[MAT3] - 27 - Przekształcenia liniowe

Zad. 1.

Które z następujących przekształceń są liniowe?

(a) $F: R^2 \to R^3$, $F([x_1, x_2]) = [x_1 x_2, 0, 0]$

$F: U \to W$: liniowe, gdy:

1) $\forall u, v \in V \quad : \quad F(u+v) = F(u) + F(v)$

2) $\forall u \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad : \quad F(\alpha u) = \alpha F(u)$

2) $F(\alpha u) = F([\alpha x_1, \alpha x_2]) = [\alpha^2 x_1 x_2, 0, 0]$

$\alpha F(u) = \alpha \cdot F([x_1, x_2]) = \alpha \cdot [x_1 \cdot x_2, 0, 0] = [\alpha x_1 \cdot x_2, 0, 0]$

$[\alpha^2 x_1 x_2, 0, 0] \neq [\alpha x_1 \cdot x_2, 0, 0]$ dla $\alpha \neq 0 \wedge \alpha \neq 1$

NIE JEST LINIOWE

(b) $F: R^2 \to R^3$, $F([x_1, x_2]) = [x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1]$

$u = [x_1, x_2]$, $v = [y_1, y_2]$

$F(u) = F([x_1, x_2])$

1) $F(u) + F(v) = [x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1] + [y_1 + 2y_2, y_1 - y_2, y_1]$

$= [x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2), x_1 + y_1 - x_2 - y_2, x_1 + y_1]$

$F(u+v) = F([x_1 + y_1, x_2 + y_2]) = [x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2, x_1 + y_1 - x_2 - y_2, x_1 + y_1]$

✓

2) $\alpha F(u) \overset{?}{=} F(\alpha u)$

$F(\alpha u) = F([\alpha x_1, \alpha x_2]) = [\alpha x_1 + 2\alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_1]$

$\alpha F(u) = \alpha \cdot F([x_1, x_2]) = \alpha \cdot [x_1 + 2x_2, x_1 - x_2, x_1] = [\alpha x_1 + 2\alpha x_2, \alpha x_1 - \alpha x_2, \alpha x_1]$

✓

JEST LINIOWE

(c) $F: R^3 \to R^2$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + 2, x_2]$

$u = [x_1, x_2, x_3]$
$v = [y_1, y_2, y_3]$

1) $F(u+v) \overset{?}{=} F(u) + F(v)$

$F(u) + F(v) = F([x_1, x_2, x_3]) + F([y_1, y_2, y_3]) = [x_1+2, x_2] + [y_1+2, y_2]$
$= [x_1+y_1+4, x_2+y_2]$

$F(u+v) = F([x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3]) = [x_1+y_1+2, x_2+y_2]$

NIE JEST LINIOWE

(d) $F: R^3 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1x_2, x_1, x_3]$

$u = [x_1, x_2, x_3)$
$v = [y_1, y_2, y_3]$

1) $F(u+v) \overset{?}{=} F(u) + F(v)$

$F(u) + F(v) = F([x_1, x_2, x_3]) + F([y_1, y_2, y_3])$
$= [x_1x_2, x_1, x_3] + [y_1y_2, y_1, y_3) = [x_1x_2 + y_1y_2, x_1+y_1, x_3+y_3]$

$F(u+v) = F([x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3]) = [(x_1+y_1)(x_2+y_2), x_1+y_1, x_3+y_3]$

$F(u+v) \neq F(u) + F(v)$

NIE JEST LINIOWE

Zad. 2.

Niech $F: C \to C$, $F(z) = \overline{z}$. Pokazać, że F jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $C(\mathbb{R})$. Czy F jest przekształceniem liniowym przestrzeni wektorowej $C(\mathbb{C})$?

