

Appunti di astrofisica

Edoardo Gabrielli

28 marzo 2020

Indice

1	Introduzione e Trasporto Radiativo	2
1.1	Lezione 7	2
1.1.1	Studio delle righe di assorbimento	2
1.1.2	Processi di allargamento delle righe	3
1.1.3	Magnitudine	5
1.2	Lezione 8	8
1.2.1	Slide su studio delle righe spettrali.	8
1.3	Lezione 9	8
1.3.1	Trasporto di energia negli interni stellari.	8
1.3.2	Cammino libero medio di Rosseland	9
1.3.3	Moto dei fotoni all'interno di una stella.	10
1.3.4	Equilibrio idrostatico della stella	10
1.4	Lezione 10	12
1.4.1	Tempi scala dell'evoluzione stellare.	12
1.4.2	Teorema del viriale per corpi autogravitanti.	13
1.4.3	Energia e stabilità della stella	14
1.4.4	Capacità termica negativa per una stella.	15
1.4.5	Sviluppo di una stella.	15
1.4.6	Stella con gas monoatomico all'interno	15

Capitolo 1

Introduzione e Trasporto Radiativo

1.1 Lezione 7

1.1.1 Studio delle righe di assorbimento

16-03-2020

Informazioni che ci arrivano dalle righe.

L'identificazione delle righe negli spettri stellari è molto importante, infatti dalla conoscenza della lunghezza d'onda centrale della riga possiamo conoscere:

- L'atomo che le ha causate assorbendo fotoni.
- Lo stato energetico dell'atomo (perchè una data lunghezza d'onda corrisponde ad una determinata transizione energetica).
- Lo stato di ionizzazione dell'atomo: atomi dello stesso elemento chimico ma in stati di ionizzazione differenti hanno livelli energetici differenti e quindi transizioni differenti.
- La temperatura dell'atmosfera di quell'elemento: il popolamento dei livelli energetici associati alla transizione incriminata dipenderà dalla temperatura.
- La densità di quell'elemento nella atmosfera.

Naturalmente le ultime due informazioni citate, che riguardano la condizione fisica della atmosfera in cui l'atomo è immerso, riguardano esclusivamente la fotosfera della stella se facciamo osservazione nel visibile.

Un'altro parametro che può darci molte informazioni è la larghezza della riga, vediamo un esempio di riga nello spettro per avere un pò di nomenclatura di riferimento:

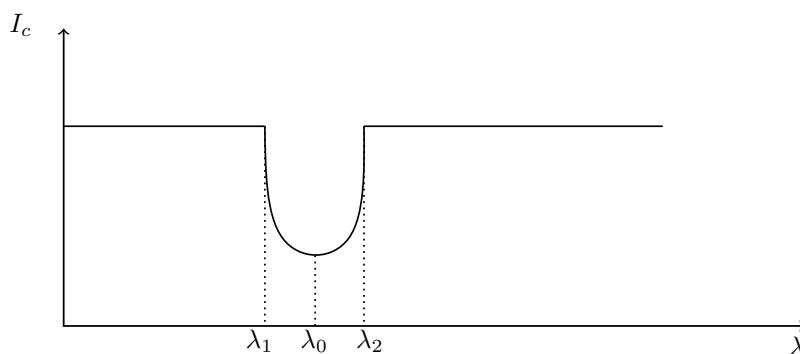


Figura 1.1: Riga di assorbimento generica nello spettro.

Allargamento di una riga.

Dobbiamo trovare un indicatore che misuri l'intensità della riga rispetto al continuo adiacente. La quantità di energia che viene sottratta al continuo in questo caso è l'area della conca in Figura 1.1. Questa area è chiamata area equivalente:

Definizione 1.1: Area equivalente di una riga $A(\lambda)$

Data una riga come in Figura 1.1 l'area equivalente della riga è definita come:

$$A(\lambda_0) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (I_c - I_\lambda) d\lambda. \quad (1.1.1)$$

Questo parametro è molto importante, infatti decide se saremo in grado di studiare tale riga oppure no: se la riga è troppo sottile può succedere che non si possa risolvere con lo strumento utilizzato per la misura, analogamente se abbiamo righe troppo larghe potremmo non essere in grado di distinguerle dal continuo. Possiamo allora mettere in evidenza quest'ultima affermazione definendo il parametro di larghezza equivalente come:

