Z5 - Układy równań liniowych

sobota, 24 maja 2025 15:19

Zadanie 1.

Sprawdzić, czy dany układ równań liniowych ma rozwiązanie w ciele liczb rzeczywistych. Jeśli tak, określić od ilu parametrów zależy to rozwiązanie a następnie rozwiązać ten układ. Który z układów jest układem Cramera? → gdy oznaczony i $\underbrace{\det(A) \neq 0}_{A \text{ odwracalna}}$

(a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & & t_1 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

$4x_2 + 5t_1 = 9 \Rightarrow x_2 = \frac{9-5t_1}{4}$

$t_1 \in \mathbb{R}$

$x_1 + \frac{9-5t_1}{4} + t_1 = 3$

$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t_1 \Rightarrow x_1 = \frac{t_1+3}{4}$

nie Cramer

(b) $\begin{cases} x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-2r_1]{r_3-2r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & -7 & 4 \\ 0 & 7 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4-7r_2]{r_3-5r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -16 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -22 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)]{r_4-r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

$6x_4 = 1 \Rightarrow x_4 = \frac{1}{6}$

$2x_3 + 4\cdot\left(\frac{1}{6}\right) = -1$

$2x_3 = -\frac{5}{3} \;/\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = -\frac{5}{6}$

$x_2 - \frac{5}{6} + \frac{3}{6} = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{3}$

$x_1 - \frac{4}{6} - \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}$

Czy Cramer?

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \Rightarrow \text{Cramer} \quad \checkmark$$

(c) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = 0$

$-3x_3 = -3$

$x_3 = 1$

$x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$

Czy Cramer?

$$\det(A) = \underbrace{-6 \neq 0}_{\Rightarrow \text{Cramer}} \quad \checkmark$$

(d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_4 - r_1 \\ r_5 - r_1}]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_4 - 2r_2 \\ r_5 - 2r_2}]{r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 = 1$

$x_2 + 2 = 2 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 + 1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

Czy Cramer? (Chyba) nie, ale nwm.

(e) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & t_1 & t_2 & & t_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - r_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-4} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$2x_4 - 2t_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_4 = t_3}$

$x_1 - t_1 + t_2 - t_3 + t_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = 1 + t_1 - t_2}$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 \\ x_3 = t_2 \\ x_4 = t_3 \end{cases} \qquad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Czy Cramer?
NIE!

(f) $$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0 \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_5 - r_1]{r_3 - r_1} \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 + r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & & & t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$x_3 - t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_3 = t_1}$

$x_2 - t_1 + t_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_2 = t_1 - t_3}$

$x_1 - t_1 + t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{x_1 = t_1 - t_2}$

$$\begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 \\ x_2 = t_1 - t_3 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_1 \\ x_5 = t_2 \\ x_6 = t_3 \end{cases} \qquad t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$$

Czy Cramer?
NIE!

Zadanie 2.

Sprawdzić, czy dany układ równań liniowych ma rozwiązanie w ciele $(\mathbb{Z}_7, +_7, \cdot_7)$. Jeśli tak, określić od ilu parametrów zależy to rozwiązanie a następnie rozwiązać ten układ.

(a) $\begin{cases} 2 \cdot_7 x_1 +_7 5 \cdot_7 x_2 +_7 4 \cdot_7 x_3 = 6 \\ 5 \cdot_7 x_1 +_7 4 \cdot_7 x_2 +_7 4 \cdot_7 x_3 = 3 \\ 6 \cdot_7 x_1 +_7 x_3 = 4 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - 3r_1]{r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

sprzeczny !

(b) $\begin{cases} 3 \cdot_7 x_1 +_7 4 \cdot_7 x_2 +_7 4 \cdot_7 x_3 +_7 6 \cdot_7 x_4 = 1 \\ 4 \cdot_7 x_1 +_7 5 \cdot_7 x_2 +_7 4 \cdot_7 x_3 +_7 x_4 = 0 \\ 5 \cdot_7 x_1 +_7 6 \cdot_7 x_2 +_7 4 \cdot_7 x_3 +_7 3 \cdot_7 x_4 = 6 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 + 3r_1]{r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - 2r_2} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} & & t_1 & t_2 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 4 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$2x_2 + t_1 = 1 \quad / \cdot 4$

$x_2 + 4t_1 = 4 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 4 - 4t_1$

$3x_1 + 4(4 - 4t_1) + t_1 + t_2 = 1$

$3x_1 + 6t_1 + t_2 = 6 \quad / \cdot 5$

$x_1 + 2t_1 + 5t_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 - 2t_1 - 5t_2$

$$\begin{cases} x_1 = 2 - 2t_1 - 5t_2 \\ x_2 = 4 - 4t_1 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases}, \quad t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_7$$

Zadanie 3.

Przedyskutować rozwiązalność układu w ciele liczb rzeczywistych w zależności od parametru a:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} \overset{r_3-r_2}{\underset{r_4-r_2}{=}} \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & a-1 \end{vmatrix} = (a-1)^2 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_4-r_3}{=} (a-1)^2 \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a-1)^2 \cdot \left[a \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \right] = \left[a \cdot (a+1+1) - (1+1+1) \right] \cdot (a-1)^2 =$$

$$= (a-1)^2 \cdot (a^2+2a-3) = (a-1)^2 \cdot (a+3)(a-1) = (a-1)^3 \cdot (a+3)$$

1° 1 rozwiązanie, gdy $Det(A) \neq 0$: $a \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$

dla $a=1$ – układ nieoznaczony

$$\begin{cases} x_1 = 1 - s - t - w \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = w \end{cases}, \quad s, t, w \in \mathbb{R}$$

dla $a=-3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_3 + \frac{1}{3}r_1 \\ r_4 + \frac{1}{3}r_1}]{r_2 + \frac{1}{3}r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_3 \cdot (3) \\ r_4 \cdot (3)}]{r_2 \cdot (3)} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & -8 & 4 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & -8 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_4 + \frac{r_2}{2}]{r_3 + \frac{r_2}{2}} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -6 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 + r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

OF2 sprzecany