

# Appunti di astrofisica

Edoardo Gabrielli

8 aprile 2020

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione e Trasporto Radiativo</b>	<b>2</b>
1.1	Lezione 12 . . . . .	2
1.1.1	Moti convettivi nelle stelle. . . . .	2
1.1.2	Gradiente radiativo e gradiente adiabatico. . . . .	4
1.1.3	Gradiente radiativo e luminosità. . . . .	5
1.1.4	Mixing Length (o lunghezza media percorsa dalle bolle convettive.) . . . . .	6
1.1.5	Core convettivi e involucri convettivi . . . . .	7
1.2	Lezione 13 . . . . .	8
1.2.1	Convezione e equilibrio idrostatico. . . . .	8
1.2.2	Equazioni di struttura stellare. . . . .	8
1.2.3	Equazione di stato . . . . .	9
1.2.4	Tre casi di perdita di approssimazione di gas perfetto . . . . .	10

# Capitolo 1

## Introduzione e Trasporto Radiativo

### 1.1 Lezione 12

02-04-2020

#### 1.1.1 Moti convettivi nelle stelle.

Trattiamo la convezione come uno spostamento macroscopico di materia raggruppata in bolle.

Cerchiamo di capire in quali situazioni domina la convezione rispetto agli altri meccanismi di trasporto energetico all'interno della stella.

Immaginiamo una situazione come in Figura 1.1: una bolla di materia in seguito ad una perturbazione sale attraverso l'atmosfera stellare.

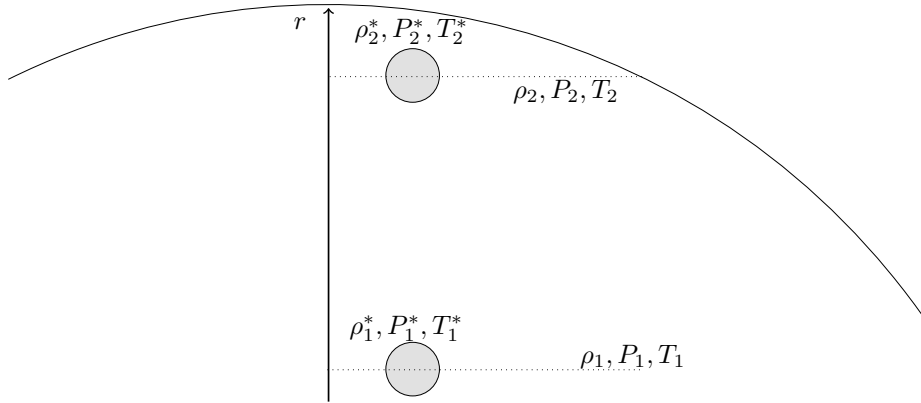


Figura 1.1: Bolle di materia nella stella

In seguito a tale spostamento di materia possono avvenire due eventi:

- Il moto della bolla viene smorzato: nessun moto convettivo.
- Il moto della bolla viene amplificato: moto convettivo.

Assumiamo che quando la bolla è partita dalla posizione (1) si trovasse nelle stesse condizioni fisiche della atmosfera circostante, quindi:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^* \\ \rho_1 &= \rho_1^* \\ T_1 &= T_1^*. \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Quando tale bolla raggiunge la posizione (2) possiamo assumere che:

- La variazione di pressione sia molto "più rapida" della variazione di energia, quindi la bolla raggiungerà velocemente un nuovo equilibrio:

$$P_2 = P_2^*. \tag{1.1.2}$$

- Assumiamo uno **Spostamento adiabatico**, assumiamo che nel passaggio da (1) a (2) non ci sia scambio di energia tra bolla ed ambiente esterno, per un tale spostamento sappiamo che:

$$\rho_2^* = \rho_1^* \left( \frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{1/\gamma}. \tag{1.1.3}$$

Dove  $\gamma = c_P/c_V$ .

Abbiamo quindi che la densità della bolla nel punto (2) non sarà la stessa dell'ambiente che la circonda. A questo punto Archimede e la gravità decideranno se la bolla torna verso il centro o viene accelerata fuori:

**Fatto 1.1: Condizione sulla convezione secondo il principio di Archimede.**

- Se  $\rho_2^* > \rho_2$  la bolla viene respinta indietro: smorzamento della perturbazione, nessuna convezione.
- Se  $\rho_2^* \leq \rho_2$  la bolla viene accelerata avanti: amplificazione della perturbazione, convezione.

