

# Appunti di astrofisica

Edoardo Gabrielli

16 maggio 2020

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione e Trasporto Radiativo</b>	<b>3</b>
1.1	Lezione 1 . . . . .	3
1.1.1	Osservazione del cielo . . . . .	3
1.1.2	Diffrazione e Seeing . . . . .	4
1.1.3	Massa del sole . . . . .	6
1.1.4	Distanze e metodo della parallasse . . . . .	6
1.1.5	Scale temporali dell'universo . . . . .	7
1.1.6	Luminosità intrinseca, Candeled campioni ed introduzione al trasporto radiativo . . . . .	8
1.2	Lezione 2 . . . . .	9
1.2.1	Momenti dell'intensità $I_\nu$ . . . . .	9
1.2.2	Propagazione di un fascio nel vuoto. . . . .	11
1.2.3	Propagazione della radiazione in un mezzo . . . . .	13
1.2.4	Equazione del trasporto: processi di interazione radiazione materia . . . . .	14
1.3	Lezione 3 . . . . .	16
1.3.1	Serie dell'atomo di idrogeno . . . . .	18
1.3.2	Radiazione attraverso una nube interstellare . . . . .	19
1.3.3	Soluzione analitica all'equazione del trasporto stazionaria. . . . .	20
1.4	Lezione 4 . . . . .	23
1.4.1	Scoperta delle righe (di assorbimento e di emissione). . . . .	23
1.4.2	Radiazione di corpo nero: proprietà principali. . . . .	24
1.4.3	Temperatura di una stella . . . . .	25
1.4.4	Cammino libero medio dei fotoni . . . . .	27
1.4.5	Equilibrio termodinamico locale . . . . .	28
1.5	Lezione 5 . . . . .	28
1.5.1	Atmosfera a piani paralleli. . . . .	28
1.5.2	Valutazione della anisotropia. . . . .	31
1.5.3	Atmosfera grigia . . . . .	31
1.6	Lezione 6 . . . . .	32
1.6.1	Limb Darkening . . . . .	33
1.6.2	Righe nello spettro stellare . . . . .	35
1.7	Lezione 7 . . . . .	36
1.7.1	Studio delle righe di assorbimento . . . . .	36
1.7.2	Processi di allargamento delle righe . . . . .	38
1.7.3	Magnitudine . . . . .	39
1.8	Lezione 8 . . . . .	42
1.8.1	Slide su studio delle righe spettrali. . . . .	42
1.9	Lezione 9 . . . . .	42
1.9.1	Trasporto di energia negli interni stellari. . . . .	42
1.9.2	Cammino libero medio di Rosseland . . . . .	43
1.9.3	Moto dei fotoni all'interno di una stella. . . . .	44
1.9.4	Equilibrio idrostatico della stella . . . . .	44
1.10	Lezione 10 . . . . .	46
1.10.1	Tempi scala dell'evoluzione stellare. . . . .	46
1.10.2	Teorema del viriale per corpi autogravitanti. . . . .	47
1.10.3	Energia e stabilità della stella . . . . .	48
1.10.4	Capacità termica negativa per una stella. . . . .	49
1.10.5	Sviluppo di una stella. . . . .	49
1.10.6	Stella con gas monoatomico all'interno . . . . .	50
1.11	Lezione 11 . . . . .	50

1.11.1	Energia delle stelle: dal sole a carbone alle reazioni termonucleari . . . . .	50
1.11.2	Tempo scala nucleare. . . . .	51
1.11.3	Equazioni di struttura stellare. . . . .	51
1.11.4	Flusso di energia trasportato dalla conduzione. . . . .	53
1.12	Lezione 12 . . . . .	54
1.12.1	Moti convettivi nelle stelle. . . . .	54
1.12.2	Gradiente radiativo e gradiente adiabatico. . . . .	56
1.12.3	Gradiente radiativo e luminosità. . . . .	57
1.12.4	Mixing Length (o lunghezza media percorsa dalle bolle convettive.) . . . . .	58
1.12.5	Core convettivi e involucri convettivi . . . . .	59
1.13	Lezione 13 . . . . .	60
1.13.1	Convezione e equilibrio idrostatico. . . . .	60
1.13.2	Equazioni di struttura stellare. . . . .	60
1.13.3	Equazione di stato . . . . .	61
1.13.4	Tre casi di perdita di approssimazione di gas perfetto . . . . .	62
1.14	Lezione 14 . . . . .	65
1.14.1	Calcolo della opacità radiativa. . . . .	65
1.14.2	Contributo dovuto alle reazioni nucleari. . . . .	68
1.15	Lezione 15 . . . . .	68
1.15.1	Reazioni nucleari di fusione. . . . .	68
1.16	Lezione 16 . . . . .	73
1.16.1	Riassunto sui processi di evoluzione stellare . . . . .	75
1.16.2	Catena p-p. . . . .	75
1.16.3	Ciclo CN-NO . . . . .	77
1.17	Lezione 17 . . . . .	79
1.18	Lezione 18 . . . . .	81
1.18.1	Neutrini . . . . .	81
1.18.2	Relazioni di scala tra grandezze stellari. . . . .	81
1.18.3	Cenni all'evoluzione stellare . . . . .	83

# Capitolo 1

## Introduzione e Trasporto Radiativo

### 1.1 Lezione 1

20-02-2020

#### Introduzione

Il corso è di astrofisica generale e darà una infarinatura generale degli argomenti principali dell'astrofisica.

**Libro di testo** *Astrophysics for Physicists*, Arnab Rai Choudhri

#### Argomenti del corso

- Trasporto radiativo.
- Stelle.
- Aggregati di stelle.
- Mezzo interstellare.
- Ammassi di galassie.

#### 1.1.1 Osservazione del cielo

**Astrofisica** L'astrofisica è una scienza osservativa: non possiamo decidere di modificare il nostro "apparato", possiamo solo soltanto raccogliere informazioni attraverso le tecnologie di osservazione che abbiamo.

Le informazioni possono essere raccolte attraverso i diversi tipi di **messaggeri** che ci arrivano dal cosmo.

Il messaggero principale è la radiazione elettromagnetica, ultimamente si sono aggiunti altri portatori di informazioni: prima le particelle (neutrini) e successivamente le onde gravitazionali.

Resta il fatto che la stragrande maggioranza di informazioni che sappiamo dall'universo proviene dalla radiazione elettromagnetica.

Non potendo decidere quando i fenomeni avvengono sarà necessario sviluppare delle strategie che permettano di avere una sorta di **ridondanza osservativa** per riuscire ad accertare un supposto evento.

**Osservazione della radiazione elettromagnetica** Fino alla seconda guerra mondiale si osservava soltanto nella fascia dello spettro del visibile: tra i 4000 ed i 7000 Å.

Successivamente, grazie all'invenzione del radar si sono aperte le regioni del Radio, X, Infrarosso, Gamma. Oggi si fanno osservazioni in tutto lo spettro.

**Lotta contro l'oscurità** La sfida è sempre stata nel vedere sorgenti deboli. Una sorgente può essere debole perchè è intrinsecamente debole (nana bianca antichissima, pianeti) oppure sorgenti intrinsecamente molto luminosi ma molto molto lontani.

Poter osservare oggetti sempre più lontani significa aumentare il numero di osservazione: posso avere più possibilità di osservare fenomeni mai visti prima e fare nuova fisica.

Per vedere oggetti sempre meno luminosi abbiamo bisogno di lenti dei telescopi sempre più grandi. Attualmente i telescopi ottici più grandi hanno diametri di 10 metri. L'ESA sta costruendo un telescopio di diametro di 39 metri. Avere un diametro più grande significa avere una sensibilità maggiore.

### 1.1.2 Diffrazione e Seeing

**Telescopi sempre più grandi** Aumentando la superficie della lente del telescopio aumenta la capacità di catturare luce e quindi la sensibilità del telescopio. Tuttavia questo non è l'unico motivo per cui si costruiscono telescopi sempre più grandi: c'è anche un motivo legato alla risoluzione del telescopio.

Quando guardiamo il cielo noi osserviamo degli angoli, le varie sorgenti che sono proiettate sulla volta celeste. La risoluzione è l'angolo più piccolo tra due sorgenti proiettate sulla volta celeste che mi permette di distinguerle. Infatti per le dimensioni angolari degli oggetti luminosi nel cielo non sono trascurabili effetti di diffrazione.

**Diffrazione** Prendiamo il classico problema della fenditura:

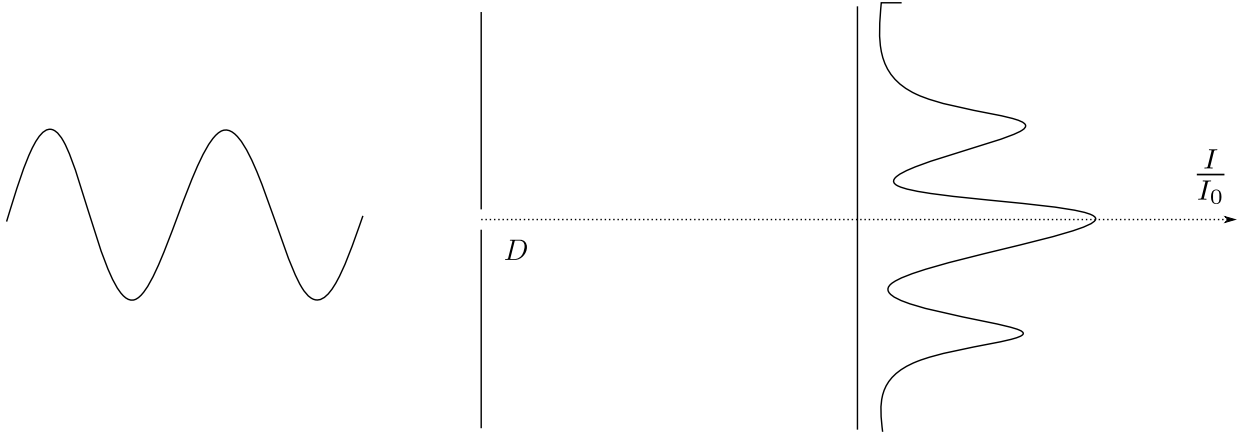


Figura 1.1: Diffrazione da una fenditura

Sappiamo che gli zeri della funzione di intensità  $\frac{I}{I_0}$  sono nei punti:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{D} \cdot m \quad m \text{ intero.} \quad (1.1.1)$$

Con il nostro telescopio abbiamo una situazione simile: abbiamo una stella lontana che irraggia. La sua luce entra in una fenditura circolare di diametro  $D$  data dal telescopio. Per il principio di Babinet sappiamo che anche in questo caso si crea una figura di interferenza che prenderà la seguente forma:

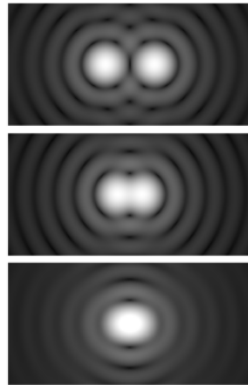


Figura 1.2: Diffrazione al telescopio per due stelle al variare della risoluzione angolare.

Questa struttura di rifrazione ci permette di ridefinire il concetto di risoluzione, questa volta gli zeri sono in corrispondenza di alcuni numeri, il primo zero va ha  $m = 1.22$ .

Il cerchio centrale, detto disco di Airy è importante perchè ci permette di discriminare due oggetti, questo risulta evidente in Figura 2

Prendendo angoli progressivamente più piccoli le figure di diffrazione tengono a sovrapporsi, il criterio per dire quando due sorgenti sono distinguibili è detto Criterio di Rayleigh: due sorgenti si dicono distinte quando hanno dischi di Hairy con centri che giacciono uno all'esterno dell'altro. Quindi l'angolo minimo che riesco a risolvere sarà:

$$\sin \theta_{min} \approx \theta_{min} = 1.22 \frac{\lambda}{D}. \quad (1.1.2)$$

Quindi la risoluzione angolare di questo telescopio è data da questa formula. Per questo possiamo capire perchè è importante avere telescopi sempre più grandi.

Quando un telescopio arriva alla situazione in cui il limite di funzionamento è quello di diffrazione si dice che siamo nelle condizioni ottimali: quelle di Diffraction Limited (Hubble è in queste condizioni).

**Seeing** Sulla terra si può arrivare alla condizione ottimale del paragrafo precedente? In genere no per colpa della atmosfera, avente indice di rifrazione variabile è la maggiore fonte di disturbo.

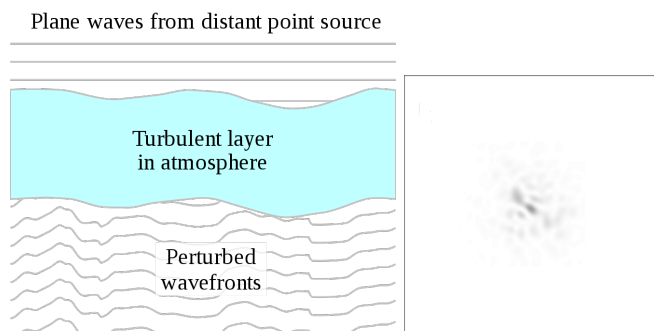


Figura 1.3: A destra un possibile effetto sui fronti d'onda che attraversano l'atmosfera e a sinistra il risultato sulla stella agli occhi del telescopio, l'immagine risulta allargata e distorta.

Qual'è l'ordine di grandezza del Seeing? Se è buono si arriva al "secondo d'arco":  $1''$ . Nei siti migliori si arriva a  $0.5''$ .

Possiamo allora chiederci qual'è il valore del diametro del telescopio che mi produce un angolo di diffrazione minimo che corrisponde a quello del seeing. A quel punto non mi servirebbe a niente aumentare le dimensioni della lente: il seeing ci sarebbe comunque.

Nella luce visibile si ha  $\lambda \approx 5000 \text{ \AA}$ , se prendiamo a questa lunghezza d'onda un angolo di  $1''$  vediamo che il telescopio che raggiunge il limite del seeing è minuscolo:  $D = 12 \text{ cm}$ .

Perchè allora si costruiscono telescopi di 40 metri di diametro?

- Per raccogliere comunque più luce.
- Per via dell'avvento della elettronica.

Esiste infatti un sistema detto ottica adattiva per correggere la presenza dell'atmosfera: si spara una sorgente laser in aria e si cercano di compensare elettronicamente l'effetto dell'atmosfera.

**Lunghezza d'onda per cui oggi si ha la massima risoluzione angolare** Ha senso diminuire  $\lambda$  fissando  $D$ , sembrerebbe quindi sensato andare nel Gamma, oggi invece si ha la risoluzione massima nel Radio grazie a Tecniche di interferometria: possiamo costruire array di telescopi che lavorano simultaneamente (si registra con orologi atomici l'arrivo del segnale): si arriva a  $D = 8600 \text{ km}$  (baseline molto lunga). Con questo metodo si arriva a risoluzioni di decine di micro arcosecondi! Questo è sicuramente il caso della foto del buco nero (30 arcosecondi).



Figura 1.4: Immagine del buco nero raccolta nel 2019

Ci sono alcune grandezze in astrofisica che non possono essere dimenticate ai fini di comprendere le grandezze di cui stiamo parlando. Queste grandezze alcune volte vengono anche adottate come unità di misura, visto che nella scala astrofisica le unità standard ridulterebbero decisamente incomprensibili!

### 1.1.3 Massa del sole

Massa del sole:  $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{33} \text{ g} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$ .

La massa minima per una stella è circa  $0.08 M_{\odot}$ <sup>1</sup>, la massima si aggira attorno a  $100 M_{\odot}$ .

Le galassie hanno circa  $10^{11}$  stelle, da cui per ottenere la massa di queste ultime si può mediare la massa a quella del sole con l'adeguato esponente.

Abbiamo anche aggregati di stelle (tipo Pleiadi, migliaglia di stelle) e più in là vedremo e studieremo gli ammassi di galassie.

### 1.1.4 Distanze e metodo della parallasse

Raggio del sole:  $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ cm}$ .

La misura delle distanze in astronomia è complicata. Sono necessarie misure indirette spesso. Se voglio conoscere le dimensioni fisiche di un oggetto (trasformare angolo in distanza) ho bisogno di sapere quanto è distante!

**Metodo della parallasse** È l'unica misura diretta di distanza disponibile. È inoltre una misura di tipo geometrico:

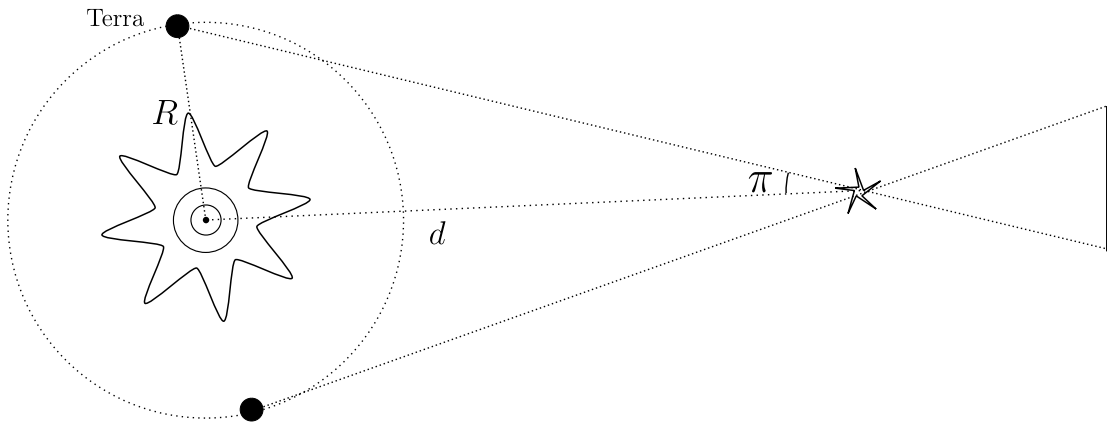


Figura 1.5: Metodo della parallasse: la stella risulta in diversi punti del cielo a seconda della posizione della terra.

Negli anni novanta abbiamo mandato un satellite che misurava fino ad un millesimo di secondo d'arco. La missione attuale più importante al riguardo è la GAIA: sta adesso mappando il cielo, quando tra qualche anno avrà finito si arriva a 30 microarcosecondi, purtroppo non si esce ancora dalla galassia con questo metodo.

Il metodo consiste in pratica nel vedere lo spostamento angolare dell'oggetto in momenti diversi dell'orbita di rotazione della terra attorno al sole: l'angolo di parallasse  $\pi$  è la metà dell'angolo  $\theta$

$$\frac{\theta}{2} = \pi. \quad (1.1.3)$$

Se conosciamo il raggio di orbita terrestre possiamo trovare la distanza della stella.

Noi conosciamo il raggio dell'orbita terrestre medio <sup>2</sup>, esso è l'unità astronomica A.U:  $R \approx 1.5 \cdot 10^{13} \text{ cm}$ .

$$\tan(\pi) \approx \pi = \frac{R}{d}. \quad (1.1.4)$$

Il sistema solare (fino a nettuno) abbiamo una dimensione di 30 A.U. Fuori dal sistema solare è necessario definire un'altra unità di misura: il Parsec.

Un parsec è una distanza tale che la parallasse annua è  $1''$ :

$$1 \text{ pc} \approx 3.09 \cdot 10^{18} \text{ cm} \sim 3.2 \text{ anni luce}. \quad (1.1.5)$$

<sup>1</sup>questa è la massa minima per innescare le reazioni termonucleari, chi non raggiunge queste dimensioni (ma si avvicina) è detta Nana Bruna

<sup>2</sup>Grazie ad un trasponder radar montato sulla luna

La stella più vicina a noi ha una parallasse annua di  $0.75''$  l'anno (Proxima Centauri) che equivale a 1.3 pc. Misurare questi angoli è difficile in generale, gli angoli sono molto piccoli. Le dimensioni di una galassia come la nostra invece sono:



Figura 1.6: Rendering della via lattea vista dall'esterno.

$$R_{disco} \sim 15 \text{ kpc}. \quad (1.1.6)$$

La distanza tra le galassie più vicine tra loro è dell'ordine del Mpc.

In genere le stelle invece distano tra loro di quantità dell'ordine dei parsec, è raro che collidano tra loro: l'una tra l'altra sono molto lontane rispetto alle dimensioni delle stelle stesse.

Non si può dire lo stesso per le galassie, ci sono solo pochi ordini di grandezza tra il raggio galattico e la distanza tra una galassia e l'altra, infatti le collisioni tra galassie sono più frequenti.

Le galassie più distanti sono dell'ordine del Gpc (questa è anche la scala delle dimensioni dell'universo).

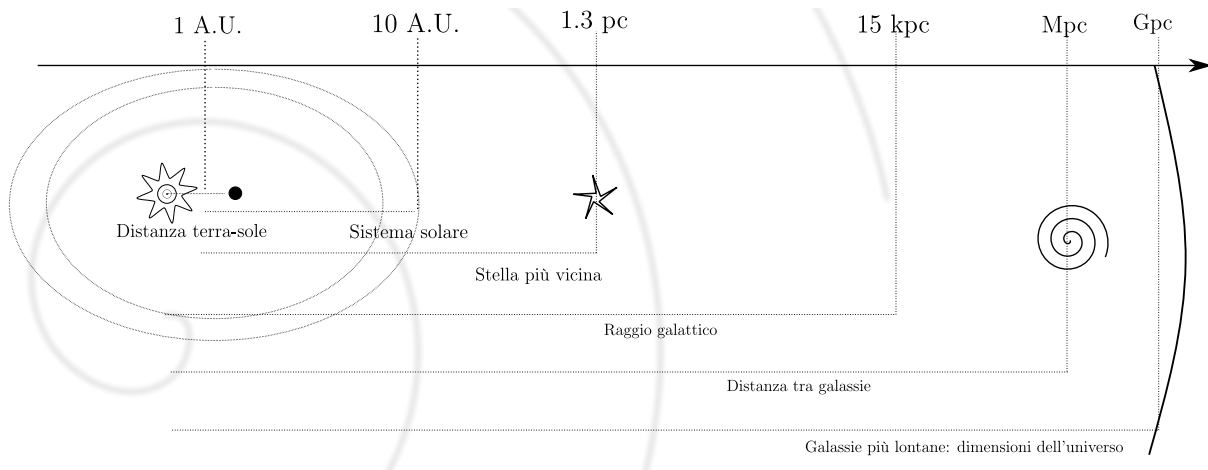


Figura 1.7: Scale dell'universo, il disegno è schematico e non è ovviamente in scala.

### 1.1.5 Scale temporali dell'universo

Età del sole:  $T_{\odot} = 4.57 \text{ Gyr}$  (Giga year). Questa è una delle poche datazioni misurata in modo diretto in astronomia, questa deriva dallo studio delle comete: queste sono rimaste intatte per miliardi di anni, queste vengono datate attraverso radiodazioni.

Età dell'universo (dal Big Bang ad oggi):  $T_{uni} = 13.8 \text{ Gyr}$ .



### 1.1.6 Luminosità intrinseca, Candele campioni ed introduzione al trasporto radiativo

Negli anni '90 l'ESA ha mandato un satellite in grado di mappare decine di migliaia di stelle attorno a noi distanti fino a 10 pc. GAIA è l'evoluzione di questo progetto, essa permetterà di mappare tridimensionalmente la galassia.

Tuttavia anche con GAIA non si esce dalla galassia, quindi come si fa ad uscire? Come si misura la distanza se non sono in grado di misurare la parallasse?

Serve un metodo indiretto basato sul concetto di **Candela campione**: un oggetto astronomico di cui conosco la luminosità intrinseca.

Confrontando la luminosità intrinseca e la luminosità apparente osservata possiamo dedurre la distanza dell'oggetto. Questo è l'unico modo per misurare le distanze di oggetti all'esterno della via lattea. (Gli oggetti campione sono in genere le supernove).

Come faccio a partire dalla luminosità intrinseca a misurare la distanza?

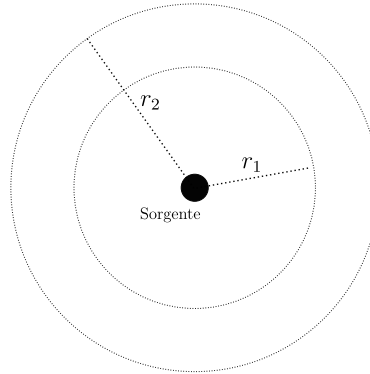


Figura 1.8: Propagazione della radiazione

Prendiamo una sorgente che irraggia come in Figura 8. Se chiamiamo  $F(r_1)$  il flusso della radiazione che attraversa la superficie sferica concentrica alla sorgente di raggio  $r_1$  allora:

$$F(r_1) 4\pi r_1^2 = F(r_2) 4\pi r_2^2 \implies F(r_2) = F(r_1) \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2. \quad (1.1.7)$$

Abbiamo quindi una buona definizione di luminosità se ci mettiamo sul raggio  $R$  della stella che irraggia:

$$F(R) 4\pi R^2 = L. \quad (1.1.8)$$

Tuttavia questa a livello pratico non è sufficiente. La radiazione non si propaga nel vuoto, è indispensabile quindi costruire una teoria del trasporto radiativo per tener conto del mezzo interstellare.

Dobbiamo introdurre alcune grandezze per studiare il trasporto radiativo: **Intensità specifica monocromatica** (trattata dal punto di vista macroscopico <sup>3</sup>):

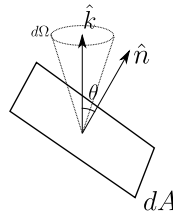


Figura 1.9: Figura per introdurre l'intensità specifica

Supponiamo di essere in un punto  $\mathbf{r}$  all'istante  $t$  e prendiamo in questo punto una superficie infinitesima elementare  $dA$  orientata nella direzione  $\hat{n}$  come in Figura 9. Ci interessa calcolare l'energia trasportata dalla

<sup>3</sup>Valido quando la lunghezza d'onda che stiamo studiando sono piccole rispetto alle dimensioni del sistema, questo ci permette di immaginare che la radiazione si propaghi lungo dei raggi

radiazione elettromagnetica che attraversa la superficie  $dA$  nella direzione  $\hat{k}$  all'interno dell'angolo solido  $d\Omega$  (inoltre deve essere monocromatica: tra  $\nu$  e  $d\nu$ ).  
Quello che cerchiamo è dato da:

$$dE = I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \hat{k} \hat{n} dA dt d\Omega d\nu = I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \cos \theta dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.1.9)$$

Questa quantità è un flusso per unità di angolo solito: una brillantezza superficiale.

$$[I_\nu] = [\text{erg}] \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ ster}^{-1} \text{ Hz}^{-1}. \quad (1.1.10)$$

Dove ster è lo ster radiante.

$I_\nu$  è l'energia trasportata da un gruppo di fotoni che si muovono tutti nella stessa direzione contemporaneamente e tutti con la stessa frequenza.

È necessario notare che l'interazione tra radiazione e materia è anche argomento microscopico: il fotone interagisce anche con ioni, protoni, nuclei nel suo tragitto. Terremo conto con opportuni coefficienti il passaggio della radiazione nei vari mezzi quando scriveremo l'equazione del trasporto.

## 1.2 Lezione 2

24-02-2020

Riprendiamo la teoria del trasporto radiativo.

$$dE = I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \hat{k} \hat{n} dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.1)$$

Conoscere il campo di radiazione in una determinata regione significa conoscere l'intensità specifica del campo di radiazione:  $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$ .

Tale quantità ricordiamo essere un flusso per unità di angolo solido. Presa una superficie infinitesima  $dA$  come nella lezione precedente:

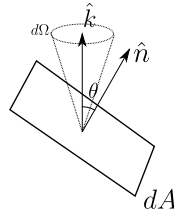


Figura 1.10: Figura per introdurre l'intensità specifica

L'energia trasportata dalla radiazione elettromagnetica tra la frequenza  $\nu$  e  $\nu + d\nu$  che attraversa la superficie  $dA$  è data dalla relazione con cui abbiamo introdotto questa lezione.

Questa  $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$  non descrive completamente il campo di radiazione: lo descrive nei confini dell'ottica geometrica. Non tiene di conto infatti di fenomeni come interferenza e diffrazione. Anticipiamo che nella maggior parte delle situazioni di interesse la quantità  $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$  non dipende dal tempo perché il campo di radiazione ed il mezzo stesso sono in genere stazionari <sup>4</sup>.

### 1.2.1 Momenti dell'intensità $I_\nu$

Spesso inoltre non serve conoscere direttamente  $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$ , bastano altre quantità con meno informazioni. Facciamo in questa sezione alcuni esempi.

**Flusso** Immaginiamo di volere il flusso  $F_\mu$  monocromatico (tra la frequenza  $\nu$  e  $\nu + d\nu$ ) attraverso la superficie  $dA$  nell'unità di tempo, calcoliamo dapprima la radiazione che si propaga nella direzione  $\mathbf{k}$  che chiamiamo  $\phi$ :

$$\phi = \frac{dE}{dA dt} = \frac{I_\nu \cos \theta}{dA dt} dA dt d\Omega d\nu = I_\nu \cos \theta d\Omega d\nu. \quad (1.2.2)$$

<sup>4</sup>Ci sono anche casi in cui questo non è vero, nei casi che affrontiamo noi invece lo daremo per scontato.

Per ottenere il flusso basterà integrare in tutto l'angolo solido ottenendo:

$$F_\nu = \int_{\Omega} I_\nu \cos \theta d\Omega \quad [\text{erg}] [\text{cm}]^{-2} [\text{s}]^{-1} [\text{Hz}]^{-1}. \quad (1.2.3)$$

Se vogliamo il flusso totale sarà necessario integrare nelle frequenze:

$$F = \int F_\nu d\nu. \quad (1.2.4)$$

Chiaramente nel flusso c'è meno informazione che nella intensità specifica perchè abbiamo perso informazioni sull'angolo e quindi sulla direzione di propagazione.

Notiamo che nei casi in cui la radiazione è isotropa il flusso sarà nullo: la quantità di radiazione che va verso l'alto è la stessa di quella verso il basso <sup>5</sup>.

Un esempio di radiazione isotropa è quella di corpo nero. Per tale oggetto, inserendo in rilevatore all'interno della famosa cavità rileviamo appunto un flusso nullo.

In natura una ottima approssimazione di corpo nero sarà l'interno delle stelle.

**Densità di energia irradiata** Un'altra quantità che si può ricavare quando è noto  $I_\nu$  è la densità di energia  $u_\nu$ : consideriamo l'elementino di volume composto dalla quantità di radiazione che attraversa l'area  $dA$  nel tempo  $dt$  facendo sempre riferimento alla Figura 10:

$$dV = dA \cos \theta c dt. \quad (1.2.5)$$

si ha che, ragionevolmente, la densità di energia sarà parente della quantità:

$$\frac{dE}{dV} = \frac{I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k}) \hat{k} \cdot \hat{n} dA dt d\Omega d\nu}{dA \cos \theta c dt} = \frac{I_\nu}{c} d\Omega d\nu. \quad (1.2.6)$$

Dove abbiamo usato il fatto che  $\hat{k} \cdot \hat{n} = \cos \theta$ .

Basta adesso integrare sull'angolo solido per ottenere  $u_\nu$ :

$$u_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} d\Omega \quad [\text{erg}] [\text{cm}]^{-3} [\text{Hz}]. \quad (1.2.7)$$

Se la radiazione è isotropa  $I_\nu/c$  può uscire dall'integrale:

$$u_\nu = \frac{I_\nu}{c} \int d\Omega = \frac{4\pi}{c} I_\nu. \quad (1.2.8)$$

Nel caso del corpo nero abbiamo, dalla legge di radiazione di Plank che:

$$u_\nu = \frac{8\pi\hbar}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{4\pi}{c} B_\nu. \quad (1.2.9)$$

Dove abbiamo introdotto la quantità:

$$B_\nu = \frac{2\hbar}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}. \quad (1.2.10)$$

**Pressione** Possiamo trovare la pressione della radiazione calcolando il flusso della componente ortogonale della quantità di moto alla superficie attraversata  $dA$ :

$$\mathbf{p}_\perp \cdot \hat{n} = \frac{dE}{c} \hat{k} \cdot \hat{n} = \frac{I_\nu \cos^2 \theta dA dt}{c} d\Omega d\nu = \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega d\nu. \quad (1.2.11)$$

Dove abbiamo sfruttato che i fotoni sono particelle senza massa per relazionare l'energia alla quantità di moto. Quindi abbiamo che, integrando nell'angolo solido come sopra si ottiene la pressione per unità di frequenza:

$$P_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega. \quad (1.2.12)$$

E integrando ancora nella frequenza si ottiene la pressione:

$$P = \int P_\nu d\nu. \quad (1.2.13)$$

---

<sup>5</sup>Infatti l'integrale fa proprio zero, poichè tutto esce dall'integrale in  $\Omega$  tranne il coseno, mentre l'elemento infinitesimo di angolo solido è proporzionale a  $\sin \theta d\theta$

Notiam adesso che se il campo è isotropo il risultato che otteniamo è il seguente:

$$P = \frac{4\pi}{3} \frac{I_\nu}{c} = \frac{u_\nu}{3}. \quad (1.2.14)$$

Nel caso degli interni stellari <sup>6</sup> avviciniandoci verso il centro delle stelle non si ha esattamente un irraggiamento isotropo per il semplice motivo che questo richiederebbe un equilibrio termodinamico esatto. Ci sarà invece un gradiente di temperatura andando verso il centro della stella, quindi ci aspettiamo anche in questa situazione una anisotropia nella radiazione.

Tale anisotropia sarà così piccola che per la maggior parte delle applicazioni che vedremo può essere trascurata, tuttavia globalmente non può essere trascurata perchè proprio quella lieve luce che noi vediamo guardando il cielo notturno.

**Intensità specifica media sull'angolo.**

$$J_\nu = \frac{\int I_\nu d\Omega}{4\pi}. \quad (1.2.15)$$

Nel caso del campo isotropo si ha:  $J_\nu = I_\nu$ .

È possibile esprimere la densità di energia in termini di  $J_\nu$  :

$$u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (1.2.16)$$

**Momenti dell'intensità** Tutti gli oggetti ricavati sono stati estrapolati con la forma:

$$\int I_\nu \cos^n \theta d\Omega. \quad (1.2.17)$$

Questi sono detti i momenti di ordine (0,1,2) dell'intensità specifica  $I_\nu$ , riguardando quanto fatto sopra possiamo notare che i tre esempi che abbiamo fatto sono:

- $u_\nu$  : momento di ordine 0 di  $I_\nu$ .
- $F_\nu$  : momento di ordine 1 di  $I_\nu$ .
- $P_\nu$  : momento di ordine 2 di  $I_\nu$ .

Quindi data la forma funzionale della intensità specifica <sup>7</sup> possiamo possiamo ricavare tutti i momenti della quantità stessa. L'utilità di questi momenti è che possono isolare e rendere applicabili informazioni utili sul sistema.

## 1.2.2 Propagazione di un fascio nel vuoto.

Vogliamo vedere che cosa succede all'intensità specifica di un fascio che si propaga nel vuoto.

Abbiamo visto che il flusso di un fascio che si propaga nel vuoto scala come  $R^{-2}$ , quindi il flusso della sorgente è sempre più debole mano a mano che la sorgente si allontana.

Per l'intensità specifica invece si ha che visivamente resta costante: mentre l'auto si allontana ci sembra che il suo brillare non cambi. Vediamo se si può dimostrare questo fatto, consideriamo il seguente caso:

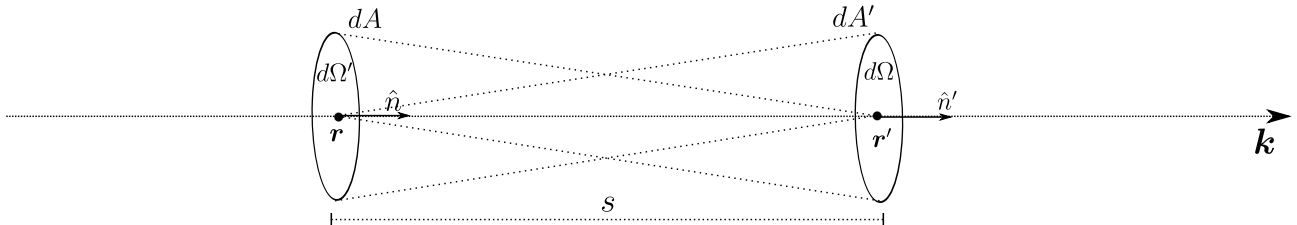


Figura 1.11: Sistema in cui osservo la radiazione da una sorgente.

