[MAT3] - kolos 22L - grupa a

Zad. 1.

Znajdź przestrzeń rozwiązań nad $\mathbb{R}$ następującego układu jednorodnego:

a)

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & t_1 & & t_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_4 = 0$

$x_2 + t_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -t_1$

$x_1 - t_1 + t_1 + t_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 = -t_2 \\ x_2 = -t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = t_2 \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_2 \\ -t_1 \\ t_1 \\ 0 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$W = \mathcal{L}([0,-1,1,0,0], [-1,0,0,0,1])$

b) Wykorzystując wynik z punktu 1. rozwiąż układ niejednorodny:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\
x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & + & x_5 & = & 2
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 2 \\
1 & 3 & 3 & 4 & 1 & 2
\end{array}\right]
\xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1}
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & -2 & -2 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 2 & 3 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

$$
\xrightarrow{r_3 + r_2}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
 & & t_1 & & t_2 &
\end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{cases}
x_1 = -t_2 + 2 \\
x_2 = -t_1 \\
x_3 = t_1 \\
x_4 = 0 \\
x_5 = t_2
\end{cases}
, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}
$$

Zad 2.

a) **(2 pkt.)** Znajdź wszystkie wektory 3-wymiarowej przestrzeni wektorowej nad ciałem $(Z_2, +_2, \cdot_2)$.

$x_1, x_2, x_3 \in \{0,1\}$

$[0,0,0]$, $[0,0,1]$, $[0,1,0]$, $[0,1,1]$, $[1,0,0]$, $[1,0,1]$, $[1,1,0]$, $[1,1,1]$

b) **(1 pkt.)** Sprawdź, czy wielomiany $x^2 + x$, $x^2 + x + 1$ oraz $x + 1$ są liniowo niezależne w przestrzeni wielomianów $Z_2[x]$.

$$\alpha(x^2+x) + \beta(x^2+x+1) + \gamma(x+1) = 0$$

$$(\alpha+\beta)x^2 + (\alpha+\beta+\gamma)x + (\beta+\gamma) = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha = 0 \qquad \beta = 0 \qquad \gamma = 0$

LINIOWO NIEZALEŻNY

Zad. 3.

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ takie, że

$$F\left([x_1, x_2, x_3, x_4]\right) = [x_1 + x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + 4x_4, x_1 + x_3 - x_4].$$

a) Wyznacz macierz tego przekształcenia w bazach standardowych.

bazy standardowe: $[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]$

$F([1,0,0,0]) = [1, -2, 1]$

$F([0,1,0,0]) = [1, 2, 0]$

$F([0,0,1,0]) = [2, 0, 1]$

$F([0,0,0,1]) = [0, 4, -1]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

b) Wyznacz Ker$F$ oraz ImF. Podaj ich bazy i wymiary.

KerF

$A \cdot v = 0 \qquad v = [x_1, x_2, x_3]$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 + 2r_1} \begin{array}{ccccc} & & t_1 & t_2 & \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & t_1 & t_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$x_3 = t_1$

$x_4 = t_2$

$x_2 = -t_1 - t_2$

$x_1 - t_1 - t_2 + 2t_1 = 0 \implies x_1 = -t_1 + t_2$

$$v = [-t_1 + t_2, -t_1 - t_2, t_1, t_2] = t_1[-1, -1, 1, 0] + t_2[1, -1, 0, 1]$$

$$\mathrm{Ker}F = \mathcal{L}(\underbrace{[-1,-1,1,0],[1,-1,0,1]}_{\text{bazy}})$$

$\dim \mathrm{Ker}F = 2$

$$\mathrm{Im}F = \mathcal{L}([1,-2,1],[1,2,0])$$

$\dim \mathrm{Im}F = 2$

$\dim \mathrm{Ker}F + \dim \mathrm{Im}F = 4$ ✓

Czy $v = [3, -5, 1, 3] \in \mathrm{Ker}F$? Czy $w = [1, 6, -1] \in \mathrm{Im}F$? Odpowiedzi uzasadnij.

KerF $\alpha[-1,-1,1,0] + \beta[1,-1,0,1] = [3,-5,1,3]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$\beta = 3$

$\alpha = 1$

$-1 + 3 \neq 3$ NIE

ImF $\alpha[1,-2,1] + \beta[1,2,0] = [1,6,-1]$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

$\alpha = -1$

$2 + 2\beta = 6 \Rightarrow \beta = 2$ $\quad -1 + 2 = 1$ TAK!

Zad. 4.

Dane jest przekształcenie liniowe $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ takie, że

$$F([x, y, z]) = [-2x + 4y + 2z, 2y + 2z, x - y + z].$$

a) **(2 pkt.)** Wyznacz wszystkie wartości własne i podprzestrzenie wektorów własnych tego przekształcenia.

baza standardowa: $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$

$F([1,0,0]) = [-2,0,1]$

$F([0,1,0]) = [4,2,-1]$

$F([0,0,1]) = [2,2,1]$

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\chi_A = \det(A - \lambda I_d) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 4 & 2 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \cdot [(2-\lambda)(1-\lambda) + 2] + 8 - 4 + 2\lambda$$

$$= (-2-\lambda) \cdot (4 - 3\lambda + \lambda^2] \quad + 4 + 2\lambda = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda + 4)$$

$$+ 2(\lambda+2) = (\lambda+2)(-\lambda^2 + 3\lambda - 4 + 2) = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

$$= -(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 2 \qquad \lambda_3 = -2$

dla $\lambda = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

dla $\lambda = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

dla $\lambda = -2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3+3r_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & t & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_2 = -2t$

$x_1 + 2t = 0 \Rightarrow x_1 = -2t$

$v = [-2t, -2t, t] = t[-2,-2,1]$

$N_1 = \mathcal{L}([-2,-2,1])$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2+4r_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & t & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_2 = t$

$x_3 = 0$

$x_1 - t = 0 \Rightarrow x_1 = t$

$u = [t, t, 0] = t[1,1,0]$

$N_2 = \mathcal{L}([1,1,0])$

$$\longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & t & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$x_3 = t = 2k \qquad t = 2k$

$2x_2 + t = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{t}{2} = -k$

$x_1 + k + 6k = 0 \Rightarrow x_1 = -7k$

$w = [-7k, -k, 2k]$

$w = k[-7,-1,2]$

$N_{-2} = \mathcal{L}([-7,-1,2])$

b) **(2 pkt.)** Wyznacz bazę $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbb{C}^3$ składającą się z maksymalnej ilości wektorów własnych przekształcenia F. Podaj macierze $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}}(F)$ oraz $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})$, gdzie $\mathcal{B}$ jest bazą standardową $\mathbb{C}^3$.

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -7 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 + \frac{r_1}{2}]{r_2 - r_1} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

są liniowo niezależne

zatem: $C = \mathcal{L}(\underbrace{[-2,-2,1],[1,1,0],[-7,-1,2]}_{\text{baza}})$

$$M_C^C(F) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$M_{B}^{C}(Id_V) = ?$

$$M_{B}^{C}(Id_V) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 + \frac{r_1}{2}]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 + 3r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 + 7r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 - r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{array}\right]$$

$$M_{B}^{C}(Id_V) = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$