[F122] – Elektrostatyka 1

Wzory:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

$$dq = \lambda \cdot dL$$
↳ gęstość liniowa

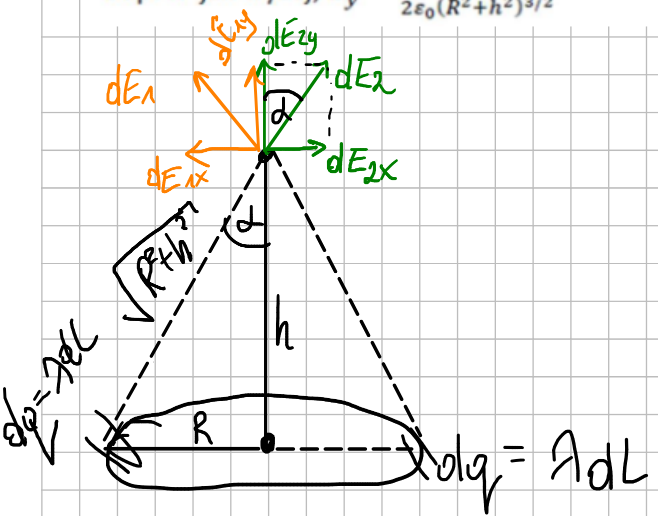
$$dq = \sigma \cdot ds$$
↳ gęstość powierzchniowa

$$dq = \rho \cdot dv$$
↳ gęstość objętościowa

Zadanie 2.

Pierścień o promieniu R został jednorodnie naładowany z liniową gęstością ładunku λ, Wyznacz natężenie pola elektrycznego w punkcie znajdującym się na osi pierścienia.

Odp: h -jak wyżej; $E_y = \frac{\lambda h R}{2\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{3/2}}$



Dane: R, λ

$E(h) = ?$

$$E_w = E_y = \int dE_y$$

$$E = \frac{kq}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (R^2+h^2)} = \frac{\lambda dL}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (R^2+h^2)}$$

$$\cos\alpha = \frac{dE_y}{dE} \Rightarrow dE_y = dE \cdot \cos\alpha$$

$$dE_y = dE \cdot \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$$

$$dE_y = \frac{\lambda dL \cdot h}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (R^2+h)^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = \int dE_y = \int_0^{2\pi R} \frac{\lambda h \cdot dL}{4\pi\varepsilon_0 \cdot (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda h \cancel{2\pi} R}{2\cancel{4\pi}\varepsilon_0 (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda R h}{2\varepsilon_0 \cdot (R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Zadanie 6

6) Wyznacz natężenie pola elektrostatycznego od naładowanej objętościowo kuli o promieniu R. Objętościowa gęstość ładunku jest stała i wynosi ρ.

Odp.: $r < R: \ \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r\,\hat{\mathbf{r}}; \quad r > R: \ \vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}.$

Dane: R, ρ $\qquad$ $E = ?$

$dq = \rho \cdot dV$

Prawo Gaussa:

$$\oint E \cdot dA = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

I przypadek: $r < R$

$$\oint E \cdot dA = E \oint dA = E \cdot 4\pi r^2$$

$$Q_{wew.} = \rho \cdot dV = \int_0^{\frac{4}{3}\pi r^3} \rho \cdot dV = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E \cdot \cancel{4\pi} r^{\cancel{2}} = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\cancel{\pi} r^{\cancel{3}}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho \cdot r}{3 \cdot \varepsilon_0}$$

II przypadek $r > R$:

$$\oint E\, dS = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$$Q_{wew.} = \int_0^{\frac{4}{3}\pi R^3} \rho \cdot dV = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{4\pi R^3}{3\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{R^3}{3r^2\varepsilon_0}$$

Zadanie 7

7) Wyznacz natężenie pola elektrostatycznego od naładowanej objętościowo kuli o promieniu R. Objętościowa gęstość ładunku zależy od odległości od środka kuli: $\rho(r) = \frac{a}{r}$, gdzie $a > 0$.

