

Appunti di astrofisica

Edoardo Gabrielli

16 marzo 2020

Indice

1	Introduzione e Trasporto Radiativo	2
1.1	Lezione 1	2
1.1.1	Osservazione del cielo	2
1.1.2	Diffrazione e Seeing	3
1.1.3	Massa del sole	5
1.1.4	Distanze e metodo della parallasse	5
1.1.5	Scale temporali dell'universo	6
1.1.6	Luminosità intrinseca, Candeled campioni ed introduzione al trasporto radiativo	7
1.2	Lezione 2	8
1.2.1	Momenti dell'intensità I_ν	8
1.2.2	Propagazione di un fascio nel vuoto.	10
1.2.3	Propagazione della radiazione in un mezzo	12
1.2.4	Equazione del trasporto: processi di interazione radiazione materia	13
1.3	Lezione 3	15
1.3.1	Serie dell'atomo di idrogeno	17
1.3.2	Radiazione attraverso una nube interstellare	18
1.3.3	Soluzione analitica all'equazione del trasporto stazionaria.	19
1.4	Lezione 4	22
1.4.1	Scoperta delle righe (di assorbimento e di emissione).	22
1.4.2	Radiazione di corpo nero: proprietà principali.	23
1.4.3	Temperatura di una stella	24
1.4.4	Cammino libero medio dei fotoni	26
1.4.5	Equilibrio termodinamico locale	27
1.5	Lezione 5	27
1.5.1	Atmosfera a piani paralleli.	27
1.5.2	Valutazione della anisotropia.	30
1.5.3	Atmosfera grigia	30
1.6	Lezione 6	31
1.6.1	Limb Darkening	32
1.6.2	Righe nello spettro stellare	34
1.7	Lezione 7	35
1.7.1	Magnitudine	37

Capitolo 1

Introduzione e Trasporto Radiativo

1.1 Lezione 1

20-02-2020

Introduzione

Il corso è di astrofisica generale e darà una infarinatura generale degli argomenti principali dell'astrofisica.

Libro di testo *Astrophysics for Physicists*, Arnab Rai Choudhri

Argomenti del corso

- Trasporto radiativo.
- Stelle.
- Aggregati di stelle.
- Mezzo interstellare.
- Ammassi di galassie.

1.1.1 Osservazione del cielo

Astrofisica L'astrofisica è una scienza osservativa: non possiamo decidere di modificare il nostro "apparato", possiamo solo soltanto raccogliere informazioni attraverso le tecnologie di osservazione che abbiamo.

Le informazioni possono essere raccolte attraverso i diversi tipi di **messaggeri** che ci arrivano dal cosmo.

Il messaggero principale è la radiazione elettromagnetica, ultimamente si sono aggiunti altri portatori di informazioni: prima le particelle (neutrini) e successivamente le onde gravitazionali.

Resta il fatto che la stragrande maggioranza di informazioni che sappiamo dall'universo proviene dalla radiazione elettromagnetica.

Non potendo decidere quando i fenomeni avvengono sarà necessario sviluppare delle strategie che permettano di avere una sorta di **ridondanza osservativa** per riuscire ad accertare un supposto evento.

Osservazione della radiazione elettromagnetica Fino alla seconda guerra mondiale si osservava soltanto nella fascia dello spettro del visibile: tra i 4000 ed i 7000 Å.

Successivamente, grazie all'invenzione del radar si sono aperte le regioni del Radio, X, Infrarosso, Gamma. Oggi si fanno osservazioni in tutto lo spettro.

Lotta contro l'oscurità La sfida è sempre stata nel vedere sorgenti deboli. Una sorgente può essere debole perchè è intrinsecamente debole (nana bianca antichissima, pianeti) oppure sorgenti intrinsecamente molto luminosi ma molto molto lontani.

Poter osservare oggetti sempre più lontani significa aumentare il numero di osservazione: posso avere più possibilità di osservare fenomeni mai visti prima e fare nuova fisica.

Per vedere oggetti sempre meno luminosi abbiamo bisogno di lenti dei telescopi sempre più grandi. Attualmente i telescopi ottici più grandi hanno diametri di 10 metri. L'ESA sta costruendo un telescopio di diametro di 39 metri. Avere un diametro più grande significa avere una sensibilità maggiore.

1.1.2 Diffrazione e Seeing

Telescopi sempre più grandi Aumentando la superficie della lente del telescopio aumenta la capacità di catturare luce e quindi la sensibilità del telescopio. Tuttavia questo non è l'unico motivo per cui si costruiscono telescopi sempre più grandi: c'è anche un motivo legato alla risoluzione del telescopio.

Quando guardiamo il cielo noi osserviamo degli angoli, le varie sorgenti che sono proiettate sulla volta celeste. La risoluzione è l'angolo più piccolo tra due sorgenti proiettate sulla volta celeste che mi permette di distinguerle. Infatti per le dimensioni angolari degli oggetti luminosi nel cielo non sono trascurabili effetti di diffrazione.

Diffrazione Prendiamo il classico problema della fenditura:

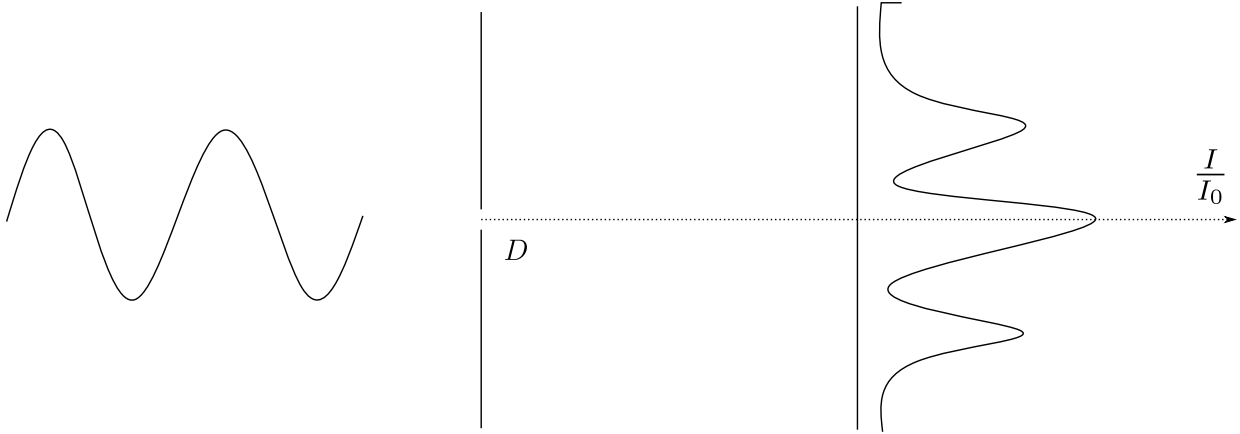


Figura 1.1: Diffrazione da una fenditura

Sappiamo che gli zeri della funzione di intensità $\frac{I}{I_0}$ sono nei punti:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D} \cdot m \quad m \text{ intero.} \quad (1.1.1)$$

Con il nostro telescopio abbiamo una situazione simile: abbiamo una stella lontana che irraggia. La sua luce entra in una fenditura circolare di diametro D data dal telescopio. Per il principio di Babinet sappiamo che anche in questo caso si crea una figura di interferenza che prenderà la seguente forma:

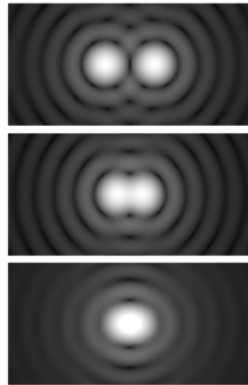


Figura 1.2: Diffrazione al telescopio per due stelle al variare della risoluzione angolare.

Questa struttura di rifrazione ci permette di ridefinire il concetto di risoluzione, questa volta gli zeri sono in corrispondenza di alcuni numeri, il primo zero va ha $m = 1.22$.

Il cerchio centrale, detto disco di Airy è importante perchè ci permette di discriminare due oggetti, questo risulta evidente in Figura 2

Prendendo angoli progressivamente più piccoli le figure di diffrazione tengono a sovrapporsi, il criterio per dire quando due sorgenti sono distinguibili è detto Criterio di Rayleigh: due sorgenti si dicono distinte quando hanno dischi di Hairy con centri che giacciono uno all'esterno dell'altro. Quindi l'angolo minimo che riesco a risolvere sarà:

$$\sin \theta_{min} \approx \theta_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (1.1.2)$$

Quindi la risoluzione angolare di questo telescopio è data da questa formula. Per questo possiamo capire perchè è importante avere telescopi sempre più grandi.

Quando un telescopio arriva alla situazione in cui il limite di funzionamento è quello di diffrazione si dice che siamo nelle condizioni ottimali: quelle di Diffraction Limited (Hubble è in queste condizioni).

Seeing Sulla terra si può arrivare alla condizione ottimale del paragrafo precedente? In genere no per colpa della atmosfera, avente indice di rifrazione variabile è la maggiore fonte di disturbo.

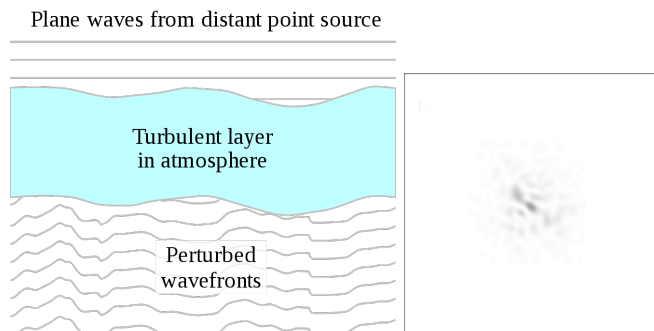


Figura 1.3: A destra un possibile effetto sui fronti d'onda che attraversano l'atmosfera e a sinistra il risultato sulla stella agli occhi del telescopio, l'immagine risulta allargata e distorta.

Qual'è l'ordine di grandezza del Seeing? Se è buono si arriva al "secondo d'arco": $1''$. Nei siti migliori si arriva a $0.5''$.

Possiamo allora chiederci qual'è il valore del diametro del telescopio che mi produce un angolo di diffrazione minimo che corrisponde a quello del seeing. A quel punto non mi servirebbe a niente aumentare le dimensioni della lente: il seeing ci sarebbe comunque.

Nella luce visibile si ha $\lambda \approx 5000 \text{ \AA}$, se prendiamo a questa lunghezza d'onda un angolo di $1''$ vediamo che il telescopio che raggiunge il limite del seeing è minuscolo: $D = 12 \text{ cm}$.

Perchè allora si costruiscono telescopi di 40 metri di diametro?

- Per raccogliere comunque più luce.
- Per via dell'avvento della elettronica.

Esiste infatti un sistema detto ottica adattiva per correggere la presenza dell'atmosfera: si spara una sorgente laser in aria e si cercano di compensare elettronicamente l'effetto dell'atmosfera.

Lunghezza d'onda per cui oggi si ha la massima risoluzione angolare Ha senso diminuire λ fissando D , sembrerebbe quindi sensato andare nel Gamma, oggi invece si ha la risoluzione massima nel Radio grazie a Tecniche di interferometria: possiamo costruire array di telescopi che lavorano simultaneamente (si registra con orologi atomici l'arrivo del segnale): si arriva a $D = 8600 \text{ km}$ (baseline molto lunga). Con questo metodo si arriva a risoluzioni di decine di micro arcosecondi! Questo è sicuramente il caso della foto del buco nero (30 arcosecondi).



Figura 1.4: Immagine del buco nero raccolta nel 2019

Ci sono alcune grandezze in astrofisica che non possono essere dimenticate ai fini di comprendere le grandezze di cui stiamo parlando. Queste grandezze alcune volte vengono anche adottate come unità di misura, visto che nella scala astrofisica le unità standard ridulterebbero decisamente incomprensibili!

1.1.3 Massa del sole

Massa del sole: $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$.

La massa minima per una stella è circa $0.08 M_{\odot}$ ¹, la massima si aggira attorno a $100 M_{\odot}$.

Le galassie hanno circa 10^{11} stelle, da cui per ottenere la massa di queste ultime si può mediare la massa a quella del sole con l'adeguato esponente.

Abbiamo anche aggregati di stelle (tipo Pleiadi, migliaglia di stelle) e più in là vedremo e studieremo gli ammassi di galassie.

1.1.4 Distanze e metodo della parallasse

Raggio del sole: $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$.

La misura delle distanze in astronomia è complicata. Sono necessarie misure indirette spesso. Se voglio conoscere le dimensioni fisiche di un oggetto (trasformare angolo in distanza) ho bisogno di sapere quanto è distante!

Metodo della parallasse È l'unica misura diretta di distanza disponibile. È inoltre una misura di tipo geometrico:

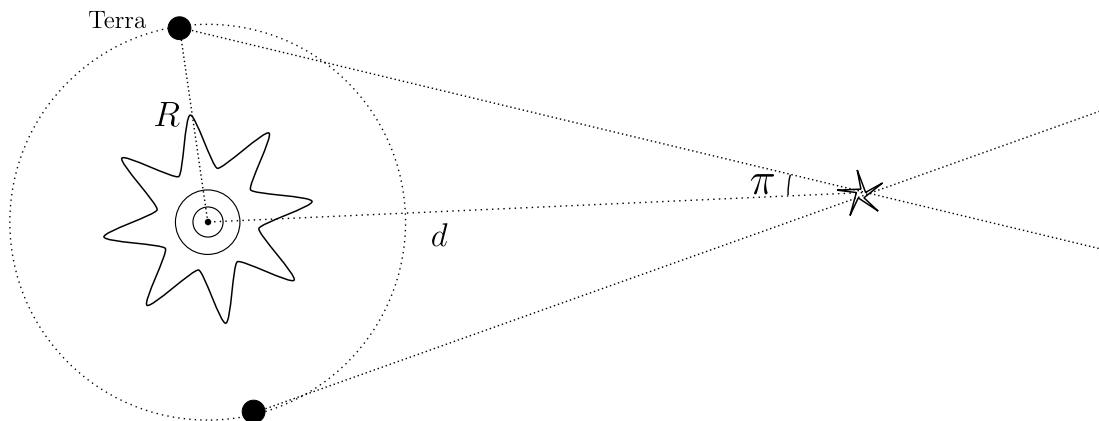


Figura 1.5: Metodo della parallasse: la stella risulta in diversi punti del cielo a seconda della posizione della terra.

Negli anni novanta abbiamo mandato un satellite che misurava fino ad un millesimo di secondo d'arco. La missione attuale più importante al riguardo è la GAIA: sta adesso mappando il cielo, quando tra qualche anno avrà finito si arriva a 30 microarcosecondi, purtroppo non si esce ancora dalla galassia con questo metodo.

Il metodo consiste in pratica nel vedere lo spostamento angolare dell'oggetto in momenti diversi dell'orbita di rotazione della terra attorno al sole: l'angolo di parallasse π è la metà dell'angolo θ

$$\frac{\theta}{2} = \pi. \quad (1.1.3)$$

Se conosciamo il raggio di orbita terrestre possiamo trovare la distanza della stella.

Noi conosciamo il raggio dell'orbita terrestre medio², esso è l'unità astronomica A.U: $R \approx 1.5 \cdot 10^{13} \text{ cm}$.

$$\tan(\pi) \approx \pi = \frac{R}{d}. \quad (1.1.4)$$

Il sistema solare (fino a nettuno) abbiamo una dimensione di 30 A.U. Fuori dal sistema solare è necessario definire un'altra unità di misura: il Parsec.

Un parsec è una distanza tale che la parallasse annua è $1''$:

$$1 \text{ pc} \approx 3.09 \cdot 10^{18} \text{ cm} \sim 3.2 \text{ anni luce}. \quad (1.1.5)$$

¹questa è la massa minima per innescare le reazioni termonucleari, chi non raggiunge queste dimensioni (ma si avvicina) è detta Nana Bruna

²Grazie ad un trasponder radar montato sulla luna

La stella più vicina a noi ha una parallasse annua di $0.75''$ l'anno (Proxima Centauri) che equivale a 1.3 pc. Misurare questi angoli è difficile in generale, gli angoli sono molto piccoli. Le dimensioni di una galassia come la nostra invece sono:



Figura 1.6: Rendering della via lattea vista dall'esterno.

$$R_{disco} \sim 15kpc. \quad (1.1.6)$$

La distanza tra le galassie più vicine tra loro è dell'ordine del Mpc.

