

Modulo 1**Studio del modello di Ising 2D**

Sara Arditto, Edoardo Gabrielli

Novembre 2021

INTRODUZIONE

L'obiettivo di questo progetto è quello di studiare il modello di Ising classico in due dimensioni su un reticolo quadrato.

A tale scopo si simula il sistema mediante un metodo Monte-Carlo basato sulle catene di Markov, in particolare si implementa l'algoritmo Metropolis. Essendo nota la soluzione analitica esatta per un sistema di questo tipo, si confrontano i risultati ottenuti con quelli teorici.

1 CENNI TEORICI

Il modello di Ising classico bidimensionale descrive un insieme di spin su un reticolo $L \times L$. A ciascun sito di tale reticolo $i = (i_x, i_y)$ si associa un possibile valore di spin $s_i = \pm 1$.

L'insieme di tali s_i definisce una possibile configurazione di spin σ , cioè lo stato microscopico del sistema.

L'energia del microstato è data da:

$$E = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - h \sum_i s_i \quad (1)$$

La prima somma tiene conto delle sole interazioni tra primi vicini, J è la costante di accoppiamento mentre h è il campo magnetico esterno uniforme che nel seguito sarà considerato nullo ($h = 0$).

Si considera il sistema all'equilibrio termico a temperatura T quindi la probabilità di avere una configurazione di spin σ è data dalla distribuzione di Gibbs:

$$P[\sigma] = \frac{1}{Z} e^{-\beta E(\sigma)} \quad (2)$$

$$Z \equiv \sum_{\sigma} e^{-\beta E(\sigma)} \quad \beta \equiv \frac{1}{kT} \quad (3)$$

La costante J appare in tali equazioni solo nel termine $e^{-\beta E}$, per cui tale parametro può essere assorbito nella definizione di temperatura. Nel problema in analisi si assume $J = 1$.

2 ALGORITMO LOCALE METROPOLIS

Si applica l'algoritmo Metropolis locale per estrarre le configurazioni σ secondo la distribuzione di probabilità $P[\sigma]$. Sia σ_k la configurazione al passo k , gli step dell'algoritmo sono i seguenti:

- Si seleziona casualmente un sito del reticolo i_0 .
- Si prova ad invertire il segno dello spin del sito i_0 :

$$s_{i_0} \longrightarrow s_{i_0}^p = -s_{i_0}$$

ottenendo la configurazione di prova σ^p .

- Si accetta la configurazione σ^p con probabilità r :

$$r = \min \left(1, \frac{P[\sigma^p]}{P[\sigma]} \right) \quad (4)$$

Il rapporto tra le probabilità può essere scritto usando la 1 e la 2:

$$r_{rat} \equiv \frac{P[\sigma^p]}{P[\sigma]} = \exp(-2\beta s_{i_0}(f_{i_0} + h)) \quad (5)$$

$$f_{i_0} = s_{i_1} + s_{i_2} + s_{i_3} + s_{i_4}$$

con i_1, i_2, i_3, i_4 primi vicini.

Nella pratica si estrae un numero random $x \in [0, 1]$ distribuito uniformemente (si è utilizzato il generatore PCG-64) e si procede nel seguente modo:

$$\begin{cases} \text{se } x < r_{rat} & \Rightarrow \sigma_{k+1} = \sigma^p \\ \text{se } x > r_{rat} & \Rightarrow \sigma_{k+1} = \sigma_k \end{cases} \quad (6)$$

La località dell'algoritmo è dovuta al fatto che la nuova configurazione di prova differisce soltanto

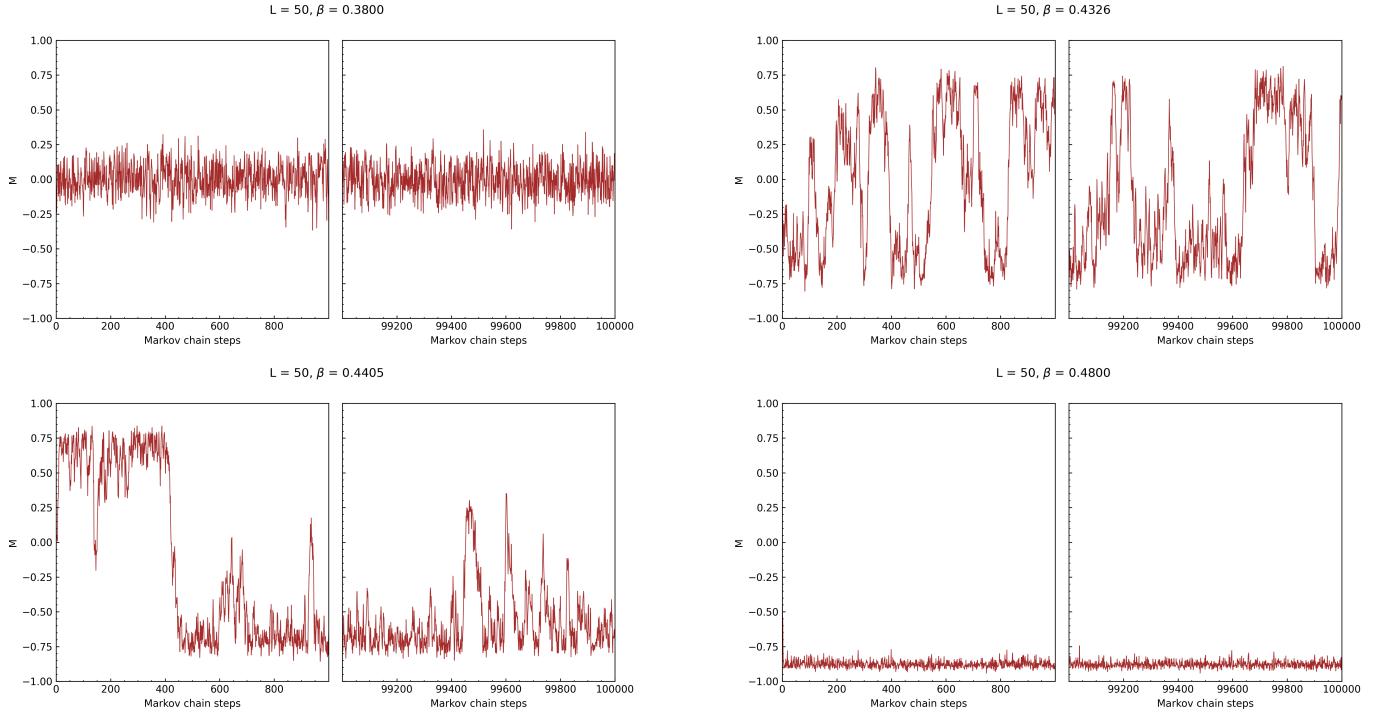


Figura 1: Primi 1000 punti ed ultimi 1000 punti di 4 storie Monte Carlo relative a M per $L = 50$ al variare di β

per uno spin dalla precedente, questo assicura un alto rate di accettanza poiché $P[\sigma^p]/P[\sigma_k] \simeq 1$ e rende più semplice il calcolo numerico di tale rapporto.