Dane: R, $\rho(r) = \frac{a}{r}$, $a > 0$ $\qquad E = ?$

$$\oint E\,dS = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$$dq = \rho \cdot dV$$

$$Q_{wew.} = \int_0^r \rho(r)\,dV = \int_0^r \rho(r) \cdot 4\pi r^2 \cdot dr$$

I : $r < R$

$$S(r) = 4\pi r^2$$

$$dV = 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$Q_{wew.} = \int_0^r \frac{a}{r} 4\pi r^2 \cdot dr = 4\pi a \int_0^r r\,dr$$

$$Q_{wew.} = \frac{4\pi a \cdot r^2}{2} = 2\pi a r^2$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{2\pi a r^2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{a}{2\varepsilon_0}$$

II : $r > R$

$$\oint E\,dS = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$$S(r) = 4\pi r^2 \qquad dV = 4\pi r^2 \cdot dr$$

$$dq = \rho(r) \cdot dV$$

$$Q_{wew.} = \int_0^r \frac{a}{R} \cdot 4\pi R^2 dR = 2\pi a R^2$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{2\pi a R^2}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{aR^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

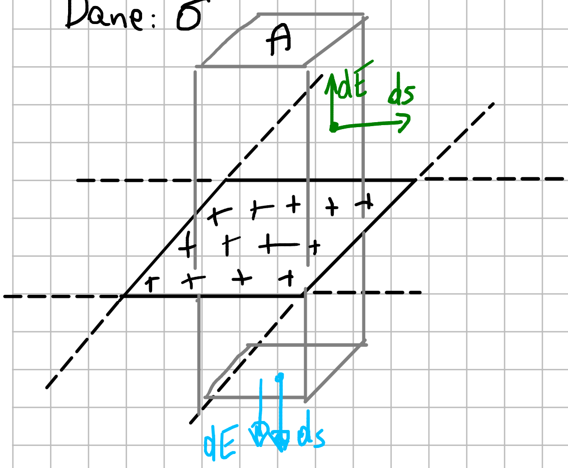
Zadanie 4.

4) Wyznacz natężenie pola elektrostatycznego od nieskończonej naładowanej płaszczyzny. Powierzchniowa gęstość ładunku jest stała i wynosi σ.

Odp.: $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\hat{\mathbf{n}}$ (stałe, prostopadłe do płaszczyzny).

Dane: σ

$E = ?$



$E \perp dS \rightarrow$ dla p. bocznej

$E \parallel dS \rightarrow$ dla podstaw

$$\underbrace{\oint E\,dS}_{0+0+0+0+E\cdot A+EA} = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$dq = \sigma \cdot dA$

$Q_{wew.} = A \cdot \sigma$

$$2EA = \frac{A\cdot\sigma}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

wektory muszą być równoległe bo $\cos\alpha$!

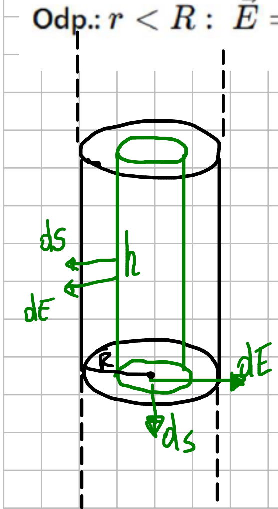
Zadanie 8

Nieskończenie długi walec o promieniu R został naładowany jednorodnie ładunkiem o stałej gęstości objętościowej ρ. Znajdź natężenie pola elektrostatycznego **wewnątrz** i **na zewnątrz** walca.

Odp.: $r < R:\ \vec{E} = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r\,\hat{\mathbf{r}};\quad r > R:\ \vec{E} = \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\,\hat{\mathbf{r}}.$

Dane: R, ρ

$\vec{E} = ?$



$$\oint E\,dS = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$r < R$:

$dq = \rho \cdot dV$

$$Q_{wew.} = \int_0^{\pi r^2 h} \rho \cdot dV = \rho \cdot \pi r^2 h$$

$$E \oint_0^{2\pi r h} dS = E \cdot 2\pi r h$$

$$E \cdot 2\cancel{\pi} r \cancel{h} = \frac{\rho \pi r^2 \cancel{h}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

tylko równoległe wektory robimy

$r > R$:

$$\oint E\,dS = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$$dq = \rho \cdot dV$$

$$Q_{wew.} = \int_0^R \rho\,dV = \rho \cdot \pi R^2 \cdot h$$

$$E \cdot 2\pi r \cdot h = \frac{\rho \cdot \pi R^2 h}{\varepsilon_0}$$

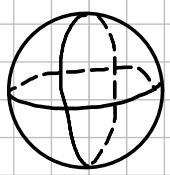
$$\Rightarrow E = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 \cdot r}$$

Zadanie 5

5) Wyznacz natężenie pola elektrostatycznego od naładowanej powierzchniowo kuli o promieniu R. Powierzchniowa gęstość ładunku jest stała i wynosi σ.

