WFI3 - ruch krzywoliniowy

wtorek, 6 maja 2025 00:46

Teoria:

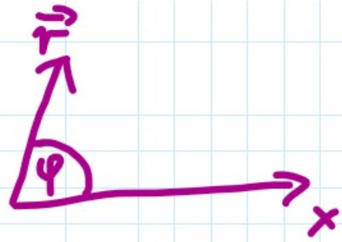
$v_\eta = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_t$

$\vec{a}_{st} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ (styczne)

$\vec{a}_\eta = \frac{\vec{v}^2}{\rho}$ (normalne) ← odśrodkowe/dośrodkowe

$\rho = \frac{ds}{d\varphi}$ ← rho (promień krzywizny toru w danym punkcie)

$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$ $v(t) = \omega\rho$



$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

$v_{radialne} = \frac{dr}{dt}$ ↗ ciało oddala/zbliża się

$v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt} \cdot r$ → ruch wokół środka

transwersalna

$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ → zmiana długości promienia i efekt siły odśrodkowej

$a_\varphi = 2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ → zmiana ruchu kątowego

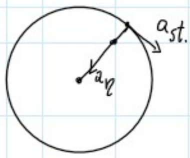
* gdy ciało porusza się po okręgu: $v_r = 0 \Rightarrow v = v_\varphi$

Zad. 1.

Koło o promieniu R obraca się w taki sposób, że kąt obrotu promienia zależy od czasu w następujący sposób: $\varphi(x) = A + Bt + Ct^2$. Dla punktów położonych w odległości $r = \frac{3}{4}R$ od środka koła znaleźć po czasie τ od momentu rozpoczęcia ruchu:

a) wektor prędkości kątowej,
b) wektor prędkość liniowej,
c) składowe przyspieszenia: styczną i normalną do toru oraz
d) wektor przyspieszenia.

a) $\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct$



b) $v(t) = \omega(t) \cdot r = \frac{3R}{4} \cdot (B + 2Ct)$

c) $a_{st.} = ?$ $a_\eta = ?$

$a_{st.} = \frac{dv}{dt} = \frac{3RC}{2}$

$a_\eta = \frac{v^2}{r} = \frac{\frac{9R^2}{16} \cdot (B+2Ct)^2 \cdot 4}{3R} = \frac{9R^2(B+2Ct)^2}{12R} = \frac{3R(B+2Ct)^2}{4}$

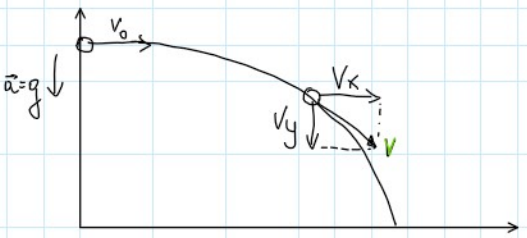
d) $a = \sqrt{a_{st}^2 + a_\eta^2} = \sqrt{\frac{9R^2C^2}{4} + \frac{9R^2(B+2Ct)^4}{16}} = \frac{3R}{2} \cdot \sqrt{C^2 + \frac{(B+2Ct)^4}{4}}$

Zad. 2.

Zad. 2.

Znaleźć przyspieszenie styczne i normalne do toru w rzucie poziomym z prędkością początkową v_0. Ile wynosi promień krzywizny toru?

$a_{st.} = ?$ $a_n = ?$ $\rho = ?$



w poziomie ↔ : jednostajny $\Rightarrow V_x = V_0$

w pionie ↕ : jednostajnie przyspieszony $\Rightarrow V_y = 0 - gt$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{V_0^2 + g^2t^2}$$

$$a_{st.} = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} \cdot 2g^2t = \frac{g^2t}{\sqrt{v_0^2 + g^2t^2}} = \frac{g^2t}{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{st} + \vec{a}_n$$

$$g = \sqrt{\frac{g^4t^2}{v^2} + a_n^2}$$

$$g^2 = \frac{g^4t^2}{v^2} + a_n^2 \Rightarrow a_n = g\sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{v^2}} = g \cdot \sqrt{1 - \frac{g^2t^2}{v_0^2 + g^2t^2}} = g \cdot \sqrt{\frac{v_0^2}{v_0^2 + g^2t^2}} = g \cdot \sqrt{\frac{v_0^2}{v^2}}$$

$$a_n = g \cdot \frac{v_0}{v}$$

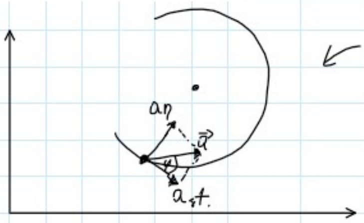
$$\frac{v^2}{\rho} = g \cdot \frac{v_0}{v} \Rightarrow \rho = \frac{v^3}{g \cdot v_0}$$

Zad. 3.

