# [MAT3] - Z6 - Przestrzenie wektorowe

## Zad. 1.

Które z podanych zbiorów są podprzestrzeniami odpowiednich przestrzeni wektorowych:

u, v W

(a) $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

1. Warunek zerowy $(0_v \in W)$
2. Dodawanie (jeśli $u, v \in W$ to $u + v \in W$)
3. Mnożenie przez skalar $(\alpha \cdot u \in W)$

1. $0 \geq 0 \quad \wedge \quad 0 \geq 0$ GIT
2. $x_1, y_1 \geq 0 \quad \wedge \quad x_2, y_2 \geq 0$

$$[\underbrace{x_1 + x_2}_{\geq 0}, \underbrace{y_1 + y_2}_{\geq 0}]$$ GIT

3. np. $\alpha = -2$ i $u = [0, 1]$

$$-2 \cdot [0, 1] = [0, \underbrace{-2}_{<0}]$$

$-2 < 0$

NIE GIT

(b) $\{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid yz \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$

1. $0 \cdot 0 \leq 0$ ✓ GIT
2. $y_1 z_1 \leq 0 \quad \wedge \quad y_2 z_2 \leq 0$

$$\underbrace{[0, 1, 0]}_{1 \cdot 0 \leq 0} + \underbrace{[0, 0, 1]}_{0 \cdot 1 \leq 0} = \underbrace{[0, 1, 1]}_{1 \cdot 1 > 0}$$

NIE GIT

(c) $\{A \in M_2^2(\mathbb{R}) \mid Det A = 0\} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad ad - bc = 0$$

$\mathbb{R}$

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad Det(A) = 0$ ✓ GIT

2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = C$

$\det(C) = -1$ NIE GIT

(d) $\{ \begin{pmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{pmatrix} \in M_2^2(\mathbb{R}) \mid x, y \in \mathbb{R} \} \subseteq M_2^2(\mathbb{R})$

1. $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2^2(\mathbb{R})$ ✓ GIT

2. $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_1+y_1 & 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x_2+y_2 & 2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 & y_1+y_2 \\ x_1+x_2+y_1+y_2 & 2(x_1+x_2) \end{bmatrix}$ ✓ GIT

3. $\alpha \begin{bmatrix} x & y \\ x+y & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x & \alpha y \\ \alpha x + \alpha y & 2\alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{bmatrix}$ $\quad a = \alpha x \in \mathbb{R}$, $b = \alpha y \in \mathbb{R}$ ✓ GIT

(e) $\{ f \in \mathbb{R}[x] \mid st\, f = 2k,\ k \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathbb{R}[x]$

$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^{2k}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

1. $f(0) = a \Rightarrow st\, f = 2k$ GIT

2. $f_1(x) = 1 + x + x^2$

$f_2(x) = -x^2$

$f_1(x) + f_2(x) = 1 + x \Rightarrow st\, f \neq 2k$ NIE GIT

## Zad. 3.

Zbadać liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach wektorowych. Które z następujących układów wektorów stanowią bazy odpowiednich przestrzeni wektorowych.

(a) $[1, 3, 5]$, $[2, 9, 13]$, $[4, 9, 17]$ w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$

$\alpha \cdot [1, 3, 5] + \beta [2, 9, 13] + \gamma [4, 9, 17] \overset{?}{=} [0, 0, 0]$

$$\begin{cases} \alpha+2\beta+4\gamma=0 \\ 3\alpha+9\beta+9\gamma=0 \\ 5\alpha+13\beta+17\gamma=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 5 & 13 & 17 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{-3} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$\beta=\gamma$$

$$\alpha+2\beta+4\gamma=0$$

$$\alpha+6\gamma=0$$

$$\alpha=-6\gamma$$

$$(\alpha,\beta,\gamma)=(-6\gamma,\gamma,\gamma)$$

$$(-6,1,1)\neq(0,0,0)$$

LINIOWO ZALEŻNY

NIE JEST BAZĄ

(b) $[5,4,1]$, $[4,3,2]$, $[7,7,-6]$ w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$

$$\alpha[5,4,1]+\beta[4,3,2]+\gamma[7,7,-6]=[0,0,0]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ 1 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3<=>r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 0 \\ 5 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3-5r_1]{r_2-4r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 31 & 0 \\ 0 & -6 & 37 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-\frac{6}{5}r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -6 & 0 \\ 0 & -5 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\gamma=0$$

$$-5\beta=0 \Rightarrow \beta=0$$

$$\alpha=0$$

LINIOWO NIEZALEŻNY SĄ BAZĄ

(c) $[1,1,0]$, $[4,3,1]$, $[1,4,2]$ w przestrzeni $Z_5^3(Z_5)$

$$\alpha[1,1,0]+_5\beta[4,3,1]+_5\gamma[1,4,2]=[0,0,0]$$

$$\begin{cases} \alpha +_5 4\beta +_5 \gamma = 0 \\ \alpha +_5 3\beta +_5 4\gamma = 0 \\ \quad +_5 \beta +_5 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 + r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 \cdot 4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$t_1$