Cerchiamo di rendere la situazione più rigorosa con delle relazioni in cui appaiono dei gradienti. Possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^* = P(r) \\ P_2 &= P_2^* = P(r + dr) = P(r) + \frac{dP}{dr} dr. \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho(r) \\ \rho_2 &= \rho(r + dr) = \rho(r) + \frac{d\rho}{dr} dr. \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Per la approssimazione di spostamento adiabatico abbiamo che:

$$\begin{aligned} \rho_2^* &= \rho_1^* \left( \frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{1/\gamma} \\ &= \rho \left( \frac{P(r + dr)}{P(r)} \right)^{1/\gamma} \\ &= \rho \left( 1 + \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} dr \right)^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Sviluppando nel secondo membro in parentesi (basta prendere uno spostamento sufficientemente piccolo per farlo):

$$\rho_2^* \approx \rho \left( 1 + \frac{1}{P\gamma} \frac{dP}{dr} dr \right). \quad (1.1.7)$$

Confrontiamo  $\rho_2^*$  con  $\rho_2$  per avere :

$$\rho \left( 1 + \frac{1}{P\gamma} \frac{dP}{dr} dr \right) \geq \rho + \frac{d\rho}{dr} dr. \quad (1.1.8)$$

Eliminando  $\rho$  si ha:

$$\frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \geq \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}. \quad (1.1.9)$$

Se riscriviamo quest'ultima in maniera più compatta abbiamo che:

**Fatto 1.2: Criterio di stabilità di Schwarzschild**

La condizione necessaria affinché nella stella non vi siano moti convettivi è:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dr} (\ln P) \geq \frac{d}{dr} (\ln \rho). \quad (1.1.10)$$

Quando questo criterio è soddisfatto avremmo una stella all'equilibrio radiativo:

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}}. \quad (1.1.11)$$

Quando invece questa condizione non è soddisfatta allora la stella risentirà de moti convettivi ed il trasporto di energia per questi ultimi non sarà trascurabile:

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}} + F_{\text{conv}}. \quad (1.1.12)$$

Nel caso del sole abbiamo che

- Nel core siamo all'equilibrio radiativo.
- Nella atmosfera esterna domina la convezione.

Nel caso di stelle più grandi possiamo avere l'esatto opposto del sole, mentre per le stelle più piccole ( $0.3M_{\odot}$ ) possiamo anche avere interamente trasporto di energia per moti convettivi.

### 1.1.2 Gradiente radiativo e gradiente adiabatico.

Assumiamo adesso che all'interno della stella vi sia un gas perfetto:

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT. \quad (1.1.13)$$

Assumiamo inoltre che il peso molecolare  $\mu$  sia costante in tutta la struttura, ricordiamo che questa quantità vale:

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m_H}. \quad (1.1.14)$$

In questo modo il differenziale della relazione di dispersione lo possiamo scrivere come <sup>1</sup>:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}. \quad (1.1.15)$$

Possiamo quindi dire che:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}. \quad (1.1.16)$$

La quantità a sinistra in quest'ultima relazione è una quantità presente nel criterio di Schwarzschild, andiamo quindi a sostituire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} &\geq \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \\ &= \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}. \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

Tramite passaggi algebrici possiamo riscrivere questa come:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \geq \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr}. \quad (1.1.18)$$

Tramite la regola della derivazione a catena si ha anche:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{dr} \geq \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr}. \quad (1.1.19)$$

Adesso prima di semplificare il termine  $dP/dr$  non dobbiamo dimenticarci che questo è negativo, quindi il segno della disuguaglianza cambia:

$$\frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \leq 1 - \frac{1}{\gamma}. \quad (1.1.20)$$

Guardando quest'ultima equazione possiamo definire due quantità utili:

#### Definizione 1.1: Nabla

$$\nabla = \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} = \frac{d \ln T}{d \ln P}. \quad (1.1.21)$$

#### Definizione 1.2: Gradiente adiabatico

$$\nabla_{ad} = 1 - \frac{1}{\gamma}. \quad (1.1.22)$$

<sup>1</sup>Basta fare il differenziale e moltiplicare ambo i membri per  $P^{-1}$

Il  $\nabla$  nel caso in cui siamo all'equilibrio radiativo coinciderà con il gradiente radiativo trovato nelle lezioni precedenti:  $dT/dr$ . Quindi la relazione di Schwarzschild ci dice anche che il gradiente radiativo è limitato superiormente:

$$\nabla \leq \nabla_{\text{ad}}. \quad (1.1.23)$$

Quindi ricordiamo quali sono i due casi che possono presentarsi in termini di queste due nuove quantità:

- Se  $\nabla \leq \nabla_{\text{ad}}$  allora siamo all'equilibrio radiativo.
- Se  $\nabla \geq \nabla_{\text{ad}}$  allora abbiamo una instabilità convettiva, il gradiente di temperatura non sarà più quello radiativo discusso in precedenza ma sarà più piccolo.