$C(\mathbb{R})$:

$F(z) = \overline{z}$

1) $F(z_1) + F(z_2) \stackrel{?}{=} F(z_1 + z_2)$

$F(z_1) + F(z_2) = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

$F(z_1 + z_2) = \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$

$F(z_1) + F(z_2) = F(z_1 + z_2)$ ✓

2) $F(\alpha z) \stackrel{?}{=} \alpha F(z)$ $\qquad \alpha \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} F(\alpha z) = \overline{\alpha}\,\overline{z} = \alpha \overline{z} \\ \alpha F(z) = \alpha \overline{z} \end{array}\right\}$$ w części rzeczywistej się nic nie zmienia

JEST LINIOWYM

$C(\mathbb{C})$: $\qquad \alpha \in \mathbb{C}$

2) $F(\alpha z) \stackrel{?}{=} \alpha F(z)$

$F(\alpha z) = \overline{\alpha}\,\overline{z}$

$\alpha F(z) = \alpha \cdot \overline{z}$

np. dla $\alpha = i$

$F(\alpha z) = \overline{i}\,\overline{z} = -i\overline{z}$

$\alpha F(z) = i\overline{z}$ $\qquad \neq$

NIE JEST LINIOWYM

Zad. 3.

Przekształcenie liniowe $F\colon Z_7^2 \to Z_7^2$ dane jest przez przyporządkowanie $[1,5] \mapsto [3,5]$ oraz $[3,4] \mapsto [5,6]$. Dla dowolnego wektora $v = [x_1, x_2] \in Z_7^2$ obliczyć $F(v)$.

$$F([1,5]) = [3,5] \qquad F([3,4]) = [5,6] \qquad F([x_1,x_2]) = ?$$

$$F([1,5]) = 3\cdot[1,0] + 5\cdot[0,1]$$

$$\mathcal{B} = ([1,5],[3,4])$$

macierz przekształceń

$$A\cdot\begin{bmatrix}1&3\\5&4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&5\\5&6\end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}3&5\\5&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3\\5&4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\5&4&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{r_2+2r_1} \left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&3&2&1\end{array}\right] \xrightarrow{r_2\cdot(5)} \left[\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&3&5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1-3r_2} \left[\begin{array}{cc|cc}1&0&6&6\\0&1&3&5\end{array}\right]$$

$$A = \begin{bmatrix}3&5\\5&6\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}6&6\\3&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{bmatrix}6&6\\3&5\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}3&5\\5&6\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}5&1\\6&4\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\underbrace{F(v) = [5x_1 + x_2,\ 6x_1 + 4x_2]}$$

Zad. 5.

Dla każdego z podanych przekształceń liniowych F wyznaczyć macierz przekształcenia w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni wektorowych. Podać bazy i wymiary podprzestrzeni jądra $KerF$ i obrazu ImF.

(a) $F : R^3 \to R^2$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3]$

bazy standardowe: $\underbrace{[1,0,0]}_{u}, \underbrace{[0,1,0]}_{v}, \underbrace{[0,0,1]}_{w}$

$$F(u) = F([1,0,0]) = [1,0]$$
$$F(v) = F([0,1,0]) = [1,1]$$
$$F(w) = F([0,0,1]) = [0,1]$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jądro KerF – zbiór wszystkich wektorów takich, że $F(u) = [0,0,..]$

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$ $\quad\quad x_1 = t$

$x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = x_1$

$$[x_1, x_2, x_3] = t[1, -1, 1]$$

$$\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}\cdot\underbrace{([1,-1,1])}_{\text{baza}}$$

$\dim \operatorname{Ker} F = 1$

$\dim \operatorname{Ker} F + \dim \operatorname{Im} F = 3 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} F = 2$

baza $\rightarrow$ $\operatorname{Im} F = \mathcal{L}([1,0], \cancel{[1,1]}, [0,1])$

liniowo zależny

$\dim \operatorname{Im} F = 2 \rightarrow$ dwa wektory w bazie

(b) $F: R^3 \to R^4$, $F([x_1, x_2, x_3]) = [2x_1 - x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 - x_3, -x_1 + 3x_2 - 2x_3, 8x_1 + x_2 + x_3]$

baza standardowa: $[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]$

$F([1,0,0]) = [2, 1, -1, 8]$

$F([0,1,0]) = [-1, 2, 3, 1]$

$F([0,0,1]) = [1, -1, -2, 1]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jądro $\operatorname{Ker} F$:

