WFI5 - zasada zachowania pędu i energii

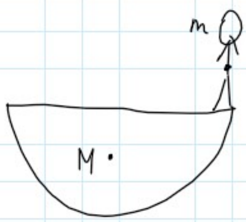
wtorek, 29 kwietnia 2025 21:43

Zasada zachowania pędu: $\sum_i \vec{p_i} = const$ → zderzenia sprężyste, → zderzenia niesprężyste

Zasada zachowania energii: $\sum_i E = const.$ → zderzenia sprężyste

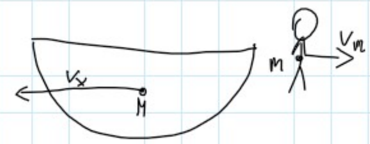
Zad. 1

Na wodzie stoi łódka o masie M a na niej człowiek o masie m. W pewnej chwili człowiek zeskakuje z łódki z prędkością u względem niej. Z jaką prędkością względem obserwatora na brzegu zacznie poruszać się łódka?



względem brzegu:

$V_x = ?$



$$\underbrace{u = v_x + v_m}_{} \Rightarrow v_m = u - v_x$$

(jeśli by stał, a łódka by zaczęła „sama" płynąć w lewo to $u = v_x$; skoro skacze, to prędkość względna się powiększa - stąd "+")

Z. Z. P.:

$$p_1 = p_2$$

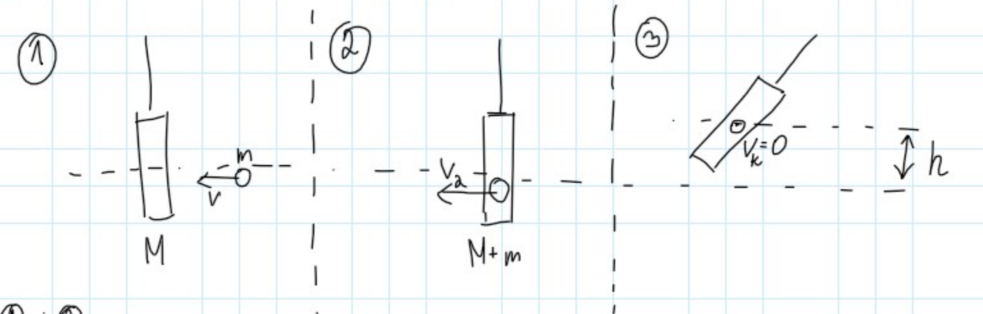
$$0 = m \cdot (u - v_x) - M \cdot v_x$$

$$mu = (m + M) \cdot v_x$$

$$v_x = \frac{m \cdot u}{m + M} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

Zad. 2

Na jaką wysokość liczoną względem położenia równowagi wzniesie się wahadło o masie M, gdy utkwi w nim pocisk o masie m lecący z prędkością v ?



1 i 2

zderzenie jest niesprężyste, zatem Z. Z. P.:

$$m \cdot V = (M + m) \cdot V_2 \Rightarrow V_2 = \frac{mV}{M + m}$$

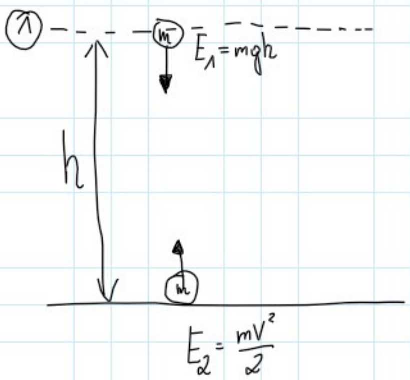
② i ③ – układ już jest izolowany, więc Z.Z.E:

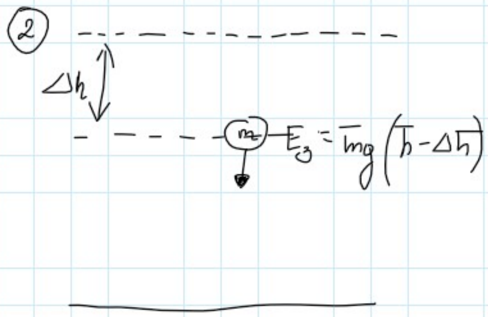
$$\frac{(M+m)V_2^2}{2} = (M+m)\cdot g\cdot h$$

$$\frac{m^2V^2}{2\cdot(M+m)} = g\cdot h \Rightarrow h = \frac{m^2V^2}{2g(M+m)}$$

Zad. 3.

