Doplnkový text: o riešení diferenciálnej rovnice

Obsah

1 Diferenciálna rovnica

Majme diferenciálnu rovnicu:

$$\dddot{y} + 5,4\ddot{y} + 9,7\dot{y} + 5,592y = 2e^{-1,2t} \tag{1}$$

Nájdime jej riešenie nasledujúcimi spôsobmi:

1. analyticky
2. pomocou Laplaceovej transformácie

Pre daný dynamický systém zvoľme nenulové začiatočné podmienky nasledovne:

$$y(0) = 1 \qquad \dot{y}(0) = 1 \qquad \ddot{y}(0) = 1$$

2 Analyticky

Rovnica (1) je nehomogénna lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientami tretieho rádu ($n_r = 3$). Jej Charakteristická rovnica je

$$s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592 = 0 \tag{2}$$

Riešeniami Charakteristickej rovnice sú

$$s_1 = -2,1 + 0,5i \qquad s_2 = -2,1 - 0,5i \qquad s_3 = -1,2 \tag{3}$$

Fundamentálne riešenia (módy) rovnice (1) zodpovedajúce jednotlivým riešeniam Charakteristickej rovnice sú

$$y_1(t) = e^{(-2,1+0,5i)t} = e^{-2,1t}\big(\cos(0,5t) + i\sin(0.5t)\big) \tag{4a}$$
$$y_2(t) = e^{(-2,1-0,5i)t} = e^{-2,1t}\big(\cos(0,5t) - i\sin(0.5t)\big) \tag{4b}$$
$$y_3(t) = e^{-1.2t} \tag{4c}$$

Totiž, vo všeobecnosti možno rozlišovať niekoľko prípadov, pre ktoré platí:

1. Ak má charakteristická rovnica n navzájom rôznych riešení s_i pre $i = 1, \ldots, n$, potom zodpovedajúce fundamentálne riešenia (módy) sú: $e^{s_1 t}$, $e^{s_2 t}$, ..., $e^{s_n t}$.

2. Ak sa medzi n koreňmi charakteristického polynómu vyskytne k-násobný koreň, vytvoríme k lineárne závislých riešení: $e^{s_i t}$, $te^{s_i t}$, ..., $t^{k-1}e^{s_i t}$

3. V prípade výskytu dvojice komplexne združených koreňov charakteristického polynómu, $s_{1,2} = \alpha \pm j\beta$, kde j je imaginárna jednotka, využijeme na určenie fundamentálnych riešení Eulerov vzťah

$$e^{(\alpha \pm j\beta)t} = e^{\alpha t}\left(\cos \beta t \pm j \sin \beta t\right) \tag{5}$$

Preto potom možno písať príslušné fundamentálne riešenie v tvare

$$c_1 e^{(\alpha + j\beta)t} + c_2 e^{(\alpha - j\beta)t} = e^{\alpha t}\left(c' \cos \beta t + c'' \sin \beta t\right) \tag{6}$$

kde sú imaginárne časti nulové.

Výsledné reálne všeobecné riešenie homogénnej časti má tvar

$$y_{h_{vs}}(t) = c_1 e^{-2,1t}\cos(0,5t) + c_2 e^{-2,1t}\sin(0,5t) + c_3 e^{-1.2t} \tag{7}$$

kde c_1, c_2 a c_3 sú reálne konštanty.

Pravá strana $q(t)$ diferenciálnej rovnice (1) má vo všeobecnosti tvar $q(t) = e^{\alpha t}P_n(t)$, pričom platí

$$P_n(t) = 2 \tag{8a}$$
$$\alpha = -1,2 \tag{8b}$$

Pre tento špeciálny tvar pravej strany má partikulárne riešenie $\psi(t)$ tvar $\psi(t) = t^k e^{\alpha t} Q_n(t)$, kde k je násobnosť koreňa α a $Q_n(t)$ je všeobecný polynóm rovnakého stupňa ako $P_n(t)$. V tomto prípade

$$k = 1 \tag{9a}$$
$$Q_n(t) = A_0 \tag{9b}$$

Partikulárne riešenie $\psi(t)$ určíme použitím metódy neurčitých koeficientov, a teda partikulárne riešenie a jeho derivácie dosadíme do diferenciálnej rovnice.