Il fascio si propaga nella direzione  $\mathbf{k}$  e noi vogliamo sapere come cambia  $I_\nu$  lungo questa direzione, per questo prendiamo due punti lungo  $\mathbf{k}$  che in figura chiamiamo  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$  e valutiamo la brillantezza in tali punti: cerchiamo

<sup>6</sup>che sono la cosa che approssima meglio il corpo nero dopo l'universo stesso.

<sup>7</sup>vedremo che basta l'equazione per quest'ultima, che si chiamerà equazione del trasporto.

la quantità di radiazione che attraversa le aree infinitesime associate ai due punti  $dA$  e  $dA'$ . Ipotizziamo infatti che la sorgente si nella parte destra della figura, allora la luce proveniente da  $dA$  che arriva alla posizione  $\mathbf{r}'$  è quella sottesa all'angolo solido  $d\Omega'$ , d'altra parte la luce che arriva a  $\mathbf{r}$  e che passa poi dall'area  $dA'$  è senza dubbio quella sottesa all'angolo solido  $d\Omega$ . Per farlo sfruttiamo gli angoli solidi costruiti in Figura 1.11. Gli angoli solidi costruiti in figura possono essere scritti come:

$$d\Omega = dA' \frac{\hat{n}' \cdot \hat{k}}{s^2}. \quad (1.2.18)$$

$$d\Omega' = dA \frac{\hat{n} \cdot \hat{k}'}{s^2}. \quad (1.2.19)$$

E l'energia trasportata dalla radiazione elettromagnetica nei due casi è, per definizione:

$$dE' = I_\nu \left( \hat{k}', t', \mathbf{r}' \right) \hat{k}' \cdot \hat{n}' dt d\Omega d\nu dA' \quad (1.2.20)$$

$$dE = I_\nu \left( \hat{k}, t, \mathbf{r} \right) \hat{k} \cdot \hat{n} dt d\Omega' d\nu dA. \quad (1.2.21)$$

Se la radiazione si propaga nel vuoto allora l'energia si deve conservare, quindi  $dE = dE'$ . Quindi inserendo anche gli angoli solidi ricavati sopra si ottiene un risultato importante:

$$I_\nu \left( \mathbf{r}, t, \hat{k} \right) = I_\nu \left( \mathbf{r}', t, \hat{k}' \right). \quad (1.2.22)$$

La conservazione della brillantezza. Possiamo allora scrivere la legge di conservazione per questa quantità nel vuoto:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = 0. \quad (1.2.23)$$

in coordinate cartesiane la legge si scrive:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial I_\nu}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = k_x \frac{\partial I_\nu}{\partial x} + k_y \frac{\partial I_\nu}{\partial y} + k_z \frac{\partial I_\nu}{\partial z}. \quad (1.2.24)$$

Questo entra in conflitto con il fatto che il flusso scala come  $R^{-2}$ ? No, perchè l'intensità specifica è un flusso per unità di angolo solido.

Prendiamo una sorgente luminosa che siamo in grado di risolvere (vedo la forma geometrica), ipotizziamo che la sorgente si allontana da noi, la sorgente risulterà sempre più piccola <sup>8</sup>.

Tuttavia, finché riusciamo a risolverlo il faro risulterà brillante allo stesso modo. Questo perchè è vero che il flusso diminuisce come  $R^{-2}$  ma è anche vero che l'angolo solido si riduce della stessa quantità  $R^{-2}$ , quindi resta invariata la quantità  $I_\nu$ . Possiamo quindi affermare che la brillantezza si conserva lungo il raggio.

Se vogliamo, questa è la controparte macroscopica di un fatto microscopico: se un fotone viaggia nel vuoto la probabilità che decada è nulla.

Esempio astronomico: una sorgente che possiamo risolvere sono le galassie. Tuttavia non riusciamo a risolvere per le stelle perchè per noi sono oggetti puntiformi.

Quindi quando vediamo una luce proveniente da una stella noi vediamo la sua diffrazione, non la vera forma. Quindi l'estensione angolare dipende dalla legge di diffrazione.

Quindi non possiamo applicare il ragionamento che abbiamo fatto in precedenza se non siamo in grado di risolvere la sorgente.

**Esempio classico** Supponiamo di avere una sorgente sferica uniformemente brillante: ogni raggio uscente ha la stessa intensità specifica  $I$ :

$$I = \begin{cases} B & \text{Se il raggio interseca la superficie} \\ 0 & \text{Altrimenti} \end{cases}. \quad (1.2.25)$$

---

<sup>8</sup>Ipotizziamo che non ci sia nebbia, in modo da avvicinarci il più possibile ad una situazione di vuoto

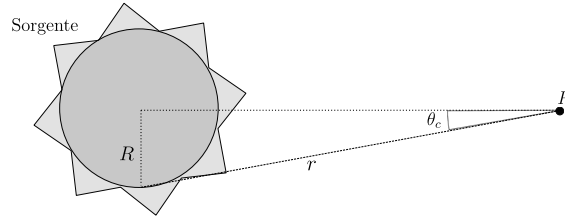


Figura 1.12: Esempio sulla conservazione della brillantezza

Calcoliamo il flusso al punto P <sup>9</sup>:

$$F = \int I \cos \theta d\Omega = \quad (1.2.26)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\theta_c} B \cos \theta \sin \theta d\theta = \quad (1.2.27)$$

$$= 2\pi B \frac{1 - \cos^2 \theta_c}{2} = \quad (1.2.28)$$

$$= \pi B \sin^2 \theta_c = \quad (1.2.29)$$

$$= \pi B \left( \frac{R}{r} \right)^2. \quad (1.2.30)$$

Se abbiamo una sorgente uniformemente brillante e isotropa il flusso che esce alla superficie è dato da:

$$F = \pi B. \quad (1.2.31)$$

Non è zero perchè questo è il flusso uscente, non sull'angolo solido come invece abbiamo visto prima.

### 1.2.3 Propagazione della radiazione in un mezzo

Vogliamo vedere come cambia interagendo con la materia  $I_\nu$ , sicuramente non rimarrà costante perchè la radiazione interagisce con la materia: una parte dei fotoni verranno sottratti al fascio ed altri fotoni verranno immessi nel fascio.

Il nostro obiettivo è quantificare il bilancio tra i primi fenomeni detti Pozzi ed i secondi dette Sorgenti.

L'equazione del trasporto sarà della forma:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \hat{k} \nabla I_\nu = + \{\text{processi di sorgenti}\} - \{\text{Processi di pozzi}\}. \quad (1.2.32)$$

È quindi indispensabile conoscere i meccanismi di interazione tra la radiazione e la materia, la distanza percorsa dal fascio all'interno del mezzo e le condizioni del mezzo stesso.

Non dobbiamo sottovalutare il fatto che i fotoni stessi modificano lo stato del mezzo, quindi i fotoni ed il mezzo possono influenzarsi a vicenda. Per questo l'equazione del trasporto diventa con grande facilità non lineare.

Prendiamo quindi il seguente schema come riferimento:

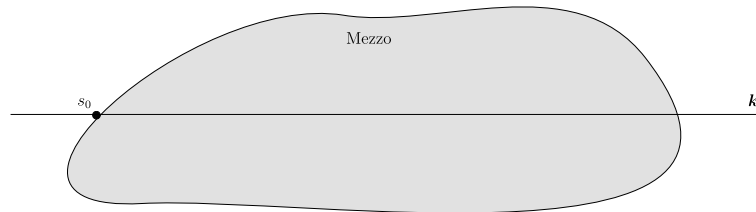


Figura 1.13: Radiazione in un mezzo

Al momento dell'ingresso (alla coordinata  $s_0$ ) la brillantezza vale:  $I_\nu(s_0)$  e sarà uguale a quella della sorgente in tal punto.

<sup>9</sup>Ovvero il flusso sotteso all'angolo solido costruito a partire da P verso la sorgente

**Esempi di processi di emissione o di assorbimento** Potremmo considerare lo scattering tra questi meccanismi, anche se vedremo che questi sono fastidiosi: aggiungono un elemento di non località alla nostra indagine sulla radiazione.

Quest'ultima affermazione può essere giustificata con un esempio: supponiamo di voler visualizzare lo spettro che proviene dalla faccia di una persona all'aperto sotto la luce del sole <sup>10</sup>.

Dall'analisi troverei il doppietto del sodio. Tuttavia è difficile che le condizioni fisiche sulla faccia di una persona sono tali da vedere il doppietto del sodio. Ci si chiede allora come sia possibile vederlo nel volto della persona. La risposta sta nel fatto che la luce che viene dalla faccia è nata sulla superficie del sole, le righe del doppietto del sodio arrivano proprio dalla atmosfera del sole.

Quindi le righe che visualizziamo sono state create in situazioni completamente diverse rispetto alle condizioni fisiche del sistema dalla quale preleviamo la luce (il volto). Questo quindi perchè le proprietà del fotone scatterato contiene informazioni che nella maggior parte dei casi non ci sono utili a studiare il sistema locale che in questo caso è un volto.

Un'altro effetto che produce fotoni è l'emissione da eccitazione, tra poco distingueremo tra i tipi di emissione <sup>11</sup>.

Un processo di assorbimento è invece la fotoionizzazione: il passaggio da un livello energetico ad un livello del continuo.

**Distinzione tra processi di emissione e di assorbimento** Se abbiamo un fotone che incide su un atomo e sparisce senza dare luogo ad un fotone la cui direzione è correlata a quella del fotone incidente allora si dice che è avvenuto un fenomeno di assorbimento.

Se il fotone sparito eccita un atomo può succedere che questo, ad un certo punto, si disecciti. Se l'atomo quando perde l'eccitazione ha perso memoria di quanto gli era successo in precedenza allora avviene una emissione scorrelata, se invece l'atomo si diseccita prima di perdere memoria della eccitazione <sup>12</sup> allora si parla di emissione correlata.

Nei casi di nostro interesse gli urti saranno talmente tanti che possiamo considerare i fotoni generati tutti scorrelati.

Potremmo anche distinguere tra assorbimenti in scattering ed assorbimenti termici, dove i primi gli abbiamo discussi sopra, i secondi invece sono quelli in cui i fotoni vanno ad eccitare il materiale aumentandone la temperatura. Nel caso di assorbimenti termici il nostro raggio va a trasferire energia al mezzo, cambiandone le condizioni fisiche.

## 1.2.4 Equazione del trasporto: processi di interazione radiazione materia

**Emissione** Consideriamo adesso i processi di emissione e prendiamo un elementino di volume  $dV$  contenuto nel mezzo:

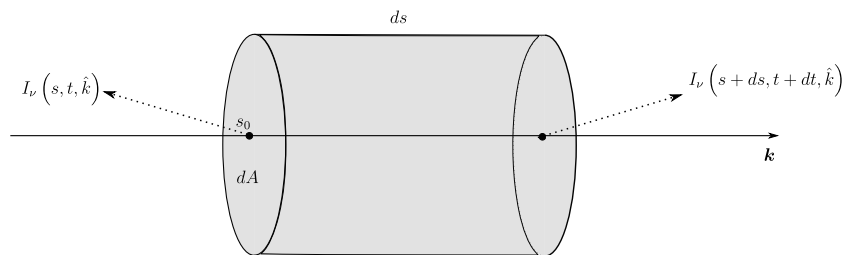


Figura 1.14: Elemento di volume del mezzo

Secondo la notazione in figura si ha che:  $dV = ds \cdot dA$ .

Definiamo il coefficiente di emissione monocromatico  $j_\nu$  tale che la quantità di energia che viene messa dal mezzo di volume  $dV$  nell'intervallo di tempo  $dt$  e nell'angolo solido  $d\Omega$  è data da:

$$dE = j_\nu dV dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.33)$$

Questi sono coefficienti macroscopici, per calcolarli dovremmo fare il conto di tutti i processi microscopici ed inserirli nel conto. Quindi dal punto di vista della fisica è un termine pesantissimo da trovare.

<sup>10</sup>Di fatto significa prendere la luce riflessa sulla faccia della persona

<sup>11</sup>Che a seconda della situazione possono comportarsi da pozzi o da sorgenti

<sup>12</sup>Quindi prima di urtare altri atomi, ad esempio.

Le unità di questo oggetto sono:  $[j_\nu] = [\text{erg}] \cdot [\text{cm}]^3 \cdot [\text{s}]^{-1} \cdot [\text{sterad}]^{-1} \cdot [\text{Hz}^{-1}]$ . Vediamo come viene modificato il mezzo dall'emissione dovuta a questo termine, ovvero dall'emissione del mezzo. Facciamo riferimento alla Figura 1.14.

Possiamo scrivere la quantità di energia che esce dal volumetto  $dV$  :

$$dE_{\text{out}} = I_\nu \left( s + ds, t + dt, \hat{k} \right) dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.34)$$

mentre nel punto di ingresso avremo

$$dE_{\text{in}} = I_\nu \left( s, t, \hat{k} \right) dA dt d\Omega d\nu. \quad (1.2.35)$$

La differenza tra le due sarà l'energia prodotta nei processi di emissione per la conservazione di energia.

$$dE_{\text{out}} - dE_{\text{in}} = \left( I_\nu \left( s + ds, t + dt, \hat{k} \right) - I_\nu \left( s, t, \hat{k} \right) \right) dt \cdot dA \cdot d\Omega \cdot d\nu = \quad (1.2.36)$$

$$= \left[ \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] ds \cdot dA \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu \quad (1.2.37)$$

$$. \quad (1.2.38)$$

In cui abbiamo sostituito la variazione quadridimensionale di  $I_\nu$  nell'ultimo passaggio, adesso ricordando che questa differenza di energia deve essere uguale alla energia emessa possiamo imporre l'uguaglianza:

$$\left[ \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] ds \cdot dA \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu = j_\nu dA \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu. \quad (1.2.39)$$

Quindi se il mezzo è stazionario allora si ha che  $\frac{\partial I_\nu}{\partial t} = 0$ , quindi abbiamo che:

$$j_\nu = \frac{\partial I_\nu}{\partial s}. \quad (1.2.40)$$

Il termine trovato ci dice come cambia l'intensità specifica nel mezzo. Quindi se c'è soltanto emissione ci aspettiamo che l'intensità specifica aumenti perchè in tal caso  $j_\nu$  è positivo.

**Assorbimento** Possiamo definire l'assorbimento in modo analogo al caso precedente, per quest'ultimo però è necessario inserire l'intensità specifica in ingresso.

Infatti l'emissione può esistere in presenza o in assenza del campo di radiazione, l'assorbimento no.

Il coefficiente di assorbimento vero  $\alpha_\nu$  è definito a partire dalla quantità di energia sottratta per assorbimento:

$$dE = \alpha_\nu I_\nu dA \cdot ds \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu. \quad (1.2.41)$$

Questo coefficiente ha le dimensioni  $[m]^{-1}$ , l'inverso di questa quantità è il cammino libero medio monocromatico nel mezzo per la radiazione.

Quindi facendo i conti come in precedenza di arriva a:

$$\left[ \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] = -\alpha_\nu I_\nu. \quad (1.2.42)$$

Il segno è dovuto al fatto che adesso l'energia che entra è maggiore dell'energia che esce, quindi abbiamo inserito un segno negativo.

Quindi la convenzione è che  $\alpha_\nu$  è positivo <sup>13</sup>. Quindi se c'è solo assorbimento vero il raggio si affievolisce nel passaggio attraverso il mezzo, come ci si potrebbe aspettare.

**Scattering** Per quanto riguarda i pozzi si ha lo scattering per cui i fotoni uscenti sono incoerenti con la radiazione entrante, come spiegato sopra. Per questo fenomeno si introduce un coefficiente  $-\alpha_\nu^{\text{scatt}}$  moltiplicato per  $I_\nu$ .

Per i pozzi invece abbiamo da considerare il fatto che il fotone uscente dallo scattering potrebbe essere emesso in tutte le direzioni, sarà necessario introdurre l'integrale di tutti i fotoni che si stanno muovendo lungo una qualunque direzione ( $\hat{k}'$ ) e che vengono scatterati nella direzione del fascio  $\hat{k}$  integrando su tutto l'angolo solido:

$$\alpha_\nu^{\text{scatt}} \int \phi \left( \hat{k}, \hat{k}' \right) I_\nu \left( \hat{k}' \right) d\Omega. \quad (1.2.43)$$

Dove  $\phi \left( \hat{k}, \hat{k}' \right)$  è la densità di probabilità che un fotone venga emesso nella direzione  $\hat{k}$ .

<sup>13</sup>Siccome esistono anche i processi di emissione stimolata essi verranno considerati nel termine di assorbimento come correzioni di ordine maggiore di segno negativo, per questo puntualizziamo la convenzione sul segno.



### Equazione finale con tutti i termini

$$\left[ \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} \right] = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \alpha_\nu^{\text{scatt}} I_\nu + \alpha_\nu^{\text{scatt}} \int \phi(\hat{k}, \hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega. \quad (1.2.44)$$

Abbiamo quindi una equazione integro differenziale molto complicata da risolvere. L'incognita da calcolare è l'intensità specifica.

In realtà la faccenda è ancora più complessa: i coefficienti di solito nemmeno si conoscono! Per tutte le specie atomiche e per tutti i livelli di ciascuna bisognerebbe calcolare le probabilità dei singoli processi.

### 1.3 Lezione 3

27-02-2020

Per completare il quadro dei coefficienti dobbiamo aggiungere, nel caso dell'emissione isotropa si usa il coefficiente di emissività  $\epsilon_\nu$ . Il coefficiente di emissività è l'analogo del coefficiente di emissione per unità di massa.

Nel caso di radiazione isotropa il legame tra questo coefficiente ed il coefficiente di emissione può essere espresso mediante la seguente:

$$j_\nu = \frac{\epsilon_\nu \rho}{4\pi}. \quad (1.3.1)$$

Quindi in tal caso possiamo esprimere la variazione di energia come:

$$dE = j_\nu dV dt d\Omega d\nu = \epsilon_\nu \rho dV dt \frac{d\Omega}{4\pi} d\nu. \quad (1.3.2)$$

Inoltre abbiamo la sezione d'urto  $\sigma_\nu$  delle particelle che assorbono fotoni, possiamo dimostrare che questa è legato a  $\alpha_\nu$ . Prendiamo il volumetto di materiale attraversato:

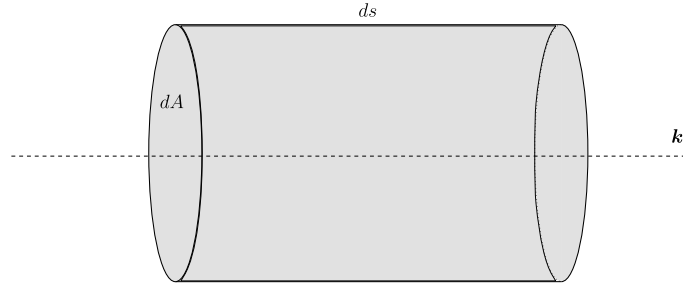


Figura 1.15: Elemento infinitesimo di materiale attraversato.

Abbiamo già definito la quantità di energia sottratta al fascio dal materiale:

$$dE = \alpha_\nu I_\nu dV dt d\Omega d\nu. \quad (1.3.3)$$

Immaginiamo che il nostro mezzo sia costituito da particelle tutte uguali e tutte in grado di assorbire la radiazione, supponiamo che la sezione d'urto di assorbimento di ogni particella sia  $\sigma_\nu$ . Le particelle per unità di volume saranno:  $dN = n dV = n dA ds$ . Nelle ipotesi in cui il gas sia sufficientemente rarefatto:

$$\sqrt{\sigma_\nu} \ll d. \quad (1.3.4)$$

Con  $d$  distanza tra le particelle. Possiamo immaginare che le particelle del gas non si occultino l'una con l'altra, quindi la superficie assorbente complessiva sarà la somma di tutte le sezioni d'urto di ogni singola particella. Essendo le particelle tutte uguali otteniamo che  $dA' = \sigma_\nu dN = \sigma_\nu dA ds$ .

Abbiamo detto che un fotone viene assorbito su  $\sigma_\nu$ , allora nel volumetto i fotoni che vengono assorbiti sono solo quelli che incidono sulla superficie  $dA'$ . L'energia che viene sottratta al fascio dal materiale sarà quella che incide su questa superficie  $dA'$  e visto che l'energia che attraversa tale superficie può sempre essere espressa tramite:

$$dE_{\text{sott}} = I_\nu dA' dt d\Omega d\nu. \quad (1.3.5)$$

Possiamo eguagliare questa all'energia persa per assorbimento:

$$dE = \alpha_\nu dN dt d\Omega d\nu. \quad (1.3.6)$$

ottenendo la legge:

$$\alpha_\nu = n \sigma_\nu. \quad (1.3.7)$$

Un'altra quantità utilizzata è l'opacità radiativa  $k_\nu$ , questa è legata ad  $\alpha_n$  tramite:  $\alpha_\nu = k_\nu \cdot \rho$ . Questa quantità è una sezione d'urto per unità di massa, calcolarla è molto difficile.

Torniamo adesso alla quantità  $j_\nu$ , con questa valutiamo la quantità di radiazione che viene immessa nel fascio grazie a processi di emissione e non di scattering.

Quando un atomo viene eccitato può diseccitarsi in due modi:

- Emissione spontanea
- Emissione indotta

Quindi in generale dovremmo scrivere due contributi alla  $j_\nu$ :

$$j_\nu = j_\nu^{\text{spont}} + j_\nu^{\text{ind}}. \quad (1.3.8)$$

Nel caso di emissione spontanea, nel riferimento di quiete dell'atomo, l'emissione è isotropa. Inoltre in questo caso l'emissione è indipendente dalla radiazione incidente che può, di fatto, non esserci.

Viceversa l'emissione indotta ha bisogno della radiazione per avvenire, se sull'atomo eccitato arriva un fotone avente energia esattamente uguale all'energia di transizione di livello allora l'atomo si diseccita e libera un fotone. Il fotone emesso ha le stesse caratteristiche del fotone incidente: stessa direzione e stessa frequenza.

Mentre l'emissione spontanea è indipendente dal campo di radiazione l'emissione indotta non è indipendente dal campo di radiazione.

Quindi di solito teniamo nell'equazione di trasporto solo il coefficiente dovuto all'emissione spontanea all'interno di  $j_\nu$ , il termine di emissione stimolata invece lo si scarica all'interno di  $\alpha$  come termine negativo. In questo modo si crea un coefficiente di assorbimento corretto per l'emissione stimolata.

Quindi il coefficiente di assorbimento complessivo può essere positivo o negativo a seconda del processo prevalente: se prevale l'assorbimento il coefficiente darà globalmente positivo (affievolendo il fascio), se il coefficiente è negativo allora prevale l'emissione stimolata ed il fascio verrà amplificato.

Un esempio in cui il fascio viene amplificato per emissione stimolata sono sicuramente i laser, mentre in natura esistono oggetti chiamati Maser: sorgenti di emissione nelle microonde che si creano nelle nubi stellari, le condizioni per avere un Maser si verificano soltanto nella prima fase di vita e nell'ultima di una stella.

Per poter trattare l'equazione del trasporto siamo costretti a fare alcune semplificazioni. La prima è che noi considereremo sempre situazioni stazionarie, di conseguenza l'equazione diventa:

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \alpha_\nu^{\text{scatt}} I_\nu + \alpha_\nu^{\text{scatt}} \int \phi(\hat{k}, \hat{k}') I_\nu(\hat{k}') d\Omega. \quad (1.3.9)$$

Inoltre per adesso abbandoniamo lo scattering, lo riprenderemo più avanti nel corso.

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu - \alpha_\nu^{\text{scatt}} I_\nu. \quad (1.3.10)$$

**Esempio: Mezzo in grado di emettere ma non di assorbire** In questo caso abbiamo  $\alpha_\nu = 0$ , quindi l'equazione diventa:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = j_\nu. \quad (1.3.11)$$

Integrando in  $s$  otteniamo:

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) + \int_{s_0}^s j_\nu(s') ds' > I_\nu(s_0). \quad (1.3.12)$$

**Esempio: Mezzo in grado di assorbire ma non di emettere** Al contrario del caso precedente qui abbiamo  $j_\nu = 0$ , da cui:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu. \quad (1.3.13)$$

Quindi

$$\frac{dI_\nu}{I_\nu} = -\alpha_\nu ds. \quad (1.3.14)$$

$$I_\nu(s) = I_\nu(s_0) \exp \left[ - \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' \right]. \quad (1.3.15)$$

In questo caso l'intensità della radiazione sorgente viene attenuata o incrementata a seconda del segno di  $\alpha_\nu$ . Notiamo inoltre che l'esponente dell'ultima relazione è adimensionale, possiamo definirla come profondità ottica  $\tau_\nu$ . Tale grandezza segue la relazione:

$$d\tau_\nu = \alpha_\nu ds. \quad (1.3.16)$$

Vedremo che tramite questo coefficiente si semplificherà moltissimo l'equazione del trasporto.

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds'. \quad (1.3.17)$$

Dato un mezzo con una certa dimensione caratteristica  $L$  la profondità ottica potrà essere molto diversa al variare della frequenza.

Il mezzo considerato potrà essere otticamente sottile per certe frequenze mentre potrà essere spesso per altre frequenze.

Viceversa se vogliamo "vedere" un mezzo con una certa profondità ottica allora l'oggetto avrà spessori ottici differenti al variare di  $\nu$ .

Tale quantità ha a che fare con il grado di trasparenza del mezzo. Posso esprimere quindi la soluzione dell'ultimo esempio in termini di  $\tau_\nu$  :

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(s_0) e^{-\tau_\nu}. \quad (1.3.18)$$

Se un mezzo è otticamente sottile si ha che:  $\tau_\nu \ll 1$ , quindi :

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(0). \quad (1.3.19)$$

Che significa che la radiazione arriva è la stessa della sorgente, quindi il mezzo si può considerare otticamente trasparente.

Viceversa se un mezzo è otticamente spesso  $\tau_\nu \gg 1$ :

$$I_\nu \approx 0. \quad (1.3.20)$$

Quindi in questo caso il mezzo è opaco, non riusciamo più a vedere la luce proveniente dalla sorgente.

Facciamo una piccola digressione sui livelli energetici dell'idrogeno prima di continuare la nostra trattazione.

### 1.3.1 Serie dell'atomo di idrogeno

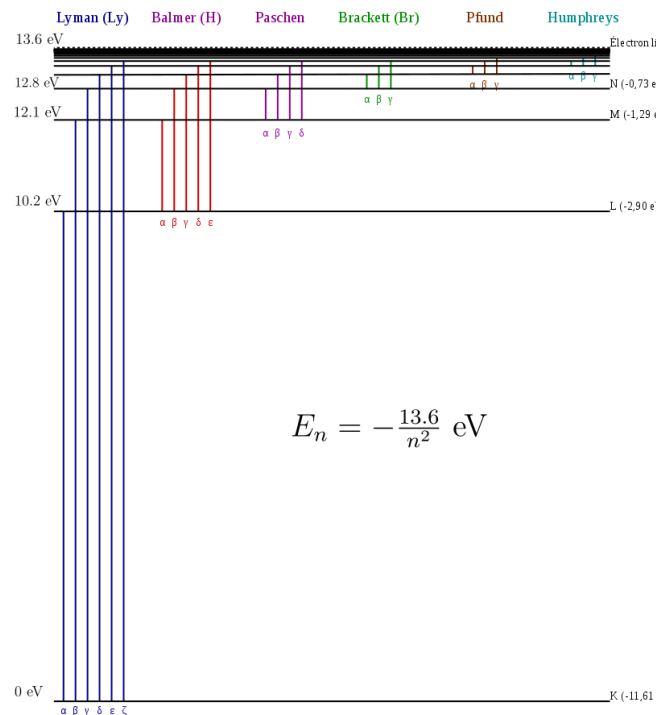


Figura 1.16: Serie spettrale dell'idrogeno

I livelli dell'atomo di idrogeno prendono la forma della Figura 1.16, possiamo notare diverse serie di energie che descrivono i livelli, ognuna avente il suo nome caratteristico.

Se mettiamo per comodità lo zero dell'energia sullo stato fondamentale abbiamo che i livelli energetici seguono la serie scritta in Figura 1.16.

Immaginiamo di voler far avvenire una transizione energetica dell'elettrone nell'idrogeno, a seconda del livello di partenza l'energia necessaria seguirà una determinata serie:

$$n = 1 \rightarrow m \geq 2 \implies \text{Assorbimento da Lyman} \quad (1.3.21)$$

$$n = 2 \rightarrow m \geq 3 \implies \text{Assorbimento da Balmer} \quad (1.3.22)$$

$$\dots \quad (1.3.23)$$

Il passaggio invece "dall'alto al basso" sarà l'emissione nelle varie serie.

Per la Lyman  $\alpha$  ad esempio si ha che, se si emette o si assorbe un fotone dal primo stato eccitato al fondamentale (o viceversa) si ha che:

$$n = 1 \longleftrightarrow n = 2 \quad E_{L_{\gamma\alpha}} = 10.2 \text{ eV} \quad \lambda = 1216\text{\AA}. \quad (1.3.24)$$

Mentre per la Lyman  $\beta$ :

$$n = 1 \longleftrightarrow n = 3 \quad E_{L_{\gamma\beta}} = 12.1 \text{ eV} \quad \lambda = 1020\text{\AA}. \quad (1.3.25)$$

E così via fino al salto di Lyman

$$n = 1 \longleftrightarrow n = \infty \quad E_{L_{\infty}} = 13.6 \text{ eV} \quad \lambda = 912\text{\AA}. \quad (1.3.26)$$

Vediamo che questa serie è tutta nell'ultravioletto, questo è importante e dobbiamo tenerlo a mente.

Un'altra serie importante è la Balmer:

$$n = 2 \longleftrightarrow n = 3 \quad E_{H_{\alpha}} = 1.9 \text{ eV} \quad \lambda = 6563\text{\AA}. \quad (1.3.27)$$

E così via fino al salto di Balmer:

$$n = 2 \longleftrightarrow n = \infty \quad E_{H_{\infty}} = 3.5 \text{ eV} \quad \lambda = 3646\text{\AA}. \quad (1.3.28)$$

È utile notare che la serie di Balmer parte dal rosso e arriva all'ultravioletto con il salto, quindi gran parte della serie sta nel visibile, quindi quelle di Balmer sono le righe che possiamo vedere tecnicamente anche ad occhio nudo.

### 1.3.2 Radiazione attraverso una nube interstellare

Ipotizziamo che il mezzo sia una nube di mezzo interstellare composta da idrogeno. La temperatura della nube è quella tipica di queste nubi:  $T \approx 100 \text{ K}$ . Spariamo sulla nube due fasci aventi energie diverse:

$$L_{\gamma,\alpha} \quad (1.3.29)$$

$$H_{\alpha}. \quad (1.3.30)$$

Ci chiediamo adesso se la nube sarà trasparente oppure opaca ai fasci inviati.

Se l'atomo di idrogeno si trova nello stato fondamentale allora il fotone dell' $H_{\alpha}$  non può essere assorbito, non ha l'energia per fare il salto, quindi tutti gli atomi di idrogeno sono invisibili per un fotone della  $H_{\alpha}$ .

Il fotone della  $L_{\gamma,\alpha}$  invece ha l'esatta energia per effettuare il salto, quindi viene assorbito.

È quindi importante capire se ci sono e quanti sono gli atomi nel primo eccitato, perchè se ci sono allora  $H_{\alpha}$  viene assorbito avendo l'esatta energia per permettere il salto.

Per capire se  $H_{\alpha}$  viene assorbito dalla nube è necessario capire in che stato si trovano gli atomi della nube.

Procediamo quindi assumendo che la nube sia all'equilibrio termodinamico e cerchiamo il rapporto tra gli atomi del primo eccitato e quello fondamentale con la distribuzione di Boltzmann:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} \exp\left(-\frac{\Delta E_{1,2}}{kT}\right). \quad (1.3.31)$$

Le  $g$  sono le degenerazioni dell'atomo di idrogeno (i pesi statistici):  $g_n = 2n^2$  mentre  $n_2$  è il numero di atomi di idrogeno che si trovano nel primo eccitato,  $n_1$  è il numero di quelli che si trovano nel fondamentale.

Abbiamo che  $g_2 = 8$ ,  $g_1 = 2$ ,  $\Delta E_{1,2} = 10.2 \text{ eV}$ ,  $kT = \frac{1}{120} \text{ eV}$ <sup>14</sup>.

$$\frac{n_2}{n_1} = 4 \exp\left(-\frac{10.2}{1/120}\right) = 4 \exp(-1224) = 4 \cdot 10^{-1224/2.3} \approx 10^{-532}. \quad (1.3.32)$$

Dove abbiamo usato il fattore di conversione tra esponenziali nelle due basi.

Abbiamo un atomo nell'eccitato ogni  $10^{532}$  atomi nel fondamentale. Bisogna capire quanti atomi ha la nube per dire se il numero di atomi che si trovano effettivamente nel primo eccitato non è trascurabile.

Per risolvere la questione basta però notare che  $10^{532}$  sono troppi atomi persino per l'universo stesso!

<sup>14</sup>Per ricordare questa si può ricordare che a temperatura ambiente  $kT = \frac{1}{40} \text{ eV}$ , quindi si ricava anche alla nostra temperatura. Sulla superficie del sole, con temperature dell'ordine di 6000 K, sarà circa mezzo eV (emissione nel visibile). Nel centro del sole invece, con circa 16 milioni di K, si ha  $kT \approx 1 \text{ keV}$  (emissione nell'X).

**Stima del numero di atomi nell'universo** La massa del sole è  $2 \cdot 10^{33}$  g, la massa dell'idrogeno  $M_H = 1.66 \cdot 10^{-24}$  g quindi il numero di atomi nel sole sarà dell'ordine di  $n_{\odot} = 10^{57}$ , nella galassia ci sono circa  $10^{11}$  stelle, quindi il numero di particelle idrogenoidi nella galassia potrebbe essere dell'ordine di  $n_{galassia} \approx 10^{68}$ . Visto che ci sono nell'universo visibile abbiamo circa  $10^{11}$  galassie, quindi in tutto nell'universo visibile possiamo stimare circa  $n_{universo} \approx 10^{80}$  atomi. Un numero incredibilmente più piccolo di quello trovato da noi sopra.

Tornando all'esercizio possiamo stare molto tranquilli sul fatto che nella nube non ci saranno idrogeni nel primo eccitato, saranno tutti nel fondamentale, quindi la nube è otticamente sottile al fascio  $H_{\alpha}$  anche se fosse estesa per milioni di chilometri.

Viceversa i fotoni della  $L_{\alpha}$  verranno assorbiti, la nube sarà opaca a questi fotoni.

Questo ci anticipa anche che se in un mezzo come quello sopra gli atomi si eccitano (tipicamente per collisioni) e si diseccitano successivamente nella  $H_{\alpha}$  allora i fotoni emessi usciranno dal mezzo indisturbati portando con se dell'energia. Questo è una tecnica di raffreddamento per il mezzo stesso che può perdere energia per collisioni e successiva emissione.

Inoltre se andiamo sul sito dell'hubble space telescope e cerchiamo le regioni di formazione stellare  $H_2$  vediamo delle regioni di un colore rossastro, questo è proprio  $H_{\alpha}$  che, con i suoi 6563 Å esce dalla nube per arrivare alla lente di Hubble.



Figura 1.17: Immagine di una nebulosa nel visibile (modificata per accentuare la nitidezza).

### 1.3.3 Soluzione analitica all'equazione del trasporto stazionaria.

Abbiamo visto che l'espressione dell'equazione del trasporto in condizioni stazionarie si riduce a:

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = j_{\nu} - \alpha_{\nu}I_{\nu}. \quad (1.3.33)$$

Vogliamo fare un cambio di variabile, anzichè studiarla rispetto alla variabile  $s$  la vogliamo rispetto alla profondità ottica  $\tau_{\nu}$ .

$$\frac{dI_{\nu}}{ds} = \frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} \frac{d\tau_{\nu}}{ds} = \frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} \alpha_{\nu} = j_{\nu} - \alpha_{\nu}I_{\nu}. \quad (1.3.34)$$

L'equazione modificata diventa:

$$\frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} = \frac{j_{\nu}}{\alpha_{\nu}} - I_{\nu}. \quad (1.3.35)$$

Possiamo allora definire il primo termine dopo l'uguale come:

#### Definizione 3.1: Funzione sorgente

Il rapporto tra il coefficiente di emissione ed il coefficiente di assorbimento è detto funzione sorgente  $s_{\nu}$ :

$$s_{\nu} = \frac{j_{\nu}}{\alpha_{\nu}}. \quad (1.3.36)$$

L'equazione del trasporto con questo termine è ovviamente:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = s_\nu - I_\nu. \quad (1.3.37)$$

Possiamo notare inoltre che

$$s_\nu < I_\nu \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} < 0. \quad (1.3.38)$$

In questo modo l'intensità del fascio viene attenuata nell'attraversare la nube. Viceversa:

$$s_\nu > I_\nu \implies \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} > 0. \quad (1.3.39)$$

Quindi il fascio viene amplificato nel passaggio.