Per poter definire i primi vicini anche nel caso di punti di bordo si sono scelte, nel nostro algoritmo, delle condizioni al contorno periodiche.

3 CAMPIONAMENTO

Al variare di L e di β si sono effettuate diverse simulazioni Monte-Carlo. Il reticolo di ogni simulazione è stato inizializzato "a caldo", ovvero selezionando casualmente uno spin tra -1 e $+1$ per ciascun sito. Le quantità da campionare sono la densità di energia e la magnetizzazione:

$$\epsilon = \frac{E}{L^2}; \quad M = \frac{1}{L^2} \sum_i s_i \quad (7)$$

dove la somma di M corre su tutti i siti del reticolo. Abbiamo campionato $N = 10^5$ valori di ϵ ed M . Ciascun campionamento è stato effettuato ogni $n_d = 50$ aggiornamenti Metropolis. Un aggiornamento Metropolis consiste nell'iterare l'algoritmo di Metropolis locale per un numero di volte pari al numero di siti del reticolo (L^2).

In sintesi si è scelto:

$$L \in [10, 80] \quad \text{a passi di 10} \\ \beta \in [0.38, 0.48] \quad \text{in 100 passi}$$

$$N = 10^5 \quad \text{campionamenti} \\ n_d = 50 \quad \text{aggiornamenti Metropolis}$$

Si è verificato che il tempo di termalizzazione del sistema fosse trascurabile osservando i primi e gli ultimi step di alcune storie Monte-Carlo al variare di β .

In Figura 1 riportiamo il caso di $L = 50$ per 4 diversi valori di β . Si nota come il transiente di termalizzazione sia trascurabile rispetto alla dimensione N del campione.

4 METODO BOOTSTRAP CON BINNING

Per stimare gli errori di funzionali non banali si è utilizzato il metodo di Bootstrap con Binning.

Questa tecnica consiste nell'estrare N_f nuovi campioni fake (a partire dal campione originale) formati da N dati selezionati in modo random.

Tali campioni vengono costruiti nel seguente modo: si divide il campione iniziale in k blocchi di lunghezza M e si estraggono k blocchi casualmente con possibili ripetizioni.

Ogni nuovo campione fake sarà formato dai $k \cdot M$

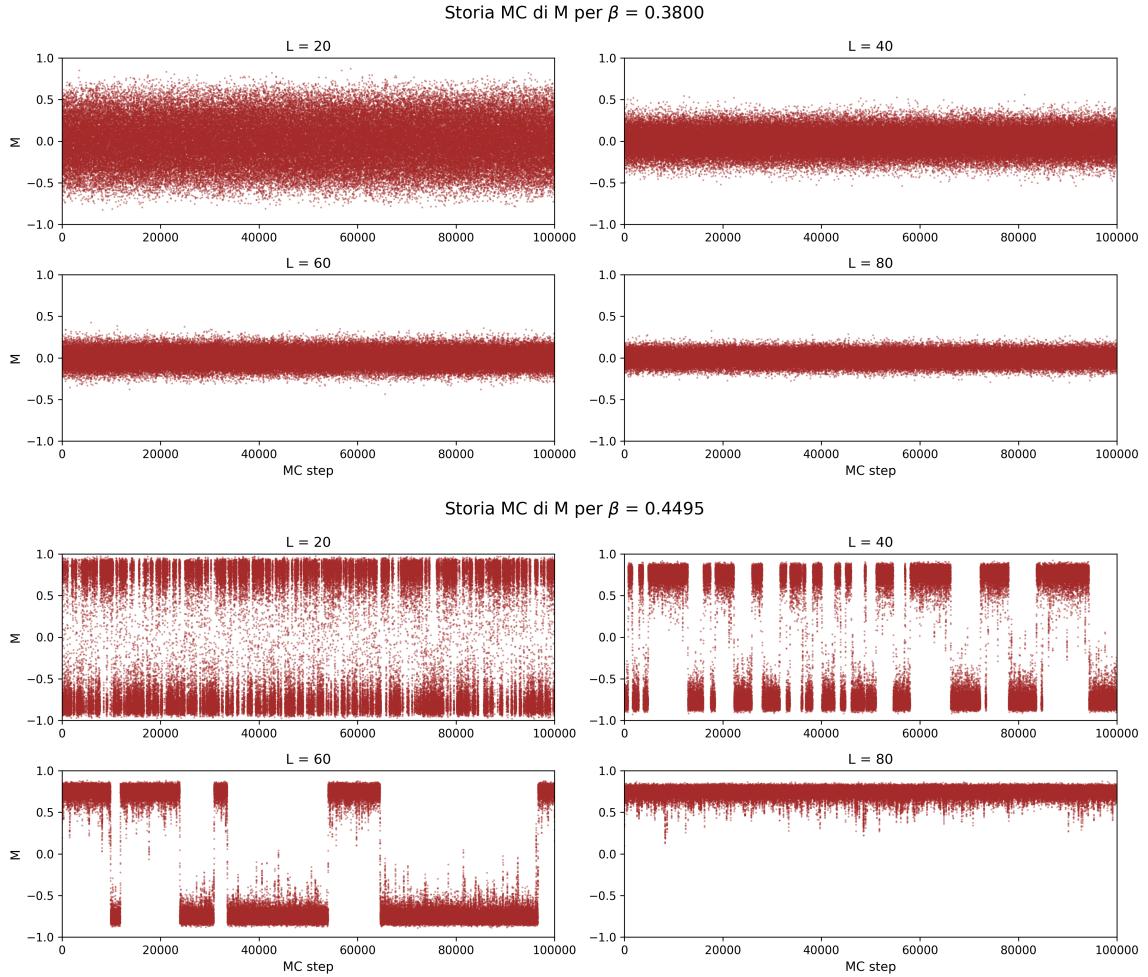


Figura 2: Storie Montecarlo di M per $\beta = 0.38$ (alto) e per $\beta = 0.4495$ (basso) al variare di L .

dati così estratti.

Tale procedimento viene ripetuto per $N_f = 200$ volte e per ogni campione fake si calcola l'estimatore. L'errore del metodo Bootstrap con Binning consiste nel prendere la deviazione standard dalla media degli N_f estimatori.

