

Effetti non lineari sulle onde di Alfvén in una dimensione

Edoardo Gabrielli

1 settembre 2022

1 Sistema di partenza

Le equazioni che descrivono l'evoluzione dei modi incomprimibili ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) di un plasma secondo il modello MHD sono:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

In cui η è definita in termini della conducibilità elettrica σ :

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

2 Quatità caratteristiche e variabili adimensionali

Ipotizziamo che nel sistema sia presente un campo magnetico esterno costante \mathbf{B}_0 .

Rendiamo le due equazioni adimensionali tramite l'uso di quantità caratteristiche del sistema e rinominiamo tutte le quantità dimensionali con una barra (esempio di campo magnetico dimensionato: $\bar{\mathbf{B}}$):

- $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}/\tilde{L}$ con \tilde{L} lunghezza caratteristica MHD.
- $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}}/B_0$ con B_0 modulo del campo magnetico esterno.
- $\rho = \bar{\rho}/\tilde{\rho}$ con $\tilde{\rho}$ densità costante del plasma. Si ha che vale la relazione:

$$\tilde{L}^3 \simeq \lambda_{mfp}^3 \gg r_n^3 \equiv \frac{1}{\tilde{\rho}}$$

- $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}/v_A$ con v_A velocità di Alfvén.

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\tilde{\rho}}}$$

Ci sono inoltre alcune grandezze utili alle analisi successive che possono essere ricavate da quelle sopra:

- $p = \bar{p}/\tilde{p}$ con \tilde{p} pressione caratteristica data da $\tilde{\rho}v_A^2$.
- $\tau = \bar{t}/\tilde{\tau}$ con $\tilde{\tau}$ definito a partire dalle grandezze caratteristiche \tilde{L} e v_A :

$$\tilde{\tau} = \frac{\tilde{L}}{v_A}.$$

- $\tau_D = L^2/\eta$ tempo diffusivo, definito a partire dalla equazione per \mathbf{B} ipotizzando che il termine $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ sia dominante su $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$.
- $R_m = \tau_D/\tilde{\tau} = v_A \tilde{L}/\eta$ Numero di Reynolds magnetico.

2.1 Equazione per \mathbf{B}

Si colorano in rosso le quantità necessarie alla normalizzazione delle equazioni:

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \left[\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} \right] = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \left[\overline{\nabla} \times (\overline{\mathbf{u}} \times \overline{\mathbf{B}}) + \eta \overline{\nabla}^2 \overline{\mathbf{B}} \right]. \quad (3)$$

Il termine di destra è banalmente adimensionale, i termini di sinistra gli analizziamo singolarmente:

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \overline{\nabla} \times (\overline{\mathbf{u}} \times \overline{\mathbf{B}}) \sim \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \frac{1}{\tilde{L}} \overline{u} \overline{B} = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \frac{v_A}{v_A} \frac{1}{\tilde{L}} \overline{u} \overline{B} = \frac{\tilde{L}}{\tilde{B} v_A} \frac{1}{\tilde{L}} \overline{u} \overline{B} = \frac{u B}{L}$$

Passiamo al termine diffusivo:

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \eta \overline{\nabla}^2 \overline{\mathbf{B}} \sim \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \eta \frac{\overline{B}}{\tilde{L}^2} = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{L}^2} \eta \frac{\overline{B}}{\tilde{L}^2} = \frac{\tau}{\tau_D} \frac{B}{L} = R_m^{-1} \frac{B}{L^2}$$

Adesso a regolare la diffusione vi è il numero di Reynolds magnetico e l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + R_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}$$

2.2 Equazione per \mathbf{u}

Analogamente a quanto fatto sopra si procede a normalizzare con la quantità:

$$N = \frac{\tilde{L}}{v_A^2 \tilde{\rho}}$$

Saltando i passaggi algebrici si ottiene una equazione identica alla originale ma con variabili adimensionali:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}.$$

3 Semplificazione delle equazioni

Ricordando le proprietà dei prodotti vettoriali si ha che:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) \quad (4)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B} \quad (5)$$

Quindi si ottiene il sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u} + R_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla \Pi + (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}. \quad (7)$$

In cui il termine $\nabla \Pi$ contiene il contributo sia della pressione fluida (∇p) che di quella magnetica ($\nabla(B^2/2)$).

4 Soluzione nel caso di onda che propaga con un angolo θ rispetto al campo esterno B_0

Scegliamo un plasma con densità uniforme $\rho = 1$ e prendiamo un sistema di assi cartesiano $x-y-z$ chiamato S1, scegliamo il campo magnetico esterno uniforme \mathbf{B}_0 diretto lungo l'asse z .