$$\beta + 2t_1 = 0 \Rightarrow \beta = -2t_1 = 3t_1$$

$$\alpha + 12t_1 + t_1 \Rightarrow \alpha = -13t_1 = 2t_1$$

np. dla $t = 1$

$$(2, 3, 1) \neq (0, 0, 0)$$

LINIOWO ZALEŻNY

NIE SĄ BAZĄ

(d) $[0, 0, 1]$, $[4, 0, 4]$, $[3, 4, 3]$ w przestrzeni $Z_5^3(Z_5)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$$4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0$$

$$\beta = 0$$

$$\alpha = 0$$

LINIOWO NIEZALEŻNY

$$(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$$

SĄ BAZĄ

(e) $p_1 = x^2 - 1$, $p_2 = x + 1$, $p_3 = -x^2 + 2x + 3$, $p_4 = -2x + 3$ w $R_2[x](\mathbb{R})$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{0} \\ 0 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

LINIOWO ZALEŻNY

NIE SĄ BAZĄ

$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ dim=4

(f) $A_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$ w $M_2^2(R)(\mathbb{R})$

$\to$ mamy tylko 2 wektory, więc nie można nimi wygenerować wszystkiego

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha&0\\0&\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0&-\beta\\-\beta&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}$$

$$\alpha=0 \wedge \beta=0$$

LINIOWO NIEZALEŻNY NIE SĄ BAZĄ

(g) $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ w $M_2^2(R)(\mathbb{R})$,

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha&-\beta\\\gamma&-\delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$$

LINIOWO NIEZALEŻNY SĄ BAZĄ

(h) $f_1 = 1,\ f_2 = \underbrace{\sin^2 x,\ f_3 = \cos^2 x}_{1}$, w przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze $R$

zależne

LINIOWO ZALEŻNE NIE SĄ BAZĄ

(i) $f_1 = 1,\ f_2 = e^x,\ f_3 = e^{-x}$ w przestrzeni funkcji ciągłych na zbiorze $R$

dim=+∞

$e^{\ln x} = x$

$$\alpha + \beta e^x + \gamma e^{-x} = 0$$

dla $x=0$:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

dla $x=\ln 2$:
$$\alpha + 2\cdot\beta + \gamma\cdot\tfrac{1}{2} = 0$$

dla $x=\ln 4$:
$$\alpha + 4\beta + \tfrac{1}{4}\gamma = 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 4 & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 - r_1]{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & -\frac{3}{4} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{array}\right]$$

LINIOWO NIEZALEŻNY

3 wektory nie mogą tworzyć całej przestrzeni

$\Rightarrow$ NIE SĄ BAZĄ P

## Czym jest baza?

- można nią wygenerować wszystko z przestrzeni
- układ liniowo NIEZALEŻNY

## Czym jest wymiar?

- liczba wektorów w określonej przestrzeni

Przykłady:

- $\mathbb{R}^2$ dim=2 typowa baza: $\{(1,0),(0,1)\}$
- $\mathbb{R}^3$ dim=3 -||- -||- : $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
- $\mathbb{R}_2[x]$ dim=3 -||- -||- : $\{1,x,x^2\}$

## Zad.5.

Znaleźć współrzędne wektorów: nowa baza i chcemy otrzymać wektor v

(a) $v = [-2, 5, 6]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[1, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 0, 1]\}$ przestrzeni wektorowej $R^3(\mathbb{R})$,

$$\alpha[1,0,0] + \beta[0,1,0] + \gamma[0,0,1] = [-2,5,6]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$\alpha = -2$

$\beta = 5$

$\gamma = 6$

$$[v]_B = [-2,5,6]$$

(b) $v = [-2, 5, 6]$ w bazie $\mathcal{B} = \{[1, 1, 0], [2, 1, 0], [3, 3, 1]\}$ przestrzeni wektorowej $R^3(\mathbb{R})$,

$$\alpha[1,1,0] + \beta[2,1,0] + \gamma[3,3,1] = [-2,5,6]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$$

$\gamma = 6$

$\beta = -7$

$\alpha - 14 + 18 = -2 \Rightarrow \alpha = -6$

$$[v]_B = [-6,-7,6]$$

(c) $p = x + x^2$ w bazie $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - x, 1 + x + x^2\}$ przestrzeni wektorowej $R_2[x](\mathbb{R})$.

$$\alpha(x+1) + \beta(1-x) + \gamma(x^2+x+1) = x^2+x$$

$$x^2+x = \gamma x^2 + (\gamma + \alpha - \beta)x + (\alpha + \gamma + \beta)$$

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ \alpha - \beta + 1 = 1 \\ \alpha + \beta = -1 \end{cases}$$

