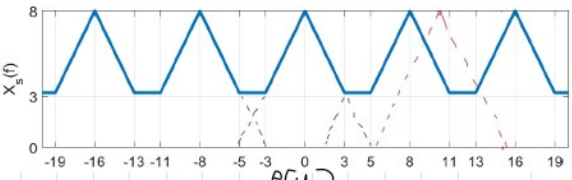
Kolos 2 - 24L

wtorek, 3 czerwca 2025 20:44

Zad. 2 (5 pkt.) PRÓBKOWANIE – gr. 1

W wyniku próbkowania pewnego sygnału $x(t)$ deltami Diraca otrzymano widmo $X_s(f)$ podane poniżej. Wiadomo, że zaszło zjawisko aliasingu. Spróbuj określić jaka jest częstotliwość próbkowania [0.5 pkt] i wyznacz sygnał $x(t)$, który spróbkowano [2 pkt]. Podaj częstotliwość próbkowania, dla której aliasing nie zajdzie [2 pkt]. Wyznacz częstotliwość Nyquista sygnału $x(t)$ [0.5 pkt].



$f_s = 8Hz$

$$X_s(f) = f_s \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - n f_s)$$

$$X_s(f) = 8 \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - n \cdot 8)$$

$$X(f) = tri\left(\frac{f}{5}\right)$$

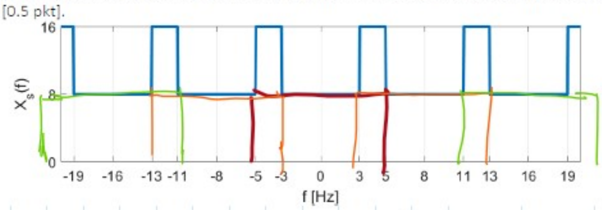
$$x(t) = 5 \operatorname{sinc}^2(5t)$$

aliasing nie zajdzie $\forall f_s > 10 Hz$

$f_{max} = 5Hz$

Zad. 2 (5 pkt.) PRÓBKOWANIE – gr. 2

W wyniku próbkowania pewnego sygnału $x(t)$ deltami Diraca otrzymano widmo $X_s(f)$ podane poniżej. Wiadomo, że zaszło zjawisko aliasingu. Spróbuj określić jaka jest częstotliwość próbkowania [0.5 pkt] i wyznacz sygnał $x(t)$, który spróbkowano [2 pkt]. Podaj częstotliwość próbkowania, dla której aliasing nie zajdzie [2 pkt]. Wyznacz częstotliwość Nyquista sygnału $x(t)$ [0.5 pkt].



$f_s = 8Hz$

$$X_s(f) = f_s \cdot \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - n f_s)$$

$$X_s(f) = 8 \sum_{n\in\mathbb{Z}} X(f - n8)$$

$$X(f) = \mathrm{rect}\left(\frac{f}{10}\right)$$

$$x(t) = 10\,\mathrm{sinc}(10t)$$

aliasing nie zajdzie $\forall\ f_s > 10\,\mathrm{Hz}$

$$f_{max} = 5\,\mathrm{Hz}$$

Zad. 3 (5 pkt.) TRANSFORMATA ZET – gr 1

Znajdź odwrotną transformatę ZET systemu o podanej transmitancji [4 pkt]. Czy wskazany system jest stabilny? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.

$$H(z) = \frac{1}{(1-z^{-1})^2\left(1 - \frac{1}{K+1}\cdot z^{-1}\right)}$$

$K = 2$ $\qquad$ $h[n] = ?$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - 2z^{-1} + z^{-2})\left(1 - \frac{1}{3}\cdot z^{-1}\right)} = \frac{z^3}{(z^2 - 2z + 1)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{z^3}{(z-1)^2\left(z - \frac{1}{3}\right)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)^2\left(z-\frac{1}{3}\right)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z - \frac{1}{3}}$$

$$/(z-1)\left(z-\tfrac{1}{3}\right) \qquad /z-\tfrac{1}{3} \qquad /(z-1)^2$$

$$z^2 = A(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right) + B\left(z - \frac{1}{3}\right) + C(z-1)^2$$

dla $z = 1$:

$$1 = B\cdot\frac{2}{3} \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

dla $z = \frac{1}{3}$:

$$\frac{1}{9} = C\cdot\frac{4}{9} \Rightarrow C = \frac{1}{4}$$

$$z^2 = A(z-1)\left(z-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}$$

(tylko x^2)

$$z^2 = Az^2 + \frac{1}{4}z^2$$

$$1 = A + \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{3}{4}$$

$$H(z) = \frac{\frac{3}{4}z}{z-1} + \frac{\frac{3}{2}z\cdot 1}{(z-1)^2} + \frac{\frac{1}{4}z}{z - \frac{1}{3}}$$

