

## Modulo 4

## Studio dell'equazione di Burgers

Sara Ardito, Edoardo Gabrielli

Dicembre 2021

## INTRODUZIONE

L'obiettivo di questo progetto è quello di studiare l'equazione di Burgers in una dimensione. A tale scopo si studia l'evoluzione di diverse onde utilizzando come condizioni al bordo quelle periodiche.

## 1 CENNI TEORICI

## 1.1 Introduzione all'equazione di Burgers

L'equazione di Burgers (eq.1) è un'equazione differenziale alle derivate parziali e rappresenta il modello più semplice per descrivere le onde diffusive in fluidodinamica.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{eq.1})$$

Essa può essere ottenuta come la combinazione della equazione di advezione non lineare (eq.2) e della equazione di diffusione (eq.3).

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{eq.2})$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (\text{eq.3})$$

Preso singolarmente la eq.2 porta alla formazione di un fenomeno non lineare: il profilo di un'onda che evolve secondo questa equazione viene distorto nel tempo fino alla formazione di una discontinuità nota come *fenomeno di shock*.

La presenza del termine viscoso invece smussa la discontinuità dovuta a tale fenomeno.

## 2 SOLUZIONI NUMERICHE

Prima di risolvere numericamente l'equazione di Burgers si studiano le soluzioni numeriche di alcune equazioni più semplici.

## 2.1 Parametri numerici e condizioni al bordo

Si considerano sistemi uni-dimensionali con variabile spaziale  $x$  e variabile temporale  $t$ .

Per ognuna delle equazioni studiate si fissa una condizione iniziale  $u(x, t_0)$  e si fa evolvere nel tempo utilizzando come metodo di integrazione un Runge-Kutta di ordine 4.

Si prende una griglia spaziale di dimensione laterale  $L = 10$  e contenente un numero di punti pari a  $N$ . Si fa variare quest'ultimo parametro in modo da modificare la risoluzione della griglia  $dx = L/N$ . Le funzioni  $u(x, t)$ , che evolvono secondo le equazioni alle derivate parziali in analisi, saranno valutate (per ogni istante  $t$ ) su ciascun punto della griglia. Per ciascuna equazione studiata si sono fissate delle condizioni al bordo periodiche:

$$u(0, t) = u(L, t)$$

Si nota che la griglia è composta dai seguenti punti:

$$[0, dx, 2dx, \dots, L - 2dx, L - dx]$$

in modo tale da rispettare la condizione di periodicità.

## 2.2 Equazione di pura advezione

Si considera la seguente equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{eq.4})$$

che descrive la propagazione di un'onda  $u(x, t)$  a velocità caratteristica costante  $c$ .

Preso una condizione iniziale  $u(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}mx\right)$  con  $m = 3$  si studia la stabilità della soluzione al variare del metodo di derivazione rispetto a  $x$  utilizzando come integratore un RK4. Si sono testate le derivate con le differenze finite simmetriche (ordine 2) e il metodo FFT.

Si fissa  $c = 0.1$ , si sceglie una griglia con  $dx = 0.05$  e si fa evolvere la soluzione per  $N_{step} = 5000$  con un  $dt = 0.25$ , che equivale a 1250 tempi fisici.

Questa scelta corrisponde a evolvere il sistema per circa 12 periodi e mezzo (la condizione iniziale torna su se stessa per 12.5 volte).

La scelta di  $dx$  è tale da soddisfare la condizione CFL (eq.5) e rendere l'onda con  $m = 3$  risolvibile.

In Figura 1 si mostra il risultato ottenuto. I due

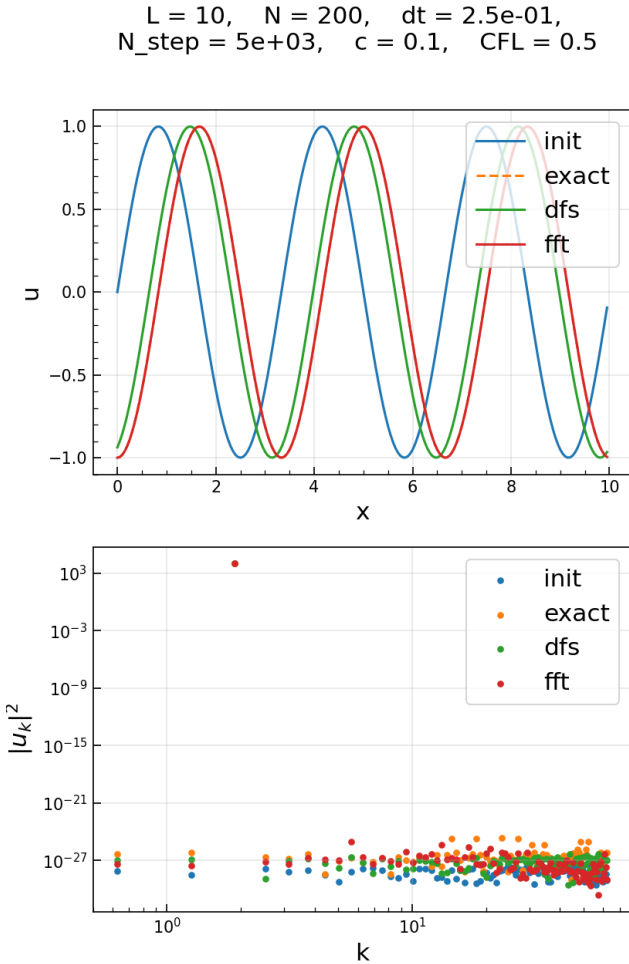


Figura 1: Andamento della soluzione con i metodi di derivazione delle differenze finite simmetriche e FFT confrontati con la soluzione analitica.

metodi di derivazione analizzati sono entrambi stabili con i parametri scelti, tuttavia la soluzione con le differenze finite simmetriche risulta più sfasata di quella con la derivata FFT (in Figura 1 la soluzione con FFT è sovrapposta a quella analitica).

Questo è in accordo con quanto osservato nell'appendice A.4, in cui si mostra che la derivata FFT ha precisione in fase maggiore rispetto ai metodi alle differenze finite.

Si ripete la simulazione aumentando il  $dt$  fino al valore critico  $dt = 0.46$  e si evolve per  $N_{step} = 462$  ovvero per un tempo fisico finale di circa 212, tale

valore è stato scelto in modo tale da rendere evidente il comportamento della soluzione.