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}.$$

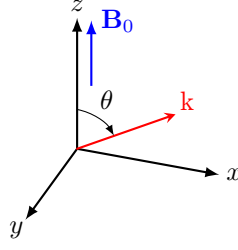


Figura 1: Sistema di riferimento iniziale

Prendiamo delle perturbazioni di \mathbf{u} e \mathbf{B} che propagano in direzione \mathbf{k} , l'asse y del sistema viene scelto in modo tale da posizionare il vettore \mathbf{k} nel piano $x - z$ come in Figura 1.

Per comodità effettuiamo una rotazione del sistema di riferimento andando a sovrapporre il versore \hat{x} con l'asse determinato dal vettore \mathbf{k} . In questa rotazione l'asse y rimane invariato. Chiamiamo questo nuovo sistema di riferimento S2.

$$S2 : \hat{k} - \hat{y} - \hat{z}_1$$

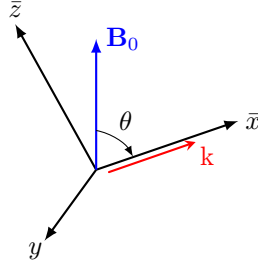


Figura 2: Sistema di riferimento ruotato

In S2 il campo magnetico esterno si può esprimere come:

$$\mathbf{B}_0 = (\cos \theta \quad 0 \quad \sin \theta)$$

In cui si ricorda che le equazioni sono state rese adimensionali proprio utilizzando il modulo del campo magnetico esterno.

Il vettore d'onda è diretto tutto lungo \hat{k} . Quest'ultima informazione, messa insieme a $\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{B} = 0$ permette di concludere che le componenti lungo \hat{k} di \mathbf{u} e \mathbf{B} devono essere nulle per costruzione (si usa la notazione $\hat{k} = x$):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= (0, \quad u_y(x, t), \quad u_z(x, t)) \\ \mathbf{B}(x, t) &= (\cos(\theta), \quad b_y(x, t), \quad \sin(\theta) + b_z(x, t)) \end{aligned}$$

Adesso si sostituisce tutto all'interno delle equazioni e si estrae la componente y , si può osservare che i prodotto "non lineari" delle quantità di interesse si annullano in tale direzione, ad esempio si ha che:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \nabla] \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0, & u_y(x, t), & u_z(x, t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (\cos(\theta), \quad b_y(x, t), \quad \sin(\theta) + b_z(x, t)) = \mathbf{0} \\ [\mathbf{B} \nabla] \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} \cos(\theta), & b_y, & \sin(\theta) + b_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (0, \quad u_y(x, t), \quad u_z(x, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(\theta) \partial_x u_y(x, t) \\ \cos(\theta) \partial_x u_z(x, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

inoltre i termini di pressione agiscono solo lungo la direzione di propagazione \hat{k} , ortogonale a y . Si ha quindi che la componente y delle quantità di interesse risulta completamente disaccoppiata dalle altre:

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = \cos \theta \frac{\partial u_y}{\partial x} + R_m^{-1} \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \cos \theta \frac{\partial b_y}{\partial x} \quad (9)$$

Tali equazioni descrivono completamente l'evoluzione temporale lungo l'asse y e possono essere integrate numericamente con i parametri fisici iniziali: θ , R_m . La soluzione è data da onde stazionarie la cui ampiezza diminuisce nel tempo per via del termine diffusivo presente nell'equazione 8.

5 Variabili di Elsasser e modello 1D

Torniamo al modello descritto dalle equazioni 6 e 7, separiamo il campo magnetico in una parte esterna costante ed uniforme \mathbf{B}_0 e le sue perturbazioni \mathbf{b} (non necessariamente di piccola ampiezza). Esprimiamo quindi il campo (ricordando che le variabili in gioco sono adesso adimensionali):

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|} + \frac{\mathbf{b}'}{|\mathbf{B}_0|} \equiv \hat{B}_0 + \mathbf{b}$$

Il termine \hat{B}_0 indica il versore del campo magnetico esterno uniforme, tale campo entra nelle equazioni precedenti soltanto nei termini $\hat{B}_0 \nabla$, quindi semplificheremo l'equazione indicando questo termine come ∇_{B_0} che indica la componente di ∇ lungo il campo esterno.