Il procedimento sopra descritto viene ripetuto variando M :

$$M = 2^k \quad k \in [4, \log_2(N)]$$

si ottiene così una lista di deviazioni standard il cui massimo rappresenta l'errore scelto.

5 SIMMETRIA DEL SISTEMA

La scelta di $h = 0$ implica l'invarianza del sistema sotto Z_2 , ovvero il gruppo delle trasformazioni Identità ed inversione degli spin:

$$E[\sigma] = E[-\sigma].$$

Sfruttando i campionamenti di cui sopra si vuole verificare l'esistenza di una temperatura critica

$$\beta_c = 0.4406868 \quad (8)$$

al di sopra del quale si ha la rottura spontanea della simmetria Z_2 .

Una quantità che permette di capire se la simmetria è rotta spontaneamente è il parametro d'ordine del sistema, che in questo caso corrisponde con il valor medio della magnetizzazione M .

Se $\langle M \rangle = 0$ non si ha rottura della simmetria (fase disordinata), viceversa se $\langle M \rangle \neq 0$ si ha rottura spontanea di simmetria (fase ordinata).

In corrispondenza di β_c si ha che $\langle M \rangle \rightarrow 0$, per questo motivo si può parlare di transizione del secondo ordine.

5.1 Considerazioni sul reticolo finito

Le considerazioni della sezione precedente sono valide nel limite di $L \rightarrow \infty$. Nel caso di reticolo finito

$\langle M \rangle = 0 \forall \beta$ come si può vedere in Figura 2. Infatti per $\beta < \beta_c$ la magnetizzazione fluttua attorno a zero, per $\beta > \beta_c$ invece M oscilla da un valore $+m$ ad un valore $-m$ con un tempo di permanenza tra i due stati simile.

Per questo motivo nella analisi successiva si è considerato il parametro $\langle |M| \rangle$ anzichè $\langle M \rangle$.

All'aumentare di L il rate di transizione tra $\pm m$ diminuisce fino a che il sistema non appare bloccato in uno dei due stati come nell'ultima immagine in basso a destra di Figura 2. Questo è dovuto al tempo finito di campionamento, infatti esiste un tempo Monte-Carlo oltre il quale il sistema riesce a transire per ogni valore finito di L .

5.2 Cumulante di Binder e distribuzione $P(M)$

Ciò che differenzia la fase ordinata da quella disordinata è la forma della distribuzione di probabilità di M come mostrato in Figura 3:

- Per $\beta < \beta_c$ si ha una gaussiana centrata in zero con $\sigma \propto 1/L$.
- Per $\beta > \beta_c$ si ha una distribuzione simmetrica con due picchi in $\pm m$.

Per capire se il sistema si trova nella fase ordinata o disordinata è necessario introdurre un nuovo parametro d'ordine, il cumulante di Binder:

$$B = \frac{\langle M^4 \rangle}{\langle M^2 \rangle^2}. \quad (9)$$

Tale parametro fornisce informazioni sulla distribuzione di probabilità di M nel limite termodinamico:

$$\begin{cases} B \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 3 & \text{Fase disordinata} \\ B \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 1 & \text{Fase ordinata} \end{cases} \quad (10)$$

Per verificare tali andamenti con campionamenti su reticolo finito si sfrutta il fatto che, per grandi L , le correzioni di B rispetto al valore atteso scalano come $1/L^2$.

Si può quindi stimare B eseguendo un fit con tale funzione:

$$B = B_\infty + \alpha x^2 \quad (11)$$

in cui $x = 1/L$.

Per eseguire il fit si sono scelti due valori di β (uno maggiore ed uno minore di β_c) e si sono effettuate ulteriori simulazioni Monte-Carlo al variare di L :

- $\beta_1 = 0.3 \rightarrow L \in [5, 80]$ a passi di 1.
- $\beta_2 = 0.5 \rightarrow L \in [5, 80]$ a passi di 1 e $L \in [90, 140]$ a passi di 10.

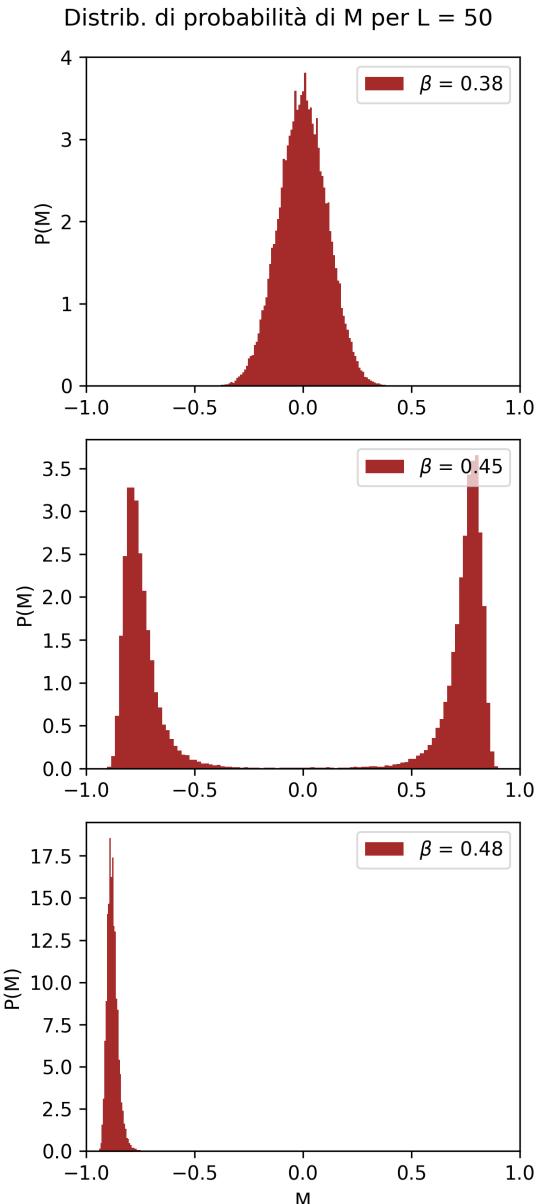


Figura 3: Istogrammi di M per $L = 50$ al variare di β . Nelle prime due immagini si osservano le distribuzioni a media nulla di fase rispettivamente disordinata ed ordinata, nell'ultima immagine il sistema risulta bloccato nella configurazione con $\langle M \rangle = -m$.

I parametri dell'algoritmo N ed n_d sono gli stessi utilizzati nella Sezione 3.

Per ognuna di queste simulazioni si è valutato il cumulante di Binder, l'errore su tale quantità è stato stimato utilizzando il metodo di Bootstrap con Binning descritto nella Sezione 4.