$$\psi(t) = A_0 t e^{-1,2t} \tag{10a}$$
$$\dot{\psi}(t) = A_0 e^{-1,2t} - 1,2A_0 t e^{-1,2t} \tag{10b}$$
$$\ddot{\psi}(t) = -2,4A_0 e^{-1,2t} + 1,44A_0 t e^{-1,2t} \tag{10c}$$
$$\dddot{\psi}(t) = 4,32A_0 e^{-1,2t} - 1,728A_0 t e^{-1,2t} \tag{10d}$$

Rovnice (10) dosadíme do diferenciálnej rovnice (1) a upravíme.

$$\begin{aligned} 2e^{-1,2t} &= 4,32A_0 e^{-1,2t} - 1,728A_0 t e^{-1,2t} + 5,4\left(-2,4A_0 e^{-1,2t} + 1,44A_0 t e^{-1,2t}\right) \\ &\quad + 9,7\left(A_0 e^{-1,2t} - 1,2A_0 t e^{-1,2t}\right) + 5,592\left(A_0 t e^{-1,2t}\right) \end{aligned} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} 2e^{-1,2t} &= 4,32A_0 e^{-1,2t} - 1,728A_0 t e^{-1,2t} - 12,96A_0 e^{-1.2t} + 7,776A_0 t e^{-1,2t} \\ &\quad + 9,7A_0 e^{-1,2t} - 8,5A_0 t e^{-1,2t} + 5,592A_0 t e^{-1,2t} \end{aligned} \tag{11b}$$

$$2e^{-1,2t} = 1,06A_0 e^{-1,2t} + 3,14te^{-1,2t} \tag{11c}$$

Z (11c) vyplýva

$$2 = 1,06A_0 \qquad \Rightarrow \qquad A_0 = \frac{2}{1,06} \doteq 1,8868 \tag{12}$$

a partikulárne riešenie $\psi(t)$ je

$$\psi(t) = 1,8868te^{-1,2t} \tag{13}$$

Všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice (1) je súčet (7) s (13):

$$y_{vs}(t) = c_1 e^{-2,1t}\cos(0,5t) + c_2 e^{-2,1t}\sin(0,5t) + c_3 e^{-1.2t} + 1,8868te^{-1,2t} \tag{14a}$$

Konštanty c_1, c_2 a c_3 sú dané konkrétnymi začiatočnými podmienkami, ktoré sa dosadia do príslušných derivácií všeobecného riešenia. V tomto prípade sú potrebné okrem nultej derivácie (14a) aj prvá a druhá derivácia všeobecného riešenia:

$$\begin{aligned}\dot{y}_{vs}(t) = {} & 1,8868e^{-1,2t} - 2,2642te^{-1,2t} - 1,2c_3 e^{-1,2t} - 2,1c_2 e^{-2,1t}\sin(0,5t) \\ & + 0,5c_2 e^{-2,1t}\cos(0,5t) - 2,1c_1 e^{-2,1t}\cos(0,5t) - 0,5c_1 e^{-2,1t}\sin(0,5t)\end{aligned} \tag{14b}$$

$$\begin{aligned}\ddot{y}_{vs}(t) = {} & -4,5283e^{-1.2t} + 2,717te^{-1.2t} + 1,44c_3 e^{-1.2t} + 4,16c_2 e^{-2.1t}\sin(0.5t) \\ & - 2.1c_2 e^{-2.1t}\cos(0.5t) + 4,16c_1 e^{-2.1t}\cos(0.5t) + 2.1c_1 e^{-2.1t}\sin(0.5t)\end{aligned} \tag{14c}$$

Dosadením začiatočných podmienok do (14a), (14b) a (14c) získame sústavu troch rovníc o troch neznámych, ktorá má v maticovom zápise tvar

