Cvičenie 3:

Riešenie diferenciálnych rovníc

Cieľ cvičenia: Naučiť sa riešiť lineárne diferenciálne rovnice s konštantnými koeficientmi.

Úlohy: Riešte zadané diferenciálne rovnice.

HELP: Heavisideov rozvojový vzorec:

$$Y(s) = F(s)U(s) = \frac{M(s)}{N(s)}, \qquad N(s) = \prod_{i=1}^{k} (s - s_i)^{r_i}$$

kde s_i (i=1,... , k) – póly obrazu prenosu (korene menovateľa)
r_i (i=1,... , k) – násobnosť pólov

$$y(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{s_i t} \sum_{n=1}^{r_i} \frac{G^{(r_i - n)}(s)}{(r_i - n)!(n-1)!} t^{n-1}, \quad \text{pričom} \quad G_i(s) = \frac{M(s)}{N(s)} (s - s_i)^{r_i}$$

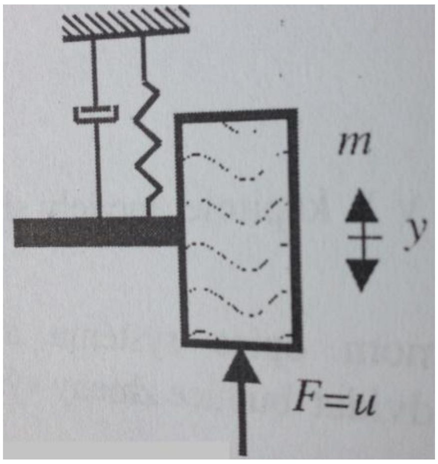
Analytické riešenie diferenciálnych rovníc pomocou toolboxu SYMBOLIC v Matlabe

Syntax:
y=dsolve('rovnica1',' podmienka1','podmienka2',´v´)
Preddefinovanou nezávisle premennou je ´t´.

'D' označuje deriváciu podľa nezávisle premennej ($Dy = \frac{dy}{dt}$; $D2y = \frac{d^2y}{dt^2}$ …)
Začiatočné podmienky sú špecifikované rovnicami *'y(a)=b'* alebo *'Dy(a) = b'* , kde *a* a *b* sú
konštanty.

Príklady:
*>> dsolve('Dy = -a*y')*
*ans = C1*exp(-a*t)*
*>> y = dsolve('Dx = -a*y','y(0) = 1','s')*
*y = exp(-a*s)*

PRÍKLAD 1: Na obrázku je zobrazený systém odpruženého kolesa. Hodnoty parametrov sú: m=20 kg, konštanta tlmenia b=30 kgs^{-1}, konštanta pružiny k=10 Nm^{-1}, skok pôsobiacej sily u=1000 N. Počiatočné podmienky sú $y(0)$=-0.1 m a $\dot{y}(0)$=1 ms^{-1}.



Diferenciálna rovnica systému zostavená na základe rovnováhy pôsobiacich síl:

$$m\ddot{y}(t)+b\dot{y}(t)+ky(t)=u(t)$$

kde $\ddot{y}(t)$ predstavuje zrýchlenie pohybu, $\dot{y}(t)$ rýchlosť pohybu kolesa, y jeho výchylku z rovnovážnej polohy v smere pôsobiacej sily $F=u$.

PRÍKLAD 2:

$$\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)$$

Počiatočné podmienky sú $y(0)=\dot{y}(0)=0$ a $u(t)=e^{-2t}$.

PRÍKLAD 3:

$$\ddot{y}(t)+4\dot{y}(t)+3y(t)=u(t)$$

Počiatočné podmienky sú $y(0)=\dot{y}(0)=0$ a $u(t)=1$.

PRÍKLAD 4:

$$\dddot{y}(t)+2.4\ddot{y}(t)+1.92\dot{y}(t)+0.512y(t)=u(t)$$

Počiatočné podmienky sú $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$ a $u(t)=1$.

PRÍKLAD 5:

$$\dddot{y}(t) + \frac{1}{4}\dot{y}(t) = 5u(t)$$

Počiatočné podmienky sú $y(0)=\dot{y}(0)=\ddot{y}(0)=0$ a $u(t)=1$.

PRÍKLAD 6:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

Počiatočné podmienky sú $y(0)=1$, $\dot{y}(0)=-2$ a $u(t)=0$.
Vyriešte diferenciálnu rovnicu aj pomocou Matlabu a obe riešenia porovnajte.

MATLAB:

```
>> y=dsolve('D2y=-2*Dy-y','y(0)=1,Dy(0)=-2')

y =1/exp(t) - t/exp(t)

>> y=simplify(y)

y =-(t - 1)/exp(t)
```

Príklady 1-6 vyriešte aj pomocou Matlabu.