Definizione 1.2: Larghezza equivalente $W(\lambda)$

La larghezza equivalente è l'Area equivalente normalizzata sull'intensità del continuo:

$$W(\lambda_0) = \frac{A(\lambda_0)}{I_c} = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{I_\lambda}{I_c}\right) d\lambda. \quad (1.1.2)$$

Spessore minimo di una riga

Il minimo spessore che una riga può avere è quella naturale, quella dovuta al decadimento spontaneo. Prendiamo un atomo a due livelli, la probabilità che l'atomo si disecciti dal secondo livello al primo spontaneamente è proporzionale al coefficiente di Einstein $A_{2,1}$. Quindi la vita media sarà:

$$\Delta t = \frac{1}{A_{2,1}}. \quad (1.1.3)$$

Ma dal principio di indeterminazione sappiamo che:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar. \quad (1.1.4)$$

Essendo Δt finito ci dobbiamo aspettare un allargamento della riga che possiamo quantificare come:

$$\Delta \nu = \frac{\gamma_{\text{rad}}}{2\pi}. \quad (1.1.5)$$

con $\gamma_{\text{rad}} = 1/\Delta t$, è chiamato Radiative Dumping Costant (RCT).

Nello specifico abbiamo che il profilo della emissione spontanea è dato da una Lorentziana:

$$\phi(\mu) = \frac{\gamma_{\text{rad}}}{2\pi} \frac{1}{(\mu - \mu_0)^2 + \left(\frac{\gamma_{\text{rad}}}{4\pi}\right)^2}. \quad (1.1.6)$$

Per atomi con più livelli di eccitazione il parametro RCT si generalizza nel seguente modo:

$$\gamma_{\text{rad}} = \sum_l^\infty A_{kl} \quad k > l. \quad (1.1.7)$$

Le larghezze naturale delle righe tipicamente è dell'ordine di del millesimo dell' Å. Tuttavia quando si guarda uno spettro la larghezza che otteniamo è in genere molto maggiore, di fatto la larghezza naturale è trascurabile. Il motivo è che nelle atmosfere delle stelle ci sono altri processi di allargamento della riga aventi un contributo decisamente più importante dell'allargamento naturale.

1.1.2 Processi di allargamento delle righe

I principali processi di allargamento dello spettro delle righe sono:

- Allargamento termico.
- Allargamento collisionale (detto allargamento per pressione), questo cresce con l'aumento della densità dell'atmosfera.
- Allargamento per via di campi elettrici o magnetici.
- Allargamento rotazionale, questo per via del fatto che non risolviamo la stella e vi è comunque un effetto Doppler.

Allargamento termico.

Concentriamoci solo sulla velocità radiale degli atomi v_r : quella che sta sulla linea della direzione di vista. La distribuzione di questa all'equilibrio termodinamico locale sarà:

$$dn(v_r) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mv_r^2}{2kT}\right) dv_r. \quad (1.1.8)$$

con n è il numero di atomi per unità di volume dell'elemento interessato, m la sua massa. Applichiamo adesso l'effetto Doppler alla frequenza:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_r}{c}\right). \quad (1.1.9)$$

Abbiamo adottato la formula non relativistica dell'effetto Doppler, questo perchè alle temperature stellari gli atomi non si muovono abbastanza veloce da esser considerati relativistici. Facciamo un esempio: per l'idrogeno a 10000 K la velocità termica abbiamo:

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \sim \sqrt{\frac{2 \text{ eV}}{1 \text{ GeV}/c^2}} \sim \sqrt{20} \cdot 10^{-4} c \sim 13 \text{ km/s}. \quad (1.1.10)$$

Osserviamo che per come abbiamo scritto la legge dell'effetto Doppler si ha un blue shift quando $v_r > 0$. Lo shift sarà dato da:

$$\Delta\nu = \nu_0 \frac{v_r}{c}. \quad (1.1.11)$$

Utilizziamo quest'ultima per ricavarci la distribuzione in frequenza. Procediamo con il cambio di variabile:

$$v_r = \frac{c}{\nu_0} (\nu - \nu_0) \implies dv_r = \frac{c}{\nu_0} d\nu. \quad (1.1.12)$$