Abbiamo quindi detto che all'equilibrio radiativo, quindi nei punti in cui è rispettata la prima disuguaglianza dell'elenco, si ha:

$$\nabla_r = \nabla. \quad (1.1.24)$$

Nelle regioni del secondo punto dell'elenco abbiamo già accennato che:

$$\nabla_r \neq \nabla. \quad (1.1.25)$$

Nonostante questo il gradiente radiativo può ancora essere definito come il gradiente che si avrebbe se tutto il flusso fosse trasportato dalla radiazione. Tuttavia nel caso di instabilità adiabatica avremo che tale gradiente sarà più piccolo del caso di equilibrio radiativo.

Come conseguenza in questa situazione avremo che (facendo sempre riferimento alla Figura 1.1):

$$T_2^* > T_2. \quad (1.1.26)$$

Per questo se la bolla si dissolve cederà calore all'ambiente circostante scaldandolo. Alla fine del processo di spostamento della bolla la temperatura  $T_2$  sarà aumentata, viceversa se la bolla va nel verso opposto.

Quando questi processi vanno a regime abbiamo che il gradiente ambientale sarà diverso da quello radiativo ed in particolare:

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla < \nabla_r. \quad (1.1.27)$$

Nelle zone in cui il moto convettivo diventa estremamente efficiente si avrà che  $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ , mentre quando il moto convettivo è pressoché nullo  $\nabla \rightarrow \nabla_r$ .

Nei core delle stelle abbiamo che la convezione quando è attiva è così efficiente che la super adiabaticità necessaria a trasportare gran parte del flusso è talmente bassa che  $\nabla \approx \nabla_{\text{ad}}$ , anche se non possono effettivamente essere uguali.

### 1.1.3 Gradiente radiativo e luminosità.

Abbiamo visto che:

$$\nabla_r = \left. \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_r \leq \nabla_{\text{ad}}. \quad (1.1.28)$$

Ma d'altra parte si ha che la prima parte è uguale a

$$\left. \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_r = \frac{P}{T} \frac{dT}{dP} \bigg|_r = \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \frac{dr}{dP}. \quad (1.1.29)$$

Inserendo i due termini noti

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{k}\rho}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (1.1.30)$$

Otteniamo che il criterio di Schwarzschild diventa una condizione sulla luminosità:

$$L(r) \leq 16\pi \frac{acG}{3\bar{k}} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T^4}{P} m. \quad (1.1.31)$$

Dove  $L(r)$  energia che per unità di tempo attraversa la superficie di raggio  $r$ . Quando è soddisfatta siamo in equilibrio radiativo, viceversa si innesca la convezione.

I processi che portano ad avere convezione sono quindi principalmente due:

- Aumento del flusso: rompo la 1.1.31.
- Aumento della opacità: rompo la prima in 1.1.30.

Nei nuclei convettivi dove abbiamo produzione di energia nucleare il meccanismo che innesca la convezione è la crescita del flusso.

Negli involucri convettivi invece (le zone esterne della stella) tipicamente non abbiamo le reazioni termonucleari, il meccanismo che innesca la convezione è l'aumento della opacità.

In particolare avremo che i moti convettivi avverranno nelle zone in cui le particelle sono ionizzate parzialmente: infatti il gradiente radiativo ha un picco nelle zone parzialmente ionizzate. Inoltre il gradiente adiabatico (sempre dove è presente parziale ionizzazione)

### 1.1.4 Mixing Length (o lunghezza media percorsa dalle bolle convettive.)

Vediamo adesso quanta energia viene trasportata dalla convezione analizzando la lunghezza media percorsa dalle bolle.