$na^n u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{za}{(z-a)^2}$

dla przyczynowego:

$h[n] = \frac{3}{4}(1)^n$ [illegible] $+ \frac{3}{\ }$ [illegible] $(1)^n$ [illegible] $+ \frac{1}{\ }\left(\frac{1}{\ }\right)^n$ [illegible] dla przyczynowego:

$$h[n] = \frac{3}{4}\cdot(1)^n \cdot u[n] + \frac{3}{2}n(1)^n \cdot u[n] + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u[n]$$

$$\boxed{h[n] = \frac{3}{4}u[n] + \frac{3}{2}n\,u[n] + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]}$$

nie stabilny, bo $z_1 = 1 \wedge z_2 = 1$ (2 bieguny na kole jednostkowym)

Zad. 3 (5 pkt.) TRANSFORMATA ZET – gr. 2.

Znajdź odwrotną transformatę ZET systemu o podanej transmitancji [4 pkt]. Czy wskazany system jest stabilny? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.

$$H(z) = \frac{K}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}}$$

$K = 2$

$$H(z) = \frac{2}{1 - 3z^{-1} + 2z^{-2}} = \frac{2z^2}{z^2 - 3z + 2} = \frac{2z^2}{(z-2)(z-1)}$$

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{2z}{(z-2)(z-1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-1}$$

$$2z = A(z-1) + B(z-2)$$

dla $z = 1$:

$2 = B(-1) \Rightarrow B = -2$

dla $z = 2$:

$4 = A \cdot 1$

$A = 4$

$$H(z) = \frac{4z}{z-2} + \frac{-2z}{z-1}$$

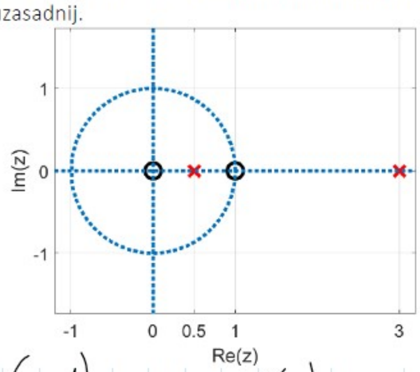
$$h[n] = 4 \cdot 2^n \cdot u[n] - 2 \cdot 1^n \cdot u[n]$$

$$\boxed{h[n] = 2^{n+2} \cdot u[n] - 2 \cdot u[n]}$$

nie jest stabilny, bo $[z_1 = 2 \wedge z_2 = 1] \Rightarrow$ poza okręgiem jednostkowym

Zad. 4 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #1 – gr.1

Poniżej podano rozkład zer i biegunów pewnego filtru. Znajdź równanie różnicowe opisujące działanie filtru [2 pkt]. Narysuj jego postać drabinkową II rodzaju [2 pkt]. Czy jest to filtr FIR czy IIR? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.



$y[n] = ?$

p.d. II r. ?

FIR / IIR ?

$$H(z) = \frac{z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-3)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{(z^2 - z)\cdot z^{-2}}{\left(z^2 - \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}\right)\cdot z^{-2}} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X(z) - X(z)\cdot z^{-1} = Y(z) - \frac{7}{2}z^{-1}Y(z) + \frac{3}{2}Y(z)\cdot z^{-2}$$

$$x[n] - x[n-1] = y[n] - \frac{7}{2}y[n-1] + \frac{3}{2}y[n-2]$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + \frac{7}{2}y[n-1] - \frac{3}{2}y[n-2]$$

