

Onde di Alfvén 1D

Edoardo Gabrielli

29 agosto 2022

1 Sistema di partenza

Le equazioni che descrivono l'evoluzione dei modi incomprimibili ($\nabla \mathbf{u} = 0$) di un plasma secondo il modello MHD sono:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right] = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (2)$$

In cui η è definita in termini della conducibilità elettrica σ :

$$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$$

2 Quatità caratteristiche e variabili adimensionali

Ipotizziamo che il sistema sia sottoposto ad un campo magnetico esterno costante \mathbf{B}_0 .

Rendiamo le due equazioni adimensionali tramite l'uso di quantità caratteristiche del sistema e rinominiamo tutte le quantità dimensionali con un asterisco (esempio di campo magnetico dimensionato: \mathbf{B}'):

- $\mathbf{x} = \mathbf{x}'/\tilde{L}$ con \tilde{L} lunghezza caratteristica MHD.
- $\mathbf{B} = \mathbf{B}'/B_0$ con B_0 modulo del campo magnetico esterno.
- $\rho = \rho'/\tilde{\rho}$ con $\tilde{\rho}$ densità costante del plasma. Si ha che vale la relazione:

$$\tilde{L}^3 \simeq \lambda_{mfp}^3 \gg r_n^3 \equiv \frac{1}{\tilde{\rho}}$$

- $\mathbf{u} = \mathbf{u}'/v_A$ con v_A velocità di Alphen.

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\tilde{\rho}}}$$

Ci sono inoltre alcune grandezze utili alle analisi successive che possono essere ricavate da quelle sopra:

- $\tau = t'/\tilde{\tau}$ con $\tilde{\tau}$ definito a partire dalle grandezze caratteristiche \tilde{L} e v_A :

$$\tilde{\tau} = \frac{\tilde{L}}{v_A}.$$

- $\tau_D = L^2/\eta$ tempo diffusivo, definito a partire dalla equazione per \mathbf{B} ipotizzando che il termine $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ sia dominante su $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$.
- $R_m = \tau_D/\tilde{\tau} = v_A \tilde{L}/\eta$ Numero di Raynolds magnetico.

2.1 Equazione per \mathbf{B}

Si colorano in rosso le quantità necessarie alla normalizzazione delle equazioni:

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \left[\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right] = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B}]. \quad (3)$$

Il termine di destra è banalmente adimensionale, i termini di sinistra gli analizziamo singolarmente:

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \sim \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \frac{1}{L'} u' B' = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \frac{v_A}{v_A} \frac{1}{L'} u' B' = \frac{\tilde{L}}{\tilde{B} v_A} \frac{1}{L'} u' B' = \frac{u B}{L}$$

Passiamo al termine diffusivo:

$$\frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \eta \nabla^2 \mathbf{B} \sim \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \eta \frac{B'}{L'^2} = \frac{\tilde{\tau}}{\tilde{B}} \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{L}^2} \eta \frac{B'}{L'^2} = \frac{\tau}{\tau_D} \frac{B}{L} = R_m^{-1} \frac{B}{L^2}$$

Adesso a regolare la diffusione vi è il numero di Reynolds magnetico e l'equazione diventa:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + R_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{B}$$

2.2 Equazione per \mathbf{u}

Analogamente a quanto fatto sopra si procede a normalizzare con la quantità:

$$N = \frac{\tilde{L}}{v_A^2 \tilde{\rho}}$$

Saltando i passaggi algebrici si ottiene una equazione identica alla originale ma con variabili adimensionali:

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right] = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}.$$

3 Semplificazione delle equazioni

Ricordando le proprietà dei prodotti vettoriali si ha che:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{2} \right) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} \quad (4)$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B} \quad (5)$$

Nella prima equazione si esclude il termine di pressione magnetica. Quindi si ottiene il sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{B} = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{u} + R_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} \right] = (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B}. \quad (7)$$

4 Soluzione in caso specifico

Scegliamo un plasma con densità uniforme $\rho_0 = 1$ e prendiamo un sistema di assi cartesiani $x-y-z$ chiamato S1, scegliamo il campo magnetico esterno uniforme \mathbf{B}_0 diretto lungo l'asse z .

