WFI6 - praca

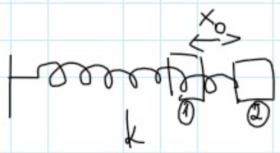
wtorek, 6 maja 2025 17:53

$$\boxed{W=\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx}$$

Zad. 1.

Oblicz pracę siły, która rozciąga sprężynę o stałej sprężystości k, zwiększając jej długość o x_0. Załóż, że w każdej chwili siła zewnętrzna równoważy siłę sprężystości.

$W = ?$



$F_s = -kx$

$$W = \int_0^{x_0} -F\,dx = \int_0^{x_0} kx\,dx = \frac{kx^2}{2}\Bigg|_0^{x_0} = \frac{kx_0^2}{2}$$

Zad. 2.

Wykaż, bezpośrednim rachunkiem, że praca sił oporu ruchu $F = -kv$ potrzebna do zatrzymania ciała o masie m i prędkości początkowej v_0 jest równa początkowej energii kinetycznej tego ciała.

Dane: $F = -kv$, m, v_0

teza: $W = \frac{mv_0^2}{2}$

$$am = -kv$$

$$\frac{dv}{dt}\cdot m = -kv$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int -\frac{k}{m}\,dt$$

$$\ln v + C_1 = -\frac{kt}{m} + C_2$$

$$\ln v = -\frac{kt}{m} + C$$

dla $t = 0$:

$$\ln v_0 = C$$

$$\ln v = -\frac{kt}{m} + \ln v_0$$

$$\ln v = \ln e^{-\frac{kt}{m}} + \ln v_0$$

$$\ln v = \ln\left(e^{-\frac{kt}{m}}\cdot v_0\right)$$

$$v(t) = e^{-\frac{kt}{m}} \cdot v_0$$

$$x(T) = \int_0^T e^{-\frac{kt}{m}} \cdot v_0 \, dt = v_0 \cdot \int_0^T e^{-\frac{kt}{m}} \, dt = v_0 \cdot \frac{e^{-\frac{kt}{m}}}{-\frac{k}{m}}\Bigg|_0^T = -\frac{v_0 \cdot m}{k} \cdot e^{-\frac{kt}{m}}\Bigg|_0^T = -\frac{\overbrace{v_0 \cdot e^{-\frac{kT}{m}}}^{v(T)} \cdot m}{k} + \frac{v_0 \cdot m}{k}$$

$$x(T) = \frac{m}{k} \cdot \left(v_0 - v(T)\right)$$

$$\frac{x(T) \cdot k}{m} = v_0 - v(T) \Rightarrow v(T) = v_0 - \frac{x(T) \cdot k}{m}$$

$$F = -kv = -k \cdot \left(v_0 - \frac{x(T) \cdot k}{m}\right) = \frac{x(T) \cdot k^2}{m} - kv_0$$

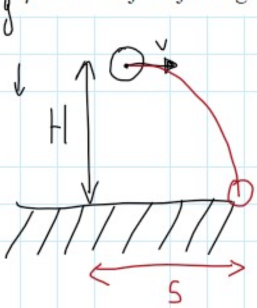
$$W = \int_0^s -x(T) \cdot \frac{k^2}{m} dx + \int_0^s kv_0 \, dx = -\frac{k^2}{m} \cdot \frac{x^2(T)}{2}\Bigg|_0^s + kv_0 \cdot x\Big|_0^s = -\frac{k^2 \cdot s^2}{2m} + kv_0 \cdot s$$

$$s = \lim_{T \to \infty} -\frac{v_0 \cdot m}{k} \cdot e^{-\frac{kT}{m}} + \frac{v_0 \cdot m}{k} = \frac{v_0 \cdot m}{k}$$

$$W = -\frac{\cancel{k^2} \cdot v_0^2 \cdot m^{\cancel{2}}}{\cancel{k^2} \cdot 2\cancel{m}} + \cancel{k} \cdot v_0 \cdot \frac{v_0 \cdot m}{\cancel{k}} = -\frac{v_0^2 m}{2} + v_0^2 m = \frac{v_0^2 m}{2}$$

Zad. 3.

Ciało o masie m zostaje puszczone swobodnie z wysokości H. Jaką pracę wykona poziomy wiar, który działa na ciało siłą zależną od wysokości, nadając mu poziomą prędkość: $v(h) = \beta h$, gdzie $\beta > 0$. W jakiej odległości s od podstawy wieży ciało upadnie na ziemię?



$v(h) = \beta h$, $\beta > 0$

$W = ?$ $s = ?$

$$h(t) = H - \frac{gt^2}{2}$$

$$v(t) = \beta \cdot \left(H - \frac{gt^2}{2}\right)$$

$$h(\tau) = 0 = H - \frac{g\tau^2}{2}$$

$$\tau = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$W = \int_0^s F(x) dx \cdot \frac{dt}{dt} = \int_0^\tau F(t) \cdot \frac{dx}{dt} \cdot dt = \int_0^\tau F(t) \cdot v \, dt$$

$$W = \int_0^\tau F \cdot \beta \cdot \left(H - \frac{gt^2}{2}\right) dt$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\beta g t$$

$$F = am = -\beta g t m$$

$$W = \int_0^\tau (-\beta g t m) \cdot \beta \cdot \left(H - \frac{gt^2}{2}\right) dt$$

$$W = \int_0^\tau -\beta^2 g t m H \, dt + \int_0^\tau \frac{\beta^2 g^2 m t^3}{2} dt$$

$$W = -\beta^2 g m \cdot H \cdot \int_0^{\tau} t\, dt + \frac{\beta^2 g^2 m}{2} \cdot \int_0^{\tau} t^3 dt$$

$$W = -\beta^2 g m H \cdot \frac{\tau^2}{2} + \frac{\beta^2 g^2 m}{2} \cdot \frac{\tau^4}{4}$$

$$W = -\beta^2 \cdot g \cdot m \cdot H \cdot \frac{\cancel{2}H}{\cancel{2}g} + \frac{\beta^2 g^2 m}{2} \cdot \frac{\cancel{4}H^2}{g^2 \cdot \cancel{4}}$$

$$W = \frac{\beta^2 \cdot H^2 \cdot m}{2} - \beta^2 \cdot m \cdot H^2$$

$$W = -\frac{\beta^2 H^2 \cdot m}{2}$$

$$S = \int_0^{\tau} v(t)\, dt = \int_0^{\tau} \beta \cdot \left(H - \frac{gt^2}{2}\right) dt = \beta H \tau - \frac{\beta g \tau^3}{6} = \beta \cdot H \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} - \frac{\beta \cancel{g} \frac{2H}{\cancel{g}} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}}{6}$$

$$S = \beta \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} \cdot \left(H - \frac{H}{3}\right) = \frac{2\beta H}{3} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}}$$