Ćma porusza się po krzywej, której długość jest dana wzorem: $s(t) = s_0 e^{ct}$, gdzie s_0, c stałe. Wiedząc, że w każdym punkcie toru wektor przyspieszenia $\vec{a}$ tworzy stały kąt φ ze styczną do toru znajdź wartości:

a) prędkości,
b) składowych przyspieszenia: stycznej i normalnej do toru,
c) promień krzywizny toru.

Dane: $s(t) = s_0 \cdot e^{ct}$; s_0, c, φ



kąt jest stały → ruch po okręgu

a) $v(t) = ?$

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d s_0 \cdot e^{ct}}{dt} = c \cdot s_0 \cdot e^{ct}$$

b) $a_{st.} = ?$ $a_n = ?$

$$a_{st} = \frac{dv}{dt} = \frac{d\, c \cdot s_0 \cdot e^{ct}}{dt} = c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct}$$

$$\sin\varphi = \frac{a_n}{a} \qquad \cos\varphi = \frac{a_{st.}}{a}$$

$$a_n = a \cdot \sin\varphi \qquad a = \frac{a_{st.}}{\cos\varphi} = \frac{c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct}}{\cos\varphi}$$

$$a_n = \frac{c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct} \cdot \sin\varphi}{\cos\varphi} = c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct} \cdot \mathrm{tg}\varphi = a_{st.} \cdot \mathrm{tg}\varphi$$

$$a_n = \frac{v^2(t)}{\rho} = c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct} \cdot \mathrm{tg}\varphi$$

$$a_n = \frac{c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct} \cdot \sin\varphi}{\cos\varphi} = c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct} \cdot tg\varphi = a_{st} \cdot tg\varphi$$

$$a_n = \frac{v^2(t)}{\rho} = c^2 \cdot s_0 \cdot e^{ct} \cdot tg\varphi$$

$$\frac{\cancel{c^2} \cdot s_0^{\cancel{2}} \cdot e^{2ct}}{\rho} = \cancel{c^2} \cdot \cancel{s_0} \cdot e^{ct} \cdot tg\varphi$$

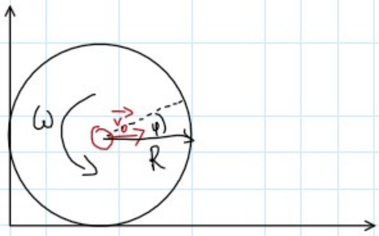
$$\rho = s_0 \cdot e^{ct} \cdot ctg\varphi$$

Zad. 5. !

Kolista tarcza o promieniu R wiruje wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω. Ze środka tarczy wyrusza biedronka i porusza się wzdłuż promienia ze stałą prędkością v_0. Znaleźć:

a) równanie ruchu i toru biedronki w nieruchomym układzie odniesienia we współrzędnych kartezjańskich i biegunowych,
b) zależność od czasu wartości wektora prędkości $v(t)$ oraz jego składowych: radialnej i transwersalnej,
c) zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia $a(t)$ oraz jego składowych: radialnej i transwersalnej,
d) zależność od czasu składowych normalnej i stycznej do toru przyspieszenia,
e) całkowitą drogę przebytą przez biedronkę względem tarczy,
f) całkowitą długość drogi przebytej przez biedronkę w czasie t względem nieruchomego układu odniesienia.