Proviamo a risolvere formalmente l'equazione:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} e^{\tau_\nu} = s_\nu e^{\tau_\nu} - I_\nu e^{\tau_\nu}. \quad (1.3.40)$$

Quindi possiamo raggruppare:

$$\frac{d}{d\tau_\nu} (I_\nu e^{\tau_\nu}) = s_\nu e^{\tau_\nu}. \quad (1.3.41)$$

e integriamo tra 0 e  $\tau_\nu$ :

$$\int_0^{\tau_\nu} \frac{d}{d\tau'_\nu} (I_{\tau'_\nu} e^{\tau'_\nu}) d\tau'_\nu = \int_0^{\tau_\nu} s(\tau'_\nu) e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu. \quad (1.3.42)$$

integrando il primo termine ottiene:

$$I_\nu(\tau_\nu) e^{\tau_\nu} - I_\nu(0) = \int_0^{\tau_\nu} s_\nu(\tau'_\nu) e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu. \quad (1.3.43)$$

Se dividiamo tutto per  $e^{\tau_\nu}$  abbiamo la legge per  $I_\nu(\tau_\nu)$ .

**Fatto 3.1: Soluzione formale all'equazione del trasporto**

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} - \int_0^{\tau_\nu} \delta_\nu(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu. \quad (1.3.44)$$

Il primo termine è la luce della sorgente estinta esponenzialmente dal mezzo a causa dell'assorbimento. Il secondo termine contiene il significato fisico di due distinti effetti: l'effetto dell'emissione di fotoni del fascio nei vari punti del mezzo ( $s_\nu$ ) e l'effetto dell'assorbimento incluso nel termine esponenziale.

Innanzitutto il termine  $\tau_\nu - \tau'_\nu$  sta ad indicare l'assorbimento dei fotoni che sono stati emessi dal mezzo.

Anche se abbiamo la soluzione generale resta il fatto che  $s_\nu$  è incognita, anche se conoscessimo l'espressione analitica di  $s_\nu$  non saremo comunque in grado di calcolare l'integrale poichè non conosciamo le condizioni fisiche (pressione, temperatura ...) del mezzo <sup>15</sup>.

**Esempio: mezzo omogeneo.** Se il mezzo è omogeneo per tutta la sua estensione si mantengono costanti le sue proprietà fisiche. Di conseguenza avremo che  $\alpha_\nu$  e  $j_\nu$  saranno uguali ovunque e la funzione sorgente sarà anch'essa una costante:

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + s_\nu e^{-\tau_\nu} \int_0^{\tau_\nu} e^{\tau'_\nu} d\tau'_\nu = I_\nu(0) e^{-\tau_\nu} + s_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.3.45)$$

Possiamo iniziare ad intuire il significato fisico della funzione sorgente: se il nostro fascio attraversa un mezzo otticamente profondo ( $\tau_\nu \rightarrow \infty$ ) allora abbiamo che  $I_\nu(\tau_\nu) \rightarrow s_\nu$ . Allora la funzione sorgente è la grandezza fisica a cui tende l'intensità della radiazione se questa attraversa una regione otticamente spessa. Quindi ciò che succede al fascio in questo caso è una totale sostituzione dei fotoni provenienti dalla sorgente con i fotoni emessi all'interno del mezzo come in Figura 1.18

<sup>15</sup>dalle quali ricordiamo dipendere  $\tau_\nu$

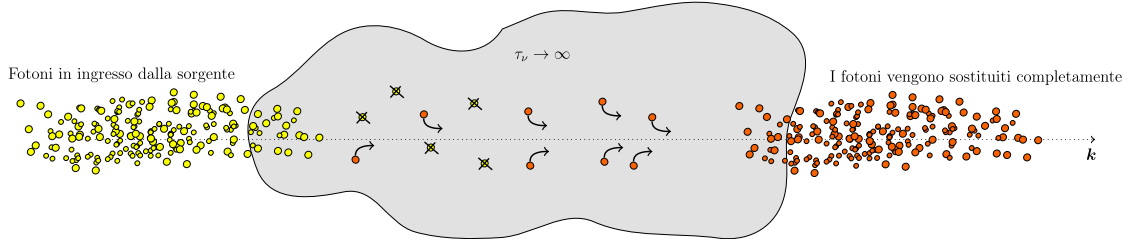


Figura 1.18: Sostituzione dei fotoni in un mezzo otticamente spesso.

Man mano che la radiazione si propaga i fotoni del fascio perderanno le caratteristiche della radiazione sorgente ed acquisteranno invece la firma del mezzo.

Notiamo che questo non è soltanto un processo astrofisico, questo avviene anche quando guardiamo delle montagne lontane che ci appaiono celestine come il cielo:

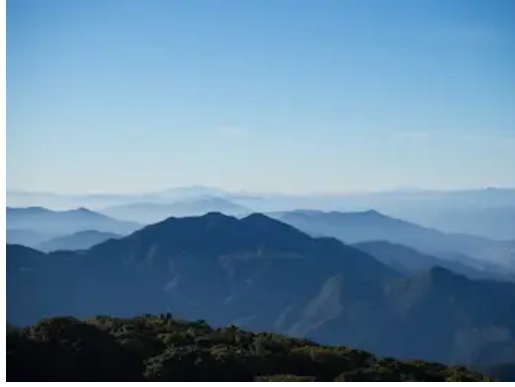


Figura 1.19: Montagne lontane che acquistano il colore del cielo fino a dissolversi con esso.

**Esempio: Mezzo omogeneo senza retroilluminazione** In questo caso particolare abbiamo che  $I_\nu(0) = 0$ , l'unica radiazione che vediamo emergere è quella prodotta dal mezzo stesso.

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu (1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.3.46)$$

Consideriamo adesso i casi in cui il mezzo è otticamente sottile o spesso alla radiazione che emerge da lui stesso.

**Mezzo otticamente sottile** Siamo in questa situazione se  $\tau_\nu \ll 1$ , sviluppiamo l'esponenziale:

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu \tau_\nu. \quad (1.3.47)$$

Visto che il mezzo è omogeneo si ha:

$$\tau_\nu = \int_{s_0}^s \alpha_\nu(s') ds' = \alpha_\nu(s - s_0) = \alpha_\nu \cdot L. \quad (1.3.48)$$

Quindi abbiamo che:

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu \alpha_\nu \cdot L = j_\nu \cdot L. \quad (1.3.49)$$

Dalla quale emerge l'importante contributo alla radiazione di  $j_\nu$  in questa situazione.

Se il mezzo è costituito da atomi non completamente ionizzati allora sappiamo che la radiazione ha dei picchi in intensità molto marcati in corrispondenza della frequenza di transizione dei livelli, quindi sia il coefficiente di assorbimento  $\alpha_\nu$  che il coefficiente di emissione  $j_\nu$  avranno dei picchi molto marcati in corrispondenza di queste transizioni. Quindi qua ci aspettiamo proprio questo tipo di radiazione proveniente dal "mezzo", molto marcata in corrispondenza della transizione dei livelli delle specie atomiche.

Questa radiazione emergente sarà perciò caratterizzato da delle righe di emissione: uno spettro buio quasi ovunque con delle righe luminose.

Un esempio di questo tipo è un gas rarefatto riscaldato: una lampada al neon. Un esempio nello spazio sono le nebulose. <sup>16</sup>

<sup>16</sup>Nelle stelle invece vedo delle righe di assorbimento miste al continuo

**Mezzo otticamente spesso** Quando scaldiamo un oggetto a temperature elevate inizia ad essere percepibile la sua emissione di radiazione termica, questo passerà in modo continuo dal rosso scuro, poi al giallo, ecc. . .

Prendiamo un mezzo omogeneo non retroilluminato ed otticamente spesso  $\tau_\nu \gg 1$ , in questo limite abbiamo che:

$$I_\nu(\tau_\nu) = s_\nu. \quad (1.3.50)$$

Quindi la radiazione che emerge è uguale alla funzione sorgente, questo è il caso del oggetto riscaldato. Infatti la funzione sorgente è parente della radiazione di corpo nero che è una funzione della temperatura. Quindi in questo caso abbiamo uno spettro continuo.

Nel cosmo oggetti che approssimeranno questa radiazione sono le stelle, non sarà esattamente una radiazione di corpo nero perchè abbiamo delle righe di assorbimento. Studieremo prossimamente da dove vengono queste misteriose righe di assorbimento.

## 1.4 Lezione 4

02-03-2020

### 1.4.1 Scoperta delle righe (di assorbimento e di emissione).

**Storia** Le righe sono state scoperte osservando il sole. Il primo ad osservarle fu Wollaston nel 1802, con la risoluzione che aveva a quei tempi vide 5 intense bande scure e 2 bande scure più deboli. Lui attribuì a tali linee il ruolo di demarcazione tra lo spettro dei colori fondamentali sbagliando alla grande.

Qualche anno dopo Fraunhofer riuscì a vederne tantissime <sup>17</sup>, a quelle più intense diede nomi dalla A alla H (ancora usate) oggi, fu quindi chiaro che queste non potevano essere le linee di demarcazione tra i colori fondamentali.

Fraunhofer si mise allora ad osservare le altre stelle più luminose (come Sirio), scoprendo in larghissimo anticipo che anche queste mostravano delle righe di assorbimento e noto che le righe presenti in sirio non erano le stesse di quelle osservate nel sole.

Sempre lui osservando i pianeti si accorse che questi presentavano le stesse righe presenti nel sole <sup>18</sup>.

Il grande intuito di Fraunhofer non si fermò ancora, egli fu capace di osservare che la linea scura da lui nominata D sembrava coincidere con il doppietto delle righe luminose presenti nelle lampade al sodio.

Oggi Fraunhofer è considerato l'inventore della Spettroscopia astronomica, le sue osservazioni sono tra le più importanti in questo campo scientifico.

Dopo 30 anni Foucault volle verificare la coincidenza della riga di emissione delle lampade al sodio con quella di assorbimento del sole D. Per farlo fece passare la luce del sole attraverso un gas di sodio scaldato e ne misurò lo spettro. Foucault si aspettava che gli effetti di assorbimento e di emissione si compensassero dando luogo ad un continuo di fatto.

Quello che successe invece è che lo spettro della luce del sole che attraversa il gas non solo presentava le righe di assorbimento ma queste risultarono addirittura accentuate. Fece inoltre passare una luce a spettro continuo prodotta con un corpo incandescente attraverso lo stesso il gas di sodio, anche in questo caso vide le righe nere. Per altri dieci anni tutto tace fino all'arrivo di un fisico teorico tedesco: Kirchhoff. Egli riprese gli esperimenti citati sopra e formulò tre famose leggi:

#### Fatto 4.1: Leggi di Kirchhoff

1. Tutti i corpi incandescenti producono uno spettro continuo.
2. Un gas rarefatto caldo emette delle righe di emissione.
3. Preso un gas rarefatto su cui facciamo incidere della radiazione con spettro continuo otteniamo
  - Se la radiazione emessa è meno intensa della radiazione che retroillumina ( $s_\nu < I_\nu(0)$ ): righe di assorbimento.
  - Se la radiazione emessa è più intensa della radiazione che retroillumina ( $s_\nu > I_\nu(0)$ ): righe di emissione.

Nella nostra formulazione la terza legge deriva dalla soluzione all'equazione del trasporto per un mezzo omogeneo nella 1.3.45.

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu} + s_\nu(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.4.1)$$

<sup>17</sup>Inventandosi uno spettroscopio molto preciso.

<sup>18</sup>Adesso sappiamo che questo è dovuto allo scattering della luce solare sulla faccia del pianeta.



Se il mezzo è otticamente sottile questa può essere approssimata:

$$I_\nu(\tau_\nu) \approx I_\nu(0) - \tau_\nu I_\nu(0) + s_\nu \tau_\nu = I_\nu(0) + \tau_\nu(s_\nu - I_\nu(0)). \quad (1.4.2)$$

Quindi oltre al fondo della sorgente si vedono righe di emissione o di assorbimento a seconda del segno del secondo termine <sup>19</sup>.

Ne seguì l'intuizione che un mezzo è in grado di emettere soltanto le frequenze che è anche in grado di assorbire. In questo modo Kirchhoff e Bunzen ricominciarono ad osservare il sole e allo stesso tempo le righe di emissione di alcuni elementi sulla terra capendo che nel sole erano presenti Sodio, Nichel, Ferro, ecc. . .

Si aprì così una finestra allo studio della composizione chimica delle stelle, questa fu una grande smentita per il filosofo Comte che in preda a delirio di prevegenza disse che:

"Of all objects, the planets are those which appear to us under the least varied aspect. We see how we may determine their forms, their distances, their bulk, and their motions, but we can never know anything of their chemical or mineralogical structure; and, much less, that of organized beings living on their surface ..."

Auguste Comte, The Positive Philosophy, Book II, Chapter 1 (1842)

Infatti fu prontamente smentito dai suoi coetanei scienziati <sup>20</sup>.

Abbiamo comunque un importante risultato per la spettroscopia: la presenza di righe di assorbimento di un elemento in uno spettro mi garantisce che nella regione di provenienza di tale spettro vi è l'elemento corrispondente a tali righe.

Si scoprì più avanti che in uno spettro non vi sono soltanto informazioni sulla composizione chimica degli elementi della sorgente: abbiamo anche l'abbondanza dell'elemento rispetto agli altri, le condizioni fisiche dell'atmosfera in cui si forma una riga.

## 1.4.2 Radiazione di corpo nero: proprietà principali.

Prima di ricavare la forma della  $s_\nu$  è necessario ricordare alcuni concetti importanti sul corpo nero.

Kirchhoff dimostrò con la sua prima legge che la radiazione di un corpo all'equilibrio termodinamico ha uno spettro indipendente dalle proprietà fisiche del mezzo stesso.

### Fatto 4.2: Radiazione all'equilibrio termodinamico con la materia

Lo spettro della radiazione all'equilibrio termodinamico con la materia è una funzione universale della temperatura.

Kirchhoff non riuscì a trovare la  $I_\nu$  corrispondente a tale radiazione, ci fu bisogno di Plank che ricavò la radiazione di corpo nero come:

### Definizione 4.1: Radiazione di corpo nero

La radiazione all'equilibrio termodinamico con la materia di un corpo può essere espressa come:

$$I_\nu = B_\nu = \frac{2\hbar}{c^2} \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (1.4.3)$$

Questa è definita come la radiazione di corpo nero.

È necessario ricordare alcune proprietà di questa radiazione. Partiamo dalla forma:

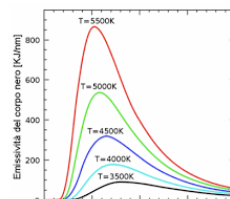


Figura 1.20: Piccola immagine della funzione per vari valori della temperatura.

<sup>19</sup>Di fatto  $s_\nu$  inserisce o rimuove le righe degli atomi che compongono il mezzo rarefatto dallo spettro continuo della radiazione.

<sup>20</sup>Chissà se forse questo sarà il baluardo di ogni genere di Teologia, costretta a riplasmare ogni affermazione fino all'osso a causa dell'inarrestabile potenziamento delle conoscenze umane.

**Legge di spostamento di Wien** Al crescere di  $T$  il picco si sposta verso destra secondo la legge:

$$h\nu_{\max} \propto kT. \quad (1.4.4)$$

In astrofisica conviene riportarla in termini di lunghezza d'onda  $\lambda$ :

$$\lambda_{\max} T = 0.29 [\text{cm}] \cdot [\text{K}]. \quad (1.4.5)$$

Dobbiamo stare attenti al fatto che  $\lambda_{\max}$  non è il massimo della  $B_\nu$ , bensì è il massimo della  $B_\lambda$  è quindi necessario cambiare variabile alla funzione per la radiazione di corpo nero, per farlo basta:

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda. \quad (1.4.6)$$

Per aiutare la memoria nel passaggio tra le due forme possiamo ricordare il caso del sole: la temperatura superficiale del sole è  $T \approx 6000 \text{ K}$ , in questo caso abbiamo che  $\lambda_{\max} \approx 5000 \text{ \AA}$  e quindi abbiamo emissione nel visibile.

**Densità di energia del corpo nero**

$$u_\nu(T) = \int \frac{I_\nu}{c} d\Omega = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T). \quad (1.4.7)$$

Su tutto lo spettro si ha:

$$u = \int u_\nu d\nu = \quad (1.4.8)$$

$$= \int \frac{4\pi}{c} B_\nu(T) d\nu = \quad (1.4.9)$$

$$= \frac{4\pi}{c} \frac{2h}{c^2} \int \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu = \quad (1.4.10)$$

$$= \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} \cdot T^4 = a \cdot T^4. \quad (1.4.11)$$

Dove si è usato l'integrale noto:

$$\int \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}. \quad (1.4.12)$$

### 1.4.3 Temperatura di una stella

Dobbiamo decidere le convenzioni da adottare per la misura della temperatura di una stella. La questione è davvero complessa, la stella è un oggetto dalle caratteristiche non uniformi, basti pensare alla sua densità che varia da qualche frazione inferiore a quella dell'aria a decine di volte quella dell'acqua.

Inoltre per questi oggetti non è nemmeno possibile definire una superficie, quindi dove misuriamo la temperatura? Per concludere il quadro già complesso dobbiamo pensare che l'unica fonte di informazioni a nostra disposizione sono le radiazioni che ci arrivano dalle stelle, quindi dovremmo estrarre l'informazione Temperatura da queste.

**Temperatura di Brillanza.** e misuriamo l'intensità specifica monocromatica di una sorgente  $I_\nu$  possiamo definire la temperatura di Brillanza:

#### Definizione 4.2: Temperatura di brillanza

Data un oggetto avente brillanza  $I_\nu$  la sua temperatura di brillanza  $T_B$  è la temperatura che ha un corpo nero che alla frequenza  $\nu$  emette la stessa intensità specifica  $I_\nu$ .

$$I_\nu = B_\nu(T_B). \quad (1.4.13)$$

Una conseguenza diretta di questa definizione è che la temperatura di un oggetto sarà diversa a seconda della frequenza misurata (anche dello stesso oggetto).

Questa temperatura è molto utile in radio-astronomia, in tal caso siamo nel regime di Rayleigh-Jeans:

$$h\nu \ll kT. \quad (1.4.14)$$

Quindi possiamo espandere la  $I_\nu$  ottenendo:

$$I_\nu = B_\nu(T_B) \approx \frac{2\nu^2}{c^2} kT_B. \quad (1.4.15)$$

A questo punto possiamo ricordare la forma della equazione del trasporto:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = s_\nu - I_\nu. \quad (1.4.16)$$

Prima di procedere è necessario notare che radiazione termica e radiazione di corpo nero sono due cose distinte: la radiazione termica si ha quando l'oggetto che emette è all'equilibrio termodinamico con la radiazione, la radiazione termica diventa quella di corpo nero quando il mezzo che emette diventa otticamente spesso.

#### Fatto 4.3: Legge di Kirchhoff

Per un mezzo all'equilibrio con la sua radiazione termodinamica si ha  $s_\nu = B_\nu$ .

Per dimostrarla mettiamoci all'interno di un corpo nero cavo: la radiazione di corpo nero è omogenea e isotropa, quindi in questo ambiente si ha:

$$\frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = 0. \quad (1.4.17)$$

Quindi si ha che  $s_\nu = I_\nu$ , ma nel caso di corpo nero  $I_\nu = B_\nu$ , quindi si ottiene quanto atteso:  $s_\nu = B_\nu$ . Possiamo quindi riprendere l'utilità della temperatura di brillantezza, prendiamo un oggetto all'equilibrio termodinamico avente temperatura di brillantezza  $T_B$  e temperatura del mezzo  $T$ , sostituiamo tutte le quantità all'interno dell'equazione del trasporto (considerando anche la legge di Kirchhoff):

$$\frac{d}{d\tau_\nu} \left( \frac{2\nu^2}{c^2} kT_B \right) = \frac{2\nu^2}{c^2} kT - \frac{2\nu^2}{c^2} kT_B. \quad (1.4.18)$$

Adesso semplifichiamo tutte le costanti, ci resta una semplice equazione differenziale lineare in  $T_B$ :

$$\frac{dT_B}{d\tau_\nu} = T - T_B. \quad (1.4.19)$$

quindi possiamo risolvere come abbiamo fatto per l'equazione del trasporto:

$$T_B(\tau_\nu) = T_B(0)e^{-\tau_\nu} + \int_0^{\tau_\nu} T(\tau'_\nu) e^{-(\tau_\nu - \tau'_\nu)} d\tau'_\nu. \quad (1.4.20)$$

A questo punto se il mezzo è omogeneo possiamo fare gli stessi passaggi già fatti per ottenere:

$$T_B(\tau_\nu) = T_B(0)e^{-\tau_\nu} + T(1 - e^{-\tau_\nu}). \quad (1.4.21)$$

Quindi se la radiazione emerge da un mezzo spesso si ha che:

$$T_B \approx T. \quad (1.4.22)$$

Per questo nel limite di Rayleigh-Jeans la temperatura di brillantezza è utile, perchè è una ottima approssimazione della temperatura del mezzo.

Nel limite opposto, quindi  $h\nu \gg kT$  si avrà:

$$I_\nu \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (1.4.23)$$

Di conseguenza l'equazione di trasporto smette di essere lineare, quindi il concetto di temperatura di brillantezza non è comodo qui. Ad esempio se si osserva nel  $\gamma$  non si usa la temperatura di brillantezza.

**Temperatura di colore** Quando non si conosce l'intensità specifica ma si conosce lo spettro della radiazione raccolta, ovvero il flusso della radiazione raccolta sulla terra. Questo può essere il caso di un'oggetto di cui non sappiamo le dimensioni e non sappiamo la distanza.

#### Definizione 4.3: Temperatura di colore

Si definisce la temperatura di colore come la temperatura che avrebbe un corpo nero il cui picco si trova nella stessa posizione in frequenza del picco dello spettro che stiamo osservando.

Questa definizione si rifà di fatto all'uso della legge di spostamento di Wien per formulare una previsione sulla temperatura.

**Temperatura effettiva** Questa è la più utilizzata quando parliamo di temperatura superficiale di una stella.

#### Definizione 4.4: Temperatura effettiva

La temperatura effettiva è la temperatura di un corpo nero tale che:

$$\Phi_{\text{corpo nero}} = \Phi_{\text{Osservato}}. \quad (1.4.24)$$

Quindi ci serve di conoscere il flusso intrinseco della radiazione. Ci serviranno per questo la distanza e le dimensioni dell'oggetto.

Vediamo come sono legate l'intensità  $L$  intrinseca della sorgente al raggio dell'oggetto:

Prendiamo una sorgente sferica di raggio  $R$  e di luminosità intrinseca  $L$  abbiamo che

$$F = \frac{L}{4\pi R^2}. \quad (1.4.25)$$

Ma il flusso è anche uguale a:  $F = \sigma T^4$  per la legge di Stephan-Boltzmann. Quindi questo ci permette di definire la temperatura effettiva:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (1.4.26)$$

La temperatura effettiva è legata alla radiazione che emerge da un certo strato della stella, da questo strato vedremo che proviene gran parte della radiazione che osserviamo. Il motivo è che a lunghezze d'onda differenti corrispondono coefficienti di assorbimento differenti, quindi i fotoni scapperanno dalla stella a "profondità diverse".

Lo strato atmosferico da cui proviene gran parte della radiazione è chiamato fotosfera, vedremo che la temperatura effettiva proviene da un certo punto della fotosfera.

### 1.4.4 Cammino libero medio dei fotoni

Abbiamo visto che per un mezzo assorbente  $j_\nu = 0$  abbiamo

$$I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0)e^{-\tau_\nu}. \quad (1.4.27)$$

Ci chiediamo adesso qual'è la probabilità che un fotone di frequenza  $\nu$  riesca ad attraversare nel mezzo una profondità ottica almeno pari a  $\tau_\nu$ . Questa sarà data evidentemente dalla equazione scritta sopra:

$$P_{\text{abs}} = e^{-\tau_\nu}. \quad (1.4.28)$$

Possiamo calcolarci quindi la profondità ottica media:

$$\langle \tau_\nu \rangle = \int_0^\infty \tau_\nu e^{-\tau_\nu} d\tau_\nu = 1. \quad (1.4.29)$$

Se siamo in un mezzo omogeneo abbiamo che  $\tau_\nu = \alpha_\nu l_\nu$ , abbiamo quindi il cammino libero medio, definito come:

#### Definizione 4.5: Cammino libero medio

$$l_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}. \quad (1.4.30)$$

Se il mezzo non è omogeneo si calcola il valore del cammino libero medio che il fotone avrebbe in un mezzo omogeneo con le proprietà fisiche che ha in quel punto.

Vediamo che il cammino libero medio dipende pesantemente dalla frequenza, quindi i fotoni che ci arrivano da una stella arrivano da una corona circolare poichè ogni frequenza avrà cammino libero medio differente <sup>21</sup>.

<sup>21</sup>Ad esempio le frequenze nei pressi di una riga di assorbimento saranno emesse più in superficie.

### 1.4.5 Equilibrio termodinamico locale

È possibile utilizzare il concetto di cammino libero medio per definire il concetto di equilibrio termodinamico locale. Infatti se la temperatura in un corpo resta costante su scale dell'ordine del cammino libero medio allora la deviazione dalla condizione di equilibrio termodinamico sarà piccola ed avrà senso parlare di equilibrio termodinamico locale (LTE).

Spesso ci capiterà di metterci in situazioni di LTE poichè sono molto comuni in mezzi che studieremo nel cosmo. Ad esempio all'interno della stella abbiamo in genere un cammino libero medio microscopico, quindi qui avrà senso porci in condizioni di LTE, sulla superficie esterna di una stella invece no.

Quindi in una regione di LTE è possibile assumere che le particelle abbiano distribuzione di velocità secondo Maxwell, gli atomi abbiano popolazioni dei livelli secondo Boltzmann e vale la legge di Kirchhoff.

## 1.5 Lezione 5

09-03-2020

### 1.5.1 Atmosfera a piani paralleli.

In oggetti come le stelle è spesso comodo studiare la struttura "strato per strato", il modello di atmosfere a piani paralleli consiste nel considerare una atmosfera

- divisa a strati paralleli l'uno tra l'altro
- ambienti privi di curvatura

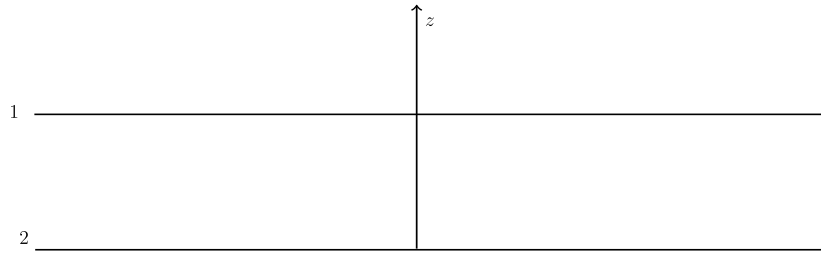


Figura 1.21: Atmosfera a piani paralleli

Per poter fare tale approssimazione è necessario che se chiamiamo la distanza tra uno strato e l'altro  $d$  ed il raggio della stella  $R$ :

$$d \ll R. \quad (1.5.1)$$

Il vantaggio di questo modello è dovuto all'invarianza sotto rotazioni attorno a  $z$ , questo ci permette di semplificare moltissimo la scrittura di  $I_\nu(\mathbf{r}, t, \mathbf{k})$ . Infatti questo dipenderà soltanto da  $z$  per le coordinate spaziali, per il vettore d'onda invece avremo soltanto la dipendenza da  $\theta$ :

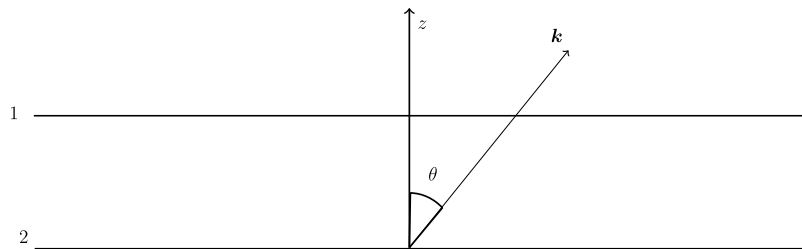


Figura 1.22: Dipendenza da theta per l'intensità specifica

Notiamo che con questo modello anche le quantità come Pressione, Temperatura, Densità saranno soltanto funzione di  $z$ .

Di conseguenza otterremo che  $I_\nu = I_\nu(z, \theta)$ <sup>22</sup>. Vedremo che sarà molto utile adottare la convenzione:

$$\cos \theta = \mu. \quad (1.5.2)$$

<sup>22</sup>Assumendo implicitamente le condizioni stazionarie.

Ipotizziamo che  $s$  sia il versore relativo alla direzione di propagazione del fascio, possiamo scrivere l'equazione del trasporto come:

$$\frac{dI}{ds} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu. \quad (1.5.3)$$

Tuttavia nel modello delle atmosfere a piani paralleli conviene studiare questa equazione per la propagazione lungo  $z$  anzichè lungo  $s$ , cambiamo quindi variabile:

$$dz = ds \cos \theta. \quad (1.5.4)$$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = j_\nu - \alpha_\nu I_\nu. \quad (1.5.5)$$

Prendiamo adesso per convenzione il centro della stella nella direzione opposta a quella indicata dall'asse  $z$  e ridefiniamo la profondità ottica assumendola crescente andando verso l'interno (quindi di verso opposto a  $z$ ). A questo scopo quindi definiamo  $\tau_\nu$  come:

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu dz. \quad (1.5.6)$$

Riscriviamo allora l'equazione del trasporto come:

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = -s_\nu + I_\nu. \quad (1.5.7)$$

Visto che  $s_\nu = j_\nu / \alpha_\nu$ .

Il nostro obbiettivo è adesso quello di risolvere questa equazione del trasporto nella variabile  $\mu$ . Moltiplichiamo a destra e sinistra per  $\exp(-\tau_\nu/\mu)$  e portiamo a sinistra i termini contenenti  $I_\nu$ :

$$\left( \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} - I_\nu \right) e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} = -s_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}. \quad (1.5.8)$$

Notiamo che il termine a sinistra è proprio una derivata:

$$\mu \frac{d}{d\tau_\nu} \left( I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} \right) = -s_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}. \quad (1.5.9)$$

Integriamo da una profondità ottica  $\tau_{\nu,0}$  di partenza fino a  $\tau_\nu$  a destra e sinistra:

$$\int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} \mu \frac{d}{d\tau'_\nu} \left( I_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} \right) d\tau'_\nu = - \int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} s_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu. \quad (1.5.10)$$

Quindi risolvendo il primo integrale:

$$\mu I_\nu(\tau'_\nu, \mu) e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} \Big|_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} = - \int_{\tau_{\nu,0}}^{\tau_\nu} s_\nu e^{-\frac{\tau'_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu. \quad (1.5.11)$$

Possiamo adesso distinguere due distinte situazioni che decreteranno i diversi valori di  $\tau_{\nu,0}$ :

1. Raggi entranti nell'atmosfera dall'esterno.
2. Fasci uscenti dall'atmosfera dall'esterno.

**Raggi uscenti dall'atmosfera** Partiamo dal primo caso, questo corrisponde a

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \implies 0 < \mu < 1. \quad (1.5.12)$$

Quindi siamo in una condizione in cui si passa da una zona otticamente spessa (il centro della stella) ad una zona otticamente sottile, per questo nel caso corrente avremo  $\tau_{\nu,0} = \infty$ . Questo semplifica molto la soluzione all'equazione del trasporto, infatti resta:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = - \int_{\infty}^{\tau_\nu} \frac{s_\nu(\tau'_\nu)}{\mu} e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu. \quad (1.5.13)$$

**Raggi entranti.** Per considerare i raggi entranti in atmosfera adottiamo la convenzione per cui  $\tau_\nu = 0$  sul "bordo esterno" di quest'ultima, con la consapevolezza che non c'è effettivamente un bordo esterno. Secondo la nostra notazione siamo nell'intervallo:

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \implies -1 < \mu < 0. \quad (1.5.14)$$

Notiamo che se esternamente niente irradia allora per i raggi entranti avremo che  $I_\nu(\tau_\nu = 0) = 0$ , questo è il caso ad esempio di una stella solitaria.

Possiamo adesso fare l'assunzione di essere in una atmosfera in LTE, in questo modo pur non conoscendo il profilo di temperatura della stella  $T(\tau_\nu)$  siamo in grado di ricavare molte utili informazioni su quest'ultima. Inanzitutto con l'equilibrio termodinamico locale abbiamo per la legge di Kirchhoff

$$s_\nu(\tau_\nu) = B_\nu(\tau_\nu). \quad (1.5.15)$$

Quindi possiamo cercare di ricavare  $I_\nu(\tau_\nu, \mu)$  risolvendo l'integrale della 1.5.11 nelle varie situazioni. All'interno di tale formula abbiamo un integrale della funzione  $s(\tau'_\nu)$ , con  $\tau'_\nu$  che può variare in un intervallo tale da farci venire dei dubbi sulla corretta applicabilità della LTE. Per correggere questo fatto possiamo considerare la correzione al primo ordine per  $s(\tau_\nu)$ :

$$s(\tau'_\nu) \approx B_\nu(\tau_\nu) + (\tau'_\nu - \tau_\nu) \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \dots \quad (1.5.16)$$

Ipotizziamo quindi adesso che sia sufficiente la prima correzione e vediamo cosa succede nel caso di **Raggi uscenti**.

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \int_{-\infty}^{\tau_\nu} \left[ B_\nu(\tau_\nu) + (\tau'_\nu - \tau_\nu) \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right] e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} d\tau'_\nu = \quad (1.5.17)$$

$$= B_\nu(\tau_\nu) \int_{-\infty}^{\tau_\nu} e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{d\tau'_\nu}{\mu} - \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \int_{-\infty}^{\tau_\nu} (\tau'_\nu - \tau_\nu) e^{-\frac{\tau'_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{d\tau'_\nu}{\mu}. \quad (1.5.18)$$

Risolvendo i due integrali si ottiene:

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.5.19)$$

Otteniamo così una brillantezza che è frutto di due contributi: il primo che è quello di corpo nero a noi già noto, il secondo è una correzione anisotropa che dipende dalla direzione di propagazione. Questo risultato ci dice che nel caso in cui vi è un gradiente di temperatura vi sarà anche una variazione di  $B_\nu(\tau_\nu)$ .

$$\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \neq 0 \leftrightarrow \nabla T \neq 0. \quad (1.5.20)$$

Vediamo adesso se le grandezze introdotte (alcune delle quali erano momenti di vario ordine) sono utili alla soluzione della nostra atmosfera. Ricordiamo che:

$$u_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu. \quad (1.5.21)$$

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu. \quad (1.5.22)$$

$$P_\nu = \int \frac{I_\nu}{c} \cos^2 \theta d\Omega = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu. \quad (1.5.23)$$

$$J_\nu = \int \frac{I_\nu}{4\pi} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \implies u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu. \quad (1.5.24)$$

Cercheremo di sfruttare queste quantità per trarne informazioni sul sistema. Partiamo dalla densità di energia:

$$u_\nu = \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu = \quad (1.5.25)$$

$$= \frac{2\pi}{c} \int_{-1}^1 B_\nu(\tau_\nu) d\mu + \int_{-1}^1 \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} d\mu = \quad (1.5.26)$$

$$= \frac{2\pi}{c} \left[ B_\nu(\tau_\nu) \int_{-1}^1 d\mu + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \int_{-1}^1 \mu d\mu \right] = \quad (1.5.27)$$

$$= \frac{4\pi}{c} B_\nu(\tau_\nu) \quad (1.5.28)$$

Si scopre così che la densità di energia rimane la stessa del caso di corpo nero nonostante la correzione. Proviamo ad effettuare il conto anche per il flusso:

$$F_\nu = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu = \dots = \frac{4\pi}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.5.29)$$

Si scopre quindi che il flusso non è nullo come nel caso di corpo nero, bensì l'anisotropia permette di avere un flusso uscente proporzionale alla variazione di  $B_\nu$  assente nel caso isotropo.

$$F \neq 0 \leftrightarrow \nabla T \neq 0. \quad (1.5.30)$$

Facendo il calcolo anche per  $P_\nu$  si ottiene:

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu). \quad (1.5.31)$$

Coerente con la nota formula:  $P_\nu = u_\nu/3$ .