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2,1 & 0,5 & -1,2 \\ 4,16 & -2,1 & 1,44 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - 1,8868 \\ 1 + 4,5283 \end{bmatrix} \tag{15}$$

a jej riešením je

$$c_1 = -5,0979 \tag{16a}$$

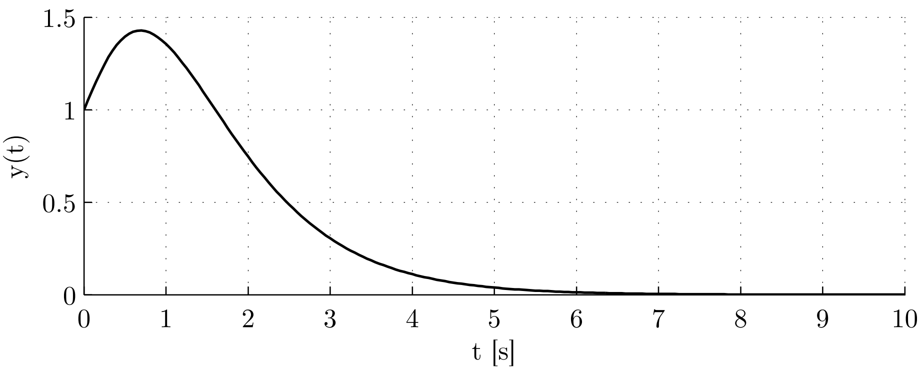
$$c_2 = -8,5498 \tag{16b}$$

$$c_3 = 6,0979 \tag{16c}$$

Riešením diferenciálnej rovnice (1) je

$$y(t) = -5,0979e^{-2,1t}\cos(0,5t) - 8,5498e^{-2,1t}\sin(0,5t) + 6,0979e^{-1.2t} + 1,8868te^{-1,2t} \tag{17}$$

Graficky je riešenie znázornené na Obr. 1.



Obr. 1: Grafické znázornenie riešenia získaného analyticky

3 Pomocou Laplaceovej transformácie

Rovnica (1) má po Laplaceovej transformácii tvar

$$s^3 Y - s^2 - s - 1 + 5,4\left(s^2 Y - s - 1\right) + 9,7\left(sY - 1\right) + 5,592Y = \frac{2}{(s+1,2)} \tag{18}$$

Po úprave

$$s^3Y - s^2 - s - 1 + 5,4s^2Y - 5,4s - 5,4 + 9,7sY - 9,7 + 5,592Y = \frac{2}{(s+1,2)} \tag{19a}$$

$$Y\left(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592\right) + \left(-s^2 - s - 1 - 5,4s - 5,4 - 9,7\right) = \frac{2}{(s+1,2)} \tag{19b}$$

$$Y\left(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592\right) + \left(-s^2 - 6,4s - 16,1\right) = \frac{2}{(s+1,2)} \tag{19c}$$

$$Y = \frac{2}{(s+1,2)\left(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592\right)} + \frac{\left(s^2 + 6,4s + 16,1\right)}{\left(s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592\right)} \tag{19d}$$

Korene polynómu $s^3 + 5,4s^2 + 9,7s + 5,592$ sú (3) a korene polynómu $s^2 + 6,4s + 16,1$ sú

$$s_4 = -3,2 + 2,4207i \qquad s_5 = -3,2 - 2,4207i \tag{20}$$

a teda (19d) je možné napísať v tvare

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2}{(s+2,1-0,5i)(s+2,1+0,5i)(s+1,2)^2} \\ &+ \frac{(s+3,2-2,4207i)(s+3,2+2,4207i)}{(s+2,1-0,5i)(s+2,1+0,5i)(s+1,2)} \\ &= Y_1 + Y_2 \end{aligned} \tag{21}$$

Na spätnú Laplaceovu transformáciu využijeme Heavisideov rozvojový vzorec

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{s_i t} \sum_{j=1}^{r_i} \frac{\left[G_i^{(r_i-j)}(s)\right]_{s=s_i}}{(r_i-j)!(j-1)!} t^{j-1} \tag{22}$$

kde $G_i = Y(s)(s-s_i)^{r_i}$, s_i $(i = 1, \ldots, j)$ sú póly prenosovej funkcie $Y(s)$ a r_i $(i = 1, \ldots, j)$ je ich násobnosť.