Sostituendo quindi per la distribuzione in frequenza:

$$dn(\nu) = n \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \exp\left(-\frac{mc^2}{2\nu_0^2 kT} (\nu - \nu_0)^2\right) \frac{c}{\nu_0} d\nu. \quad (1.1.13)$$

Quindi il profilo di riga diventerà, a causa della agitazione termica:

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\Delta\nu_D^2}\right). \quad (1.1.14)$$

Con

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (1.1.15)$$

Questo è un profilo di tipo Gaussiano con $\Delta\nu_D$ che è detto allargamento Doppler. Questa larghezza cresce al crescere di T e decresce al crescere di m .

A causa dei moti convettivi abbiamo anche un allargamento di riga per turbolenza, anche questo tipo di allargamento avrà un profilo Gaussiano, soltanto che non sarà dipendente dalla temperatura bensì dalla velocità di turbolenza.

Per tenerne di conto si definisce la seguente quantità

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2kT}{m} + v_{\text{turb.}}^2}. \quad (1.1.16)$$

Il profilo della riga viene spesso espresso in termini di lunghezza d'onda, possiamo farlo effettuando il cambio di variabile, basta notare che:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \approx -\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0}. \quad (1.1.17)$$

allora si ottiene facilmente che:

$$\phi = \sqrt{\frac{mc^2}{2\pi kT \lambda_0^2}} \exp\left(-\frac{mc^2 (\lambda - \lambda_0)^2}{2kT \lambda_0^2}\right). \quad (1.1.18)$$

Possiamo definire anche le quantità più importanti di questo profilo:

$$\sigma_\lambda = \sqrt{\frac{kT}{mc^2}} \lambda_0. \quad (1.1.19)$$

$$FWHM = \sqrt{\frac{8kT \ln 2}{mc^2}} \lambda_0. \quad (1.1.20)$$

Allargamento per collisioni.

In questo caso l'allargamento dipende dalla frequenza con cui avvengono le collisioni:

$$\nu_{\text{coll}} = n\sigma_{\text{coll}}v_{\text{coll}}. \quad (1.1.21)$$

Il profilo che si ottiene dalle collisioni è di tipo Lorentziano (come per l'emissione spontanea), si introduce quindi una larghezza effettiva $\Gamma = \gamma_{\text{rad}} + 2\nu_{\text{coll}}$, quindi:

$$\phi(\nu) = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \frac{1}{(\nu - \nu_0) + \left(\frac{\Gamma}{4\pi}\right)^2}. \quad (1.1.22)$$

Nelle atmosfere stellari sono presenti tutti gli effetti citati sopra. Comunamente la zona centrale è dominata dall'allargamento Doppler, nelle code prevale l'effetto della Lorentziana.

Ci dobbiamo aspettare che nelle atmosfere rarefatte l'allargamento collisionale sia piccolo, e viceversa nelle atmosfere dense sarà importante. In questo modo si distinguono le stelle giganti da quelle nane.

1.1.3 Magnitudine

La magnitudine è una misura della luminosità apparente di una stella, nata da Ipparco nel 2° secolo AC. La catalogazione di Ipparco in 6 classi di magnitudine è ancora usata oggi, con l'aggiunta di un pò di matematica moderna.

Le caratteristiche della catalogazione di Ipparco erano:

1. Ordine decrescente di luminosità.
2. Variazione di luminosità costante tra le 6 classi di luminosità.

A rendere matematica questa classificazione è stato Pogson, egli utilizzò le seguenti considerazioni:

- La sensibilità dell'occhio è logaritmica
- Le stelle appartenenti alla sesta classe sono 100 volte meno luminose di quelle di classe uno.