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 8 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 8x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_3 + r_1 \\ r_4 - 8r_1}]{r_2 - 2r_1} \begin{array}{cccc} & & t & \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{-3} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{-15} & \cancel{9} & \cancel{0} \end{array}\right] \end{array}$$

$-5x_2 + 3t = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{3t}{5} = 3k$ $\qquad t = 5k \qquad , t, k \in \mathbb{R}$

$x_1 + 6k - 5k = 0 \Rightarrow x_1 = -k$

$$\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}\left(\underbrace{[-1, 3, 5]}_{baza}\right)$$

$\dim \operatorname{Ker} F = 1$

$\dim \operatorname{Im} F = 2$

$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}\left([2, 1, -1, 8], [-1, 2, 3, 1]\right)$

(c) $F : R^2 \to R^2$, $F([x_1, x_2]) = [2x_1 - x_2, 3x_2 - 6x_1]$

baza standardowa: $[1,0], [0,1]$

$F([1,0]) = [2, -6]$

$F([0,1]) = [-1, 3]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$Ax = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 \\ \cancel{-6x_1 + 3x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$2x_1 - x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2x_1$$

$$\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}([1,2])$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = 1$$

$$\begin{array}{ccc} & t & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ \cancel{-6} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$\operatorname{Im} f = \mathcal{L}([2,-6])$$

$$\dim \operatorname{Im} F = 1$$

$$\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} F = 2 \quad \checkmark$$

(d) $F : R^4 \to R^5$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4, x_3, x_1]$

baza standardowa: $[1,0,0,0], [0,1,0,0], [0,0,1,0], [0,0,0,1]$

$f([1,0,0,0]) = [1,0,0,0,1]$

$F([0,1,0,0]) = [1,1,0,0,0]$

$F([0,0,1,0]) = [0,1,1,1,0]$

$F([0,0,0,1]) = [0,0,1,0,0]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \\ x_3 + x_4 \\ x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = x_4 = 0$

$$\operatorname{Ker} f = \mathcal{L}([0,0,0,0])$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = 0$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_5 - r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_5 + r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \\ r_4 - r_3 \\ \longrightarrow \\ r_5 - r_3 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}([1,0,0,0,1],[1,1,0,0,0],[0,1,1,1,0],$$
$$[0,9,1,0,0])$$

$$\dim \operatorname{Im} F = 4$$

(e) $F: R^4 \to R^3$, $F([x_1, x_2, x_3, x_4]) = [2x_1 + x_3, 2x_2 - x_4, x_3 + 2x_4]$

baza standardowa: $[1,0,0,0],[0,1,0,0],[0,0,1,0][0,0,0,1]$

$F([1,0,0,0]) = [2,0,0]$

$F([0,1,0,0]) = [0,2,0]$

$F([0,0,1,0]) = [1,0,1]$

$F([0,0,0,1]) = [0,-1,2]$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 \\ 2x_2 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|c} & & & t & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

$x_3 + 2t = 0 \Rightarrow x_3 = -2t$

$2x_2 - t = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{t}{2}$

$2x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 2t = 0 \Rightarrow x_1 = t \qquad x_4 = t$

$\operatorname{Ker} F = \mathcal{L}\left(\left[1, \frac{1}{2}, -2, 1\right]\right) \qquad \dim \operatorname{Ker} F = 1$

$\operatorname{Im} F = \mathcal{L}\left([2,0,0], [0,2,0], [1,0,1]\right)$

$\dim \operatorname{Im} F = 3$

$\dim \operatorname{Im} F + \dim \operatorname{Ker} F = 3 + 1 = 4$ ✓