Zad. 1.

Cząstka porusza się w dodatnim kierunku osi ox. Jej prędkość v zależy od położenia i jest określona wzorem: $v(x) = \alpha x, \alpha > 0$. Wyznaczyć:

a) zależność prędkości i przyspieszenia cząstki od czasu: $v(t), a(t)$,

b) średnią prędkość cząstki w czasie, w którym przebędzie ona drogę s.

Przyjąć, że $x(0) = x_0$.

$\Rightarrow x(t=0) = x_0$

$\vec{v} = \alpha \vec{x}$, $\alpha > 0$

a)

$v(t) = ?$

$a(t) = ?$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} = \alpha \vec{x}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int \alpha \cdot dt$$

$$\ln x + C_1 = \alpha t + C_2$$

$$\ln x = \alpha t + C$$

$$\ln(x_0) = \alpha \cdot 0 + C = C$$

$$\ln x = \alpha t + \ln(x_0)$$

$$\ln x - \ln(x_0) = \alpha t$$

$$\ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = \alpha t = \ln e^{\alpha t}$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{\alpha t}$$

$$x(t) = x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

$$v(t) = \alpha \cdot x(t) = \alpha \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\alpha \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t}\right) = \alpha \cdot \alpha \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

$$a(t) = \alpha^2 \cdot x_0 \cdot e^{\alpha t}$$

b)

$$v_{śr} = \frac{s}{\tau}$$

$$s = x(\tau) - x(0) = x_0 \cdot e^{\alpha\tau} - x_0 = x_0\left(e^{\alpha\tau} - 1\right)$$

$$e^{\alpha\tau} = \frac{s}{x} + 1$$

$$e^{\alpha\tau} = \frac{s}{x_0} + 1$$

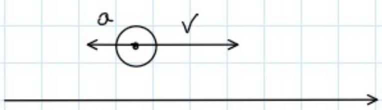
$$\ln e^{\alpha\tau} = \ln\left(\frac{s}{x_0} + 1\right)$$

$$\tau = \frac{\ln\left(\frac{s}{x_0} + 1\right)}{\alpha}$$

$$v_{śr} = \frac{s \cdot \alpha}{\ln\left(\frac{s}{x_0} + 1\right)} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Zad. 2.

Punkt materialny porusza się po prostej z przyspieszeniem $a = -\alpha v$, $\alpha > 0$. Dla $t = 0$ jego prędkość wynosi v_0. Jaką drogę przebędzie do zatrzymania się. W jakim czasie przebędzie połowę tej drogi?



$s = ?$

$s_{\frac{1}{2}} = ?$

$$v(t=0) = v_0$$

$$a = -\alpha \cdot v$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\alpha v$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\alpha \cdot dt$$

$$\ln v + C_1 = -\alpha \cdot t + C_2$$

$$\ln v = -\alpha \cdot t + C$$

$$\ln(v_0) = -\alpha \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad \ln(v_0) = C$$

$$\ln v = -\alpha \cdot t + \ln(v_0)$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\alpha \cdot t$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = \ln e^{-\alpha \cdot t}$$

$$v(t) = e^{-\alpha \cdot t} \cdot v_0$$

$$x(t) = \int v(t)\, dt = \int v_0 \cdot e^{-\alpha t} dt = v_0 \cdot \int e^{-\alpha t} dt = v_0 \cdot \frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha} + D = -\frac{v_0}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} + D$$

$$x(t=0) = 0$$

$$x(t=0) = -\frac{v_0}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot 0} + D = 0$$

$$x(t=0) = -\frac{v_0}{\alpha} \cdot e^{-\alpha \cdot 0} + D = 0$$

$$D = \frac{v_0}{\alpha}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= -\frac{v_0}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t} + \frac{v_0}{\alpha} \\ v(t) &= v_0 \cdot e^{-\alpha t} \end{aligned}}$$

$$v(t) = v_0 \cdot e^{-\alpha t} = 0 \qquad (V_{końcowe} = 0)$$

$$e^{-\alpha \tau} = 0$$

zatem, żeby $e^{-\alpha\tau} = 0$, to τ musi dążyć do $+\infty$ $(\tau \to +\infty)$