Dane: R, σ

$E = ?$



$$\oint E\,dS = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$$dq = \sigma \cdot dS$$

$r < R$:

$$Q_{wew.} = 0$$

$$\vec{E} = 0$$

$r > R$:

$$Q_{wew.} = \int_0^{4\pi R^2} \sigma\,dS = \sigma \cdot 4\pi R^2$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma R^2}{r^2 \varepsilon_0}$$

Zadanie 9.

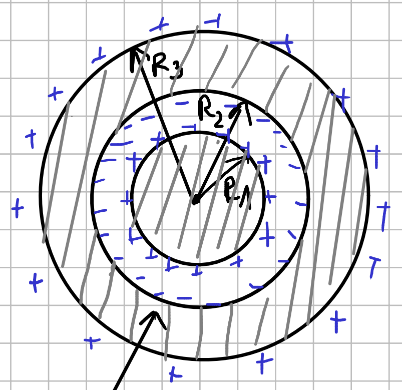
Kula przewodząca o promieniu R_1 naładowana jest jednorodnie ładunkiem o gęstości powierzchniowej σ i otoczona współśrodkową, wydrążoną inną kulą przewodzącą o promieniu wewnętrznym $R_2 > R_1$ i zewnętrznym R_3. Zewnętrzna kula nie jest naładowana. Znaleźć pole i potencjał w funkcji odległości od środka tych kul. Obliczyć pojemność takiego kondensatora kulistego.

Dane: R_1, σ, $R_2 > R_1$, R_3

$E(r) = ?$

$V(r) = ?$

$C = ?$



wyindukowane minusy

1) $r < R_1$

2) $R_1 < r < R_2$

3) $R_2 < r < R_3$

4) $r > R_3$

1) $r < R_1$

$$E(r) = 0$$

2) $R_1 < r < R_2$

$$\oint E\,dA = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0}$$

$$dq = \sigma \cdot dS$$

$$Q_{wew.} = \int_0^{4\pi R_1^2} \sigma \cdot dS$$

$$Q_{wew.} = \sigma \cdot 4\pi R_1^2$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R_1^2}{\varepsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\sigma \cdot R_1^2}{\varepsilon_0 \cdot r^2}$$

3) $R_2 < r < R_3$

$$Q_{wew.} = (+Q) + (-Q) = 0$$

$$E(r) = 0$$

4) $R_3 < r$

$$\oint E\,dA = \frac{Q_{wew.}}{\varepsilon_0} = \frac{(+Q) + (-Q) + (+Q)}{\varepsilon_0}$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R_1^2}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\sigma \cdot R_1^2}{r^2 \cdot \varepsilon_0}$$

we wzorach:

$$V = -\int_R^P \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$V(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$V(\infty) = 0$$

$V(r)$ $r > R_3$

$$V(r) = -\int_\infty^r \frac{\sigma R_1^2}{r^2 \varepsilon_0} dr$$

$$V(r) = -\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \int_\infty^r r^{-2} dr = -\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \cdot \left[\frac{r^{-1}}{-1}\right]_\infty^r = -\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_\infty^r$$

$$V(r) = -\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{r} - \left(-\frac{1}{\infty}\right)\right) = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \cdot r}$$

na powierzchni R_3: $V(R_3) = \dfrac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \cdot R_3}$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{V_{R_1} - V_{R_2}}$$

$$\Delta V = U = -\int_{R_2}^{R_1} E_2(r)\, dr = -\int_{R_2}^{R_1} \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0 \cdot r^2} dr = -\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \cdot \int_{R_2}^{R_1} r^{-2} dr$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_2}^{R_1} = -\frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \cdot \left[-\frac{1}{R_1} - \left(-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

$$\Delta V = \frac{\sigma R_1^2}{\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma \cdot 4\pi R_1^2 \cdot \varepsilon_0}{\sigma R_1^2 \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)} = \frac{4\pi \varepsilon_0}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$$