Dane: R, ω, v_0



a) biegunowy:

$$v_0 = \frac{dr}{dt} = v_r = \frac{r}{t} \Rightarrow r(t) = v_0 \cdot t$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \varphi(t) = \omega t$$

} równania ruchu

kartezjański:

$$x = r \cdot \cos\varphi \qquad \varphi(t) = \omega t \qquad r(t) = v_0 \cdot t$$

$$x(t) = v_0 t \cdot \cos(\omega t)$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$y(t) = v_0 \cdot t \cdot \sin(\omega t)$$

} równania ruchu

równania toru:

biegunowy: $r(\varphi) = ?$

$$r = v_0 \cdot t$$

$$\varphi = \omega t \Rightarrow t = \frac{\varphi}{\omega} \qquad \Rightarrow \varphi = \frac{r \cdot \omega}{v_0}$$

$$r(\varphi) = v_0 \cdot \frac{\varphi}{\omega}$$

kartezjański: $\frac{x}{y} = ?$

$$\frac{x}{y} = \frac{v_0 \cdot t \cdot \cos(\omega t)}{v_0 \cdot t \cdot \sin(\omega t)} = ctg(\underbrace{\omega t}_{\varphi})$$

$$\frac{x}{y} = ctg\left(\frac{\omega \cdot r}{v_0}\right) = ctg\left(\frac{\omega \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{v_0}\right)$$

b) $v_r = ?$ $v_\varphi = ?$ $v = ?$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = v_0$$

$$v_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\cdot r(t) = \omega \cdot r(t) = \omega \cdot v_0 \cdot t$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{v_0^2 + \omega^2 v_0^2 t^2} = v_0 \cdot \sqrt{1+\omega^2 t^2}$$

c) $a_r = ?$ $a_\varphi = ?$ $a = ?$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\cdot\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{dv_0}{dt} - r\omega^2 = 0 - v_0\cdot t\cdot \omega^2 = -v_0\cdot t\cdot\omega^2$$

$$a_\varphi = 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2v_0\cdot\omega + r\frac{d\omega}{dt} = 2v_0\cdot\omega$$

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\varphi^2} = \sqrt{4v_0^2\omega^2 + v_0^2\omega^4 t^2} = v_0\omega\cdot\sqrt{4+t^2\omega^2}$$

d) $a_{st.}(t) = ?$ $a_\eta(t) = ?$

$$a_{st.} = \frac{dv}{dt} = \frac{d v_0\sqrt{1+\omega^2 t^2}}{dt} = \frac{v_0\cdot 2\omega^2 t\cdot 1}{2\sqrt{1+\omega^2 t^2}} = \frac{v_0\omega^2 t}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

$$a_\eta = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a_\eta^2 + a_{st.}^2 = a^2 \Rightarrow a_\eta = \sqrt{a^2 - a_{st}^2}$$

$$a_\eta = \sqrt{v_0^2\omega^2(4+t^2\omega^2) - \frac{v_0^2\omega^4 t^2}{1+\omega^2 t^2}} = \sqrt{v_0^2\omega^2\cdot 4 + v_0^2\omega^4 t^2 - \frac{v_0^2\omega^4 t^2}{1+\omega^2 t^2}}$$

$$a_\eta = \sqrt{v_0^2\omega^2\cdot\left[4+\omega^2 t^2 - \frac{\omega^2 t^2}{1+\omega^2 t^2}\right]} = v_0\cdot\omega\cdot\sqrt{\frac{4+4\omega^2 t^2 + \omega^2 t^2 + \omega^4 t^4 - \omega^2 t^2}{1+\omega^2 t^2}}$$

$$a_\eta = v_0\cdot\omega\cdot\sqrt{\frac{4+4\omega^2 t^2+\omega^4 t^4}{1+\omega^2 t^2}} = v_0\cdot\omega\cdot\sqrt{\frac{(\omega^2 t^2+2)^2}{1+\omega^2 t^2}}$$

$$a_\eta = \frac{v_0\cdot\omega\cdot(2+\omega^2 t^2)}{\sqrt{1+\omega^2 t^2}}$$

e) $L = ?$ (względem tarczy)

$$L = \int_0^t v_0\, dt = v_0\cdot t$$

f) $s = ?$ (względem obserwatora)

f) $s = ?$ (względem obserwatora)

$$s = \int_0^t v\,dt = \int_0^t v_0 \cdot \sqrt{1+(\omega t)^2}\,dt = \ldots$$