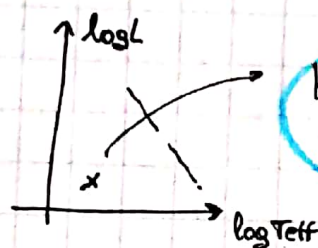


# NANE BIANCHE

La maggior parte delle stelle finiscono la loro vita come nane bianche.



basse L,  
alte  $T_{eff}$

motivo

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

a parità di  $T_{eff}$  stelle con  $L <$  hanno

$$R < \Rightarrow \text{grande } \bar{\rho}$$

a questa densità la distanza tra gli atomi è minore del raggio atomico  $\Rightarrow$  atomi completamente ionizzati non per la  $T$ , ma **IONIZZATI PER PRESSIONE**.

NOTA: Le nane bianche nascono calde e molto luminose, poi con il tempo si raffreddano.

Ralph Fowler dimostra che le nane bianche si sorreggono grazie alla pressione del gas di e<sup>-</sup> degenerate, questa si oppone alla forza gravitazionale che fa farebbe collassare.

$$a = \left( \frac{4}{3} \pi n \right)^{-1/3} \rightarrow \text{distanza media tra le particelle}$$

numero di particelle per unità di volume

Se  $a \ll \lambda = \frac{h}{p}$  ← de Broglie  $\rightarrow$  gli effetti quantistici diventano dominanti

**STATISTICA FERMI-DIRAC** per gli e<sup>-</sup>. (I nuclei non degenerano, seguono Boltzmann)

Stimiamo la densità alla quale  $a \sim \lambda$ :

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{3}{2} kT \quad \lambda_e \sim \frac{h}{\sqrt{3m_e kT}}$$

$$a = \left( \frac{6\pi}{3} \frac{\rho}{\mu_e m_H} \right)^{-1/3} = \frac{h}{\sqrt{3m_e kT}}$$

$\rho$  critico in cui vale l'uguaglianza è

$$\rho_{crit} \sim \frac{3 \mu_e m_H}{4\pi} \frac{(3m_e kT)^{3/2}}{h^3}$$

$$\frac{1}{\mu_e} = \frac{1+x}{2}$$

in caso di completa ionizzazione

nelle nane b. l'abbondanza dell'H = 0  $\Rightarrow \mu_e \approx 2$



La degenerazione implica che diventa dominante la pressione dovuta alla degenerazione elettronica. Un altro modo di vedere questa cosa è:

$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar$  ← per una particella confinata in  $\Delta x$  deve essere soddisfatto il principio d'indeterminazione

↓

Se le particelle sono  $e^-$  in una cella dello spazio delle fasi possiamo metterle al massimo due con spin opposto, se ne mettiamo  $n$  tutte due avere una quantità di moto superiore agli altri due di almeno  $\hbar/\Delta x$   
 $\Rightarrow$  queste particelle hanno energie maggiori di quelle che avrebbero classicamente  $\Rightarrow$  è associata una pressione dovuta al confinamento.

l'impulso max associato (impulso di Fermi)  $p_F \sim \frac{\hbar}{\Delta x} \sim \hbar n^{1/3}$   $\Delta x \sim \frac{1}{n^{1/3}}$

nel limite non relativistico  $E_F \sim \frac{p_F^2}{2m} \sim n^{2/3}$

Al crescere di  $n$  l'energia cambia e si va nel regime relativistico  $\Rightarrow$

$E_F \sim p_F c \sim n^{1/3}$

NOTA: Ricaviamo l'impulso di Fermi. Mettiamoci nella condizione di completa degenerazione  $T=0$  (energia minima):

gli  $e^-$  occupano tutte le celle dello spazio delle fasi in modo completo, cioè ogni cella ha due  $e^-$  fino all'esaurimento degli  $e^-$ .