IIR bo zależy od innych $y[n-x]$, $x \in \mathbb{Z}_+$

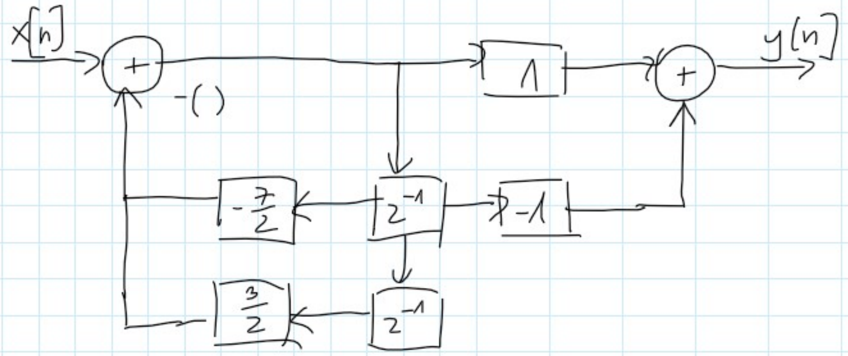
postać drabinkowa II rodzaju:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{N} b(i)\, z^{-i}}{\sum_{i=0}^{M} a(i)\, z^{-i}}$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2}} = \frac{1\cdot z^{0} - 1\cdot z^{-1} + 0\cdot z^{-2} \ldots}{1\cdot z^{0} - \frac{7}{2}z^{-1} + \frac{3}{2}z^{-2} + 0\cdot z^{-3} \ldots}$$

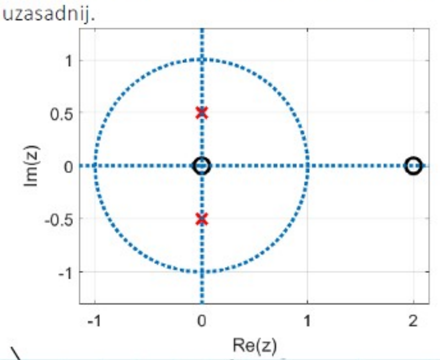
$b(0)=1 \qquad b(1)=-1 \qquad b(2)=0 \ \ldots$

$a(0)=1 \qquad a(1)=-\frac{7}{2} \qquad a(2)=\frac{3}{2} \qquad a(3)=0\ldots$



Zad. 4 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #1 – gr. 2

Poniżej podano rozkład zer i biegunów pewnego filtru. Znajdź równanie różnicowe opisujące działanie filtru [2 pkt]. Narysuj jego postać drabinkową II rodzaju [2 pkt]. Czy jest to filtr FIR czy IIR? [1 pkt] Odpowiedź uzasadnij.



$y[n]=?$

p.d. II r. ?

IIR/FIR ?

$$H(z)=\frac{(z-2)z}{\left(z-\frac{j}{2}\right)\left(z+\frac{j}{2}\right)}=\frac{z^2-2z}{z^2-\frac{j^2}{4}}=\frac{(z^2-2z)\cdot z^{-2}}{\left(z^2+\frac{1}{4}\right)\cdot z^{-2}}=\frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$X(z)-2z^{-1}\cdot X(z)=Y(z)+\frac{1}{4}z^{-2}Y(z)$$

$$x[n]-2\cdot x[n-1]=y[n]+\frac{1}{4}\cdot y[n-2]$$

$$\underline{y[n]=x[n]-2x[n-1]-\frac{1}{4}y[n-2]}$$

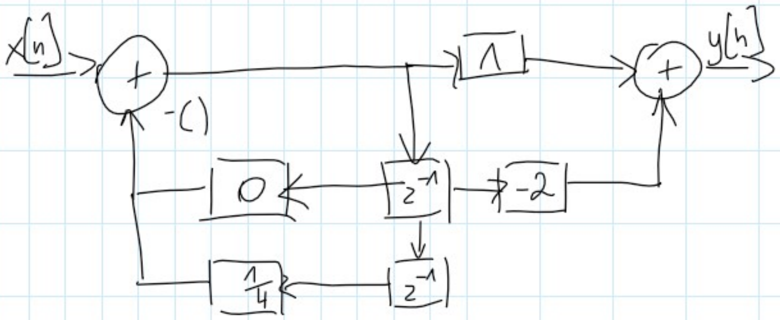
IIR (IoT bo zależy od innych $y[n-x]$, $x\in\mathbb{Z}_+$

postać drabinkowa II rodzaju:

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$b(0)=1$ $\quad$ $b(1)=-2$

$a(0)=1$ $\quad$ $a(1)=0$ $\quad$ $a(2)=\frac{1}{4}$



Zad. 5 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #2 – gr. 1.

