Kolos#1

wtorek, 20 maja 2025 19:30

1. Linę o długości l umocowano za jeden z końców, zaś na drugim zawieszono obciążenie. Następnie wprawiono ją w ruch obrotowy wokół mocowania w taki sposób, że ciężarek obraca się z prędkością o stałej wartości v_0. Linę następnie poddano skracaniu ze stałą prędkością v_l, nie zmieniając przy tym prędkości transwersalnej ciężarka. Obliczyć zależność od czasu wektora przyspieszenia ciężarka i jego składowych: radialnej i transwersalnej. Przyjąć środek układu współrzędnych w środku tarczy. Jaka będzie całkowita droga ciężarka od rozpoczęcia skracania? W jakim czasie (od rozpoczęcia skracania) zostanie pokonana? Jaka jest zależność kąta opisującego położenie ciężarka od czasu?

$v_\varphi = v_0$

$v_r = -v_l$

$a_r(t) = ?$

$a_\varphi(t) = ?$

$a(t) = ?$

$s = ?$

$\tau = ?$

$\varphi(t) = ?$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

$$a_\varphi = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = -v_l$$

$$\int dr = \int -v_l \cdot dt$$

$$r = -v_l \cdot t + C$$

$$r(t=0) = l = -v_l \cdot 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = l$$

$$r(t) = -v_l \cdot t + l$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0$$

$$v_\varphi = \omega \cdot r = \frac{d\varphi}{dt}\cdot r = v_0$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{v_0}{r} = \frac{v_0}{l - v_l \cdot t} = v_0 \cdot (l - v_l \cdot t)^{-1}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = (-1)\cdot v_0 \cdot (l - v_l \cdot t)^{-2}\cdot(-v_l) = v_0 \cdot v_l \cdot (l - v_l \cdot t)^{-2} = \frac{v_0 \cdot v_l}{(l - v_l \cdot t)^2}$$

$$a_r = 0 - (-v_l \cdot t + l)\cdot(v_0^2)\cdot(l - v_l \cdot t)^{-2} = \frac{-v_0^2}{l - v_l \cdot t} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_\varphi = 2\cdot(-v_l)\cdot v_0 \cdot (l - v_l \cdot t)^{-1} + (l - v_l \cdot t)\cdot\frac{v_0 \cdot v_l}{(l - v_l \cdot t)^2} = -2\frac{v_0 \cdot v_l}{l - v_l \cdot t} + \frac{v_0 \cdot v_l}{l - v_l \cdot t}$$

$$a_\varphi = -\frac{v_0 \cdot v_l}{l - v_l \cdot t} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a_\varphi = \frac{v}{l - v_l \cdot t} \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} \quad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

$s = ?$

$$s = v \cdot \tau \qquad v = \sqrt{v_l^2 + v_0^2} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

ruch się skończy, jak się skończy lina

$$r = 0 = l - v_l \cdot t \implies \tau = \frac{l}{v_l}$$

$$s = \sqrt{v_l^2 + v_0^2} \cdot \frac{l}{v_l} \quad [m]$$

$\varphi(t) = ?$

$$\frac{d\varphi}{dt} = v_0 \cdot \left(l - v_l \cdot t\right)^{-1}$$

$$\varphi(t=0) = 0$$

$$\int d\varphi = \int v_0 \cdot \left(l - v_l \cdot t\right)^{-1} dt$$

$$\varphi(t) = v_0 \cdot \int \left(\underbrace{l - v_l \cdot t}_{u}\right)^{-1} dt$$