Si riporta il risultato in Figura 2. La soluzione

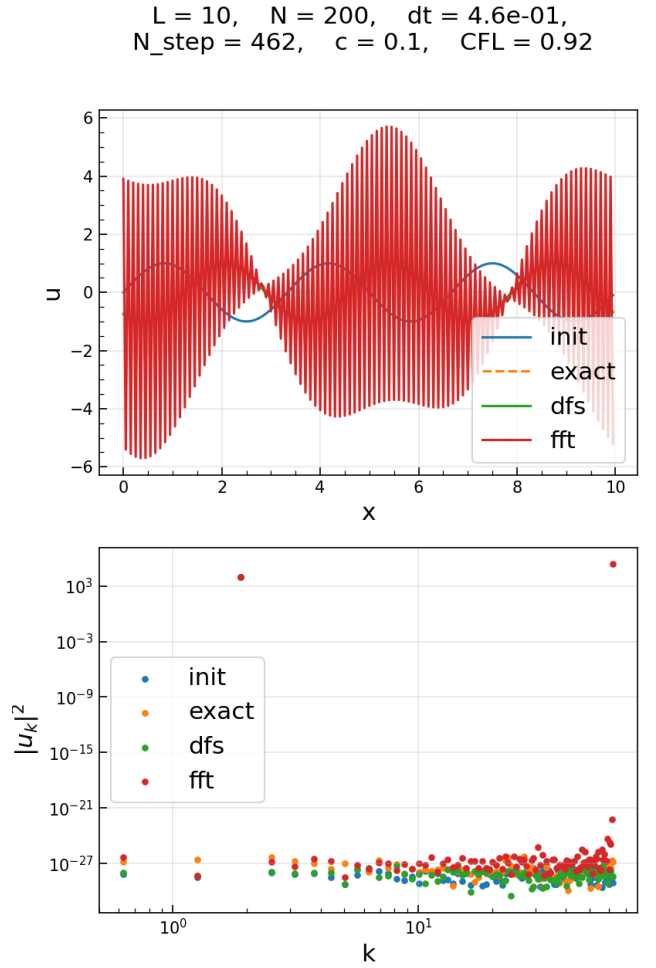


Figura 2: Andamento della soluzione con i metodi di derivazione delle differenze finite simmetriche e FFT confrontati con la soluzione analitica.

con le differenze finite simmetriche è rimasta stabile mentre quella con la derivata FFT è instabile per questo valore di  $dt$ .

Questa instabilità è dovuta alla condizione CFL:

$$K \equiv \frac{c dt}{dx} \lesssim 1 \quad (\text{eq.5})$$

Quando il valore di  $K$  tende ad 1 i metodi iniziano a diventare instabili, il primo a mostrare tale instabilità è il metodo FFT, aumentando ulteriormente il  $dt$  anche le differenze finite simmetriche divergono.

La maggiore stabilità del metodo DFS è dovuta al fatto che i metodi di derivazione con le differenze finite introducono una dissipazione numerica (che diminuisce all'aumentare dell'ordine della derivata), questa caratteristica ritarda la comparsa della instabilità ad alti  $k$ .

### 2.3 Equazione di advezione non lineare

Si sostituisce il termine costante  $c$  di eq.4 con la stessa funzione  $u$  ottenendo così una equazione non lineare:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (\text{eq.6})$$

In questa equazione il termine  $uu_x$  porta alla distorsione del profilo d'onda e alla formazione di fenomeni non lineari come lo *shock*.

Il tempo caratteristico di questa equazione è detto *turnover time*: data una condizione iniziale

$$u(x) = \sin\left(m \frac{2\pi}{L} x\right) \equiv \sin(kx)$$

si definisce il *turnover time* come

$$\tau_o \sim \frac{1}{k |u_k|} \quad (\text{eq.7})$$

con  $u_k$  densità spettrale di energia del modo  $k$ . Si risolve numericamente l'equazione usando come integratore il RK4 e per la derivata rispetto a  $x$  le differenze finite simmetriche.

$L = 10, \quad N = 200, \quad dt = 1.0\text{e-}02, \quad N\_step = 9\text{e}+01$

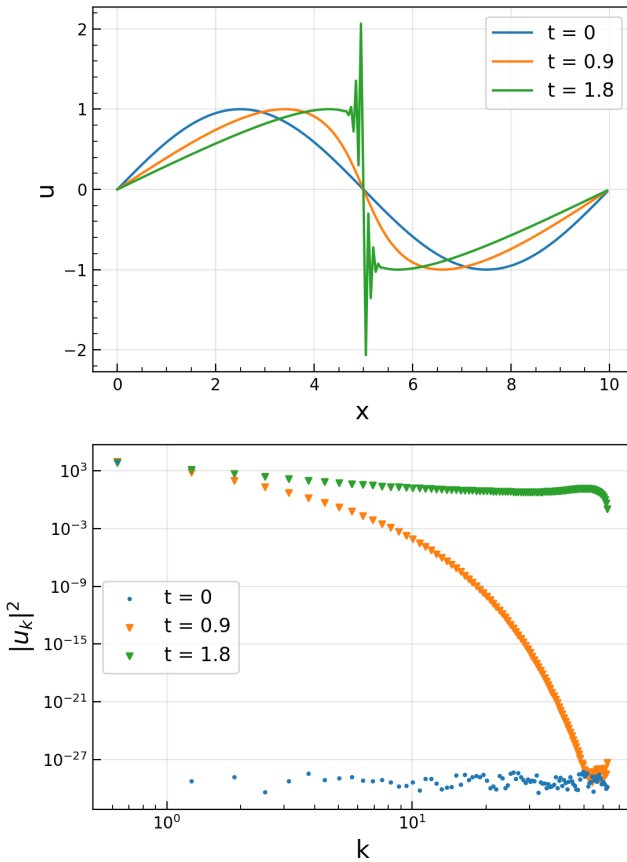


Figura 3: Andamento della soluzione numerica per l'equazione di advezione non lineare con il metodo di derivazione delle differenze finite simmetriche.

In Figura 3 si riporta la soluzione con la condizione iniziale  $u(x) = \sin(k_{in}x) = \sin(\frac{2\pi}{L}x)$  ottenuta con  $N = 200, L = 10, dt = 0.1, dx = 0.05$  dopo circa  $T = 2$  tempi fisici. Tale tempo  $T$  è stato scelto in modo che

$$T \gg \tau_o(k_{in}) \simeq 0.016$$

in questo modo si osserva il sistema su un tempo scala molto maggiore di quello caratteristico.

Si nota come il metodo delle differenze finite simmetriche sia instabile, infatti in Figura 3 l'ampiezza dell'onda finale aumenta e diverge per tempi fisici maggiori a quelli mostrati.

Si ripete la stessa simulazione utilizzando per la derivata in  $x$  il metodo FFT, si riporta in Figura 4 il risultato. Anche questo metodo di derivazione risul-

$L = 10, \quad N = 200, \quad dt = 1.0\text{e-}02, \quad N\_step = 1\text{e}+02$

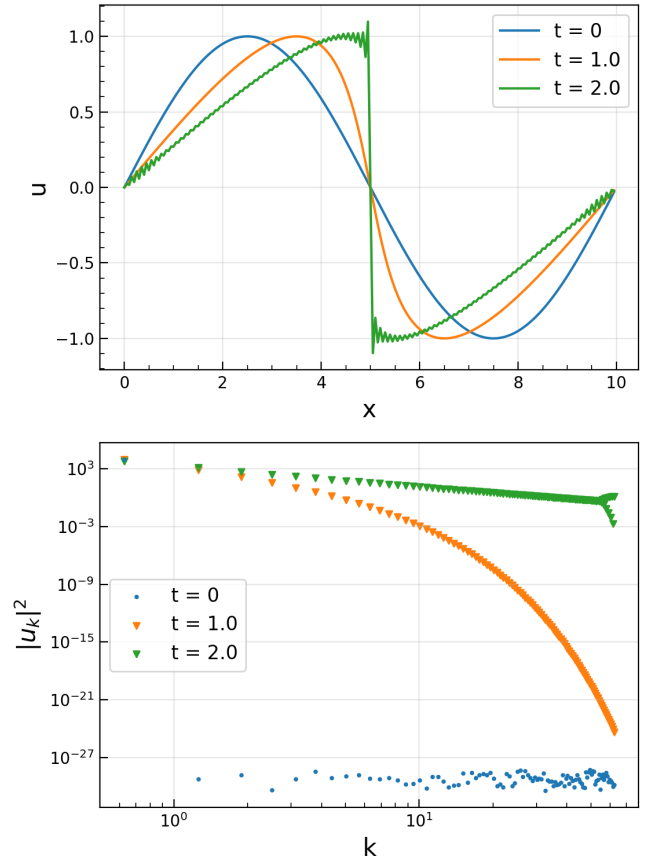


Figura 4: Andamento della soluzione numerica per l'equazione di advezione non lineare con il metodo di derivazione FFT.

ta instabile per l'equazione in analisi, si osservano delle oscillazioni su tutta la forma d'onda associabili al fenomeno di Gibbs.