Quando la bolla arriva nella posizione (2) è più calda dell'ambiente circostante, quantifichiamo questa differenza di temperatura:

$$\delta T = T_2^* - T_2 = \left( \left| \frac{dT}{dr} \right| - \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \right) dr. \quad (1.1.32)$$

Definiamo la quantità tra le parentesi tonde come

#### Definizione 1.3: Super adiabaticità

$$\Delta \nabla T = \left| \frac{dT}{dr} \right| - \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad}. \quad (1.1.33)$$

Quindi quando la bolla si dissolve nel punto (2) ha la stessa pressione dell'ambiente circostante. La quantità di calore che questa cede sarà dato da:

$$Q_{ced} = c_P \rho \delta T = c_P \rho \Delta \nabla T dr. \quad (1.1.34)$$

Quindi il flusso di calore sarà dato da:

$$F = c_P \rho v \Delta \nabla T dr. \quad (1.1.35)$$

Nella teoria della Mixing Length il termine  $dr$  è proprio la lunghezza di rimescolamento  $l$ .

Possiamo scrivere inoltre la differenza di densità tra l'interno e l'esterno:

$$\delta \rho = \rho_2^* - \rho_2 = \left( \left| \frac{d\rho}{dr} \right| - \left| \frac{d\rho}{dr} \right|_{ad} \right) l. \quad (1.1.36)$$

Visto che stiamo trattando gas perfetti e la pressione finale è la stessa, quindi:

$$\delta \rho = -\frac{\rho}{T} \delta T. \quad (1.1.37)$$

Sostituendo il  $\delta T$ :

$$\delta \rho = -\frac{\rho}{T} \Delta \nabla T l. \quad (1.1.38)$$

Vogliamo trovare la forza che viene esercitata dall'ambiente circostante sulla bolla  $\bar{F}$  e questa dipenderà dalla densità:

$$\bar{F} = \frac{1}{2} g \delta \rho. \quad (1.1.39)$$

Il lavoro compiuto da tale forza in uno spostamento pari alla Mixing Length sarà pari alla variazione dell'energia cinetica, visto che la particella era inizialmente ferma:

$$\bar{F} l = \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (1.1.40)$$

Dalle ultime due equazioni si ricava la velocità media della bolla:

$$v = l^{1/2} \sqrt{\frac{g}{\rho} \delta \rho}. \quad (1.1.41)$$

Che possiamo sostituire all'interno del flusso:

$$F_{conv} = c_P \rho \left( \frac{Gm}{Tr^2} \right)^{1/2} \Delta \nabla T^{3/2} \frac{l^2}{2}. \quad (1.1.42)$$

Dobbiamo notare che all'interno di questa trattazione non c'è modo di conoscere il valore di  $l$ : è un parametro libero.

Al crescere della super adiabaticità il flusso convettivo aumenta, viceversa se la convezione è molto efficiente e trasporta un grande flusso di energia allora la richiesta di super adiabaticità diminuisce. Questo lo si vede nei core convettivi, in questi l'adiabaticità è talmente sponinta che permette di considerare  $\Delta \nabla T \approx 0$ .

La dipendenza del flusso convettivo da  $\rho$  ci dice anche che la convezione sarà più efficiente nelle zone a densità

maggiore, quindi quelle centrali.

Nei libri troviamo spesso:

$$l = \alpha H_p. \quad (1.1.43)$$

Dove  $\alpha \sim 2$  è un numero mentre  $H_p$  è una altezza di scala di pressione:

$$H_p = -\frac{dr}{d \ln P} = \frac{k}{\mu m_H} \frac{T}{g}. \quad (1.1.44)$$

È quindi possibile stimare questo parametro, scegliendo una zona del sole si ha:

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{R_\odot}{2} \\ T(r) &\sim 10^6 \text{ K}. \end{aligned} \quad (1.1.45)$$

Con questi parametri abbiamo che:  $l \sim R_\odot/10$ . Questa Mixing Length è molto più grande del cammino libero medio di Rosseland, questo significa che dal momento in cui si attiva la convezione  $F_{\text{conv}} \gg F_{\text{rad}}$ .

Usando la stima

$$F_{\text{conv}} \approx F_{\text{tot}}. \quad (1.1.46)$$

Otteniamo che la super adiabaticità richiesta per avere questa situazione sarà:

$$\Delta \nabla T \sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ K/cm}. \quad (1.1.47)$$

Confrontando quindi questa quantità con il gradiente di temperatura adiabatico (Negli interni solari  $dT/dr \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$ ) si ha che:

$$\frac{\Delta \nabla T}{|dT/dr|} \sim 10^{-6}. \quad (1.1.48)$$

Questo quantifica il fatto che nel core convettivo possiamo approssimare il gradiente di temperatura con quello adiabatico.