## 1.5.2 Valutazione della anisotropia.

Possiamo valutare l'anisotropia della nostra sorgente nel seguente modo:

$$\frac{\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}}{B_\nu(\tau_\nu)} = \frac{\frac{3F_\nu}{4\pi}}{\frac{cu_\nu}{4\pi}} = \frac{3}{c} \frac{F_\nu}{u_\nu}. \quad (1.5.32)$$

Visto che vogliamo soltanto una stima qualitativa anziché valutare le quantità monocromatiche valutiamo quelle integrate sulla frequenza:

$$\frac{\frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}}{B_\nu(\tau_\nu)} \approx \frac{3F}{cu} = \frac{3}{c} \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{aT^4} = \frac{3}{4} \left( \frac{T_{\text{eff}}}{T} \right)^4. \quad (1.5.33)$$

Quindi se andando verso l'interno la temperatura  $T$  aumenta mi aspetto che il contributo anisotropo sia sempre minore. Di conseguenza il nostro sviluppo di  $s_\nu$  perde di significato se andiamo in strati atmosferici tali che  $T_{\text{eff}} > T$ .

## 1.5.3 Atmosfera grigia

Anche se stiamo facendo passi avanti non abbiamo ancora trovato il profilo di temperatura, in genere questa è una operazione molto complicata, ci sono corsi appositi.

Il caso che affrontiamo noi è quello semplificato di Atmosfera Grigia:

### Definizione 5.1: Atmosfera grigia

Ambiente avente  $\alpha_\nu$  costante per ogni frequenza.

In questo modo  $\tau_\nu$  non dipende anch'esso dalla frequenza. Possiamo allora integrare tutte le quantità studiate nella frequenza senza problemi.

L'equazione del trasporto diventa:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = -s + I. \quad (1.5.34)$$

Possiamo adesso trovare i momenti dell'equazione del trasporto. Moltiplichiamo a destra e sinistra per  $\frac{1}{2}$  e integriamo in  $\mu$  per l'ordine zero:

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu \frac{\partial I}{\partial \tau} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 s d\mu + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I d\mu. \quad (1.5.35)$$

Portando fuori la derivata dal primo integrale, ricordando la definizione di  $J$  e considerando che  $s$  non dipende dall'angolo di emissione si ottiene:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau} = -s + J. \quad (1.5.36)$$

Se ripetiamo l'operazione con il momento di ordine 1, moltiplicando ambo i membri per  $\frac{2\pi}{c}\mu$  si ottiene:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{F}{c}. \quad (1.5.37)$$

Anche questo è un risultato utile, infatti il flusso è non nullo soltanto se vi è una variazione della pressione radiativa.



## 1.6 Lezione 6

12-03-2020

Procediamo con il conto della scorsa lezione assumendo l'equilibrio radiativo nella nostra atmosfera, ovvero l'assenza di sorgenti e di pozzi in quest'ultima. In questo modo il flusso che arriva al nostro strato dalle profondità dell'atmosfera è conservato e passa oltre, quindi:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0. \quad (1.6.1)$$

In questo modo si ricava dalla 1.5.36 che:

$$J = s. \quad (1.6.2)$$

Quindi l'equazione del trasporto (1.5.34) diventa:

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = -J + I = \quad (1.6.3)$$

$$= I - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau) d\mu. \quad (1.6.4)$$

Quest'ultima è una equazione integro-differenziale in  $I$ , si risolve con dei metodi analitici particolari che vanno fuori dalla portata del corso.

Vediamo allora se studiandone i momenti possiamo far in modo di trovare una soluzione, seppur restringendo ancora il campo della soluzione. Partiamo dal momento di ordine 1:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{F}{c} \quad \xrightarrow{\text{Integro}} \quad P(\tau) = \frac{F}{c} (\tau + q). \quad (1.6.5)$$

Dove  $q$  è una costante di integrazione. Vedremo che trovare questa costante ci permetterà di risolvere l'atmosfera. Abbiamo visto che in caso di LTE e considerando solo la prima correzione alla legge di Kirchhoff continua ad esser valido che:

$$P = \frac{u}{3}. \quad (1.6.6)$$

Questa abbiamo detto esser valida fintanto che il contributo anisotropo è piccolo rispetto a quello isotropo, quindi valido finché non ci spostiamo verso strati esterni della atmosfera, tali che  $T < T_{\text{eff}}$ . Per proseguire con il conto analitico noi facciamo un'altra approssimazione:

### Definizione 6.1: Approssimazione di Eddington

La relazione  $P = u/3$  resta valida in tutta l'atmosfera, nonostante la possibile anisotropia.

Possiamo quindi riassumere tutte le semplificazioni in cui ci siamo posti:

1. Atmosfera a piani paralleli
2. LTE (con correzione anisotropa)
3. Atmosfera grigia
4. Equilibrio radiativo
5. Approssimazione di Eddington

Grazie alla quinta è possibile inoltre affermare che resta vero in tutta l'atmosfera:

$$u = \frac{4\pi}{c} J. \quad (1.6.7)$$

E inoltre vale sempre che  $J = s$ .

Con questa nuova approssimazione possiamo mostrare la dipendenza di  $s$  da  $q$ , infatti usando le ultime due relazioni si ha che:

$$P = \frac{4\pi J}{3c} = \frac{4\pi s}{3c} = \frac{F}{c} (\tau + q). \quad (1.6.8)$$

Quindi:

$$s(\tau) = \frac{3F}{4\pi} (\tau + q). \quad (1.6.9)$$

Possiamo sfruttare questa espressione per la  $s$  all'interno della soluzione che abbiamo trovato per  $I_\nu$  nel caso di raggi uscenti dall'atmosfera ( $0 \leq \mu \leq 1$ ):

$$I(\tau, \mu) = - \int_{\infty}^{\tau} \frac{s(\tau')}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau' - \tau}{\mu}\right) d\tau'. \quad (1.6.10)$$

Supponiamo di voler calcolare la brillantezza nel punto più esterno alla nostra atmosfera, ovvero quello con  $\tau = 0$ , in tal caso avremo:

$$I(0, \mu) = - \int_{\infty}^0 \frac{s(\tau')}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) d\tau'. \quad (1.6.11)$$

E sostituendo a questo punto la nostra  $s$ :

$$I(0, \mu) = - \int_{\infty}^0 \frac{3F}{4\pi} (\tau' + q) \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) d\tau' = \quad (1.6.12)$$

$$= - \frac{3F}{4\pi} \left[ \int_{\infty}^0 \tau' \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu} + q \int_{\infty}^0 \exp\left(-\frac{\tau'}{\mu}\right) \frac{d\tau'}{\mu} \right] = \quad (1.6.13)$$

$$= \frac{3F}{4\pi} (\mu + q). \quad (1.6.14)$$

Un trucchetto che possiamo fare adesso è quello di trovare  $F_{\text{out}}$  (uscente) in funzione di  $I$ , vedremo che facendo ciò il flusso si semplificherà permettendoci di ricavare  $q$ :

$$F_{\text{out}} = 2\pi \int_{-1}^1 I \mu d\mu = \quad (1.6.15)$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 \frac{3F}{4\pi} (\mu + q) \mu d\mu = \frac{3F}{2} \left[ \int_0^1 \mu^2 d\mu + \int_0^1 \mu d\mu \right] = \quad (1.6.16)$$

$$= \frac{3F_{\text{out}}}{2} \left[ \frac{1}{3} + \frac{q}{2} \right]. \quad (1.6.17)$$

Quindi semplificando il flusso si ha:

$$q = \frac{2}{3}. \quad (1.6.18)$$

E inserendolo in  $s(\tau)$  e in  $I_\nu(0, \mu)$ :

$$s(\tau) = \frac{3F}{4\pi} \left( \tau + \frac{2}{3} \right) \quad I(0, \mu) = \frac{3F}{4\pi} \left( \mu + \frac{2}{3} \right). \quad (1.6.19)$$

Con queste informazioni possiamo per la prima volta trovare il profilo di temperatura per la nostra stella:

$$s = \frac{c}{4\pi} u = \frac{3F}{\pi} \left( \tau + \frac{2}{3} \right) \implies cu = 3F \left( \tau + \frac{2}{3} \right). \quad (1.6.20)$$

Ricordando che in LTE si ha anche  $u = aT^4$ ,  $F = \sigma T^4$ :

$$caT^4 = 3\sigma T_{\text{eff}}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right) \implies (T(\tau))^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left( \tau + \frac{2}{3} \right). \quad (1.6.21)$$

Notiamo nel nostro profilo che la temperatura efficace si ha per  $\tau = \frac{2}{3}$ .

### 1.6.1 Limb Darkening

Possiamo inoltre osservare un altro fenomeno interessante, infatti si ha che, all'aumentare dell'inclinazione  $\mu$  diminuisce l'intensità uscente  $I(0, \mu)$ , questo da luogo al fatto che, per una sorgente che possiamo risolvere otticamente, la zona più interna risulterà più brillante della zona esterna.

Per convincerci del fatto che vi è un fenomeno del genere possiamo ragionare in termini di cammino libero medio  $\tau$ :

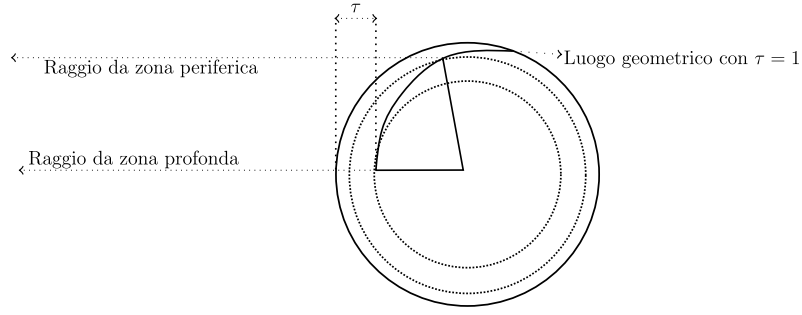


Figura 1.23: Fenomeno di Limb Darkening

Abbiamo visto che i fotoni che riescono ad emergere hanno cammino libero medio unitario, quindi hanno anche  $\tau = 1$ .

Ponendo un osservatore a sinistra in Figura 1.23 possiamo notare che, andando verso l'esterno del disco la condizione  $\tau = 1$  è rispettata in zone sempre più superficiali. Se abbiamo che vale (quasi) la fisica del corpo nero per la stella e se la temperatura aumenta verso l'interno questo significa che raggi più profondi hanno anche intensità maggiore, quindi il centro del disco sarà più luminoso. Ecco spiegato il fenomeno del Limb Darkening in modo intuitivo.

Possiamo vedere questo effetto nel sole:



Figura 1.24: Limb Darkening nel disco del sole.

In cui con le stesse motivazioni (corpo nero) si può spiegare anche l'effetto cromatico che, andando verso l'esterno si passa da giallo a rosso.

Concludiamo valutando l'intensità al centro su quella al bordo:

$$\frac{I(0,0)}{I(0,1)} = \frac{2F/4\pi}{5F/4\pi} = \frac{2}{5}. \quad (1.6.22)$$

A conferma di quanto detto finora.

### 1.6.2 Righe nello spettro stellare

Possiamo adesso spiegare perchè nello spettro solare si possono trovare delle righe di assorbimento osservando dalla terra, abbandoniamo il modello di atmosfera grigia e torniamo a considerare le frequenze:

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = -s_\nu + I_\nu. \quad (1.6.23)$$

I momenti della equazione sono gli stessi di prima, soltanto che adesso son monocromatici. Manteniamo l'ipotesi di equilibrio radiativo  $F = cost$ , considerando però il fatto che questo non significa che il flusso monocromatico  $F_\nu$  sia costante, solo che il totale è conservato. Quindi abbiamo che il flusso totale resta costante ma sarà ridistribuito tra le varie frequenze.

La radiazione che emerge dalla superficie può essere (qualitativamente) corretta con il primo ordine:

$$I_\nu(0, \mu) \approx B_\nu(0) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.6.24)$$

Concentriamoci sulla radiazione proveniente dal centro del disco  $\mu = 1$ :

$$I_\nu(0, 1) \approx B_\nu(0) + \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \approx B_\nu(\tau_\nu = 1). \quad (1.6.25)$$

Abbiamo ottenuto un risultato congruo con quanto visto sopra per il Darkening: dal centro del disco ci arrivano principalmente fotoni che si sono formati a  $\tau_\nu = 1$ , infatti ci arriva una radiazione di corpo nero corrispondente a  $B_\nu(\tau_\nu = 1)$ .

Prendiamo adesso un coefficiente di assorbimento fatto in questo modo:

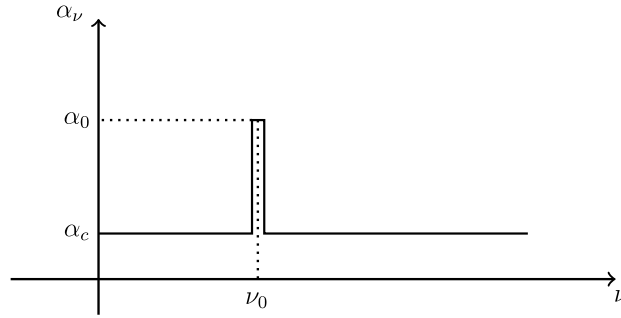


Figura 1.25: Coefficiente di assorbimento per una riga

Con questo coefficiente di assorbimento ci aspettiamo una riga, infatti abbiamo visto che il coefficiente di assorbimento ha le dimensioni di un inverso di una lunghezza, abbiamo anche visto che questo decreta il cammino libero medio dei fotoni a tale frequenza  $l_\nu$ :

$$\alpha_0 > \alpha_c. \quad (1.6.26)$$

$$l_0 = \frac{1}{\alpha_0} < l_c = \frac{1}{\alpha_c}. \quad (1.6.27)$$

Quindi il cammino libero medio nell'intervallo di frequenze della riga sarà minore di quello nel continuo, questo spiega il motivo della presenza di righe di assorbimento. Infatti nella atmosfera stellare abbiamo visto essere presente un gradiente di temperatura (la temperatura aumenta andando verso l'interno), i fotoni che formano il continuo provengono da zone più profonde della atmosfera (in cui la temperatura è  $T_c$ ), quelli della riga da zone più superficiali (in cui vi è  $T_0$ ).

$$T_0 < T_c. \quad (1.6.28)$$

Quindi se è vero che l'intensità proveniente dalla stella segue un andamento tipico di un corpo nero alla profondità ottica  $\tau_\nu = 1$  ed è anche vero che le curve  $B(\tau_\nu)$  non si intersecano mai:

$$I_0 \approx B_0(T_0) < I_c \approx B_c(T_c). \quad (1.6.29)$$

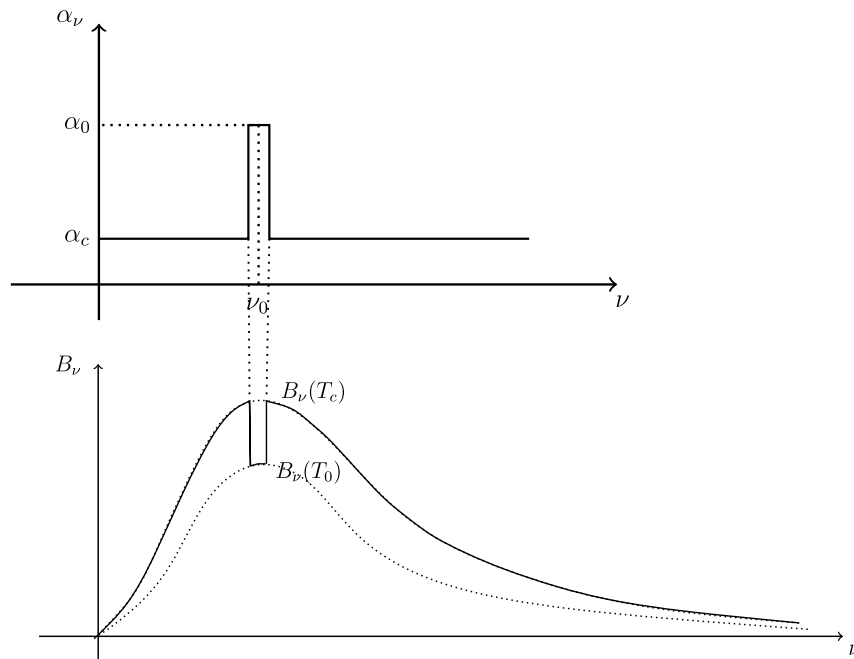


Figura 1.26: Riga di assorbimento

Quindi vediamo una intensità minore per le frequenze in cui  $\alpha_\nu$  è "alto", viceversa sono più intense le frequenze per cui  $\alpha_\nu$  è basso. Per questo motivo vediamo delle righe di assorbimento.

## 1.7 Lezione 7

16-03-2020

### 1.7.1 Studio delle righe di assorbimento

**Informazioni che ci arrivano dalle righe.**

L'identificazione delle righe negli spettri stellari è molto importante, infatti dalla conoscenza della lunghezza d'onda centrale della riga possiamo conoscere:

- L'atomo che le ha causate assorbendo fotoni.
- Lo stato energetico dell'atomo (perchè una data lunghezza d'onda corrisponde ad una determinata transizione energetica).
- Lo stato di ionizzazione dell'atomo: atomi dello stesso elemento chimico ma in stati di ionizzazione differenti hanno livelli energetici differenti e quindi transizioni differenti.
- La temperatura dell'atmosfera di quell'elemento: il popolamento dei livelli energetici associati alla transizione incriminata dipenderà dalla temperatura.
- La densità di quell'elemento nella atmosfera.

Naturalmente le ultime due informazioni citate, che riguardano la condizione fisica della atmosfera in cui l'atomo è immerso, riguardano esclusivamente la fotosfera della stella se facciamo osservazione nel visibile.

Un'altro parametro che può darci molte informazioni è la larghezza della riga, vediamo un esempio di riga nello spettro per avere un pò di nomenclatura di riferimento:

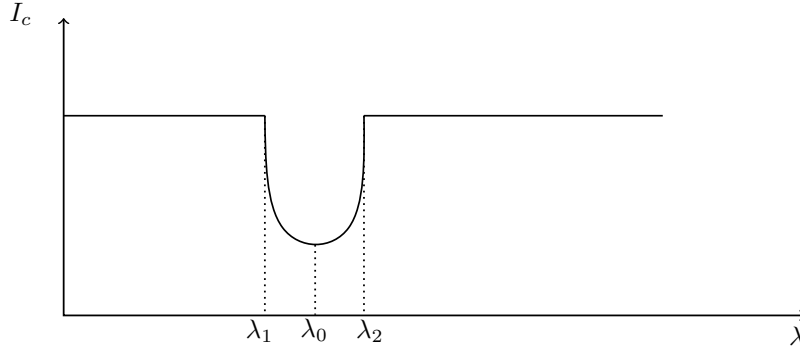


Figura 1.27: Riga di assorbimento generica nello spettro.

### Allargamento di una riga.

Dobbiamo trovare un indicatore che misuri l'intensità della riga rispetto al continuo adiacente. La quantità di energia che viene sottratta al continuo in questo caso è l'area della conca in Figura 1.27. Questa area è chiamata area equivalente:

#### Definizione 7.1: Area equivalente di una riga $A(\lambda)$

Data una riga come in Figura 1.27 l'area equivalente della riga è definita come:

$$A(\lambda_0) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (I_c - I_\lambda) d\lambda. \quad (1.7.1)$$

Questo parametro è molto importante, infatti decide se saremo in grado di studiare tale riga oppure no: se la riga è troppo sottile può succedere che non si possa risolvere con lo strumento utilizzato per la misura, analogamente se abbiamo righe troppo larghe potremmo non essere in grado di distinguerle dal continuo. Possiamo allora mettere in evidenza quest'ultima affermazione definendo il parametro di larghezza equivalente come:

#### Definizione 7.2: Larghezza equivalente $W(\lambda)$

La larghezza equivalente è l'Area equivalente normalizzata sull'intensità del continuo:

$$W(\lambda_0) = \frac{A(\lambda_0)}{I_c} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda. \quad (1.7.2)$$

### Spessore minimo di una riga

Il minimo spessore che una riga può avere è quella naturale, quella dovuta al decadimento spontaneo.

Prendiamo un atomo a due livelli, la probabilità che l'atomo si disecciti dal secondo livello al primo spontaneamente è proporzionale al coefficiente di Einstein  $A_{2,1}$ . Quindi la vita media sarà:

$$\Delta t = \frac{1}{A_{2,1}}. \quad (1.7.3)$$

Ma dal principio di indeterminazione sappiamo che:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (1.7.4)$$

Essendo  $\Delta t$  finito ci dobbiamo aspettare un allargamento della riga che possiamo quantificare come:

$$\Delta \nu = \frac{\gamma_{\text{rad}}}{2\pi}. \quad (1.7.5)$$

con  $\gamma_{\text{rad}} = 1/\Delta t$ , è chiamato Radiative Dumping Costant (RCT).

Nello specifico abbiamo che il profilo della emissione spontanea è dato da una Lorentziana:

$$\phi(\mu) = \frac{\gamma_{\text{rad}}}{2\pi} \frac{1}{(\mu - \mu_0)^2 + \left(\frac{\gamma_{\text{rad}}}{4\pi}\right)^2}. \quad (1.7.6)$$

Per atomi con più livelli di eccitazione il parametro RCT si generalizza nel seguente modo:

$$\gamma_{\text{rad}} = \sum_l^{\infty} A_{kl} \quad k > l. \quad (1.7.7)$$

Le larghezze naturale delle righe tipicamente è dell'ordine di del millesimo dell' Å. Tuttavia quando si guarda uno spettro la larghezza che otteniamo è in genere molto maggiore, di fatto la larghezza naturale è trascurabile. Il motivo è che nelle atmosfere delle stelle ci sono altri processi di allargamento della riga aventi un contributo decisamente più importante dell'allargamento naturale.

### 1.7.2 Processi di allargamento delle righe

I principali processi di allargamento dello spettro delle righe sono:

- Allargamento termico.
- Allargamento collisionale (detto allargamento per pressione), questo cresce con l'aumento della densità dell'atmosfera.
- Allargamento per via di campi elettrici o magnetici.
- Allargamento rotazionale, questo per via del fatto che non risolviamo la stella e vi è comunque un effetto Doppler.

#### Allargamento termico.

Concentriamoci solo sulla velocità radiale degli atomi  $v_r$ : quella che sta sulla linea della direzione di vista. La distribuzione di questa all'equilibrio termodinamico locale sarà:

$$dn(v_r) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_r^2}{2kT}\right) dv_r. \quad (1.7.8)$$

con  $n$  è il numero di atomi per unità di volume dell'elemento interessato,  $m$  la sua massa. Applichiamo adesso l'effetto Doppler alla frequenza:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_r}{c}\right). \quad (1.7.9)$$

Abbiamo adottato la formula non relativistica dell'effetto Doppler, questo perchè alle temperature stellari gli atomi non si muovono abbastanza veloce da esser considerati relativistici. Facciamo un esempio: per l'idrogeno a 10000 K la velocità termica abbiamo:

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \sim \sqrt{\frac{2 \text{ eV}}{1 \text{ GeV}/c^2}} \sim \sqrt{20} \cdot 10^{-4} c \sim 13 \text{ km/s}. \quad (1.7.10)$$

Osserviamo che per come abbiamo scritto la legge dell'effetto Doppler si ha un blue shift quando  $v_r > 0$ . Lo shift sarà dato da:

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v_r}{c}. \quad (1.7.11)$$

Utilizziamo quest'ultima per ricavarci la distribuzione in frequenza. Procediamo con il cambio di variabile:

$$v_r = \frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0) \implies dv_r = \frac{c}{\nu_0} d\nu. \quad (1.7.12)$$

Sostituendo quindi per la distribuzione in frequenza:

$$dn(\nu) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2\nu_0^2 kT} (\nu - \nu_0)^2\right) \frac{c}{\nu_0} d\nu. \quad (1.7.13)$$

Quindi il profilo di riga diventerà, a causa della agitazione termica:

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}\right). \quad (1.7.14)$$

Con

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (1.7.15)$$

Questo è un profilo di tipo Gaussiano con  $\Delta\nu_D$  che è detto allargamento Doppler. Questa larghezza cresce al crescere di  $T$  e decresce al crescere di  $m$ .

A causa dei moti convettivi abbiamo anche un allargamento di riga per turbolenza, anche questo tipo di allargamento avrà un profilo Gaussiano, soltanto che non sarà dipendente dalla temperatura bensì dalla velocità di turbolenza.

Per tenerne di conto si definisce la seguente quantità

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{\text{turb.}}^2}. \quad (1.7.16)$$

Il profilo della riga viene spesso espresso in termini di lunghezza d'onda, possiamo farlo effettuando il cambio di variabile, basta notare che:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \approx -\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}. \quad (1.7.17)$$

allora si ottiene facilmente che:

$$\phi = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT \lambda_0^2}} \exp\left(-\frac{mc^2 (\lambda - \lambda_0)^2}{2kT \lambda_0^2}\right). \quad (1.7.18)$$

Possiamo definire anche le quantità più importanti di questo profilo:

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} \lambda_0. \quad (1.7.19)$$

$$FWHM = \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{mc^2}} \lambda_0. \quad (1.7.20)$$

### Allargamento per collisioni.

In questo caso l'allargamento dipende dalla frequenza con cui avvengono le collisioni:

$$\nu_{\text{coll}} = n\sigma_{\text{coll}}v_{\text{coll}}. \quad (1.7.21)$$

Il profilo che si ottiene dalle collisioni è di tipo Lorentziano (come per l'emissione spontanea), si introduce quindi una larghezza effettiva  $\Gamma = \gamma_{\text{rad}} + 2\nu_{\text{coll}}$ , quindi:

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{1}{(\nu - \nu_0) + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2}. \quad (1.7.22)$$

Nelle atmosfere stellari sono presenti tutti gli effetti citati sopra. Comunamente la zona centrale è dominata dall'allargamento Doppler, nelle code prevale l'effetto della Lorentziana.

Ci dobbiamo aspettare che nelle atmosfere rarefatte l'allargamento collisionale sia piccolo, e viceversa nelle atmosfere dense sarà importante. In questo modo si distinguono le stelle giganti da quelle nane.

### 1.7.3 Magnitudine

La magnitudine è una misura della luminosità apparente di una stella, nata da Ipparco nel 2° secolo AC. La catalogazione di Ipparco in 6 classi di magnitudine è ancora usata oggi, con l'aggiunta di un pò di matematica moderna.

Le caratteristiche della catalogazione di Ipparco erano:

1. Ordine decrescente di luminosità.
2. Variazione di luminosità costante tra le 6 classi di luminosità.

A rendere matematica questa classificazione è stato Pogson, egli utilizzò le seguenti considerazioni:

- La sensibilità dell'occhio è logaritmica
- Le stelle appartenenti alla sesta classe sono 100 volte meno luminose di quelle di classe uno.

Supponiamo di avere due stelle di luminosità apparenti  $l_1$  e  $l_2$ , siano  $m_1$  e  $m_2$  le magnitudini apparenti di tali stelle. Per quanto assunto sopra avremo che:

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{1}{100}\right)^{(m_1 - m_2)/5} = 10^{-2/5(m_1 - m_2)}. \quad (1.7.23)$$

Passando ai logaritmi:

$$\log\left(\frac{l_1}{l_2}\right) = -\frac{2}{5}(m_1 - m_2). \quad (1.7.24)$$

La definizione moderna di magnitudine è quindi la seguente:



### Definizione 7.3: Magnitudine

Si definisce magnitudine  $m_1$  di una stella relativa alla magnitudine di un'altra stella di riferimento  $m_2$ :

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{l_1}{l_2}. \quad (1.7.25)$$

Dove  $l_1$  e  $l_2$  sono le luminosità apparenti relative alle due stelle.

### Stelle di riferimento: misure relative di intensità

Il modo utile di utilizzare la magnitudine è quello di scegliere una stella come riferimento con magnitudine  $m_0$  per poter catalogare in maniera relativa tutte le altre stelle.

Se vogliamo ad esempio osservare la magnitudine della stella  $m_*$  allora abbiamo:

$$m_* - m_0 = -2.5 \log \left( \frac{l_*}{l_0} \right). \quad (1.7.26)$$

Molti sistemi fotometrici usano come riferimento Vega, tra i quali anche il telescopio spaziale Hubble <sup>23</sup>. Andiamo nel dettaglio sui sistemi di osservazione.

### Parametri di correzione per sistemi fotometrici.

I limiti di osservazione di un sistema fotometrico sono:

1. Non è mai possibile osservare l'intero spettro di emissione della sorgente.
2. La sensibilità dello strumento nell'intervallo di frequenze che è possibile misurare non è costante.

Per ovviare al fatto che non siamo in grado di conoscere il flusso di energia per unità di tempo e superficie  $f(\lambda)$  possiamo introdurre dei parametri di correzione che tengono conto dei limiti della strumentazione e delle modifiche che il mezzo apporta alla sorgente.

Immaginiamo di poter osservare in un range di lunghezze d'onda da  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ , immaginiamo inoltre che  $f(\lambda)$  sia il flusso della sorgente prima di entrare in atmosfera, la luminosità che si riesce ad osservare sarà data da:

$$l = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda) T(\lambda) d\lambda. \quad (1.7.27)$$

Il termine correttivo  $T(\lambda)$  tiene conto di diversi effetti:

$$T(\lambda) = R(\lambda) K(\lambda) Q(\lambda) A(\lambda). \quad (1.7.28)$$

Andiamo a vedere qual'è il ruolo di ciascuno di questi:

1.  $R(\lambda)$ : Riflettività. Questa è legata alle ottiche dello strumento.
2.  $K(\lambda)$ : Correzione alla risposta cromatica del filtro.
3.  $Q(\lambda)$ : Efficienza quantica del rilevatore. Il rilevatore ha una risposta che dipende da  $\lambda$ .
4.  $A(\lambda)$ : Correzione sulla trasmissione in atmosfera terrestre.

In conclusione possiamo riscrivere la magnitudine tenendo conto della forma di  $l$ :

$$m_* = -2.5 \log \left( \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda) T(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_0(\lambda) T(\lambda) d\lambda} \right) + m_0. \quad (1.7.29)$$

È quindi chiaro che per parlare di magnitudine è necessario esplicitare il nome dei parametri fissi che si scelgono per l'osservazione: il filtro utilizzato e la stella di riferimento.

Ipotizziamo di osservare una sorgente con due filtri differenti, si otterranno due magnitudini dello stesso oggetto differenti:

$$m_{*,i} = -2.5 \log \left( \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda) K_i(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_0(\lambda) K_i(\lambda) d\lambda} \right) + m_{0,i}. \quad (1.7.30)$$

$$m_{*,j} = -2.5 \log \left( \frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda) K_j(\lambda) d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_0(\lambda) K_j(\lambda) d\lambda} \right) + m_{0,j}. \quad (1.7.31)$$

Possiamo definire la differenza di magnitudini apparenti come:

<sup>23</sup>Che usa come supporto anche uno spettro artificiale settabile a piacimento.

**Definizione 7.4: Indice di colore**

L'indice di colore è la differenza di magnitudine apparente misurata con due filtri diversi.

$$I = m_{*,i} - m_{*,j}. \quad (1.7.32)$$

Questo indice ci dà una indicazione della temperatura della stella, infatti facendo la differenza tra le magnitudini in questione otteniamo il logaritmo del rapporto tra i flussi in due bande differenti. Proprio per questo tale indice ci dà una indicazione della temperatura effettiva.

Abbiamo visto che possiamo approssimare lo spettro di una stella come quello di corpo nero, misurare lo spettro con due diversi filtri significa esplorare varie zone dello spettro:

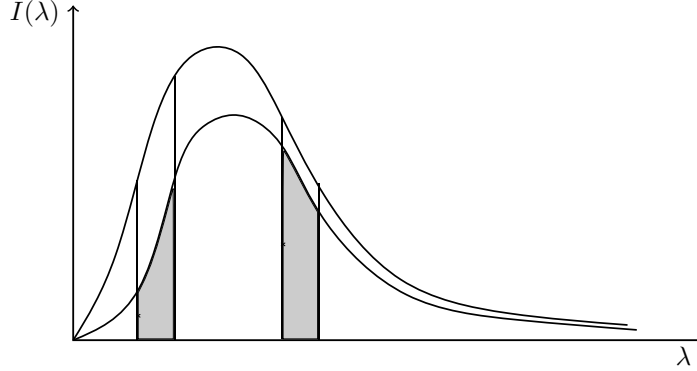


Figura 1.28: Significato dell'indice di colore

Il rapporto tra le due aree colorate è proprio l'indice di colore. Vediamo dal grafico che tale indice può essere usato anche per una calibrazione dello strumento nella temperatura della stella osservata, infatti è evidente che il rapporto tra le aree varia al variare della temperatura grazie alla legge di spostamento di Wien.

**Magnitudine Bolometrica.**

Si definisce magnitudine bolometrica la magnitudine in cui si raccoglie l'intero flusso proveniente dalla stella. Per ottenerla è necessario misurare la magnitudine in varie bande e mettere insieme i risultati.

La relazione che lega la magnitudine bolometrica a quella in una certa banda è la seguente:

$$m_{\text{bol}} = m_i + BC_i. \quad (1.7.33)$$

In cui abbiamo aggiunto la correzione bolometrica  $BC_i$  che dipende dalla banda che stiamo utilizzando.

**Magnitudine Assoluta.**

Si definisce magnitudine assoluta  $M$  la magnitudine apparente che si vedrebbe se la stella fosse distante 10 pc. Prendiamo il flusso  $f$  da una stella ad una certa distanza  $d$  e con luminosità intrinseca  $l$ , il flusso sarà dato da:

$$f = \frac{l}{4\pi d^2}. \quad (1.7.34)$$

Se la stella fosse a 10 pc si avrebbe:

$$f = \frac{l}{4\pi (10 \text{ pc})^2}. \quad (1.7.35)$$

È quindi possibile calcolare le magnitudini associate ai due flussi:

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \log \frac{f}{f_{10}} = \\ &= -2.5 \log \left( \frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 = \\ &= -5 + 5 \log (d(\text{pc})). \end{aligned} \quad (1.7.36)$$

L'ultima quantità a destra dell'uguale prende il nome di modulo di distanza.

Abbiamo assunto che l'unica causa di diluizione del flusso sia la distanza, quindi assumiamo che la radiazione si propaghi nel vuoto. Per correggere e tener conto dell'assorbimento della radiazione dovuta al mezzo interstellare è necessario aggiungere un fattore alla equazione:

$$m - M = -5 + 5 \log d(\text{ pc}) + A_V. \quad (1.7.37)$$

Non è banale ottenere la magnitudine assoluta, infatti in generale è difficile valutare sia  $d$  che  $A_V$ .

Si può definire anche la magnitudine bolometrica assoluta che sarà legata alla luminosità intrinseca della sorgente.