$\alpha - \beta = 0$

$\alpha + \beta = -1 \quad /-$

$-2\beta = 1$

$\beta = -\frac{1}{2}$ $\qquad \gamma = \beta = -\frac{1}{2}$

$[v]_B = \left[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right]$

## Zad. 6.

4 współrzędne

Dla $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \in M_2^4(Z_5)$ znaleźć bazę podprzestrzeni $Rozw(A|0_4^1)$ przestrzeni wektorowej $Z_5^4(Z_5)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \cdot 3} \begin{array}{cccc} & & t_1 & t_2 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$x_2 + 3t_1 + 2t_2 = 0 \implies x_2 = 2t_1 + 3t_2$

$x_1 + 4(2t_1 + 3t_2) + 2t_2 = 0$

$x_1 + 3t_1 + 4t_2 = 0 \implies x_1 = 2t_1 + t_2$

$$\begin{cases} x_1 = 2t_1 + t_2 \\ x_2 = 2t_1 + 3t_2 \\ x_3 = t_1 \\ x_4 = t_2 \end{cases} , \quad t_1, t_2 \in \mathbb{Z}_5$$

$Rozw.(A|0_4^1) = \{X \in M_4^1(\mathbb{Z}_5) \mid A \cdot x = 0_4^1\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = X = \begin{bmatrix} 2t_1 + t_2 \\ 2t_1 + 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t_1 \\ 2t_1 \\ t_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_2 \\ 3t_2 \\ 0 \\ t_2 \end{bmatrix} = t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \left( \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

## Zad. 7.

Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni wektorowych nad ciałem $\mathbb{R}$:

(a) $\{[2x, x+y, 3x-y, x-2y] \in R^4 \mid x, y \in R\}$

$$x[2,1,3,1] + y[0,1,-1,-2]$$

$$\mathcal{B} = ([2,1,3,1],[0,1,-1,-2])$$

$\dim = 2$

(b) $\{[x, y, z, t] \in R^4 \mid x + y = z - y\}$

$$x = -2y + z$$

$$[-2y+z, y, z, t] = y[-2,1,0,0] + z[1,0,1,0] + t[0,0,0,1]$$

$$\mathcal{B} = ([-2,1,0,0],[1,0,1,0],[0,0,0,1])$$

$\dim = 3$

(c) $\{p \in R_3[x] \mid p(0) + p(1) = 0\}$

$$\{p \in ax^3 + bx^2 + cx + d \mid p(0) + p(1) = 0\}$$

$$d + a + b + c + d = 0 \Rightarrow a = -b - c - 2d$$

$$[-b-c-2d, b, c, d] = b[-1,1,0,0] + c[-1,0,1,0] + d[-2,0,0,1]$$

$$\mathcal{B} = ([-1,1,0,0],[-1,0,1,0],[-2,0,0,1])$$

$\dim = 3$

$\mathcal{L}$ - zbiór wszystkich kombinacji liniowych określonych wektorów

(d) $\mathcal{L}([1,1,-1,3],[1,8,6,-4],[1,7,5,-3],[2,8,7,1])$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 8 & 7 & 8 \\ -1 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 6 \\ 0 & 7 & 6 & 9 \\ 0 & -7 & -6 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4+r_2]{r_3-r_2} \begin{array}{cccc} \text{kol1} & \text{kol2} & & \text{kol4} \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{B} = ([1,1,-1,3],[1,8,6,-4],[2,8,7,1])$$

$\dim = 3$

piwoty są w kolumnach 1,2,4, więc usuwamy kolumnę 3

## Zad. 8.

Dla podprzestrzeni $U = \mathcal{L}([5,1,-3,0],[17,0,-7,1])$ oraz $W = \mathcal{L}([1,2,3,4],[5,8,1,7])$ przestrzeni wektorowej $R^4(\mathbb{R})$ znaleźć wymiary podprzestrzeni $U+W$ i $U \cap W$.

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

$\dim U = 2$

$\dim W = 2$

$$U+W = \mathcal{L}([5,1,-3,0],[17,0,-7,1],[1,2,3,4],[5,8,1,7])$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 17 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 8 \\ -3 & -7 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3+\frac{3}{5}r_1]{r_2-\frac{1}{5}r_1} \begin{bmatrix} 5 & 17 & 1 & 5 \\ 0 & -\frac{17}{5} & \frac{9}{5} & 7 \\ 0 & \frac{16}{5} & \frac{18}{5} & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3\cdot 5]{r_2\cdot 5} \begin{bmatrix} 5 & 17 & 1 & 5 \\ 0 & -17 & 9 & 35 \\ 0 & 16 & 18 & 20 \\ 0 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+\frac{1}{17}r_2]{r_3+\frac{16}{17}r_2} \begin{bmatrix} 5 & 17 & 1 & 5 \\ 0 & -17 & 9 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \end{bmatrix}$$

$\dim(U+W) = 3$

$$3 = 2 + 2 - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U \cap W) = 1$$