMK

- grafické znázornenie polohy koreňov charakteristickej rovnice URO v závislosti od zmeny zosilnenia K
- určuje sa z prenosu ORO

Prenos ORO

$$F_o(s) = K\frac{b(s)}{a(s)} = \kappa\frac{(s-\beta_m)\cdots(s-\beta_1)}{(s-\alpha_n)\cdots(s-\alpha_1)}$$

- nuly - korene čitateľa
- póly - korene menovateľa

Geometrické miesto koreňov - GMK

Evansove pravidlá na konštrukciu GMK

- Jednotlivé vetvy GMK začínajú pre $K = 0$ v póloch prenosu ORO $F_o(s)$.
- GMK končí pre $K \to \infty$ v nulách prenosu ORO $F_o(s)$, pričom
- v póloch začína n vetiev, z ktorých m končí v nulách a zvyšných $n - m$ vetiev končí v nekonečne.
- Vetvy GMK, ktoré neležia na reálnej osi, sú voči nej symetrické.
- Súčasťou GMK sú všetky body reálnej osi, od ktorých napravo leží nepárny počet pólov a núl prenosu ORO $F_o(s)$ (pričom tieto počítame s príslušnou násobnosťou)
- Vetvy GMK opúšťajú reálnu os (resp. vstupujú do nej) v bode λ, ktorý učíme z rovnice $a'(\lambda)b(\lambda) - a(\lambda)b'(\lambda) = 0$.
- Asymptoty vetiev GMK, ktoré končia v nekonečne, pretínajú reálnu os pod uhlom $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}$ pre $k = 0, 1, 2, \ldots, n - m - 1$.
- Priesečník asymptôt s reálnou osou určíme podľa vzťahu $\delta = \frac{\sum \alpha_i - \sum \beta_j}{n-m}$.

Nyquistovo kritérium stability

- frekvenčné kritérium

Nyquistova krivka = frekvenčná charakteristika + komplexne združená frekvenčná charakteristika

Potom platí

$$\Omega = P - N$$

kde

Ω je počet obehov Nyquistovej krivky okolo bodu -1
P je počet nestabilných pólov ORO $F_o(s)$
N je počet nestabilných pólov URO $F_u(s)$

Dá sa riešiť aj analyticky. Hranica stability je

$$\mathrm{Re}\{F_o(j\omega)\} = -1 \qquad \mathrm{Im}\{F_o(j\omega)\} = 0$$

Z-transformácia

Diskrétna Laplace-ova transformácia

- nástroj riešenia lineárnych diferenčných rovníc
- nástroj opisu diskrétnych systémov a signálov v nich

Priama

$$F(z) = \mathcal{Z}\{f(kT)\}$$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} = f(0) + f(T)z^{-1} + f(2T)z^{-2} + \cdots$$

Spätná

$$f(kT) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} \qquad f(kT) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma} F(z)z^{k-1}\mathrm{d}z$$

Z-transformácia
Tabuľka

$f(t),\ t = kT$	$F(z)$
$\delta(kT)$	1
$1(kT)$	$\dfrac{z}{z-1}$
kT	$\dfrac{zT}{(z-1)^2}$
$(kT)^2$	$\dfrac{z(z+1)T^2}{(z-1)^3}$
e^{akT}	$\dfrac{z}{z-D}\ ; \quad D = e^{aT}$
$\sin\omega kT$	$\dfrac{z\sin\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$

$f(t),\ t = kT$	$F(z)$
$\cos\omega kT$	$\dfrac{z^2 - z\cos\omega T}{z^2 - 2z\cos\omega T + 1}$
$f(kT-T)$	$F(z)z^{-1}$
$f(kT-nT)$	$F(z)z^{-n}$
$f(kT+nT)$	$F(z)z^n - z^n f(0) - z^{n-1}f(T) - \cdots - zf((n-1)T)$

FVT: $\lim_{k\to\infty} f(kT) = \lim_{z\to 1} \dfrac{z-1}{z} F(z)$

IVT: $\lim_{k\to 0} f(kT) = \lim_{z\to\infty} F(z)$

Z-transformácia

Mnoho pojmov, definícií a viet je analogických ako pri spojitých systémoch (Laplace-ovej transformácii)

Definition (Prenosová funkcia)

Pomer Z-obrazu výstupu systému k Z-obrazu vstupu systému pri nulových počiatočných podmienkach.

$$F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Example

Nájdite prenosovú funkciu systému

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = u(k)$$

Prepočet spojitého systému na diskrétny

Postup

1. Pre dané $F(s)$
2. nájdeme $Y(s) = \frac{1}{s}F(s)$
3. a vyjadríme analyticky $y(t)$.
4. Potom nájdeme $y(kT)$,
5. spravíme Z-transformáciu $Y(z)$
6. a nájdeme $F(z) = \frac{z-1}{z}Y(z)$

Example

Nájdite Z-prenos k systému prvého rádu $F(s) = \frac{1}{T_1 s + 1}$

Charakteristiky diskrétnych systémov

Prechodová charakteristika

- odozva systému na jednotkový skok

Vieme zistiť z prenosovej funkcie $F(z)$ ako

$$Y(z) = F(z) \cdot U(z) \; ; \qquad U(z) = \frac{z}{z-1}$$

Impulzná charakteristika

- odozva systému na Diracov impulz

Vieme zistiť z prenosovej funkcie $F(z)$ ako

$$Y(z) = F(z) \cdot U(z) \; ; \qquad U(z) = 1$$

Stabilita diskrétnych systémov

- štrukturálna vlastnosť systémov

Theorem

Diskrétny lineárny systém s prenosovou funkciou

$$F(z) = \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{b(z)}{(z-\alpha_n)\cdots(z-\alpha_2)(z-\alpha_1)}$$

je asymptoticky stabilný vtedy a len vtedy, ak všetky korene menovateľa (charakteristického polynómu) ležia vo vnútri jednotkovej kružnice

$$|\alpha_i| < 1 \; ; \quad i = 1, \ldots, n$$

Stabilita

Ak

- $|\alpha_i| > 1$ pre jedno či viaceré i, systém je nestabilný,
- $|\alpha_i| = 1$ pre jedno či viaceré i (a $|\alpha_i| < 1$ pre ostatné), systém je na hranici stability.

Pre systém v stavovom priestore

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A_D x(k) + B_D u(k) \\ y(k) &= C_D x(k) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} F(z) &= C_D(zI - A_D)^{-1} B_D \\ &= \frac{b(z)}{a(z)} \end{aligned}$$

platí $a(z) = \det(zI - A_D)$.

Takže α_i, $i = 1, \ldots, n$, sú vlastné čísla matice A_D.