## 1.8 Lezione 8

19-03-2020

### 1.8.1 Slide su studio delle righe spettrali.

## 1.9 Lezione 9

23-03-2020

### 1.9.1 Trasporto di energia negli interni stellari.

Vediamo il trasporto energetico da zone interne a zone esterne della stella. Andando verso l'interno della stella è sempre meglio verificata la condizione di LTE, quindi le particelle in queste regioni hanno funzioni di distribuzione (di velocità, di popolazione dei livelli, di ionizzazione) ben definite in funzione della temperatura. Ricordiamo comunque che non abbiamo l'equilibrio termodinamico globale, quindi il campo di radiazione resta diverso da quello di corpo nero:

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \neq B_\nu(T(\mathbf{r})). \quad (1.9.1)$$

Resta comunque il fatto che la funzione sorgente è definita grazie alla relazione di Kirchhoff:

$$s_\nu(\mathbf{r}) = B_\nu(T(\mathbf{r})). \quad (1.9.2)$$

La relazione 1.9.1 implica che il flusso uscente dalla stella deve necessariamente essere nullo:

$$F_\nu \neq 0. \quad (1.9.3)$$

Ed abbiamo anche visto che questo comporta, per piccole deviazioni dallo spettro di corpo nero, che possiamo scrivere:

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = B_\nu(T(\mathbf{r})) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.9.4)$$

Possiamo procedere al calcolo del flusso di energia uscente partendo dalla seguente equazione per la pressione:

$$\frac{dP_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{F_\nu}{c}. \quad (1.9.5)$$

Questa è stata dimostrata nel caso di atmosfera grigia, abbiamo visto che vale anche per ogni caso monocromatico. Invertendo tale relazione abbiamo che:

$$F_\nu = c \frac{dP_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.9.6)$$

E cambiando variabili:

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu dz. \quad (1.9.7)$$

$$F_\nu = -\frac{c}{\alpha_\nu} \frac{dP_\nu}{dz}. \quad (1.9.8)$$

Vorremo calcolare tutto il flusso di energia uscente dalla stella:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty F_\nu d\nu = \\ &= -c \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dP_\nu}{dz} d\nu. \end{aligned} \quad (1.9.9)$$

Per rimanere generali adesso riscriviamo quest'ultima in funzione di una nuova grandezza  $\alpha_R$ :

**Definizione 9.1: Coefficiente di assorbimento di Rosseland**

Il coefficiente di assorbimento di Rosseland è la media armonica del coefficiente di assorbimento:

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int \frac{1}{\alpha_R} \frac{dP_\nu}{dz} d\nu}{\int \frac{dP_\nu}{dz}}. \quad (1.9.10)$$

Questo coefficiente ci garantisce che avranno un contributo principale all'assorbimento soltanto con le frequenze aventi  $\alpha_\nu$  minore, ovvero quelle per cui il mezzo è più trasparente.

Ricordando che vale anche la relazione:

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu). \quad (1.9.11)$$

Possiamo inserire questa nella espressione per  $1/\alpha_R$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_R} &= \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{4\pi}{3c} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} d\nu}{\int \frac{4\pi}{3c} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} d\nu} = \\ &= \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \end{aligned} \quad (1.9.12)$$

La distribuzione  $\partial B_\nu / \partial T$  ha massimo per la frequenza  $4kT/h$ , questa avrà quindi un contributo maggiore delle altre al calcolo del flusso.

Nei libri viene spesso definita una quantità equivalente alla  $\alpha_R$ : l'opacità radiativa di Rosseland  $k_R$  (ricordiamo che vale la relazione  $\alpha_\nu = k_\nu \rho$ ):

$$\frac{1}{k_R} = \frac{\int \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \quad (1.9.13)$$

Scriviamo allora il flusso totale come:

$$F = -\frac{c}{\alpha_R} \frac{dP}{dz} = -\frac{c}{k_R \rho} \frac{dP}{dz}. \quad (1.9.14)$$

Visto che in LTE vale anche la relazione:

$$P = \frac{u}{3} = \frac{aT^4}{3}. \quad (1.9.15)$$

Allora abbiamo anche che:

**Fatto 9.1: Equazione del flusso di energia radiativa dall'interno stellare**

$$F = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{k_R \rho} \frac{dT}{dz}. \quad (1.9.16)$$

Questo ci dice un sacco di informazioni sul flusso di energia dall'interno della stella:

- $F \neq 0 \iff \frac{dT}{dz} \neq 0$ .
- $F$  è direttamente proporzionale al gradiente di temperatura verso l'esterno.
- Materiali più opachi ( $k_R$  più grandi) hanno flussi inferiori.
- L'equazione ha la stessa forma dell'equazione del calore: è quindi un trasporto diffusivo.

## 1.9.2 Cammino libero medio di Rosseland

Con le quantità introdotte è utile definire anche un cammino libero medio:

$$\bar{l} = \frac{1}{\alpha_R} = \frac{1}{k_R \rho}. \quad (1.9.17)$$

Questo cammino libero è una quantità molto più generale di quello visto nelle scorse lezioni perchè fa una media armonica di tutte le opacità all'interno della stella. Vediamo come sfruttarlo per un esempio numerico.

Abbiamo visto alcune quantità importanti per il sole:

- $M_\odot = 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$ .

- $R_{\odot} = 7 \cdot 10^{10}$  cm.
- $\bar{\rho}_{\odot} = 1.4$  g/cm<sup>2</sup>.
- (aggiungiamo adesso)  $k_R = 0.4$  cm<sup>2</sup>/g.

Sulla base di queste possiamo dire che  $\bar{l} \approx 2$  cm. Se confrontato con il raggio solare abbiamo che:

$$\frac{\bar{l}}{R_{\odot}} \sim 3 \cdot 10^{-12}. \quad (1.9.18)$$

Questo ci dice una cosa molto interessante sui fotoni prodotti all'interno della stella: ci mettono molto molto tempo ad uscire.

### 1.9.3 Moto dei fotoni all'interno di una stella.

Un fotone che nasce all'interno di una stella verrà assorbito dopo un certo tempo da un atomo all'interno di questa per poi essere riemesso in genere in modo completamente scorrelato da come era partito, la distanza che riesce a percorrere tra un assorbimento ed il successivo è in genere ben approssimata dalla quantità  $\bar{l}$ .

Diamo una stima numerica del tempo impiegato ad uscire dalla stella effettuando questo random walk. Sappiamo che per questo moto casuale si ha un percorso residuo medio di:

$$\sqrt{\langle L^2 \rangle} = \sqrt{N} \sqrt{\langle \bar{l}^2 \rangle}. \quad (1.9.19)$$

NOi vorremmo che il nostro fotone fosse in grado di uscire, vediamo dopo quanto tempo avrà percorso una distanza dell'ordine del raggio solare:

$$R_{\odot} = \sqrt{N\bar{l}} \implies N = \left( \frac{R_{\odot}}{\bar{l}} \right)^2. \quad (1.9.20)$$

Quindi il numero di interazioni che il fotone fa prima di essere (forse) in grado di uscire è dell'ordine di

$$N \sim 10^{21}. \quad (1.9.21)$$

Considerando che i fotoni viaggiano alla velocità della luce abbiamo che:

$$\Delta t = N \frac{\bar{l}}{c}. \quad (1.9.22)$$

Considerando inoltre che prima di essere riemesso dopo l'assorbimento ci vogliono in media  $10^{-8}$  s allora abbiamo che:

$$\Delta t \sim 3 \cdot 10^6 \text{ anni}. \quad (1.9.23)$$

La luce che ci arriva dal sole è quella che è stata prodotta milioni di anni fa.

### 1.9.4 Equilibrio idrostatico della stella

#### Definizione 9.2: Stella

Una stella è un sistema gassoso autogravitante.

Le stelle sono oggetti solitari, se consideriamo che la stella più vicina al nostro sistema solare è Alpha-Centauri, che dista  $d = 1.4$  pc =  $4 \cdot 10^{18}$  cm, abbiamo che il rapporto tra la distanza  $d$  ed il raggio della stella è mostruosamente grande:

$$\frac{d}{R_{\odot}} \approx 0.6 \cdot 10^8. \quad (1.9.24)$$

Quindi il volume occupato dallo spazio rispetto a quello occupato da una stella è:

$$\frac{V_d}{V_{\odot}} \approx 10^{23}. \quad (1.9.25)$$

La stella è quindi un oggetto destinato a perdere tutta la sua energia essendo il cosmo molto più freddo di lei. Per fortuna le scale temporali di perdita di energia di una stella sono molto più grandi della vita media di un

essere umano, quindi osservando il sole dalla mattina alla sera non lo vedremo diventare più piccolo, nemmeno in milioni di anni di osservazione!

Questo perchè il sole, come altre stelle, si trova ad un particolare equilibrio pressione-gravità che gli permette di avere una qualche stabilità (seppure apparente, poichè essendoci un flusso di energia comunque è destinato a perderne).

Concentriamoci adesso sull'equilibrio tra pressione e gravità, per studiarlo vediamo una descrizione euleriana della stella:

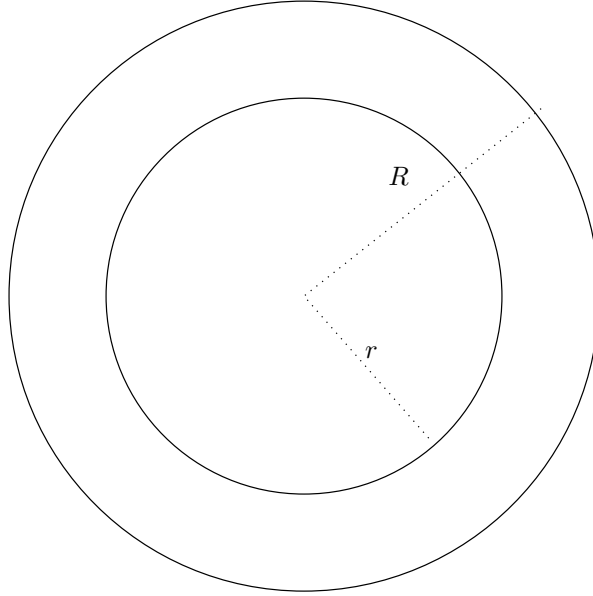


Figura 1.29: Descrizione euleriana di una stella

Consideriamo la massa nella shell interna come

$$m = m(r, t). \quad (1.9.26)$$

Mentre la massa totale:

$$M = m(R, t). \quad (1.9.27)$$

La variazione di massa nella shell interna sarà data da:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial r} dr + \frac{\partial m}{\partial t} dt. \quad (1.9.28)$$

Per la simmetria del problema avremo che:

**Fatto 9.2: Equazione di struttura stellare**

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.9.29)$$

Mentre per la variazione temporale:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v. \quad (1.9.30)$$

Con  $v$  velocità di "fuga" della massa dalla stella.

Sostituendo nella equazione differenziale otteniamo una equazione di continuità per simmetria sferica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0. \quad (1.9.31)$$

Prendiamo adesso uno strato  $dr$  di stella, perchè la stella non collassi su se stessa (o esploda) è necessario che le forze su questo strato siano nulle, su questo strato avremo la forza di gravità che spinge verso l'interno, la pressione degli strati superiori che spingono anche essi per gravità e la pressione degli strati gassosi inferiori che spingono verso l'esterno. Quindi:

$$(P(r) - P(r + dr)) 4\pi r^2 - g(r) 4\pi r^2 dr = 0. \quad (1.9.32)$$

Dove  $g(r)$  è la forza gravitazionale:

$$g(r) = -G \frac{M}{r^2}. \quad (1.9.33)$$

La prima equazione cardinale ci da una condizione sulla derivata della pressione:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -g(r)\rho. \quad (1.9.34)$$

Abbiamo quindi una importante equazione che determina l'equilibrio idrostatico di una stella:

**Fatto 9.3: Equazione per l'equilibrio idrostatico**

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -G \frac{m\rho}{r^2}. \quad (1.9.35)$$

## 1.10 Lezione 10

26-03-2020

### 1.10.1 Tempi scala dell'evoluzione stellare.

Un buon argomento che ci consente di dire che le stelle sono all'equilibrio idrostatico è il fatto che il loro raggio non diminuisce su scale temporali molto grandi (nel caso del sole tali scale raggiungono il miliardo di anni). Proviamo a stimare alcune delle scale temporali protagoniste del processo di equilibrio tra gravità e pressione termodinamica di una stella. L'equazione che vigila tale equilibrio è la legge di Newton per una Shell infinitesima della stella:

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial r}}_{\text{Negativo}} - G \frac{m\rho}{r^2}. \quad (1.10.1)$$

Il termine di variazione di pressione è negativo, quindi con l'ulteriore segno (-) diventa un contributo positivo. Tale contributo viene bilanciato dalla forza gravitazionale che tende invece a far collassare tale Shell. Vediamo cosa succederebbe alla stella se, manipolando l'equazione di Newton, togliamo quei termini responsabili dell'equilibrio. In questo modo avremo una stima dei tempi scala di evoluzione stellare.

#### Tempo scala di collasso

Immaginando di togliere la variazione di pressione dalla equazione precedente, si ottiene:

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -G \frac{m\rho}{r^2}. \quad (1.10.2)$$

In questo modo non c'è niente che controbilancia la gravità della stella: avremo un collasso gravitazionale. Per stimare il tempo di collasso gravitazionale  $\tau_{\text{FF}}$  possiamo approssimare l'accelerazione nella equazione precedente nel seguente modo:

$$\left| \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right| = \frac{R}{\tau_{\text{FF}}^2}. \quad (1.10.3)$$

Dove FF sta per Free Fall. Inserendo questa nella prima equazione cardinale e valutando anche la forza di gravità in termini di  $M$  e  $R$  si ha:

**Definizione 10.1: Tempo di collasso gravitazionale**

$$\tau_{\text{FF}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (1.10.4)$$

Questo tempo scala di collasso gravitazionale è inversamente proporzionale alla densità media come ci si aspetta ragionevolmente.

Considerando che possiamo approssimare la densità media del sole come:  $\rho_0 \approx 1.4 \text{ g/cm}^3$  si ha un tempo scala di collasso di circa 27 minuti. Visto che il sole resta stabile per milioni di anni possiamo assumere che ci sia un buon bilanciamento tra pressione e gravità.

Per altre stelle (aventi la stessa massa del sole ma raggi diversi) avremo tempi scala di caduta libera differenti:

- Giganti rosse:  $R = 100R_{\odot} \implies \tau_{\text{FF}} \approx 1000\tau_{\text{FF}\odot} \sim 18$  giorni.
- Nane bianche:  $\rho \gg \rho_{\odot} \implies \tau_{\text{FF}} \approx \tau_{\text{FF}}/1000 \sim$  secondi.

## Tempo scala di esplosione

Allo stesso modo, togliendo la gravità dalla equazione di Newton abbiamo che:

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (1.10.5)$$

Quindi possiamo ragionare in modo analogo alla sezione precedente:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right| &= \frac{R}{\tau_{\text{exp}}^2} = \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \approx \\ &\approx \frac{1}{\rho} \frac{P(0) - P(R)}{R - 0} = \\ &= \frac{P_c}{\rho R}. \end{aligned} \quad (1.10.6)$$

### Definizione 10.2: Tempo scala di esplosione

$$\tau_{\text{exp}} = R \sqrt{\frac{\rho}{P}} \approx \frac{R}{c_s}. \quad (1.10.7)$$

Dove la pressione nella espressione è quella del centro della stella, mentre  $c_s$  è la velocità del suono.

Stimiamo la pressione al centro della stella all'equilibrio idrostatico:

$$\frac{P_c}{R} \approx -G \frac{M\rho}{R^2} \implies P_{c,\odot} \approx \frac{GM\rho}{R} \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ dyn/cm}^2 \sim 5 \cdot 10^9 \text{ atm}. \quad (1.10.8)$$

Con dei modelli numerici più avanzati possiamo dire che  $P_{c,\odot} \approx 2.6 \cdot 10^{17} \text{ dyn/cm}^2$ . Dobbiamo tenere di conto del fatto che al centro della stella è presente un gas che risponderà ad una qualche legge di stato  $P(\rho, T)$ , questa legge di stato è alla base della comprensione della stabilità della stella poichè ci caratterizza la risposta di quest'ultima alla perdita di energia.

In generale tale legge di stato dipende sia da  $\rho$  che da  $T$ , ci sono casi in cui tale legge dipende soltanto da  $\rho$ , ad esempio nelle nane bianche. In tale situazione il gas di elettroni presente negli interni stellari può essere approssimato come un gas di Fermi. Tale approssimazione è stata approfondita nel corso di struttura della materia.

Conoscere la legge di stato ci permette di capire il modo con cui la struttura risponde alla perdita di energia inevitabili nella evoluzione della stella. Infatti possiamo già distinguere due casi a seconda della tipologia di equazione di stato:

- $P(\rho, T)$ : se si ha una perdita di energia si hanno le seguenti conseguenze

$$T \text{ Diminuisce} \implies P \text{ Diminuisce} \implies \text{Prevale la gravità} \implies \text{Contrazione}. \quad (1.10.9)$$

- $P(\rho)$ : se si ha una perdita di energia si hanno le seguenti conseguenze

$$T \text{ Diminuisce} \implies P \text{ Resta costante} \implies \text{Nessuna contrazione}. \quad (1.10.10)$$

## 1.10.2 Teorema del viriale per corpi autogravitanti.

Ipotizziamo una situazione all'equilibrio idrostatico

$$\frac{\partial P}{\partial r} = - \frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (1.10.11)$$

Moltiplichiamo a destra e sinistra per il volume della sfera di raggio  $r$ :

$$V(r)dr = \frac{4}{3}\pi r^3 dr. \quad (1.10.12)$$

E ricordando l'equazione di struttura stellare:

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.10.13)$$



Otteiamo:

$$V(r)dP = -\frac{Gm}{3R}dm. \quad (1.10.14)$$

Possiamo quindi integrare ambo i membri, a destra si ha

$$\int VdP = \underbrace{VP|_0^R}_{\substack{V(0)=0 \\ P(R)=0}} - \int PdV = - \int PdV. \quad (1.10.15)$$

A sinistra invece abbiamo l'energia potenziale gravitazionale:

$$\Omega = - \int \frac{Gm}{r} dm. \quad (1.10.16)$$

In conclusione abbiamo legato l'energia potenziale gravitazionale alle variabili termodinamiche  $P$  e  $V$ , questa è una versione del teorema del viriale:

**Fatto 10.1: Teorema del Viriale**

$$\Omega = -3 \int PdV. \quad (1.10.17)$$

Facciamo due esempi concreti di questo teorema per due leggi di stato:

**Teorema del viriale per gas non relativistico**

$$P = \frac{2}{3} \frac{K}{V}. \quad (1.10.18)$$

Dove  $K$  è l'energia cinetica traslazionale. In questo caso il teorema si scrive come:

$$\Omega = -2K. \quad (1.10.19)$$

**Teorema del viriale per un gas relativistico**

$$P = \frac{1}{3} \frac{K}{V} \implies \Omega = -K. \quad (1.10.20)$$

### 1.10.3 Energia e stabilità della stella

Assumiamo che la stella sia composta da un gas perfetto, in tal caso abbiamo dal teorema di equipartizione dell'energia che:

$$dK = \frac{3}{2} k_B T dN = \frac{3}{2} k_B T \frac{dm}{\mu m_H}. \quad (1.10.21)$$

Dove  $\mu$  è il peso molecolare medio delle particelle:

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m_H}. \quad (1.10.22)$$

Mentre  $m_H$  è l'unità di massa atomica. Visto che  $1g = N_A m_H$  si avrà anche:

$$\begin{aligned} dK &= \frac{3}{2} k_B T \frac{N_A}{\mu} dm = \\ &= \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} T dm. \end{aligned} \quad (1.10.23)$$

Ricordando adesso le definizioni dei calori specifici a volume e pressione costante:

$$C_P - C_V = \frac{R}{\mu} = C_V (\gamma - 1). \quad (1.10.24)$$

Con  $\gamma = C_P/C_V$ .

Introducendo anche l'energia interna:

$$dU = C_V T dm. \quad (1.10.25)$$

Si ha che:

$$dK = \frac{3}{2}(\gamma - 1) dU. \quad (1.10.26)$$

Se assumiamo  $\gamma$  costante in tutta la struttura abbiamo una espressione non infinitesima per l'energia cinetica traslazionale:

$$K = \frac{3}{2}(\gamma - 1) U. \quad (1.10.27)$$

Visto che l'energia totale della stella può essere presa come somma dell'energia interna e della energia gravitazionale avremo che questa può essere espressa sia in funzione di  $\Omega$  che di  $U$ :

$$\begin{aligned} E = \Omega + U &= \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \Omega = \\ &= - (3\gamma - 4) U. \end{aligned} \quad (1.10.28)$$

Per avere una struttura stabile sarà necessario che questa energia sia negativa, di conseguenza il parametro  $\gamma$  dovrà essere maggiore di  $4/3$ .

#### 1.10.4 Capacità termica negativa per una stella.

Possiamo ipotizzare che la stella perda energia soltanto per irraggiamento, in tal caso si ha che:

$$\begin{aligned} L = -\frac{dE}{dt} &= -\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)} \dot{\Omega} = \\ &= (3\gamma - 4) \dot{U}. \end{aligned} \quad (1.10.29)$$

Quindi abbiamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$L > 0 \implies \dot{\Omega} < 0, \dot{U} > 0. \quad (1.10.30)$$

Questo significa che quando la stella perde energia essa risponde con una contrazione ed aumenta la sua energia interna, quindi risponde con un incremento di temperatura. Quindi la stella è un sistema particolare in cui una perdita di energia comporta un surriscaldamento: la capacità termica è negativa.

Esiste una eccezione a questo meccanismo: le nane bianche. Per questo tipo di stelle la perdita di energia comporta un raffreddamento poichè la legge di stato è indipendente dalla temperatura (non vi è alcuna contrazione durante il processo di irraggiamento).

#### 1.10.5 Sviluppo di una stella.

Quando una stella nasce non avrà ancora sorgenti di energia nucleare all'interno, quindi l'energia che irraggia la costringerà ad una contrazione ed un aumento della temperatura.

A questo punto possono succedere due cose:

- **Fase di Stop nucleare:** La temperatura raggiunge quella di innesco delle reazioni termonucleari. In questo caso dobbiamo aggiungere un termine alla equazione della energia, in pratica tutta l'energia persa in irraggiamento verrà fornita dalle reazioni, fino a che non si esauriscono i reagenti. In questa fase la stella quindi non si contrae e, se riesce ad entrare in questa fase, aumenta notevolmente la durata della sua vita.
- **Nana Bruna:** la densità aumenta così tanto che il gas degenera  $P(\rho)$  prima che si raggiunga la temperatura di innesco delle reazioni termonucleari. In questo caso la contrazione si interrompe e la stella inizia una evoluzione differente, perdendo energia le nane brune si raffreddano anzichè riscaldarsi.
- **Fine della fase di stop nucleare e ripartenza del ciclo** Il primo elemento che viene usato come carburante nucleare è l'idrogeno, quando questo si esaurisce la stella ritorna ad essere in bilico tra la fase di Stop Nucleare e la trasformazione in nana bruna. La cosa che ad ogni bivio discrimina la scelta è la massa, le stelle più massicce ripeteranno il ciclo più e più volte fino ad arrivare a consumare il Ferro nelle reazioni, dopo questa fase si ha un inevitabile collasso gravitazionale con conseguente formazione di supernovae.

### 1.10.6 Stella con gas monoatomico all'interno

Nel caso di gas monoatomico si ha che  $\gamma = 3/5$ , quindi le relazioni dell'energia possono essere esplicitate:

$$E = \frac{\Omega}{2} = -U. \quad (1.10.31)$$

$$U = K. \quad (1.10.32)$$

Quindi possiamo riscrivere la variazione di energia come:

$$L = -\frac{\dot{\Omega}}{2} = \dot{U} = \dot{K}. \quad (1.10.33)$$

In assenza di reazioni termonucleari che compensano tale perdita la stella utilizzerà metà della sua energia per compensare la perdita per luminosità, l'altra metà va in energia interna, quindi in energia cinetica, quindi in riscaldamento.

Possiamo definire un tempo caratteristico per descrivere questa evoluzione:

#### Definizione 10.3: Tempo scala di Kelvin-Helmoltz

Il tempo scala con cui la struttura reagisce ad una perdita di energia è:

$$\tau_{KH} = \frac{|\Omega|}{2} \frac{1}{L}. \quad (1.10.34)$$

Possiamo stimare tale tempo scala nel caso del sole:

$$\Omega = - \int \frac{Gm}{r} dm \stackrel{\rho \text{ cost}}{\Rightarrow} \Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.10.35)$$

Quindi si ha che:

$$\tau_{KH} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{RL}. \quad (1.10.36)$$

- $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ g.}$
- $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ cm.}$
- $L_{\odot} \approx 3.8 \cdot 10^{33} \text{ erg/s.}$

Con i valori del sole abbiamo che:

$$\tau_{KH,\odot} \approx 10^7 \text{ anni.} \quad (1.10.37)$$

Notiamo che il valore temporale di questa stima è lo stesso che abbiamo ottenuto quando abbiamo stimato il tempo necessario ad un fotone ad uscire dalla stella, e non è un caso...

## 1.11 Lezione 11

30-03-2020

### 1.11.1 Energia delle stelle: dal sole a carbone alle reazioni termonucleari

Dai primi dell'800 gli scienziati si indagarono su quale fosse la fonte di energia dalla quale il sole e le altre stelle attingono per brillare nel cosmo senza esaurirsi in tempi generazionali. Vediamo il percorso intellettuale che portò alla conclusione che nel sole avvengono reazioni termonucleari.

Durante la rivoluzione industriale si avanzava l'idea che il sole potesse brillare bruciando carbone, a smentire tale supposizione ci pensò Mayer. Supponendo che il sole bruci per combustione chimica possiamo chiederci per quanto tempo il sole possa bruciare. Già all'epoca sapevano che con una combustione si libera circa

$$E_{\text{comb}} \sim 4 \cdot 10^{12} \text{ erg/g.} \quad (1.11.1)$$

Allora il tempo di combustione di un oggetto di massa  $M_{\odot} \sim 2 \cdot 10^{33} \text{ g}$  e luminosità  $L_{\odot} \sim 4 \cdot 10^{33} \text{ erg/s}$  sarà:

$$t_{\text{burn}} = \frac{E_{\text{comb}} M_{\odot}}{L_{\odot}} \approx 10^4 \text{ yr.} \quad (1.11.2)$$

Di conseguenza non è possibile che l'energia prodotta dal sole sia originata dalla combustione chimica, già a quei tempi sapevano che l'età del sole era molto maggiore del migliaio di anni.

Adesso possiamo dire, grazie alla radiodattazione dei meteoriti, che il sole ha una età di circa  $T_{\odot} \approx 4.57$  Gyr. Una sorgente che brucia per tutto questo tempo dovrà avere una energia

$$\frac{T_{\odot} L_{\odot}}{M_{\odot}} \sim 2 \cdot 10^{17} \text{ erg/g.} \quad (1.11.3)$$

Che è una energia molto maggiore di quella che è possibile fare attraverso la combustione chimica. Allora avanzò l'ipotesi che l'energia provenisse dalla gravità, inizialmente si ipotizzò che oggetti come pianeti e meteoriti cadessero sul sole rilasciando energia, questa ipotesi venne presto scartata in favore dell'autogravità. La scorsa lezione abbiamo visto come l'autogravità possa competere con la pressione del gas all'interno del sole, tuttavia non è ancora sufficiente a spiegare il tempo di vita della nostra stella. Dopo quasi un secolo si arrivò alla conclusione che le stelle all'interno delle stelle avvengono reazioni termonucleari, queste sono le responsabili dell'equilibrio su scala di miliardi di anni del sole.

### 1.11.2 Tempo scala nucleare.

Un oggetto della massa del sole avrebbe idealmente una energia disponibile

$$E_{\odot} = M_{\odot} c^2 \approx 2 \cdot 10^{54} \text{ erg.} \quad (1.11.4)$$

Questa energia è impossibile da produrre, l'unico modo che si ha per produrla sarebbe quella di far schiantare il sole contro un antisoletto. Questo non è il nostro caso, nel nostro caso l'energia arriva dalla fusione dell'idrogeno in elio:

$$(4m_H - m_{He}) c^2 \approx 26.73 \text{ Mev} \approx 0.7\% E_{\odot}. \quad (1.11.5)$$

Possiamo allora definire il tempo scala nucleare come:

$$\tau_N = \frac{0.7\% E_{\odot}}{L_{\odot}} \approx 10^{11} \text{ yr.} \quad (1.11.6)$$

Questo tempo è molto maggiore di quello di Kelvin Halmotz ricavato nella lezione precedente e si avvicina molto al valore noto oggi. Abbiamo allora la seguente disuguaglianza:

$$\tau_{FF} \ll \tau_{KH} \ll \tau_N. \quad (1.11.7)$$

Ipotizziamo adesso che al centro della nostra stella vi sia un gas perfetto

$$PV = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT. \quad (1.11.8)$$

### La fase di combustione dell'idrogeno è la più duratura

In risposta alle fusioni la pressione diminuisce poichè diminuisce il numero di particelle quindi avremo una contrazione.

Inoltre abbiamo che nella fase più avanzata di fusione che una stella può raggiungere si avrà la fusione di idrogeno a formare il ferro. Quest'ultima fase è quella che fornisce più energia, questa energia è poco maggiore di quella prodotta nel formare elio ( $0.9\% E_{\odot}$ ), a fronte di una grande quantità di atomi di idrogeno necessari alla formazione del ferro. Questo implica che la pressione cambierà più repentinamente rispetto al caso dell'elio, quindi sarà una fase meno duratura.

Se ne conclude che la fase più lunga della vita di una stella sia quella in cui le reazioni termonucleari coinvolgono la fusione dell'idrogeno in Elio.

### Termostato stellare

Le reazioni termonucleari per una stella dipendono anche strettamente dalla temperatura. Questo aspetto è molto importante infatti sarà necessario che tali reazioni si "regolino" sulla luminosità della stella per controbilanciare la perdita di energia.

### 1.11.3 Equazioni di struttura stellare.

Abbiamo visto nelle lezioni precedenti due equazioni che governano la struttura meccanica della stella:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{\partial m}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho. \end{aligned} \quad (1.11.9)$$

Queste due equazioni contengono le tre variabili del sistema (che ricordiamo essere una shell di un oggetto avente simmetria sferica):

$$\begin{aligned} P &= P(r, t) \\ m &= m(r, t) \\ \rho &= \rho(m, t). \end{aligned} \quad (1.11.10)$$

. Per descrivere a pieno la struttura di una stella sarà necessario inserire anche una equazione che governa l'energia di quest'ultima, questa sarà una legge di conservazione:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho \mathcal{E}. \quad (1.11.11)$$

Tale equazione introduce un'altra variabile: la luminosità della shell  $L_1$ , questa è la quantità di energia che attraversa la shell di raggio  $r$  per unità di tempo. Questa avrà la proprietà:

$$L^* = L(r = R). \quad (1.11.12)$$

Inoltre abbiamo anche la quantità  $\mathcal{E}$  che corrisponde alla quantità di energia prodotta da un grammo di materia:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, T, \{x_i\}) \quad \text{erg s}^{-1} \text{ g}. \quad (1.11.13)$$

Dove  $\{x_i\}$  indica la composizione chimica. Tale energia può provenire da diversi contributi: quello nucleare, quella trasferita termodinamicamente e quella proveniente da tutti gli altri canali di produzione di neutrini diversi da quello dovuto alla fusione nucleare (questo contributo è già contenuto all'interno del termine nucleare):

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_g + \mathcal{E}_\nu. \quad (1.11.14)$$

La quantità di energia trasferita termodinamicamente è detta gravitazionale e può essere scritta come:

$$\mathcal{E}_g = -\frac{dQ}{dt} = -T \frac{dS}{dt}. \quad (1.11.15)$$

L'ultima derivata diventa piccola quando la struttura si evolve con tempi scala dell'ordine di quelli nucleari. Avrà un contributo significativo se la stella evolve con tempi scala dell'ordine di quelli di Kelvin Halmotz.

Ipotizzando quindi di essere in una situazione in cui la stella evolve con tempi scala dell'ordine di quello nucleare e che non vi sia produzione di neutrini indipendenti dalle reazioni nucleari, in tal caso allora

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_N. \quad (1.11.16)$$

Quindi la quantità di energia prodotta dalle reazioni nucleari dovrà essere esattamente uguale ad  $L$ . Allora l'energia liberata dal sole per radiazioni termonucleari sarà circa  $4 \cdot 10^{34}$  erg/s.

### Trasporto di energia nella stella

Nelle stelle abbiamo tre canali di trasporto di energia

- Radiativo
- Convettivo
- Conduttivo

Nel caso di trasporto radiativo abbiamo trovato l'equazione per il flusso:

$$F = -\frac{4}{3} \frac{ac}{k_R \rho} T^3 \frac{dT}{dr}. \quad (1.11.17)$$

Ricordiamo che questa era una equazione di tipo diffusivo, ottenibile nella approssimazione  $l \ll R$ .

Abbiamo anche visto che all'equilibrio termodinamico si ha

$$F = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (1.11.18)$$

In questo caso particolare possiamo aggiungere alle tre equazioni una quarta che descrive il gradiente di temperatura all'interno di una stella eguagliando le ultime due:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{k_R \rho}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2}. \quad (1.11.19)$$

Fuori dall'equilibrio radiativo si avrà che il flusso totale non sarà uguale a quello radiativo ma sarà dato dalla somma di tutti i flussi:

$$F_{\text{tot}} = \frac{L}{4\pi r^2} = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}} + F_{\text{conv}}. \quad (1.11.20)$$

Nel caso di LTE domina tuttavia il termine radiativo, vediamo quanto è buona l'approssimazione di LTE all'interno della stella.

## Valutazione dell'LTE

Per valutare la bontà della approssimazione di equilibrio termodinamico locale è necessario valutare il gradiente di temperatura  $\nabla T$ . Ormai sappiamo che

$$\begin{aligned} T_{\text{centro},\odot} &\approx 1.6 \cdot 10^7 \text{ K} \\ T_{\text{eff},\odot} &\approx 5772 \text{ K} \\ R_{\odot} &\approx 7 \cdot 10^{10} \text{ cm.} \end{aligned} \quad (1.11.21)$$

Quindi possiamo stimare il gradiente di temperatura come:

$$\frac{\Delta T}{R_{\odot}} = \frac{T_c - T_e}{R_{\odot}} \approx 1.7 \cdot 10^{-4} \text{ K/cm.} \quad (1.11.22)$$

Che può esser considerato un buon LTE, nelle zone interne tale valore raggiunge i  $10^{-11}$  K/cm, quindi un ottimo LTE. Su lunghezze scala dell'ordine del cammino libero medio le variaizoni di temperatura sono molto piccole rispetto alla temperatura in quel punto.

### 1.11.4 Flusso di energia trasportato dalla conduzione.

Anche questa situazione avrà una equazione per il flusso di tipo conduttivo, potremmo allora scrivere che:

$$F = -D \frac{dT}{dr}. \quad (1.11.23)$$

Dove  $D$  sarà uguale a

$$D = v_e l + \text{cost} \dots \quad (1.11.24)$$

Convienne quindi introdurre una opacità conduttiva  $k_{\text{cond}}$  in modo tale da rendere l'equazione del flusso della stessa forma di quella per il trasporto radiativo:

$$D = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{k_{\text{cond}}}. \quad (1.11.25)$$

Se siamo nel caso in cui  $F_{\text{Rad}} + F_{\text{Cond}} = F_{\text{tot}}$  allora possiamo scrivere:

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\rho} \left( \frac{1}{k_{\text{cond}}} + \frac{1}{k_r} \right) \frac{dT}{dr}. \quad (1.11.26)$$

Definendo anche una opacità efficace

$$\frac{1}{\bar{k}} = \frac{1}{k_{\text{cond}}} + \frac{1}{k_r}. \quad (1.11.27)$$

otteniamo un'altra equazione per il gradiente di temperatura:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{k} \rho}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (1.11.28)$$

In una stella come il sole (e nella maggioranza delle stelle) si ha che il cammino libero dei fotoni è molto maggiore del cammino libero medio degli elettroni, quindi si ha anche che:

$$k_r \ll k_{\text{cond}}. \quad (1.11.29)$$

Per via della definizione del coefficiente medio avremo che  $\bar{k} \approx k_r$  come ci si aspetterebbe, infatti l'energia verra trasportata per la maggior parte sotto forma di fotoni.

Nelle nane bianche invece la conduzione diventa dominante, infatti queste hanno una densità molto maggiore di quella del sole. All'aumentare della densità il cammino libero medio diminuisce, d'altra parte però il gas di elettroni diventa degenerare all'interno di tali stelle quindi in realtà  $l$  cresce.

Questo aumento di  $l$  è dovuto al fatto che i livelli energetici al di sotto di quelli di fermi sono tutti pieni, quindi non possono interagire, di conseguenza diminuisce anche la probabilità che ogni elettrone ha di interagire e questo comporta un aumento del cammino libero medio.

## 1.12 Lezione 12

02-04-2020

### 1.12.1 Moti convettivi nelle stelle.

Trattiamo la convezione come uno spostamento macroscopico di materia raggruppata in bolle.

Cerchiamo di capire in quali situazioni domina la convezione rispetto agli altri meccanismi di trasporto energetico all'interno della stella.

Immaginiamo una situazione come in Figura 1.30: una bolla di materia in seguito ad una perturbazione sale attraverso l'atmosfera stellare.