Si osserva il comportamento della soluzione numerica per tempi fisici precedenti e successivi a  $\tau_o$ .

Si utilizza come metodo di integrazione un Runge-Kutta di ordine 4 e come metodo di derivazione quello di FFT (Figura 5).

Durante l'evoluzione di una condizione iniziale  $u$  secondo l'eq.2 con  $m = 2$  si eccitano progressivamente i modi con  $k$  sempre maggiore, quindi l'energia viene progressivamente trasferita verso le scale sempre più piccole. In Figura 5 si osserva che per tempi

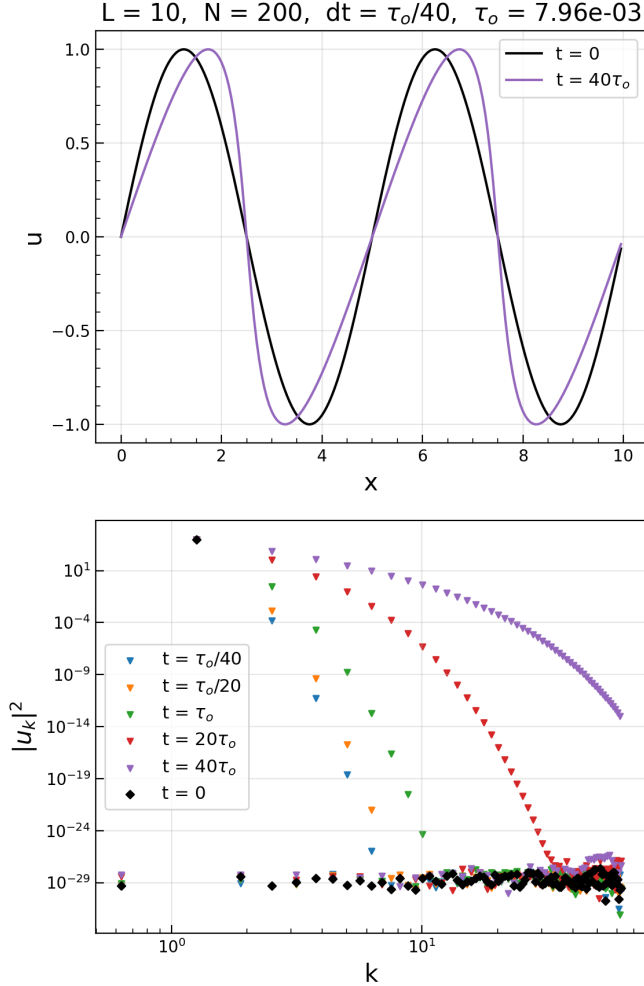


Figura 5: Andamento della soluzione numerica della equazione in analisi. Nella figura in alto si rappresenta la soluzione nello spazio  $u/x$  all'istante iniziale e finale, in basso si mostra la densità spettrale di energia della soluzione all'istante iniziale, finale e per 4 valori temporali intermedi.

fisici inferiori a  $\tau_o$  si eccitano solo i primi modi  $k$  maggiori del  $k = m \frac{2\pi}{L}$  della condizione iniziale. Per tempi fisici superiori a  $\tau_o$  si eccitano i modi aventi  $k$  maggiore di quello della condizione iniziale.

I modi eccitati dal fenomeno non lineare sono quelli aventi  $m$  multiplo di quello di  $u(x, 0)$ .

Si può concludere quindi che il turnover time è il tempo caratteristico oltre il quale l'energia viene trasferita a tutte le scale disponibili.

Si osserva inoltre che la soluzione con il metodo di derivazione FFT rimane stabile negli intervalli temporali analizzati (fino a  $40\tau_o$ ), se ne conclude

che l'instabilità numerica si presenta per tempi fisici molto maggiori del turnover time.

## 2.4 Equazione di advezione-diffusione

Si studia la seguente equazione:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - c \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{eq.8})$$

che descrive la propagazione di un'onda la cui ampiezza diminuisce nel tempo a causa del termine diffusivo.

Si riporta un esempio di evoluzione temporale secondo la eq.8 con condizione iniziale una gaussiana ( $\mu = 5, \sigma = 0.2$ ) in Figura 6. La gaussiana iniziale trasla per effetto del termine di advezione e si abbassa allargandosi per effetto di quello diffusivo.

$L = 10, N = 200, dt = 5.0e-02, \nu = 4e-03$   
 $N\_step = 6e+02, c = 0.1, CFL = 0.10$

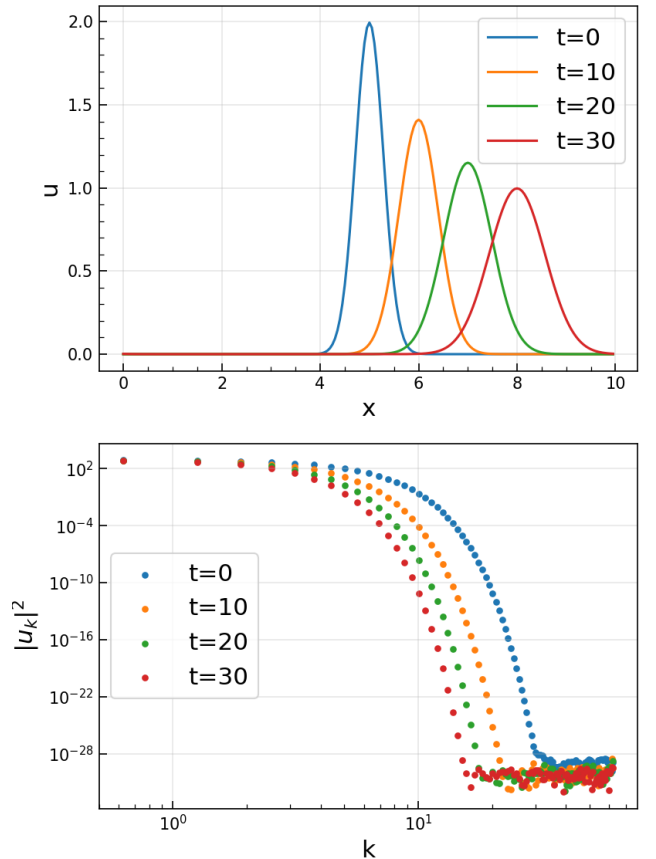


Figura 6: Soluzione numerica dell'equazione di diffusione-advezione con condizione iniziale gaussiana ( $\mu = 5, \sigma = 0.2$ ).

È noto che la scala caratteristica temporale di diffusione  $\tau_d$  per un'onda di modo  $k$  può essere espressa

come:

$$\tau_d \sim \frac{1}{\nu k^2}. \quad (\text{eq.9})$$

$\tau_d$  si definisce *tempo diffusivo* e rappresenta il tempo oltre il quale la riduzione di ampiezza dell'onda di modo  $k$  diventa confrontabile con l'ampiezza dell'onda iniziale.

