[F122] - Pola sił - Z1

$\nabla T = \text{grad}\,T$

$\nabla \cdot \vec{A} = \text{div}\,\vec{A}$

funkcja $\nabla \times \vec{A} = \text{rot}\,\vec{A}$

$$\nabla \circ \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

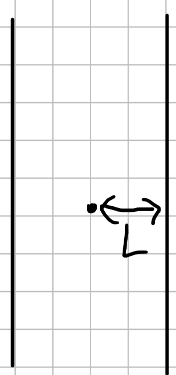
$$= \left[\underbrace{\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}}_{x}, \underbrace{\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}}_{y}, \underbrace{\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}}_{z}\right]$$

Zad 1.

Rozkład prędkości prądu w rzece w funkcji odległości od środka rzeki, dany jest wzorem : $v(x) = v_0\left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$, gdzie L – odległość od środka do brzegu rzeki. Scharakteryzować powyższe pole prędkości (opisie rotacji i dywergencji). Odp. $div\vec{v} = 0; rot\vec{v} = [0,0,\frac{\mp v_0}{L}]$

$$v(x) = v_0\left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$$

L - odległość od środka do brzegu rzeki



$$\begin{array}{cccc} & v_x & v_y & v_z \\ \vec{v}(x) = & \Big[0, & v_0\left(1 - \frac{|x|}{L}\right), & 0\Big] \end{array}$$

$$\text{div}\,\vec{v} = 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\text{rot}\,\vec{v} = \left[0 - 0, 0 - 0, \frac{\partial A_y}{\partial x} - 0\right]$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x}$$

dla $x > 0$: $v_y = v_0\left(1 - \frac{x}{L}\right) = v_0 - \frac{v_0 \cdot x}{L}$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = -\frac{v_0}{L}$$

dla $x<0$: $v_y = v_0\left(1+\frac{x}{L}\right)$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{v_0}{L}$$

zatem: $\frac{\partial A_y}{\partial x} = \pm \frac{v_0}{L}$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \left[0, 0, \pm\frac{v_0}{L}\right]$$

Zadanie 3

Która z następujących sił działających w dwóch wymiarach jest zachowawcza, a która nie? Załóż, że a i b to stałe o odpowiednich jednostkach:

a) $\vec{F}=(axy^3, ax^3y)$

b) $\vec{F} = \left(\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

Siła zachowawcza – praca nie zależy od trasy, tylko od punktu startowego i końcowego

$\nabla\times\vec{A}=0 \Rightarrow$ jest zachowawcze

a) $\vec{F} = (axy^3, ax^3y, 0)$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = [0-0, 0-0, \underbrace{3ax^2y - 3axy^2}_{\neq 0}]$$

NIE JEST ZACHOWAWCZA

b) $\vec{F} = \left(\frac{ax}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{ay}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0\right)$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \left[0-0, 0-0, \frac{0\cdot\sqrt{x^2+y^2} - \frac{ay\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} - \frac{0-\frac{ax\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\right]$$

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left[0, 0, \frac{\frac{-axy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{axy}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}\right] = [0, 0, 0]$$

JEST ZACHOWAWCZA