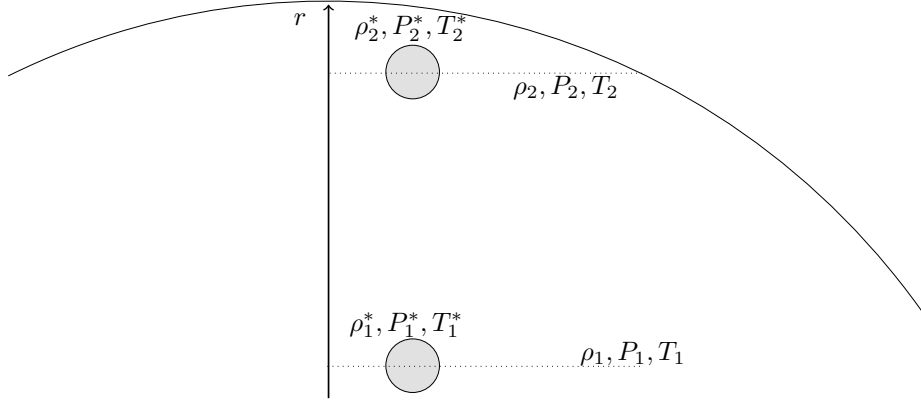


Figura 1.30: Bolle di materia nella stella

In seguito a tale spostamento di materia possono avvenire due eventi:

- Il moto della bolla viene smorzato: nessun moto convettivo.
- Il moto della bolla viene amplificato: moto convettivo.

Assumiamo che quando la bolla è partita dalla posizione (1) si trovasse nelle stesse condizioni fisiche della atmosfera circostante, quindi:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^* \\ \rho_1 &= \rho_1^* \\ T_1 &= T_1^*. \end{aligned} \tag{1.12.1}$$

Quando tale bolla raggiunge la posizione (2) possiamo assumere che:

- La variazione di pressione sia molto "più rapida" della variazione di energia, quindi la bolla raggiungerà velocemente un nuovo equilibrio:

$$P_2 = P_2^*. \tag{1.12.2}$$

- Assumiamo uno **Spostamento adiabatico**, assumiamo che nel passaggio da (1) a (2) non ci sia scambio di energia tra bolla ed ambiente esterno, per un tale spostamento sappiamo che:

$$\rho_2^* = \rho_1^* \left( \frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{1/\gamma}. \tag{1.12.3}$$

Dove  $\gamma = c_P/c_V$ .

Abbiamo quindi che la densità della bolla nel punto (2) non sarà la stessa dell'ambiente che la circonda. A questo punto Archimede e la gravità decideranno se la bolla torna verso il centro o viene accelerata fuori:

**Fatto 12.1: Condizione sulla convezione secondo il principio di Archimede.**

- Se  $\rho_2^* > \rho_2$  la bolla viene respinta indietro: smorzamento della perturbazione, nessuna convezione.
- Se  $\rho_2^* \leq \rho_2$  la bolla viene accelerata avanti: amplificazione della perturbazione, convezione.

Cerchiamo di rendere la situazione più rigorosa con delle relazioni in cui appaiono dei gradienti. Possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^* = P(r) \\ P_2 &= P_2^* = P(r + dr) = P(r) + \frac{dP}{dr} dr. \end{aligned} \quad (1.12.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho(r) \\ \rho_2 &= \rho(r + dr) = \rho(r) + \frac{d\rho}{dr} dr. \end{aligned} \quad (1.12.5)$$

Per la approssimazione di spostamento adiabatico abbiamo che:

$$\begin{aligned} \rho_2^* &= \rho_1^* \left( \frac{P_2^*}{P_1^*} \right)^{1/\gamma} \\ &= \rho \left( \frac{P(r + dr)}{P(r)} \right)^{1/\gamma} \\ &= \rho \left( 1 + \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} dr \right)^{1/\gamma}. \end{aligned} \quad (1.12.6)$$

Sviluppando nel secondo membro in parentesi (basta prendere uno spostamento sufficientemente piccolo per farlo):

$$\rho_2^* \approx \rho \left( 1 + \frac{1}{P\gamma} \frac{dP}{dr} dr \right). \quad (1.12.7)$$

Confrontiamo  $\rho_2^*$  con  $\rho_2$  per avere :

$$\rho \left( 1 + \frac{1}{P\gamma} \frac{dP}{dr} dr \right) \geq \rho + \frac{d\rho}{dr} dr. \quad (1.12.8)$$

Eliminando  $\rho$  si ha:

$$\frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} \geq \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}. \quad (1.12.9)$$

Se riscriviamo quest'ultima in maniera più compatta abbiamo che:

**Fatto 12.2: Criterio di stabilità di Schwarzschild**

La condizione necessaria affinché nella stella non vi siano moti convettivi è:

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dr} (\ln P) \geq \frac{d}{dr} (\ln \rho). \quad (1.12.10)$$

Quando questo criterio è soddisfatto avremmo una stella all'equilibrio radiativo:

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}}. \quad (1.12.11)$$

Quando invece questa condizione non è soddisfatta allora la stella risentirà de moti convettivi ed il trasporto di energia per questi ultimi non sarà trascurabile:

$$F_{\text{tot}} = F_{\text{rad}} + F_{\text{cond}} + F_{\text{conv}}. \quad (1.12.12)$$

Nel caso del sole abbiamo che

- Nel core siamo all'equilibrio radiativo.
- Nella atmosfera esterna domina la convezione.

Nel caso di stelle più grandi possiamo avere l'esatto opposto del sole, mentre per le stelle più piccole ( $0.3M_{\odot}$ ) possiamo anche avere interamente trasporto di energia per moti convettivi.



### 1.12.2 Gradiente radiativo e gradiente adiabatico.

Assumiamo adesso che all'interno della stella vi sia un gas perfetto:

$$P = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT. \quad (1.12.13)$$

Assumiamo inoltre che il peso molecolare  $\mu$  sia costante in tutta la struttura, ricordiamo che questa quantità vale:

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m_H}. \quad (1.12.14)$$

In questo modo il differenziale della relazione di dispersione lo possiamo scrivere come <sup>24</sup>:

$$\frac{dP}{P} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}. \quad (1.12.15)$$

Possiamo quindi dire che:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}. \quad (1.12.16)$$

La quantità a sinistra in quest'ultima relazione è una quantità presente nel criterio di Schwarzschild, andiamo quindi a sostituire:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} &\geq \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} = \\ &= \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} - \frac{1}{T} \frac{dT}{dr}. \end{aligned} \quad (1.12.17)$$

Tramite passaggi algebrici possiamo riscrivere questa come:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \geq \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr}. \quad (1.12.18)$$

Tramite la regola della derivazione a catena si ha anche:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dP} \frac{dP}{dr} \geq \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{P} \frac{dP}{dr}. \quad (1.12.19)$$

Adesso prima di semplificare il termine  $dP/dr$  non dobbiamo dimenticarci che questo è negativo, quindi il segno della disuguaglianza cambia:

$$\frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \leq 1 - \frac{1}{\gamma}. \quad (1.12.20)$$

Guardando quest'ultima equazione possiamo definire due quantità utili:

#### Definizione 12.1: Nabla

$$\nabla = \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} = \frac{d \ln T}{d \ln P}. \quad (1.12.21)$$

#### Definizione 12.2: Gradiente adiabatico

$$\nabla_{\text{ad}} = 1 - \frac{1}{\gamma}. \quad (1.12.22)$$

Il  $\nabla$  nel caso in cui siamo all'equilibrio radiativo coinciderà con il gradiente radiativo trovato nelle lezioni precedenti:  $dT/dr$ . Quindi la relazione di Schwarzschild ci dice anche che il gradiente radiativo è limitato superiormente:

$$\nabla \leq \nabla_{\text{ad}}. \quad (1.12.23)$$

Quindi ricordiamo quali sono i due casi che possono presentarsi in termini di queste due nuove quantità:

- Se  $\nabla \leq \nabla_{\text{ad}}$  allora siamo all'equilibrio radiativo.

<sup>24</sup>Basta fare il differenziale e moltiplicare ambo i membri per  $P^{-1}$

- Se  $\nabla \geq \nabla_{\text{ad}}$  allora abbiamo una instabilità convettiva, il gradiente di temperatura non sarà più quello radiativo discusso in precedenza ma sarà più piccolo.

Abbiamo quindi detto che all'equilibrio radiativo, quindi nei punti in cui è rispettata la prima disuguaglianza dell'elenco, si ha:

$$\nabla_r = \nabla. \quad (1.12.24)$$

Nelle regioni del secondo punto dell'elenco abbiamo già accennato che:

$$\nabla_r \neq \nabla. \quad (1.12.25)$$

Nonostante questo il gradiente radiativo può ancora essere definito come il gradiente che si avrebbe se tutto il flusso fosse trasportato dalla radiazione. Tuttavia nel caso di instabilità adiabatica avremo che tale gradiente sarà più piccolo del caso di equilibrio radiativo.

Come conseguenza in questa situazione avremo che (facendo sempre riferimento alla Figura 1.30):

$$T_2^* > T_2. \quad (1.12.26)$$

Per questo se la bolla si dissolve cederà calore all'ambiente circostante scaldandolo. Alla fine del processo di spostamento della bolla la temperatura  $T_2$  sarà aumentata, viceversa se la bolla va nel verso opposto.

Quando questi processi vanno a regime abbiamo che il gradiente ambientale sarà diverso da quello radiativo ed in particolare:

$$\nabla_{\text{ad}} < \nabla < \nabla_r. \quad (1.12.27)$$

Nelle zone in cui il moto convettivo diventa estremamente efficiente si avrà che  $\nabla \rightarrow \nabla_{\text{ad}}$ , mentre quando il moto convettivo è pressoché nullo  $\nabla \rightarrow \nabla_r$ .

Nei core delle stelle abbiamo che la convezione quando è attiva è così efficiente che la super adiabaticità necessaria a trasportare gran parte del flusso è talmente bassa che  $\nabla \approx \nabla_{\text{ad}}$ , anche se non possono effettivamente essere uguali.

### 1.12.3 Gradiente radiativo e luminosità.

Abbiamo visto che:

$$\nabla_r = \left. \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_r \leq \nabla_{\text{ad}}. \quad (1.12.28)$$

Ma d'altra parte si ha che la prima parte è uguale a

$$\left. \frac{d \ln T}{d \ln P} \right|_r = \frac{P}{T} \left. \frac{dT}{dP} \right|_r = \frac{P}{T} \frac{dT}{dr} \frac{dr}{dP}. \quad (1.12.29)$$

Inserendo i due termini noti

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{k}\rho}{T^3} \frac{L(r)}{4\pi r^2} \quad \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \quad (1.12.30)$$

Otteniamo che il criterio di Schwarzschild diventa una condizione sulla luminosità:

$$L(r) \leq 16\pi \frac{acG}{3\bar{k}} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T^4}{P} m. \quad (1.12.31)$$

Dove  $L(r)$  energia che per unità di tempo attraversa la superficie di raggio  $r$ . Quando è soddisfatta siamo in equilibrio radiativo, viceversa si innesca la convezione.

I processi che portano ad avere convezione sono quindi principalmente due:

- Aumento del flusso: rompo la 1.12.31.
- Aumento della opacità: rompo la prima in 1.12.30.

Nei nuclei convettivi dove abbiamo produzione di energia nucleare il meccanismo che innesca la convezione è la crescita del flusso.

Negli involucri convettivi invece (le zone esterne della stella) tipicamente non abbiamo le reazioni termonucleari, il meccanismo che innesca la convezione è l'aumento della opacità.

In particolare avremo che i moti convettivi avverranno nelle zone in cui le particelle sono ionizzate parzialmente: infatti il gradiente radiativo ha un picco nelle zone parzialmente ionizzate. Inoltre il gradiente adiabatico (sempre dove è presente parziale ionizzazione)

### 1.12.4 Mixing Length (o lunghezza media percorsa dalle bolle convettive.)

Vediamo adesso quanta energia viene trasportata dalla convezione analizzando la lunghezza media percorsa dalle bolle.

Quando la bolla arriva nella posizione (2) è più calda dell'ambiente circostante, quantifichiamo questa differenza di temperatura:

$$\delta T = T_2^* - T_2 = \left( \left| \frac{dT}{dr} \right| - \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad} \right) dr. \quad (1.12.32)$$

Definiamo la quantità tra le parentesi tonde come

**Definizione 12.3: Super adiabaticità**

$$\Delta \nabla T = \left| \frac{dT}{dr} \right| - \left| \frac{dT}{dr} \right|_{ad}. \quad (1.12.33)$$

Quindi quando la bolla si dissolve nel punto (2) ha la stessa pressione dell'ambiente circostante. La quantità di calore che questa cede sarà dato da:

$$Q_{ced} = c_P \rho \delta T = c_P \rho \Delta \nabla T dr. \quad (1.12.34)$$

Quindi il flusso di calore sarà dato da:

$$F = c_P \rho v \Delta \nabla T dr. \quad (1.12.35)$$

Nella teoria della Mixing Length il termine  $dr$  è proprio la lunghezza di rimescolamento  $l$ .

Possiamo scrivere inoltre la differenza di densità tra l'interno e l'esterno:

$$\delta \rho = \rho_2^* - \rho_2 = \left( \left| \frac{d\rho}{dr} \right| - \left| \frac{d\rho}{dr} \right|_{ad} \right) l. \quad (1.12.36)$$

Visto che stiamo trattando gas perfetti e la pressione finale è la stessa, quindi:

$$\delta \rho = -\frac{\rho}{T} \delta T. \quad (1.12.37)$$

Sostituendo il  $\delta T$ :

$$\delta \rho = -\frac{\rho}{T} \Delta \nabla T l. \quad (1.12.38)$$

Vogliamo trovare la forza che viene esercitata dall'ambiente circostante sulla bolla  $\bar{F}$  e questa dipenderà dalla densità:

$$\bar{F} = \frac{1}{2} g \delta \rho. \quad (1.12.39)$$

Il lavoro compiuto da tale forza in uno spostamento pari alla Mixing Length sarà pari alla variazione dell'energia cinetica, visto che la particella era inizialmente ferma:

$$\bar{F} l = \frac{1}{2} \rho v^2. \quad (1.12.40)$$

Dalle ultime due equazioni si ricava la velocità media della bolla:

$$v = l^{1/2} \sqrt{\frac{g}{\rho} \delta \rho}. \quad (1.12.41)$$

Che possiamo sostituire all'interno del flusso:

$$F_{conv} = c_P \rho \left( \frac{Gm}{Tr^2} \right)^{1/2} \Delta \nabla T^{3/2} \frac{l^2}{2}. \quad (1.12.42)$$

Dobbiamo notare che all'interno di questa trattazione non c'è modo di conoscere il valore di  $l$ : è un parametro libero.

Al crescere della super adiabaticità il flusso convettivo aumenta, viceversa se la convezione è molto efficiente e trasporta un grande flusso di energia allora la richiesta di super adiabaticità diminuisce. Questo lo si vede nei core convettivi, in questi l'adiabaticità è talmente sponinta che permette di considerare  $\Delta \nabla T \approx 0$ .

La dipendenza del flusso convettivo da  $\rho$  ci dice anche che la convezione sarà più efficiente nelle zone a densità

maggiore, quindi quelle centrali.  
Nei libri troviamo spesso:

$$l = \alpha H_p. \quad (1.12.43)$$

Dove  $\alpha \sim 2$  è un numero mentre  $H_p$  è una altezza di scala di pressione:

$$H_p = -\frac{dr}{d \ln P} = \frac{k}{\mu m_H} \frac{T}{g}. \quad (1.12.44)$$

È quindi possibile stimare questo parametro, scegliendo una zona del sole si ha:

$$\begin{aligned} r &\approx \frac{R_\odot}{2} \\ T(r) &\sim 10^6 \text{ K}. \end{aligned} \quad (1.12.45)$$

Con questi parametri abbiamo che:  $l \sim R_\odot/10$ . Questa Mixing Length è molto più grande del cammino libero medio di Rosseland, questo significa che dal momento in cui si attiva la convezione  $F_{\text{conv}} \gg F_{\text{rad}}$ .

Usando la stima

$$F_{\text{conv}} \approx F_{\text{tot}}. \quad (1.12.46)$$

Otteniamo che la super adiabaticità richiesta per avere questa situazione sarà:

$$\Delta \nabla T \sim 2 \cdot 10^{-10} \text{ K/cm}. \quad (1.12.47)$$

Confrontando quindi questa quantità con il gradiente di temperatura adiabatico (Negli interni solari  $dT/dr \sim 10^{-4} \text{ K/cm}$ ) si ha che:

$$\frac{\Delta \nabla T}{|dT/dr|} \sim 10^{-6}. \quad (1.12.48)$$

Questo quantifica il fatto che nel core convettivo possiamo approssimare il gradiente di temperatura con quello adiabatico.

### 1.12.5 Core convettivi e involuppi convettivi

Possiamo distinguere tra due tipi di stelle: quelle in cui il nucleo permette flusso convettivo e quelle in cui l'involuppo permette flusso convettivo. In entrambi i casi abbiamo la stessa teoria, ciò che cambia è l'incertezza sulla Mixing Length  $l$ .

#### Involuppo convettivo

Nel caso di involucro convettivo abbiamo che se  $l$  diminuisce e  $c\rho$  diminuisce dall'equazione 1.12.42 necessariamente deve aumentare  $\Delta \nabla T$  per avere flusso convettivo. Se aumenta la superadiabaticità allora si avrà un maggior gradiente di temperatura e di conseguenza diminuirà la temperatura effettiva.

$$l \searrow; c\rho \searrow \implies \Delta \nabla T \nearrow \implies T_{\text{eff}} \searrow. \quad (1.12.49)$$

Visto che la temperatura effettiva è legata alla luminosità dalla relazione:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (1.12.50)$$

Quindi a parità di luminosità se  $T_{\text{eff}}$  diminuisce deve aumentare il raggio. Queste variazioni rendono la stella con involucro convettivo molto difficile da trattare: non possiamo predire con principi primi né la  $T_{\text{eff}}$  né il raggio poiché dipendono dal parametro  $l$ . Possiamo calibrare  $l$  dalla osservazione di stelle con involucro convettivo.

#### Core convettivo

Le stelle con core convettivo abbiamo visto che hanno

$$\nabla \sim \nabla_{\text{ad}}. \quad (1.12.51)$$

Questo implica che tali stelle hanno una superadiabaticità molto piccola con tutte le conseguenze affrontate nella sezione precedente.

Il problema che si presenta nelle stelle con involucro convettivo non è presente in questo caso proprio per l'equazione scritta sopra, infatti il gradiente adiabatico deriva dalla equazione di stato: è possibile allora predire sia  $T_{\text{eff}}$  che  $R$ .

## 1.13 Lezione 13

06-04-2020

### 1.13.1 Convezione e equilibrio idrostatico.

La differenza tra il flusso radiativo e quello convettivo è che il secondo, oltre che a trasportare energia, trasporta anche materia. Viene quindi da chiedersi se questo trasporto di materia non sia tale da distruggere l'equilibrio idrostatico formatosi nella stella.

Per la conservazione di tale equilibrio sarà necessario che il tempo di risalita delle bolle  $\tau_{\text{mix}}$  sia maggiore del tempo scala di caduta libera  $\tau_{\text{FF}}$ :

$$\tau_{\text{FF}} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} \sim 30 \text{ min.} \quad (1.13.1)$$

$$\tau_{\text{mix}} = \frac{l}{v} \sim \frac{1/10 R_{\odot}}{0.03 \text{ km/s}} \approx 20 \text{ giorni.} \quad (1.13.2)$$

Abbiamo quindi che l'equilibrio non è perturbato dalla convezione.

Possiamo vedere questo anche confrontando la velocità delle bolle con quella termica del plasma presente all'interno della stella.

Per il plasma abbiamo velocità dell'ordine  $v_{\text{plasma}} \approx 100 \text{ km/s}$ , mentre per le bolle possiamo stimare che viaggino con  $v_{\text{bolle}} \approx 0.03 \text{ km/s}$ . Di conseguenza la pressione termica del gas e quella dovuta alle bolle avranno la seguente relazione:

$$P_{\text{bolle}} = 10^{-8} P_{\text{plasma}}. \quad (1.13.3)$$

Quindi abbiamo che la pressione dovuta alle bolle che salgono è trascurabile.

Il tempo di rimescolamento è anche molto più piccolo di  $\tau_{\text{KH}}$  e del  $\tau_{\text{N}}$ , quindi dal punto di vista evolutivo della stella può essere considerato istantaneo. Nelle stelle aventi core convettivo come il sole (in cui le reazioni termonucleari trasformano nuclei leggeri in nuclei più pesanti) abbiamo che l'istantaneità del processo convettivo implica una composizione chimica omogenea nel core.

#### Fatto 13.1: Composizione chimica del core

In presenza di core convettivi si ha una composizione chimica omogenea, viceversa in un core non convettivo gli elementi più pesanti si formeranno più facilmente nel nucleo centrale più caldo con conseguente gradiente di composizione chimica.

### 1.13.2 Equazioni di struttura stellare.

Possiamo adesso riscrivere le quattro equazioni di struttura stellare:

#### Fatto 13.2: Equazioni di struttura stellare

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= -\frac{Gm\rho}{r^2} \\ \frac{\partial m}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho \\ \frac{\partial l}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho \mathcal{E} \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \begin{cases} -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{\kappa} \rho}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2} & \text{Equilibrio radiativo} \\ \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{conv}} & \text{Con convezione} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.13.4)$$

Quindi conoscere la struttura di una stella significa conoscere:

- $m = m(r, t)$ .
- $P = P(r, t)$ .
- $\rho = \rho(r, t)$ .
- $L = L(r, t)$ .
- $T = T(r, t)$ .

Tuttavia non bastano queste quattro equazioni, sono incomplete perché non trattano le quantità fisiche necessarie a comprendere il comportamento della materia come la composizione chimica, sarà necessaria una estensione di qualche quantità:

- $P = P(\rho, T, \{x_i\})$ .
- $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\rho, T, \{x_i\})$  dove  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_g + \mathcal{E}_\nu$ .
- $\bar{k} = \bar{k}(\rho, T, \{x_i\})$ .

### 1.13.3 Equazione di stato

Abbiamo visto che negli interni stellari il contributo alla pressione del sistema arriva dal gas e dalla radiazione:

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}. \quad (1.13.5)$$

Visto che negli interni stellari si realizza spesso la condizione di LTE siamo in grado di calcolare la pressione di radiazione come:

$$P_\nu = \frac{u_\nu}{3} \implies P_{\text{rad}} = \frac{aT^3}{3}. \quad (1.13.6)$$

Per la pressione gassosa invece è utile fare la distinzione tra pressione dovuta agli elettroni e quella dovuta agli ioni:

$$P_{\text{gas}} = P_e + P_i. \quad (1.13.7)$$

Considerando un gas perfetto allora si ha che:

$$P_{\text{gas}} = nkT = \frac{\rho}{\mu m_H} kT. \quad (1.13.8)$$

Negli interni stellari tuttavia abbiamo spesso che il gas è completamente ionizzato, quindi possiamo dividere la densità  $n$  come

$$n = n_i + n_e. \quad (1.13.9)$$

Convienne esprimere queste densità di particelle con le rispettive abbondanze in massa:

$$n_i = \frac{\rho}{A_i m_H} X_i. \quad (1.13.10)$$

$$n_{e,i} = Z_i n_i = \frac{\rho}{A_i m_H} X_i Z_i. \quad (1.13.11)$$

Quindi per la specie  $i$ -esima abbiamo anche che:

$$n_i + n_{e,i} = \frac{\rho}{A_i m_H} X_i (1 + Z_i). \quad (1.13.12)$$

Sommando su tutte le specie otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\mu m_H} &= \sum_i n_i + n_{e,i} = \\ &= \sum_i \frac{\rho}{A_i m_H} X_i (1 + Z_i) = \\ &= \frac{\rho}{m_H} \sum_i \frac{X_i}{A_i} (1 + Z_i). \end{aligned} \quad (1.13.13)$$

Quindi abbiamo che

#### **Fatto 13.3: Relazione di gas completamente ionizzato**

Per un gas completamente ionizzato vale la seguente relazione:

$$\frac{1}{\mu} = \sum_i \frac{X_i}{A_i} (1 + Z_i). \quad (1.13.14)$$

Convienne introdurre una notazione sui singoli indici:

- $i = 1$ : Idrogeno, indichiamo con  $X$  l'abbondanza di questo elemento.
- $i = 2$ : Elio, indichiamo con  $Y$  l'abbondanza di questo elemento.
- $i = 3 \dots N$ : Metallicità, abbondanza di tutti gli elementi più pesanti dell'elio.

Inserendo questa notazione nella equazione otteniamo che:

$$\frac{1}{\mu} = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{Z}{2}. \quad (1.13.15)$$

È possibile definire anche il peso molecolare medio degli elettroni come:

$$\frac{1}{\mu_e} = \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i \approx \frac{1+X}{2}. \quad (1.13.16)$$

Il risultato può essere ottenuto dall'esplicitare la sommatoria come sopra:

$$\frac{1}{\mu_e} = X + \frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}. \quad (1.13.17)$$

E inoltre ricordare che deve sempre valere  $X + Y + Z = 1$  poiché corrisponde alla totalità degli elementi nella stella.

Notiamo che  $\mu_e$  dipende soltanto dall'abbondanza di H nella stella, questo è dovuto al fatto che per gli elementi più abbondanti vale:

$$\frac{Z_i}{A_i} \approx \frac{1}{2}. \quad (1.13.18)$$

A causa dei processi di nucleosintesi nelle stelle.

### 1.13.4 Tre casi di perdita di approssimazione di gas perfetto

Può capitare che l'approssimazione di gas perfetto diventi grossolana all'interno di ambienti stellari, i tre casi in cui questo può avvenire sono:

1. Gas quantistico: la statistica di Boltzmann fallisce.
2. Gas relativistico.
3. Gas con interazione tra le particelle.

Vediamo come cambia la situazione in ciascuno di questi casi (ed anche nelle loro combinazioni).

#### Gas quantistico

Se  $a$  è la distanza media tra le particelle del gas si ha che non è possibile trascurare gli effetti quantistici quando

$$a \sim \lambda. \quad (1.13.19)$$

In cui  $\lambda = h/p$  è la lunghezza d'onda di De Broglie.

Possiamo scrivere il raggio della particella come:

$$a = \left( \frac{4}{3} \pi n \right)^{-1/3}. \quad (1.13.20)$$

è necessario quindi introdurre delle statistiche che tengano di conto di possibili degenerazioni alla Fermi Dirac. Possiamo chiederci se degenerano prima gli elettroni o prima gli ioni, per rispondere a questo valutiamo l'impulso di elettroni e protoni isoenergetici (cineticamente):

$$\frac{P_p^2}{2m_p} = \frac{P_e^2}{2m_e} \implies P_p = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} P_e \implies P_p \gg P_e \implies \lambda_p \ll \lambda_e. \quad (1.13.21)$$

Visto che la lunghezza d'onda degli elettroni è più grande si avrà che questi degenerano prima dei protoni e quindi anche di tutti gli altri ioni più pesanti.

**Centro del sole** Nel centro del sole abbiamo  $T_c \approx 1.5 \cdot 10^7$  K,  $\rho_c \approx 150$  g/cm<sup>3</sup>. Considerando la lunghezza d'onda termica di De Broglie:

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mkT}}. \quad (1.13.22)$$

Possiamo dire che:

$$\frac{\Lambda_p}{a_p} \approx 0.03 \quad \frac{\Lambda_e}{a_e} \approx 1.3. \quad (1.13.23)$$

Quindi anche nel sole gli elettroni sono parzialmente degeneri.

**Gigante rossa** Nel caso di gigante rossa abbiamo che  $T_c \approx 10^9$  K,  $\rho_c \approx 10^6$  g/cm<sup>3</sup>, si ha facendo i conti che:

$$\frac{\Lambda_{He}}{a_{He}} \approx 0.07 \quad \frac{\Lambda_e}{a_e} \approx 8. \quad (1.13.24)$$

Gli elettroni sono quindi molto degeneri, mentre gli atomi tendono a diventare "sempre più classici".

**Nana bianca** In questo caso abbiamo che  $T_c \approx 2 \cdot 10^6$  K,  $\rho_c \approx 3 \cdot 10^6$  g/cm<sup>3</sup>, quindi:

$$\frac{\Lambda_e}{a_e} \sim 96. \quad (1.13.25)$$

In conclusione i nuclei atomici non degenerano mai (con eccezione della stella di neutroni composta da neutroni degeneri).

Per gli elettroni è evidente la necessità di correggere il modello di gas perfetto classico. Inoltre nella maggior parte dei casi siamo nella condizione in cui:

$$kT \ll \mathcal{E}_F. \quad (1.13.26)$$

Che è l'equivalente del caso in cui si ha  $T = 0$  per un sistema di fermioni. In questo caso sappiamo che la pressione dei fermioni è data da:

$$P_e = \frac{1}{20} \left( \frac{3}{\pi} \right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{m_e m_H^{5/3}} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}. \quad (1.13.27)$$

La pressione non dipende più dalla temperatura ma solo dalla densità e dalla composizione chimica.

### Gas relativistico

Nel caso di gas relativistico è necessario distinguere in due casi:

- Gas non degeneri (fino a che  $kT \ll mc^2$  possiamo considerare non relativistico)
- Gas degeneri (Fino a che  $\mathcal{E}_F \ll mc^2$  possiamo considerare non relativistico)

**Caso di gas non degeneri** Nel caso di gas non degeneri abbiamo che soltanto nelle stelle molto massicce sarà necessario considerare correzioni relativistiche.

Possiamo dimostrare questa affermazione notando che nel caso degli elettroni  $m_e c^2 \approx 0.5$  Mev, quindi servirebbero temperature dell'ordine di  $T \sim 10^9$  K che si raggiungono appunto soltanto in stelle pesanti. Nel caso dei protoni invece sono necessarie temperature dell'ordine  $T \sim 10^{13}$  K che non sono ancora mai state rilevate.

**Caso di gas degeneri** In questo caso conviene definire una quantità adimensionale:  $\chi_R$

$$\begin{aligned} \chi_R &= \frac{P_F}{m_e c} = \\ &= \frac{\hbar (3\pi^2 n_e)}{m_e c} = \\ &= \frac{\hbar}{m_e c} (3\pi^2 N_A) \left( \frac{Z}{A} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (1.13.28)$$

Dove abbiamo utilizzato il fatto che

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H} = \frac{\rho}{m_H} \sum_i \frac{X_i}{A_i} Z_i. \quad (1.13.29)$$

Considerando la stella composta da un singolo elemento per semplificare:

$$n_e = \frac{\rho}{m_H} \frac{Z}{A}. \quad (1.13.30)$$

Inoltre ricordiamo che per una nana bianca o gigante rossa la formula diventerebbe ancora più semplice poiché  $Z/A \sim 1/2$ .



## Esempi numerici

**Gigante rossa**  $T = 10^8$  K,  $\rho = 10^6$  g/cm<sup>3</sup>  $\implies \chi = 0.8$ .

**Nana bianca**  $T = 2 \cdot 10^6$  K,  $\rho = 3 \cdot 10^6$  g/cm<sup>3</sup>  $\implies \chi = 1.2$ .

Nel caso in cui  $\chi \gg 1$  siamo nel limite ultra relativistico, possiamo allora considerare il gas di elettroni completamente degeneri ( $T = 0$ ) e si ottiene una formula per la pressione dei fermioni:

$$P_e = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} \frac{hc}{8m_H^{4/3}} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{4/3}. \quad (1.13.31)$$

Possiamo notare che nel caso relativistico il termine  $\rho/\mu_e$  è elevato alla 4/3 anziché 5/3 come nel caso non relativistico. Questo significa che l'equazione di stato per elettroni degeneri è più soft nel caso relativistico. Questa cosa ha un importante riscontro nelle nane bianche: se si raggiunge una situazione in cui il gas di fermioni nel nucleo diventa relativistico allora l'unica configurazione di equilibrio è quella avente massa di Chandrasekhar (la massa oltre la quale la stella collassa).

## Gas perfetto (interazioni)

Per valutare quando il gas diventa interagente possiamo introdurre un parametro che confronti l'interazione coulombiana con l'energia termica delle particelle:

$$\Gamma = \frac{(Ze)^2}{akT}. \quad (1.13.32)$$

Per fare il calcolo consideriamo il caso in cui la materia è costituita da un'unica specie atomica (OCP: one component plasma). Abbiamo quindi i nuclei in moto in un Background di carica negativa in modo da rendere il tutto neutro.

La densità di particelle può essere scritta come:

$$n = \frac{\rho}{A_i m_H}. \quad (1.13.33)$$

Quindi possiamo procedere al calcolo di  $\Gamma_i$ :

$$\Gamma_i = \frac{(Z_i e)^2}{a_i kT} = \frac{(Z_i e)^2}{kT} \left(\frac{4}{3}\pi \frac{N_A}{A_i}\right)^{1/3} \rho^{1/3}. \quad (1.13.34)$$

Nel caso in cui gli elettroni sono non degeneri possiamo scrivere che:

$$\Gamma_e = \frac{e^2}{a_e kT} = \frac{e^2}{a_i kT} Z_i^{1/3} = \frac{\Gamma_i}{Z_i^{5/3}}. \quad (1.13.35)$$

In cui si sfrutta il fatto che

$$a_e = \left(\frac{4}{3}\pi n_e\right)^{-1/3}. \quad (1.13.36)$$

E inoltre  $n_e = Z_i n_i$  se consideriamo un gas completamente ionizzato. Possiamo allora notare che è sempre vera la disuguaglianza:

$$\Gamma_e < \Gamma_i. \quad (1.13.37)$$

Quindi se in un gas gli elettroni sono non degeneri e gli atomi sono un gas perfetto allora gli elettroni sono un gas perfetto.

Se gli elettroni sono degeneri invece possiamo scrivere che:

$$\tilde{\Gamma}_e = \frac{e^2}{a_e \mathcal{E}_F} = \dots \propto \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{-1/3}. \quad (1.13.38)$$

Quindi se per un gas non degeneri abbiamo che possiamo considerare tale gas tanto più perfetto tanto più è rarefatto per il gas degeneri abbiamo l'esatto opposto.

**Sole**  $\Gamma_i(H) = \Gamma_e \sim 0.07$ .

**Gigante rossa**  $\Gamma_i(He) \sim 0.58$ ,  $\Gamma_e \sim 0.01$ .

**Nana bianca**  $\Gamma_i(O) \sim 550$ ,  $\Gamma_e \sim 0.0008$ .

## 1.14 Lezione 14

16-04-2020

### 1.14.1 Calcolo della opacità radiativa.

Per calcolare l'opacità (radiativa) della materia è necessario considerare tutti i contributi di interazione radiazione materia.

$$\frac{1}{K_R} = \frac{\int \frac{1}{K_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \quad (1.14.1)$$

I contributi citati sopra entrano nel calcolo di  $K_\nu$ :

- Processi "Bound-Bound" (bb), i processi di assorbimento da uno stato legato ad un altro (transizioni di livello).
- Processi "Bound-Free" (bf), i processi di assorbimento in cui il fotone viene assorbito da un atomo liberando un elettrone che era legato (fotoionizzazione).
- Processi "Free-Free" (ff), una Bremsstrahlung inversa, il fotone viene assorbito da un elettrone libero (deve essere presente un atomo).
- Scattering elettronico.

Parliamo di ff per elettroni (e non di protoni o nuclei) perché è un processo che riguarda particelle poco massose, non è inoltre possibile ottenere una Bremsstrahlung di una particella nel campo di un'altra particella identica perché in tal caso il dipolo sarebbe proporzionale al centro di massa (che dovrebbe rimanere in moto rettilineo uniforme).

Per i primi 3 processi dobbiamo tener conto dei processi di emissione stimolata.

L'opacità deve dipendere molto sensibilmente dalla temperatura, questo perché l'opacità monocromatica nella maggior parte dei processi (escludendo lo Scattering elettronico) dipende in modo molto sensibile dalla frequenza. Facciamo un esempio considerando un bf sull'atomo di idrogeno, l'energia di ionizzazione di un idrogeno è:

$$\chi_{H,n} = \frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}. \quad (1.14.2)$$

Quindi il fotone assorbito deve avere una energia maggiore o uguale di questa, abbiamo allora una energia di soglia che incide su  $h\nu$ . Se andiamo a vedere la sezione d'urto di questo processo e ricordando che  $\alpha_\nu = k_\nu \rho = n\sigma_\nu$  abbiamo che per un processo bf:

$$\sigma_\nu \propto \begin{cases} 0 & h\nu < \chi \\ \frac{1}{\nu^3} & h\nu \geq \chi \end{cases}. \quad (1.14.3)$$

Questa discontinuità della sezione d'urto darà la forte dipendenza da  $T$  a  $K_R$ , infatti se siamo in un punto della stella in cui la temperatura è tale da avere molti fotoni con energia pari a  $\chi$ , in tal caso avremo il massimo della sezione d'urto e quindi della opacità. In tale situazione nel calcolo dell'integrale il valore della opacità media sarà alto, quindi ovviamente cambierà il risultato.