$$\varphi(t) = \frac{v_0}{-v_l} \cdot \int u^{-1} \cdot du$$

$$u = l - v_l \cdot t$$

$$du = -v_l \, dt$$

$$dt = \frac{du}{-v_l}$$

$$\varphi(t) = -\frac{v_0}{v_l} \cdot \left(\ln(u) + C\right)$$

$$\varphi(t) = -\frac{v_0}{v_l} \cdot \left(\ln(l - v_l \cdot t) + C\right)$$

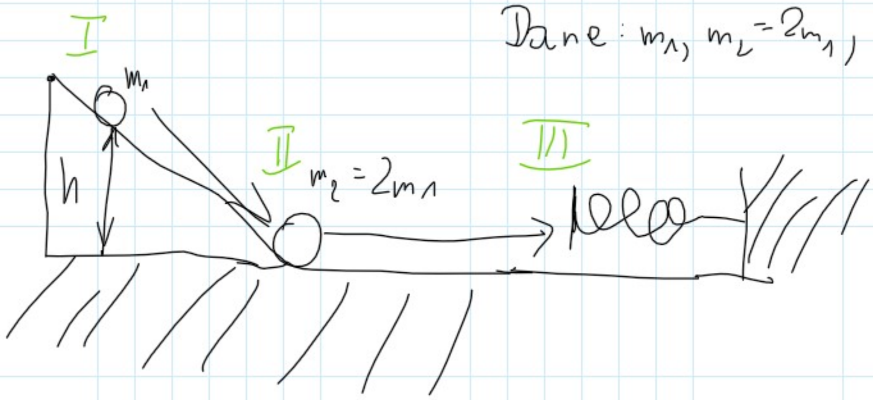
$$\varphi(t=0) = 0 = -\frac{v_0}{v_l} \cdot \ln(l) - \frac{v_0}{v_l} \cdot C$$

$$C = -\ln(l)$$

$$\varphi(t) = -\frac{v_0}{v_l} \cdot \left[\ln(l - v_l \cdot t) - \ln(l)\right] \quad [rad]$$

2. Kula o masie m_1 stacza się z równi pochyłej o wysokości h, a następnie zderza się ze stojącą kulą o masie $m_2 = 2m_1$ idealnie sprężyście. Kula o masie m_2 uderza następnie w sprężynę o stałej sprężystości k tak, że powoduje jej skrócenie. Jaką pracę kula wykona na sprężynie do chwili jej zatrzymania? O ile sprężyna zostanie skrócona? W którym kierunku będzie się poruszać kula o masie m_1 po zderzeniu? Przyjmij, że ruch kul nie powoduje strat energii. Wartość przyspieszenia grawitacyjnego wynosi g.

Dane: m_1, $m_2 = 2m_1$, h, k



I: $\cancel{m_1} \cdot g \cdot h = \frac{\cancel{m_1} v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$

przyjmijmy, że będzie się ruszać w prawo

Z.Z.P.:

$\cancel{m_1} v_1 + 0 = \cancel{m_1} v_1' + 2\cancel{m_1} v_2' \Rightarrow v_1' = v_1 - 2v_2'$

$\frac{\cancel{m_1} v_1^2}{2} + 0 = \frac{\cancel{m_1} v_1'^2}{\cancel{2}} + \frac{2\cancel{m_1} v_2'^2}{\cancel{2}}$

$v_1^2 = v_1^2 - 4v_1 v_2' + 4v_2' + 2v_2'^2$

$4v_1 v_2' = 6v_2'^2$

$v_2'(3v_2' - 2v_1) = 0$

$v_2' = 0 \lor v_2' = \frac{2}{3} v_1$

$v_1' = v_1 - 2v_2' = v_1 - 2 \cdot \frac{2}{3} v_1 = -\frac{1}{3} v_1$

w lewo

Z.Z.E. II : III

$W = \Delta E_2 = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_1 v_2'^2 = m_1 \cdot \frac{4}{9} v_1^2$

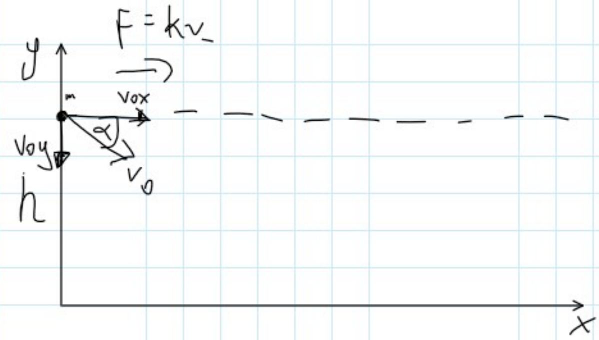
skrócenie spr. $x = ?$

$E_2 = W = E_{ps} = \frac{kx^2}{2}$ [J]