Piłeczka pingpongowa po uderzeniu o podłogę traci $\frac{1}{k}$ swojej energii kinetycznej ($k < 1$). Znajdź całkowitą drogę jaką przebędzie piłeczka zrzucona z wysokości h, aż do chwili zatrzymania się.





$$E_3 = mg(h-\Delta h) = mgh - mg\Delta h = mgh - \frac{mgh}{k} = mgh\left(1-\frac{1}{k}\right) = E_1\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

$$E_5 = E_1\left(1-\frac{1}{k}\right)^2$$

$$s = h + 2h\cdot\left(1-\frac{1}{k}\right) + 2h\left(1-\frac{1}{k}\right)^2 + \ldots = 2\cdot\sum_{n=0}^{\infty} h\left(1-\frac{1}{k}\right)^n - h = 2\cdot\frac{h}{1-\left(1-\frac{1}{k}\right)} - h$$

$$s = 2hk - h$$

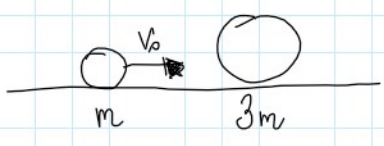
$$s = h(2k-1)\ [m]$$

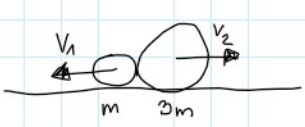
Zad. 5.

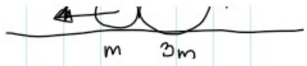
Dwie kule zderzają się, po czym poruszają się wzdłuż jednej prostej. Jedna z kul przed zderzeniem była w spoczynku, a druga poruszała się z prędkością v_0. Kula poruszająca się ma masę trzykrotnie mniejszą od kuli spoczywającej. Wyznacz prędkość kul po zderzeniu: a) idealnie sprężystym, b) idealnie niesprężystym.

a) idealnie sprężystym

$v_1 = ?$ $v_2 = ?$







$v_1 = v_2 = v_x$

Z. Z. P. :

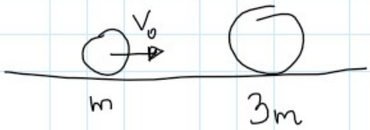
$mV_0 = 3mV_x - mV_x$

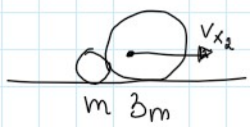
$V_0 = 2V_x \Rightarrow V_x = \frac{V_0}{2} = v_1 = v_2$

b) idealnie niesprężystym

$v_1 = ?$ $v_2 = ?$

$v_1 = v_2 = V_{x2}$





Z. Z. P. :

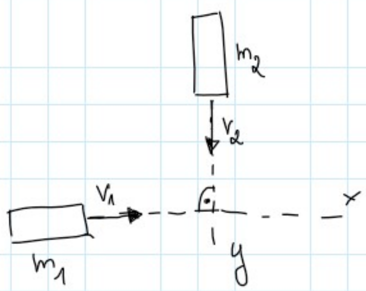
$mV_0 = (m + 3m) \cdot V_{x2}$

$V_{x2} = v_1 = v_2 = \frac{V_0}{4}$

Zad. 6.

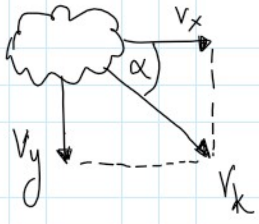
Na skrzyżowaniu doszło do zderzenia dwóch pojazdów, jadących po wzajemnie prostopadłych torach: jednego o masie m_1 i prędkości v_1, i drugiego o masie m_2 i prędkości v_2. Oblicz długość i kierunek wektora prędkości połączonych wraków pojazdów tuż po zderzeniu.

↳ zderzenie całkowicie niesprężyste (Z. Z. P.)



$p_1 = m_1 v_1$ $p_2 = m_2 V_2$

$\vec{p}_{przed} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$



$\vec{p}_{po} = (m_1 + m_2) \cdot \vec{v}_k$

$v_x = \frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}$ $v_y = \frac{m_2 V_2}{m_1 + m_2}$

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot v_x$

$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot v_y$

$\vec{V}_k = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{m_1 V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{m_2 V_2}{m_1 + m_2}\right)^2}$

$\rightarrow \sqrt{(m_1 V_1)^2 + (m_2 V_2)^2}$

$m_2 v_2 = (m_1+m_2)\cdot v_y$

$$\vec{V}_k = \frac{\sqrt{(m_1V_1)^2+(m_2V_2)^2}}{m_1+m_2}$$

Kierunek wektora:

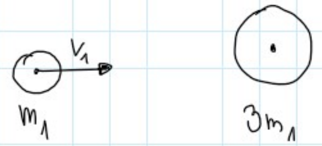
$$tg\alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{m_2V_2}{m_1+m_2}\cdot\frac{m_1+m_2}{m_1V_1} = \frac{m_2V_2}{m_1V_1}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{m_2V_2}{m_1V_1}\right)$$

Zad. 7.

