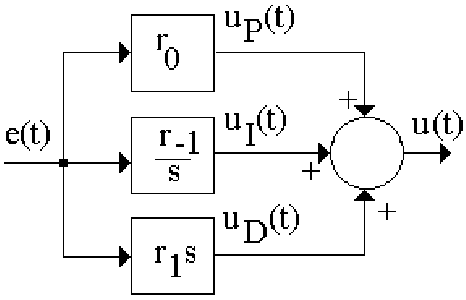
PID regulátory



PID regulátor (proportional–integral–derivative controller) čiže proporcionálny, integračný a derivačný regulátor je najjednoduchší lineárny regulátor. V uzavretom regulačnom obvode odstraňuje vplyvom integračnej zložky trvalú regulačnú odchýlku a vplyvom derivačnej zložky zlepšuje stabilitu regulačného obvodu. V počiatku prechodového deja prevláda derivačná zložka regulátora, s narastajúcim časom prevláda integračná zložka regulátora.

2.2 Určenie optimálnych parametrov PID regulátora

Kvalita procesu riadenia je funkciou parametrov $r_{0,}$ r_{-1} a r_1 PID – regulátora. Môžeme ich navrhnúť tak, aby sme podľa zvoleného kritéria dosiahli najlepšiu možnú kvalitu riadenia. Zvolené krtérium kvality J však musíme zostrojiť tak, aby bolo funkciou neznámych parametrov regulátora J = J($r_{0,}$ $r_{-1,}$ r_1) a aby malo podľa možnosti len jeden extrém minima pre reálne hodnoty týchto parametrov. Potom sa hľadané optimálne parametre určia z podmienok

$$\frac{\partial J}{\partial r_0} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial r_{-1}} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial r_1} = 0$$

pre extrém minima tohto kritéria.

Integrálne kritériá vyjadrujú kvalitu regulácie na základe priebehu regulácie počas celej doby jej trvania. Pri použití integrálnych kritérií sa minimalizuje plocha, alebo nejaká funkcia odchýliek medzi žiadanou veličinou *w(t)* a regulovanou veličinou *y(t)*. Keď sú integrálne kritériá vhodne navrhnuté, tak pri horších hodnotách kritérií kvality dochádza k nárastu hodnoty integrálu.Za kritérium kvality môžeme zvoliť napr. kvadratickú regulačnú plochu:

$$J = I_{SE} = \int_0^{\infty} [e(t) - e(\infty)]^2 \, dt$$

Princípom integrálneho kritéria kvality *ISE (integral squared value of error)* je výpočet druhej mocniny plochy medzi reálnym a ideálnym priebehom prechodovej charakteristiky.

Metódy návrhu parametrov PID regulátorov

Existuje množstvo metód, ktorými možno navrhnúť optimálne parametre regulátorov. My sa budeme zaoberať tými, pri ktorých jednoduchým analytickým výpočtom určíme optimálne parametre regulátora:

- Metóda optimálneho modulu
- Ziegler – Nichols

3.1 Metóda optimálneho modulu

Metóda optimálneho modulu pochádza od autorov R.C. Oldenburga a H. Sartoriusa. Metóda sa vyznačuje jednoduchosťou výpočtu koeficientov regulátora, ktorý zaručuje dobrú kvalitu regulácie aj pre systémy s veľkým dopravným oneskorením. Vychádza z predstavy ideálnej prenosovej funkcie uzavretého regulačného obvodu, ktorá by mala byť jednotková. Má teda platiť:

$$G_{Y/W}(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{G_0(s)}{1+G_0(s)} \overset{!}{=} 1$$

$$\left|G_{Y/W}(j\omega)\right|^2 = M^2(\omega) = M(\omega)M(-\omega) \overset{!}{=} 1$$

Pre kvadrát modulu platí:

$$M^2(\omega) = \left|\frac{G_0(j\omega)}{1+G_0(j\omega)}\right|^2 = \left|\frac{U+jV}{1+U+jV}\right|^2 = \frac{U^2+V^2}{1+2U+U^2+V^2} \overset{!}{=} 1$$

Modul bude rovný 1 práve vtedy, keď

$$\boxed{\mathrm{Re}\{G_0(j\omega)\} = U(\infty) = -\frac{1}{2}}$$

Postup návrhu metódou optimálneho modulu spočíva v nasledujúcich krokoch:

1) Určíme frekvenčnú prenosovú funkciu otvoreného regulačného obvodu

$$G_0(j\omega) = G_S(j\omega)G_R(j\omega)$$

2) Rozložíme na reálnu a imaginárnu zložku

$$G_0(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$$

3) Reálnu zložku položíme rovnú -0.5

$$P(\omega) = -0.5$$

4) Porovnaním koeficientov pri rovnakých mocninách získame rovnice pre výpočet parametrov

3.1.2 ILUSTRAČNÉ PRÍKLADY

Príklad 1 Vypočítajte optimálne nastavenie parametrov PI regulátora pre sústavu s PF:

Riešenie:

Prenosová funkcia regulátora $G_S(s) = \dfrac{2}{3s^2 + 4s + 1}$

$$G_R(s) = r_0 + \frac{r_{-1}}{s} = \frac{r_{-1} + r_0 s}{s}$$

Prenosová funkcia otvoreného obvodu $G_0(s) = G_R G_S = \dfrac{2(r_{-1} + r_0 s)}{3s^3 + 4s^2 + s}$

$$G_0(j\omega) = \frac{2(r_{-1} + r_0 j\omega)}{-3j\omega^3 - 4\omega^2 + j\omega} = \frac{2(r_{-1} + r_0 j\omega)}{-4\omega^2 + j(\omega - 3\omega^3)}$$

komplexne združené čísla

$$(-4\omega^2 + j(\omega - 3\omega^3) \rightarrow (-4\omega^2 - j(\omega - 3\omega^3)$$

$$s \approx j\omega$$
$$s^2 \approx -\omega^2$$
$$s^3 \approx -j\omega^3$$
$$s^4 \approx \omega^4$$

$$(x + jy)(x - jy) = x^2 + y^2$$

$$G_0(j\omega) = \frac{2(r_{-1} + r_0 j\omega)(-4\omega^2 - j(\omega - 3\omega^3))}{(-4\omega^2 + j(\omega - 3\omega^3)(-4\omega^2 - j(\omega - 3\omega^3)}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{2(r_{-1} + r_0 j\omega)(-4\omega^2 - j(\omega - 3\omega^3))}{16\omega^4 + (\omega - 3\omega^3)^2}$$

$$= \frac{-8r_{-1}\omega^2 + 2r_0\omega^2 - 6r_0\omega^4}{9\omega^6 + 10\omega^4 + \omega^2} + j\frac{-2r_{-1}\omega + 6r_{-1}\omega^3 - 4r_0\omega^3}{9\omega^6 + 10\omega^4 + \omega^2}$$

$$\mathrm{Re}\{G_0(j\omega)\} = \frac{-8r_{-1}\omega^2 + 2r_0\omega^2 - 6r_0\omega^4}{9\omega^6 + 10\omega^4 + \omega^2} = -\frac{1}{2}$$

$$-6r_0\omega^4 + \omega^2(2r_0 - 8r_{-1}) = -\frac{1}{2}(9\omega^6 + 10\omega^4 + \omega^2)$$

Príklad 2: Navrhnite optimálne parametre PID regulátora ak je prenosová funkcia sústavy: $G_s(s)=\dfrac{2}{(s+2)(s^2+2s+1)}$

1) Určíme $G_0(j\omega)=G_S(j\omega)G_R(j\omega)$

$$G_S=\frac{2}{s^3+4s^2+5s+2} \qquad G_R(s)=r_0+\frac{r_{-1}}{s}+r_1 s=\frac{r_{-1}+r_0 s+r_1 s^2}{s}$$

$$G_O(s)=G_R G_S=\frac{2(r_{-1}+r_0 s+r_1 s^2)}{s^4+4s^3+5s^2+2s} \xrightarrow{s=j\omega} G_O(j\omega)=\frac{2r_{-1}+2r_0 j\omega-2r_1\omega^2}{\omega^4-4j\omega^3-5\omega^2+2j\omega}$$

2) Rozložíme na reálnu a imaginárnu zložku

$$G_O(j\omega)=\frac{2r_{-1}+2r_0 j\omega-2r_1\omega^2}{\omega^4-4j\omega^3-5\omega^2+2j\omega}=\frac{2(r_{-1}-r_1\omega^2)+2r_0 j\omega}{(\omega^4-5\omega^2)+j(2\omega-4\omega^3)}$$

$$=\frac{\left[2(r_{-1}-r_1\omega^2)+2r_0 j\omega\right]\left[(\omega^4-5\omega^2)-j(2\omega-4\omega^3)\right]}{(\omega^4-5\omega^2)^2+(2\omega-4\omega^3)^2}$$