Spätná transformácia $Y_1(s)$.

Najprv je potrebné určiť hodnoty $\left[G_i^{(r_i-j)}(s)\right]_{s=s_i}$:

$$G_1(s_1) = \frac{2}{(-2,1+0,5i+2,1+0,5i)(-2,1+0,5i+1,2)^2} = 1,602 - 0,9968i \tag{23a}$$

$$G_2(s_2) = \frac{2}{(-2,1+0,5i+2,1-0,5i)(-2,1+0,5i+1,2)^2} = 1,602 + 0,9968i \tag{23b}$$

$$G_3(s_3) = \frac{2}{(-1,2+2,1-0,5i)(-1,2+2,1+0,5i)} = 1.8868 \tag{23c}$$

$$\dot{G}_3(s_3) = -\frac{2(2s_3+4,2)}{\left(s_3^2+4,2s_3+4.66\right)^2} = -\frac{2(2(-1,2)+4,2)}{\left((-1,2)^2+4,2(-1,2)+4.66\right)^2} = -3.204 \tag{23d}$$

Tieto hodnoty sa potom dosadia do (22) a po úprave:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{(-2,1+0,5i)t}(1,602-0,9968i) + e^{(-2,1-0,5i)t}(1,602+0,9968i) \\ &+ e^{-1,2t}\left(\frac{-3,204}{(2-1)!(1-1)!}t^0 + \frac{1,8868}{(2-2)!(2-1)!}t^1\right) \end{aligned} \tag{24a}$$

$$y_1(t) = e^{-2,1t}(3,204\cos(0,5t) + 1,9936\sin(0,5t)) - 3,204e^{-1,2t} + 1,8868te^{-1,2t} \tag{24b}$$

Spätná transformácia $Y_2(s)$**:**

Určenie hodnôt $\left[G_i^{(r_i-j)}(s)\right]_{s=s_i}$ pre prípad $Y_2(s)$:

$$G_1(s_1) = \frac{(-2,1+0,5i+3,2-2,4207i)\,(-2,1+0,5i+3,2+2,4207i)}{(-2,1+0,5i+2,1+0,5i)\,(-2,1+0,5i+1,2)} \\ = -4,1508+5,2715i \tag{25a}$$

$$G_2(s_2) = \frac{(-2,1-0,5i+3,2-2,4207i)\,(-2,1-0,5i+3,2+2,4207i)}{(-2,1-0,5i+2,1-0,5i)\,(-2,1-0,5i+1,2)} \\ = -4,1508-5,2715i \tag{25b}$$

$$G_3(s_3) = \frac{(-1,2+3,2-2,4207i)\,(-1,2+3,2+2,4207i)}{(-1,2+2,1-0,5i)\,(-1,2+2,1+0,5i)} = 9,3017 \tag{25c}$$

A potom:

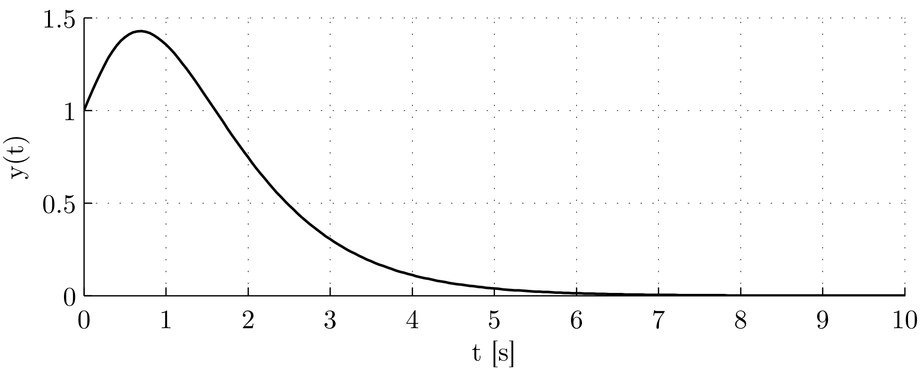
$$y_2(t) = e^{(-2,1+0,5i)t}\,(-4,1508+5,2715i) \\ + e^{(-2,1-0,5i)t}\,(-4,1508-5,2715i) + 9,3017e^{-1,2t} \tag{26a}$$

$$y_2(t) = e^{-2,1t}\,(-8,3016\cos(0,5t) - 10,543\sin(0,5t)) + 9,3017e^{-1,2t} \tag{26b}$$