### 1.1.5 Core convettivi e inviluppi convettivi

Possiamo distinguere tra due tipi di stelle: quelle in cui il nucleo permette flusso convettivo e quelle in cui l'inviluppo permette flusso convettivo. In entrambi i casi abbiamo la stessa teoria, ciò che cambia è l'incertezza sulla Mixing Length  $l$ .

#### Inviluppo convettivo

Nel caso di inviluppo convettivo abbiamo che se  $l$  diminuisce e  $c\rho$  diminuisce dall'equazione 1.1.42 necessariamente deve aumentare  $\Delta \nabla T$  per avere flusso convettivo. Se aumenta la superadiabaticità allora si avrà un maggior gradiente di temperatura e di conseguenza diminuirà la temperatura effettiva.

$$l \searrow; c\rho \searrow \implies \Delta \nabla T \nearrow \implies T_{\text{eff}} \searrow. \quad (1.1.49)$$

Visto che la temperatura effettiva è legata alla luminosità dalla relazione:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (1.1.50)$$

Quindi a parità di luminosità se  $T_{\text{eff}}$  diminuisce deve aumentare il raggio. Queste variazioni rendono la stella con inviluppo convettivo molto difficile da trattare: non possiamo predire con principi primi né la  $T_{\text{eff}}$  né il raggio poiché dipendono dal parametro  $l$ . Possiamo calibrare  $l$  dalla osservazione di stelle con inviluppo convettivo.

#### Core convettivo

Le stelle con core convettivo abbiamo visto che hanno

$$\nabla \sim \nabla_{\text{ad}}. \quad (1.1.51)$$

Questo implica che tali stelle hanno una superadiabaticità molto piccola con tutte le conseguenze affrontate nella sezione precedente.

Il problema che si presenta nelle stelle con inviluppo convettivo non è presente in questo caso proprio per l'equazione scritta sopra, infatti il gradiente adiabatico deriva dalla equazione di stato: è possibile allora predire sia  $T_{\text{eff}}$  che  $R$ .



## 1.2 Lezione 13

### 1.2.1 Convezione e equilibrio idrostatico.

La differenza tra il flusso radiativo e quello convettivo è che il secondo, oltre che a trasportare energia, trasporta anche materia. Viene quindi da chiedersi se questo trasporto di materia non sia tale da distruggere l'equilibrio idrostatico formatosi nella stella.

Per la conservazione di tale equilibrio sarà necessario che il tempo di risalita delle bolle  $\tau_{\text{mix}}$  sia maggiore del tempo scala di caduta libera  $\tau_{\text{FF}}$ :

$$\tau_{\text{FF}} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \sim 30 \text{ min.} \quad (1.2.1)$$

$$\tau_{\text{mix}} = \frac{l}{v} \sim \frac{1/10 R_{\odot}}{0.03 \text{ km/s}} \approx 20 \text{ giorni.} \quad (1.2.2)$$

Abbiamo quindi che l'equilibrio non è perturbato dalla convezione.

Possiamo vedere questo anche confrontando la velocità delle bolle con quella termica del plasma presente all'interno della stella.

Per il plasma abbiamo velocità dell'ordine  $v_{\text{plasma}} \approx 100 \text{ km/s}$ , mentre per le bolle possiamo stimare che viaggino con  $v_{\text{bolle}} \approx 0.03 \text{ km/s}$ . Di conseguenza la pressione termica del gas e quella dovuta alle bolle avranno la seguente relazione:

$$P_{\text{bolle}} = 10^{-8} P_{\text{plasma}}. \quad (1.2.3)$$

Quindi abbiamo che la pressione dovuta alle bolle che salgono è trascurabile.

Il tempo di rimescolamento è anche molto più piccolo di  $\tau_{\text{KH}}$  e del  $\tau_{\text{N}}$ , quindi dal punto di vista evolutivo della stella può essere considerato istantaneo. Nelle stelle aventi core convettivo come il sole (in cui le reazioni termonucleari trasformano nuclei leggeri in nuclei più pesanti) abbiamo che l'istantaneità del processo convettivo implica una composizione chimica omogenea nel core.

#### Fatto 2.1: Composizione chimica del core

In presenza di core convettivi si ha una composizione chimica omogenea, viceversa in un core non convettivo gli elementi più pesanti si formeranno più facilmente nel nucleo centrale più caldo con conseguente gradiente di composizione chimica.