In genere le stelle invece distano tra loro di quantità dell'ordine dei parsec, è raro che collidano tra loro: l'una tra l'altra sono molto lontane rispetto alle dimensioni delle stelle stesse.

Non si può dire lo stesso per le galassie, ci sono solo pochi ordini di grandezza tra il raggio galattico e la distanza tra una galassia e l'altra, infatti le collisioni tra galassie sono più frequenti.

Le galassie più distanti sono dell'ordine del Gpc (questa è anche la scala delle dimensioni dell'universo).

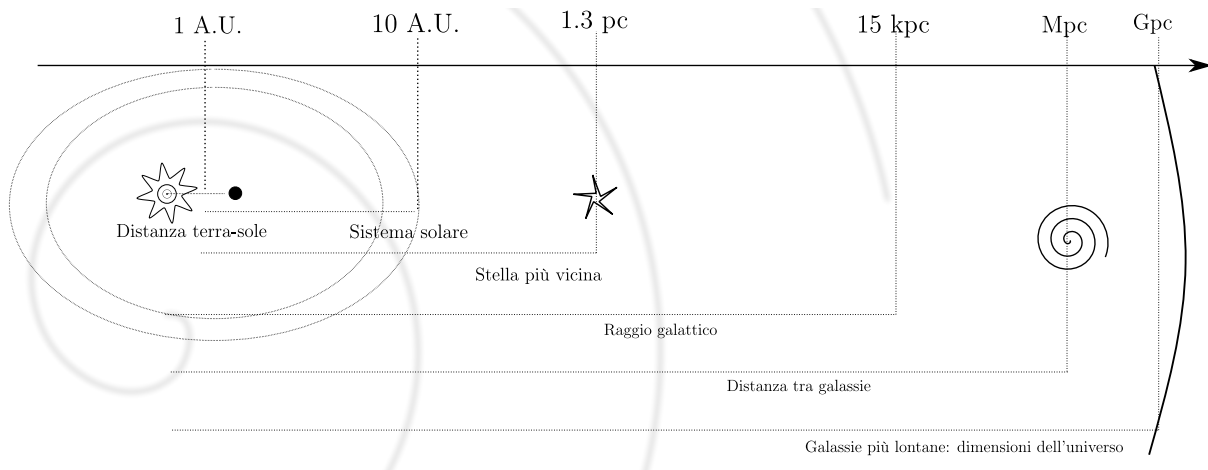


Figura 1.7: Scale dell'universo, il disegno è schematico e non è ovviamente in scala.

1.1.5 Scale temporali dell'universo

Età del sole: $T_{\odot} = 4.57$ Gyr (Giga year). Questa è una delle poche datazioni misurata in modo diretto in astronomia, questa deriva dallo studio delle comete: queste sono rimaste intatte per miliardi di anni, queste vengono datate attraverso radiodazioni.

Età dell'universo (dal Big Bang ad oggi): $T_{uni} = 13.8$ Gyr.

1.1.6 Luminosità intrinseca, Candele campioni ed introduzione al trasporto radiativo

Negli anni '90 l'ESA ha mandato un satellite in grado di mappare decine di migliaia di stelle attorno a noi distanti fino a 10 pc. GAIA è l'evoluzione di questo progetto, essa permetterà di mappare tridimensionalmente la galassia.

Tuttavia anche con GAIA non si esce dalla galassia, quindi come si fa ad uscire? Come si misura la distanza se non sono in grado di misurare la parallasse?

Serve un metodo indiretto basato sul concetto di **Candela campione**: un oggetto astronomico di cui conosco la luminosità intrinseca.

Confrontando la luminosità intrinseca e la luminosità apparente osservata possiamo dedurre la distanza dell'oggetto. Questo è l'unico modo per misurare le distanze di oggetti all'esterno della via lattea. (Gli oggetti campione sono in genere le supernove).

Come faccio a partire dalla luminosità intrinseca a misurare la distanza?

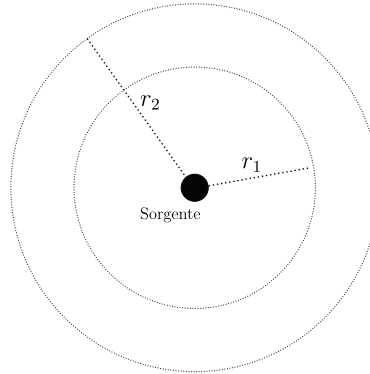


Figura 1.8: Propagazione della radiazione

Prendiamo una sorgente che irraggia come in Figura 8. Se chiamiamo $F(r_1)$ il flusso della radiazione che attraversa la superficie sferica concentrica alla sorgente di raggio r_1 allora:

$$F(r_1) 4\pi r_1^2 = F(r_2) 4\pi r_2^2 \implies F(r_2) = F(r_1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \quad (1.1.7)$$

Abbiamo quindi una buona definizione di luminosità se ci mettiamo sul raggio R della stella che irraggia:

$$F(R) 4\pi R^2 = L. \quad (1.1.8)$$

Tuttavia questa a livello pratico non è sufficiente. La radiazione non si propaga nel vuoto, è indispensabile quindi costruire una teoria del trasporto radiativo per tener conto del mezzo interstellare.

Dobbiamo introdurre alcune grandezze per studiare il trasporto radiativo: **Intensità specifica monocromatica** (trattata dal punto di vista macroscopico ³):

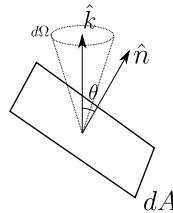


Figura 1.9: Figura per introdurre l'intensità specifica

Supponiamo di essere in un punto \mathbf{r} all'istante t e prendiamo in questo punto una superficie infinitesima elementare dA orientata nella direzione \hat{n} come in Figura 9. Ci interessa calcolare l'energia trasportata dalla

³Valido quando la lunghezza d'onda che stiamo studiando sono piccole rispetto alle dimensioni del sistema, questo ci permette di immaginare che la radiazione si propaghi lungo dei raggi

radiazione elettromagnetica che attraversa la superficie dA nella direzione \hat{k} all'interno dell'angolo solido $d\Omega$ (inoltre deve essere monocromatica: tra ν e $d\nu$).
Quello che cerchiamo è dato da:

$$dE = I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \hat{k} \hat{n} dA dt d\Omega d\nu = I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \cos \theta dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.1.9)$$

Questa quantità è un flusso per unità di angolo solito: una brillantezza superficiale.

$$[I_\nu] = [\text{erg}] \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}. \quad (1.1.10)$$

Dove ster è lo ster radiante.

I_ν è l'energia trasportata da un gruppo di fotoni che si muovono tutti nella stessa direzione contemporaneamente e tutti con la stessa frequenza.

È necessario notare che l'interazione tra radiazione e materia è anche argomento microscopico: il fotone interagisce anche con ioni, protoni, nuclei nel suo tragitto. Terremo conto con opportuni coefficienti il passaggio della radiazione nei vari mezzi quando scriveremo l'equazione del trasporto.

1.2 Lezione 2

24-02-2020

Riprendiamo la teoria del trasporto radiativo.

$$dE = I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \hat{k} \hat{n} dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.1)$$

Conoscere il campo di radiazione in una determinata regione significa conoscere l'intensità specifica del campo di radiazione: $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$.

Tale quantità ricordiamo essere un flusso per unità di angolo solido. Presa una superficie infinitesima dA come nella lezione precedente:

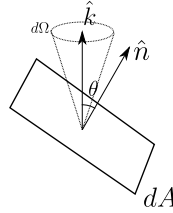


Figura 1.10: Figura per introdurre l'intensità specifica

L'energia trasportata dalla radiazione elettromagnetica tra la frequenza ν e $\nu + d\nu$ che attraversa la superficie dA è data dalla relazione con cui abbiamo introdotto questa lezione.

Questa $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$ non descrive completamente il campo di radiazione: lo descrive nei confini dell'ottica geometrica. Non tiene di conto infatti di fenomeni come interferenza e diffrazione. Anticipiamo che nella maggior parte delle situazioni di interesse la quantità $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$ non dipende dal tempo perché il campo di radiazione ed il mezzo stesso sono in genere stazionari ⁴.

1.2.1 Momenti dell'intensità I_ν

Spesso inoltre non serve conoscere direttamente $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$, bastano altre quantità con meno informazioni. Facciamo in questa sezione alcuni esempi.

Flusso Immaginiamo di volere il flusso F_μ monocromatico (tra la frequenza ν e $\nu + d\nu$) attraverso la superficie dA nell'unità di tempo, calcoliamo dapprima la radiazione che si propaga nella direzione \mathbf{k} che chiamiamo ϕ :

$$\phi = \frac{dE}{dA dt} = \frac{I_\nu \cos \theta}{dA dt} dA dt d\Omega d\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu. \quad (1.2.2)$$

⁴Ci sono anche casi in cui questo non è vero, nei casi che affrontiamo noi invece lo daremo per scontato.

Per ottenere il flusso basterà integrare in tutto l'angolo solido ottenendo:

$$F_\nu = \int_{\Omega} I_\nu \cos \theta d\Omega \quad [\text{erg}] [\text{cm}]^{-2} [\text{s}]^{-1} [\text{Hz}]^{-1}. \quad (1.2.3)$$

Se vogliamo il flusso totale sarà necessario integrare nelle frequenze:

$$F = \int F_\nu d\nu. \quad (1.2.4)$$

Chiaramente nel flusso c'è meno informazione che nella intensità specifica perchè abbiamo perso informazioni sull'angolo e quindi sulla direzione di propagazione.

Notiamo che nei casi in cui la radiazione è isotropa il flusso sarà nullo: la quantità di radiazione che va verso l'alto è la stessa di quella verso il basso ⁵.

Un esempio di radiazione isotropa è quella di corpo nero. Per tale oggetto, inserendo in rivelatore all'interno della famosa cavità rileviamo appunto un flusso nullo.

In natura una ottima approssimazione di corpo nero sarà l'interno delle stelle.

Densità di energia irraggiata Un'altra quantità che si può ricavare quando è noto I_ν è la densità di energia u_ν : consideriamo l'elementino di volume composto dalla quantità di radiazione che attraversa l'area dA nel tempo dt facendo sempre riferimento alla Figura 10:

$$dV = dA \cos \theta c dt. \quad (1.2.5)$$

si ha che, ragionevolmente, la densità di energia sarà parente della quantità:

$$\frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \hat{k} \cdot \hat{n} dA dt d\Omega d\nu}{dA \cos \theta c dt} = \frac{I_\nu}{c} d\Omega d\nu. \quad (1.2.6)$$

Dove abbiamo usato il fatto che $\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos \theta$.

Basta adesso integrare sull'angolo solido per ottenere u_ν :

$$u_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} d\Omega \quad [\text{erg}] [\text{cm}]^{-3} [\text{Hz}]. \quad (1.2.7)$$

Se la radiazione è isotropa I_ν/c può uscire dall'integrale:

$$u_\nu = \frac{I_\nu}{c} \int d\Omega = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (1.2.8)$$

Nel caso del corpo nero abbiamo, dalla legge di radiazione di Plank che:

$$u_\nu = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{4\pi}{c} B_\nu. \quad (1.2.9)$$

Dove abbiamo introdotto la quantità:

$$B_\nu = \frac{2\hbar}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (1.2.10)$$

Pressione Possiamo trovare la pressione della radiazione calcolando il flusso della componente ortogonale della quantità di moto alla superficie attraversata dA :

$$\mathbf{p}_\perp \cdot \hat{n} = \frac{dE}{c} \hat{k} \cdot \hat{n} = \frac{I_\nu \cos^2 \theta dA dt}{c} d\Omega d\nu = \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega d\nu. \quad (1.2.11)$$

Dove abbiamo sfruttato che i fotoni sono particelle senza massa per relazionare l'energia alla quantità di moto. Quindi abbiamo che, integrando nell'angolo solido come sopra si ottiene la pressione per unità di frequenza:

$$P_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega. \quad (1.2.12)$$

E integrando ancora nella frequenza si ottiene la pressione:

$$P = \int P_\nu d\nu. \quad (1.2.13)$$

⁵Infatti l'integrale fa proprio zero, poichè tutto esce dall'integrale in Ω tranne il coseno, mentre l'elemento infinitesimo di angolo solido è proporzionale a $\sin \theta d\theta$

Notiam adesso che se il campo è isotropo il risultato che otteniamo è il seguente:

$$P = \frac{4\pi}{3} \frac{I_\nu}{c} = \frac{u_\nu}{3}. \quad (1.2.14)$$

Nel caso degli interni stellari ⁶ avviciniandoci verso il centro delle stelle non si ha esattamente un irraggiamento isotropo per il semplice motivo che questo richiederebbe un equilibrio termodinamico esatto. Ci sarà invece un gradiente di temperatura andando verso il centro della stella, quindi ci aspettiamo anche in questa situazione una anisotropia nella radiazione.

Tale anisotropia sarà così piccola che per la maggior parte delle applicazioni che vedremo può essere trascurata, tuttavia globalmente non può essere trascurata perchè proprio quella lieve luce che noi vediamo guardando il cielo notturno.

Intensità specifica media sull'angolo.

$$J_\nu = \frac{\int I_\nu d\Omega}{4\pi}. \quad (1.2.15)$$

Nel caso del campo isotropo si ha: $J_\nu = I_\nu$.

È possibile esprimere la densità di energia in termini di J_ν :

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (1.2.16)$$

Momenti dell'intensità Tutti gli oggetti ricavati sono stati estrapolati con la forma:

$$\int I_\nu \cos^n \theta d\Omega. \quad (1.2.17)$$

Questi sono detti i momenti di ordine (0,1,2) dell'intensità specifica I_ν , riguardando quanto fatto sopra possiamo notare che i tre esempi che abbiamo fatto sono:

- u_ν : momento di ordine 0 di I_ν .
- F_ν : momento di ordine 1 di I_ν .
- P_ν : momento di ordine 2 di I_ν .

Quindi data la forma funzionale della intensità specifica ⁷ possiamo possiamo ricavare tutti i momenti della quantità stessa. L'utilità di questi momenti è che possono isolare e rendere applicabili informazioni utili sul sistema.

1.2.2 Propagazione di un fascio nel vuoto.

Vogliamo vedere che cosa succede all'intensità specifica di un fascio che si propaga nel vuoto.

Abbiamo visto che il flusso di un fascio che si propaga nel vuoto scala come R^{-2} , quindi il flusso della sorgente è sempre più debole mano a mano che la sorgente si allontana.

Per l'intensità specifica invece si ha che visivamente resta costante: mentre l'auto si allontana ci sembra che il suo brillare non cambi. Vediamo se si può dimostrare questo fatto, consideriamo il seguente caso:

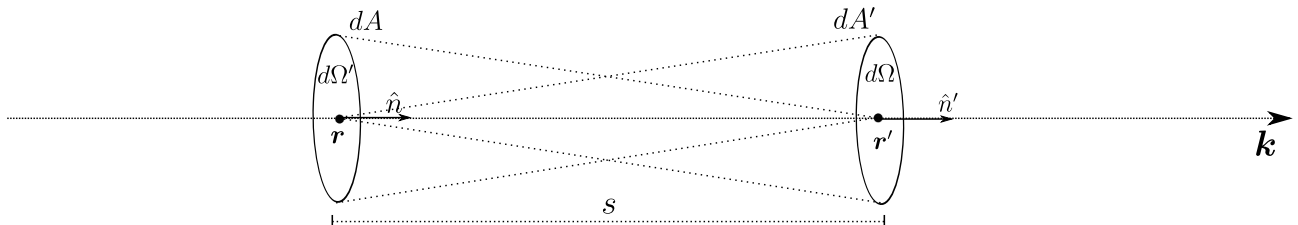


Figura 1.11: Sistema in cui osservo la radiazione da una sorgente.

