Kinematyka

K1. Opis ruchu w układzie biegunowym, ruch po okregu jako specjalny przypadek ruchu krzywolinowego.

Położenie punktu określamy przez jego odległość od środka r oraz kąt φ.

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$v_{rad.} = \frac{dr}{dt}$ → ciało oddala/zbliża się

$v_\varphi = \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega} \cdot r$ → ruch wokół środka

$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ → zmiana długości promienia i efekt siły dośrodkowej

$a_\varphi = 2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ → zmiana ruchu kątowego

Gdy ciało porusza się po okręgu:

$v_r = 0 \Rightarrow v = v_\varphi$

K2. Podaj treść transformacji Galileusza.

Mówi jak współrzędne zdarzenia zmieniają się przy przejściu z jednego inercjalnego układu odniesienia do drugiego, poruszającego się ze stałą prędkością V wzdłuż osi Ox.

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

(x, y, z) - układ nieruchomy

(x', y', z') - układ ruchomy

Czas płynie tak samo dla wszystkich!

Ale, ale! Nie dla prędkości bliskich c!

Dynamika

D1. Zdefiniuj i wymień znane Ci siły pozorne. Z jakich oddziaływań fizycznych wynikaja.

Siły pozorne – w nieinercjalnych układach odniesienia; wynikają z przyspieszenia układu odniesienia

- siła bezwładności – związana z przyspieszeniem liniowym układu odniesienia $F_b = -m a_0$
- siła odśrodkowa – skierowana na zewnątrz, prostopadle do osi obrotu $F_{od} = m\omega^2 R$
- siła Coriolisa – działa na ciała w obracającym się układzie odniesienia

Siły pozorne nie wynikają z żadnych oddziaływań fizycznych, a są konsekwencją wyboru nieinercjalnego układu odniesienia do opisu ruchu.

D2. Podaj definicje pracy, mocy i energii: kinetycznej i potencjalnej oraz treść zasady zachowania energii.

Praca – iloczyn skalarny siły i przesunięcia – miara ilości energii przekazywanej między układami

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,dx$$

Moc – ilość pracy wykonanej w jednostce czasu

E_k – energia związana z ruchem ciała

E_p – energia związana z położeniem lub stanem

ZASADA ZACHOWANIA ENERGII:

Całkowita energia w układzie izolowanym jest zachowana.

D3. Podaj wyprowadzenie wzoru na energie kinetyczna.

$E_k = ?$

$$F = am = \frac{dv}{dt} \cdot m$$

$$W = \int F(x)\,dx \Rightarrow dW = F \cdot dx$$

$$dW = \frac{dv}{dt} \cdot m \cdot dx = m \cdot v \cdot dv$$

$$W = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v\,dv = m \int_{v_1}^{v_2} v\,dv = m \left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

jeśli startuje z prędkością 0

$$\Rightarrow W = \Delta E_k = \frac{mv^2}{2}$$

D4. Ruch ciała o zmiennej masie – wyprowadź równanie Mieszczerskiego.

Masa zmienia się wraz z upływem czasu.

zmiana pędu: $d\vec{p} = \vec{F}dt + dm(\vec{v} + \vec{w}) \quad / :dt$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}(\vec{v} + \vec{w})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + \frac{md\vec{v}}{dt}$$

$$\cancel{\frac{dm}{dt}\vec{v}} + \frac{md\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \cancel{\frac{dm}{dt}\vec{v}} + \frac{dm}{dt}\vec{w}$$

$$\frac{md\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{w}$$

$$\frac{md^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} + \frac{dm}{dt}\vec{w}$$

równanie Mieszczerskiego

Relatywistyka

R1. Opisz doświadczenie Michelsona–Morleya oraz wynik, jakiego sie spodziewali.

Eksperyment miał wykryć „eter" – hipotetyczne środowisko, w którym miało rozchodzić się światło
Użyli interferometru, aby zmierzyć czy prędkość światła zależy od kierunku ruchu Ziemi względem tego eteru

Spodziewany wynik: myśleli, że światło będzie poruszać się szybciej lub wolniej w zależności od kierunku, co objawiałoby się przesunięciem prążków interferencyjnych.

R2. Przestrzeń Minkowskiego — opisz i podaj przykłady, gdzie:

a) Zdarzenia A i B sa jednoczesne w układzie nieruchomym, a w ruchomym układzie O' zdarzenie B wystepuje przed A.

b) Zdarzenia A i B sa jednoczesne w układzie ruchomym O', a A wystepuje przed B w układzie nieruchomym.