zatem: $\lim\limits_{t \to +\infty}(x(t)) = \underbrace{-\frac{v_0}{\alpha} \cdot \overset{\to 0}{e^{-\alpha t}}}_{\to 0} + \frac{v_0}{\alpha} = \frac{v_0}{\alpha}$

połowę drogi:

$$x_{całkowite} = \frac{v_0}{\alpha}$$

$$x(t_2) = \frac{x(t)}{2} = \frac{v_0}{2\alpha}$$

$$\frac{v_0}{2\alpha} = -\frac{v_0}{\alpha} \cdot e^{-\alpha t_2} + \frac{v_0}{\alpha}$$

$$\frac{1}{2} = -e^{-\alpha t_2} + 1$$

$$e^{-\alpha t_2} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{-\alpha t_2} = \ln\frac{1}{2}$$

$$-\alpha t_2 = \ln\frac{1}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{-\ln\frac{1}{2}}{\alpha}$$

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

Zad. 3.

Znajdź prędkość i przyspieszenie w ruchu opisanym równaniami:

$$x(t) = A\cos(Bt^2), \quad y(t) = A\sin(Bt^2).$$

Jaką krzywą jest opisany tor w tym problemie?

$v(t) = ?$

$a(t) = ?$

$$V_x(t) = \frac{dx}{dt} = -2ABt \cdot \sin(Bt^2)$$

$a(t) = ?$

$V_x(t) = \frac{dx}{dt} = -2ABt \cdot \sin(Bt^2)$

$V_y(t) = \frac{dy}{dt} = 2ABt \cdot \cos(Bt^2)$

$\vec{v}(t) = \left(-2ABt \cdot \sin(Bt^2),\ 2ABt\cos(Bt^2)\right)$

$a_x(t) = \frac{dV_x}{dt} = -2AB \cdot \sin(Bt^2) - 2ABt \cdot 2Bt \cdot \cos(Bt^2) = -2AB \cdot \sin(Bt^2) - 4AB^2t^2\cos(Bt^2)$

$= -2AB\left[\sin(Bt^2) + 2Bt^2 \cdot \cos(Bt^2)\right]$

$a_y(t) = \frac{dV_y}{dt} = 2AB \cdot \cos(Bt^2) - 2ABt \cdot 2Bt \cdot \sin(Bt^2) = 2AB\left[\cos(Bt^2) - 2Bt^2\sin(Bt^2)\right]$

$$\vec{a}(t) = \left(-2AB\left[\sin(Bt^2) + 2Bt^2 \cdot \cos(Bt^2)\right],\ 2AB\left[\cos(Bt^2) - 2Bt^2\sin(Bt^2)\right]\right)$$

Jaki to tor?

$(x(t))^2 + (y(t))^2 = A^2\cos^2(Bt^2) + A^2\sin^2(Bt^2) = A^2$

po okręgu o promieniu A

Zad. 4.

Na ciało o masie m działa siła hamująca ruch proporcjonalna do prędkości: $F = -bv$ (ruch jednowymiarowy), gdzie b stała większa od zera.

a) Znaleźć zależność prędkości od ciała od czasu, $v(t)$.

b) Jaką drogę przebędzie ciało do chwili zatrzymania się? Przyjąć, że początkowa prędkość ciała była równa v_0, zaś początkowe położenie $x_0 = 0$. $\Rightarrow v(t=0) = v_0$ $\quad x_0 = 0$

Dane: m, $F = -bv$; $b = const. \wedge b > 0$

a) $v(t) = ?$

II zasada dynamiki Newtona:

$F_w = am$

$am = -bv$

$\frac{dv}{dt} \cdot m = -bv$

$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{-b}{m}\, dt$

$\ln v + C_1 = -\frac{bt}{m} + C_2$

$\ln v = -\frac{bt}{m} + C$

$$\ln v = \ln e^{-\frac{bt}{m}} + \ln e^{C}$$

$$v(t) = e^{-\frac{bt}{m}} \cdot C_3$$

$$v_0 = v(t=0) = e^{0} \cdot C_3 = C_3$$

$$v(t) = e^{-\frac{bt}{m}} \cdot v_0$$

b) $s = ?$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\int v(t)\,dt = \int dx(t)$$

$$\int e^{-\frac{bt}{m}} \cdot v_0\,dt = \int 1 \cdot dx$$

$$e^{-\frac{bt}{m}} \cdot \frac{m}{-b} \cdot v_0 + C_1 = x(t) + C_2$$

$$x(t) = -\frac{v_0 \cdot m}{b} \cdot e^{-\frac{bt}{m}} + C$$

$$x(t=0) = 0 = -\frac{v_0 \cdot m}{b} + C \implies C = \frac{v_0 \cdot m}{b}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{v_0 \cdot m}{b} - \frac{v_0 \cdot m}{b} \cdot \underbrace{e^{-\frac{bt}{m}}}_{0}\right) = \frac{v_0 \cdot m}{b}$$

Zad. 5.

Samochód o masie m hamowany jest siłą oporu $F = -kv^2$, gdzie k stała większa od zera. Jaką drogę przebędzie samochód zanim jego prędkość zmaleje do połowy. Przyjąć, że początkowa prędkość samochodu była równa v_0, zaś początkowe położenie $x_0 = 0$.

Dane: m, $F = -kv^2$, $k = \text{const.} \wedge k > 0$ $\qquad s = ?$

$v(t=0) = v_0 \qquad x(t=0) = 0$

$$v_k = \frac{v_0}{2}$$

II. Z. D. N.:

$$am = -kv^2$$

$$\frac{dv}{dt} \cdot m = -kv^2$$

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int -\frac{k}{m} \cdot dt$$

$$\int v^{-2}\, dv = \frac{-kt}{m} + C_2$$

$$\frac{v^{-1}}{-1} + C_1 = \frac{-kt}{m} + C_2$$

$$\frac{1}{v} = \frac{kt}{m} + C$$

$v(t=0) = v_0$

$$\frac{1}{v_0} = \frac{k \cdot 0}{m} + C \Rightarrow C = \frac{1}{v_0}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}$$

$$\frac{1}{v} = \frac{k \cdot t \cdot v_0 + m}{v_0 \cdot m} \Rightarrow \underline{v(t) = \frac{v_0 \cdot m}{k \cdot t \cdot v_0 + m}}$$

$$v(\tau) = \frac{v_0}{2}$$

$$\left(\frac{k\tau}{m} + \frac{1}{v_0}\right)^{-1} = \frac{v_0}{2}$$

$$\left(\frac{k\tau}{m} + \frac{1}{v_0}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{v_0}\right)^{-1}$$

$$\frac{k\tau}{m} + \frac{1}{v_0} = \frac{2}{v_0}$$

$$\frac{k\tau}{m} = \frac{1}{v_0} \Rightarrow \tau = \frac{m}{v_0 \cdot k}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}\right)^{-1}$$

$$\int dx = \int \underbrace{\left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}\right)}_{u}^{-1} dt$$

$$u = \frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}$$

$$du = \frac{k}{m}\, dt$$

$$dt = \frac{du \cdot m}{k}$$

$$x + C_1 = \int u^{-1} \cdot \frac{du \cdot m}{k}$$

$$x + C_1 = \frac{m}{k} \cdot \ln u + C_2$$

$$x(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}\right) + C = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{kv_0 t + m}{m \cdot v_0}\right) + C$$

$$x(t=0) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{v_0}\right) + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{v_0}\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}\right) - \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{v_0}\right) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left[\left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}\right) \cdot v_0\right] = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{ktv_0}{m} + 1\right)$$

$$x(t) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}\right) - \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{v_0}\right) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left[\left(\frac{kt}{m} + \frac{1}{v_0}\right) \cdot v_0\right] = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{ktv_0}{m} + 1\right)$$

$$x(\tau) = \frac{m}{k} \cdot \ln\left(\frac{k \cdot m \cdot v_0}{v_0 \cdot k \cdot m} + 1\right) = \underline{\underline{\frac{m}{k} \cdot \ln 2}}$$