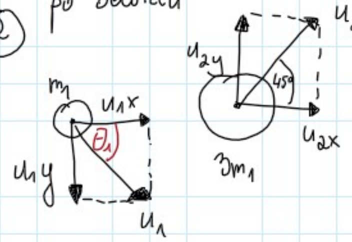
Cząstka o masie m_1 i prędkości v_1 zderza się doskonale sprężyście ze spoczywającą ($v_2 = 0$) cząstką o masie $m_2 = 3m_1$. Po zderzeniu cząstka o masie m_2 porusza się pod kątem θ_2=45° względem pierwotnego kierunku ruchu cząstki o masie m_1. Znajdź końcowe prędkości obydwu cząstek i kąt θ_1 odchylenia ruchu pierwszej cząstki względem jej pierwotnego kierunku ruchu.

(1)



$\vec{p}_0 = m_1\vec{V}_1$

(2) po odbiciu



$u_2 = u_{2x}\cdot\sqrt{2} = u_{2y}\sqrt{2}$

$u_1, u_2, \theta_1 = ?$

$u_{2y}\cdot\sqrt{2} = u_2$

$u_{2y} = \frac{u_2}{\sqrt{2}} = \frac{u_2\sqrt{2}}{2}$

$$tg\theta_1 = \frac{u_{1y}}{u_{1x}} = \frac{u_{2y}}{u_{1x}} = \frac{u_{2y}}{v_1-3u_{2y}} = \frac{u_{2y}}{v_1} - \frac{1}{3} = \frac{u_2\sqrt{2}}{2v_1} - \frac{1}{3}$$

w osi Y: $\vec{u_{1y}} + \vec{u_{2y}} = 0$

$u_{1y} = u_{2y}$

$u_{2y} = u_{2x}$

$$tg\theta_1 = \frac{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{8\cdot 2v_1} - \frac{1}{3}$$

w osi X: $m_1V_1 = m_1u_{1x} + 3m_1u_{2x}$

$V_1 = u_{1x} + 3u_{2x}$

$$tg\theta_1 = \frac{3}{8v_1} - \frac{1}{3}$$

$v_1 = u_{1x} + 3u_{2y} = u_{1x} + 3u_{1y} \Rightarrow u_{1x} = v_1 - 3u_{2y}$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{3}{8v_1} - \frac{1}{3}\right)$$

Z.Z.E.: $\frac{m_1V_1^2}{2} = \frac{m_1\cdot u_1^2}{2} + \frac{3m_1 u_2^2}{2}$

$V_1^2 = u_1^2 + 3u_2^2$

$V_1^2 = u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + 3u_2^2$

$v_1^2 = v_1^2 - 2v_1\cdot 3u_{2y} + 9u_{2y}^2 + u_{1y}^2 + 3u_2^2$

$6v_1 u_{2y} = 9u_{2y}^2 + u_{1y}^2 + 3u_2^2$

$6v_1 u_{2y} = 9u_{2y}^2 + u_{2y}^2 + 3u_2^2$

$$6v_1 u_{2y} = 9u_{2y}^2 + u_{1y}^2 + 3u_2^2$$

$$6v_1 \cdot u_{2y} = 9u_{2y}^2 + u_{2y}^2 + 3u_2^2$$

$$6v_1 u_{2y} = 10u_{2y}^2 + 3u_2^2$$

$$6v_1 \cdot \frac{u_2\sqrt{2}}{2} = 10 \cdot \frac{u_2^2 \cdot \cancel{(\sqrt{2})^2}}{\cancel{4}\,2} + 3u_2^2$$

$$3v_1 \cdot u_2 \cdot \sqrt{2} = 5u_2^2 + 3u_2^2$$

$$3v_1 \cdot \sqrt{2} = 8u_2$$

$$u_2 = \frac{3\sqrt{2}}{8} \cdot v_1$$

dla u_1:

$$v_1^2 = u_1^2 + 3u_2^2$$

$$u_1^2 = v_1^2 - 3u_2^2 = v_1^2 - \frac{3 \cdot 9 \cdot 2}{64} \cdot v_1^2$$

$$u_1^2 = \frac{10}{64} v_1^2$$

$$u_1^2 = \frac{5}{32} v_1^2$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} v_1$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{10}}{8} v_1$$

coś źle, bo w teorii: *Odpowiedź:* $u_1 = \frac{\sqrt{10}}{4} v_1$, $u_2 = \sqrt{2} v_0$

(zapewne)