Spostandoci in un punto della stella in cui il numero di fotoni aventi energia  $\chi$  è piccolo allora  $K_\nu$  continuerà ad essere grande ma sarà minore il numero di fotoni che vengono assorbiti, di conseguenza sarà piccolo anche  $K_R$ .

Nel caso di ff si ha invece che  $\sigma \propto \frac{1}{\nu} \frac{1}{\nu^3}$ . Se le particelle sono distribuite come Maxwell allora anche la velocità sarà distribuita in questo modo, questo ci servirà.

Nel caso di scattering elettronico invece questa dipendenza dalla temperatura non c'è. Lo scattering Thompson ha una sezione d'urto pari a:

$$\sigma_{\text{Thompson}} = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \approx 6.65 \cdot 10^{-25} \text{ cm}^2. \quad (1.14.4)$$

Quindi in questo caso l'opacità sarà indipendente dalla temperatura, tuttavia visto che la  $\sigma_{\text{Th}}$  è molto piccola sarà importante soltanto quando è l'unico contributo alla opacità.

Nel caso di scattering elettronico nota la sezione d'urto per il calcolo della opacità si impone l'uguaglianza:

$$K_e \rho = n_e \sigma_e. \quad (1.14.5)$$

Dove  $\sigma_e = \sigma_{\text{Th}}$ , calcoliamo il valore di  $n_e$ :

$$n_e = \frac{\rho}{\mu_e m_H}. \quad (1.14.6)$$

In completa ionizzazione si ha  $\mu_e = 2/(1 + X)$  quindi:

$$K_e = \sigma_e \frac{1 + X}{2m_H} \sim 0.2 (1 + X). \quad (1.14.7)$$

Nel caso di bf consideriamo la specie atomica  $i$ -esima nel livello energetico  $n$  e la relativa sezione d'urto  $\sigma_{i,n}$ , per trovare il coefficiente di opacità dobbiamo trovare per tale specie  $K_{i,n}(\nu)\rho = n_{i,n}\sigma_{i,n}$ . Per sapere la corrispondente opacità di tale specie dobbiamo sommare su tutti i livelli e per quella totale (di tutti i processi bf) si deve sommare su tutte le specie atomiche.

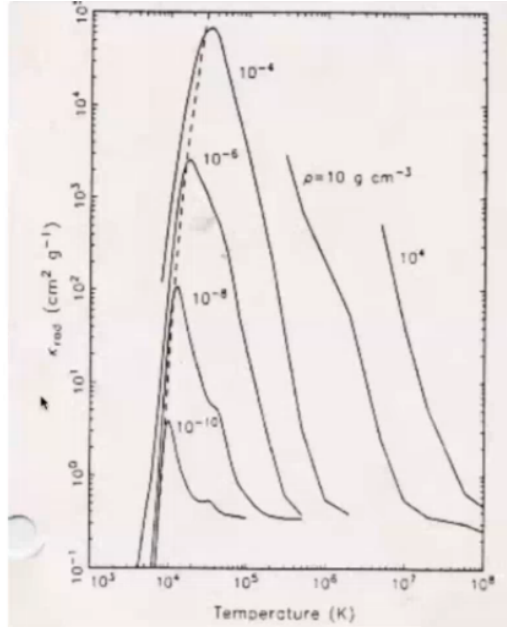


Figura 1.31: Profilo della opacità in funzione della temperatura per vari  $\rho$ .

Il motivo per cui al diminuire della temperatura l'opacità cala bruscamente è l'interazione interazione materia.

Nel caso di bb per l'elemento dominante (H) tra il fondamentale ed il primo eccitato ci sono 10.2 e, al diminuire della temperatura il popolamento dei livelli atomici diminuisce e se la temperatura è suffic. bassa abbiamo tutti gli atomi nel fondamentale. A questo punto soltanto i fotoni che avranno energia maggiore di 10 eV verranno assorbiti, ma al diminuire della temperatura saranno sempre meno i fotoni che riescono ad averla, il materiale diventa quindi trasparente.

Nella regione in cui dopo il massimo l'opacità torna a diminuire (questa volta all'aumentare della temperatura) si ha l'espressione dovuta a Kramers:

$$k \propto \rho T^{-3.5}. \quad (1.14.8)$$

L'andamento che si appiattisce è infine dovuto allo scattering elettronico.

Nel caso dell'atmosfera del sole dovremmo essere in una situazione di opacità bassissima, invece noi sappiamo che tale atmosfera è opaca. Questo apparente controsenso è dovuto allo ione  $H^-$ : un atomo di idrogeno neutro che riesce a catturare un elettrone libero. Questo elettrone in più è debolmente legato all'atomo ( $E_{\text{legame}} \approx 0.75$  eV), quindi nella atmosfera solare abbiamo molti fotoni con energia sufficiente a strappare tale elettrone rendendo quindi tale atmosfera opaca.

Gli elettroni che si legano agli idrogeni vengono dai metalli all'interno della stella.

Notiamo ancora che il picco della opacità si ha per regioni di ionizzazione degli elementi H e He: in tali regioni il gradiente radiativo sarà molto grande.

Quindi nelle regioni di parziale ionizzazione dobbiamo aspettarci che il criterio di Swartzchild cada e la stella inneschi la convezione (questo è il motivo per cui si ha convezione negli involucri stellari).

In conclusione si ha che l'opacità sarà la somma di vari contributi:

$$k_{\nu,\text{tot}} = k_e + (k_{bb,\nu} + k_{bf,\nu} + k_{ff,\nu}) \left(1 - e^{-h\nu/kT}\right). \quad (1.14.9)$$

In cui abbiamo un fattore correttivo dovuto alla emissione stimolata.

Questo fattore lo si può ottenere facendo uso dei coefficienti di Einstein. Prendiamo un atomo a due livelli con un  $\Delta E = h\nu_0$ , per tale atomo si ha

- $A_{21}$  che è legato alla emissione spontanea (da la probabilità di transizione per unità di tempo nella emissione spontanea).
- $B_{12}$  Legato all'assorbimento.
- $B_{21}$  Transizione tra 2 e 1 per l'emissione stimolata.

Guardando all'assorbimento si ha che la probabilità di transizione per unità di tempo di passaggio da 1 a 2:

$$B_{12}\bar{J}. \quad (1.14.10)$$

Dove abbiamo che

$$\bar{J} = \int_0^\infty J_\nu \phi(\nu) d\nu. \quad (1.14.11)$$

E inoltre si aveva anche che l'intensità specifica:

$$J_\nu = \frac{I_\nu d\Omega}{4\pi}. \quad (1.14.12)$$

Mentre l'intensità  $J_\nu$  mediata sul profilo della transizione è  $\phi(\nu)$  normalizzato.

$$\int \phi(\nu) d\nu = 1. \quad (1.14.13)$$

Nel caso di emissione stimolata invece:

$$B_{21}\bar{J}. \quad (1.14.14)$$

Ci da la proprietà di transizione dal livello 2 al livello 1. Assumeremo che l'effetto di questi processi di riga sia lo stesso in un verso o nell'altro.

I coefficienti di Einstein sono legati tra loro, all'equilibrio termodinamico ad esempio si ha:

$$n_1 B_{12} \bar{J} = n_2 A_{21} + n_2 B_{21} \bar{J}. \quad (1.14.15)$$

Dove  $n_i$  è il numero di atomi nel livello i. Da tale relazione ricaviamo  $\bar{J}$ :

$$\bar{J} = \frac{n_2 A_{21}}{n_1 B_{12} - n_2 B_{21}} = \frac{A_{21}/B_{21}}{\frac{n_1}{n_2} \frac{B_{12}}{B_{21}} - 1}. \quad (1.14.16)$$

All'equilibrio termodinamico si ha che

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{g_1}{g_2} e^{h\nu/kT}. \quad (1.14.17)$$

Inoltre abbiamo anche che  $I_\nu = B_\nu = J_\nu$ , e si ha anche che  $\bar{J} \approx J_\nu$  poiché se la riga è abbastanza stretta si ha che  $B_\nu$  cambia poco nella riga. Sostituendo:

$$g_2 B_{12} = g_1 B_{21}. \quad (1.14.18)$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = 2 \frac{h}{c^2} \nu^3. \quad (1.14.19)$$

Queste relazioni sono generali e dipendono solo dalle proprietà strutturali degli atomi.

Possiamo così calcolare i coefficienti di emissione e di assorbimento in termini di coefficienti di Einstein:

$$j_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} n_2 A_{21} \phi(\nu - \nu_0). \quad (1.14.20)$$

Per il coefficiente di emissione totale sulla linea devo integrare quest'ultimo sul profilo di riga:

$$j_{\nu,0} = \int_0^\infty j_\nu d\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} n_2 A_{21}. \quad (1.14.21)$$

Inoltre abbiamo anche che:

$$\int h\nu_0 \phi(\nu - \nu_0) d\nu = h\nu_0. \quad (1.14.22)$$

Possiamo calcolare allora il coefficiente di assorbimento  $\alpha_\nu$ :

$$\alpha_\nu = \frac{h\nu}{4\pi} [n_1 B_{12} \phi(\nu - \nu_0) - n_2 B_{21} \chi(\nu - \nu_0)] = \frac{h\nu}{4\pi} n_1 B_{12} \phi(\nu - \nu_0) \left[ 1 - \frac{n_2 g_1 \chi(\nu - \nu_0)}{n_1 g_2 \phi(\nu - \nu_0)} \right]. \quad (1.14.23)$$

Nella quale abbiamo sfruttato la relazione tra i coefficienti di Einstein.  
Consideriamo il caso in cui  $\chi = \varphi$  :

$$\alpha_{\nu_0} = \int_0^\infty \alpha_\nu d\nu = \frac{h\nu_0}{4\pi} (n_1 B_{12} - n_2 B_{21}). \quad (1.14.24)$$

Dove si ha che:

$$\int h\nu_0 \varphi(\nu - \nu_0) d\nu = h\nu_0. \quad (1.14.25)$$

$$\int h\nu_0 \chi(\nu - \nu_0) d\nu = h\nu_0. \quad (1.14.26)$$

In conclusione visto che vale Boltzmann si ha che:

$$1 - \frac{n_2 g_1 \chi(\nu - \nu_0)}{n_1 g_2 \varphi(\nu - \nu_0)} = 1 - e^{-h\nu_0/kT}. \quad (1.14.27)$$

Che è proprio il termine correttivo.

### 1.14.2 Contributo dovuto alle reazioni nucleari.

Il contributo dovuto alle reazioni nucleari lo abbiamo nominato come  $\mathcal{E}$ , lo abbiamo introdotto confrontando i tempi scala. Avevamo affermato che se all'interno della stella non vi fossero reazioni nucleari allora le stelle si evolvono con tempi scala dell'ordine di quello di Kelvin Halmotz ( $30 \cdot 10^6$  yr) quindi era emersa la necessità di un'altra sorgente per avere tempi di evoluzione più simili a quelli "osservati". Da queste motivazioni è sorta l'intuizione di proporre come sorgente di energia stellare le reazioni nucleari.

## 1.15 Lezione 15

20-04-2020

### 1.15.1 Reazioni nucleari di fusione.

In generale possiamo dire che quando abbiamo un nucleo atomico si massa  $m_x$  che ha  $Z$  protoni e  $N$  neutroni allora sappiamo che l'energia di legame di tale nucleo può essere scritta come

$$E = (m_x - Zm_p - Nm_n)c^2. \quad (1.15.1)$$

In realtà è molto più utile l'energia di legame per nucleone:

$$E_b = \frac{E}{A}. \quad (1.15.2)$$

Conosciamo l'andamento della Binding Energy, la curva cresce rapidamente nella prima parte e raggiunge un massimo nel ferro per poi scendere.

Il nucleo più legato di tutti è il Nichel 62 (in generale i nuclei che si trovano in un intorno del ferro sono quelli più legati e vengono chiamati elementi del gruppo del ferro). Questo significa che il comportamento delle reazioni di fusione nucleare è diverso se stiamo a destra o a sinistra del picco.

Facendo fondere due nuclei a sinistra otteniamo un nucleo risultante più legato dei reagenti, ci spostiamo quindi verso il picco della curva. Per questi reagenti la reazione sarà esotermica: il difetto di massa viene convertito in energia.

Viceversa a destra del picco la fusione nucleare produce nuclei sempre meno legati: il processo di fusione sarà endotermico per questi elementi. Per fare processi esotermici con questi ultimi devo fare la fissione nucleare.

Questa caratteristica nucleare influirà sul destino delle stelle. Inoltre abbiamo che le reazioni che possono liberare più energia sono quelle tra elementi con  $Z$  più basso possibile (H), andando verso il massimo l'energia liberata è sempre inferiore.

La massima energia che posso liberare è quella che ho convertendo l'idrogeno nel ferro, facendo il calcolo abbiamo che la frazione di energia a riposo che possiamo liberare è al massimo lo 0.9%.

Prendiamo una reazione del tipo:



In modo equivalente la reazione si scrive  $A(x, y)B$ , la quantità di energia che viene liberata nella reazione si dice  $Q$ -valore ed è data da:

$$Q = (m_x + m_A - m_y - m_B)c^2. \quad (1.15.4)$$

Se la reazione è esotermica si ha  $Q > 0$  altrimenti  $Q < 0$ . Per poter effettuare le reazioni nucleari è necessario vincere la repulsione coulombiana tra i nuclei, se prendiamo un atomo con numero di massa  $A = Z + N$  allora possiamo dire che  $R_{\text{nucleo}}(A) = 1.3 \cdot A^{1/3}$  fm. La barriera di repulsione coulombiana tra due nuclei di numero atomico  $Z_1$  e  $Z_2$  sarà:

$$E_c = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} \sim \frac{Z_1 Z_2}{A^{1/3}} 1.1 \text{ MeV}. \quad (1.15.5)$$

Quindi anche nel caso più favorevole di tutti (protoni) otteniamo una barriera coulombiana dell'ordine del MeV. Questa barriera è grande rispetto alla energia termica che le particelle hanno a disposizione nei nuclei delle stelle.

$$E = kT \sim 0.86 \cdot 10^4 T \text{ MeV}. \quad (1.15.6)$$

Nella quale la temperatura è espressa in milioni di gradi.

Nel centro del sole ad esempio ( $T \sim 15 \cdot 10^7$  K) allora nel caso di due protoni otteniamo che  $E_T \sim \text{keV} \ll E_c = 1.1 \text{ MeV}$ . Se considerassi nuclei più pesanti allora sarebbe ancora più difficile superare la barriera coulombiana per fare la fusione.

Notiamo che le temperature necessarie per vincere la barriera coulombiana dovrebbero essere di 3 ordini maggiori (miliardi di gradi) che non è possibile avere nelle stelle.

Visto che gli interni stellari sono in condizioni di LTE possiamo dire che le particelle (in questo caso i nuclei atomici) sono distribuite con una Maxwell-Boltzmann, potrei pensare che nella coda della distribuzione ci siano particelle con una energia tale da superare tale barriera. Stimiamo allora il numero di particelle con una energia relativa tale da superare la barriera

$$N = \exp\left(-\frac{E_c}{kT}\right) \approx \exp(-10^3) \sim 10^{-434}. \quad (1.15.7)$$

Quindi un numero estremamente piccolo di atomi ha l'energia sufficiente (in una stella abbiamo un numero di particelle dell'ordine di  $10^{57}$ ).

Classicamente non è possibile avere particelle in grado di superare la barriera coulombiana nelle stelle. Per risolvere questo problema è necessario ragionare quantisticamente e tener di conto dell'effetto tunnel. Grazie alle proprietà ondulatorie la particella ha una probabilità non nulla di penetrare la barriera e tale probabilità è detta probabilità di Gamov.

$$P_G = e^{-2\pi\eta}. \quad (1.15.8)$$

Con

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v}. \quad (1.15.9)$$

Parlando della Brehmsstrahlung inversa abbiamo detto che se siamo in una condizione di equilibrio termodinamico in cui particelle vanno come distrib. di Maxwell allora anche la velocità relativa delle particelle è distribuita come Maxwell. Questa velocità sarà legata alla temperatura del gas in cui avvengono le reazioni.

Possiamo riscrivere  $\eta$  come:

$$\eta = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar \sqrt{E}} \sqrt{\frac{m}{2}}. \quad (1.15.10)$$

Dove  $m$  è la massa ridotta delle due particelle. La probabilità di superare per effetto tunnel la barriera coulombiana decresce esponenzialmente con la carica, inoltre maggiore è l'energia e più alta è la probabilità di superare la barriera coulombiana.

Dobbiamo aspettarci che sarà necessario raggiungere un compromesso tra due fenomeni diametralmente opposti: da una parte dobbiamo superare la barriera coulombiana quindi vorrei avere la maggior velocità possibile, d'altra parte però vale LTE, quindi le particelle sono distribuite con Maxwell quindi aumentando la velocità richiesta saranno sempre meno le particelle aventi tale velocità (la temperatura è fissata: l'energia del picco di Maxwell è fissata).

Ci dobbiamo aspettare che le reazioni nucleari avvengano in una regione di compromesso detta finestra di Gamov.

Possiamo schematizzare una reazione nucleare

$$x + A \rightarrow y + B. \quad (1.15.11)$$

come un processo a due step:

- La barriera coulombiana viene superata e si ha:  $x + A \rightarrow C^*$  con  $C^*$  un nucleo composto che in generale si trova in uno stato eccitato.
- $C^* \rightarrow y + B$ .

La probabilità che il processo intero avvenga è data dal prodotto della probabilità di questi due processi. Inoltre per il secondo processo possono avvenire svariate cose:

$$\begin{aligned} C^* &\rightarrow x + A \\ C^* &\rightarrow x + A^* \\ C^* &\rightarrow c + \gamma \\ C^* &\rightarrow y + B. \end{aligned} \tag{1.15.12}$$

Quale di queste effettivamente avvenga verrà deciso dal tipo di forza che media a livello nucleare la reazione (può avvenire interazione forte, elettromagnetica o debole). Possiamo dire che le interazioni mediate da una interazione forte avranno una sezione d'urto molto più grande di quella delle reazioni mediate dalla interazione elettromagnetica. A loro volta le reazioni mediate da una reazione elettromagnetica hanno una sezione d'urto molto più grande di quella delle interazioni deboli.

La sezione d'urto del processo che ci interessa sarà una funzione della energia e dipenderà da

- $P_G(E)$ .
- $\pi\chi^2$  che è una sezione d'urto geometrica (valutata a livello quantistico).
- $S$  che è un termine dipendente dalle proprietà nucleari.

Per il secondo punto (sezione d'urto geometrica) abbiamo che in MQ le veci di raggio sono fatte dalla lunghezza d'onda di De Broglie:

$$\chi = \frac{\hbar}{p}. \tag{1.15.13}$$

Quindi questo termine da un contributo del tipo:

$$\pi\chi^2 \propto \frac{1}{E}. \tag{1.15.14}$$

Possiamo allora scrivere la sezione d'urto come:

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta}. \tag{1.15.15}$$

Il termine  $S(E)$  è detto fattore astrofisico: lì viene scaricata tutta la fisica nucleare (tipi di interazione ecc...). Ricordiamo che la sezione d'urto è misurata tipicamente in Barn: 1 barn =  $10^{-24}$  cm<sup>2</sup>. Riprendiamo l'equazione di struttura stellare sull'energia:

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \mathcal{E}. \tag{1.15.16}$$

Abbiamo detto che in  $\mathcal{E}$  (coefficiente di produzione di energia (per unità di tempo e massa)), in tale coefficiente c'erano più contributi:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_N + \mathcal{E}_g - \mathcal{E}_\nu. \tag{1.15.17}$$

Vediamo come è fatto  $\mathcal{E}_N$ , troviamo prima il rate di reazioni nucleari e poi potremmo calcolare tale coefficiente. Immaginiamo di avere un fascio  $j$  di particelle che si muovono con velocità  $v$  verso un bersaglio costituito da particelle di tipo  $i$ .

Una particella  $j$  nell'unità di tempo interagisce con  $n_i\sigma v$  particelle bersaglio, dove  $n_i$  è il numero di particelle per unità di volume. Il numero di reazioni tra particelle  $i$  e  $j$  si otterrà moltiplicando per  $n_j$  l'ultima quantità scritta.

$$n_{ij} = n_i n_j \sigma v. \tag{1.15.18}$$

Questo è il numero di reazioni per unità di volume tra le particelle  $i$  e le particelle  $j$ . Se le particelle in questione fossero uguali allora dovrei dividere per 2 per evitare i doppi conteggi. Quindi la forma più generale sarà:

$$n_{ij} = \frac{n_i n_j}{1 + \delta_{ij}} \sigma v. \tag{1.15.19}$$

Nelle stelle le particelle non hanno tutte la stessa velocità, sono distribuite con la Maxwell-Boltzmann, quindi dobbiamo mediare  $\sigma v$  con la funzione di Maxwell:

$$\langle \sigma v \rangle = \int \sigma(v) v f(v) dv. \tag{1.15.20}$$

Possiamo anche scrivere questo integrale in termini di energia:

$$\langle \sigma v \rangle = \int \sigma(E) v f(E) dE. \quad (1.15.21)$$

La distribuzione di Maxwell in termini dell'energia è:

$$f(E) dE = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{E}}{(kT)^{3/2}} e^{-E/kT} dE. \quad (1.15.22)$$

A questo punto possiamo scrivere il rate come:

$$n_{ij} = \frac{n_i n_j}{1 + \delta_{ij}} \langle \sigma v \rangle. \quad (1.15.23)$$

Se siamo in grado di calcolare tale media allora abbiamo quasi raggiunto il nostro obiettivo (trovare  $\mathcal{E}_N$ ). Per le particelle  $i$  e  $j$  il coefficiente  $\mathcal{E}$  corrispondente sarà:

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\rho} Q_{ij}. \quad (1.15.24)$$

Quindi se conosco il  $Q$  valore della reazione posso calcolare tale coefficiente per quella determinata reazione. Se facciamo questa operazione per tutte le reazioni che sono attive allora otteniamo  $\mathcal{E}_N$  come somma. Riscriviamo il termine  $\mathcal{E}_{ij}$ :

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\rho} Q_{ij} = \frac{1}{1 + \delta_{ij}} \frac{x_i x_j}{A_i A_j} \frac{\rho}{m_H^2} \langle \sigma v \rangle. \quad (1.15.25)$$

Dove abbiamo usato anche il fatto che  $n_i = \frac{\rho}{A_i m_H} X_i$ . Risolviamo adesso l'integrale per  $\langle \sigma v \rangle$ , sostituiamo  $\sigma$ :

$$\langle \sigma v \rangle = \int \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta} f(E) dE = \frac{2^{3/2}}{\sqrt{\pi m}} \frac{1}{(kT)^{3/2}} \int_0^\infty S(E) \exp \left[ -\frac{E}{kT} - \frac{\beta}{\sqrt{E}} \right] dE. \quad (1.15.26)$$

Dove

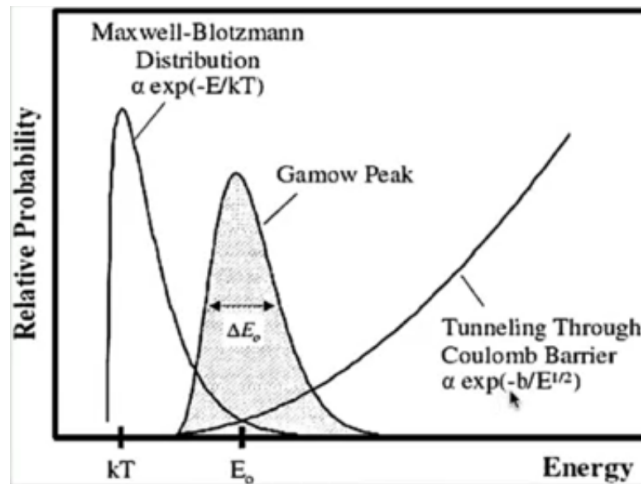
$$\beta = \pi \sqrt{2m} \frac{Z_i Z_j}{\hbar} e^2. \quad (1.15.27)$$

Se siamo lontani dalle risonanze il fattore astrofisico  $S(E)$  è una funzione che dipende "lentamente" dall'energia, possiamo quindi portarlo fuori dall'integrale.

Questo integrale si riduce quindi a:

$$\int_0^\infty \exp \left[ -\frac{E}{kT} - \frac{\beta}{\sqrt{E}} \right] dE. \quad (1.15.28)$$

Quindi vediamo che la funzione integranda è il prodotto di due esponenziali che hanno contributi opposti su  $\langle \sigma v \rangle$ .



Vediamo dalla immagine che siamo nella coda dell'esponenziale della distribuzione di Maxwell. Aumentando la carica delle particelle la curva esponenziale si sposta verso destra, di conseguenza anche il picco di Gamov si sposta a destra. Questo avrà delle importanti ripercussioni.

Da questo grafico possiamo intuire che nelle stelle visto che le reazioni avvengono ad energie che sono piccole



rispetto alla interazione coulumbiana abbiamo una forte dipendenza dalla temperatura e dalla carica. Per questo nelle stelle le fasi di combustione principali avvengono in modo separato: prima avvengono le combustioni con gli elementi di carica più bassa (H) e successivamente potremmo avere combustioni di elementi più pesanti. Vediamo adesso il valore del picco di Gamov trovando il massimo di  $\langle \sigma v \rangle$ , quindi dobbiamo solo trovare il minimo della funzione contenuta nell'esponenziale (all'interno dell'integrale). Si trova banalmente che:

$$E_0 = \left( \frac{\beta}{2} kT \right)^{\frac{2}{3}} = \left( \pi \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{Z_i Z_j}{\hbar} e^2 kT \right)^{\frac{2}{3}}. \quad (1.15.29)$$

In cui abbiamo sostituito il coefficiente  $\beta$ . Scrivendola anche in termini di peso atomico:

$$E_0 = 5.665 \text{ keV} \left( Z_i^2 Z_j^2 \frac{A_i A_j}{A_i + A_j} \right)^{\frac{1}{3}} T_7^{-\frac{1}{3}}. \quad (1.15.30)$$

Dove  $T_7$  indica la temperatura in  $10^7$  K.

Facendo il conto nel centro del sole ( $T_c = 1.5 \cdot 10^7$  K) abbiamo che  $E_0 \sim 5.5$  keV (per il processo p+p).

Possiamo anche fare il confronto tra l'energia di Gamov e  $kT$  per capire quanto siamo lontani dal picco termico.

$$\frac{E_0}{kT} \sim 6.574 \left( Z_i^2 Z_j^2 \frac{A_i A_j}{A_i + A_j} \right)^{\frac{1}{3}} T_7^{-\frac{1}{3}}. \quad (1.15.31)$$

Per il centro del sole il rapporto vale 4.6. Se facciamo lo stesso calcolo per il carbonio 12 alla stessa temperatura tale rapporto vale 113.

Questo spiega perché nel centro del sole oggi avvengono le combustioni di idrogeno: il picco di Gamov per il carbonio è lontanissimo.

Riprendiamo l'espressione per  $\langle \sigma v \rangle$ :

$$\langle \sigma v \rangle = \dots \int_0^\infty e^{f(E)} dE. \quad (1.15.32)$$

In cui  $f(E) = -\frac{E}{kT} - \frac{\beta}{\sqrt{E}}$ . Si è soliti introdurre una quantità  $\tau$  tale che:

$$\tau = \frac{3E_0}{kT} = 3 \left[ \pi \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{Z_i Z_j e^2}{\hbar} \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (1.15.33)$$

Sostituendo al posto di  $E$  nella espressione per  $f$  l'energia di Gamov infatti si ottiene:

$$f(E_0) = -\tau. \quad (1.15.34)$$

Quindi la funzione integranda in corrispondenza della energia di Gamov ha un massimo e viene indicata come:

$$I_{\text{Max}} = e^{-\tau} = e^{-\frac{3E_0}{kT}}. \quad (1.15.35)$$

Visto l'andamento del picco di Gamov al variare della temperatura ( $T^{\frac{2}{3}}$ ) la funzione  $I_{\text{max}}$  cresce esponenzialmente con la temperatura.

Abbiamo quindi che la funzione integranda e quindi  $\langle \sigma v \rangle$  dipenderà molto dalla temperatura.

Inoltre  $\tau$  dipende dalla carica delle particelle che interagiscono (direttamente proporzionale) quindi  $I_{\text{max}}$  decresce esponenzialmente con la carica.

Per esempio nel centro del sole abbiamo che

- $p + p$ :  $E_0 \approx 5.5 \text{ keV} \implies I_{\text{max}} = 1.1 \cdot 10^{-6}$ .
- $p + {}^{14}\text{N}$ :  $E_0 \approx 26.5 \text{ keV} \implies I_{\text{max}} = 1.8 \cdot 10^{-27}$ .
- $\alpha + {}^{12}\text{C}$ :  $E_0 = 56 \text{ keV} \implies I_{\text{max}} = 3 \cdot 10^{-57}$ .

Quindi oggi nel centro del sole è attiva la prima reazione, la seconda è parzialmente attiva, la terza non è attiva. Visto che le reazioni nelle stelle avvengono ad energie molto basse rispetto alla barriera di interazione coulumbiana e quindi sono poco efficienti. Questa bassa energia è la principale difficoltà nel riprodurre tali reazioni qua sulla terra.

Sviluppiamo  $f(E)$  attorno all'energia di Gamov:

$$f(E) \approx f(E_0) + f'(E_0)(E - E_0) + \frac{1}{2} f''(E_0)(E - E_0)^2. \quad (1.15.36)$$

Ovviamente la derivata prima si annulla in  $E_0$ , sostituendo abbiamo che:

$$f(E) \approx -\tau - \frac{\tau}{4} \left( \frac{E}{E_0} - 1 \right)^2. \quad (1.15.37)$$

Sostituiamo questo sviluppo nell'integrando:

$$J = \int_0^\infty e^{f(E)} dE \approx \int_0^\infty \exp \left( -\tau - \frac{\tau}{4} \left( \frac{E}{E_0} - 1 \right)^2 \right) dE = \frac{2}{3} kT \tau^{\frac{1}{2}} e^{-\tau} \int_{-\sqrt{\tau}/2}^\infty e^{-\xi^2} d\xi. \quad (1.15.38)$$

In cui con un cambio di variabile abbiamo introdotto la :

$$\xi = \left( \frac{E}{E_0} - 1 \right) \frac{\sqrt{\tau}}{2}. \quad (1.15.39)$$

Se potessimo fare l'integrale tra  $-\infty$  e  $\infty$  allora conosceremo il risultato, se lo estendiamo facciamo un errore del 3% perché la funzione integranda è diversa da zero solo in un intorno stretto della energia di Gamov, estendendo e calcolando tale integrale si ha che:

$$J \approx kT \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \tau^{\frac{1}{2}} e^{-\tau}. \quad (1.15.40)$$

Con questo sviluppo possiamo ottenere

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{2}{m}} \frac{S(0)}{\sqrt{kT}} \tau^{\frac{1}{2}} e^{-\tau}. \quad (1.15.41)$$

Dalla definizione di  $\tau$  si ha che

$$\frac{1}{\sqrt{kT}} \sim \tau^{\frac{3}{2}}. \quad (1.15.42)$$

Quindi abbiamo che

$$\langle \sigma v \rangle \sim \tau^2 e^{-\tau}. \quad (1.15.43)$$

Ipotizziamo di avere un determinato  $\langle \sigma v \rangle_0$  alla temperatura  $T_0$  di riferimento, allora in un intorno di questa temperatura dimostriamo che:

$$\langle \sigma v \rangle = \langle \sigma v \rangle_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^\nu. \quad (1.15.44)$$

Dimostriamo adesso che tale potenza è data da

$$\nu = \frac{\partial \ln \langle \sigma v \rangle}{\partial \ln T} = \frac{\tau - 2}{3}. \quad (1.15.45)$$

Visto che  $\tau \sim T^{-\frac{1}{3}}$  e che  $\langle \sigma v \rangle \sim \tau e^{-\tau}$  possiamo dedurre anche che  $\langle \sigma v \rangle \sim T^{-\frac{2}{3}} e^{-\tau}$ . Prendiamo a questo punto i logaritmi:

$$\ln (\langle \sigma v \rangle) = \text{cost} - \frac{2}{3} \ln T - \tau. \quad (1.15.46)$$

E quindi:

$$\frac{\partial \ln (\langle \sigma v \rangle)}{\partial \ln T} = -\frac{2}{3} - \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2}{3} - \tau \frac{\partial \ln \tau}{\partial \ln T}. \quad (1.15.47)$$

Visto l'andamento di  $\tau$  otteniamo la relazione cercata. Otteniamo allora il risultato importante: la sezione d'urto in un intorno di una data temperatura cresce come una potenza della temperatura stessa dipendente da  $\tau$ . Per questo ci dobbiamo aspettare che la dipendenza del  $\langle \sigma v \rangle$  e quindi la dipendenza del reaction rate e dunque la dipendenza del coefficiente di produzione di energia dalla temperatura sia tanto più forte quanto più è maggiore la carica delle particelle in gioco.

Questa caratteristica (insieme al calore specifico negativo) sono quelle che determinano le qualità di termostato stellare di cui abbiamo già parlato.

## 1.16 Lezione 16

23-04-2020

Facciamo un esempio per vedere come nelle stelle le reazioni nucleari avvengono lentamente, prendiamo il centro del sole ( $T_{c,\odot} = 15 \cdot 10^6$  K), il fattore astrofisico  $S(E)$  della reazione  $p + p$  nel sole è:

$$S_{c,p+p} = S_0 = 3,89 \cdot 10^{-25} \text{ MeV barn}. \quad (1.16.1)$$

Quindi si ottiene per la  $p + p$ :

$$\langle \sigma v \rangle \approx 10^{-43} \text{ cm}^3/\text{s}. \quad (1.16.2)$$

Nota questa quantità possiamo calcolare il numero di protoni per unità di volume nel centro del sole  $n_p \sim 10^{26} \text{ cm}^3$  in modo tale da ottenere il reaction rate:

$$n_{pp} = \frac{n_p^2}{2} \sim 10^9 \text{ cm}^3 \text{ s}. \quad (1.16.3)$$

Per capire la lentezza di tale reazione possiamo confrontarla con il rate di collisioni  $\sigma_{\text{coll}} v$ , possiamo farlo prendendo la sezione d'urto geometrica, la velocità quella termica dei protoni:

$$v = \sqrt{\frac{3kT}{m_p}} \approx 6 \cdot 10^7 \text{ cm/s}. \quad (1.16.4)$$

Facendo il rapporto tra questo Rate di collisioni e quello di reazione nucleare della  $p + p$  scopriamo che:

$$\frac{\langle \sigma v \rangle}{\sigma_{\text{coll}} v} \sim 10^{-25}. \quad (1.16.5)$$

Che è molto basso, quindi la stragrande maggioranza dei protoni che si urtano nel centro del sole non fa reazione nucleare perché non supera la barriera coulumbiana (fa solo scattering).

È ancora più piccola invece la frazione di protoni che, superata la barriera coulumbiana tramite effetto tunnel riuscirà a fare le reazioni nucleari.

Le reazioni nucleari all'interno delle stelle sono quindi molto poco efficienti.

Un altro modo per vedere questa lentezza è provare a quantificare il tempo scala in cui viene modificata la composizione chimica. Se studiamo sempre la  $p + p$  abbiamo una reazione che consuma idrogeno, possiamo vedere come cambia il numero di protoni per unità di tempo (supponendo che i protoni vengano consumati solo dalla  $p + p$ )

$$\frac{dn_p}{dt} = -n_{pp} (1 + \delta_{ij}) = -\frac{n_p}{\tau_p}. \quad (1.16.6)$$

Dove  $\tau_p$  è la vita media dei protoni, confrontando  $n_{pp}$  con quello visto sopra scopriamo che:

$$\tau_p = \frac{1}{n_p \langle \sigma v \rangle} \sim 10^{17} \text{ s}. \quad (1.16.7)$$

Dove abbiamo inserito i dati del centro del sole  $n_p \sim 10^{26}$ ,  $\langle \sigma v \rangle \sim 10^{-43}$ .

Il tempo ottenuto è dell'ordine di 3 miliardi di anni, quindi deve passare parecchio tempo prima che si bruci un protone. . .