Il fascio si propaga nella direzione \mathbf{k} e noi vogliamo sapere come cambia I_ν lungo questa direzione, per questo prendiamo due punti lungo \mathbf{k} che in figura chiamiamo \mathbf{r} e \mathbf{r}' e valutiamo la brillantezza in tali punti: cerchiamo

⁶che sono la cosa che approssima meglio il corpo nero dopo l'universo stesso.

⁷vedremo che basta l'equazione per quest'ultima, che si chiamerà equazione del trasporto.

la quantità di radiazione che attraversa le aree infinitesime associate ai due punti dA e dA' . Ipotizziamo infatti che la sorgente si nella parte destra della figura, allora la luce proveniente da dA che arriva alla posizione \mathbf{r}' è quella sottesa all'angolo solido $d\Omega'$, d'altra parte la luce che arriva a \mathbf{r} e che passa poi dall'area dA' è senza dubbio quella sottesa all'angolo solido $d\Omega$. Per farlo sfruttiamo gli angoli solidi costruiti in Figura 1.11. Gli angoli solidi costruiti in figura possono essere scritti come:

$$d\Omega = dA' \frac{\hat{n}' \cdot \hat{k}}{s^2}. \quad (1.2.18)$$

$$d\Omega' = dA \frac{\hat{n} \cdot \hat{k}}{s^2}. \quad (1.2.19)$$

E l'energia trasportata dalla radiazione elettromagnetica nei due casi è, per definizione:

$$dE' = I_\nu \left(\hat{k}', t', \mathbf{r}' \right) \hat{k}' \cdot \hat{n}' dt d\Omega d\nu dA' \quad (1.2.20)$$

$$dE = I_\nu \left(\hat{k}, t, \mathbf{r} \right) \hat{k} \cdot \hat{n} dt d\Omega' d\nu dA. \quad (1.2.21)$$

Se la radiazione si propaga nel vuoto allora l'energia si deve conservare, quindi $dE = dE'$. Quindi inserendo anche gli angoli solidi ricavati sopra si ottiene un risultato importante:

$$I_\nu \left(\mathbf{r}, t, \hat{k} \right) = I_\nu \left(\mathbf{r}', t, \hat{k}' \right). \quad (1.2.22)$$

La conservazione della brillantezza. Possiamo allora scrivere la legge di conservazione per questa quantità nel vuoto:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = 0. \quad (1.2.23)$$

in coordinate cartesiane la legge si scrive:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial I_\nu}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = k_x \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + k_y \frac{\partial I_\nu}{\partial y} + k_z \frac{\partial I_\nu}{\partial z}. \quad (1.2.24)$$

Questo entra in conflitto con il fatto che il flusso scala come R^{-2} ? No, perchè l'intensità specifica è un flusso per unità di angolo solido.

Prendiamo una sorgente luminosa che siamo in grado di risolvere (vedo la forma geometrica), ipotizziamo che la sorgente si allontana da noi, la sorgente risulterà sempre più piccola ⁸.

Tuttavia, finché riusciamo a risolverlo il faro risulterà brillante allo stesso modo. Questo perchè è vero che il flusso diminuisce come R^{-2} ma è anche vero che l'angolo solido si riduce della stessa quantità R^{-2} , quindi resta invariata la quantità I_ν . Possiamo quindi affermare che la brillantezza si conserva lungo il raggio.

Se vogliamo, questa è la controparte macroscopica di un fatto microscopico: se un fotone viaggia nel vuoto la probabilità che decada è nulla.

Esempio astronomico: una sorgente che possiamo risolvere sono le galassie. Tuttavia non riusciamo a risolvere per le stelle perchè per noi sono oggetti puntiformi.

Quindi quando vediamo una luce proveniente da una stella noi vediamo la sua diffrazione, non la vera forma. Quindi l'estensione angolare dipende dalla legge di diffrazione.

Quindi non possiamo applicare il ragionamento che abbiamo fatto in precedenza se non siamo in grado di risolvere la sorgente.

Esempio classico Supponiamo di avere una sorgente sferica uniformemente brillante: ogni raggio uscente ha la stessa intensità specifica I :

$$I = \begin{cases} B & \text{Se il raggio interseca la superficie} \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}. \quad (1.2.25)$$

⁸Ipotizziamo che non ci sia nebbia, in modo da avvicinarci il più possibile ad una situazione di vuoto

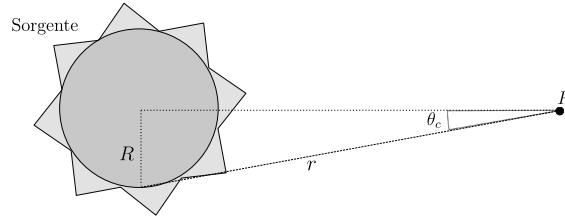


Figura 1.12: Esempio sulla conservazione della brillantezza

Calcoliamo il flusso al punto P ⁹:

$$F = \int I \cos \theta d\Omega = \quad (1.2.26)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_c} B \cos \theta \sin \theta d\theta = \quad (1.2.27)$$

$$= 2\pi B \frac{1 - \cos^2 \theta_c}{2} = \quad (1.2.28)$$

$$= \pi B \sin^2 \theta_c = \quad (1.2.29)$$

$$= \pi B \left(\frac{R}{r} \right)^2. \quad (1.2.30)$$

Se abbiamo una sorgente uniformemente brillante e isotropa il flusso che esce alla superficie è dato da:

$$F = \pi B. \quad (1.2.31)$$

Non è zero perchè questo è il flusso uscente, non sull'angolo solido come invece abbiamo visto prima.

1.2.3 Propagazione della radiazione in un mezzo

Vogliamo vedere come cambia interagendo con la materia I_ν , sicuramente non rimarrà costante perchè la radiazione interagisce con la materia: una parte dei fotoni verranno sottratti al fascio ed altri fotoni verranno immessi nel fascio.

Il nostro obiettivo è quantificare il bilancio tra i primi fenomeni detti Pozzi ed i secondi dette Sorgenti.

L'equazione del trasporto sarà della forma:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \hat{k} \nabla I_\nu = + \{\text{processi di sorgenti}\} - \{\text{Processi di pozzi}\}. \quad (1.2.32)$$

È quindi indispensabile conoscere i meccanismi di interazione tra la radiazione e la materia, la distanza percorsa dal fascio all'interno del mezzo e le condizioni del mezzo stesso.

Non dobbiamo sottovalutare il fatto che i fotoni stessi modificano lo stato del mezzo, quindi i fotoni ed il mezzo possono influenzarsi a vicenda. Per questo l'equazione del trasporto diventa con grande facilità non lineare.

Prendiamo quindi il seguente schema come riferimento:

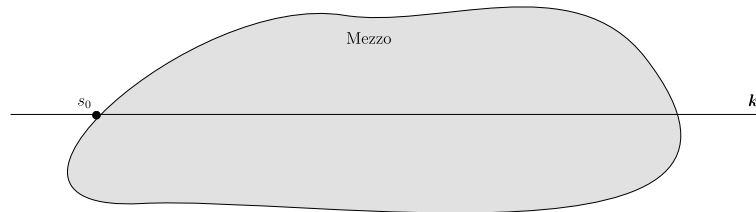


Figura 1.13: Radiazione in un mezzo

Al momento dell'ingresso (alla coordinata s_0) la brillantezza vale: $I_\nu(s_0)$ e sarà uguale a quella della sorgente in tal punto.

⁹Ovvero il flusso sotteso all'angolo solido costruito a partire da P verso la sorgente

Esempi di processi di emissione o di assorbimento Potremmo considerare lo scattering tra questi meccanismi, anche se vedremo che questi sono fastidiosi: aggiungono un elemento di non località alla nostra indagine sulla radiazione.

Quest'ultima affermazione può essere giustificata con un esempio: supponiamo di voler visualizzare lo spettro che proviene dalla faccia di una persona all'aperto sotto la luce del sole ¹⁰.

Dall'analisi troverei il doppietto del sodio. Tuttavia è difficile che le condizioni fisiche sulla faccia di una persona sono tali da vedere il doppietto del sodio. Ci si chiede allora come sia possibile vederlo nel volto della persona. La risposta sta nel fatto che la luce che viene dalla faccia è nata sulla superficie del sole, le righe del doppietto del sodio arrivano proprio dalla atmosfera del sole.

Quindi le righe che visualizziamo sono state create in situazioni completamente diverse rispetto alle condizioni fisiche del sistema dalla quale preleviamo la luce (il volto). Questo quindi perchè le proprietà del fotone scatterato contiene informazioni che nella maggior parte dei casi non ci sono utili a studiare il sistema locale che in questo caso è un volto.

Un'altro effetto che produce fotoni è l'emissione da eccitazione, tra poco distingueremo tra i tipi di emissione ¹¹.

Un processo di assorbimento è invece la fotoionizzazione: il passaggio da un livello energetico ad un livello del continuo.

Distinzione tra processi di emissione e di assorbimento Se abbiamo un fotone che incide su un atomo e sparisce senza dare luogo ad un fotone la cui direzione è correlata a quella del fotone incidente allora si dice che è avvenuto un fenomeno di assorbimento.

Se il fotone sparito eccita un atomo può succedere che questo, ad un certo punto, si disecciti. Se l'atomo quando perde l'eccitazione ha perso memoria di quanto gli era successo in precedenza allora avviene una emissione scorrelata, se invece l'atomo si diseccita prima di perdere memoria della eccitazione ¹² allora si parla di emissione correlata.

Nei casi di nostro interesse gli urti saranno talmente tanti che possiamo considerare i fotoni generati tutti scorrelati.

Potremmo anche distinguere tra assorbimenti in scattering ed assorbimenti termici, dove i primi gli abbiamo discussi sopra, i secondi invece sono quelli in cui i fotoni vanno ad eccitare il materiale aumentandone la temperatura. Nel caso di assorbimenti termici il nostro raggio va a trasferire energia al mezzo, cambiandone le condizioni fisiche.

1.2.4 Equazione del trasporto: processi di interazione radiazione materia

Emissione Consideriamo adesso i processi di emissione e prendiamo un elementino di volume dV contenuto nel mezzo:

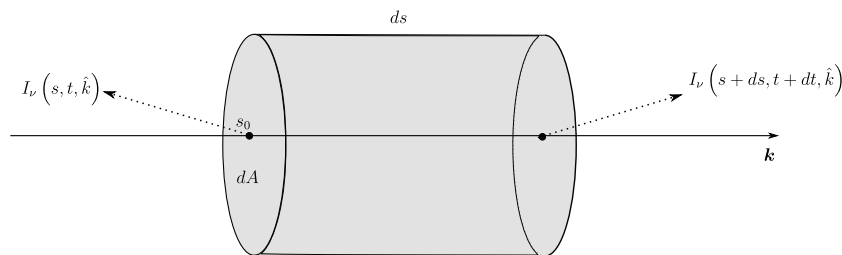


Figura 1.14: Elemento di volume del mezzo

Secondo la notazione in figura si ha che: $dV = ds \cdot dA$.

Definiamo il coefficiente di emissione monocromatico j_ν tale che la quantità di energia che viene messa dal mezzo di volume dV nell'intervallo di tempo dt e nell'angolo solido $d\Omega$ è data da:

$$dE = j_\nu dV dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.33)$$

Questi sono coefficienti macroscopici, per calcolarli dovremmo fare il conto di tutti i processi microscopici ed inserirli nel conto. Quindi dal punto di vista della fisica è un termine pesantissimo da trovare.

¹⁰Di fatto significa prendere la luce riflessa sulla faccia della persona

¹¹Che a seconda della situazione possono comportarsi da pozzi o da sorgenti

¹²Quindi prima di urtare altri atomi, ad esempio.

Le unità di questo oggetto sono: $[j_\nu] = [\text{erg}] \cdot [\text{cm}]^3 \cdot [\text{s}]^{-1} \cdot [\text{sterad}]^{-1} \cdot [\text{Hz}^{-1}]$. Vediamo come viene modificato il mezzo dall'emissione dovuta a questo termine, ovvero dall'emissione del mezzo. Facciamo riferimento alla Figura 1.14.

Possiamo scrivere la quantità di energia che esce dal volumetto dV :

$$dE_{\text{out}} = I_\nu \left(s + ds, t + dt, \hat{k} \right) dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.34)$$

mentre nel punto di ingresso avremo

$$dE_{\text{in}} = I_\nu \left(s, t, \hat{k} \right) dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.35)$$

La differenza tra le due sarà l'energia prodotta nei processi di emissione per la conservazione di energia.

$$dE_{\text{out}} - dE_{\text{in}} = \left(I_\nu \left(s + ds, t + dt, \hat{k} \right) - I_\nu \left(s, t, \hat{k} \right) \right) dt \cdot dA \cdot d\Omega \cdot d\nu = \quad (1.2.36)$$

$$= \left[\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] ds \cdot dA \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu \quad (1.2.37)$$

$$. \quad (1.2.38)$$

In cui abbiamo sostituito la variazione quadridimensionale di I_ν nell'ultimo passaggio, adesso ricordando che questa differenza di energia deve essere uguale alla energia emessa possiamo imporre l'uguaglianza:

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] ds \cdot dA \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu = j_\nu dA \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu. \quad (1.2.39)$$

Quindi se il mezzo è stazionario allora si ha che $\frac{\partial I_\nu}{\partial t} = 0$, quindi abbiamo che:

$$j_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial s}. \quad (1.2.40)$$

Il termine trovato ci dice come cambia l'intensità specifica nel mezzo. Quindi se c'è soltanto emissione ci aspettiamo che l'intensità specifica aumenti perchè in tal caso j_ν è positivo.

Assorbimento Possiamo definire l'assorbimento in modo analogo al caso precedente, per quest'ultimo però è necessario inserire l'intensità specifica in ingresso.

Infatti l'emissione può esistere in presenza o in assenza del campo di radiazione, l'assorbimento no.

Il coefficiente di assorbimento vero α_ν è definito a partire dalla quantità di energia sottratta per assorbimento:

$$dE = \alpha_\nu I_\nu dA \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu. \quad (1.2.41)$$

Questo coefficiente ha le dimensioni $[m]^{-1}$, l'inverso di questa quantità è il cammino libero medio monocromatico nel mezzo per la radiazione.

Quindi facendo i conti come in precedenza di arriva a:

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] = -\alpha_\nu I_\nu. \quad (1.2.42)$$

Il segno è dovuto al fatto che adesso l'energia che entra è maggiore dell'energia che esce, quindi abbiamo inserito un segno negativo.

Quindi la convenzione è che α_ν è positivo¹³. Quindi se c'è solo assorbimento vero il raggio si affievolisce nel passaggio attraverso il mezzo, come ci si potrebbe aspettare.

Scattering Per quanto riguarda i pozzi si ha lo scattering per cui i fotoni uscenti sono incoerenti con la radiazione entrante, come spiegato sopra. Per questo fenomeno si introduce un coefficiente $-\alpha_\nu^{\text{scatt}}$ moltiplicato per I_ν .

Per i pozzi invece abbiamo da considerare il fatto che il fotone uscente dallo scattering potrebbe essere emesso in tutte le direzioni, sarà necessario introdurre l'integrale di tutti i fotoni che si stanno muovendo lungo una qualunque direzione (\hat{k}') e che vengono scatterati nella direzione del fascio \hat{k} integrando su tutto l'angolo solido:

$$\alpha_\nu^{\text{scatt}} \int \phi \left(\hat{k}, \hat{k}' \right) I_\nu \left(\hat{k}' \right) d\Omega. \quad (1.2.43)$$

Dove $\phi \left(\hat{k}, \hat{k}' \right)$ è la densità di probabilità che un fotone venga emesso nella direzione \hat{k} .

¹³Siccome esistono anche i processi di emissione stimolata essi verranno considerati nel termine di assorbimento come correzioni di ordine maggiore di segno negativo, per questo puntualizziamo la convenzione sul segno.

Equazione finale con tutti i termini

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \alpha_\nu^{\text{scatt}} I_\nu + \alpha_\nu^{\text{scatt}} \int \phi(\hat{k}, \hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega. \quad (1.2.44)$$

Abbiamo quindi una equazione integro differenziale molto complicata da risolvere. L'incognita da calcolare è l'intensità specifica.

In realtà la faccenda è ancora più complessa: i coefficienti di solito nemmeno si conoscono! Per tutte le specie atomiche e per tutti i livelli di ciascuna bisognerebbe calcolare le probabilità dei singoli processi.