### 1.2.2 Equazioni di struttura stellare.

Possiamo adesso riscrivere le quattro equazioni di struttura stellare:

#### Fatto 2.2: Equazioni di struttura stellare

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{\partial m}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho \\ \frac{\partial l}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho \mathcal{E} \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \begin{cases} -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2} & \text{Equilibrio radiativo} \\ \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{conv}} & \text{Con convezione} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Quindi conoscere la struttura di una stella significa conoscere:

- $m = m(r, t)$ .
- $P = P(r, t)$ .
- $\rho = \rho(r, t)$ .
- $L = L(r, t)$ .
- $T = T(r, t)$ .

Tuttavia non bastano queste quattro equazioni, sono incomplete perché non trattano le quantità fisiche necessarie a comprendere il comportamento della materia come la composizione chimica, sarà necessaria una estensione di qualche quantità:

- $P = P(\rho, T, \{x_i\})$ .
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, T, \{x_i\})$  dove  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_g + \mathcal{E}_\nu$ .
- $\bar{k} = \bar{k}(\rho, T, \{x_i\})$ .

### 1.2.3 Equazione di stato

Abbiamo visto che negli interni stellari il contributo alla pressione del sistema arriva dal gas e dalla radiazione:

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}. \quad (1.2.5)$$

Visto che negli interni stellari si realizza spesso la condizione di LTE siamo in grado di calcolare la pressione di radiazione come:

$$P_\nu = \frac{u_\nu}{3} \implies P_{\text{rad}} = \frac{aT^3}{3}. \quad (1.2.6)$$

Per la pressione gassosa invece è utile fare la distinzione tra pressione dovuta agli elettroni e quella dovuta agli ioni:

$$P_{\text{gas}} = P_e + P_i. \quad (1.2.7)$$

Considerando un gas perfetto allora si ha che:

$$P_{\text{gas}} = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT. \quad (1.2.8)$$

Negli interni stellari tuttavia abbiamo spesso che il gas è completamente ionizzato, quindi possiamo dividere la densità  $n$  come

$$n = n_i + n_e. \quad (1.2.9)$$

Convienne esprimere queste densità di particelle con le rispettive abbondanze in massa:

$$n_i = \frac{\rho}{A_i m_H} X_i. \quad (1.2.10)$$

$$n_{e,i} = Z_i n_i = \frac{\rho}{A_i m_H} X_i Z_i. \quad (1.2.11)$$

Quindi per la specie  $i$ -esima abbiamo anche che:

$$n_i + n_{e,i} = \frac{\rho}{A_i m_H} X_i (1 + Z_i). \quad (1.2.12)$$

Sommando su tutte le specie otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu m_H} &= \sum_i n_i + n_{e,i} = \\ &= \sum_i \frac{\rho}{A_i m_H} X_i (1 + Z_i) = \\ &= \frac{\rho}{m_H} \sum_i \frac{X_i}{A_i} (1 + Z_i). \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Quindi abbiamo che

#### **Fatto 2.3: Relazione di gas completamente ionizzato**

Per un gas completamente ionizzato vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{X_i}{A_i} (1 + Z_i). \quad (1.2.14)$$

Convienne introdurre una notazione sui singoli indici:

- $i = 1$ : Idrogeno, indichiamo con  $X$  l'abbondanza di questo elemento.
- $i = 2$ : Elio, indichiamo con  $Y$  l'abbondanza di questo elemento.
- $i = 3 \dots N$ : Metallicità, abbondanza di tutti gli elementi più pesanti dell'elio.

Inserendo questa notazione nella equazione otteniamo che:

$$\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{Z}{2}. \quad (1.2.15)$$

È possibile definire anche il peso molecolare medio degli elettroni come:

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i \approx \frac{1+X}{2}. \quad (1.2.16)$$

Il risultato può essere ottenuto dall'esplicitare la sommatoria come sopra:

$$\frac{1}{\mu_e} = X + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}. \quad (1.2.17)$$

E inoltre ricordare che deve sempre valere  $X + Y + Z = 1$  poiché corrisponde alla totalità degli elementi nella stella.

Notiamo che  $\mu_e$  dipende soltanto dall'abbondanza di H nella stella, questo è dovuto al fatto che per gli elementi più abbondanti vale:

$$\frac{Z_i}{A_i} \approx \frac{1}{2}. \quad (1.2.18)$$

A causa dei processi di nucleosintesi nelle stelle.