Przestrzeń Minkowskiego – czterowymiarowa przestrzeń-czas

a) Wyobraźmy sobie peron kolejowy (układ nieruchomy) i pociąg poruszający się z dużą prędkością (układ ruchomy O'). Dwa zdarzenia, A i B, to uderzenia piorunów w przeciwległe końce peronu, które są jednoczesne dla obserwatora stojącego dokładnie w środku peronu. Dla obserwatora w pociągu (O'), poruszającego się w kierunku zdarzenia B, światło z B dotrze do niego szybciej niż światło z A (ponieważ obserwator porusza się w stronę B od strony A), a zatem obserwator w pociągu stwierdzi, że zdarzenie B nastąpiło przed zdarzeniem A.

b) Odwróćmy sytuację. Dwa zdarzenia, A i B, są jednoczesne dla obserwatora w pociągu O' (np. zapalają się dwie lampki na przeciwległych końcach pociągu dokładnie w tym samym czasie dla obserwatora w pociągu). Dla obserwatora na peronie (układ nieruchomy), który widzi pociąg poruszający się, światło z lampki A (z przodu pociągu) dotrze do niego później niż światło z lampki B (z tyłu pociągu), ponieważ pociąg porusza się w kierunku A. W rezultacie obserwator na peronie stwierdzi, że zdarzenie A (zapłon lampki z przodu) nastąpiło przed zdarzeniem B (zapłon lampki z tyłu), ponieważ pociąg "uciekał" przed światłem z A.

R3. Relatywistyczne powiazanie energii i pedu. Czy czastke o masie spoczynkowej $m_0 = 0$ da sie rozpedzić do predkości światła? Odpowiedź uzasadnij.

$$E^2 = (pc)^2 + (m_0 c^2)^2$$

$m_0 = 0$

$$E^2 = (pc)^2 + (0 \cdot c^2)^2$$

$$E^2 = (pc)^2$$

$$E = pc$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$E = \gamma \cdot m_0 \cdot c^2$$

$$p = \gamma \cdot m_0 \cdot v$$

Jeśli $m_0 = 0$ to aby cząstka miała niezerową energię i pęd to $\gamma \to \infty$ czyli $v = c$

TAK, cząstka o masie spoczynkowej $m_0 = 0$ (jak foton) zawsze porusza się z prędkością c w próżni.

R4. Objaśnij wzór $E = mc^2$. Objaśnij, używajac pojecia masy spoczynkowej, w jaki sposób opisuje on energie kinetyczna ciała.

Masa i energia są równoważne i mogą być wzajemnie przekształcane

$$E_c = E_k + E_0 \Rightarrow E_k = E_c - E_0 = \gamma m_0 c^2 - m_0 c^2$$

$$E_k = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right)$$

R5. Objaśnij zasade działania reakcji łańcuchowej. Co to jest defekt masy.

- Jeden pojedynczy akt wyzwala serię kolejnych podobnych aktów, np. rozszczepienie jądra atomowego
- rozszczepienie uranu-235

neutron → jądro → rozpada się → uwalnia energię i 2-3 nowe neutrony, które walną w kolejne jądro

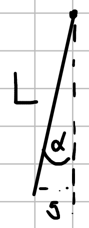
Defekt masy: różnica między sumą mas poszczególnych nukleonów (p+n) tworzących jądro atomowe a rzeczywistą masą tego jądra

$$\Delta m = (Z \cdot m_p + N \cdot m_n) - M_{jądra}$$

ta „brakująca" masa jest równoważna energii wiązania

Oscylator harmoniczny

O1. Wahadło matematyczne – wyprowadź wzór na okres T dla małych wychyleń.



$\sin\alpha \approx \alpha$

$$\sin\alpha = \frac{s}{L} \Rightarrow \alpha = \frac{s}{L}$$

$$F = -mg\sin\alpha = -mg\alpha = -mg\cdot\frac{s}{L}$$

$$F = am = \frac{d^2s}{dt^2}\cdot m$$

$$-mg\cdot\frac{s}{L} = m\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + g\cdot\frac{s}{L} = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\cdot x = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T_0 = 2\pi\cdot\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O2. Wyprowadź wzór na energie kinetyczna oscylatora harmonicznego, jeśli wzór na położenie ma postać:

$$x(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

$$E_k(t) = \frac{mV^2(t)}{2} \qquad E_k(t) = ?$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d[A\sin(\omega t + \varphi)]}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$E_k(t) = \frac{m \cdot A^2 \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)}{2}$$

$$E_k(t) = \frac{m \cdot f_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)}{2 \cdot [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2]}$$

O3. Udowodnij, że funkcja $x(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t}$ jest rozwiazaniem równania oscylatora harmonicznego z tłumieniem:
$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$$\frac{dx}{dt} = B \cdot e^{-\alpha t} + (A + Bt) \cdot \left(-\alpha e^{-\alpha t}\right)$$

$$\dot{x} = e^{-\alpha t} \cdot \left(B - \alpha A - \alpha B t\right)$$

$$\ddot{x} = -\alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(B - \alpha A - \alpha B t\right) + e^{-\alpha t} \cdot (-\alpha B)$$

$$\ddot{x} = e^{-\alpha t} \cdot \left(\alpha^2 B t + \alpha^2 A - 2\alpha B\right)$$