1.3 Lezione 3

27-02-2020

Per completare il quadro dei coefficienti dobbiamo aggiungere, nel caso dell'emissione isotropa si usa il coefficiente di emissività ϵ_ν . Il coefficiente di emissività è l'analogo del coefficiente di emissione per unità di massa.

Nel caso di radiazione isotropa il legame tra questo coefficiente ed il coefficiente di emissione può essere espresso mediante la seguente:

$$j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi}. \quad (1.3.1)$$

Quindi in tal caso possiamo esprimere la variazione di energia come:

$$dE = j_\nu dV dt d\Omega d\nu = \epsilon_\nu \rho dV dt \frac{d\Omega}{4\pi} d\nu. \quad (1.3.2)$$

Inoltre abbiamo la sezione d'urto σ_ν delle particelle che assorbono fotoni, possiamo dimostrare che questa è legato a α_ν . Prendiamo il volumetto di materiale attraversato:

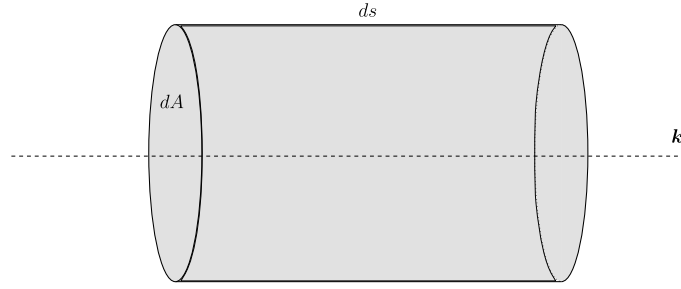


Figura 1.15: Elemento infinitesimo di materiale attraversato.

Abbiamo già definito la quantità di energia sottratta al fascio dal materiale:

$$dE = \alpha_\nu I_\nu dV dt d\Omega d\nu. \quad (1.3.3)$$

Immaginiamo che il nostro mezzo sia costituito da particelle tutte uguali e tutte in grado di assorbire la radiazione, supponiamo che la sezione d'urto di assorbimento di ogni particella sia σ_ν . Le particelle per unità di volume saranno: $dN = n dV = n dA ds$. Nelle ipotesi in cui il gas sia sufficientemente rarefatto:

$$\sqrt{\sigma_\nu} \ll d. \quad (1.3.4)$$

Con d distanza tra le particelle. Possiamo immaginare che le particelle del gas non si occultino l'una con l'altra, quindi la superficie assorbente complessiva sarà la somma di tutte le sezioni d'urto di ogni singola particella. Essendo le particelle tutte uguali otteniamo che $dA' = \sigma_\nu dN = \sigma_\nu dA ds$.

Abbiamo detto che un fotone viene assorbito su σ_ν , allora nel volumetto i fotoni che vengono assorbiti sono solo quelli che incidono sulla superficie dA' . L'energia che viene sottratta al fascio dal materiale sarà quella che incide su questa superficie dA' e visto che l'energia che attraversa tale superficie può sempre essere espressa tramite:

$$dE_{\text{sott}} = I_\nu dA' dt d\Omega d\nu. \quad (1.3.5)$$

Possiamo eguagliare questa all'energia persa per assorbimento:

$$dE = \alpha_\nu dN dt d\Omega d\nu. \quad (1.3.6)$$

ottenendo la legge:

$$\alpha_\nu = n \sigma_\nu. \quad (1.3.7)$$

Un'altra quantità utilizzata è l'opacità radiativa k_ν , questa è legata ad α_n tramite: $\alpha_\nu = k_\nu \cdot \rho$. Questa quantità è una sezione d'urto per unità di massa, calcolarla è molto difficile.

Torniamo adesso alla quantità j_ν , con questa valutiamo la quantità di radiazione che viene immessa nel fascio grazie a processi di emissione e non di scattering.

Quando un atomo viene eccitato può diseccitarsi in due modi:

- Emissione spontanea
- Emissione indotta

Quindi in generale dovremmo scrivere due contributi alla j_ν :

$$j_\nu = j_\nu^{\text{spont}} + j_\nu^{\text{ind}}. \quad (1.3.8)$$

Nel caso di emissione spontanea, nel riferimento di quiete dell'atomo, l'emissione è isotropa. Inoltre in questo caso l'emissione è indipendente dalla radiazione incidente che può, di fatto, non esserci.

Viceversa l'emissione indotta ha bisogno della radiazione per avvenire, se sull'atomo eccitato arriva un fotone avente energia esattamente uguale all'energia di transizione di livello allora l'atomo si diseccita e libera un fotone. Il fotone emesso ha le stesse caratteristiche del fotone incidente: stessa direzione e stessa frequenza.

Mentre l'emissione spontanea è indipendente dal campo di radiazione l'emissione indotta non è indipendente dal campo di radiazione.

Quindi di solito teniamo nell'equazione di trasporto solo il coefficiente dovuto all'emissione spontanea all'interno di j_ν , il termine di emissione stimolata invece lo si scarica all'interno di α come termine negativo. In questo modo si crea un coefficiente di assorbimento corretto per l'emissione stimolata.

Quindi il coefficiente di assorbimento complessivo può essere positivo o negativo a seconda del processo prevalente: se prevale l'assorbimento il coefficiente darà globalmente positivo (affievolendo il fascio), se il coefficiente è negativo allora prevale l'emissione stimolata ed il fascio verrà amplificato.

Un esempio in cui il fascio viene amplificato per emissione stimolata sono sicuramente i laser, mentre in natura esistono oggetti chiamati Maser: sorgenti di emissione nelle microonde che si creano nelle nubi stellari, le condizioni per avere un Maser si verificano soltanto nella prima fase di vita e nell'ultima di una stella.

Per poter trattare l'equazione del trasporto siamo costretti a fare alcune semplificazioni. La prima è che noi considereremo sempre situazioni stazionarie, di conseguenza l'equazione diventa:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \alpha_\nu^{\text{scatt}} I_\nu + \alpha_\nu^{\text{scatt}} \int \phi(\hat{k}, \hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega. \quad (1.3.9)$$

Inoltre per adesso abbandoniamo lo scattering, lo riprenderemo più avanti nel corso.

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \alpha_\nu^{\text{scatt}} I_\nu. \quad (1.3.10)$$

Esempio: Mezzo in grado di emettere ma non di assorbire In questo caso abbiamo $\alpha_\nu = 0$, quindi l'equazione diventa:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu. \quad (1.3.11)$$

Integrando in s otteniamo:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds' > I_\nu(s_0). \quad (1.3.12)$$

Esempio: Mezzo in grado di assorbire ma non di emettere Al contrario del caso precedente qui abbiamo $j_\nu = 0$, da cui:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu. \quad (1.3.13)$$

Quindi

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -\alpha_\nu ds. \quad (1.3.14)$$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[- \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right]. \quad (1.3.15)$$

In questo caso l'intensità della radiazione sorgente viene attenuata o incrementata a seconda del segno di α_ν . Notiamo inoltre che l'esponente dell'ultima relazione è adimensionale, possiamo definirla come profondità ottica τ_ν . Tale grandezza segue la relazione:

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds. \quad (1.3.16)$$

Vedremo che tramite questo coefficiente si semplificherà moltissimo l'equazione del trasporto.

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'. \quad (1.3.17)$$

Dato un mezzo con una certa dimensione caratteristica L la profondità ottica potrà essere molto diversa al variare della frequenza.

Il mezzo considerato potrà essere otticamente sottile per certe frequenze mentre potrà essere spesso per altre frequenze.

Viceversa se vogliamo "vedere" un mezzo con una certa profondità ottica allora l'oggetto avrà spessori ottici differenti al variare di ν .

Tale quantità ha a che fare con il grado di trasparenza del mezzo. Posso esprimere quindi la soluzione dell'ultimo esempio in termini di τ_ν :

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu}. \quad (1.3.18)$$

Se un mezzo è otticamente sottile si ha che: $\tau_\nu \ll 1$, quindi :

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(0). \quad (1.3.19)$$

Che significa che la radiazione arriva è la stessa della sorgente, quindi il mezzo si può considerare otticamente trasparente.

Viceversa se un mezzo è otticamente spesso $\tau_\nu \gg 1$:

$$I_\nu \approx 0. \quad (1.3.20)$$

Quindi in questo caso il mezzo è opaco, non riusciamo più a vedere la luce proveniente dalla sorgente.

Facciamo una piccola digressione sui livelli energetici dell'idrogeno prima di continuare la nostra trattazione.

1.3.1 Serie dell'atomo di idrogeno

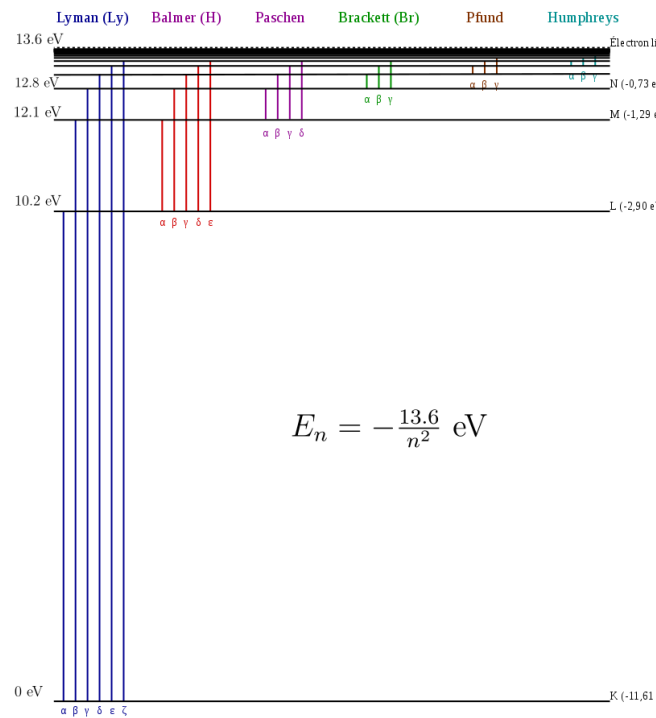


Figura 1.16: Serie spettrale dell'idrogeno

I livelli dell'atomo di idrogeno prendono la forma della Figura 1.16, possiamo notare diverse serie di energie che descrivono i livelli, ognuna avente il suo nome caratteristico.

Se mettiamo per comodità lo zero dell'energia sullo stato fondamentale abbiamo che i livelli energetici seguono la serie scritta in Figura 1.16.

Immaginiamo di voler far avvenire una transizione energetica dell'elettrone nell'idrogeno, a seconda del livello di partenza l'energia necessaria seguirà una determinata serie:

$$n = 1 \rightarrow m \geq 2 \implies \text{Assorbimento da Lyman} \quad (1.3.21)$$

$$n = 2 \rightarrow m \geq 3 \implies \text{Assorbimento da Balmer} \quad (1.3.22)$$

$$\dots \quad (1.3.23)$$

Il passaggio invece "dall'alto al basso" sarà l'emissione nelle varie serie.

Per la Lyman α ad esempio si ha che, se si emette o si assorbe un fotone dal primo stato eccitato al fondamentale (o viceversa) si ha che:

$$n = 1 \longleftrightarrow n = 2 \quad E_{L_{\gamma\alpha}} = 10.2 \text{ eV} \quad \lambda = 1216\text{\AA}. \quad (1.3.24)$$

Mentre per la Lyman β :

$$n = 1 \longleftrightarrow n = 3 \quad E_{L_{\gamma\beta}} = 12.1 \text{ eV} \quad \lambda = 1020\text{\AA}. \quad (1.3.25)$$

E così via fino al salto di Lyman

$$n = 1 \longleftrightarrow n = \infty \quad E_{L_{\infty}} = 13.6 \text{ eV} \quad \lambda = 912\text{\AA}. \quad (1.3.26)$$

Vediamo che questa serie è tutta nell'ultravioletto, questo è importante e dobbiamo tenerlo a mente.

Un'altra serie importante è la Balmer:

$$n = 2 \longleftrightarrow n = 3 \quad E_{H_{\alpha}} = 1.9 \text{ eV} \quad \lambda = 6563\text{\AA}. \quad (1.3.27)$$

E così via fino al salto di Balmer:

$$n = 2 \longleftrightarrow n = \infty \quad E_{H_{\infty}} = 3.5 \text{ eV} \quad \lambda = 3646\text{\AA}. \quad (1.3.28)$$

È utile notare che la serie di Balmer parte dal rosso e arriva all'ultravioletto con il salto, quindi gran parte della serie sta nel visibile, quindi quelle di Balmer sono le righe che possiamo vedere tecnicamente anche ad occhio nudo.

1.3.2 Radiazione attraverso una nube interstellare

Ipotizziamo che il mezzo sia una nube di mezzo interstellare composta da idrogeno. La temperatura della nube è quella tipica di queste nubi: $T \approx 100 \text{ K}$. Spariamo sulla nube due fasci aventi energie diverse:

$$L_{\gamma,\alpha} \quad (1.3.29)$$

$$H_{\alpha}. \quad (1.3.30)$$

Ci chiediamo adesso se la nube sarà trasparente oppure opaca ai fasci inviati.

Se l'atomo di idrogeno si trova nello stato fondamentale allora il fotone dell' H_{α} non può essere assorbito, non ha l'energia per fare il salto, quindi tutti gli atomi di idrogeno sono invisibili per un fotone della H_{α} .

Il fotone della $L_{\gamma,\alpha}$ invece ha l'esatta energia per effettuare il salto, quindi viene assorbito.

È quindi importante capire se ci sono e quanti sono gli atomi nel primo eccitato, perchè se ci sono allora H_{α} viene assorbito avendo l'esatta energia per permettere il salto.

Per capire se H_{α} viene assorbito dalla nube è necessario capire in che stato si trovano gli atomi della nube.

Procediamo quindi assumendo che la nube sia all'equilibrio termodinamico e cerchiamo il rapporto tra gli atomi del primo eccitato e quello fondamentale con la distribuzione di Boltzmann:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta E_{1,2}}{kT}\right). \quad (1.3.31)$$

Le g sono le degenerazioni dell'atomo di idrogeno (i pesi statistici): $g_n = 2n^2$ mentre n_2 è il numero di atomi di idrogeno che si trovano nel primo eccitato, n_1 è il numero di quelli che si trovano nel fondamentale.

Abbiamo che $g_2 = 8$, $g_1 = 2$, $\Delta E_{1,2} = 10.2 \text{ eV}$, $kT = \frac{1}{120} \text{ eV}$ ¹⁴.

$$\frac{n_2}{n_1} = 4 \exp\left(-\frac{10.2}{1/120}\right) = 4 \exp(-1224) = 4 \cdot 10^{-1224/2.3} \approx 10^{-532}. \quad (1.3.32)$$

Dove abbiamo usato il fattore di conversione tra esponenziali nelle due basi.

Abbiamo un atomo nell'eccitato ogni 10^{532} atomi nel fondamentale. Bisogna capire quanti atomi ha la nube per dire se il numero di atomi che si trovano effettivamente nel primo eccitato non è trascurabile.

Per risolvere la questione basta però notare che 10^{532} sono troppi atomi persino per l'universo stesso!

¹⁴Per ricordare questa si può ricordare che a temperatura ambiente $kT = \frac{1}{40} \text{ eV}$, quindi si ricava anche alla nostra temperatura. Sulla superficie del sole, con temperature dell'ordine di 6000 K , sarà circa mezzo eV (emissione nel visibile). Nel centro del sole invece, con circa 16 milioni di K, si ha $kT \approx 1 \text{ keV}$ (emissione nell'X).

Stima del numero di atomi nell'universo La massa del sole è $2 \cdot 10^{33}$ g, la massa dell'idrogeno $M_H = 1.66 \cdot 10^{-24}$ g quindi il numero di atomi nel sole sarà dell'ordine di $n_{\odot} = 10^{57}$, nella galassia ci sono circa 10^{11} stelle, quindi il numero di particelle idrogenoidi nella galassia potrebbe essere dell'ordine di $n_{galassia} \approx 10^{68}$. Visto che ci sono nell'universo visibile abbiamo circa 10^{11} galassie, quindi in tutto nell'universo visibile possiamo stimare circa $n_{universo} \approx 10^{80}$ atomi. Un numero incredibilmente più piccolo di quello trovato da noi sopra. Tornando all'esercizio possiamo stare molto tranquilli sul fatto che nella nube non ci saranno idrogeni nel primo eccitato, saranno tutti nel fondamentale, quindi la nube è otticamente sottile al fascio H_{α} anche se fosse estesa per milioni di chilometri.