Nel secondo grafico in Figura 6 risulta evidente che i modi della gaussiana sono abbattuti esponenzialmente nel tempo, si può allora realizzare una regressione esponenziale per ciascun modo  $k$  con la funzione modello:

$$|u_k|^2 = Ae^{-2t/\tau_d}$$

in questo modo si ottiene una stima di  $\tau_d(k)$  confrontabile con quello atteso dalla eq.9.

Si fa evolvere la gaussiana di Figura 6 per circa 500 tempi fisici, si estraggono i valori  $|u_k|^2$  ad ogni step temporale dell'algoritmo. In questo modo si ottiene, per ciascun  $k$ , una curva temporale della relativa densità spettrale di energia.

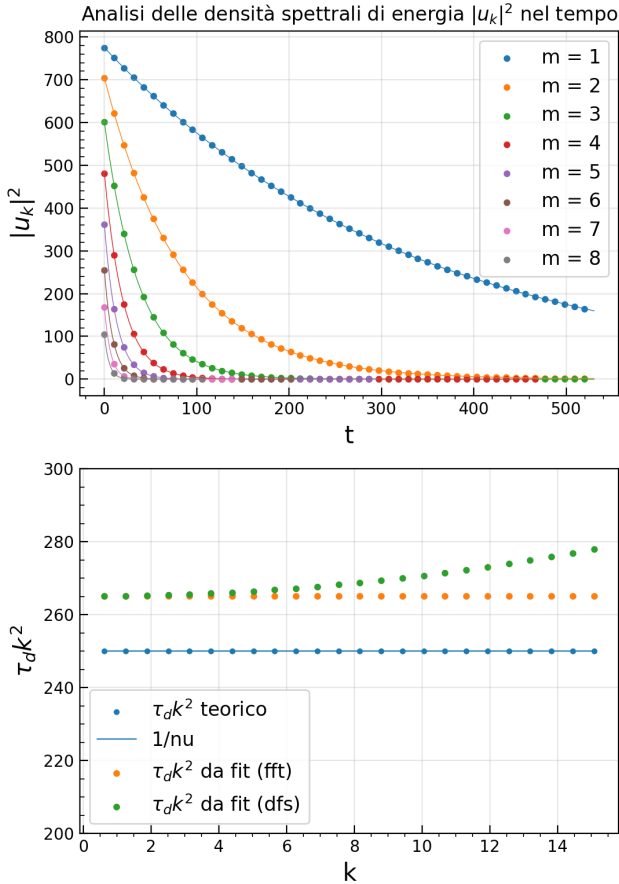


Figura 7: (In alto) Fit esponenziale degli  $|u_k|^2$  in funzione del tempo per diversi valori di  $k$  (si rappresentano i primi 8 modi  $m$ ). (In basso) Verifica dell'andamento  $\tau_d(k)$  per i primi 24 modi con i metodi di derivazione FFT e DFS e confronto con risultato teorico.

In Figura 7 si riportano i dati campionati e le relative curve di fit (in alto) per i primi 8 modi ottenuti da simulazioni con il metodo di derivazione FFT.

Nella stessa Figura (in basso) si riportano i tempi diffusivi  $\tau_d(k)$  ottenuti dai fit moltiplicati per i relativi  $k^2$ . Si è scelto di analizzare i primi 24 modi poiché sono quelli che non vengono completamente abbattuti dalla diffusione nel tempo fisico analizzato.

Nello stesso grafico in basso la curva blu rappresenta i valori teorici secondo l'equazione eq.9:

$$\tau_d k^2 \sim \frac{1}{\nu}$$

Gli altri punti rappresentano l'andamento di  $\tau_d k^2$  (con  $\tau_d$  ottenuti da fit) per simulazioni effettuate con il metodo di derivazione FFT in giallo e differenze finite simmetriche in verde.

Si osserva che nel caso del metodo FFT l'andamento è compatibile con quello teorico ma la costante ottenuta dalle simulazioni  $\hat{\nu}^{-1} \sim 265$  differisce da quella attesa:

$$\nu = 4 \cdot 10^{-3} \quad \hat{\nu} = 3.8 \cdot 10^{-3}$$

Il metodo di derivazione DFS mostra un andamento che si discosta da quello teorico: per  $k$  piccoli:  $\frac{1}{\hat{\nu}}$  è lo stesso di quello ottenuto con il metodo FFT, per  $k$  grandi invece tale valore aumenta. Questo può esser dovuto alla inferiore precisione in fase del metodo DFS rispetto a quello FFT.

Il termine diffusivo può essere utilizzato per rendere stabile l'equazione di advezione con il metodo di derivazione FFT.

Fissato un tempo fisico finale  $T \sim 200$  si seleziona  $\nu$  in modo tale da diffondere i modi con  $k$  più alto (tra quelli disponibili nella griglia  $x$ ) responsabili della instabilità del metodo FFT (Figura 2).

Allo stesso tempo si sceglie un  $\nu$  tale da rendere trascurabile la diffusione del modo scelto come C.I. all'istante finale  $T$ .

Quindi se  $k_M$  è il massimo  $k$  ottenibile dalla griglia  $x$  e  $\tilde{k}$  è il modo iniettato a  $t = 0$  si sceglie  $\nu$  tale che:

$$\frac{1}{k_M^2 T} \ll \nu \ll \frac{1}{\tilde{k}^2 T}$$

Come nel caso di Figura 2 si sceglie il modo con  $m = 3$ , quindi il valore di  $\nu$  scelto è  $3 \cdot 10^{-5}$ . In Figura 8 si riporta il risultato finale. Si osserva che la soluzione numerica è stabile come atteso.

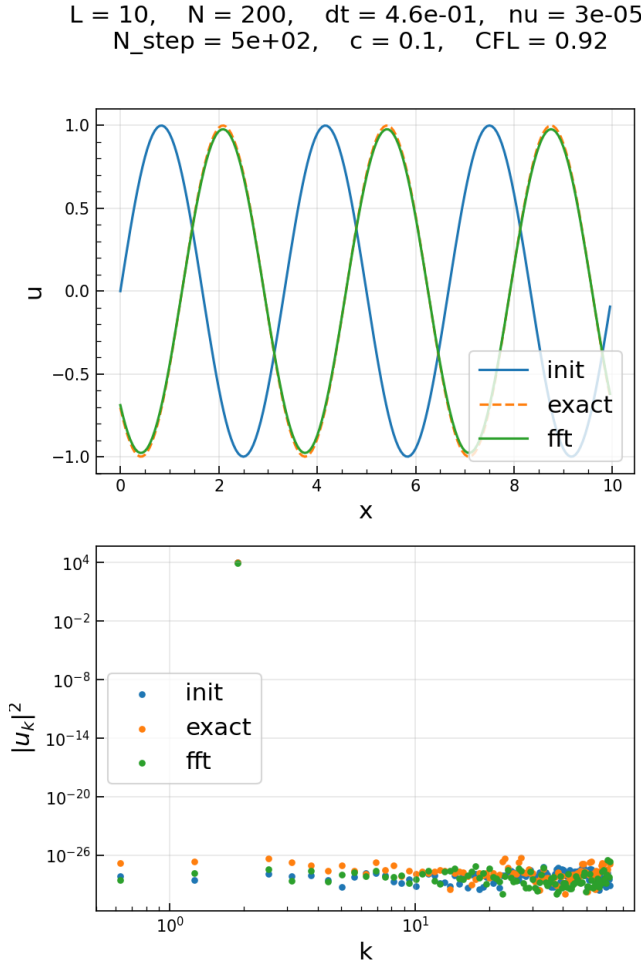


Figura 8: Soluzione dell'equazione di diffusione-advezione con il metodo di derivazione FFT.