Zakładamy, że $\omega_0 = \alpha$ (krytyczne tłumienie)

$$\cancel{e^{-\alpha t}} \cdot \left(\alpha^2 B t + \alpha^2 A - 2\alpha B\right) + 2\alpha \cdot \cancel{e^{-\alpha t}} \left(B - \alpha A - \alpha B t\right) + \alpha^2 \cdot \cancel{e^{-\alpha t}} (A + Bt) = 0$$

$$\cancel{\alpha^2 B t} + \cancel{\alpha^2 A} \cancel{- 2\alpha B} \cancel{+ 2\alpha B} \cancel{- 2\alpha^2 A} \cancel{- 2\alpha^2 B t} \cancel{+ \alpha^2 A} \cancel{+ \alpha^2 B t} = 0$$

$$0 = 0$$

∎

O4. Wyznacz średnia moc tracona podczas jednego okresu (siły wymuszajacej) na ruch przeciwo sile tarcia.

Wzór na położenie: $x(t) = \underbrace{\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}}}_{A} \sin(\omega t + \phi)$,

Siła tarcia: $F = -\gamma V$

$$P_{tarcia} = F \cdot v = -\gamma \cdot v^2$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$P_{tarcia} = -\gamma \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$P_{tracona\,śr.} = \frac{1}{T}\int_0^T |P_{tarcia}|\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \gamma A^2 \omega^2 \cdot \underbrace{\cos^2(\omega t + \varphi)}_{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$P_{tracona\,śr.} = \frac{\gamma \omega^2 \cdot f_0^2}{2 \cdot \left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2\right]}$$

O5. Wyznacz czestotliwość ω, przy której oscylator harmoniczny osiaga rezonans amplitudowy, jeśli:

$$x(t) = \frac{f_0 = const.}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

amplituda drgań maksymalna

A_{max} gdy mianownik jest min.

$$D(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2$$

$$\frac{dD}{d\omega} = (-2\omega) \cdot 2 \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) + 2 \cdot (2\alpha\omega) \cdot 2\alpha$$

$$\frac{dD}{d\omega} = -4\omega \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) + 8\alpha^2\omega$$

$$-4\omega \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) + 8\alpha^2\omega = 0$$

$$4\omega \left[2\alpha^2 - (\omega_0^2 - \omega^2)\right] = 0$$

$\omega = 0$ $\vee$ $2\alpha^2 - (\omega_0^2 - \omega^2) = 0$

nie rezonans

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2\alpha^2 = 0$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\alpha^2}$$

Fale

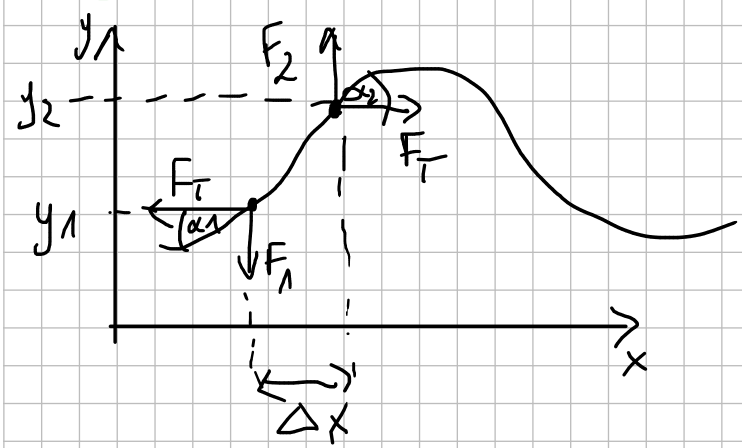
F1. Jaka relacja wiaże czestotliwość fali f i liczbe falowa k?

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ - dł. fali

$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f}$

$$k = \frac{2\pi \cdot f}{v} \Rightarrow f = \frac{kv}{2\pi} \; [Hz]$$

F2. Równanie falowe w jednym wymiarze na przykładzie drgajacej struny.



$$tg\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$F_1 = -F_T \cdot tg\alpha(x_1)$$

$$F_2 = F_T \cdot tg\alpha(x_2)$$

$$F_{wyp.} = F_1 + F_2 = \Delta m a = \mu \Delta x \cdot \frac{\partial^2 y}{dt^2} \quad / : \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(tg\alpha(x_2) - tg\alpha(x_1)\right)}{\Delta x} = \frac{\mu}{F_T} \cdot \frac{\partial^2 y}{dt^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F_T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{1}{v^2} = \frac{\mu}{F_T}$$

F3. Podaj równanie fali poprzecznej o polaryzacji liniowej wzdłuż osi x, która propaguje sie z predkościa v wzdłuż osi y, jeśli czestość kołowa fali wynosi ω.

Udowodnij, że fala spełnia równanie falowe:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$