Viceversa i fotoni della L_{α} verranno assorbiti, la nube sarà opaca a questi fotoni.

Questo ci anticipa anche che se in un mezzo come quello sopra gli atomi si eccitano (tipicamente per collisioni) e si diseccitano successivamente nella H_{α} allora i fotoni emessi usciranno dal mezzo indisturbati portando con se dell'energia. Questo è una tecnica di raffreddamento per il mezzo stesso che può perdere energia per collisioni e successiva emissione.

Inoltre se andiamo sul sito dell'hubble space telescope e cerchiamo le regioni di formazione stellare H_2 vediamo delle regioni di un colore rossastro, questo è proprio H_{α} che, con i suoi 6563 Å esce dalla nube per arrivare alla lente di Hubble.



Figura 1.17: Immagine di una nebulosa nel visibile (modificata per accentuare la nitidezza).

1.3.3 Soluzione analitica all'equazione del trasporto stazionaria.

Abbiamo visto che l'espressione dell'equazione del trasporto in condizioni stazionarie si riduce a:

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = j_{\nu} - \alpha_{\nu}I_{\nu}. \quad (1.3.33)$$

Vogliamo fare un cambio di variabile, anzichè studiarla rispetto alla variabile s la vogliamo rispetto alla profondità ottica τ_{ν} .

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = \frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} \frac{d\tau_{\nu}}{ds} = \frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} \alpha_{\nu} = j_{\nu} - \alpha_{\nu}I_{\nu}. \quad (1.3.34)$$

L'equazione modificata diventa:

$$\frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} = \frac{j_{\nu}}{\alpha_{\nu}} - I_{\nu}. \quad (1.3.35)$$

Possiamo allora definire il primo termine dopo l'uguale come:

Definizione 3.1: Funzione sorgente

Il rapporto tra il coefficiente di emissione ed il coefficiente di assorbimento è detto funzione sorgente s_{ν} :

$$s_{\nu} = \frac{j_{\nu}}{\alpha_{\nu}}. \quad (1.3.36)$$

L'equazione del trasporto con questo termine è ovviamente:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = s_\nu - I_\nu. \quad (1.3.37)$$

Possiamo notare inoltre che

$$s_\nu < I_\nu \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0. \quad (1.3.38)$$

In questo modo l'intensità del fascio viene attenuata nell'attraversare la nube. Viceversa:

$$s_\nu > I_\nu \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} > 0. \quad (1.3.39)$$

Quindi il fascio viene amplificato nel passaggio.

Proviamo a risolvere formalmente l'equazione:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} e^{\tau_\nu} = s_\nu e^{\tau_\nu} - I_\nu e^{\tau_\nu}. \quad (1.3.40)$$

Quindi possiamo raggruppare:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu e^{\tau_\nu}) = s_\nu e^{\tau_\nu}. \quad (1.3.41)$$

e integriamo tra 0 e τ_ν :

$$\int_0^{\tau_\nu} \frac{d}{d\tau'_\nu} (I_{\tau'_\nu} e^{\tau'_\nu}) d\tau'_\nu = \int_0^{\tau_\nu} s(\tau'_\nu) e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu. \quad (1.3.42)$$

integrando il primo termine ottiene:

$$I_\nu(\tau_\nu) e^{\tau_\nu} - I_\nu(0) = \int_0^{\tau_\nu} s_\nu(\tau'_\nu) e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu. \quad (1.3.43)$$

Se dividiamo tutto per e^{τ_ν} abbiamo la legge per $I_\nu(\tau_\nu)$.

Fatto 3.1: Soluzione formale all'equazione del trasporto

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} - \int_0^{\tau_\nu} \delta_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu. \quad (1.3.44)$$

Il primo termine è la luce della sorgente estinta esponenzialmente dal mezzo a causa dell'assorbimento. Il secondo termine contiene il significato fisico di due distinti effetti: l'effetto dell'emissione di fotoni del fascio nei vari punti del mezzo (s_ν) e l'effetto dell'assorbimento incluso nel termine esponenziale.

Innanzitutto il termine $\tau_\nu - \tau'_\nu$ sta ad indicare l'assorbimento dei fotoni che sono stati emessi dal mezzo.

Anche se abbiamo la soluzione generale resta il fatto che s_ν è incognita, anche se conoscessimo l'espressione analitica di s_ν non saremo comunque in grado di calcolare l'integrale poichè non conosciamo le condizioni fisiche (pressione, temperatura ...) del mezzo ¹⁵.

Esempio: mezzo omogeneo. Se il mezzo è omogeneo per tutta la sua estensione si mantengono costanti le sue proprietà fisiche. Di conseguenza avremo che α_ν e j_ν saranno uguali ovunque e la funzione sorgente sarà anch'essa una costante:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + s_\nu e^{-\tau_\nu} \int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + s_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.3.45)$$

Possiamo iniziare ad intuire il significato fisico della funzione sorgente: se il nostro fascio attraversa un mezzo otticamente profondo ($\tau_\nu \rightarrow \infty$) allora abbiamo che $I_\nu(\tau_\nu) \rightarrow s_\nu$. Allora la funzione sorgente è la grandezza fisica a cui tende l'intensità della radiazione se questa attraversa una regione otticamente spessa. Quindi ciò che succede al fascio in questo caso è una totale sostituzione dei fotoni provenienti dalla sorgente con i fotoni emessi all'interno del mezzo come in Figura 1.18

¹⁵dalle quali ricordiamo dipendere τ_ν

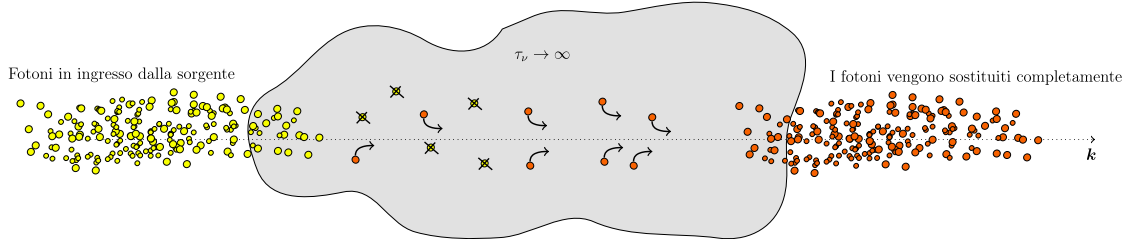


Figura 1.18: Sostituzione dei fotoni in un mezzo otticamente spesso.

Man mano che la radiazione si propaga i fotoni del fascio perderanno le caratteristiche della radiazione sorgente ed acquisteranno invece la firma del mezzo.

Notiamo che questo non è soltanto un processo astrofisico, questo avviene anche quando guardiamo delle montagne lontane che ci appaiono celestine come il cielo:

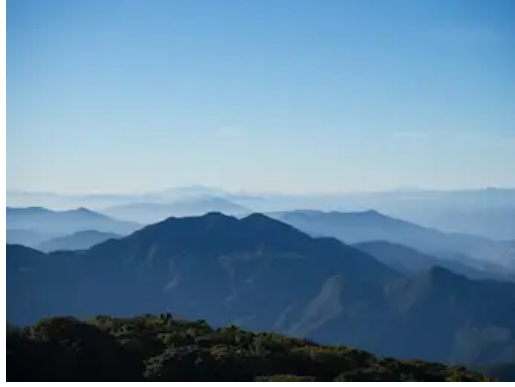


Figura 1.19: Montagne lontane che acquistano il colore del cielo fino a dissolversi con esso.

Esempio: Mezzo omogeneo senza retroilluminazione In questo caso particolare abbiamo che $I_\nu(0) = 0$, l'unica radiazione che vediamo emergere è quella prodotta dal mezzo stesso.

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.3.46)$$

Consideriamo adesso i casi in cui il mezzo è otticamente sottile o spesso alla radiazione che emerge da lui stesso.

Mezzo otticamente sottile Siamo in questa situazione se $\tau_\nu \ll 1$, sviluppiamo l'esponenziale:

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu \tau_\nu. \quad (1.3.47)$$

Visto che il mezzo è omogeneo si ha:

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' = \alpha_\nu(s - s_0) = \alpha_\nu \cdot L. \quad (1.3.48)$$

Quindi abbiamo che:

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu \alpha_\nu \cdot L = j_\nu \cdot L. \quad (1.3.49)$$

Dalla quale emerge l'importante contributo alla radiazione di j_ν in questa situazione.

Se il mezzo è costituito da atomi non completamente ionizzati allora sappiamo che la radiazione ha dei picchi in intensità molto marcati in corrispondenza della frequenza di transizione dei livelli, quindi sia il coefficiente di assorbimento α_ν che il coefficiente di emissione j_ν avranno dei picchi molto marcati in corrispondenza di queste transizioni. Quindi qua ci aspettiamo proprio questo tipo di radiazione proveniente dal "mezzo", molto marcata in corrispondenza della transizione dei livelli delle specie atomiche.

Questa radiazione emergente sarà perciò caratterizzato da delle righe di emissione: uno spettro buio quasi ovunque con delle righe luminose.

Un esempio di questo tipo è un gas rarefatto riscaldato: una lampada al neon. Un esempio nello spazio sono le nebulose. ¹⁶

¹⁶Nelle stelle invece vedo delle righe di assorbimento miste al continuo

Mezzo otticamente spesso Quando scaldiamo un oggetto a temperature elevate inizia ad essere percepibile la sua emissione di radiazione termica, questo passerà in modo continuo dal rosso scuro, poi al giallo, ecc. . .

Prendiamo un mezzo omogeneo non retroilluminato ed otticamente spesso $\tau_\nu \gg 1$, in questo limite abbiamo che:

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu. \quad (1.3.50)$$

Quindi la radiazione che emerge è uguale alla funzione sorgente, questo è il caso del oggetto riscaldato. Infatti la funzione sorgente è parente della radiazione di corpo nero che è una funzione della temperatura. Quindi in questo caso abbiamo uno spettro continuo.

Nel cosmo oggetti che approssimeranno questa radiazione sono le stelle, non sarà esattamente una radiazione di corpo nero perchè abbiamo delle righe di assorbimento. Studieremo prossimamente da dove vengono queste misteriose righe di assorbimento.

1.4 Lezione 4

02-03-2020

1.4.1 Scoperta delle righe (di assorbimento e di emissione).

Storia Le righe sono state scoperte osservando il sole. Il primo ad osservarle fu Wollaston nel 1802, con la risoluzione che aveva a quei tempi vide 5 intense bande scure e 2 bande scure più deboli. Lui attribuì a tali linee il ruolo di demarcazione tra lo spettro dei colori fondamentali sbagliando alla grande.

Qualche anno dopo Fraunhofer riuscì a vederne tantissime ¹⁷, a quelle più intense diede nomi dalla A alla H (ancora usate) oggi, fu quindi chiaro che queste non potevano essere le linee di demarcazione tra i colori fondamentali.

Fraunhofer si mise allora ad osservare le altre stelle più luminose (come Sirio), scoprendo in larghissimo anticipo che anche queste mostravano delle righe di assorbimento e noto che le righe presenti in sirio non erano le stesse di quelle osservate nel sole.

Sempre lui osservando i pianeti si accorse che questi presentavano le stesse righe presenti nel sole ¹⁸.

Il grande intuito di Fraunhofer non si fermò ancora, egli fu capace di osservare che la linea scura da lui nominata D sembrava coincidere con il doppietto delle righe luminose presenti nelle lampade al sodio.

Oggi Fraunhofer è considerato l'inventore della Spettroscopia astronomica, le sue osservazioni sono tra le più importanti in questo campo scientifico.

Dopo 30 anni Foucault volle verificare la coincidenza della riga di emissione delle lampade al sodio con quella di assorbimento del sole D. Per farlo fece passare la luce del sole attraverso un gas di sodio scaldato e ne misurò lo spettro. Foucault si aspettava che gli effetti di assorbimento e di emissione si compensassero dando luogo ad un continuo di fatto.

Quello che successe invece è che lo spettro della luce del sole che attraversa il gas non solo presentava le righe di assorbimento ma queste risultarono addirittura accentuate. Fece inoltre passare una luce a spettro continuo prodotta con un corpo incandescente attraverso lo stesso il gas di sodio, anche in questo caso vide le righe nere. Per altri dieci anni tutto tace fino all'arrivo di un fisico teorico tedesco: Kirchhoff. Egli riprese gli esperimenti citati sopra e formulò tre famose leggi:

Fatto 4.1: Leggi di Kirchhoff

1. Tutti i corpi incandescenti producono uno spettro continuo.
2. Un gas rarefatto caldo emette delle righe di emissione.
3. Preso un gas rarefatto su cui facciamo incidere della radiazione con spettro continuo otteniamo
 - Se la radiazione emessa è meno intensa della radiazione che retroillumina ($s_\nu < I_\nu(0)$): righe di assorbimento.
 - Se la radiazione emessa è più intensa della radiazione che retroillumina ($s_\nu > I_\nu(0)$): righe di emissione.

Nella nostra formulazione la terza legge deriva dalla soluzione all'equazione del trasporto per un mezzo omogeneo nella 1.3.45.

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + s_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.4.1)$$

¹⁷Inventandosi uno spettroscopio molto preciso.

¹⁸Adesso sappiamo che questo è dovuto allo scattering della luce solare sulla faccia del pianeta.

Se il mezzo è otticamente sottile questa può essere approssimata:

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(0) - \tau_\nu I_\nu(0) + s_\nu \tau_\nu = I_\nu(0) + \tau_\nu(s_\nu - I_\nu(0)). \quad (1.4.2)$$

Quindi oltre al fondo della sorgente si vedono righe di emissione o di assorbimento a seconda del segno del secondo termine ¹⁹.

Ne seguì l'intuizione che un mezzo è in grado di emettere soltanto le frequenze che è anche in grado di assorbire. In questo modo Kirchhoff e Bunzen ricominciarono ad osservare il sole e allo stesso tempo le righe di emissione di alcuni elementi sulla terra capendo che nel sole erano presenti Sodio, Nichel, Ferro, ecc. . .

Si aprì così una finestra allo studio della composizione chimica delle stelle, questa fu una grande smentita per il filosofo Comte che in preda a delirio di prevegenza disse che:

"Of all objects, the planets are those which appear to us under the least varied aspect. We see how we may determine their forms, their distances, their bulk, and their motions, but we can never known anything of their chemical or mineralogical structure; and, much less, that of organized beings living on their surface ..."

Auguste Comte, The Positive Philosophy, Book II, Chapter 1 (1842)

Infatti fu prontamente smentito dai suoi coetanei scienziati ²⁰.

Abbiamo comunque un importante risultato per la spettroscopia: la presenza di righe di assorbimento di un elemento in uno spettro mi garantisce che nella regione di provenienza di tale spettro vi è l'elemento corrispondente a tali righe.

Si scoprì più avanti che in uno spettro non vi sono soltanto informazioni sulla composizione chimica degli elementi della sorgente: abbiamo anche l'abbondanza dell'elemento rispetto agli altri, le condizioni fisiche dell'atmosfera in cui si forma una riga.

1.4.2 Radiazione di corpo nero: proprietà principali.

Prima di ricavare la forma della s_ν è necessario ricordare alcuni concetti importanti sul corpo nero.

Kirchhoff dimostrò con la sua prima legge che la radiazione di un corpo all'equilibrio termodinamico ha uno spettro indipendente dalle proprietà fisiche del mezzo stesso.

Fatto 4.2: Radiazione all'equilibrio termodinamico con la materia

Lo spettro della radiazione all'equilibrio termodinamico con la materia è una funzione universale della temperatura.

Kirchhoff non riuscì a trovare la I_ν corrispondente a tale radiazione, ci fu bisogno di Plank che ricavò la radiazione di corpo nero come:

Definizione 4.1: Radiazione di corpo nero

La radiazione all'equilibrio termodinamico con la materia di un corpo può essere espressa come:

$$I_\nu = B_\nu = \frac{2\hbar}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (1.4.3)$$

Questa è definita come la radiazione di corpo nero.