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{z}.$$

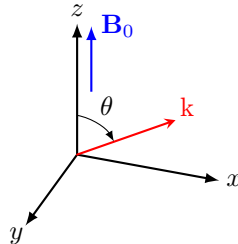


Figura 1: Sistema di riferimento iniziale

Prendiamo delle perturbazioni di \mathbf{u} e \mathbf{B} che propagano in direzione \mathbf{k} , l'asse y del sistema viene scelto in modo tale da posizionare il vettore \mathbf{k} nel piano $x - z$ come in Figura 1. Per comodità effettuiamo una rotazione del sistema di riferimento andando a sovrapporre il versore \hat{x} con l'asse determinato dal vettore \mathbf{k} . In questa rotazione l'asse y rimane invariato. Chiamiamo questo nuovo sistema di riferimento S2.

$$S2 : \hat{k} - \hat{y} - \hat{z}_1$$

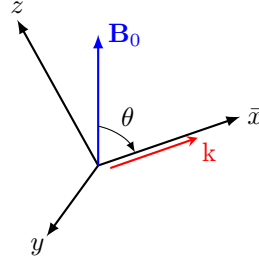


Figura 2: Sistema di riferimento ruotato

In S2 il campo magnetico esterno si può esprimere come:

$$\mathbf{B}_0 = (B_0 \cos \theta \quad 0 \quad B_0 \sin \theta)$$

Mentre il vettore d'onda è ovviamente diretto tutto lungo \hat{k} .

Sfruttando quest'ultima informazione e insieme al fatto che $\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{B} = 0$ si trova subito che le componenti \hat{k} di \mathbf{u} e \mathbf{B} devono essere nulle per costruzione (si usa la notazione $\hat{k} = x$):

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, t) &= (0, \quad u_y(x, t), \quad u_z(x, t)) \\ \mathbf{B}(x, t) &= (B_0 \cos(\theta), \quad b_y(x, t), \quad B_0 \sin(\theta) + b_z(x, t)) \end{aligned}$$

Adesso si sostituisce tutto all'interno delle equazioni e si estrae la componente y , si può osservare che i prodotto "non lineari" delle quantità di interesse si annullano in tale direzione, ad esempio si ha che:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u} \nabla] \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & u_y(x, t) & u_z(x, t) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (B_0 \cos(\theta), \quad b_y(x, t), \quad B_0 \sin(\theta) + b_z(x, t)) = \mathbf{0} \\ [\mathbf{B} \nabla] \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} B_0 \cos(\theta) & b_y & B_0 \sin(\theta) + b_z \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} (0, \quad u_y(x, t), \quad u_z(x, t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ B_0 \cos(\theta) \partial_x u_y(x, t) \\ B_0 \cos(\theta) \partial_x u_z(x, t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

inoltre si ha che la componente y si disaccoppia completamente, si ottengono infine le equazioni:

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_0 \cos \theta \frac{\partial u_y}{\partial x} + R_m^{-1} \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = B_0 \cos \theta \frac{\partial b_y}{\partial x} \quad (9)$$

Che descrivono completamente l'evoluzione temporale lungo l'asse y e possono essere integrate numericamente con i parametri fisici iniziali: B_0 , θ , R_m . Notiamo come, per qualsiasi valore di θ , il vincolo di incomprimibilità $\nabla \mathbf{u}$ esclude dalle equazioni per la componente y la presenza di qualsiasi termine non lineare. Tali equazioni portano a soluzioni lineari