### 2.5 Equazione di Burgers

Si studia l'equazione di Burgers:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{eq.10})$$

che descrive l'evoluzione non lineare di un'onda modulata dalla diffusione.

I tempi scala caratteristici di evoluzione dell'equazione di Burgers sono quello diffusivo  $\tau_d$  e quello non lineare  $\tau_o$ . Tali tempi scala dipendono da alcuni parametri di sistema ( $\nu$ , il modo iniettato  $m$ , l'ampiezza dell'onda iniziale), modificando tali parametri si studia l'effetto della variazione di  $\tau_d, \tau_o$  sulla evoluzione dell'onda.

Si sceglie come condizione iniziale

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{2\pi}{L}mx\right) \text{ con } m = 5$$

e come integratore si utilizza RK4, infine come metodo di derivazione le differenze finite simmetriche. I casi in analisi sono i seguenti:

$$\tau_o \gg \tau_d$$

In questo caso la dinamica è dominata dal termine diffusivo: la parte non lineare della equazione non ha il tempo di svilupparsi quindi l'onda iniziale viene diffusa.

$$\tau_o \sim \tau_d$$

Si osserva il sistema dopo circa  $3\tau_d$  (tempo diffusivo del modo iniettato) e si riporta il risultato in Figura 9, anche in questo caso l'unico termine a influenzare l'evoluzione è quello diffusivo.

Questo perché i modi che si eccitano nella cascata non lineare hanno un  $k$  sempre maggiore, ma  $\tau_d \sim k^{-2}$  mentre  $\tau_o \sim (k \cdot u_k)^{-1}$  (per tali modi "in formazione"  $u_k$  è molto inferiore rispetto all' $u_k$  del modo iniettato) quindi per tali modi si ritorna al caso precedente in cui  $\tau_o \gg \tau_d$  e di conseguenza prevale la diffusione.

È inoltre necessario ricordare che per effetto della diffusione anche  $u_k$  del modo iniettato diminuisce nel tempo, infatti dopo  $3\tau_d$  tale ampiezza spettrale è diminuita di un fattore  $e^{-3} \sim 1/20$ . Quindi da una condizione iniziale con  $\tau_d \sim \tau_o$  il sistema evolve esponenzialmente verso il caso della sezione precedente ( $\tau_o \gg \tau_d$ ).

$$\tau_o \ll \tau_d$$

Si modificano i parametri di sistema in modo tale da ottenere  $\tau_o \ll \tau_d$  e si osserva il sistema dopo circa  $400\tau_o$  ( $0.02\tau_d$ ) riferiti al modo iniettato. In Figura 10 si ha la formazione del tipico spettro dell'equazione non lineare. Tuttavia a differenza di quanto osservato nella sezione 2.3 tale spettro viene "troncato" nella parte finale a causa della diffusione: i modi con  $k$  più alto tra i disponibili nella griglia vengono diffusi.

Prendiamo ad esempio il modo più grande per la griglia scelta  $K \simeq 313$ , in tal caso il tempo diffusivo è circa  $10^4$  volte più piccolo rispetto a quello del modo iniettato ( $\tau_d(K) \sim 2$ ). Quindi per i modi con  $k$  più alto il fenomeno di diffusione al tempo fisico di osservazione risulta predominante rispetto al fenomeno dovuto alla non linearità.

Questa caratteristica di "bilanciamento" tra parte non lineare e parte diffusiva permette una stabilizzazione del fenomeno dello shock: l'energia trasferita alle scale sempre più piccole (che producevano instabilità numerica nella sezione 2.3) viene in questo caso diffusa.

In Figura 11 si mostra un ingrandimento nella zo-



$L = 10, N = 1000, dt = 5.0e-04, \nu = 0.1,$   
 $N\_step = 6e+03, \tau_o = 1.27, \tau_d = 1.01$

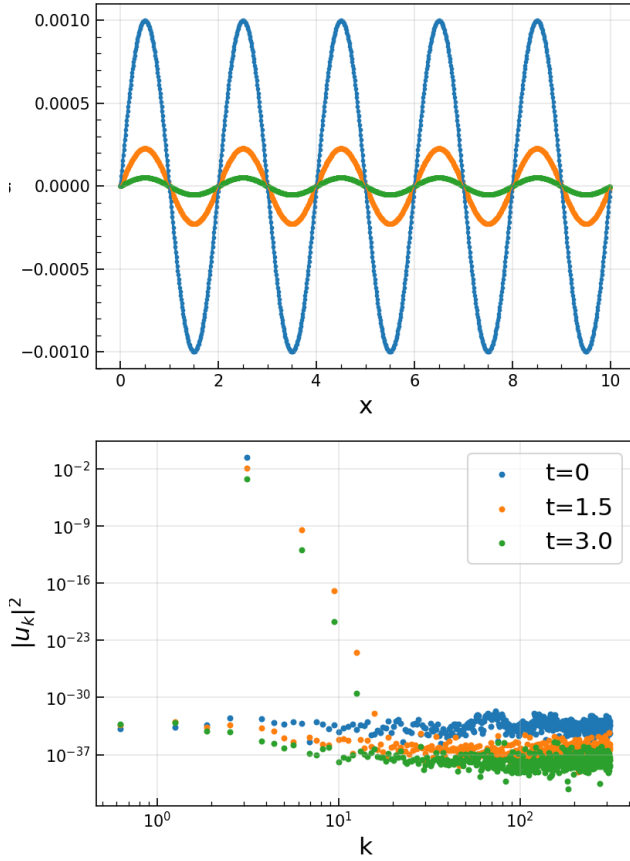


Figura 9: Andamento della soluzione numerica nel caso  $\tau_o \sim \tau_d$ .

na di shock della Figura 10, si mette in evidenza il fatto che la simulazione abbia effettivamente risolto il brusco cambiamento di segno della  $u$ .

### 2.5.1 Studio dello spettro dello shock

Lo spettro formato dalla evoluzione di una funzione per effetto della equazione di Burgers può essere diviso in tre aree:

- *Spettro di iniezione*: zona dello spettro in cui si inietta una condizione iniziale.
- *Spettro inerziale*: zona dei  $k$  che seguono l'evoluzione della equazione non lineare.
- *Spettro diffusivo*: zona dello spettro in cui domina la diffusione.