È necessario ricordare alcune proprietà di questa radiazione. Partiamo dalla forma:

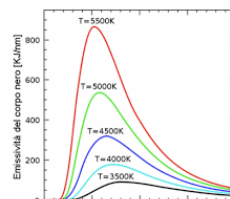


Figura 1.20: Piccola immagine della funzione per vari valori della temperatura.

¹⁹Di fatto s_ν inserisce o rimuove le righe degli atomi che compongono il mezzo rarefatto dallo spettro continuo della radiazione.

²⁰Chissà se forse questo sarà il baluardo di ogni genere di Teologia, costretta a riplasmare ogni affermazione fino all'osso a causa dell'inarrestabile potenziamento delle conoscenze umane.

Legge di spostamento di Wien Al crescere di T il picco si sposta verso destra secondo la legge:

$$h\nu_{\max} \propto kT. \quad (1.4.4)$$

In astrofisica conviene riportarla in termini di lunghezza d'onda λ :

$$\lambda_{\max} T = 0.29 [\text{cm}] \cdot [\text{K}]. \quad (1.4.5)$$

Dobbiamo stare attenti al fatto che λ_{\max} non è il massimo della B_ν , bensì è il massimo della B_λ è quindi necessario cambiare variabile alla funzione per la radiazione di corpo nero, per farlo basta:

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda. \quad (1.4.6)$$

Per aiutare la memoria nel passaggio tra le due forme possiamo ricordare il caso del sole: la temperatura superficiale del sole è $T \approx 6000 \text{ K}$, in questo caso abbiamo che $\lambda_{\max} \approx 5000 \text{ \AA}$ e quindi abbiamo emissione nel visibile.

Densità di energia del corpo nero

$$u_\nu(T) = \int \frac{I_\nu}{c} d\Omega = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T). \quad (1.4.7)$$

Su tutto lo spettro si ha:

$$u = \int u_\nu d\nu = \quad (1.4.8)$$

$$= \int \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) d\nu = \quad (1.4.9)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \frac{2h}{c^2} \int \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu = \quad (1.4.10)$$

$$= \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \cdot T^4 = a \cdot T^4. \quad (1.4.11)$$

Dove si è usato l'integrale noto:

$$\int \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \quad (1.4.12)$$

1.4.3 Temperatura di una stella

Dobbiamo decidere le convenzioni da adottare per la misura della temperatura di una stella. La questione è davvero complessa, la stella è un oggetto dalle caratteristiche non uniformi, basti pensare alla sua densità che varia da qualche frazione inferiore a quella dell'aria a decine di volte quella dell'acqua.

Inoltre per questi oggetti non è nemmeno possibile definire una superficie, quindi dove misuriamo la temperatura? Per concludere il quadro già complesso dobbiamo pensare che l'unica fonte di informazioni a nostra disposizione sono le radiazioni che ci arrivano dalle stelle, quindi dovremmo estrarre l'informazione Temperatura da queste.

Temperatura di Brillanza. e misuriamo l'intensità specifica monocromatica di una sorgente I_ν possiamo definire la temperatura di Brillanza:

Definizione 4.2: Temperatura di brillanza

Data un oggetto avente brillanza I_ν la sua temperatura di brillanza T_B è la temperatura che ha un corpo nero che alla frequenza ν emette la stessa intensità specifica I_ν .

$$I_\nu = B_\nu(T_B). \quad (1.4.13)$$

Una conseguenza diretta di questa definizione è che la temperatura di un oggetto sarà diversa a seconda della frequenza misurata (anche dello stesso oggetto).

Questa temperatura è molto utile in radio-astronomia, in tal caso siamo nel regime di Rayleigh-Jeans:

$$h\nu \ll kT. \quad (1.4.14)$$

Quindi possiamo espandere la I_ν ottenendo:

$$I_\nu = B_\nu(T_B) \approx \frac{2\nu^2}{c^2} kT_B. \quad (1.4.15)$$

A questo punto possiamo ricordare la forma della equazione del trasporto:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = s_\nu - I_\nu. \quad (1.4.16)$$

Prima di procedere è necessario notare che radiazione termica e radiazione di corpo nero sono due cose distinte: la radiazione termica si ha quando l'oggetto che emette è all'equilibrio termodinamico con la radiazione, la radiazione termica diventa quella di corpo nero quando il mezzo che emette diventa otticamente spesso.

Fatto 4.3: Legge di Kirchhoff

Per un mezzo all'equilibrio con la sua radiazione termodinamica si ha $s_\nu = B_\nu$.

Per dimostrarla mettiamoci all'interno di un corpo nero cavo: la radiazione di corpo nero è omogenea e isotropa, quindi in questo ambiente si ha:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = 0. \quad (1.4.17)$$

Quindi si ha che $s_\nu = I_\nu$, ma nel caso di corpo nero $I_\nu = B_\nu$, quindi si ottiene quanto atteso: $s_\nu = B_\nu$. Possiamo quindi riprendere l'utilità della temperatura di brillantezza, prendiamo un oggetto all'equilibrio termodinamico avente temperatura di brillantezza T_B e temperatura del mezzo T , sostituiamo tutte le quantità all'interno dell'equazione del trasporto (considerando anche la legge di Kirchhoff):

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \left(\frac{2\nu^2}{c^2} kT_B \right) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT - \frac{2\nu^2}{c^2} kT_B. \quad (1.4.18)$$

Adesso semplifichiamo tutte le costanti, ci resta una semplice equazione differenziale lineare in T_B :

$$\frac{dT_B}{d\tau_\nu} = T - T_B. \quad (1.4.19)$$

quindi possiamo risolvere come abbiamo fatto per l'equazione del trasporto:

$$T_B(\tau_\nu) = T_B(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} T(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu. \quad (1.4.20)$$

A questo punto se il mezzo è omogeneo possiamo fare gli stessi passaggi già fatti per ottenere:

$$T_B(\tau_\nu) = T_B(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.4.21)$$

Quindi se la radiazione emerge da un mezzo spesso si ha che:

$$T_B \approx T. \quad (1.4.22)$$

Per questo nel limite di Rayleigh-Jeans la temperatura di brillantezza è utile, perchè è una ottima approssimazione della temperatura del mezzo.

Nel limite opposto, quindi $h\nu \gg kT$ si avrà:

$$I_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (1.4.23)$$

Di conseguenza l'equazione di trasporto smette di essere lineare, quindi il concetto di temperatura di brillantezza non è comodo qui. Ad esempio se si osserva nel γ non si usa la temperatura di brillantezza.

Temperatura di colore Quando non si conosce l'intensità specifica ma si conosce lo spettro della radiazione raccolta, ovvero il flusso della radiazione raccolta sulla terra. Questo può essere il caso di un'oggetto di cui non sappiamo le dimensioni e non sappiamo la distanza.

Definizione 4.3: Temperatura di colore

Si definisce la temperatura di colore come la temperatura che avrebbe un corpo nero il cui picco si trova nella stessa posizione in frequenza del picco dello spettro che stiamo osservando.

Questa definizione si rifà di fatto all'uso della legge di spostamento di Wien per formulare una previsione sulla temperatura.

Temperatura effettiva Questa è la più utilizzata quando parliamo di temperatura superficiale di una stella.

Definizione 4.4: Temperatura effettiva

La temperatura effettiva è la temperatura di un corpo nero tale che:

$$\Phi_{\text{corpo nero}} = \Phi_{\text{Osservato}}. \quad (1.4.24)$$

Quindi ci serve di conoscere il flusso intrinseco della radiazione. Ci serviranno per questo la distanza e le dimensioni dell'oggetto.

Vediamo come sono legate l'intensità L intrinseca della sorgente al raggio dell'oggetto:

Prendiamo una sorgente sferica di raggio R e di luminosità intrinseca L abbiamo che

$$F = \frac{L}{4\pi R^2}. \quad (1.4.25)$$

Ma il flusso è anche uguale a: $F = \sigma T^4$ per la legge di Stephan-Boltzmann. Quindi questo ci permette di definire la temperatura effettiva:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (1.4.26)$$

La temperatura effettiva è legata alla radiazione che emerge da un certo strato della stella, da questo strato vedremo che proviene gran parte della radiazione che osserviamo. Il motivo è che a lunghezze d'onda differenti corrispondono coefficienti di assorbimento differenti, quindi i fotoni scapperanno dalla stella a "profondità diverse".

Lo strato atmosferico da cui proviene gran parte della radiazione è chiamato fotosfera, vedremo che la temperatura effettiva proviene da un certo punto della fotosfera.

1.4.4 Cammino libero medio dei fotoni

Abbiamo visto che per un mezzo assorbente $j_\nu = 0$ abbiamo

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu}. \quad (1.4.27)$$

Ci chiediamo adesso qual'è la probabilità che un fotone di frequenza ν riesca ad attraversare nel mezzo una profondità ottica almeno pari a τ_ν . Questa sarà data evidentemente dalla equazione scritta sopra:

$$P_{\text{abs}} = e^{-\tau_\nu}. \quad (1.4.28)$$

Possiamo calcolarci quindi la profondità ottica media:

$$\langle \tau_\nu \rangle = \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1. \quad (1.4.29)$$

Se siamo in un mezzo omogeneo abbiamo che $\tau_\nu = \alpha_\nu l_\nu$, abbiamo quindi il cammino libero medio, definito come:

Definizione 4.5: Cammino libero medio

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}. \quad (1.4.30)$$

Se il mezzo non è omogeneo si calcola il valore del cammino libero medio che il fotone avrebbe in un mezzo omogeneo con le proprietà fisiche che ha in quel punto.

Vediamo che il cammino libero medio dipende pesantemente dalla frequenza, quindi i fotoni che ci arrivano da una stella arrivano da una corona circolare poichè ogni frequenza avrà cammino libero medio differente ²¹.

²¹Ad esempio le frequenze nei pressi di una riga di assorbimento saranno emesse più in superficie.

1.4.5 Equilibrio termodinamico locale

È possibile utilizzare il concetto di cammino libero medio per definire il concetto di equilibrio termodinamico locale. Infatti se la temperatura in un corpo resta costante su scale dell'ordine del cammino libero medio allora la deviazione dalla condizione di equilibrio termodinamico sarà piccola ed avrà senso parlare di equilibrio termodinamico locale (LTE).

Spesso ci capiterà di metterci in situazioni di LTE poichè sono molto comuni in mezzi che studieremo nel cosmo. Ad esempio all'interno della stella abbiamo in genere un cammino libero medio microscopico, quindi qui avrà senso porci in condizioni di LTE, sulla superficie esterna di una stella invece no.

Quindi in una regione di LTE è possibile assumere che le particelle abbiano distribuzione di velocità secondo Maxwell, gli atomi abbiano popolazioni dei livelli secondo Boltzmann e vale la legge di Kirchhoff.

1.5 Lezione 5

09-03-2020

1.5.1 Atmosfera a piani paralleli.

In oggetti come le stelle è spesso comodo studiare la struttura "strato per strato", il modello di atmosfere a piani paralleli consiste nel considerare una atmosfera

- divisa a strati paralleli l'uno tra l'altro
- ambienti privi di curvatura

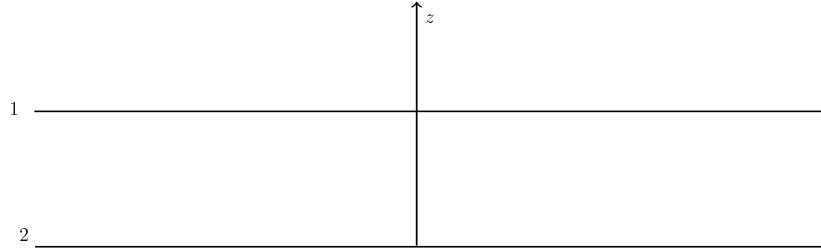


Figura 1.21: Atmosfera a piani paralleli

Per poter fare tale approssimazione è necessario che se chiamiamo la distanza tra uno strato e l'altro d ed il raggio della stella R :

$$d \ll R. \quad (1.5.1)$$

Il vantaggio di questo modello è dovuto all'invarianza sotto rotazioni attorno a z , questo ci permette di semplificare moltissimo la scrittura di $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$. Infatti questo dipenderà soltanto da z per le coordinate spaziali, per il vettore d'onda invece avremo soltanto la dipendenza da θ :

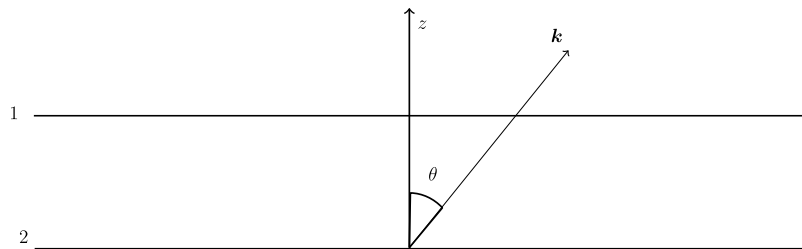


Figura 1.22: Dipendenza da theta per l'intensità specifica

Notiamo che con questo modello anche le quantità come Pressione, Temperatura, Densità saranno soltanto funzione di z .

Di conseguenza otterremo che $I_\nu = I_\nu(z, \theta)$ ²². Vedremo che sarà molto utile adottare la convenzione:

$$\cos \theta = \mu. \quad (1.5.2)$$

²²Assumendo implicitamente le condizioni stazionarie.

Ipotizziamo che s sia il versore relativo alla direzione di propagazione del fascio, possiamo scrivere l'equazione del trasporto come:

$$\frac{dI}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu. \quad (1.5.3)$$

Tuttavia nel modello delle atmosfere a piani paralleli conviene studiare questa equazione per la propagazione lungo z anzichè lungo s , cambiamo quindi variabile:

$$dz = ds \cos \theta. \quad (1.5.4)$$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu. \quad (1.5.5)$$

Prendiamo adesso per convenzione il centro della stella nella direzione opposta a quella indicata dall'asse z e ridefiniamo la profondità ottica assumendola crescente andando verso l'interno (quindi di verso opposto a z). A questo scopo quindi definiamo τ_ν come:

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu dz. \quad (1.5.6)$$

Riscriviamo allora l'equazione del trasporto come:

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = -s_\nu + I_\nu. \quad (1.5.7)$$

Visto che $s_\nu = j_\nu / \alpha_\nu$.

Il nostro obbiettivo è adesso quello di risolvere questa equazione del trasporto nella variabile μ . Moltiplichiamo a destra e sinistra per $\exp(-\tau_\nu/\mu)$ e portiamo a sinistra i termini contenenti I_ν :

$$\left(\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} - I_\nu \right) e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} = -s_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}. \quad (1.5.8)$$

Notiamo che il termine a sinistra è proprio una derivata:

$$\mu \frac{d}{d\tau_\nu} \left(I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} \right) = -s_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}. \quad (1.5.9)$$

Integriamo da una profondità ottica $\tau_{\nu,0}$ di partenza fino a τ_ν a destra e sinistra:

$$\int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} \mu \frac{d}{d\tau'_\nu} \left(I_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} \right) d\tau'_\nu = - \int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} s_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu. \quad (1.5.10)$$

Quindi risolvendo il primo integrale:

$$\mu I_\nu(\tau'_\nu, \mu) e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} \Big|_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} = - \int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} s_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu. \quad (1.5.11)$$

Possiamo adesso distinguere due distinte situazioni che decreteranno i diversi valori di $\tau_{\nu,0}$:

1. Raggi entranti nell'atmosfera dall'esterno.
2. Fasci uscenti dall'atmosfera dall'esterno.

Raggi uscenti dall'atmosfera Partiamo dal primo caso, questo corrisponde a

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies 0 < \mu < 1. \quad (1.5.12)$$

Quindi siamo in una condizione in cui si passa da una zona otticamente spessa (il centro della stella) ad una zona otticamente sottile, per questo nel caso corrente avremo $\tau_{\nu,0} = \infty$. Questo semplifica molto la soluzione all'equazione del trasporto, infatti resta:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = - \int_{\infty}^{\tau_\nu} \frac{s_\nu(\tau'_\nu)}{\mu} e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu. \quad (1.5.13)$$

Raggi entranti. Per considerare i raggi entranti in atmosfera adottiamo la convenzione per cui $\tau_\nu = 0$ sul "bordo esterno" di quest'ultima, con la consapevolezza che non c'è effettivamente un bordo esterno. Secondo la nostra notazione siamo nell'intervallo:

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \implies -1 < \mu < 0. \quad (1.5.14)$$

Notiamo che se esternamente niente irradia allora per i raggi entranti avremo che $I_\nu(\tau_\nu = 0) = 0$, questo è il caso ad esempio di una stella solitaria.