Le equazioni della dinamica possono essere espresse in termini di \mathbf{b} ed \mathbf{u} , ponendo anche $\rho = 1$:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{b} - \nabla_{B_0} \mathbf{u} - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{u} = R_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{b} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla_{B_0} \mathbf{b} - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} = -\nabla \Pi. \quad (11)$$

Sommiamo e sottraiamo le due equazioni per riscriverle in termini di variabili di Elsasser:

$$\mathbf{z}^+ = \mathbf{u} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{z}^- = \mathbf{u} - \mathbf{b}$$

Notiamo che il termine resistivo si esprime come:

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \nabla^2 (\mathbf{z}^+ - \mathbf{z}^-)$$

Le equazioni possono essere espresse nella forma compatta:

$$\frac{\partial \mathbf{z}^\pm}{\partial t} \mp \nabla_{B_0} \mathbf{z}^\pm + \mathbf{z}^\mp \nabla \mathbf{z}^\pm = -\nabla \Pi + \frac{1}{2R_m} \nabla^2 (\mathbf{z}^\pm - \mathbf{z}^\mp)$$

Si studia adesso il sistema ipotizzando di poter scrivere le equazioni di cui sopra nel caso 1D incompressibile senza la perdita dei termini non lineari, si sceglie per semplicità un'onda che propaga nella direzione stessa del campo magnetico esterno B_0 e la pressione totale Π costante in x .

Nella geometria 1D scelta i termini non-lineari dovrebbero essere nulli poiché $\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ (ed in una dimensione significa che $z^\mp \frac{\partial z^\pm}{\partial x} = 0$), tuttavia in questa analisi vengono mantenuti con lo scopo di comprendere concettualmente la loro azione sulla propagazione delle soluzioni.

Notiamo inoltre che, in una dimensione, assumere l'incompressibilità porta a soluzioni banali: la richiesta di $\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \forall t$ implica che la soluzione sia costante in x per ogni tempo.

Le equazioni 1D in gioco sono adesso:

$$\frac{\partial z^+}{\partial t} - \frac{\partial z^+}{\partial x} + z^- \frac{\partial z^+}{\partial x} = \frac{1}{2R_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z^+ - z^-) \quad (12)$$

$$\frac{\partial z^-}{\partial t} + \frac{\partial z^-}{\partial x} + z^+ \frac{\partial z^-}{\partial x} = \frac{1}{2R_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (z^- - z^+) \quad (13)$$

Queste equazioni rappresentano due soluzioni che evolvono nella direzione opposta per via del termine di advezione $\mp \partial_x z^\pm$, la velocità di tale evoluzione è proprio quella di Alfvén (unitaria nelle variabili adimensionali).

La sovrapposizione delle soluzioni, mosse dall'advezione, dà origine a fenomeni non lineari. Tali fenomeni possono essere modulati dal termine di destra dissipativo scegliendo opportunamente il numero di Reynolds magnetico.

Il termine di destra nelle equazioni non ha esattamente la struttura di un usuale termine diffusivo, infatti il laplaciano agisce sulla differenza delle variabili di Elsasser per entrambe le equazioni.

5.1 Soluzione numerica in termini di variabili di Elsasser

Si studia numericamente l'evoluzione di alcune condizioni iniziali secondo le equazioni 12 e 13, si prende una griglia x uniforme nell'intervallo $[0, L]$ e si utilizzano delle condizioni al contorno non riflettenti, definite nella appendice A. Le condizioni iniziali scelte sono le seguenti:

$$z^+ = A_1 \exp\left(-\frac{(x - \mu^+)^2}{\sigma^2}\right) \sin\left(k \frac{\pi}{\sigma}(x - \mu^+)\right)$$

$$z^- = A_2 \exp\left(-\frac{(x - \mu^-)^2}{\sigma^2}\right)$$

Il metodo di integrazione scelto è il Runge Kutta di ordine 4 (in t) mentre per le derivate si sono utilizzate le differenze finite compatte di ordine 4 (in x). Si è utilizzato un filtro del tipo "spectral-like resolution" di ordine 6 proposto da Lele nel suo articolo.

In Figura 3 si mostra l'andamento delle soluzioni con i seguenti parametri:

- $L = 10, R_m = 10^3$.
- $dt = 2 \cdot 10^{-4}, dx = 10^{-2}, \text{step temporali} = 3 \cdot 10^4$.
- $A_1 = 1.5, A_2 = 1.2, \sigma = L/10, \mu^- = 4L/5, \mu^+ = L/5, k = 1$.