Ci si aspetta che l'andamento nella zona inerziale sia del tipo  $1/k^2$ : si prende l'equazione non lineare e se ne analizza il modulo quadro in trasformata di

$L = 10, N = 1000, dt = 5.0e-02, \nu = 5e-06,$   
 $N\_step = 9e+03, \tau_o = 1.27, \tau_d = 2.03e+04$

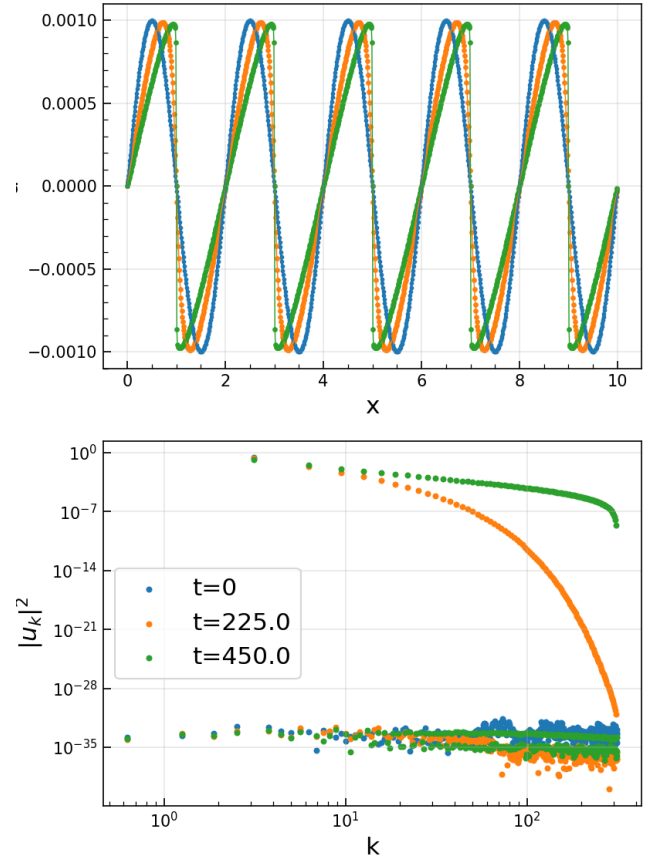


Figura 10: Andamento della soluzione numerica nel caso  $\tau_o \ll \tau_d$

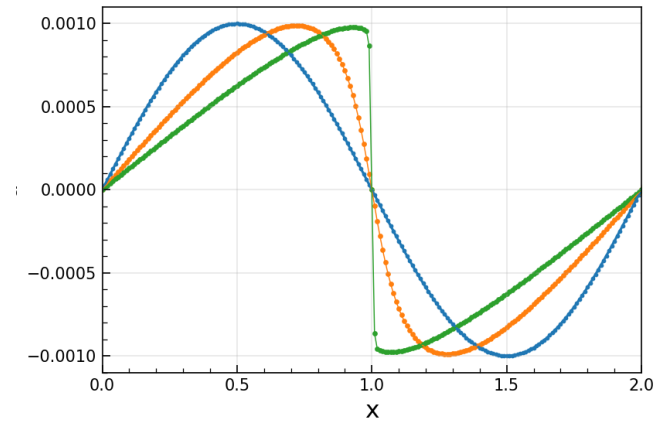


Figura 11: Ingrandimento della soluzione  $\tau_o \ll \tau_d$  nei pressi di una zona di shock.

Fourier:

$$|\omega^2 u_k^2| = |k^2 u_k^4| \rightarrow |u_k|^2 \sim \frac{1}{k^2}$$

L'andamento nella zona diffusiva è invece di tipo esponenziale decrescente: la soluzione analitica della equazione di diffusione con condizione iniziale

$u(x, 0) = \sin(kx)$  è:

$$u(x, t) = e^{-k^2 \nu t} u(x, 0)$$

Quindi ogni coefficiente di Fourier  $u_k$  decresce esponenzialmente nel tempo di un fattore  $e^{-\nu k^2 t}$ .

Per render più evidente la separazione tra queste zone è necessario avere a disposizione uno spettro di diverse decadi, quindi si ripete la simulazione cambiando alcuni principali parametri in modo da aumentare il numero di punti della griglia e garantire la stabilità dell'algoritmo: si sceglie  $m = 1$ ,  $N = 10^4$ , l'ampiezza dell'onda iniziale pari a 1 e  $\nu = 4 \cdot 10^{-7}$ .

In Figura 12 si mostra la soluzione numerica e la

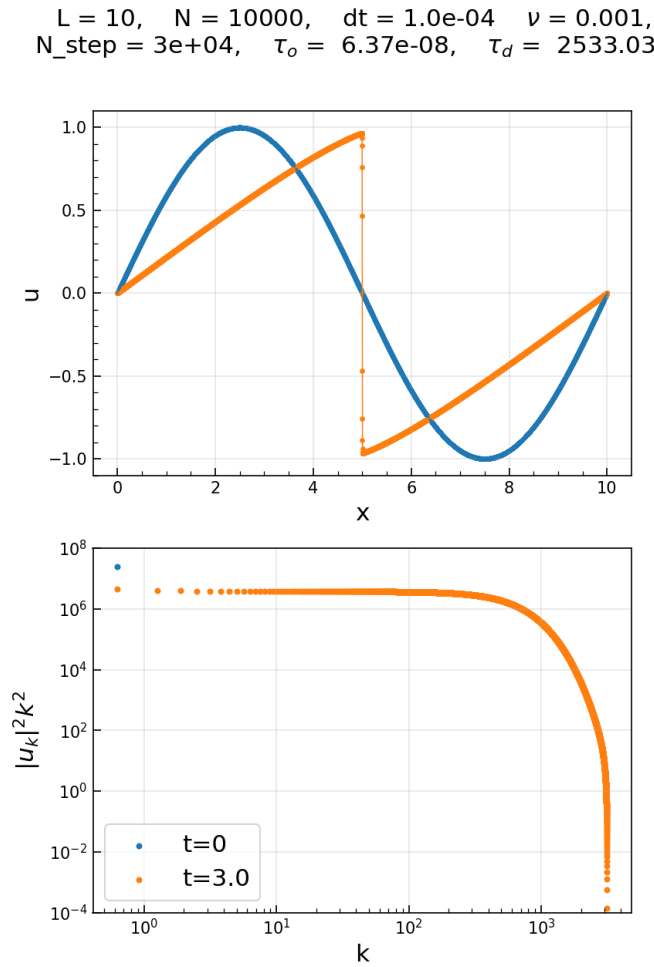


Figura 12: Soluzione numerica dell'equazione di Burgers per un'onda con  $m = 1$ .

relativa densità spettrale di energia moltiplicata per  $k^2$ .

Dal grafico di  $|u_k|^2 k^2$  si distinguono la zona inerziale ( $5 < k < 300$ ) con andamento piatto e diffusiva ( $300 < k \lesssim 3000$ ) con andamento esponenziale decrescente. Tali risultati sono in accordo con quanto atteso teoricamente.

### 2.5.2 Relazione tra spessore dello shock e $\nu$

A conferma del fatto che gli effetti non lineari dell'equazione di Burgers sono contenuti dal termine diffusivo si può valutare lo spessore dello shock al variare di  $\nu$ .