Il numero di celle elementari in  $dV$  e tra  $p$  e  $p+dp$  sono

$\frac{4\pi p^2 dp dV}{h^3} \times 2$ , numero max di  $e^-$  in ogni cella

$= \frac{8\pi p^2 dp dV}{h^3}$

$\Rightarrow$  funzione di distribuzione

$f(p) = \begin{cases} \frac{8\pi p^2}{h^3} & p \leq p_F \\ 0 & p \geq p_F \end{cases}$

Il numero max di  $e^-$  è  $n_e dV = dV \int_0^{p_F} f(p) dp = dV \int_0^{p_F} \frac{8\pi p^2}{h^3} dp$

$n_e dV = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 dV$

$\Rightarrow p_F = \hbar (3\pi^2 n_e)^{1/3}$



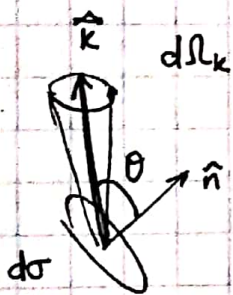
Il nostro obiettivo è calcolare la pressione esercitata dagli elettroni degeneri nel caso di complete degenerazione  $T=0$ .

$$p = \frac{m_e v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m_e v \gamma \quad E = m_e c^2 \gamma = \sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2} \quad \leftarrow \text{espressioni relativistiche}$$

$$v = \frac{p}{m_e \gamma} = \frac{p c^2}{E} = \frac{p c^2}{\sqrt{m_e^2 c^4 + p^2 c^2}} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{p/m_e c}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}}}$$

$$k = E - m_e c^2 \rightarrow \frac{p^2}{2m} \quad p \ll m_e c$$

$$\rightarrow pc \quad p \gg m_e c$$



Consideriamo una superficie infinitesima  $d\sigma$  attraversata da  $e^-$  nella direzione  $\hat{k}$  dentro ad un angolo solido  $d\Omega$

$$\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos \theta$$

densità di elettroni con moto nella direzione  $\hat{k}$  e  $p \in [p, p+dp]$

$$f(p) dp \frac{d\Omega_k}{4\pi}$$

Il numero degli  $e^-$  che nell'unità di tempo attraversano la superficie (ortogonalmente) è:

$$f(p) dp \frac{d\Omega_k}{4\pi} \underbrace{v \cos \theta}_{\text{componente } \perp d\sigma} d\sigma$$

Quindi il flusso della quantità di moto ortogonale alla superficie è

$$f(p) dp \frac{d\Omega_k}{4\pi} v \cos \theta d\sigma p \cos \theta$$

Per avere la pressione mi servono tutte le direzioni possibili  $\Rightarrow$  devo integrare sull'angolo solido

$$p_c = \int f(p) v p \frac{\cos^2 \theta}{4\pi} dp d\Omega_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^\infty \frac{8\pi}{h^3} p^2 v p dp$$

$$= \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^\infty p^3 v dp = \frac{8\pi c}{3h^3} \int_0^\infty p^3 \frac{p/m_e c}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}}} dp =$$



$$= \frac{8\pi c^5 m_e^4}{3h^3} \int_0^x \frac{\xi^4 d\xi}{\sqrt{1+\xi^2}} \quad \text{con} \quad \xi = \frac{p}{m_e c} \quad x = \frac{p_F}{m_e c}$$

$$\frac{1}{8} \left[ x(2x^2-3)(1+x^2)^{1/2} + 3 \sinh^{-1} x \right] = \frac{1}{8} f(x)$$

$$\Rightarrow p_e = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} f(x)$$

numero di e<sup>-</sup> su  
unità di volume

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_u} = \frac{8\pi}{3h^3} p_F^3 = \frac{8\pi}{3h^3} m_e^3 c^3 x^3$$

Potremo ottenere  $p_e$  in funzione di  $n_e$ .

