MASSA LIMITE DI CHANDRASEKHAR

È la massa limite oltre il quale la nana bianca è instabile.

$$M_{Ch} = 2{,}018 \frac{\sqrt{6}}{8\pi} \left(\frac{\hbar c}{G}\right)^{3/2} \frac{1}{\mu_e^2 m_H^2}$$

Notiamo che a parte costanti e μ_e (composizione chimica) vi sono solo costanti universali

$$\boxed{\alpha_G = \frac{G m_H^2}{\hbar c} = \frac{E_G}{E}} \simeq 0{,}92 \cdot 10^{-39}$$

E_G → energia gravitazionale protone

E → energia a riposo

esprime la forza dell'interazione gravitazionale (come la costante di struttura fine esprime la forza dell'interazione elettromagnetica).

M_{Ch} = massa di $\alpha_G^{-3/2}$ protoni $\longrightarrow \sim 10^{57}$ protoni

Landau arriva alle stesse conclusioni facendo un altro ragionamento. Immaginiamo di avere N elettroni in una configurazione a simmetria sferica di raggio R $\Rightarrow n_e = \frac{N}{R^3}$

Per il principio d'indeterminazione $p \sim \hbar n_e^{1/3}$ quindi l'energia degli e

$$E_F \sim c p_F \sim \hbar n_e^{1/3} c \sim \hbar c \frac{N^{1/3}}{R}$$

Vi è poi l'energia gravitazionale dovuta ai nuclei

$$E_G \sim -\frac{GMm}{R} \qquad M \simeq Nm$$

Quindi $E = \hbar c \frac{N^{1/3}}{R} - \frac{GNm^2}{R}$ ← entrambi i termini scalano come 1/R

- $E > 0$ se N non troppo grande

Si può trovare una configurazione di equilibrio (minimo dell'energia) perchè all'aumentare di R diminuisce E e diminuisce la densità $\Rightarrow$ si raggiunge la configurazione non relativistica in cui $E_F \sim p_F^2 \sim 1/R^2 \Rightarrow$ continuando ad aumentare il R diventa dominante il secondo termine e $E<0$ e nel limite $R \to \infty$ $E \to 0$ $\Rightarrow \exists$ minimo dell' energia

- $E<0$ se N grande $\Rightarrow \nexists$ configurazione di equilibrio perché al diminuire del raggio otteniamo configurazioni di E ancora più bassa senza limite $\Rightarrow$ la stella collassa

Quindi N_{max} (e quindi della massa) per cui si trova una condizione di equilibrio è quello per cui $E=0$ cioè

$$N_{max} \sim \left(\frac{\hbar c}{G m_N^2}\right)^{3/2}$$

Chandrasekhar ha ottenuto queste relazioni supponendo che il gas fosse perfetto (anche noi nel ricavare le relazioni approx abbiamo fatto questa ipotesi), trascurando le interazioni coulombiane tra e^- e tra e^- e nuclei

Noi sappiamo che si può fare perché in ambienti degeneri $E_F \gg U_{coulomb.}$

Tuttavia questa assunzione viene meno nel limite $M \to 0$.

In tal caso la curva va ad infinito quindi dovremmo aspettarci oggetti di raggio enorme. Però in questo caso $M \to 0$, R cresce $\Rightarrow \rho$ diminuisce $\Rightarrow$ non posso trascurare le INTERAZIONI COULOMBIANE

Nel limite $M \to M_{ch}$ $R \to 0$ $\Rightarrow \rho \to +\infty$ impossibile $\Rightarrow$ bisogna tener conto di processi fisici che sono stati trascurati

cosa avviene?

il raggio arriva ad un massimo e poi decresce perché P viene ridotta a causa delle interazioni coulombiane

$p + e^- \to n + \nu$ in un ambiente normale non avviene spontaneamente perché $m_n >$.

$$p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3}$$
$$E_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4}$$
$$K_F = E_F - m_e c^2$$

Quando $M \to M_{ch}$ n_e aumenta $\Rightarrow p_F >$, E_F $K_F >$. Prima o poi $K_F > (m_n - m_p - m_e)c^2$ $\Rightarrow$ la reazione diventa energeticamente favorevole