Abbiamo considerato fin'ora delle reazioni come se non ci fossero elettroni in circolazione (come se i nuclei fossero nudi). Ovviamente nelle regioni centrali delle stelle i nuclei sono ionizzati, tuttavia gli elettroni liberi sono ancora presenti. I nuclei sono immersi in un background di elettroni, tali elettroni schermeranno i nuclei rendendo più bassa la barriera coulumbiana.

Possiamo vedere che il potenziale di un nucleo si trasforma come:

$$\frac{Ze}{r} \rightarrow \frac{Ze}{r} e^{-r/\lambda_D}. \quad (1.16.8)$$

Dove  $\lambda_D$  è la lunghezza d'onda di Debye:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi e^2 \sum n_e^i (Z_i + 1)}}. \quad (1.16.9)$$

Dove

$$n_e^i = \frac{\rho}{m_H} \frac{X_i Z_i}{A_i}. \quad (1.16.10)$$

Nelle stelle solitamente siamo in una situazione di schermo debole:

$$\lambda_D \gg r_{\text{min}}. \quad (1.16.11)$$

Dove  $r_{\text{min}}$  è la distanza minima raggiunta dalle particelle nell'urto

$$\frac{\lambda_D}{r_{\text{min}}} \sim 50 - 100. \quad (1.16.12)$$

quindi si ha sempre che  $r/\lambda_D \sim 0$ . Gli elettroni allora non saranno distribuiti in modo omogeneo ma saranno distribuiti attorno ai nuclei e tenderanno a schermare in parte il campo di questi ultimi, tuttavia lo schermaggio è molto debole ad abbiamo solo una piccola variazione dal campo coulombiano.

Le formule viste sopra restano giuste, vanno solo corrette per un fattore:

$$f = e^{E_D/kT}. \quad (1.16.13)$$

In cui abbiamo introdotto l'energia di Debye

$$E_D = \frac{Z_i Z_j e^2}{\lambda_d}. \quad (1.16.14)$$

Grazie al fattore  $f$  il reaction rate viene leggermente amplificato.

Abbiamo visto che in caso di schermo non degenerare in assenza di sorgenti nucleari (o con sorgenti non in grado di compensare la luminosità) allora sappiamo che:

$$L > 0 \implies \dot{\Omega} < 0 \quad \dot{T} > 0. \quad (1.16.15)$$

Ora sappiamo anche che, poichè la barriera coulmbiana è grande rispetto a  $kT$  abbiamo reazioni in cui il  $\langle \sigma v \rangle$  dipende in modo sensibile dalla temperatura:

$$\langle \sigma v \rangle \sim T^n. \quad (1.16.16)$$

Queste due condizioni insieme formano il famoso termostato stellare.

### 1.16.1 Riassunto sui processi di evoluzione stellare

La stella alla nascita sarà troppo fredda per le reazioni nucleari, per questo contrae ed aumenta la temperatura; se si raggiunge la temperatura sufficiente per l'innesco  $p + p$  allora si passa ad una situazione di lungo equilibrio in cui si ha termostato stellare (stop-nucleare).

Successivamente le fusioni termonucleari modificano la composizione chimica aumentando il peso molecolare aumenta. Aumentano tale peso la stella continua a contrarsi con tempi scala nucleari.

Una volta che finisce l'idrogeno se la stella non ha la temperatura sufficiente ad innescare subito la reazione successiva (He) torna sotto la guida del Viriale ricominciando a contrarsi e scaldarsi.

La durata dello stop nucleare dipende dal quantitativo di combustibile e dall'energia rilasciata per unità di energia rilasciata per unità di massa da tale combustibile.

Visto che nella combustione ( $H \rightarrow He$ ) viene rilasciato lo 0.7% dell'energia a riposo (80% di tutta l'energia che può essere rilasciata da tutte le reazioni nucleari) questa fase sarà molto più lunga della successiva (che rilascia lo 0.0065 % dell'energia a riposo).

Anche nella eventualità in cui la luminosità sia la stessa dobbiamo aspettarci che la seconda fase sia più breve della prima.

Nelle reazioni successive la situazione sarà ancora più vistosa (avvicinandoci al picco del ferro l'energia rilasciata diminuisce sempre di più), dobbiamo allora aspettarci che la durata delle fasi sia molto diversa e che andando verso il picco tali durate diminuiscano.

Vedremo che questa cosa sarà accentuata ancora di più dal fatto che la luminosità della stella aumenta fase dopo fase, quindi serve sempre più energia.

Il termostato può essere interrotto se la stella diventa degenerare (in tutta la stella nelle nane bianche o in una regione nelle giganti rosse), in questo caso la pressione è dominata dagli elettroni degeneri. Nel caso di degenerazione completa la pressione dipenderà unicamente dalla densità e non dalla temperatura.

Se accendiamo una reazione nucleare in un ambiente elettronicamente degenerare entriamo in una situazione pericolosa: la stella non reagisce più con una espansione alle reazioni, diminuendo la temperatura e portando il tutto all'equilibrio perché la pressione è indipendente dalla temperatura. Tutta l'energia liberata dalle reazioni viene convertita in energia cinetica dei nuclei di conseguenza la temperatura aumenta ulteriormente.

Si innesca così un meccanismo auto-alimentante che porta a liberare una enorme quantità di energia ed aumentare esponenzialmente la temperatura in pochissimo tempo, qui siamo vicini ad una bomba: questo fenomeno è detto Flash e porta a far esplodere la stella.

### 1.16.2 Catena p-p.

Abbiamo visto che il fattore di penetrazione di Gamov decresce esponenzialmente con la carica, quindi ci dobbiamo aspettare che la probabilità di superare la barriera coulmbiana più alta possibile si dovrebbe avere tra due protoni. Tuttavia adesso vedremo che la  $p + p$  non è la prima reazione che avviene nelle stelle, la prima reazione che avviene è la  $p + D$  (Deuterio).

Dal punto di vista della barriera coulumbiana l'altezza è la stessa, tuttavia la massa ridotta della  $p + D$  sarà maggiore della  $p + p$ . Quindi vista la forma del fattore di penetrazione di Gamow:

$$e^{-2\pi\eta}. \quad (1.16.17)$$

Dove:

$$\eta = \frac{Z_i Z_j e^2}{\hbar v} = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{Z_i Z_j e^2}{\hbar \sqrt{E}}. \quad (1.16.18)$$

Il fattore di penetrazione di Gamov sarà più basso per la  $p + D$  rispetto alla  $p + p$ . Questo ci dice anche il superamento della barriera coulumbiana avviene con maggiore probabilità per la  $p + p$  che per la  $p + D$ .

Tuttavia la  $p + D$  avviene a temperature più basse della  $p + p$  per via della sezione d'urto: questa non dipende soltanto dalla penetrazione della barriera coulumbiana ma dipende anche dalle proprietà nucleari

$$\sigma(E) = \frac{S(E)}{E} e^{-2\pi\eta}. \quad (1.16.19)$$

È il fattore astrofisico che in questo caso ribalta la situazione. Il motivo è che la  $p + p$  è una reazione debole!

$$p + p \rightarrow D + e^+ + \nu. \quad (1.16.20)$$

Un protone deve essersi convertito in un neutrone: deve essere avvenuta una reazione debole. Come abbiamo sempre detto per le interazioni deboli la sezione d'urto è minore rispetto alle reazioni forti o EM. Nel caso della  $p + D$  si ha una cattura radiativa:

$$p + D \rightarrow {}^3\text{He} + \gamma. \quad (1.16.21)$$

Quindi il fattore astrofisico in questo caso è molto più grande rispetto alla interazione debole.

Questo fa sì che nel processo di contrazione di stella neonata la prima reazione che si può attivare è la  $p + D$  a temperature dell'ordine  $T \sim 10^6$  K, a tale temperatura la  $p + p$  è del tutto trascurabile.

Vedremo che questa fase di combustione non riesce a durare tanto poiché nella materia della stella non vi è molto deuterio disponibile.

La stella continua la sua contrazione bruciando gli altri elementi leggeri ( ${}^7\text{Li}$ , Be, B, ...) che sono poco abbondanti.

A temperature dell'ordine di  $T \sim 6 \cdot 10^6$  K allora si innesca la  $p + p$ .

Quando si attiva tale reazione si ricomincia a produrre Deuterio, quindi diventa possibile ripetere la  $p + D$  (la temperatura c'è, quindi si può). Visti i prodotti di reazione di quest'ultima avremo che si produce  ${}^3\text{He}$  e si accumula, quando la temperatura evolve poi si raggiungeranno le temperature necessarie a fondere l'He:

$${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} + 2p. \quad (1.16.22)$$

Questa avviene quando la temperatura è  $T \approx 8 \cdot 10^6$  K.

Vediamo che questa catena converte l'idrogeno in He, il nome di tale catena è  $p - p$  I. Questa è la sorgente della maggior parte della luminosità del sole.

Quando si raggiungono temperature dell'ordine dei  $15 \cdot 10^6$  K allora diventa attiva la seguente reazione

$${}^3\text{He} + {}^4\text{He} \rightarrow {}^7\text{Be} + \gamma. \quad (1.16.23)$$

A questo punto si ha una biforcazione delle possibili reazioni nella stella a seconda di cosa succede al  ${}^7\text{Be}$  (si dice un Branching Ratio che favorirà uno dei due rami a seconda della temperatura):

- $p - p$  II.
- $p - p$  III

Il berillio è instabile per cattura  $K$ : un atomo di  ${}^7\text{Be}$  con un tempo di dimezzamento di 57 giorni ( $\tau \sim 57\text{d}$ ) cattura un elettrone dell'orbita  $K$  cambiando di natura:

$${}^7\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7\text{Li} + \nu. \quad (1.16.24)$$

Nelle stelle tale Berillio sarà completamente ionizzato, quindi l'elettrone arriverà dal Background di elettroni liberi attorno a lui. Questo processo è quello favorito fino alle temperature  $T \sim 15 \cdot 10^6$  K. A questo punto il  ${}^7\text{Li}$  cattura un protone formando  ${}^8\text{Be}$ :

$${}^7\text{Li} + p \rightarrow {}^8\text{Be}. \quad (1.16.25)$$

Il  ${}^8\text{Be}$  è instabile, decade in due particelle  $\alpha$  in circa  $10^{-16}$  s. Questo primo processo è detto  $p - p$  II.

Attualmente nel sole questo processo produce circa il 10% dell'energia totale, il 90% è prodotto dalla  $p - p$  I.

A temperature di circa  $T \sim 20 \cdot 10^6$  K il rate del processo

$${}^7\text{Be} + p \rightarrow {}^8\text{B} + \gamma. \quad (1.16.26)$$

inizia a diventare non trascurabile, quindi oltre queste temperature prende piede anche questa reazione. Il  $^8\text{B}$  è instabile e fa  $\beta^+$ :



A questo punto abbiamo di nuovo che il  $^8\text{Be}$  produce le due particelle  $\alpha$ , questa che abbiamo appena descritto è la  $p-p$  III.

I 3 processi descritti adesso formano la catena  $p-p$ , in tale catena qualunque sia il processo (la strada seguita) alla fine devo aver fatto:



Quindi 2 protoni in un modo o nell'altro devo convertirli in 2 neutroni. In questo processo per ogni nucleo di  $^4\text{He}$  devo aver prodotto 2 neutrini. Questi neutrini, avendo una sezione d'urto molto bassa con la materia stellare possono attraversare il sole senza interagire portando via energia alla struttura.

La fuga di questi neutrini comporta una variazione del  $Q$ -valore, sarà necessario togliere da quest'ultimo l'energia dei neutrini prodotti (a noi interessa l'energia ridistribuita alla stella).

Nel caso della  $p-p$  i neutrini della  $p-p$  I portano via in media il 2% dell'energia totale, quelli della  $p-p$  II il 4%, quelli della  $p-p$  III portano via circa il 28%.

Nella catena  $p-p$  abbiamo alcuni elementi che vengono prodotti da una reazione e poi distrutti da un'altra (il Deuterio), questi tipi di elementi prendono il nome di Elementi secondari per la catena. Dobbiamo aspettarci che questi elementi secondari raggiungano una situazione di equilibrio.

Possiamo allora chiederci come si calcola l'abbondanza all'equilibrio di tali elementi secondari, nel caso del Deuterio abbiamo un rate di produzione dovuto alla  $p+p \rightarrow \dots$  ed un rate di distruzione dovuto alla  $p+D \rightarrow \dots$ . Per studiare come cambia l'abbondanza di Deuterio è necessario fare la differenza di questi due Rate che sappiamo scrivere:

$$\frac{dn_D}{dt} = \frac{n_p^2}{2} \langle \sigma_{p-p} v \rangle - n_p n_D \langle \sigma_{p-D} v \rangle. \quad (1.16.29)$$

Se la reazione avviene per un tempo abbastanza lungo dobbiamo aspettarci che si instauri un equilibrio (situazione stazionaria), in tal caso:

$$\left( \frac{n_D}{n_p} \right)_{\text{eq}} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{p-p} v \rangle}{\langle \sigma_{p-D} v \rangle}. \quad (1.16.30)$$

Ci aspettiamo in questo caso che l'abbondanza relativa del deuterio sia molto piccola a causa delle due sezioni d'urto che abbiamo discusso sopra.

### 1.16.3 Ciclo CN-N0

Questo è un ciclo (non una catena), tale processo si attiva a temperature dell'ordine di  $T \sim 15 \cdot 10^6$  K ed ha bisogno per attivarsi di alcuni catalizzatori: C,O,N. Essendo un ciclo possiamo partire a spiegarlo da uno qualsiasi di questi 3, partiamo dal  $^{12}\text{C}$  (che determina il ciclo CN) :



L'azoto a questo punto fa un decadimento  $\beta^+$ :



Il  $^{13}\text{C}$  fa la cattura protonica:



Che a sua volta cattura un protone:



Ma  $^{15}\text{O}$  è instabile  $\beta^+$ :



Adesso  $^{15}\text{N}$  cattura un protone e si forma un nucleo composto in uno stato eccitato:



Abbiamo prodotto il nucleo di  $^4\text{He}$ , inoltre il  $^{12}\text{C}$  viene risputato fuori (non è consumato): l'abbondanza relativa dei catalizzatori cambia ma la somma delle abbondanze di questi ultimi resta invariata.

Nell'1% dei casi l'ultima reazione può fare:



Quindi può partire il ciclo CO, questo ciclo si attiva a temperature un po più alte  $T \sim 20 \cdot 10^6$  K.



Il  $^{17}\text{F}$  decade  $\beta^+$  :



A questo punto  $^{17}\text{O}$  cattura un protone



Quindi l'azoto viene reinserito nel ciclo CN. Quest'ultima reazione può diramarsi in un secondo caso (molto improbabile):



Questo  $^{18}\text{F}$  decade  $\beta^+$ :



L' $^{18}\text{O}$  fa la cattura protonica:



Ed ancora abbiamo una diramazione, nella maggior parte dei casi fa:



Producendo di nuovo un catalizzatore che finisce nel ciclo, in un caso meno probabile abbiamo:



Ed il  $^{19}\text{F}$  catturerà un  $p$  producendo:



in un caso ancor meno probabile il  $^{19}\text{F}$  produce:



Questa uscita è una eccezione (non produce un catalizzatore con una particella  $\alpha$ ), questa è una perdita per il ciclo che sottrae catalizzatori, tuttavia quest'ultimo processo è altamente improbabile.

Nel piano Z-N i nuclei si dispongono lungo la diagonale, gli elementi che stanno sopra la diagonale saranno instabili perché hanno un eccesso di protoni, quelli che stanno sotto saranno instabili perché hanno un eccesso di neutroni.

Per questo motivo quelli che stanno sotto avranno la necessità di fare decadimento  $\beta^-$  per convertire un neutrone in un protone. Quelli che sono sopra per tornare nella valle di stabilità dovranno fare viceversa decadendo  $\beta^+$ . Questo spiega tutte le reazioni  $\beta$  viste sopra.

È molto importante ricordarsi sia il ciclo CN che il ciclo NO.

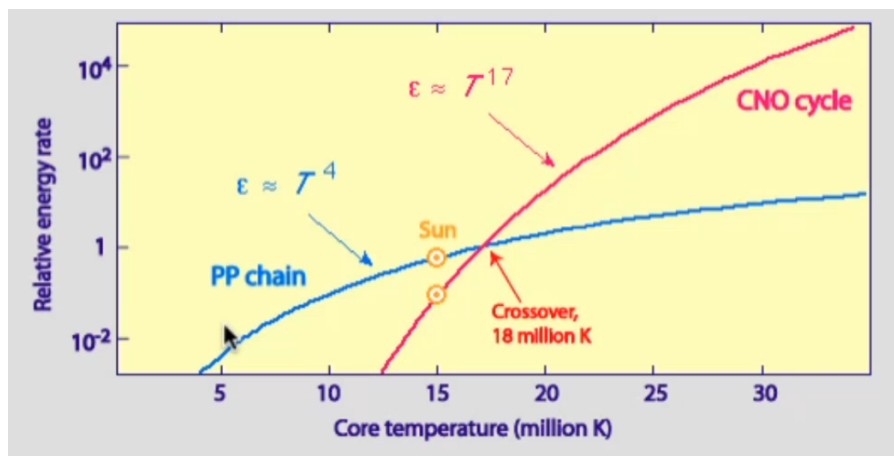


Figura 1.32: Catene

Notiamo che le pendenze per le due curve sono differenti, infatti nella p-p e nella CN-NO le cariche coinvolte sono differenti.

## 1.17 Lezione 17

27-04-2020

Vediamo quando si innesca la combustione dell' ${}^4\text{He}$ : il prodotto della combustione dell'idrogeno.

Sicuramente dopo la combustione dell'idrogeno il nucleo sarà formato quasi sicuramente da puro elio (i metalli presenti originariamente saranno ancora presenti <sup>25</sup>).

Ci aspettiamo che questa combustione inizi ad una temperatura superiore a  $T = 15 \cdot 10^8$  K, a questa temperatura avveniva infatti la fusione della fase  $p - p$ :



Contrariamente alle nostre aspettative la combustione dell'elio si attiva a temperature molto più grandi dell'ultima citata ( $T_{\text{He}} = 100 \cdot 10^6$  K), vediamo oggi perché:



Il  ${}^8\text{Be}$  è altamente instabile ( $\tau_{{}^8\text{Be}} \sim 10^{-16}$  s) e decade in due particelle  $\alpha$ :



È necessario fare una piccola parentesi, guardando la tavola periodica possiamo notare che non esistono nuclei stabili con numero di massa  $A = 5$  oppure  $A = 8$ , infatti anche la reazione



Ha un tempo di dimezzamento  $\tau_{1/2} \sim 10^{-22}$  s.

Il fatto che non esistano tali nuclei è dovuto unicamente alle proprietà nucleari ed è il motivo per cui il Big Bang non è riuscito a produrre elementi più pesanti del litio, la nucleosintesi cosmologica ha prodotto solo idrogeno per il circa 75% in massa ed  ${}^4\text{He}$  per il 25%.

Oggi sappiamo che i nuclei pesanti si sono formati nelle stelle, la teoria della nucleosintesi stellare è nata negli anni '50 ed è uno dei più grandi risultati in astrofisica.

Riprendiamo la reazione all'equilibrio:



Sappiamo che, visto il tempo di dimezzamento del  ${}^8\text{Be}$ , l'equilibrio di tale reazione è molto spostato verso sinistra. Aumentando la temperatura sappiamo che il rate delle reazioni di fusione nucleare aumenta (il  $\langle\sigma v\rangle$  dipende molto sensibilmente dalla temperatura), quindi il tasso della reazione da sinistra a destra aumenta ma, la reazione da destra verso sinistra rimane invariato (non dipende dalla temperatura del gas, il tasso di distruzione rimane inalterato). Di conseguenza aumentando la temperatura aumenta l'abbondanza di equilibrio del  ${}^8\text{Be}$ .

Per temperature di  $T \sim 10^8$  K il  ${}^8\text{Be}$  prima di decadere riesce a catturare una particella  $\alpha$ :



Abbiamo quindi un processo a 2 step per la formazione del carbonio che prende il nome di  $3\alpha$ .

Se vediamo l'abbondanza di Berillio quando raggiungiamo  $T \sim 10^8$  K si ha che:

$$\frac{n_{\text{Be}}}{n_{\text{He}}} \sim 10^{-10}. \quad (1.17.7)$$

Quindi nonostante l'aumento della temperatura tale abbondanza rimane comunque molto bassa (capiamo bene quindi perché questo processo non è riuscito ad avvenire durante il Big Bang <sup>26</sup>).

Pochi anni dopo ci si accorse però che il processo  $3\alpha$  non era sufficiente a spiegare l'abbondanza di carbonio presente nelle stelle perché con l'efficienza calcolata a quel tempo gran parte del carbonio sarebbe stato convertito in ossigeno. Si capì che c'era bisogno di un qualche meccanismo che amplificasse il reaction rate della  $3\alpha$  per giustificare tale abbondanza di  ${}^{12}\text{C}$ : doveva esserci un qualche effetto di risonanza.

Si scoprì successivamente l'esistenza di un livello eccitato del nucleo di  ${}^{12}\text{C}$ , ad una energia di 7.65 MeV. Tale livello è il motivo della risonanza di cui sopra perché lo stato fondamentale del  ${}^{12}\text{C}$  ha una energia un po più bassa della somma dell'energia del  ${}^8\text{Be}$  e del  ${}^4\text{He}$ , quindi senza livello eccitato non ci sarebbe stata alcuna risonanza.

Viceversa considerando lo stato eccitato vediamo che questo dista dalla somma delle due masse di cui sopra soltanto 300 keV (che tiene di conto della energia cinetica dei due nuclei a temperature dell'ordine di quelle discusse), si crea quindi una risonanza che amplifica enormemente il reaction rate e quindi l'abbondanza finale

<sup>25</sup>Se è avvenuta la combustione per CN-NO saranno cambiate le abbondanze relative di questi ultimi

<sup>26</sup>La grande differenza tra il Big Bang nella fase di nucleosintesi e le stelle è proprio il tempo.



di carbonio prodotta (di un fattore  $10^7$ !).

Abbiamo quindi che:



Per fortuna la seconda reazione non è risonante, altrimenti il  ${}^{12}\text{C}$  dell'universo sarebbe stato svuotato.

Per supporre il fatto che la nucleosintesi avvenisse nelle stelle qualche anno prima fu dimostrato, osservando lo spettro di alcune giganti rosse, che si potevano trovare delle righe di assorbimento del Tecnezio (Tc). Le giganti rosse hanno in genere miliardi di anni mentre il Tc ha un tempo di dimezzamento dell'ordine del milione di anni, di conseguenza è necessario che il Tecnezio venga sintetizzato all'interno della stella: non può essere primitivo della stella.

Nel 1957 si arriva ad un articolo fondamentale (Burbidge, Fowler, Hoyle), una specie di bibbia della nucleosintesi stellare che include gran parte dei processi che tutt'oggi sono ritenuti corretti.

Siamo arrivati alla nucleosintesi dell'ossigeno e del carbonio, il prossimo step richiede temperature dell'ordine di  $T \sim 800 \cdot$  e porterà alla formazione di magnesio in uno stato eccitato ( ${}^{24}\text{Mg}^*$ ). Tale magnesio può decadere in tanti modi diversi:  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C} \rightarrow$

- ${}^{24}\text{Mg}$ .
- ${}^{20}\text{Ne} + \alpha$ .
- ${}^{23}\text{Na} + p$ .
- ${}^{23}\text{Mg} + n$ .

Questi processi hanno una grossa differenza rispetto ai processi di prima: si incominciano a liberare particelle  $\alpha$ ,  $p$ ,  $n$ . Il nucleo era rimasto privo di tali elementi, adesso si trova ad avere a temperature così elevate quelle che reagivano già a temperature 800 volte inferiori.

Queste particelle reagiranno con i nuclei presenti, oltre alla reazione  ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$  si avranno anche dei network di reazioni dovute a tali particelle.

Alla fine di questo macello gli elementi più comuni saranno il  ${}^{20}\text{Ne}$  ed il  ${}^{24}\text{Mg}$ , poi dobbiamo aspettarci anche gli altri isotopi del Neon, il sodio, gli isotopi del magnesio, l'alluminio, il silicio.

Finito il  ${}^{12}\text{C}$  la stella si trova con tanto  ${}^{16}\text{O}$ ,  ${}^{20}\text{Ne}$  e  ${}^{24}\text{Mg}$ . La stella a questo punto innesca il Neon.

La combustione del Neon avviene a temperature dell'ordine del miliardo di gradi, la prima reazione che questo fa è una fotodisintegrazione:



Questo avviene perché a questa temperatura ci sono abbastanza fotoni aventi energia tale da disintegrare  ${}^{20}\text{Ne}$ . Tale elemento ha infatti l'energia più bassa per far avvenire questo processo tra quelli che sono presenti nella stella (4.7 MeV ( $\gamma, \alpha$ )). Successivamente avviene la reazione:



La combustione dell'ossigeno avviene per  $T \sim 2 \cdot 10^9$  K:



Lo zolfo eccitato a questo punto può fare tante cose:

- ${}^{32}\text{S}$ .
- ${}^{28}\text{Si} + \alpha$ .
- ${}^{31}\text{P} + p$ .
- ${}^{31}\text{N} + n$ .

Di nuovo si liberano un sacco di particelle  $\alpha$ ,  $n$ ,  $p$ .

Il prodotto di reazioni più comune sarà il  ${}^{28}\text{Si}$  ed lo  ${}^{32}\text{S}$ .

L'ultima catena di combustione (per  $T \sim 2.5 - 3 \cdot 10^9$  K) è la combustione del Si: si ha una combinazione di fotodisintegrazioni, di reazioni delle particelle  $\alpha$  create dalle prime e reazioni di fusione. Alla fine della combustione del silicio sarà favorita la formazione degli elementi più legati: quelli del gruppo del ferro.

Dopo il ferro siamo nel picco in cui non si ricava più energia dalle reazioni di fusione, è quindi necessario capire come si sono formati gli elementi della tavola periodica che stanno sopra al ferro. L'unico modo che si ha per avere tali elementi è quello di poter fare delle catture neutroniche, servono dei neutroni liberi che possano sintetizzare i nuclei più pesanti. Questo è il motivo per cui si ha una flessione della curva  $Z - N$  verso  $N$  al

crescere di  $N$  stesso. Ciò che decide quanti neutroni si possono sintetizzare (nel tempo) è il flusso di questi ultimi, se il flusso è grande (esplosioni, merge di stelle di neutroni...) allora  $N$  aumenta vertiginosamente, successivamente avverranno tanti decadimenti  $\beta^+$  fino al raggiungimento del primo nucleo stabile. Si avranno inoltre dei picchi in corrispondenza dei numeri magici nelle curve di abbondanza, tali numeri corrispondono ai nuclei aventi sezioni d'urto di cattura neutronica più basse.

## 1.18 Lezione 18

### 1.18.1 Neutrini

I neutrini sono un canale di raffreddamento per la stella, il cammino libero medio di queste particelle  $l_\nu$  è molto maggiore del raggio della stella stessa  $R$  quindi riescono a scappare portando via energia.

Una riprova di questa affermazione la possiamo ottenere calcolando la sezione d'urto dei neutrini prodotti dalla catena  $p-p$  ( $E_\nu < 0.4$  eV):

$$\sigma_\nu \sim 10^{-44} \left( \frac{E_\nu}{m_e c^2} \right)^2 \text{ cm}^2. \quad (1.18.1)$$

Il cammino libero medio sarà quindi:

$$l_\nu = \frac{1}{n\sigma_\nu} = \frac{\mu m_H}{\rho \sigma_\nu}. \quad (1.18.2)$$

Se utilizziamo i valori medi per il sole:

- $\bar{\rho}_\odot = 1.4 \text{ g/cm}^3$ .
- $\bar{\mu} = 0.6$  (peso molecolare medio).

Si ottiene un cammino libero medio:  $l_\nu \sim 10^{20} \text{ cm}$ .

Nel caso di stelle più dense (nane bianche) si ha:

- $\bar{\rho} \sim 10^6 \text{ g/cm}^3$ .
- $\bar{\mu} = 2$  (peso molecolare medio).

Quindi otteniamo  $l_\nu \sim 10^{14} \text{ cm}$ , un valore molto inferiore al caso del sole. Tuttavia per una nana bianca si ha anche che  $R \sim \frac{1}{100} R_\odot$ , quindi il cammino libero medio è comunque  $10^5$  volte il raggio della nana bianca.

In conclusione i neutrini riescono sempre ad uscire dalla stella che li ha prodotti, sottraendo energia a quest'ultima.

La produzione di neutrini nella stella può avvenire in vari modi, un esempio è processo ORCA.

Il processo ORCA consiste in un  $\beta$  inverso:

$$(Z, A) + e^- \rightarrow (Z-1, A) + \nu. \quad (1.18.3)$$

Questa la si ottiene quando gli elettroni degeneri superano l'energia di soglia per fare la reazione. Se il nucleo prodotto da questa è instabile allora il sistema torna indietro con un  $\beta$ :

$$(Z-1, A) + \nu \rightarrow (Z, A) + e^-. \quad (1.18.4)$$

ed il processo va avanti in questo modo fino a che ci sono le condizioni per poter fare cattura elettronica.

Altri esempi di produzione di neutrini sono:

- Annichilazione di coppie:  $e^+ + e^- \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ .
- Fotoneutrini:  $\gamma + e^- \rightarrow e^- + \nu + \bar{\nu}$ .
- Bremsstrahlung, in sistemi ad alta densità vengono prodotte coppie  $\nu - \bar{\nu}$ .
- Plasmaneutrini.

### 1.18.2 Relazioni di scala tra grandezze stellari.

Ricordiamo le equazioni di struttura stellare: abbiamo le due equazioni di equilibrio meccanico

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= -G \frac{m\rho}{r^2} && \text{eq. idrostatico} \\ \frac{\partial m}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho && \text{eq. continuità.} \end{aligned} \quad (1.18.5)$$

e le due equazioni di equilibrio termico:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= 4\pi r^2 \rho \mathcal{E} \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= \begin{cases} -\frac{3}{4ac} \frac{\bar{k}\rho}{T^3} \frac{L}{4\pi r^2} & \text{eq. trasporto} \\ \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{\text{conv}} & \end{cases} \end{aligned} \quad (1.18.6)$$

Per risolvere queste equazioni differenziali serve inoltre conoscere le condizioni microscopiche della materia:

- $P = P(\rho, T, \{x_i\})$ .
- $k_R = k_R(\rho, T, \{x_i\})$ .
- ...

Inoltre tali equazioni non ammettono soluzioni analitiche, sono necessari metodi numerici che vanno al di là delle capacità del corso.

Sono inoltre richieste delle condizioni al contorno per risolvere quest'ultime, le condizioni più gettonate sono:

- $m(r=0) = 0, L(r=0) = 0$ .
- $\rho(r=R) = 0, T(r=R) = 0$ .

Dove  $R$  è il raggio della stella. Anche se non possiamo risolvere tali equazioni possiamo ricavare tramite esse delle relazioni di scala che ci permettono di dire qualcosa sulla evoluzione stellare. Partiamo dalla equazione di equilibrio idrostatico:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -G \frac{m\rho}{r^2} \implies \frac{0-P}{R-0} = -\frac{GM}{R^2} \frac{M}{R^3} \implies P \propto \frac{M^2}{R^4}. \quad (1.18.7)$$

Se possiamo approssimare il gas come gas perfetto allora

$$P \propto \rho T \propto \frac{M}{R^3} T. \quad (1.18.8)$$

Da questa ultima si ricava anche che:

$$\frac{M^2}{R^4} \propto \frac{M}{R^3} T \implies T \propto \frac{M}{R}. \quad (1.18.9)$$

Se invece prendiamo l'equazione del trasporto all'equilibrio radiativo:

$$\frac{T}{R} \propto \frac{1}{T^3} \frac{M}{R^3} \frac{L}{R^2} \implies L \propto \frac{(TR)^4}{M} \implies L \propto M^3. \quad (1.18.10)$$

Abbiamo quindi la famosa *Relazione massa-luminosità*: la luminosità di una stella cresce come una potenza della massa.

Visto che per le stelle vale anche che:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (1.18.11)$$

Quindi possiamo aggiungere che:

$$L \propto R^2 T_{\text{eff}}^4 \implies L \propto I_{\text{eff}}^6. \quad (1.18.12)$$

Abbiamo quindi delle relazioni per le stelle che si trovano nella sequenza principale (combustione di H):

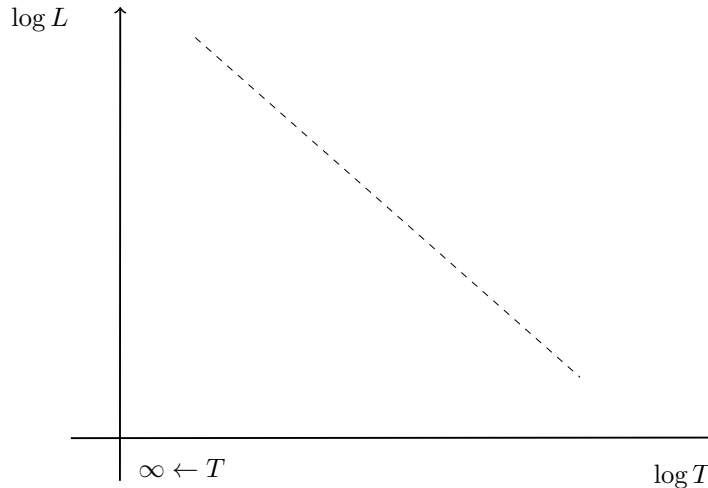


Figura 1.33: Stelle sulla sequenza principale

L'ultima equazione che possiamo ottenere riguarda la durata della fase evolutiva:

$$\tau \propto \frac{M}{L} \implies \tau \propto \frac{1}{M^2}. \quad (1.18.13)$$

La durata della vita della stella decresce al crescere della sua massa.

### 1.18.3 Cenni all'evoluzione stellare

Le stelle nascono da nubi molecolari fuori dall'equilibrio idrostatico, tali nubi contraggono e collassano:

$$2K < |\Omega|. \quad (1.18.14)$$

Siamo nel caso in cui l'attrazione gravitazionale prevale sulla agitazione termica.

Consideriamo una nube a simmetria sferica e a densità costante, l'energia potenziale gravitazionale della nube è:

$$\Omega = - \int \frac{Gmdm}{r} = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.18.15)$$

Mentre l'energia cinetica del gas sarà:

$$K = \frac{3}{2} NkT. \quad (1.18.16)$$

Quindi dalla disuguaglianza iniziale abbiamo che:

$$\frac{3M}{\mu m_H} kT < \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.18.17)$$

Ricordando che siamo a densità della nube  $\rho$  costante possiamo scrivere il raggio della nube come:

$$R = \left( \frac{3M}{4\pi\rho} \right)^{1/3}. \quad (1.18.18)$$

Otteniamo quindi la massa di Jeans:

$$M \geq \left( \frac{5K}{\mu m_H G} T \right)^{3/2} \left( \frac{3}{4\pi\rho} \right)^{1/2} = M_J. \quad (1.18.19)$$

Analogamente si può definire un raggio di Jeans:

$$R \geq R_J = \left( \frac{15kT}{4\pi G \mu m_H \rho} \right)^{1/2}. \quad (1.18.20)$$

La nube inizia il collasso quando  $R \geq R_J$  oppure  $M \geq M_J$ .

All'inizio avverranno processi che riscaldano e che raffreddano la nube. Visto che inizialmente tali nubi sono molto rarefatte prevarranno i processi di raffreddamento, il collasso avverrà a temperatura costante (collasso isoterma).

Durante il collasso necessariamente aumenta  $\rho$ , visto che siamo isoterma deve diminuire anche il limite  $M_J$ , abbiamo allora una frammentazione della nube che porterà alla formazione di molteplici stelle.

Successivamente il gas diventa abbastanza denso (nel collasso) da diventare otticamente spesso, in questo modo la temperatura smette di essere costante, la radiazione rimane infatti intrappolata nella nube.

Il processo procede fino al punto in cui la pressione esercitata dal gas non è tale da contrastare il collasso, la stella a questo punto si forma ed inizia la fase di equilibrio idrostatico.

Parte del gas che circonda la stella forma il *Disco di accrescimento* (dovuto al fatto che nella realtà invece che avere una simmetria sferica abbiamo dei moti rotatori del gas). Tale disco è responsabile della formazione dei pianeti ed asteroidi di quello che sarà un sistema stellare.