In Figura 4 si mostrano i grafici del cumulante di Binder e del relativo fit per le due fasi.

Si nota che non tutti i valori di B sono stati considerati per i fit, in particolare si sono scelti i valori di B ottenuti dai campionamenti con L più grandi. Per β_1 si sono considerate le misure con $L \geq 10$,

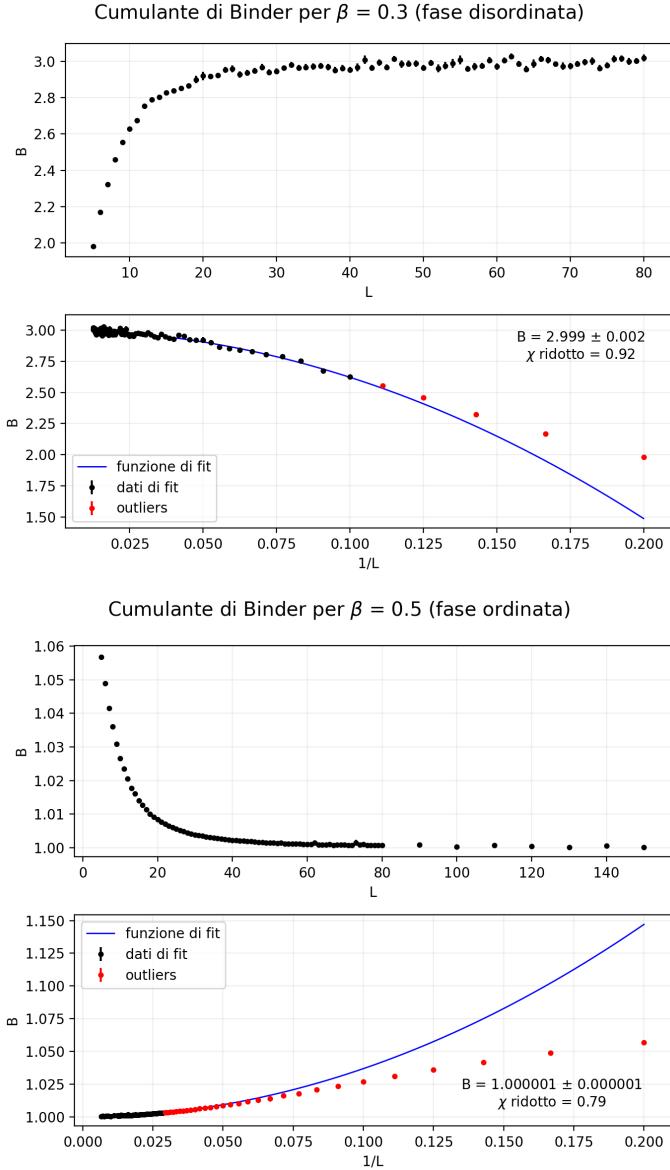


Figura 4: Cumulante di Binder e relativo fit per la fase disordinata (alto) e per la fase ordinata (basso)

per β_2 invece quelle con $L \geq 35$.

I valori di soglia su L sono il risultato di una valutazione del χ^2/ndof e dell'ipotesi che la funzione di fit valga asintoticamente in L .

Si riportano i risultati ottenuti per i due fit:

- Fase disordinata ($\beta_1 < \beta_c$):

$$\beta_\infty = 2.999 \pm 0.002$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 0.92$$

- Fase ordinata ($\beta_2 > \beta_c$):

$$\beta_\infty = 1.000001 \pm 0.000001$$

$$\chi^2/\text{ndof} = 0.79$$

I risultati ottenuti sono in accordo con quelli teorici.

Sulla base delle precedenti considerazioni si conclude che per $\beta = 0.5$ si ha una rottura della simmetria, mentre $\beta = 0.3$ corrisponde alla fase non rotta.

6 ESPONENTI CRITICI

Per studiare il comportamento del sistema attorno alla temperatura critica è possibile stimare gli esponenti critici.

Si definisce la temperatura ridotta:

$$t = \frac{T - T_c}{T_c} \quad (12)$$

L'andamento atteso delle quantità che caratterizzano il sistema per $L \rightarrow \infty$ è legato a t dalle equazioni:

$$\begin{aligned} M &\sim |t|^\beta & \beta &= \frac{1}{8} \\ \chi &= \frac{\partial \langle M \rangle}{\partial h} \sim |t|^{-\gamma} & \gamma &= \frac{7}{4} \\ C &= \frac{\partial \langle \epsilon \rangle}{\partial T} \sim |t|^{-\alpha} & \alpha &= 0 \\ \xi &\sim |t|^{-\nu} & \nu &= 1 \end{aligned}$$

In cui ξ è la lunghezza di correlazione, definita a partire dalla funzione a due punti connessa $\langle s_i s_j \rangle_c$:

$$\langle s_i s_j \rangle_c = \langle s_i s_j \rangle - \langle s_i \rangle \langle s_j \rangle \sim e^{-\frac{|i-j|}{\xi}} \quad |i-j| \rightarrow \infty$$

Per un dato $\beta < \beta_c$, ξ rappresenta la dimensione del più grande dominio di spin orientati allo stesso modo. Per $\beta \rightarrow \beta_c$ la dimensione dei domini con lo stesso orientamento è paragonabile con la dimensione del reticolo stesso (come mostrato in Figura 5). Quindi se il reticolo è infinitamente esteso si ha:

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_c} \xi = \infty$$

6.1 Suscettività e rapporto γ/ν

La suscettività magnetica χ può essere calcolata a partire dalla varianza di M :

$$\chi \propto V [\langle M^2 \rangle - \langle |M| \rangle^2]$$

Tale osservabile è stata calcolata utilizzando i campionamenti della sezione 3, l'errore associato è stato calcolato con il metodo di bootstrap con binning. L'andamento di χ , nel caso di reticolo finito, non diverge per $\beta \rightarrow \beta_c$ come ci si aspetta invece nel limite termodinamico (Figura 6).