Výsledné riešenie je súčtom $y_1(t)$ s $y_2(t)$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = e^{-2,1t}\,(-5,0976\cos(0,5t) - 8,5494\sin(0,5t)) \\ + 6,0977e^{-1,2t} + 1,8868te^{-1,2t} \tag{27}$$

Grafické znázornenie riešenia je na Obr. 2.



Obr. 2: Grafické znázornenie riešenia získaného pomocou Laplaceovej transformácie

4 Pomocou Symbolic toolboxu (MATLAB)

Pre výpočet riešenia pomocou toolboxu Symbolic je potrebné zadať nasledujúce príkazy:

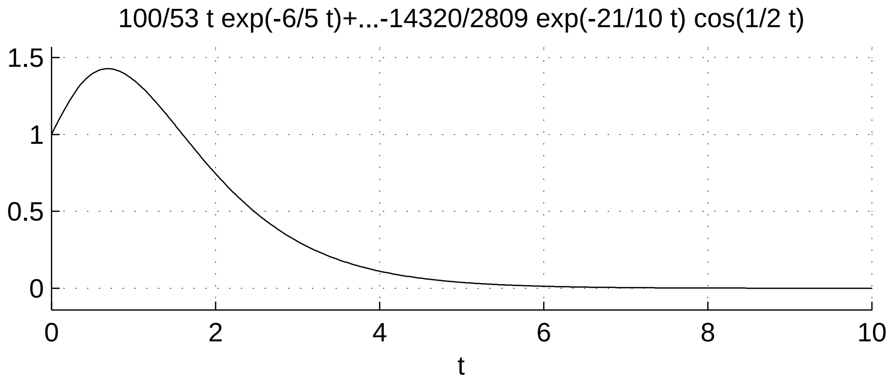
```
yt = dsolve('D3y + 5.4*D2y + 9.7*Dy + 5.592*y = 2*exp(−1.2*t)','y
    (0)=1','Dy(0)=1','D2y(0)=1')

ezplot(yt,[0 10])
```

Odpoveďou je riešenie a vykreslenie jeho priebehu znázornené na Obr. 3.

```
yt =

100/53*t*exp(-6/5*t)+17129/2809*exp(-6/5*t)-120082/14045*exp(-21/10*t)*sin(1/2*t)
-14320/2809*exp(-21/10*t)*cos(1/2*t)
```



Obr. 3: Grafické znázornenie riešenia získaného pomocou toolboxu Symbolic

5 Pomocou ODE solvera – numerické riešenie (MATLAB)

Pre numerický výpočet riešenia pomocou procedúry `ode45` je potrebné previesť diferenciálnu rovnicu (1) na systém diferenciálnych rovníc 1. rádu. V tomto prípade:

$$\dot{x}_1 = x_2 \tag{28a}$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \tag{28b}$$