Calcoliamo il valore della DENSITÀ CRITICA

$$\sqrt{p_F^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 \geq (m_n - m_p - m_e) c^2$$

$$(m_n - m_p) c^2 \simeq 1{,}29 \text{ MeV}$$

$$Q = m_n - m_p$$

$\Downarrow$ impulso di fermi critico per cui diventa favorevole il processo β inverso rispetto all' e^- libero.

$$p_{F,c}^2 = Q^2 c^2 - m_e c^2$$

Per trovare la densità ci serve conoscere la struttura chimica $\Rightarrow$ supponiamo di avere solo protoni ed elettroni (H puro ionizzato)

$$\rho = n_e (m_p + m_e) \qquad n_{e,c} = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^3 \left[\left(\frac{Q}{m_e}\right)^2 - 1\right]^{3/2} \simeq 7{,}37 \cdot 10^{30} \text{ cm}^{-3}$$

$$\rho_c \simeq 1{,}2 \cdot 10^7 \text{ g/cm}^3$$

Nella realtà le nane bianche sono fatte di He, C, O, Ne quindi anziché avere protoni ho dei nuclei atomici $(A,Z) + e^- \to (A, Z-1) + \nu$
Questo comporta che si ha bisogno di densità più grandi perché anche i neutroni sono degeneri quindi (analogamente agli e^-) devono dare energia superiore per poter riempire una cella dello spazio delle fasi non occupata
In ogni caso aumenta il numero di neutroni finché questi iniziano ad uscire dai nuclei "NEUTRON DRIP" e la materia si arricchisce di neutroni liberi

$$\rho_c > 4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$$

A questo punto la struttura collassa perché vado a sottrarre e^- che producono la pressione $\Rightarrow$ nucleo di Ferro implode e si forma una STELLA DI NEUTRONI.
Oppure densità così elevate possono portare al superamento della barriera coulombiana e all'innesco di reazioni nucleari

EVOLUZIONE NANE BIANCHE

- $M \lesssim 0{,}5\, M_\odot$ → gigante rossa → muoiono come nane bianche di He ($M_{WD} < 0{,}5\, M_\odot$)
- $M \gtrsim 0{,}5\, M_\odot$, $M \lesssim 8\, M_\odot$ → gigante rossa → innesco He → C, O → muoiono come nane bianche di C, O ($0{,}5\, M_\odot \lesssim M_{WD} \lesssim 1{,}1\, M_\odot$)

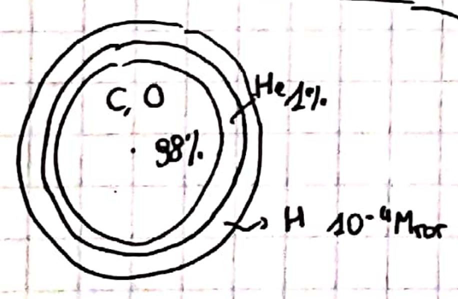
le più presenti

non le osserviamo perchè non è passato abbastanza tempo, cioè non sono ancora nane bianche di He → tempo evolutivo molto lungo.
Le vediamo solo nei sistemi binari dove nascono con massa maggiore ma diminuisce perchè è sottratta dalla compagna

- $8\, M_\odot \lesssim M \lesssim 10\, M_\odot$ → .. → O, Ne → muoiono come nane bianche di O, Ne ($1{,}1\, M_\odot \lesssim M \lesssim M_{Ch}$)

Vediamo l'evoluzione di WD di C, O (è uguale per le altre)

→ diversa dalle normali stelle perchè hanno capacità termica > 0.



$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \qquad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{dm} = \varepsilon = \varepsilon_N + \varepsilon_g - \varepsilon_\nu$$

Usiamo le teorie di Mestel (1952) che sono esplicative ma non del tutto corrette.

$$L = \int_0^M (\varepsilon_N - T\,dS - \varepsilon_\nu)\, dm$$

→ $\varepsilon_N \sim 0$ se ci fossero reazioni nucleari nel core sarebbero tali da distruggere la stella

→ $\varepsilon_\nu \sim 0$ perchè Mestel non conosceva i plasmaneutrini.

$$\Rightarrow \quad T\frac{ds}{dt} = T\left[\frac{ds}{dT}\Big|_\rho \frac{dT}{dt} + \frac{ds}{d\rho}\Big|_T \frac{d\rho}{dt}\right] = C_v\frac{dT}{dt} - \frac{T}{\rho^2}\frac{dP}{\partial T}\Big|_\rho \frac{d\rho}{dt}$$

→ gli e^- sono fortemente degeneri in tutta la struttura. È una buona approx perchè non lo sono solo nella shell esterna.