3) Vyberieme reálnu zložku, roznásobíme ju a položíme rovnú -0.5

$$\mathrm{Re}\{G_O(j\omega)\}=\frac{2\left(r_{-1}-r_1\omega^2\right)\left(\omega^4-5\omega^2\right)+2\omega r_0\left(2\omega-4\omega^3\right)}{\omega^8-6\omega^6+9\omega^4+4\omega^2}=$$

$$=\frac{-2r_1\omega^6+\omega^4(2r_{-1}+10r_1-8r_0)+\omega^2(4r_0-10r_{-1})}{\omega^8+6\omega^6+9\omega^4+4\omega^2}=-0.5$$

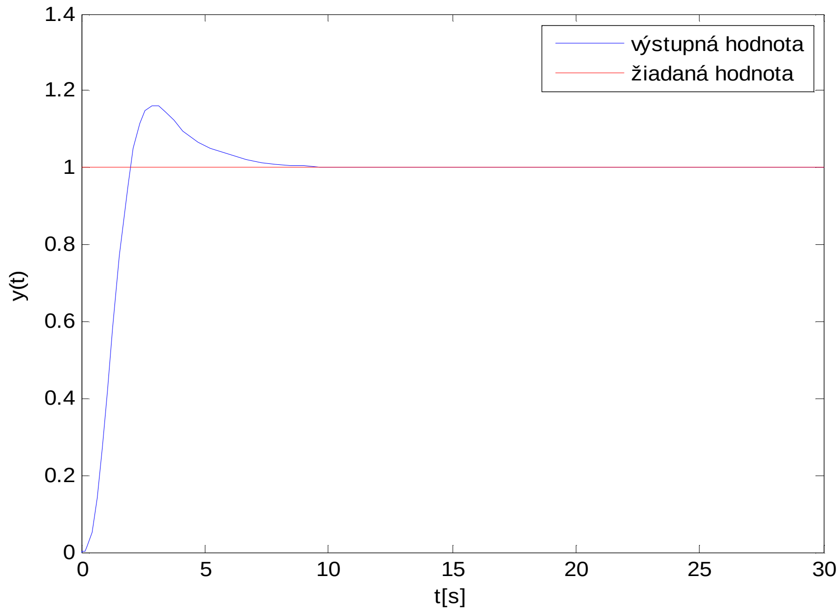
$$-2r_1\omega^6+\omega^4(2r_{-1}+10r_1-8r_0)+\omega^2(4r_0-10r_{-1})=-0.5*(\omega^8+6\omega^6+9\omega^4+4\omega^2)$$

4) Porovnáme koeficienty pri rovnakých mocninách a zapíšeme do matice

$$\begin{bmatrix}-10 & 4 & 0\\ 2 & -8 & 10\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r_{-1}\\ r_0\\ r_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ -4.5\\ -3\end{bmatrix}$$

Po vyriešení danej sústavy rovníc dostaneme optimálne parametre PID regulátora:

$r_{-1}=1.31 \quad r_0=2.76 \quad r_1=1.5$



Obr. 3: Priebeh regulovanej veličiny

3.2 Metóda Zieglera a Nicholsa

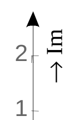
Metóda Zieglera a Nicholsa je experimentálnou metódou pre nastavenie optimálnych parametrov PID regulátora, ktorý je opísaný prenosovou funkciou v interakčnom tvare

$$G_R(s) = P(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s)$$

Pri tejto metóde musíme priviesť regulačný obvod na hranicu stability, pričom regulátor pracuje iba s proporcionálnou zložkou, čiže integračná a derivačná zložka sú vyradené nastavením. Zistíme kritické hodnoty P_K a T_K. Optimálne hodnoty koeficientov P, T_I a T_D pre rôzne kombinácie zložiek PID regulátora sa udávajú nasledujúcimi vzťahmi:

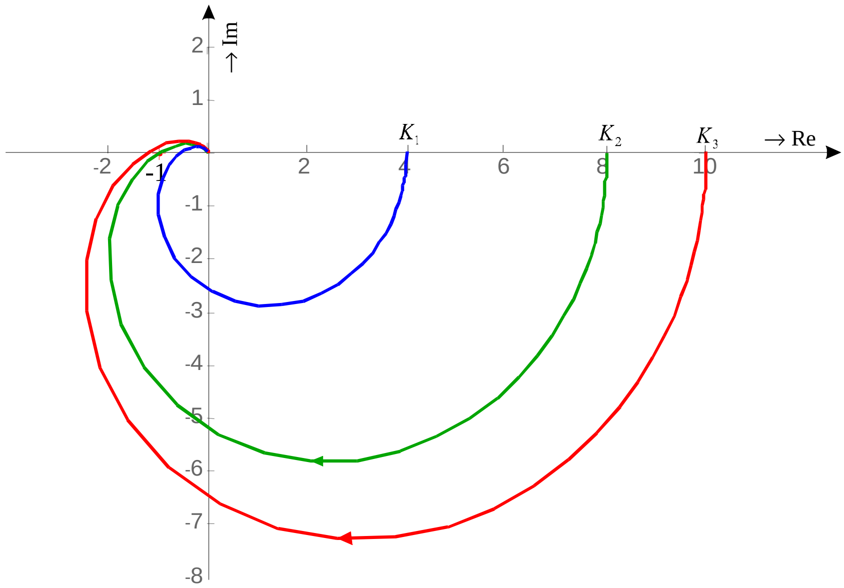
P – regulátor	$P = 0.5\ P_K$		
PI – regulátor	$P = 0.45\ P_K$	$T_I = 0.85\ T_K$	
PID – regulátor	$P = 0.6\ P_K$	$T_I = 0.5\ T_K$	$T_D = 0.12\ T_K$
PD – regulátor	P – skusmo	$T_D = 0.12\ T_K$	

Z prevádzkových dôvodov často nie je prípustné systém vybudiť až na hranicu stability. Potom máme k dispozícii prenosový funkciu riadenia $G_{Y/W}$ (s) s P – regulátorom, môžeme určiť P_K a T_K výpočtom. Alebo sa dá použiť modifikovaná metóda Zieglera



a Nicholsa, ktorej základná myšlienka spočíva vo vyvolaní trvalých kmitov v regulačnom obvode zapojením nelineárneho člena s reléovou charakteristikou do obvodu.

- Vybudíme regulačný obvod len s P regulátorom na hranicu stability. Zistíme kritické hodnoty P_K a T_K



$$G_0(j\omega) = PG_S(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

Z podmienok sa kritické parametre určia nasledovne:

$$V(\omega) = 0 \rightarrow \omega_k = \frac{2\pi}{T_k} \rightarrow T_k$$

$$U(\omega_k) = -1 \rightarrow P_k$$

Na ilustráciu vypočítame príklad pre PID regulátor a nájdeme jeho optimálne parametre pre zadanú sústavu. Majme sústavu v tvare a postupujme podľa bodov zadaných v kapitole 3.2.1:

Uvažujme riadený systém s prenosovou funkciou

$$G_S(s) = \frac{1}{(s+1)^3} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} = \frac{M(s)}{N(s)}$$

Pre otvorený regulačný obvod iba s P – regulátorom platí:

$$G_0(s) = \frac{P}{(s+1)^3} \xrightarrow{s=j\omega} G_0(j\omega) = \frac{P}{(j\omega+1)^3}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{P}{(j\omega+1)^3} = \frac{P}{-j\omega^3 - 3\omega^2 + 3j\omega + 1} = \frac{P}{1 - 3\omega^2 + j(3\omega - \omega^3)} =$$

$$= \frac{P\left(1-3\omega^2\right) - jP\left(3\omega - \omega^3\right)}{\left(1-3\omega^2\right)^2 + \left(3\omega - \omega^3\right)^2}$$

$$G_0(j\omega) = \frac{P(1-3\omega^2)}{(\omega^2+1)^3} - j\frac{P\omega(3-\omega^2)}{(\omega^2+1)^3} = U + jV$$

Podmienky pre hranicu stability sú:

$$V = 0 \rightarrow 3-\omega^2 = 0 \rightarrow$$
$$\omega_K = \sqrt{3} \rightarrow T_K = 3{,}627$$

$$U = -1 \rightarrow P_K = \frac{(\omega_K^2+1)^3}{3\omega_K^2 - 1} = 8$$

Hľadané koeficienty PID regulátora sa teda vypočítajú nasledovne:

$P = 0.6\ P_K = 4.8$ $r_0 = P = 4.8$

$T_I = 0.5\ T_K = 1.813$ s $r_{-1} = P/\ T_I = 2.647$

$T_D = 0.12\ T_K = 0.435$ s $r_1 = P/\ T_D = 2.088$