$$\dot{x}_3 = -5,4x_3 - 9,7x_2 - 5,592x_1 + 2e^{-1,2t} \tag{28c}$$

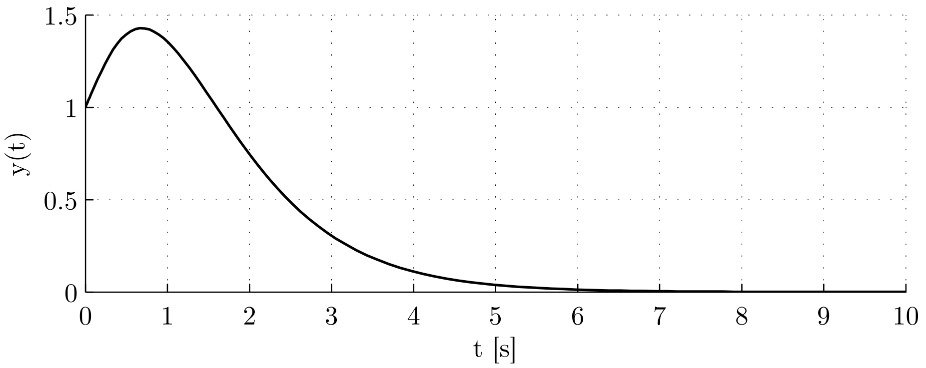
Tento systém sa potom zapíše ako funkcia, ktorú bude procedúra `ode45` používať

```
function dx = fundif(t,x);
dx(1) = x(2);
dx(2) = x(3);
dx(3) = −5.4*x(3) −9.7*x(2) −5.592*x(1) + 2*exp(−1.2*t);
dx = dx(:);
```

Samotné použitie procedúry `ode45` sa vykoná nasledovnými príkazmi:

```
[t,y] = ode45('fundif',[0 10],[1; 1; 1]);
plot(t,y(:,1))
```

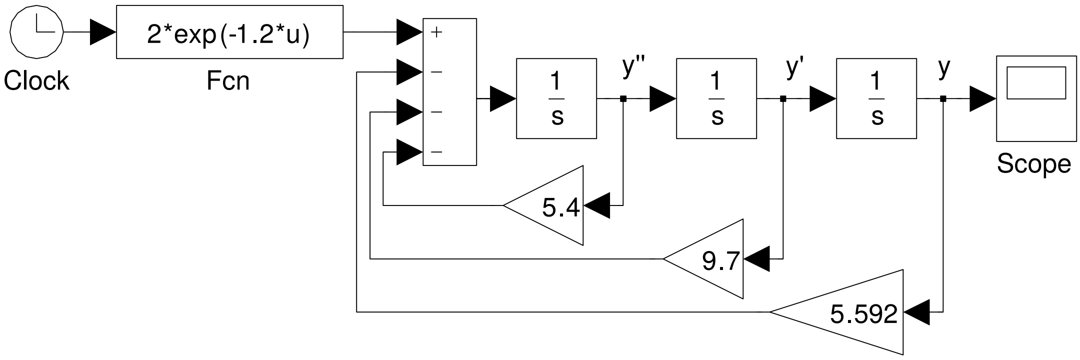
Výsledný priebeh riešenia je na Obr. 4.



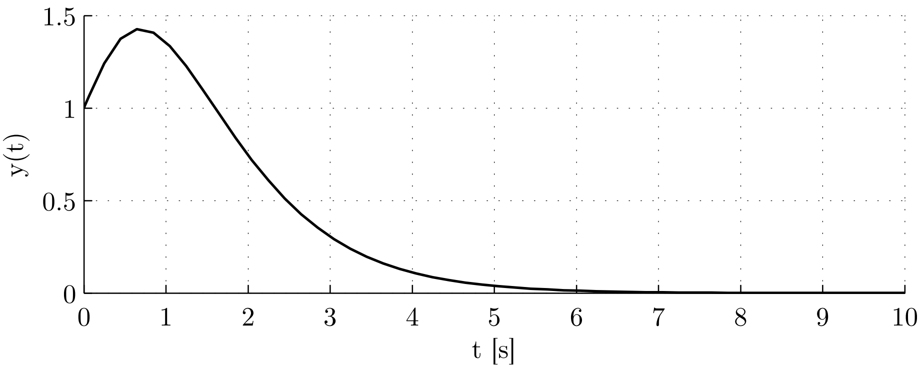
Obr. 4: Grafické znázornenie riešenia získaného pomocou ode45

6 Pomocou MATLAB-Simulink

Simulačná schéma zodpovedajúca diferenciálnej rovnici (1) je na Obr. 5. Začiatočné podmienky integrátorov v schéme sú nastavené rovnako ako boli zvolené v zadaní. Simuláciou získaný časový priebeh je na Obr. 6.



Obr. 5: Simulačná schéma



Obr. 6: Simuláciou získaný časový priebeh