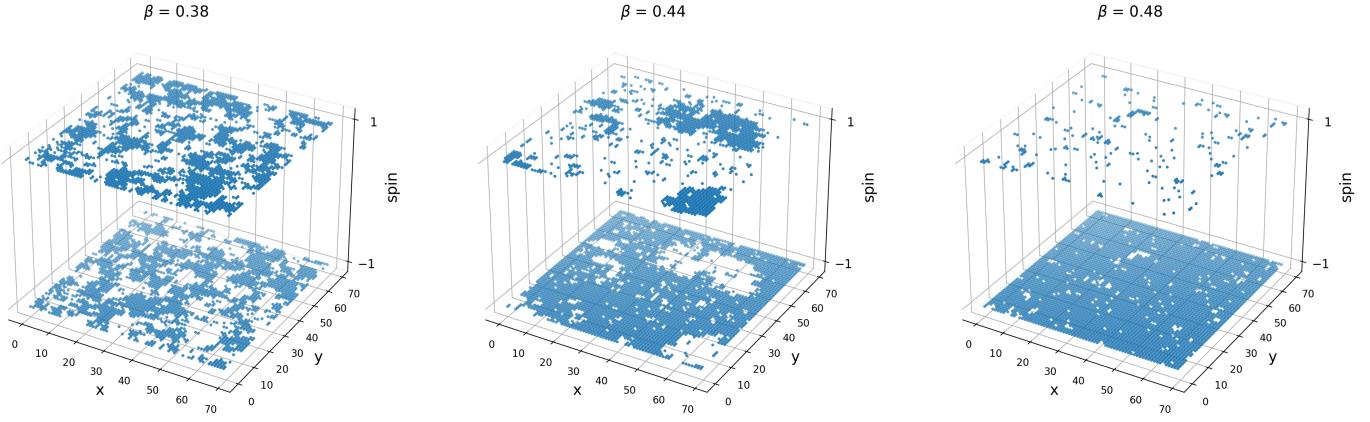


Figura 5: Raffigurazione delle configurazioni di spin di un reticolo con $L = 70$ per diversi valori di β . Si nota come per $\beta < \beta_c$ il sistema si trova nella fase disordinata, per $\beta \sim \beta_c$ si formano macro domini di spin con la stessa orientazione mentre per $\beta > \beta_c$ il sistema rimane bloccato quasi interamente in uno dei due stati.

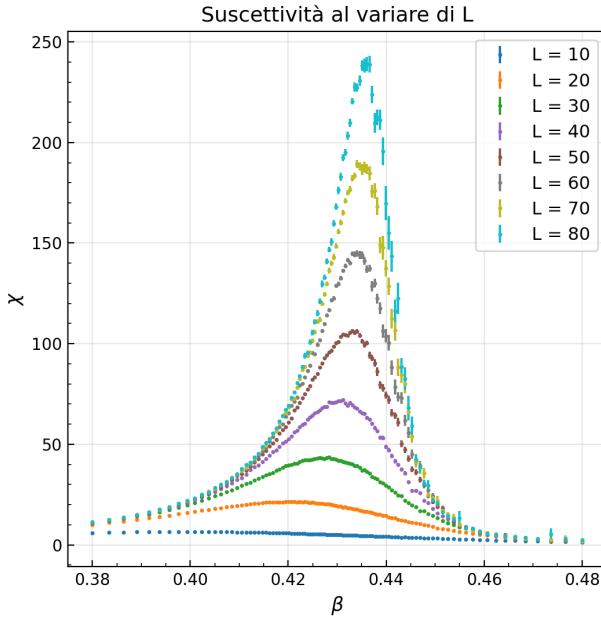


Figura 6: Suscettività al variare di β per alcuni valori di L

Tuttavia tale osservabile presenta un massimo che aumenta all'aumentare di L . Tale massimo si avvicina a β_c all'aumentare di L , l'andamento atteso del massimo al variare di L è:

$$\chi_{max} \sim L^{\gamma/\nu} \quad (13)$$

Si procede stimando il valore di γ/ν , a tal scopo si ricava per $L \in [20, 90]$ (a passi di 5) la posizione $\bar{\beta}_c(L)$ del massimo ed il corrispondente valore $\chi_{max}(L)$ mediante un fit parabolico:

$$f(x) = \chi_{max} - b(\beta - \bar{\beta}_c)^2$$

Tale fit è stato eseguito soltanto sui punti appartenenti ad un intervallo $[\beta_{min}, \beta_{max}]$ attorno al massi-

mo, tale intervallo è stato scelto tenendo conto del χ^2_{rid} dei vari fit. Si riportano in Tabella 1 i risultati.

L	χ_{max}	$\bar{\beta}_c$	χ^2_{rid}
20	21.44 ± 0.02	0.4199 ± 0.0001	0.89
25	31.53 ± 0.04	0.4241 ± 0.0001	1.09
30	43.07 ± 0.07	0.4270 ± 0.0002	0.97
35	56.3 ± 0.1	0.4289 ± 0.0001	1.16
40	71.0 ± 0.2	0.4304 ± 0.0002	1.25
45	87.6 ± 0.2	0.4317 ± 0.0001	0.96
50	105.4 ± 0.3	0.4328 ± 0.0001	0.94
55	123.6 ± 0.4	0.4333 ± 0.0001	1.04
60	143.7 ± 0.6	0.4339 ± 0.0001	1.00
65	164.7 ± 0.7	0.4343 ± 0.0001	1.29
70	186.5 ± 0.8	0.4347 ± 0.0001	1.04
75	212 ± 1	0.4353 ± 0.0001	1.24
80	236 ± 1	0.4355 ± 0.0001	1.12
85	266 ± 2	0.4358 ± 0.0001	0.96
90	290 ± 2	0.4359 ± 0.0001	1.21

Tabella 1: Risultati del fit parabolico in un intorno del massimo di χ per diversi valori di L .

Usando i punti L , χ_{max} di Tabella 1 si è realizzato un altro fit partendo dal modello di equazione 13:

$$f(x) = a + bx^c \quad \left(c = \frac{\gamma}{\nu} \right)$$

Il rapporto tra gli esponenti critici ottenuto è in accordo con il valore teorico (1.75):

$$\frac{\gamma}{\nu} = 1.742 \pm 0.006 \quad \chi^2_{rid} = 1.5$$

Un'ulteriore verifica della bontà del modello è stata effettuata piazzando per i valori di L utilizzati nel fit la quantità $\chi_{max} L^{-\gamma/\nu}$, in Figura 7 si mostra come tale quantità rimanga costante per tutti i valori di L .