5 Variabili di Elsasser e modello 1D

Torniamo al modello descritto dalle equazioni 6 e 7, separiamo il campo magnetico in una parte esterna costante ed uniforme \mathbf{B}_0 e le sue perturbazioni \mathbf{b} (non necessariamente di piccola ampiezza). Esprimiamo quindi il campo (ricordando che le variabili in gioco sono adesso adimensionali):

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{B}_0}{|\mathbf{B}_0|} + \frac{\mathbf{b}'}{|\mathbf{B}_0|} \equiv \hat{B}_0 + \mathbf{b}$$

Il termine \hat{B}_0 indica il versore del campo magnetico esterno uniforme, tale campo entra nelle equazioni precedenti soltanto nei termini $\hat{B}_0 \nabla$, quindi semplificheremo l'equazione indicando questo termine come ∇_{B_0} che indica la componente di ∇ lungo il campo esterno.

Le equazioni della dinamica possono essere espresse in termini di \mathbf{b} ed \mathbf{u} , ponendo anche $\rho = 1$:

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{b} - \nabla_{B_0} \mathbf{u} - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{u} = R_m^{-1} \nabla^2 \mathbf{b} \quad (10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} - \nabla_{B_0} \mathbf{b} - (\mathbf{b} \nabla) \mathbf{b} = 0. \quad (11)$$

Sommiamo e sottraiamo le due equazioni per riscriverle in termini di variabili di Elsasser:

$$\mathbf{Z}^+ = \mathbf{u} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{Z}^- = \mathbf{u} - \mathbf{b}$$

Notiamo che il termine resistivo si esprime come:

$$\nabla^2 \mathbf{b} = \nabla^2 (\mathbf{Z}^+ - \mathbf{Z}^-)$$

Le equazioni possono essere espresse nella forma compatta:

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^\pm}{\partial t} \mp \nabla_{B_0} \mathbf{Z}^\pm + \mathbf{Z}^\mp \nabla \mathbf{Z}^\pm = \frac{1}{2R_m} \nabla^2 (\mathbf{Z}^\pm - \mathbf{Z}^\mp)$$

Si studia adesso il sistema ipotizzando di poter scrivere le equazioni di cui sopra nel caso 1D incompressibile senza la perdita dei termini non lineari, si sceglie per semplicità un'onda che propaga nella direzione stessa del campo magnetico esterno B_0 .

I termini non-lineari dovrebbero essere nulli poiché $\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{b} = 0$ (ed in una dimensione significa che $Z^\mp \frac{\partial Z^\pm}{\partial x} = 0$), tuttavia in questa analisi vengono mantenuti con lo scopo di comprendere concettualmente la loro azione sulla propagazione delle soluzioni.

Notiamo inoltre che, in una dimensione, assumere l'incompressibilità porta a soluzioni banali: la richiesta di $\frac{\partial Z}{\partial x} = 0 \forall t$ implica che la soluzione sia costante in x per ogni tempo.

Le equazioni 1D in gioco sono adesso:

$$\frac{\partial Z^+}{\partial t} - \frac{\partial Z^+}{\partial x} + Z^- \frac{\partial Z^+}{\partial x} = \frac{1}{2R_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Z^+ - Z^-) \quad (12)$$

$$\frac{\partial Z^-}{\partial t} + \frac{\partial Z^-}{\partial x} + Z^+ \frac{\partial Z^-}{\partial x} = \frac{1}{2R_m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (Z^- - Z^+) \quad (13)$$

Queste equazioni rappresentano due soluzioni che evolvono nella direzione opposta per via del termine di advezione $\mp \partial Z^\pm / \partial x$, la velocità di tale evoluzione è proprio quella di Alfvén, resa unitaria in questa analisi quando le equazioni sono state rese adimensionali. Se durante l'advezione le due soluzioni si sovrappongono allora danno origine a fenomeni non lineari. Tali fenomeni possono essere modulati dal termine di destra dissipativo scegliendo opportunamente il numero di Reynolds magnetico.

- A Condizioni al contorno aperte
- B Filtro di Lele