$v_2'^2 \ldots \frac{kx^2}{\ldots} \ldots \sqrt{\frac{2m_1}{\ldots}} = \frac{2}{3} v_1 \cdot \sqrt{\frac{2m_1}{\ldots}}$ [m]

$$m_1 V_2'^2 = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow x = v_2' \cdot \sqrt{\frac{2m_1}{k}} = \frac{2}{3} v_1 \cdot \sqrt{\frac{2m_1}{k}} \quad [m]$$

3. Pocisk o masie m wystrzelono z prędkością początkową v_0 z wysokości h pod kątem $\alpha < \frac{\pi}{2}$ od poziomu w dół. Porusza się on bez oporów, jednak poziomy wiatr działa na niego z siłą proporcjonalną do poziomej składowej prędkości, przyspieszając jego ruch: $F = kv_-$, gdzie v_- to składowa pozioma prędkości, a k dodatnia stała. Obliczyć zależność prędkości (składowej poziomej i pionowej) od czasu. Po jakim czasie τ i jak daleko od miejsca wystrzału (w poziomie) pocisk spadnie na ziemię? Wartość przyspieszenia grawitacyjnego wynosi g.



$g \downarrow$

$$F_1 = -mg$$
$$ma_1 = -mg$$
$$a_1 = -g$$

$$vox = v_0 \cdot \cos\alpha$$
$$voy = -v_0 \cdot \sin\alpha$$

$$V_1 = V_{oy} + at$$
$$X_1 = x_{oy} + v_{oy}t + \frac{at^2}{2}$$
$$V_1 = V_0 \cdot \sin\alpha - gt$$
$$x_1 = x_{oy} - v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} = h - v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

$$F_- = kv_-$$
$$a\_m = kv_-$$
$$m \cdot \frac{dv_-}{dt} = kv_-$$
$$\int \frac{dv_-}{v_-} = \int \frac{k}{m} dt$$
$$\ln v_- = \frac{kt}{m} + C$$
$$\ln v_- = \ln\left(e^{\frac{kt}{m}} \cdot C'\right)$$
$$v_- = e^{\frac{kt}{m}} \cdot C'$$
$$v_-(t=0) = v_0 \cdot \cos\alpha = C' \cdot e^0 = C'$$
$$v_-(t) = v_0 \cos\alpha \, e^{\frac{kt}{m}}$$
$$v_- = \frac{dx_-}{dt} = v_0 \cos\alpha \, e^{\frac{kt}{m}}$$

$$\int dx_- = \int v_0 \cos\alpha \cdot e^{\frac{kt}{m}} \, dt$$

$$x_- = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{m}{k} \cdot e^{\frac{kt}{m}} + D$$

$$x_-(t=0) = 0 = v_0 \cos\alpha \cdot \frac{m}{k} \cdot \underbrace{e^{0}}_{1} + D$$

$$D = -v_0 \cos\alpha \cdot \frac{m}{k}$$

$$x_-(t) = v_0 \cos\alpha \, \frac{m}{k} \cdot \left(e^{\frac{kt}{m}} - 1\right)$$

$\tau = ?$

gdy $x_1(\tau) = 0$

$$x_1(\tau) = h - v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0$$

$$\Delta = (v_0 \sin\alpha)^2 + 4 \cdot h \cdot \frac{g}{2} = v_0^2 \sin^2\alpha + 2gh$$

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{\Delta}}{-g} \Rightarrow \tau = \frac{v_0 \sin\alpha - \sqrt{\Delta}}{-g}$$

$x_-(\tau)$