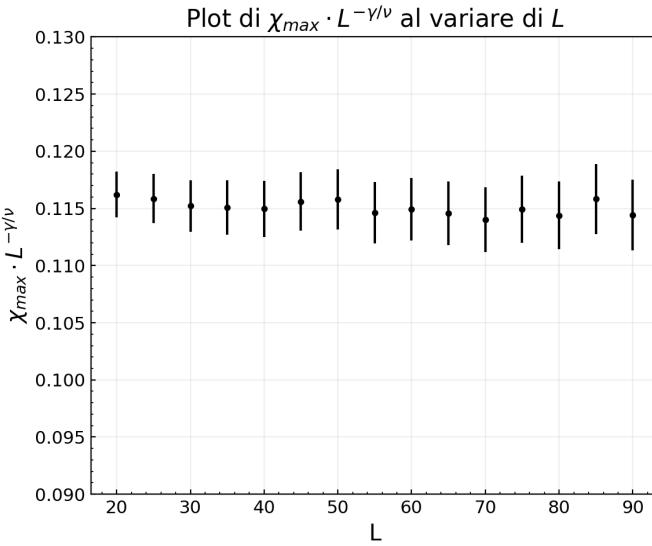


Figura 7: Andamento di $\chi_{max} L^{-\gamma/\nu}$ al variare di L . L'errore su tale quantità è stato calcolato usando le formule note di propagazione.

6.1.1 Ipotesi di scaling per χ

Per stimare gli indici γ e ν introduciamo l'ipotesi di scaling: intorno alla transizione (in cui $\xi \rightarrow \infty$) il sistema perde completamente memoria della sua struttura microscopica. In tali condizioni l'unica quantità rilevante è il rapporto L/ξ . Si ha quindi:

$$\chi(\beta, L) = L^{\gamma/\nu} \phi((\beta - \beta_c) L^{1/\nu}) \quad (14)$$

L'equazione 14 permette di capire come si sposta il massimo della suscettività al variare di L . In particolare, fissato L , ad un massimo di $\chi(\beta)$ corrisponde un massimo \bar{x} di $\phi(x)$:

$$\bar{x} = (\beta_{pc}(L) - \beta_c) L^{\frac{1}{\nu}} \rightarrow \beta_{pc} = \beta_c + \bar{x} L^{-\frac{1}{\nu}} \quad (15)$$

Usando la 15 come equazione di fit (con parametri liberi β_c, \bar{x}, ν) si può ricavare una stima di ν e di β_c . Utilizzando i dati di Tabella 1 si ottengono i seguenti risultati:

$$\beta_c = 0.4401 \pm 0.0002 \quad (16)$$

$$\nu = 0.94 \pm 0.02 \quad (17)$$

$$\chi_{rid}^2 = 1.23 \quad (18)$$

Tali risultati sono compatibili con i valori attesi di $\nu = 1$ (entro 3 sigma) e $\beta_c = 0.440$.

Sfruttando inoltre il risultato già ottenuto per γ/ν è infine possibile ricavare γ :

$$\gamma = 1.64 \pm 0.04$$

Compatibile entro 3 sigma dal valore atteso $\gamma = 1.75$.

6.1.2 Verifica dell'ipotesi di scaling per χ

L'equazione 14 può essere riscritta isolando ϕ e sostituendo i valori teorici degli esponenti critici nel seguente modo:

$$\chi(\beta, L) L^{-7/4} = \phi((\beta - \beta_c) L)$$

L'ipotesi di scaling può essere quindi verificata esplicitamente riportando la quantità $\chi L^{-7/4}$ come funzione della variabile di scaling $x = (\beta - \beta_c) L$.

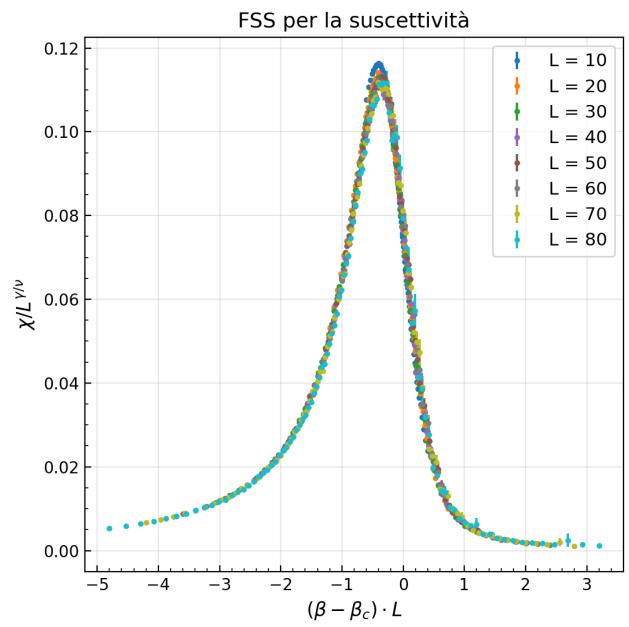


Figura 8: Andamento di $\chi L^{-7/4}$ al variare di x .

In Figura 8 si nota che, al variare di L , tutte le curve risultano sovrapposte verificando così l'ipotesi di scaling.

6.2 Calore specifico

Il calore specifico si può esprimere in termini della varianza della densità di energia ϵ :

$$C \propto V [\langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2]$$

Come per la suscettività anche questa osservabile è stata calcolata usando i campionamenti della sezione 3 e l'errore è stato calcolato con il metodo di bootstrap con binning.

In Figura 9 si riporta l'andamento di C per diversi valori di L .

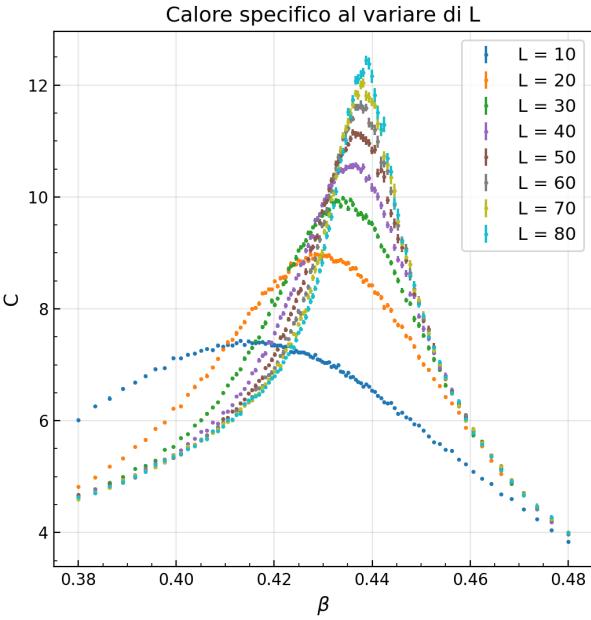


Figura 9: Andamento di C al variare di β per valori di L nell’intervallo $[10,80]$ a passi di 10.