Si prendono gli stessi parametri della sottosezione precedente facendo variare solo  $\nu$ , si osserva la soluzione dopo 3 tempi fisici nel sotto intervallo  $x \in [4.98, 5.02]$ . In Figura 13 si osserva che lo spessore dello shock è direttamente proporzionale al parametro di diffusione  $\nu$ . Diminuendo ulteriormente

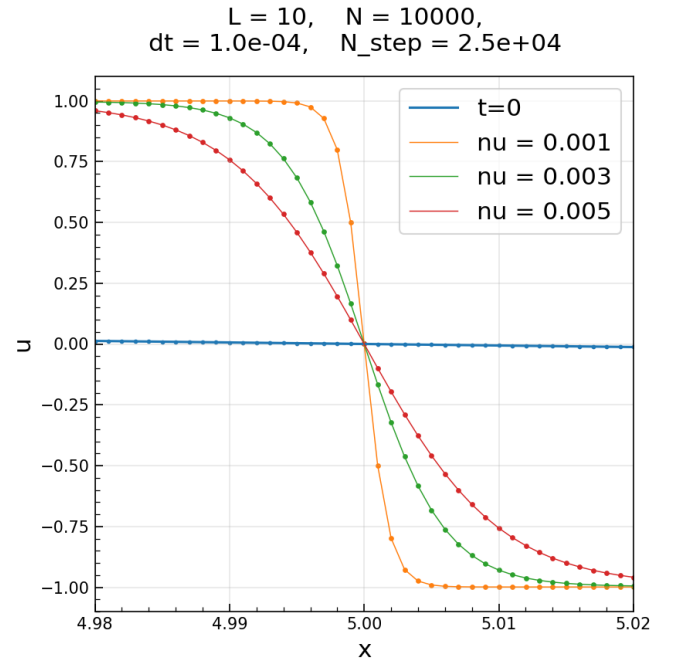


Figura 13: Andamento dello spessore dello shock al variare di  $\nu$  nella equazione di Burgers.

$\nu$  si ottengono nuovamente i fenomeni di instabilità numerica riscontrati nella sezione 2.3.

La soluzione nell'intorno dello shock di Figura 13 è approssimabile alla soluzione "onda trasportata"  $u(x - ct) \equiv u(\xi)$ :

$$\begin{aligned} u(\xi) &= c - \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \tanh \left[ \frac{1}{4\nu}(u_1 - u_2)\xi \right] = \\ &= \frac{1}{2}(u_1 + u_2) - \frac{1}{2}(u_1 - u_2) \tanh \left[ \frac{1}{4\nu}(u_1 - u_2)\xi \right] \end{aligned}$$

In cui i valori di  $u_1$  ed  $u_2$  sono tali per cui:

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} u(\xi) = u_2 \quad \lim_{\xi \rightarrow -\infty} u(\xi) = u_1$$

Nel nostro caso si ha che  $u_1 = -u_2$  e quindi  $c = 0$ . La soluzione in un intorno dello shock si può



esprimere come:

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{1}{2}(u_1 - u_2) \tanh\left(\frac{(u_1 - u_2)x}{4\nu}\right) = \\ &= -A \tanh\left(\frac{x}{l}\right) \end{aligned} \quad (\text{eq.11})$$

In cui si sono definite le variabili:

$$A = \frac{u_1 - u_2}{2} \quad l = \frac{2\nu}{A}$$

Quindi l'andamento dello spessore dello shock è direttamente proporzionale a  $\nu/A$ .

Si verifica tale andamento effettuando diverse simulazioni al variare di  $\nu$  nell'intervallo  $[0.001, 0.05]$  a passi di 0.001, per mantenere stabile l'algoritmo si diminuisce il valore di  $dt = 10^{-5}$  e si aumenta il numero di step temporali  $2.5 \cdot 10^5$  (lasciando quindi invariato il tempo fisico finale) rispetto alla Figura 13.

Per ciascun valore di  $\nu$  si utilizza la eq.11 ottenendo una stima dei parametri  $A$  ed  $l$  tramite una regressione non lineare (minimizzando lo scarto quadratico medio).

Per ogni simulazione si estrae un sottoinsieme di dati da utilizzare per il fit con la eq.11, in particolare si prendono i dati che, all'istante fisico finale analizzato, stanno tra il massimo ed il minimo della soluzione  $u$  in un intorno dello shock.

Successivamente si utilizzano i risultati del fit

Il fit lineare restituisce  $m \simeq 2.05$ , la cui stima è in accordo con il valore atteso  $m = 2$ .

Spessore dello shock  $l$  in funzione di  $\nu$

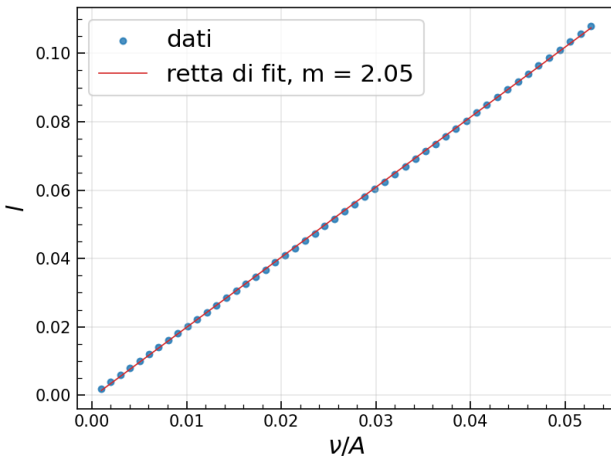


Figura 14: Verifica della relazione di linearità tra lo spessore dello shock  $l$  e il rapporto  $\nu/A$ .

per verificare l'andamento di  $l$  in funzione di  $\nu/A$  utilizzando la funzione modello:

$$l = m \frac{\nu}{A} + q \equiv mx + q$$

Si riporta in Figura 14 il risultato della seconda regressione.

## A DERIVATE NUMERICHE

Presa una griglia  $x_i$  ed una funzione  $u(x_i)$  si implementano diversi metodi di derivazione:

- *Differenze finite*: la derivata di  $u$  nel punto  $i$ -esimo è funzione della stessa  $u$  valutata nei punti precedenti o successivi.
- *Metodi spettrali*: la derivata di  $u$  nel punto  $i$ -esimo si ottiene da una interpolazione globale di quest'ultima, effettuata cioè coinvolgendo tutti i punti della griglia.
- *Differenze finite compatte*: la derivata di  $u$  nel punto  $i$ -esimo è funzione di  $u$  e di  $u'$  valutate nei punti precedenti/successivi.

### A.1 Differenze finite

Le formule implementate si basano sulla costruzione del rapporto incrementale, in particolare si implementano le versioni *backward* (eq.12) e *forward* (eq.13):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i) = u'_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (\text{eq.12})$$

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + o(\Delta x) \quad (\text{eq.13})$$

in cui  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ . Sommando le due equazioni precedenti si ottiene l'implementazione *simmetrica* (eq.14):

$$u'_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + o(\Delta x^2) \quad (\text{eq.14})$$

### A.2 Metodi spettrali

Data una funzione  $u(x)$  periodica ai bordi possiamo esprimerla in termini spettrali come:

$$u(x) = \sum_{k=0}^N u_k e^{ikx} \quad (\text{eq.15})$$

Quindi derivando rispetto a  $x$  si ottiene:

$$u'(x) = \sum_{k=0}^N ik u_k e^{ikx} \quad (\text{eq.16})$$

Numericamente, data una griglia  $x_i$  ed una funzione  $u$  valutata sulla griglia, si utilizza la routine *fftpack* del pacchetto Scipy per ottenere i coefficienti  $u_k$ . Tali coefficienti vengono moltiplicati per  $ik$  ed infine si effettua la trasformata inversa per ottenere  $u'(x_i)$ .

### A.3 Differenze finite compatte

Si tratta di un metodo implicito: per ottenere la derivata è necessario risolvere sistemi di equazioni lineari.

Data una griglia  $x_i$  avente  $N$  punti si implementa il seguente caso:

$$f'_{i-1} + 4f'_i + f'_{i+1} = \frac{3}{\Delta x} [f_{i+1} - f_{i-1}] + o(\Delta x^4) \quad (\text{eq.17})$$

Tale sistema può essere espresso in termini di una matrice tridiagonale ciclica, può essere quindi risolto numericamente con un numero di operazioni dell'ordine della dimensione della matrice  $N$  tramite l'algoritmo di Ahlberg-Nilson-Walsh.

