WFI1 - rozgrzewka

wtorek, 29 kwietnia 2025 19:51

Zad. 0

$\vec{A} = [3, 4, 5]$ $\vec{B} = [-1, 0, 2]$

$|A| = ?$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$

$\vec{A} \times \vec{B} = ?$

$|A| = \sqrt{9+16+25} = 5\sqrt{2}$

$\vec{A} \cdot \vec{B} = -3 + 0 + 10 = 7$

$$\vec{A} \times \vec{B} = [3,4,5] \times [-1,0,2] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8\vec{i} - 11\vec{j} + 4\vec{k}$$

Zad. 4

Promień wodzący punktu materialnego zmienia się w czasie w następujący sposób

$$\vec{r}(t) = [5t, e^{-t}, sin(4t)].$$

W jaki sposób zależy od czasu prędkość i przyśpieszenie punktu materialnego?

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad a = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

$$\vec{v}(t) = \left[\frac{d5t}{dt}, \frac{de^{-t}}{dt}, \frac{d\sin(4t)}{dt}\right] = \underline{[5, -e^{-t}, 4\cos(4t)]}$$

$$\vec{a}(t) = \underline{[0, e^{-t}, -16\sin(4t)]}$$

Zad. 5.

Wektor przyspieszenia ciała zależy w następujący sposób od czasu:

$$\vec{a}(t) = [2e^{-t}, 2cos(t), 3t^2].$$

Początkowa prędkość i położenie ciała wynoszą odpowiednio:

$$\vec{v}(t=0) = [4, -3, 2],$$
$$\vec{r}(t=0) = [0, -1, 1].$$

Wyznacz $\underbrace{\text{wektor wodzący ciała}}_{\vec{r}(t)}$ i jego wektor prędkości w dowolnej chwili $t > 0$.

① Całkujemy, żeby przejść na prędkość:

$$\begin{cases} \int 2e^{-t}\,dt = -2e^{-t} + C_1 \\ \int 2\cos(t)\,dt = 2\sin(t) + C_2 \\ \int 3t^2\,dt = t^3 + C_3 \end{cases}$$

Podstawiamy dla chwili $t=0$:

$-2 \cdot e^0 + C_1 = 4 \Rightarrow C_1 = 6$

$2 \cdot \sin(0) + C_2 = -3 \Rightarrow C_2 = -3$

$0^3 + C_3 = 2 \Rightarrow C_3 = 2$

zatem: $\vec{v}(t) = \left[-2e^{-t} + 6,\ 2\sin(t) - 3,\ t^3 + 2\right]$

(2) Całkujemy, żeby przejść z dziedziny prędkości na przemieszczenie:

$\int -2e^{-t} + 6 \, dt = 2e^{-t} + 6t + C_4$

$\int 2\sin(t) - 3 \, dt = -2\cos(t) - 3t + C_5$

$\int t^3 + 2 \, dt = \frac{t^4}{4} + 2t + C_6$

Podstawiamy dla chwili $t = 0$:

$2e^0 + C_4 = 0 \Rightarrow C_4 = -2$

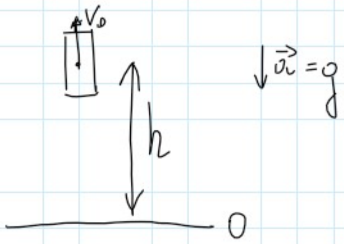
$-2\cos(0) + C_5 = -1 \Rightarrow C_5 = 1$

$C_6 = 1$

Zatem: $\vec{r}(t) = \left[2e^{-t} + 6t - 2,\ -2\cos(t) - 3t + 1,\ \frac{t^4}{4} + 2t + 1\right]$

Zad. 3.

W momencie, gdy rakieta wzniosła się do góry na wysokość h i osiągnęła prędkość v_0, odłączył się od niej niepotrzebny już zbiornik paliwa. Po jakim czasie zbiornik spadnie na ziemię i jaką prędkość osiągnie?



$$y(t) = h + v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$0 = h + v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$

$\frac{gt^2}{2} - v_0 t - h = 0$

$\Delta = v_0^2 + \frac{4g}{2} \cdot h = v_0^2 + 2gh \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

$t_1 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} < 0 \quad \vee \quad t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$

$V_k = V_0 - gt$

$V_k = V_0 - g \cdot \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{\ldots} = v_0 - v_0 - \sqrt{v^2 + 2gh}$

$$v_k = v_0 - gt$$

$$v_k = v_0 - \cancel{g} \cdot \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{\cancel{g}} = v_0 - v_0 - \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

$$v_k = -\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$