Supponiamo di avere due stelle di luminosità apparenti l_1 e l_2 , siano m_1 e m_2 le magnitudini apparenti di tali stelle. Per quanto assunto sopra avremo che:

$$\frac{l_1}{l_2} = \left(\frac{1}{100}\right)^{(m_1 - m_2)/5} = 10^{-2/5(m_1 - m_2)}. \quad (1.1.23)$$

Passando ai logaritmi:

$$\log\left(\frac{l_1}{l_2}\right) = -\frac{2}{5}(m_1 - m_2). \quad (1.1.24)$$

La definizione moderna di magnitudine è quindi la seguente:

Definizione 1.3: Magnitudine

Si definisce magnitudine m_1 di una stella relativa alla magnitudine di un'altra stella di riferimento m_2 :

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log \frac{l_1}{l_2}. \quad (1.1.25)$$

Dove l_1 e l_2 sono le luminosità apparenti relative alle due stelle.

Stelle di riferimento: misure relative di intensità

Il modo utile di utilizzare la magnitudine è quello di scegliere una stella come riferimento con magnitudine m_0 per poter catalogare in maniera relativa tutte le altre stelle.

Se vogliamo ad esempio osservare la magnitudine della stella m_* allora abbiamo:

$$m_* - m_0 = -2.5 \log \left(\frac{l_*}{l_0}\right). \quad (1.1.26)$$

Molti sistemi fotometrici usano come riferimento Vega, tra i quali anche il telescopio spaziale Hubble ¹. Andiamo nel dettaglio sui sistemi di osservazione.

¹Che usa come supporto anche uno spettro artificiale settabile a piacimento.

Parametri di correzione per sistemi fotometrici.

I limiti di osservazione di un sistema fotometrico sono:

1. Non è mai possibile osservare l'intero spettro di emissione della sorgente.
2. La sensibilità dello strumento nell'intervallo di frequenze che è possibile misurare non è costante.

Per ovviare al fatto che non siamo in grado di conoscere il flusso di energia per unità di tempo e superficie $f(\lambda)$ possiamo introdurre dei parametri di correzione che tengono di conto dei limiti della strumentazione e delle modifiche che il mezzo apporta alla sorgente.

Immaginiamo di poter osservare in un range di lunghezze d'onda da λ_1 a λ_2 , immaginiamo inoltre che $f(\lambda)$ sia il flusso della sorgente prima di entrare in atmosfera, la luminosità che si riesce ad osservare sarà data da:

$$I = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)T(\lambda)d\lambda. \quad (1.1.27)$$

Il termine correttivo $T(\lambda)$ tiene di conto di diversi effetti:

$$T(\lambda) = R(\lambda)K(\lambda)Q(\lambda)A(\lambda). \quad (1.1.28)$$

Andiamo a vedere qual'è il ruolo di ciascuno di questi:

1. $R(\lambda)$: Riflettività. Questa è legata alle ottiche dello strumento.
2. $K(\lambda)$: Correzione alla risposta cromatica del filtro.
3. $Q(\lambda)$: Efficienza quantica del rivelatore. Il rivelatore ha una risposta che dipende da λ .
4. $A(\lambda)$: Correzione sulla trasmissione in atmosfera terrestre.

In conclusione possiamo riscrivere la magnitudine tenendo di conto della forma di I :

$$m_* = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda)T(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_0(\lambda)T(\lambda)d\lambda} \right) + m_0. \quad (1.1.29)$$

È quindi chiaro che per parlare di magnitudine è necessario esplicitare il nome dei parametri fissi che si scelgono per l'osservazione: il filtro utilizzato e la stella di riferimento.

Ipotizziamo di osservare una sorgente con due filtri differenti, si otterranno due magnitudini dello stesso oggetto differenti:

$$m_{*,i} = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda)K_i(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_0(\lambda)K_i(\lambda)d\lambda} \right) + m_{0,i}. \quad (1.1.30)$$

$$m_{*,j} = -2.5 \log \left(\frac{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_*(\lambda)K_j(\lambda)d\lambda}{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} f_0(\lambda)K_j(\lambda)d\lambda} \right) + m_{0,j}. \quad (1.1.31)$$

Possiamo definire la differenza di magnitudini apparenti come:

Definizione 1.4: Indice di colore

L'indice di colore è la differenza di magnitudine apparente misurata con due filtri diversi.

$$I = m_{*,i} - m_{*,j}. \quad (1.1.32)$$

Questo indice ci dà una indicazione della temperatura della stella, infatti facendo la differenza tra le magnitudini in questione otteniamo il logaritmo del rapporto tra i flussi in due bande differenti. Proprio per questo tale indice ci dà una indicazione della temperatura effettiva.