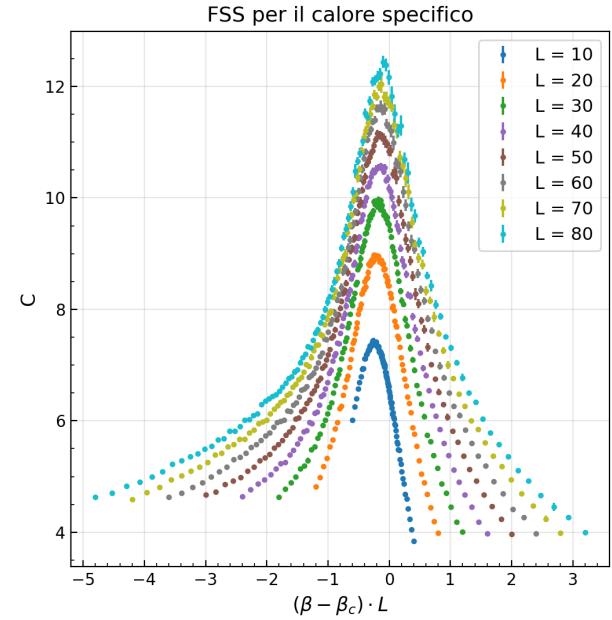


Figura 10: Andamento di $C/L^{\alpha/\nu}$ in funzione di $(\beta - \beta_c)L^{1/\nu}$ per valori di L nell’intervallo $[10,80]$ a passi di 10.

Si vede come nel caso di reticolo finito il calore specifico ad L fissato presenta un picco nell’intorno della temperatura critica. Come per la suscettività l’ampiezza del massimo cresce all’aumentare di L ed il valore di β per cui si ha il picco tende ad avvicinarsi a β_c .

Invece l’andamento atteso nel limite di reticolo infinito è :

$$C \sim |t|^{-\alpha}. \quad (19)$$

6.2.1 Ipotesi di scaling per C

L’ipotesi di scaling implica che:

$$C(\beta, L) = L^{\alpha/\nu} \phi((\beta - \beta_c)L^{1/\nu}) \quad (20)$$

in cui i valori teorici sono $\alpha = 0$ e $\nu = 1$.

In Figura 10 si riporta l’andamento di $C/L^{\alpha/\nu}$ per diversi valori di L .

Le curve in Figura 10 non si sovrappongono come atteso. Tuttavia il collasso può essere realizzato aggiungendo ad ogni curva una costante diversa per ciascun valore di L . Le costanti sono state scelte in modo da riportare tutte le curve all’altezza del massimo di quella con $L = 80$.

Il grafico così ottenuto è riportato in Figura 11.

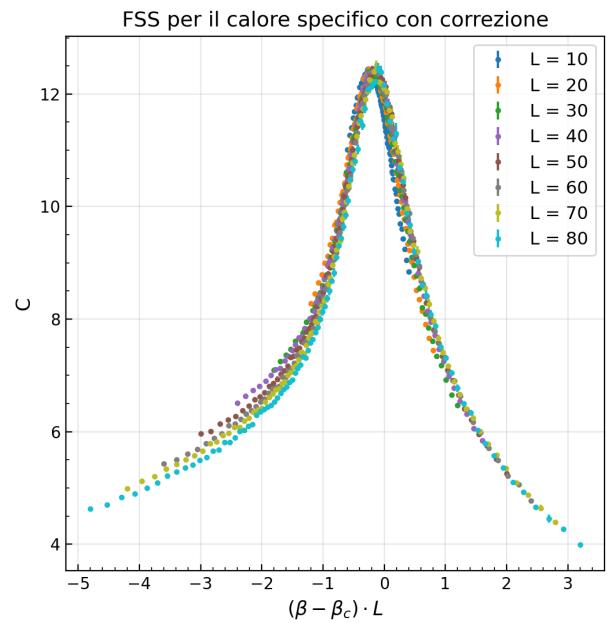


Figura 11: Andamento di $C/L^{\alpha/\nu}$ in funzione di $(\beta - \beta_c)L^{1/\nu}$ per valori di L nell’intervallo $[10,80]$ a passi di 10 con l’aggiunta delle correzioni .

6.3 Magnetizzazione

In un reticolo infinito la magnetizzazione ha il seguente andamento teorico:

$$M \sim |t|^\beta. \quad (21)$$

Invece nel caso di reticolo finito l'andamento è riportato in Figura 12.

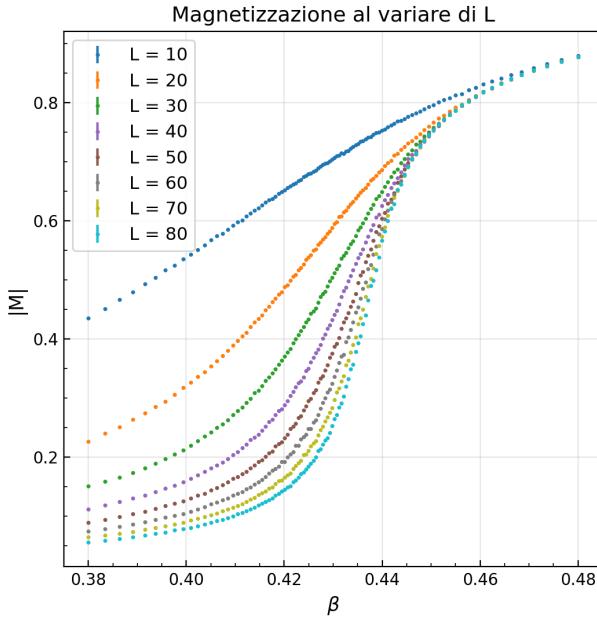


Figura 12: Andamento di $\langle |M| \rangle$ in funzione di β per valori di L nell'intervallo [10,80] a passi di 10.

Si nota che per valori di $\beta < \beta_c$ la magnetizzazione non si annulla, come atteso nel caso di reticolo infinito, ma tende a zero all'aumentare di L .

Al di sotto della temperatura critica ($\beta > \beta_c$) la magnetizzazione tende ad 1 per $\beta \rightarrow \infty$.

6.3.1 Ipotesi di scaling per $|M|$

L'ipotesi di scaling per la magnetizzazione implica che:

$$|M(\beta, L)| = L^{-\beta/\nu} \phi((\beta - \beta_c) L^{1/\nu}) \quad (22)$$

in cui i valori teorici sono $\beta = 1/8$ e $\nu = 1$.

Si verifica tale ipotesi riportando su un plot $|M| L^{1/8}$ in funzione di $(\beta - \beta_c) L$ (Figura 13). La sovrapposizione delle curve dimostra ancora una volta la validità dell'ipotesi di scaling.

7 AUTOCORRELAZIONE DI $|M|$

Si analizza la funzione di autocorrelazione a due punti $C(k)$ al variare di β per L fissato.

$$C(k) = \frac{\langle \delta f_i \delta f_{i+k} \rangle}{\langle \delta f_i^2 \rangle} \quad \delta f_i = f_i - \bar{f}$$

In cui $f_i = (|M|)_i$ campionato tramite l'algoritmo Metropolis.