$$\text{energia e}^- : U_e = \int_0^{p_F} f(p) K(p) dp = \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{p_F} K(p) p^2 dp = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} g(x)$$

$$g(x) = 8x^3 \left[ (x^2+1)^{1/2} - 1 \right] - f(x)$$

Consideriamo i casi asintotici considerando  $x = p_F/m_e c$  che è una misura dell'importanza degli effetti relativistici per gli e<sup>-</sup> con quantità di moto più alta ( $p_F$ )

$$x = \frac{p_F}{m_e c} = \frac{v_F/c}{\sqrt{1 - \frac{v_F^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{v_F^2}{c^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\bullet \quad x \ll 1 \quad (p_F \ll m_e c) \Rightarrow v_F \ll c \quad \text{LIMITE NON RELATIVISTICO}$$

$$f(x) \rightarrow \frac{8}{5} x^5 \quad g(x) \rightarrow \frac{12}{5} x^5 \Rightarrow p_e = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{15 h^3} x^5$$

$$n_e = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} x^3$$

$$\Rightarrow \left[ p_e = \frac{1}{20} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{h}{m_e m_u^{2/3}} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \right] \rightarrow \mu_e = 2 \text{ (nove braccia)}$$

$$p_e = \frac{2}{3} U_e$$

compiono solo calcoli universali



•  $x \gg 1$  ( $p_F \gg m_e c$ )  $\Rightarrow v_F \sim c$

Limite ULTRARELATIVISTICO

$f(x) \rightarrow 2x^4$   $g(x) \rightarrow 6x^4$

$\Rightarrow P_e = \frac{2\pi m_e^4 c^5}{3h^3} x^4 = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8m_e^{4/3}} \left(\frac{\rho}{m_e}\right)^{4/3}$

$P_e = \frac{1}{3} U_e$

non c'è la massa dell'e- perché l'energia a riposo è trascurabile rispetto a quella dell'e-

Nei modelli reali non posso usare i casi asintotici ricavati a  $T=0$ , tuttavia sono in buona appross. perché  $E_F \gg kT$ .

Ci sono quindi una riduzione dipendente dalla temperatura

$f(p) = \frac{8\pi p^2}{h^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) + 1}$

funzione di distribuzione

manima occupazione

$< 1$

vicino all' $E_F$

fattore di diminuzione che ci dice che non stiamo riempiendo tutte le celle elementari dello spazio delle fasi

In generale abbiamo visto che valgono le leggi del tipo

$P = K \rho^\gamma$

$\omega \sigma$

$\gamma = 1 + \frac{1}{n} \leftarrow$  ESPONENTE POLITRONO

RELAZIONE POLITROPICA

→ zone convettive (adiabatiche)  $\gamma = 5/3$

→ gas di e- completamente degeneri  $\gamma = 5/3$  o  $\gamma = 4/3$

È un vantaggio che valga una relazione di questo tipo perché

$\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{Gm}{r^2}$ ,  $\frac{\partial m}{\partial z} = 4\pi r^2 \rho$ ,  $\frac{\partial L}{\partial z} = 4\pi r^2 \rho \epsilon$ ,  $\frac{\partial T}{\partial z} = \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$

sono strettamente legate tra loro perché  $P = P(\rho, T)$  in stelle normali, ma se  $P = P(\rho)$  possiamo disaccoppiare i due gruppi di equazioni.

Quindi si può risolvere la struttura della stella senza conoscere



le altre due equazioni  $\frac{\partial L}{\partial r}$  e  $\frac{\partial T}{\partial r}$

Dal punto di vista fisico il motivo per cui si può risolvere la struttura stellare senza conoscere l'equazione del trasporto è che il tempo scala con cui la stella reagisce a variazioni di energia ( $\tau_{KH}$ ) è  $\gg$  tempo scala meccanico ( $\tau_H$ ). In questo tempo scala quindi le quantità di energia perse dal sistema è molto piccola.