⇒ è incomprimibile, cioè $\dot{\rho} = 0$

$$\Rightarrow \quad L = -\int_0^M C_v \frac{dT}{dt}\, dm \qquad L > 0 \Rightarrow \frac{dT}{dt} < 0$$

← brillano a spese dell'energia termica ⇒ T diminuisce

RISPONDONO AD UNA PERDITA DI ENERGIA RAFFREDDANDOSI

$$C_v = \underbrace{C_v^{ioni}}_{\text{nuclei atomici}} + \underbrace{C_v^{e}}_{\text{elettroni}}$$

$$C_v^e = \frac{3}{2}\frac{N_A k}{A} Z \frac{\pi^2}{3}\frac{kT}{\varepsilon_F} \ll 1$$

$\frac{kT}{\varepsilon_F} \ll 1$ e⁻ degeneri

$$C_v^{ioni} = \frac{3}{2}\frac{N_A k}{A} \quad \leftarrow \text{gas perfetto}$$

$$\Rightarrow \quad L = -\frac{3}{2}\frac{N_A k}{A}\int_0^M \frac{dT}{dt}\, dm$$

→ Sappiamo che dT/dt è tanto più piccolo quanto è efficiente la conduzione → vero per le nane bianche ⇒ ISOTERME $T = cost$

$$\Rightarrow \quad L = -\frac{3}{2}\frac{N_A k}{A}\frac{dT_c}{dt} M$$

T_c centrale

$\frac{dT_c}{dt}$ → determinato dalla shell di H ed He perchè è la zona in cui il trasporto energetico sarà più lento.

Mestel ottiene che il tempo di RAFFREDDAMENTO $\tau \sim \frac{1}{A}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{5/7}\left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{-5/7}$

Ovviamente in una trattazione più realistica dobbiamo tener conto di alcune correzioni:

- $\varepsilon_N \neq 0$ c'è un residuale processo nelle shell

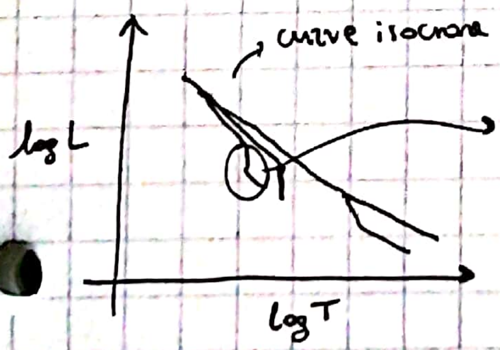
- $\varepsilon_\nu \neq 0$, ci sono molti plasma neutrini perchè all'inizio $T_c \gg$ e $\rho \gg$
Questi costituiscono dei canali di raffreddamento ⇒ fase iniziale di raffreddamento più rapida

- C_V^{ioni} gas perfetto? No perchè $\Gamma = \frac{(Ze)^2}{a\,kT} \propto \frac{Z^2 \rho^{1/3}}{A^{1/3}\, T}$ ($\rho^{1/3}$ → cost, T → diminuisce)

⇒ man mano che la stella si evolve Γ cresce finchè $\Gamma_{critico} = 175$ oltre il quale si ha la transizione liquido-solido (e si forma un cristallo), viene rilasciata energia → viene rallentato il raffreddamento. Alla fine tutta la stella cristallizza (C,O)
Quando diventano rilevanti gli effetti quantistici (regime di Debye) C_V comincia a dipendere dalla T $C_V \sim T^3$
Questo fa accelerare il raffreddamento (perchè $C_V \to 0$ come T^3)

NANE BIANCHE COME CRONOMETRI

Usate per misurare l'età di altri oggetti perchè osservare la luminosità dà indicazioni sull'età (dato che si raffredda nel tempo).
Guardando un ammasso stellare possiamo costruire un'isocrona di nane bianche partendo dalle tracce evolutive



questo gancetto dipende dall'età, tanto maggiore è l'età tanto più in basso in luminosità si trova il gancetto
⇓
si confronta il gancetto predetto con quello osservato

Un altro modo è costruire una funzione di luminosità (numero di stelle per luminosità) e si arriva un picco che ci dà indicazioni sull'età.