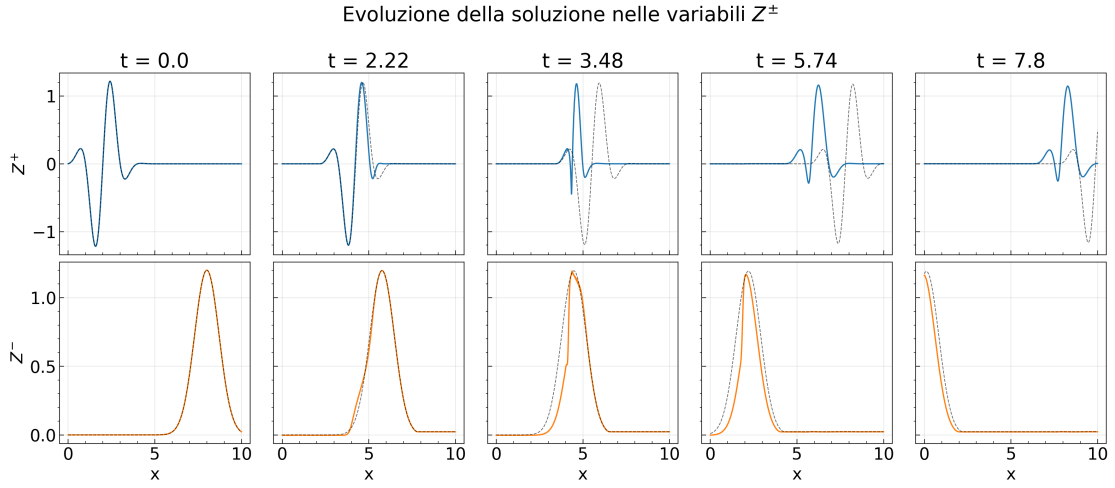


Figura 3: Andamento di z^\pm al variare del tempo fisico, si nota la non linearità delle soluzioni quando si sovrappongono nello spazio (x, t) . In tratteggiato invece si osserva l'andamento della soluzione quando si rimuovono i termini non lineari dalle equazioni. [Link](#) alla simulazione completa

Notiamo dalle curve tratteggiate in Figura 3 che in assenza di termini non lineari le due soluzioni non interagiscono e semplicemente propagano con velocità caratteristica unitaria.

A Condizioni al contorno aperte

Dato un sistema dinamico (per semplicità in una dimensione) descritto dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{C} = 0 \quad (14)$$

ed ipotizziamo di volerlo studiare nell'intervallo $a \leq x \leq b$ con delle condizioni al contorno per cui sono ammesse onde entranti ed uscenti, la difficoltà di questa scelta di condizione al contorno sta nel distinguere quali siano le onde entranti e quali quelle uscenti durante l'evoluzione. La soluzione di questo problema la si ottiene mediante l'uso delle equazioni caratteristiche.

A.1 Equazioni caratteristiche

Si possono ottenere le equazioni caratteristiche diagonalizzando la matrice \mathbf{A} e calcolando la relativa matrice di trasformazione \mathbf{S} :

$$\mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{\Lambda}$$

con \mathbf{A} matrice diagonale avente sulla diagonale stessa gli autovalori di \mathbf{A} .
In particolare si può moltiplicare l'equazione 14 per \mathbf{S} e ottenere:

$$\mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{S} \mathbf{C} = 0$$

Questo sistema può essere espresso separatamente per ciascun autovalore λ_i con $i = 1, \dots, N$ e con N numero di variabili del sistema 1D:

$$\mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{I}_i \mathbf{C} = 0 \quad (15)$$

In cui \mathbf{I}_i sono gli autovettori sinistri di \mathbf{A}

$$\mathbf{I}_i \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{I}_i$$

L'equazione 15 è definita come l'equazione caratteristica di quella di partenza. Il vantaggio di esprimere il sistema in termini delle caratteristiche è che risulta evidente dal segno dei λ_i quali siano le onde che propagano nell'una o nell'altra direzione, infatti se definiamo la quantità \mathbf{V} come:

$$dV_i = \mathbf{I}_i d\mathbf{U} + \mathbf{I}_i \mathbf{C} dt$$

Si ha subito che l'equazione 15 può essere espressa in forma di semplice advezione:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial V_i}{\partial x} = 0$$

in questo modo è possibile discriminare tra le condizioni al bordo nel caso di onda uscente o entrante.