### 1.2.4 Tre casi di perdita di approssimazione di gas perfetto

Può capitare che l'approssimazione di gas perfetto diventi grossolana all'interno di ambienti stellari, i tre casi in cui questo può avvenire sono:

1. Gas quantistico: la statistica di Boltzmann fallisce.
2. Gas relativistico.
3. Gas con interazione tra le particelle.

Vediamo come cambia la situazione in ciascuno di questi casi (ed anche nelle loro combinazioni).

#### Gas quantistico

Se  $a$  è la distanza media tra le particelle del gas si ha che non è possibile trascurare gli effetti quantistici quando

$$a \sim \lambda. \quad (1.2.19)$$

In cui  $\lambda = h/p$  è la lunghezza d'onda di De Broglie.

Possiamo scrivere il raggio della particella come:

$$a = \left( \frac{4}{3} \pi n \right)^{-1/3}. \quad (1.2.20)$$

è necessario quindi introdurre delle statistiche che tengano di conto di possibili degenerazioni alla Fermi Dirac. Possiamo chiederci se degenerano prima gli elettroni o prima gli ioni, per rispondere a questo valutiamo l'impulso di elettroni e protoni isoenergetici (cineticamente):

$$\frac{P_p^2}{2m_p} = \frac{P_e^2}{2m_e} \implies P_p = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} P_e \implies P_p \gg P_e \implies \lambda_p \ll \lambda_e. \quad (1.2.21)$$

Visto che la lunghezza d'onda degli elettroni è più grande si avrà che questi degenerano prima dei protoni e quindi anche di tutti gli altri ioni più pesanti.

**Centro del sole** Nel centro del sole abbiamo  $T_c \approx 1.5 \cdot 10^7$  K,  $\rho_c \approx 150$  g/cm<sup>3</sup>. Considerando la lunghezza d'onda termica di De Broglie:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}. \quad (1.2.22)$$

Possiamo dire che:

$$\frac{\Lambda_p}{a_p} \approx 0.03 \quad \frac{\Lambda_e}{a_e} \approx 1.3. \quad (1.2.23)$$

Quindi anche nel sole gli elettroni sono parzialmente degeneri.

**Gigante rossa** Nel caso di gigante rossa abbiamo che  $T_c \approx 10^9$  K,  $\rho_c \approx 10^6$  g/cm<sup>3</sup>, si ha facendo i conti che:

$$\frac{\Lambda_{He}}{a_{He}} \approx 0.07 \quad \frac{\Lambda_e}{a_e} \approx 8. \quad (1.2.24)$$

Gli elettroni sono quindi molto degeneri, mentre gli atomi tendono a diventare "sempre più classici".

**Nana bianca** In questo caso abbiamo che  $T_c \approx 2 \cdot 10^6$  K,  $\rho_c \approx 3 \cdot 10^6$  g/cm<sup>3</sup>, quindi:

$$\frac{\Lambda_e}{a_e} \sim 96. \quad (1.2.25)$$

In conclusione i nuclei atomici non degenerano mai (con eccezione della stella di neutroni composta da neutroni degeneri).

Per gli elettroni è evidente la necessità di correggere il modello di gas perfetto classico. Inoltre nella maggior parte dei casi siamo nella condizione in cui:

$$kT \ll \mathcal{E}_F. \quad (1.2.26)$$

Che è l'equivalente del caso in cui si ha  $T = 0$  per un sistema di fermioni. In questo caso sappiamo che la pressione dei fermioni è data da:

$$P_e = \frac{1}{20} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e m_H^{5/3}} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}. \quad (1.2.27)$$

La pressione non dipende più dalla temperatura ma solo dalla densità e dalla composizione chimica.

### Gas relativistico

Nel caso di gas relativistico è necessario distinguere in due casi:

- Gas non degeneri (fino a che  $kT \ll mc^2$  possiamo considerare non relativistico)
- Gas degeneri (Fino a che  $\mathcal{E}_F \ll mc^2$  possiamo considerare non relativistico)

**Caso di gas non degeneri** Nel caso di gas non degeneri abbiamo che soltanto nelle stelle molto massicce sarà necessario considerare correzioni relativistiche.

Possiamo dimostrare questa affermazione notando che nel caso degli elettroni  $m_e c^2 \approx 0.5$  MeV, quindi servirebbero temperature dell'ordine di  $T \sim 10^9$  K che si raggiungono appunto soltanto in stelle pesanti. Nel caso dei protoni invece sono necessarie temperature dell'ordine  $T \sim 10^{13}$  K che non sono ancora mai state rilevate.