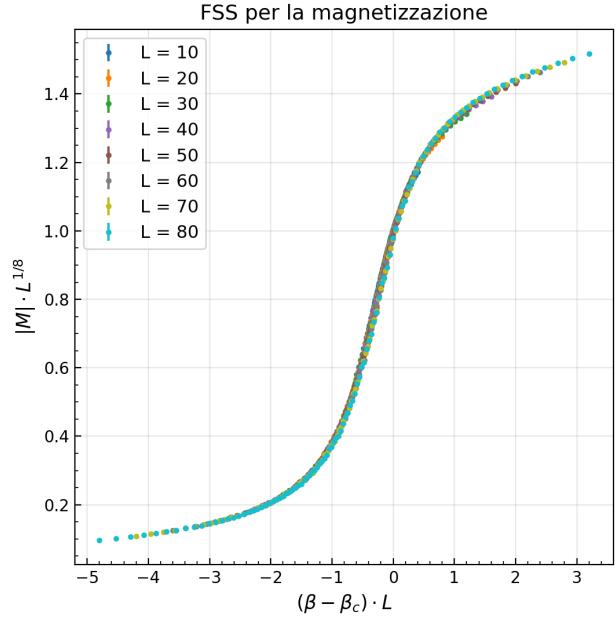


Figura 13: Andamento di $|M| L^{1/8}$ in funzione di $(\beta - \beta_c) L^{1/\nu}$ per valori di L nell'intervallo [10,80] a passi di 10.

Ci si aspetta che tale quantità abbia un andamento esponenziale decrescente in k :

$$C(k) \sim e^{-k/\tau_c}$$

Dove τ_c è il tempo di autocorrelazione definito come:

$$\tau_c \equiv \sum_{k=1}^N C(k) \quad (23)$$

Andando da $\beta < \beta_c$ a $\beta > \beta_c$ ci si aspetta che τ_c aumenti e di conseguenza che la coda dell'esponenziale di $C(k)$ si allunghi. Tale andamento è verificato per $L = 80$ in Figura 14.

Si nota che il tempo di autocorrelazione cresce all'aumentare di β , raggiunge un massimo per $\beta > \beta_c$ e infine diminuisce molto rapidamente.

Come accennato nella Sezione 5.2 per $\beta > \beta_c$ il sistema tende a rimanere bloccato in uno dei due stati con $M = \pm m$. Quando il sistema rimane bloccato perde nuovamente memoria dei suoi stati precedenti, questo spiega l'andamento della funzione $C(k)$ per $\beta > \beta_c$.

8 CRITICAL SLOWING DOWN

In corrispondenza della transizione di fase ci aspettiamo che l'ergodicità venga persa, infatti la catena di Markov rimane bloccata in una delle due fasi. Questo significa che intorno alla temperatura critica

Autocorrelazione di $|M|$ al variare di β

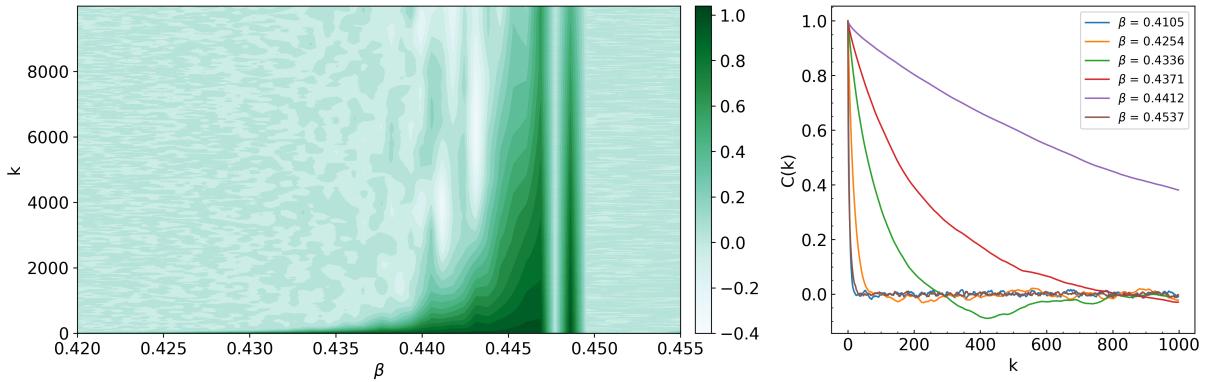


Figura 14: Andamento di $C(k)$ al variare di k sulle y e di β sulle x (a sinistra), $C(k)$ per alcuni valori di β (a destra). Analisi effettuata su un reticolo avente $L = 80$.

si formano domini di dimensione sempre più grande e ci vogliono sempre più step Monte Carlo per perdere memoria della struttura di quest'ultimi.

Sulla base di ciò ci si aspetta che il tempo di autocorrelazione τ_c (Equazione 23) cresca all'aumentare della dimensione tipica dei domini e quindi della lunghezza di correlazione ξ secondo la legge: $\tau_c \sim \xi^z$. Dove z è il coefficiente di critical slowing down.

Tale coefficiente è una caratteristica dell'algoritmo, per il Metropolis vale $z \simeq 1.8$.

Si riporta in un grafico $\ln(\tau_c)$ in funzione $\ln(L)$ per $L \in [10, 80]$ a passi di 10 e per $\beta = \bar{\beta}_c(L)$. Si stima z mediante una interpolazione lineare di tali valori (Figura 15).

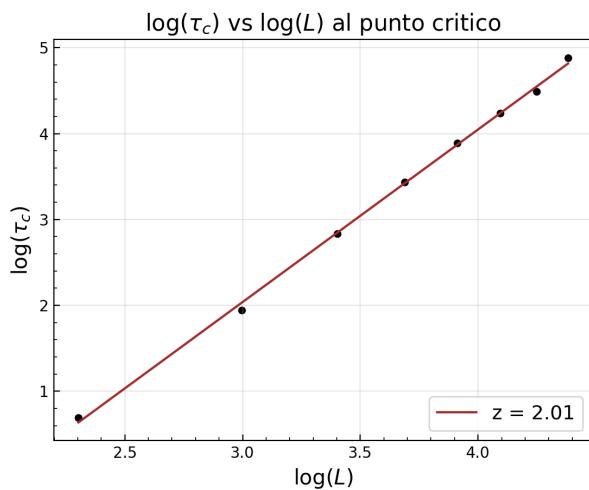


Figura 15: Interpolazione lineare per la stima di z .

Dall'interpolazione si ottiene $z = 2.01$.