### A.4 Stima dell'errore della derivata prima

Per verificare la precisione delle derivate numeriche di cui sopra si introduce una forma di errore così definita:

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |u'(x_i) - \bar{u}'(x_i)| \quad (\text{eq.18})$$

dove  $u'$  indica la derivata numerica e  $\bar{u}'$  la derivata analitica.

Presa una griglia  $x_i$  di lunghezza  $L$  e spaziatura variabile ( $\Delta x \in [0.01, 1]$ ) si valuta in ciascun punto la funzione:

$$u(x) = \sin\left(k \frac{2\pi}{L} x\right) \Rightarrow \bar{u}'(x) = k \frac{2\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right). \quad (\text{eq.19})$$

Tramite l'equazione (eq.18) si confronta la derivata analitica con quelle numeriche della sezione precedente.

In Figura 15 si osserva che tra le derivate numeriche implementate il metodo di Fourier è il più preciso per la funzione di prova utilizzata.

Nel grafico logaritmico le differenze finite (non simmetriche) hanno un andamento rettilineo con coefficiente angolare  $m \sim -1$ , le differenze finite simmetriche hanno  $m \sim -2$  mentre le differenze finite compatte hanno  $m \sim -4$ . Tali valori sono in accordo con l'ordine dell'errore riportato nelle formule eq.12, eq.13, eq.14, eq.17.

Seguendo lo stesso procedimento e usando la stessa funzione  $u$  di equazione eq.19 si realizza un grafico dell'errore al variare della lunghezza d'onda (quindi  $k \in [1, 10^3]$ ). Nella scelta del limite superiore di  $k$  si tiene conto della lunghezza d'onda massima che può essere risolta:  $\pi/\Delta x$ , nel caso analizzato

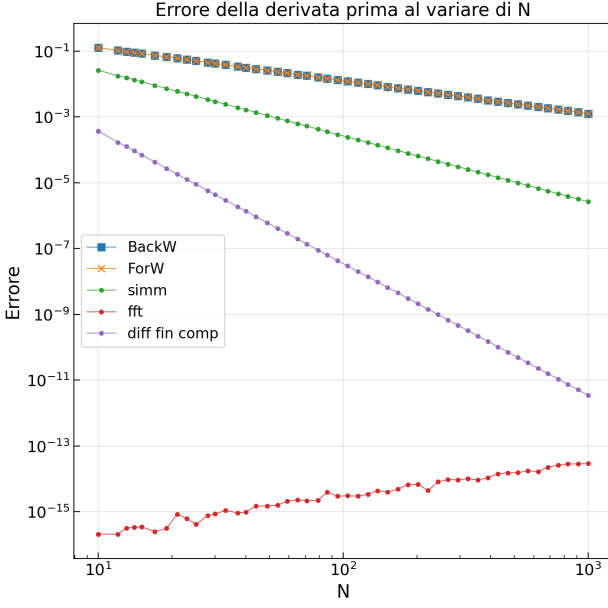


Figura 15: Andamento dell'errore al variare di  $N = L/\Delta x$  per la funzione in eq.19 con  $k = 1$ . Il grafico è stato realizzato in scala logaritmica su entrambi gli assi.

$$\Delta x = 2 \times 10^{-4}.$$

Dalla Figura 16 si evince che l'errore aumenta al diminuire della lunghezza d'onda, poiché quest'ultima si avvicina alla risoluzione della griglia. In particolare i metodi delle differenze finite mostrano una legge di potenza in  $k$ : nel grafico logaritmico i metodi "forward" e "backward" presentano un coefficiente angolare  $m \sim 2$ , il metodo simmetrico ha  $m \sim 3$  mentre il metodo delle differenze finite compatte presenta  $m \sim 4$  per grandi  $k$ . Quest'ultimo segue un andamento simile a quello di Fourier per piccoli  $k$ , la derivata tramite FFT risulta anche in questa analisi la più precisa tra quelle studiate.

#### A.5 Derivate seconde

Si implementano le derivate seconde numeriche usando tre dei metodi elencati sopra:

- *Differenze finite simmetriche*:

$$u''_i = \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} + o(\Delta x^2) \quad (\text{eq.20})$$

- *Differenze finite compatte*, si utilizza l'algoritmo di Ahlberg-Nilson-Walsh con la seguente formula:

$$\begin{aligned} u''_{i-1} + 10u''_i + u''_{i+1} = \\ = \frac{12}{\Delta x^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}) + o(\Delta x^2) \end{aligned} \quad (\text{eq.21})$$

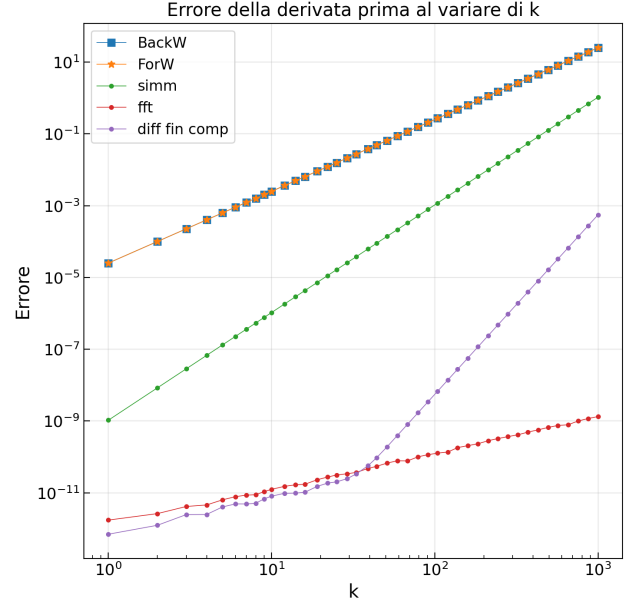


Figura 16: Andamento dell'errore al variare di  $k$  per la funzione in eq.19, con  $L = 10$ ,  $N = 5 \times 10^4$ . Il grafico è stato realizzato in scala logaritmica su entrambi gli assi.

- *Metodo spettrale*, in modo analogo a quanto fatto con la derivata prima: si moltiplicano i coefficienti per  $-k^2$  (anziché per  $ik$ ) prima di effettuare la trasformata inversa.

## B EVOLUZIONE TEMPORALE NUMERICA

Si implementano i metodi di Eulero e di Runge-Kutta di ordine  $N$  (nel caso indipendente dal tempo).

### B.1 Metodo di Eulero

Data una griglia temporale  $t_i$  ed una equazione del tipo:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = F(x, t) \quad (\text{eq.22})$$

il metodo di integrazione di Eulero si esprime come:

$$u(x, t_{i+1}) = u(x, t_i) + \Delta t F(x, t_i) + o(\Delta t) \quad (\text{eq.23})$$

### B.2 Metodo di Runge-Kutta

Il metodo Runge-Kutta di ordine  $N$ , nel caso in cui  $F$  è indipendente dal tempo, può essere espresso

iterativamente:

$$\hat{u} = u(t_i)$$

For  $k = N \rightarrow 1$  :

$$\hat{u} = u(t_i) + \frac{1}{k} \Delta t F(\hat{u})$$

End For

$$u(t_{i+1}) = \hat{u}$$

Si nota che per  $N = 1$  il metodo in analisi si riduce a quello di Eulero della sezione precedente.