A.2 Condizione al bordo non riflettente di Hedstrom

Le condizioni al bordo non riflettenti di Hedstrom possono essere riassunte nella seguente:

L'ampiezza delle onde entranti è costante nel tempo ai bordi.

Matematicamente, se V_i è l'ampiezza di un'onda entrante si ha che:

$$\left. \frac{d}{dt} V_i \right|_{x=a,b} = 0$$

Quindi in termini delle equazioni caratteristiche possiamo dire che, se un'onda è entrante:

$$\left(\mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{I}_i \mathbf{C} \right) \Big|_{x=a,b} = 0 \quad (16)$$

mentre se l'onda è uscente è possibile utilizzare l'equazione 15 per la sua evoluzione ai bordi. Si può riassumere la formulazione di queste condizioni al contorno con la seguente equazione:

$$\left(\mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathcal{L}_i + \mathbf{I}_i \mathbf{C} \right) \Big|_{x=a,b} = 0 \quad \text{con} \quad \begin{cases} \mathcal{L}_i = \lambda_i \mathbf{I}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} & \text{Per onde uscenti} \\ \mathcal{L}_i = 0 & \text{Per onde entranti} \end{cases} \quad (17)$$

A.3 Applicazione al caso MHD in analisi

Partiamo dal sistema di equazioni 10, 11 (quindi prima di esprimerlo in termini di variabili di Elsasser), tale sistema può essere espresso come la 14:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & -1-b \\ -1-b & u \end{pmatrix}$$

Come termine \mathbf{C} si prende il termine diffusivo che appare nelle equazione per b :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R_m^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} b \end{pmatrix}$$

Si ottengono subito gli autovalori e gli autovettori sinistri di \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -1 - b + u & \mathbf{I}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= 1 + b + u & \mathbf{I}_2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

E le equazioni lungo le caratteristiche si ottengono semplicemente applicando la 17:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial t} + \mathcal{L}_1 &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial t} + \mathcal{L}_2 - R_m^{-1} \frac{\partial^2}{\partial x^2} b &= 0\end{aligned}$$

In cui i termini \mathcal{L}_i vanno definiti in modo distinto per il bordo destro e sinistro esplicitiamo solo \mathcal{L}_1 e partiamo dal bordo sinistro:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = (-1 + u - b) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) & -1 + u - b > 0 \\ \mathcal{L}_1 = 0 & -1 + u - b < 0 \end{cases}$$

Si sottointende che tutte le quantità sono calcolate nel bordo sinistro, quindi in a . Per il bordo destro si ha l'esatto opposto:

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1 = 0 & -1 + u - b > 0 \\ \mathcal{L}_1 = (-1 + u - b) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial x} \right) & -1 + u - b < 0 \end{cases}$$

Quindi è possibile ricavare sui bordi la somma e la differenza delle derivate temporali di u e b , di conseguenza risulta nota anche la derivata temporale delle singole variabili.

Si nota tuttavia che le equazioni caratteristiche equivalgono proprio a scrivere il sistema in termini di variabili di Elsasser, è facile quindi vedere che la condizione di Hedstrom agisce direttamente in termini di Z^\pm . Per questo motivo il sistema è stato studiato in termini queste variabili anziché u e b .

B Filtro di Lele

Si utilizza un filtro di Lele per controllare i fenomeni non lineari nei punti in cui le soluzioni Z^\pm generano dei gradienti molto forti. In tali punti possono generarsi delle perturbazioni numeriche che, propagando, interagiscono non linearmente con le soluzioni stesse creando instabilità numerica. La peculiarità di questi filtri è quella abbattere le onde a frequenza prossima a quella di Nyquist e di rallentarne la loro propagazione.

Dato un segnale f il suo segnale filtrato \hat{f} può essere costruito a partire da una espressione alle differenze finite:

$$\beta \hat{f}_{i-2} + \alpha \hat{f}_{i-1} + \hat{f}_i + \alpha \hat{f}_{i+1} + \beta \hat{f}_{i+2} = a f_i + \frac{d}{2} (f_{i+3} + f_{i-3}) + \frac{c}{2} (f_{i+2} + f_{i-2}) + \frac{b}{2} (f_{i+1} + f_{i-1}) \quad (18)$$

Questa equazione è implicita, la soluzione si ottiene invertendo la matrice pentadiagonale associata al sistema.