Na wejście filtru podano sygnał dyskretny $x[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$, a na wyjściu pojawiło się $y[n]=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$. Częstotliwość próbkowania jest równa 5 GHz. Podaj równanie różnicowe opisujące działanie filtru [3 pkt]. Podaj wartości transmitancji ($H(f)$) filtru dla częstotliwości 0 Hz i 2.5 GHz [2 pkt].

$$x[n]=\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

$$y[n]=\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$$

$f_s=5\,GHz$

$y[n]=?$

$H(f)$ dla $f=0\,Hz$

i $f=2{,}5\,GHz$

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{5}}$$

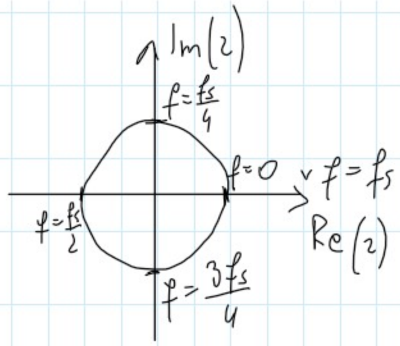
$$Y(z)=\frac{\frac{5}{2}z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{3}{2}z}{z-\frac{1}{5}}=\frac{\frac{5}{2}z\left(z-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{2}z\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{5}\right)}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\frac{5}{2}\cancel{z}\left(z-\frac{1}{5}\right)-\frac{3}{2}\cancel{z}\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cancel{\left(z-\frac{1}{5}\right)}}\cdot\frac{\cancel{\left(z-\frac{1}{5}\right)}}{\cancel{z}}=\frac{\left(z+\frac{1}{4}\right)\cdot z^{-1}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z)=X(z)+\frac{1}{4}z^{-1}X(z)$$

$$y[n]=\frac{1}{2}y[n-1]+x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]$$



0 Hz $\quad f=0 \iff z=1$

$$H(z=1) = \frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{4}\cdot 2 = \frac{5}{2}$$

2,5GHz

$$H(z=-1) = \frac{-1+\frac{1}{4}}{-1-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Zad. 5 (5 pkt.) FILTRY DYSKRETNE #2 – gr. 2.

Na wejście filtru podano sygnał dyskretny $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, a na wyjściu pojawiło się $y[n] = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. Częstotliwość próbkowania jest równa 100 kHz. Podaj równanie różnicowe opisujące działanie filtru [3 pkt.]. Podaj wartości transmitancji ($H(f)$) filtru dla częstotliwości 0 Hz i 50 kHz [2 pkt.].

$$X(z) = \frac{z}{z-\frac{1}{4}}$$

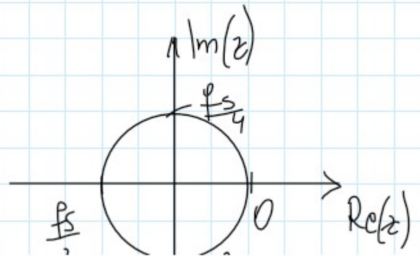
$$Y(z) = \frac{3}{2}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{5}{4}\cdot\frac{z}{z-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{3}{2}z\left(z-\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}z\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$H(z) = \frac{\frac{3}{2}\cancel{z}\left(z-\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}\cancel{z}\left(z-\frac{1}{2}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(z-\frac{1}{4}\right)}}{\cancel{z}} = \frac{\left(\frac{1}{4}z+\frac{1}{4}\right)\cdot z^{-1}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\cdot z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\frac{1}{4}X(z) + \frac{1}{4}z^{-1}X(z) = Y(z) - \frac{1}{2}z^{-1}Y(z)$$

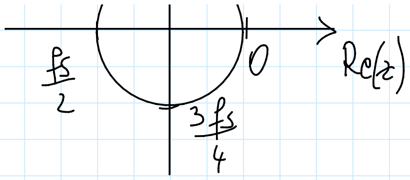
$$y[n] = \frac{1}{4}x[n] + \frac{1}{4}x[n-1] + \frac{1}{2}y[n-1]$$



$f_s = 100\,kHz$

0Hz

$$H(z=1) = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = 1$$



4kHz $\quad H(z=1) = \frac{\cdot}{\frac{1}{2}} = 1$

50kHz $\quad H(z=-1) = \frac{-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}} = 0$