Vedremo cosa possiamo dire sulla struttura di una stella per cui vale una relazione polinomica:

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = Gm \quad \frac{d}{dz} \left[ \frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right] = -G \frac{dm}{dz} = -G 4\pi r^2 \rho$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dz} \left[ \frac{r^2}{\rho} \frac{d\rho}{dz} \right] = -4\pi G \rho \quad \text{ricorda} \quad \text{eq Poisson} \quad \nabla^2 \phi = -4\pi G \rho$$

Introduciamo delle variabili adimensionali

$$\rho = \rho_c \phi^n \quad x = \frac{r}{\lambda} \quad \lambda = \frac{(n+1) K \rho_c^{\frac{1-n}{n}}}{4\pi G}$$

densità centrale

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left[ x^2 \frac{d\phi}{dx} \right] = -\phi^n$$

EQ. DI LANE-EMDEN

descrive il comportamento delle strutture polimorphe

È un'equazione differenziale  $\Rightarrow$  condizioni al contorno (nel centro)

$$x=0 \quad \begin{cases} \phi(0) = 1 \rightarrow \rho = \rho_c \\ \frac{d\phi}{dx} = 0 \rightarrow \text{max nel centro} \end{cases}$$

Questa equazione ha soluzioni analitiche solo per  $n=0, 1, 5$ .

Come calcoliamo il valore della MASSA?

Si deve trovare  $x$  per cui  $\phi(x) = 0$ , questa sarà la superficie quindi il raggio.

$$x_* \quad \text{t.c.} \quad \phi(x_*) = 0$$



Solo i politropi con indice  $n < 3$  hanno  $x_n < \infty$  (rotazioni FINITI), in tal caso si può ricavare la massa:

$$M(R) = 4\pi \int_0^R r^2 \rho dr \xrightarrow{\text{politropo}} = 4\pi \rho_c \lambda^3 \int_0^{x_n} \phi^n x^2 dx \quad \text{Eq. L-E}$$

integramo la seconda eq di struttura

$$M(R) = -4\pi \rho_c \lambda^3 \left[ x^2 \frac{d\phi}{dx} \right]_{x_n}$$

Adesso usando le condizioni al contorno e sostituendo l'espressione di  $\lambda^3$  otteniamo:

$$\textcircled{1} \quad M \propto \rho_c^{\frac{3-n}{2n}} \quad R = \lambda x_n \propto \rho_c^{\frac{1-n}{2n}}$$

Potremmo ottenere una relazione che lega il raggio con la massa:

$$R \propto M^{\frac{1-n}{3-n}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} n=3 \\ \downarrow \\ \gamma = \frac{4}{3} \end{cases} \quad M \text{ non dipende da } \rho_c$$

$$\rightarrow n = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{5}{3} \Rightarrow R \propto \rho_c^{-1/6} \quad M \propto \rho_c^{1/2} \quad R \propto M^{-1/3} \quad MR^3 = \text{cost}$$

più grande è  $M$  della nana bianca, più piccolo è il suo raggio, perché è maggiore la sua forza gravitazionale  $\Rightarrow \rho$  maggiore  $\Rightarrow \beta$  maggiore

$$\textcircled{2} \quad n=3 \quad M = -4\pi \left( \frac{K}{\pi G} \right)^{3/2} \left[ x^2 \frac{d\phi}{dx} \right]_{x_n} \quad x_n = 6,89685$$

$$-x^2 \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x_n} = 2,01824$$

Quindi in questo caso vi è un unico valore della massa, invece per  $n=3/2$  ve ne è uno  $\forall R$  perché dipendono da  $\rho_c$ .

Questa massa critica viene chiamata **MASSA LIMITE DI CHANDRASEKHAR** e nel limite ultrarelativistico la costante  $K$  è nota e sostituendo i valori numerici

$$\boxed{M_{Ch} = \frac{5,836}{\mu_e^2} M_\odot = 1,44 M_\odot}$$

nelle nane bianche  
 $\mu_e \sim 2$