Possiamo adesso fare l'assunzione di essere in una atmosfera in LTE, in questo modo pur non conoscendo il profilo di temperatura della stella $T(\tau_\nu)$ siamo in grado di ricavare molte utili informazioni su quest'ultima. Inanzitutto con l'equilibrio termodinamico locale abbiamo per la legge di Kirchhoff

$$s_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu). \quad (1.5.15)$$

Quindi possiamo cercare di ricavare $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$ risolvendo l'integrale della 1.5.11 nelle varie situazioni. All'interno di tale formula abbiamo un integrale della funzione $s(\tau'_\nu)$, con τ'_ν che può variare in un intervallo tale da farci venire dei dubbi sulla corretta applicabilità della LTE. Per correggere questo fatto possiamo considerare la correzione al primo ordine per $s(\tau_\nu)$:

$$s(\tau'_\nu) \approx B_\nu(\tau_\nu) + (\tau'_\nu - \tau_\nu) \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \dots \quad (1.5.16)$$

Ipotizziamo quindi adesso che sia sufficiente la prima correzione e vediamo cosa succede nel caso di **Raggi uscenti**.

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{\tau_\nu} \left[B_\nu(\tau_\nu) + (\tau'_\nu - \tau_\nu) \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right] e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu = \quad (1.5.17)$$

$$= B_\nu(\tau_\nu) \int_{-\infty}^{\tau_\nu} e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{d\tau'_\nu}{\mu} - \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \int_{-\infty}^{\tau_\nu} (\tau'_\nu - \tau_\nu) e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{d\tau'_\nu}{\mu}. \quad (1.5.18)$$

Risolvendo i due integrali si ottiene:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.5.19)$$

Otteniamo così una brillantezza che è frutto di due contributi: il primo che è quello di corpo nero a noi già noto, il secondo è una correzione anisotropa che dipende dalla direzione di propagazione. Questo risultato ci dice che nel caso in cui vi è un gradiente di temperatura vi sarà anche una variazione di $B_\nu(\tau_\nu)$.

$$\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \neq 0 \leftrightarrow \nabla T \neq 0. \quad (1.5.20)$$

Vediamo adesso se le grandezze introdotte (alcune delle quali erano momenti di vario ordine) sono utili alla soluzione della nostra atmosfera. Ricordiamo che:

$$u_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu. \quad (1.5.21)$$

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu. \quad (1.5.22)$$

$$P_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu. \quad (1.5.23)$$

$$J_\nu = \int \frac{I_\nu}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \implies u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (1.5.24)$$

Cercheremo di sfruttare queste quantità per trarne informazioni sul sistema. Partiamo dalla densità di energia:

$$u_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu = \quad (1.5.25)$$

$$= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 B_\nu(\tau_\nu) d\mu + \int_{-1}^1 \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} d\mu = \quad (1.5.26)$$

$$= \frac{2\pi}{c} \left[B_\nu(\tau_\nu) \int_{-1}^1 d\mu + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \int_{-1}^1 \mu d\mu \right] = \quad (1.5.27)$$

$$= \frac{4\pi}{c} B_\nu(\tau_\nu) \quad (1.5.28)$$

Si scopre così che la densità di energia rimane la stessa del caso di corpo nero nonostante la correzione. Proviamo ad effettuare il conto anche per il flusso:

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu = \dots = \frac{4\pi}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.5.29)$$

Si scopre quindi che il flusso non è nullo come nel caso di corpo nero, bensì l'anisotropia permette di avere un flusso uscente proporzionale alla variazione di B_ν assente nel caso isotropo.

$$F \neq 0 \leftrightarrow \nabla T \neq 0. \quad (1.5.30)$$

Facendo il calcolo anche per P_ν si ottiene:

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu). \quad (1.5.31)$$

Coerente con la nota formula: $P_\nu = u_\nu/3$.

1.5.2 Valutazione della anisotropia.

Possiamo valutare l'anisotropia della nostra sorgente nel seguente modo:

$$\frac{\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}}{B_\nu(\tau_\nu)} = \frac{\frac{3F_\nu}{4\pi}}{\frac{cu_\nu}{4\pi}} = \frac{3}{c} \frac{F_\nu}{u_\nu}. \quad (1.5.32)$$

Visto che vogliamo soltanto una stima qualitativa anzichè valutare le quantità monocromatiche valutiamo quelle integrate sulla frequenza:

$$\frac{\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}}{B_\nu(\tau_\nu)} \approx \frac{3F}{cu} = \frac{3}{c} \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{aT^4} = \frac{3}{4} \left(\frac{T_{\text{eff}}}{T} \right)^4. \quad (1.5.33)$$

Quindi se andando verso l'interno la temperatura T aumenta mi aspetto che il contributo anisotropo sia sempre minore. Di conseguenza il nostro sviluppo di s_ν perde di significato se andiamo in strati atmosferici tali che $T_{\text{eff}} > T$.

1.5.3 Atmosfera grigia

Anche se stiamo facendo passi avanti non abbiamo ancora trovato il profilo di temperatura, in genere questa è una operazione molto complicata, ci sono corsi appositi.

Il caso che affrontiamo noi è quello semplificato di Atmosfera Grigia:

Definizione 5.1: Atmosfera grigia

Ambiente avente α_ν costante per ogni frequenza.

In questo modo τ_ν non dipende anch'esso dalla frequenza. Possiamo allora integrare tutte le quantità studiate nella frequenza senza problemi.

L'equazione del trasporto diventa:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = -s + I. \quad (1.5.34)$$

Possiamo adesso trovare i momenti dell'equazione del trasporto. Moltiplichiamo a destra e sinistra per $\frac{1}{2}$ e integriamo in μ per l'ordine zero:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial I}{\partial \tau} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu. \quad (1.5.35)$$

Portando fuori la derivata dal primo integrale, ricordando la definizione di J e considerando che s non dipende dall'angolo di emissione si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau} = -s + J. \quad (1.5.36)$$

Se ripetiamo l'operazione con il momento di ordine 1, moltiplicando ambo i membri per $\frac{2\pi}{c}\mu$ si ottiene:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{F}{c}. \quad (1.5.37)$$

Anche questo è un risultato utile, infatti il flusso è non nullo soltanto se vi è una variazione della pressione radiativa.

1.6 Lezione 6

12-03-2020

Procediamo con il conto della scorsa lezione assumendo l'equilibrio radiativo nella nostra atmosfera, ovvero l'assenza di sorgenti e di pozzi in quest'ultima. In questo modo il flusso che arriva al nostro strato dalle profondità dell'atmosfera è conservato e passa oltre, quindi:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0. \quad (1.6.1)$$

In questo modo si ricava dalla 1.5.36 che:

$$J = s. \quad (1.6.2)$$

Quindi l'equazione del trasporto (1.5.34) diventa:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = -J + I = \quad (1.6.3)$$

$$= I - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau) d\mu. \quad (1.6.4)$$

Quest'ultima è una equazione integro-differenziale in I , si risolve con dei metodi analitici particolari che vanno fuori dalla portata del corso.

Vediamo allora se studiandone i momenti possiamo far in modo di trovare una soluzione, seppur restringendo ancora il campo della soluzione. Partiamo dal momento di ordine 1:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{F}{c} \quad \xrightarrow{\text{Integro}} \quad P(\tau) = \frac{F}{c} (\tau + q). \quad (1.6.5)$$

Dove q è una costante di integrazione. Vedremo che trovare questa costante ci permetterà di risolvere l'atmosfera. Abbiamo visto che in caso di LTE e considerando solo la prima correzione alla legge di Kirchhoff continua ad esser valido che:

$$P = \frac{u}{3}. \quad (1.6.6)$$

Questa abbiamo detto esser valida fintanto che il contributo anisotropo è piccolo rispetto a quello isotropo, quindi valido finché non ci spostiamo verso strati esterni della atmosfera, tali che $T < T_{\text{eff}}$. Per proseguire con il conto analitico noi facciamo un'altra approssimazione:

Definizione 6.1: Approssimazione di Eddington

La relazione $P = u/3$ resta valida in tutta l'atmosfera, nonostante la possibile anisotropia.

Possiamo quindi riassumere tutte le semplificazioni in cui ci siamo posti:

1. Atmosfera a piani paralleli
2. LTE (con correzione anisotropa)
3. Atmosfera grigia
4. Equilibrio radiativo
5. Approssimazione di Eddington

Grazie alla quinta è possibile inoltre affermare che resta vero in tutta l'atmosfera:

$$u = \frac{4\pi}{c} J. \quad (1.6.7)$$

E inoltre vale sempre che $J = s$.

Con questa nuova approssimazione possiamo mostrare la dipendenza di s da q , infatti usando le ultime due relazioni si ha che:

$$P = \frac{4\pi J}{3c} = \frac{4\pi s}{3c} = \frac{F}{c} (\tau + q). \quad (1.6.8)$$

Quindi:

$$s(\tau) = \frac{3F}{4\pi} (\tau + q). \quad (1.6.9)$$

Possiamo sfruttare questa espressione per la s all'interno della soluzione che abbiamo trovato per I_ν nel caso di raggi uscenti dall'atmosfera ($0 \leq \mu \leq 1$):

$$I(\tau, \mu) = - \int_{\infty}^{\tau} \frac{s(\tau')}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) d\tau'. \quad (1.6.10)$$

Supponiamo di voler calcolare la brillantezza nel punto più esterno alla nostra atmosfera, ovvero quello con $\tau = 0$, in tal caso avremo:

$$I(0, \mu) = - \int_{\infty}^0 \frac{s(\tau')}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) d\tau'. \quad (1.6.11)$$

E sostituendo a questo punto la nostra s :

$$I(0, \mu) = - \int_{\infty}^0 \frac{3F}{4\pi} (\tau' + q) \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) d\tau' = \quad (1.6.12)$$

$$= - \frac{3F}{4\pi} \left[\int_{\infty}^0 \tau' \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu} + q \int_{\infty}^0 \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu} \right] = \quad (1.6.13)$$

$$= \frac{3F}{4\pi} (\mu + q). \quad (1.6.14)$$

Un trucchetto che possiamo fare adesso è quello di trovare F_{out} (uscente) in funzione di I , vedremo che facendo ciò il flusso si semplificherà permettendoci di ricavare q :

$$F_{\text{out}} = 2\pi \int_{-1}^1 I \mu d\mu = \quad (1.6.15)$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{3F}{4\pi} (\mu + q) \mu d\mu = \frac{3F}{2} \left[\int_0^1 \mu^2 d\mu + \int_0^1 \mu d\mu \right] = \quad (1.6.16)$$

$$= \frac{3F_{\text{out}}}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{q}{2} \right]. \quad (1.6.17)$$

Quindi semplificando il flusso si ha:

$$q = \frac{2}{3}. \quad (1.6.18)$$

E inserendolo in $s(\tau)$ e in $I_\nu(0, \mu)$:

$$s(\tau) = \frac{3F}{4\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \left(\mu + \frac{2}{3} \right). \quad (1.6.19)$$

Con queste informazioni possiamo per la prima volta trovare il profilo di temperatura per la nostra stella:

$$s = \frac{c}{4\pi} u = \frac{3F}{\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \implies cu = 3F \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (1.6.20)$$

Ricordando che in LTE si ha anche $u = aT^4$, $F = \sigma T^4$:

$$caT^4 = 3\sigma T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \implies (T(\tau))^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (1.6.21)$$

Notiamo nel nostro profilo che la temperatura efficace si ha per $\tau = \frac{2}{3}$.

1.6.1 Limb Darkening

Possiamo inoltre osservare un altro fenomeno interessante, infatti si ha che, all'aumentare dell'inclinazione μ diminuisce l'intensità uscente $I(0, \mu)$, questo da luogo al fatto che, per una sorgente che possiamo risolvere otticamente, la zona più interna risulterà più brillante della zona esterna.

Per convincerci del fatto che vi è un fenomeno del genere possiamo ragionare in termini di cammino libero medio τ :

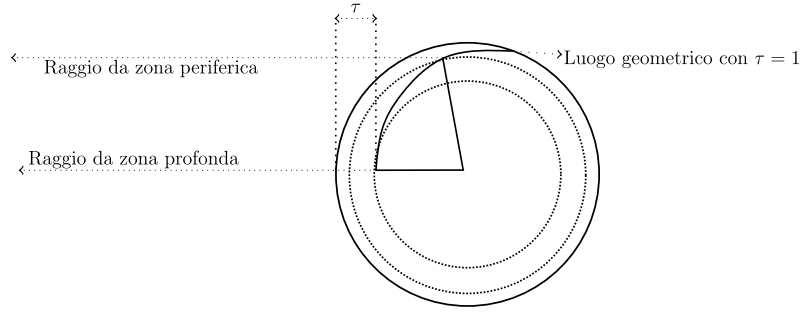


Figura 1.23: Fenomeno di Limb Darkening

Abbiamo visto che i fotoni che riescono ad emergere hanno cammino libero medio unitario, quindi hanno anche $\tau = 1$.

Ponendo un osservatore a sinistra in Figura 1.23 possiamo notare che, andando verso l'esterno del disco la condizione $\tau = 1$ è rispettata in zone sempre più superficiali. Se abbiamo che vale (quasi) la fisica del corpo nero per la stella e se la temperatura aumenta verso l'interno questo significa che raggi più profondi hanno anche intensità maggiore, quindi il centro del disco sarà più luminoso. Ecco spiegato il fenomeno del Limb Darkening in modo intuitivo.

Possiamo vedere questo effetto nel sole:



Figura 1.24: Limb Darkening nel disco del sole.

In cui con le stesse motivazioni (corpo nero) si può spiegare anche l'effetto cromatico che, andando verso l'esterno si passa da giallo a rosso.

Concludiamo valutando l'intensità al centro su quella al bordo:

$$\frac{I(0,0)}{I(0,1)} = \frac{2F/4\pi}{5F/4\pi} = \frac{2}{5}. \quad (1.6.22)$$

A conferma di quanto detto finora.

1.6.2 Righe nello spettro stellare

Possiamo adesso spiegare perchè nello spettro solare si possono trovare delle righe di assorbimento osservando dalla terra, abbandoniamo il modello di atmosfera grigia e torniamo a considerare le frequenze:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -s_\nu + I_\nu. \quad (1.6.23)$$

I momenti della equazione sono gli stessi di prima, soltanto che adesso son monocromatici. Manteniamo l'ipotesi di equilibrio radiativo $F = cost$, considerando però il fatto che questo non significa che il flusso monocromatico F_ν sia costante, solo che il totale è conservato. Quindi abbiamo che il flusso totale resta costante ma sarà ridistribuito tra le varie frequenze.

La radiazione che emerge dalla superficie può essere (qualitativamente) corretta con il primo ordine:

$$I_\nu(0, \mu) \approx B_\nu(0) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.6.24)$$

Concentriamoci sulla radiazione proveniente dal centro del disco $\mu = 1$:

$$I_\nu(0, 1) \approx B_\nu(0) + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \approx B_\nu(\tau_\nu = 1). \quad (1.6.25)$$

Abbiamo ottenuto un risultato congruo con quanto visto sopra per il Darkening: dal centro del disco ci arrivano principalmente fotoni che si sono formati a $\tau_\nu = 1$, infatti ci arriva una radiazione di corpo nero corrispondente a $B_\nu(\tau_\nu = 1)$.