**Caso di gas degeneri** In questo caso conviene definire una quantità adimensionale:  $\chi_R$

$$\begin{aligned} \chi_R &= \frac{P_F}{m_e c} = \\ &= \frac{\hbar (3\pi^2 n_e)}{m_e c} = \\ &= \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2 N_A) \left( \frac{Z}{A} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (1.2.28)$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H} = \frac{\rho}{m_H} \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i. \quad (1.2.29)$$

Considerando la stella composta da un singolo elemento per semplificare:

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \frac{Z}{A}. \quad (1.2.30)$$

Inoltre ricordiamo che per una nana bianca o gigante rossa la formula diventerebbe ancora più semplice poiché  $Z/A \sim 1/2$ .

## Esempi numerici

**Gigante rossa**  $T = 10^8$  K,  $\rho = 10^6$  g/cm<sup>3</sup>  $\implies \chi = 0.8$ .

**Nana bianca**  $T = 2 \cdot 10^6$  K,  $\rho = 3 \cdot 10^6$  g/cm<sup>3</sup>  $\implies \chi = 1.2$ .

Nel caso in cui  $\chi \gg 1$  siamo nel limite ultra relativistico, possiamo allora considerare il gas di elettroni completamente degeneri ( $T = 0$ ) e si ottiene una formula per la pressione dei fermioni:

$$P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8m_H^{4/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}. \quad (1.2.31)$$

Possiamo notare che nel caso relativistico il termine  $\rho/\mu_e$  è elevato alla 4/3 anziché 5/3 come nel caso non relativistico. Questo significa che l'equazione di stato per elettroni degeneri è più soft nel caso relativistico. Questa cosa ha un importante riscontro nelle nane bianche: se si raggiunge una situazione in cui il gas di fermioni nel nucleo diventa relativistico allora l'unica configurazione di equilibrio è quella avente massa di Chandrasekhar (la massa oltre la quale la stella collassa).

## Gas perfetto (interazioni)

Per valutare quando il gas diventa interagente possiamo introdurre un parametro che confronti l'interazione coulombiana con l'energia termica delle particelle:

$$\Gamma = \frac{(Ze)^2}{akT}. \quad (1.2.32)$$

Per fare il calcolo consideriamo il caso in cui la materia è costituita da un'unica specie atomica (OCP: one component plasma). Abbiamo quindi i nuclei in moto in un Background di carica negativa in modo da rendere il tutto neutro.

La densità di particelle può essere scritta come:

$$n = \frac{\rho}{A_i m_H}. \quad (1.2.33)$$

Quindi possiamo procedere al calcolo di  $\Gamma_i$ :

$$\Gamma_i = \frac{(Z_i e)^2}{a_i kT} = \frac{(Z_i e)^2}{kT} \left(\frac{4}{3}\pi \frac{N_A}{A_i}\right)^{1/3} \rho^{1/3}. \quad (1.2.34)$$

Nel caso in cui gli elettroni sono non degeneri possiamo scrivere che:

$$\Gamma_e = \frac{e^2}{a_e kT} = \frac{e^2}{a_i kT} Z_i^{1/3} = \frac{\Gamma_i}{Z_i^{5/3}}. \quad (1.2.35)$$

In cui si sfrutta il fatto che

$$a_e = \left(\frac{4}{3}\pi n_e\right)^{-1/3}. \quad (1.2.36)$$

E inoltre  $n_e = Z_i n_i$  se consideriamo un gas completamente ionizzato. Possiamo allora notare che è sempre vera la disuguaglianza:

$$\Gamma_e < \Gamma_i. \quad (1.2.37)$$

Quindi se in un gas gli elettroni sono non degeneri e gli atomi sono un gas perfetto allora gli elettroni sono un gas perfetto.

Se gli elettroni sono degeneri invece possiamo scrivere che:

$$\tilde{\Gamma}_e = \frac{e^2}{a_e \mathcal{E}_F} = \dots \propto \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{-1/3}. \quad (1.2.38)$$

Quindi se per un gas non degeneri abbiamo che possiamo considerare tale gas tanto più perfetto tanto più è rarefatto per il gas degeneri abbiamo l'esatto opposto.

**Sole**  $\Gamma_i(H) = \Gamma_e \sim 0.07$ .

**Gigante rossa**  $\Gamma_i(He) \sim 0.58$ ,  $\Gamma_e \sim 0.01$ .

**Nana bianca**  $\Gamma_i(O) \sim 550$ ,  $\Gamma_e \sim 0.0008$ .