Si analizza l'espressione in trasformata di Fourier, la simmetria spaziale dei termini in gioco (presenti sempre in forma $f_{i+n} + f_{i-n}$) è utile a rendere reale la funzione di trasferimento (la parte immaginaria dei termini $e^{ni\Delta x} + e^{-ni\Delta x}$ si annulla):

$$T(\omega) = \frac{a + b \cos(\omega) + c \cos(\omega) + d \sin(\omega)}{1 + 2\alpha \cos(\omega) + 2\beta \cos(\omega)}$$

A questo punto per costruire un filtro a partire dalla 18 basta richiedere che per la frequenza di Nyquist $\omega = \pi$ la funzione di trasferimento sia nulla (per questo tipo di schemi tale richiesta comporta anche l'annullamento della derivata prima di $T(\omega)$ in π), inoltre bisogna imporre il passaggio delle basse frequenze quindi $T(0) = 1$.

Vista la quantità di parametri liberi è possibile richiedere anche che la $T(\omega)$ sia "liscia" in $\omega = \pi$, da qui emergono le due ulteriori condizioni usate da Lele:

$$\frac{d^2 T}{d\omega^2}(\pi) = 0 \quad \frac{d^2 T}{d\omega^4}(\pi) = 0$$

Sviluppando in serie di Taylor le derivate e mettendo tutto a sistema si può ottenere uno schema di ordine 6 in x con i coefficienti:

$$\alpha = 0, \beta = 3/10, a = 0.5, b = 0.75, c = 3/10, d = 1/20.$$

Essendo uno schema per cui il punto i viene valutato tramite i suoi limitrofi è necessario trattare i bordi separatamente, la soluzione proposta da Lele è utilizzare uno schema esplicito per i 3 punti estremali destri e sinistri:

$$\begin{aligned}\hat{f}_1 &= \frac{15}{16}f_1 + \frac{1}{16}(4f_2 - 6f_3 + 4f_4 - 5f_5) \\ \hat{f}_2 &= \frac{3}{4}f_2 + \frac{1}{16}(f_1 + 6f_3 - 4f_4 + f_5) \\ \hat{f}_3 &= \frac{5}{8}f_2 + \frac{1}{16}(-f_1 + 4f_2 + 4f_4 - f_5)\end{aligned}$$

Tale schema ai bordi è di ordine 4 in x e garantisce una chiusura per lo schema 18 nel caso di condizioni al contorno non riflettenti.

B.1 Test del filtro

Si può testare il filtro prendendo un segnale gaussiano in una griglia finita, la σ di tale segnale viene scelta in modo da eccitare tutti i modi esprimibili nella griglia. Si è scelto quindi $\sigma = 2dx$ e $\mu = L/2$.

Si applica successivamente il filtro di cui sopra sul segnale gaussiano e si osserva la sua azione sulla trasformata di Fourier del segnale. Si riporta il risultato ottenuto in Figura 4, compatibile con quanto ottenuto da Lele nel suo articolo per il filtro in questione. La funzione riportata nel secondo grafico di Figura 4 è l'attenuazione dei modi così definita:

$$G(k) \equiv \frac{f_k^{fin}}{f_k^{in}}$$

Test del filtro di Lele

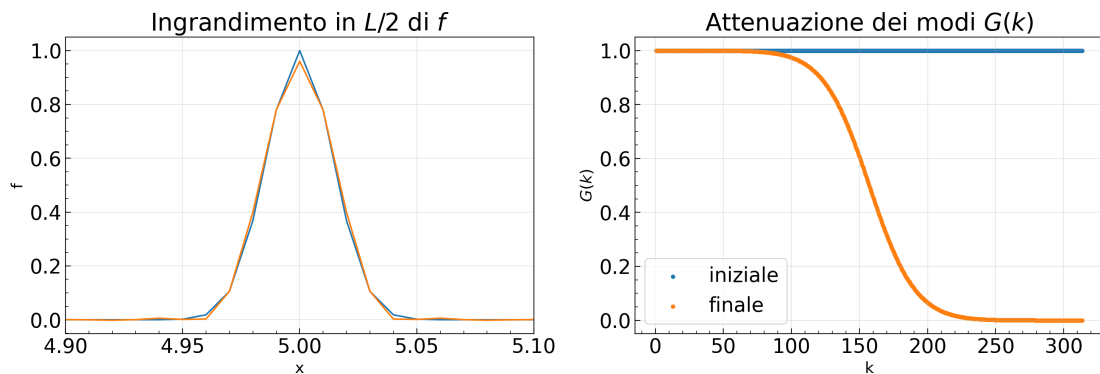


Figura 4: Test del filtro di Lele con condizione iniziale Gaussiana