Prendiamo adesso un coefficiente di assorbimento fatto in questo modo:

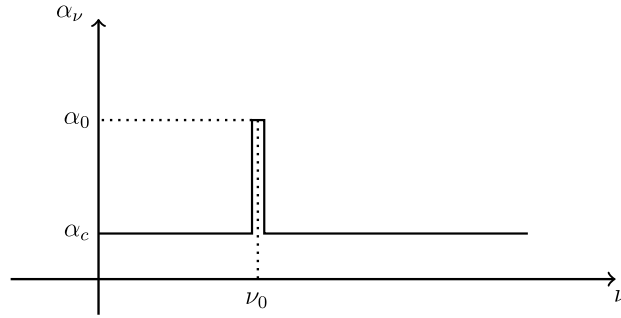


Figura 1.25: Coefficiente di assorbimento per una riga

Con questo coefficiente di assorbimento ci aspettiamo una riga, infatti abbiamo visto che il coefficiente di assorbimento ha le dimensioni di un inverso di una lunghezza, abbiamo anche visto che questo decreta il cammino libero medio dei fotoni a tale frequenza l_ν :

$$\alpha_0 > \alpha_c. \quad (1.6.26)$$

$$l_0 = \frac{1}{\alpha_0} < l_c = \frac{1}{\alpha_c}. \quad (1.6.27)$$

Quindi il cammino libero medio nell'intervallo di frequenze della riga sarà minore di quello nel continuo, questo spiega il motivo della presenza di righe di assorbimento. Infatti nella atmosfera stellare abbiamo visto essere presente un gradiente di temperatura (la temperatura aumenta andando verso l'interno), i fotoni che formano il continuo provengono da zone più profonde della atmosfera (in cui la temperatura è T_c), quelli della riga da zone più superficiali (in cui vi è T_0).

$$T_0 < T_c. \quad (1.6.28)$$

Quindi se è vero che l'intensità proveniente dalla stella segue un andamento tipico di un corpo nero alla profondità ottica $\tau_\nu = 1$ ed è anche vero che le curve $B(\tau_\nu)$ non si intersecano mai:

$$I_0 \approx B_0(T_0) < I_c \approx B_c(T_c). \quad (1.6.29)$$

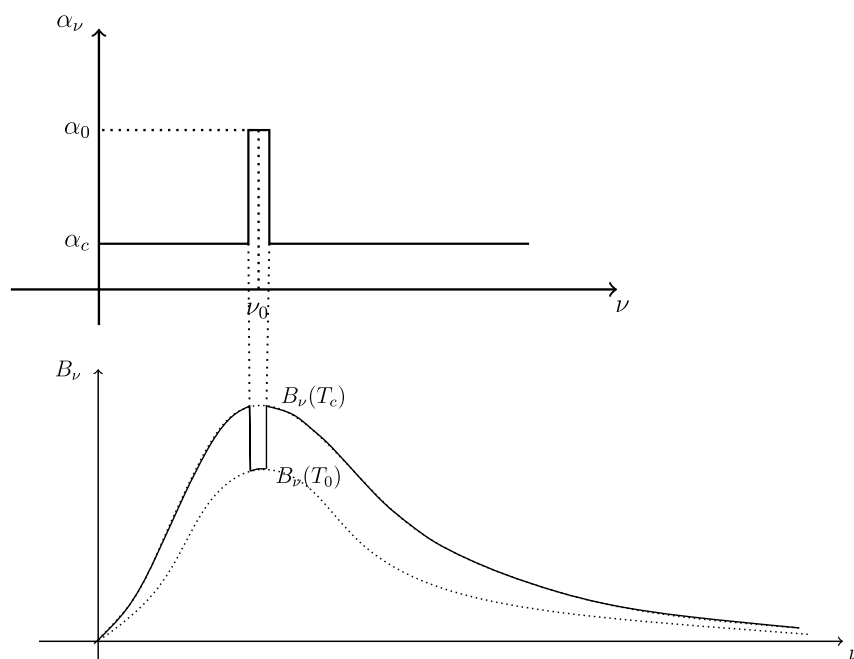


Figura 1.26: Riga di assorbimento

Quindi vediamo una intensità minore per le frequenze in cui α_ν è "alto", viceversa sono più intense le frequenze per cui α_ν è basso. Per questo motivo vediamo delle righe di assorbimento.

1.7 Lezione 7

16-03-2020

Osservare una riga ad una determinata lunghezza d'onda ci permette di identificare l'elemento che emette a quella lunghezza d'onda e inoltre ci da una informazione sullo stato di ionizzazione dell'atomo: atomi dello stesso elemento in stati diversi di ionizzazione emette a diverse lunghezze d'onda.

Il popolamento dei livelli energetici associati a quella transizione dipenderà dalla temperatura e vedremo anche dalla densità.

Ovviamente parliamo delle condizioni fisiche della fotosfera, le altre zone non di vedono.

UN'altra cosa importante è la larghezza della riga:

fig

Vediamo che fuori dalla riga c'è il continuo. Dobbiamo trovare un parametro che ci dia la quantità di energia sottratta dalla riga al continuo adiacente.

$$A(\lambda_0) + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (I_c - I_\lambda) d\lambda. \quad (1.7.1)$$

Se la riga è troppo sottile ci aspettiamo che sia possibile che non si possa risolvere con lo strumento, analogamente se abbiamo righe troppo larghe è possibile che non sia possibile distinguerle dal continuo.

Larghezza equivalente:

$$W(\lambda_0) = \frac{A(\lambda_0)}{I_c} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda. \quad (1.7.2)$$

È equivalente alla larghezza che avrebbe una riga di profilo rettangolare di profondità unitaria e larghezza equivalente alla nostra.

In una atmosfera normale avremo che gli atomi avranno una distribuzione di velocità dovuta alla temperatura: effetto doppler Il minimo spessore che una riga può avere è quella naturale, quella dovuta al decadimento spontaneo.

Sappiamo che la prob. che un atomo del livello due di diseccitarsi per andare al primolivello è data dal ccoeff. di einstein

$$\Delta t = \frac{1}{A_{21}}. \quad (1.7.3)$$

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (1.7.4)$$

$$\Delta \nu = \frac{\gamma_{\text{rad}}}{2\pi}. \quad (1.7.5)$$

con $\gamma_{\text{rad}} = \frac{1}{\Delta t}$. Inoltre si ha che:

$$\phi(\mu) = \frac{\gamma_{\text{rad}}}{2\pi} \frac{1}{(\mu - \mu_0)^2 + \left(\frac{\gamma_{\text{rad}}}{4\pi}\right)^2}. \quad (1.7.6)$$

$$\gamma_{\text{rad}} = \sum_l^\infty A_{kl} \quad k > l. \quad (1.7.7)$$

Tipicamente parliamo di grandezze dell'ordine del millesimo dell' Å, per gli spettri di origine astronomica è tipicamente trascurabile perché nelle stelle abbiamo altri processi aventi un'importanza molto maggiore nell'allargamento delle righe.

Abbiamo infatti un effetto collisionale: l'atomo che produce le transizioni colliderà con gli atomi che gli stanno attorno, in tale collisione i livelli energetici dell'atomo verranno perturbati modificando anche la frequenza di emissione. I diversi atomi che producono la riga verranno perturbati in modo diverso gli uni dagli altri: allargamento per pressione.

Questo sarà tanto più importante quanto più sarà grande la pressione della stella.

Poi se sono presenti campi elettrici e magnetici anche questi produrranno degli allargamenti. Questo è il caso in cui la stella ruota su se stessa abbiamo un allargamento rotazionale (legato sempre al dopple).

Vediamo adesso quello dovuto all'agit. termica.

Gli atomi nell'atmosfera avranno quindi una distribuzione della velocità, a noi interessa com'è distribuita la componente di velocità lungo la linea di vista, principalmente ci concentriamo su quella radiale. Questa sarà distribuita nel seguente modo:

$$dn(v_r) = n \sqrt{\frac{m}{2}} \exp\left(-\frac{mv_r^2}{2kT}\right) dv_r. \quad (1.7.8)$$

con n è il numero di atomi per unità di volume dell'elemento interessato, m la sua massa. L'effetto D è dato da:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_r}{c}\right). \quad (1.7.9)$$

È quella non relativistica, perché con temperature dell'ordine di 10000 K si ha, ad esempio per l'idrogeno, una velocità di circa

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \sim 13 \text{ km/s}. \quad (1.7.10)$$

Per come l'abbiamo scritta si ha un blue shift quando $v_r > 0$.

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v_r}{c}. \quad (1.7.11)$$

A questa corrisponderà una distrib in frequenza:

$$v_r - \frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0) \implies dv_r = \frac{c}{\nu_0} d\nu. \quad (1.7.12)$$

quindi:

$$dn(\nu) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2\nu_0^2 kT} (\nu - \nu_0)^2\right) \frac{c}{\nu_0} d\nu. \quad (1.7.13)$$

Allora il profilo:

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}\right). \quad (1.7.14)$$

Con

$$\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (1.7.15)$$

Osserviamo anche che se abbiamo una atmosfera con dei moti convettivi oltre alla agitazione termica gli atomi si sposteranno anche a causa della turbolenza, avremo un effetto D anche per questo. Anche questo produce un allargamento dipendente dalla velocità turbolenta anziché dalla temperatura.

Si definisce quindi un allargamento effettivo come:

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}} = v_{\text{turb.}}^2. \quad (1.7.16)$$

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \approx -\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}. \quad (1.7.17)$$

allora

$$\phi = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT\lambda_0^2}} \exp\left(-\frac{mc^2(\lambda - \lambda_0)}{2kT\lambda_0^2}\right). \quad (1.7.18)$$

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{kT}{mc^2}}. \quad (1.7.19)$$

$$FWHM = \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{mc^2}} \lambda_0. \quad (1.7.20)$$

Nel caso della collisioni si ha che l'allargamento dipende dalla frequenza delle collisioni

$$\nu_{\text{coll}} = n\sigma_{\text{coll}}v_{\text{coll}}. \quad (1.7.21)$$

Il profilo prodotto è Lorentziano, si introduce una larghezza effettiva $\Gamma = \gamma_{\text{rad}} + 2\nu_{\text{coll}}$, quindi:

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{1}{(\nu - \nu_0) + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2}. \quad (1.7.22)$$

Di solito questi effetti si sovrappongono (gaussiano e lorentziano), comunamente la zona centrale è dominata dall'effetto doppler, nelle code invece prevale la Lorentziana.

Ci dobbiamo aspettare che nelle atmosfere rarefatte l'allargamento collisionale sia piccolo, e viceversa nelle atmosfere dense. Con questo modo si distinguono le stelle giganti dalle stelle nane!

Il processo dovuto ai campi magnetici in atmosfera invece è dominato dal fatto che tali campi non sono mai ordinati, quindi producono anche essi un allargamento.

1.7.1 Magnitudine

Guardando un oggetto celeste noi possiamo raccogliere il flusso di energia proveniente dall'oggetto sotto forma di radiazione elettromagnetica. Di solito questa quantità non è rappresentativa della luminosità intrinseca perchè non conosciamo la distanza e non sappiamo se tra noi e l'oggetto esiste un mezzo che ha modificato la radiazione.

Possiamo allora misurare la luminosità apparente, storicamente si misura la Magnitudine, questa ha una origine storica, introdotta nel secondo secolo avanti Cristo da Ipparco.

Egli catalogò tantissime stelle e le classificò in 6 classi di luminosità apparente o magnitudine. I criteri che lui utilizzò sono ancora usati oggi. Questa è in ordine decrescente: la prima è la più luminosa, la sesta è la meno luminosa (tutte le classi ad occhio nudo). Il secondo criterio era di considerare costante la variazione di luminosità apparente tra una classe e la successiva (la stessa per tutte le classi).

Questa scala è stata matematicizzata nel 1856 da Pogson, ottenendo una definizione basata su due assunzioni:

- La sensibilità dell'occhio è logaritmica
- Le stelle appartenenti alla sesta classe sono 100 volte meno luminose di quelle di classe uno.

Questa è la visione moderna delle regole di Ipparco.

$$\log\left(\frac{l_1}{l_2}\right) = -\frac{2}{5}(m_1 - m_2). \quad (1.7.23)$$

Quindi

$$m_1 - m_2 = -2,5 \log \frac{l_1}{l_2}. \quad (1.7.24)$$

Quando si usano le magnitudini si fanno misure relative di intensità. Servirà una stella di riferimento per poter classificare tutte le altre (l'esempio tipico è Vega).

$$m_{\text{oss}} - m_0 = -2,5 \log \left(\frac{l_{\text{oss}}}{l_0}\right). \quad (1.7.25)$$

Hubble come riferimento usa sia Vega che uno spettro artificiale di riferimento.

Dobbiamo anche tener conto che qualunque strumento moderno o meno che utilizziamo non verrà mai misurato l'intero spettro elettromagnetico della sorgente ma soltanto una parte. Inoltre anche all'interno dello spettro osservato avremo comunque una certa sensibilità. Quindi non misureremo mai il flusso $f(\lambda)$ per unità di tempo e superficie che arriva prima di entrare in atmosfera, otterremo una cosa del tipo :

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)T(\lambda)d\lambda. \quad (1.7.26)$$

con

$$T(\lambda) = R(\lambda)K(\lambda)Q(\lambda)A(\lambda). \quad (1.7.27)$$

R tiene di conto della ottica montata, K serve per il filtro selettore (in frequenze) che abbiamo sulla lente, Q sarà l'efficienza quantica del sensore (non si rivelano tutti i fotoni), i nuovi sensori arrivano ad avere quasi 1 per questo parametro, le A invece tiene conto dell'atmosfera. In conclusione si ha:

$$m_{\text{oss}} = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_{\text{oss}}(\lambda)T(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_0(\lambda)T(\lambda)d\lambda} \right) + m_0. \quad (1.7.28)$$

Con Hubble abbiamo per ogni dispositivo dei filtri fatti ad Hock che tengono di conto di tutti i parametri.

Se osserviamo una stella con un filtro e poi cambiamo filter otteniamo due magnitudini dello stesso oggetto in due filtri diversi!

$$m_{*,i} = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda)K_i(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} f_0(\lambda)K_i(\lambda)d\lambda} \right). \quad (1.7.29)$$

$$m_{*,i} = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda)K_i(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} f_0(\lambda)K_i(\lambda)d\lambda} \right) + m_{0,j}. \quad (1.7.30)$$

L'indice di colore si definisce come la differenza di queste due. Ci da il rapporto tra i flussi in due differenti bande di frequenza, quindi ci da una indicazione sulla temperatura effettiva di una stella se la approssimiamo a corpo nero!

Abbiamo anche un'altra magnitudine, quando possiamo raccogliere tutto il flusso si parla di magnitudine bolometrica m_{bol} . Operativamente non si può, ci si può avvicinare misurando in varie bande più volte.

La magnitudine bolometrica è legata a quella in una certa banda tramite la correzione bolometrica:

$$m_{\text{bol}} = m_i + BC_i. \quad (1.7.31)$$

Abbiamo poi la magnitudine assoluta, per avere informazioni sulla luminosità intrinseca ci serve questa. Si definisce magnitudine assoluta M la magnitudine che si avrebbe se la stella fosse distante 10 pc. Prendiamo il flusso f da una stella ad una certa distanza d

$$f = \frac{l}{4\pi d^2}. \quad (1.7.32)$$

poi prendo quello pensando la stella a $d = 10$ pc

$$f = \frac{l}{4\pi (10 \text{ pc})^2}. \quad (1.7.33)$$

Allora

$$m - M = -2.5 \log \left(\frac{f}{f_{10}} \right) = -2.5 \log \left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 = -5 + 5 \log (d(\text{pc})). \quad (1.7.34)$$

Se la radiazione si propaga in un mezzo anziché nel vuoto ci serve un altro termine che tenga di conto dell'assorbimento della radiazione da parte del mezzo interstellare

$$m - M = -5 + 5 \log d(\text{pc}) + A_V. \quad (1.7.35)$$

Dobbiamo conoscere allora l'entità dell'estinzione della luce attraverso il mezzo interstellare.

Si può definire anche la magnitudine bolometrica assoluta che sarà legata alla luminosità intrinseca della sorgente.

L'intensità di una certa riga sarà legata al numero di assorbitori, quindi il numero di atomi che sono in grado di produrre quella transizione, se non osservo le righe dell'idrogeno non significa che non ci sia idrogeno, significa che in quel range osservato non ci sono transizioni.