Abbiamo visto che possiamo approssimare lo spettro di una stella come quello di corpo nero, misurare lo spettro con due diversi filtri significa esplorare varie zone dello spettro:

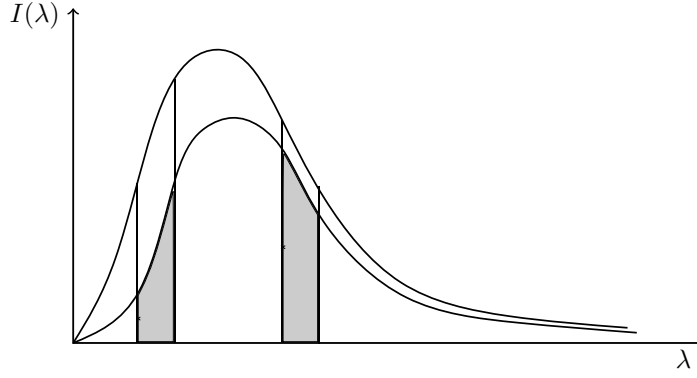


Figura 1.2: Significato dell'indice di colore

Il rapporto tra le due aree colorate è proprio l'indice di colore. Vediamo dal grafico che tale indice può essere usato anche per una calibrazione dello strumento nella temperatura della stella osservata, infatti è evidente che il rapporto tra le aree vari al variare della temperatura grazie alla legge di spostamento di Wien.

Magnitudine Bolometrica.

Si definisce magnitudine bolometrica la magnitudine in cui si raccoglie l'intero flusso proveniente dalla stella. Per ottenerla è necessario misurare la magnitudine in varie bande e mettere insieme i risultati. La relazione che lega la magnitudine bolometrica a quella in una certa banda è la seguente:

$$m_{\text{bol}} = m_i + BC_i. \quad (1.1.33)$$

In cui abbiamo aggiunto la correzione bolometrica BC_i che dipende dalla banda che stiamo utilizzando.

Magnitudine Assoluta.

Si definisce magnitudine assoluta M la magnitudine apparente che si vedrebbe se la stella fosse distante 10 pc. Prendiamo il flusso f da una stella ad una certa distanza d e con luminosità intrinseca l , il flusso sarà dato da:

$$f = \frac{l}{4\pi d^2}. \quad (1.1.34)$$

Se la stella fosse a 10 pc si avrebbe:

$$f = \frac{l}{4\pi (10 \text{ pc})^2}. \quad (1.1.35)$$

È quindi possibile calcolare le magnitudini associate ai due flussi:

$$\begin{aligned} m - M &= -2.5 \log \frac{f}{f_{10}} = \\ &= -2.5 \log \left(\frac{10 \text{ pc}}{d} \right)^2 = \\ &= -5 + 5 \log (d(\text{pc})). \end{aligned} \quad (1.1.36)$$

L'ultima quantità a destra dell'uguale prende il nome di modulo di distanza.

Abbiamo assunto che l'unica causa di diluizione del flusso sia la distanza, quindi assumiamo che la radiazione si propaghi nel vuoto. Per correggere e tener conto dell'assorbimento della radiazione dovuta al mezzo interstellare è necessario aggiungere un fattore alla equazione:

$$m - M = -5 + 5 \log d(\text{pc}) + A_V. \quad (1.1.37)$$

Non è banale ottenere la magnitudine assoluta, infatti in generale è difficile valutare sia d che A_V .

Si può definire anche la magnitudine bolometrica assoluta che sarà legata alla luminosità intrinseca della sorgente.

1.2 Lezione 8

19-03-2020

1.2.1 Slide su studio delle righe spettrali.

1.3 Lezione 9

23-03-2020

1.3.1 Trasporto di energia negli interni stellari.

Vediamo il trasporto energetico da zone interne a zone esterne della stella. Andando verso l'interno della stella è sempre meglio verificata la condizione di LTE, quindi le particelle in queste regioni hanno funzioni di distribuzione (di velocità, di popolazione dei livelli, di ionizzazione) ben definite in funzione della temperatura. Ricordiamo comunque che non abbiamo l'equilibrio termodinamico globale, quindi il campo di radiazione resta diverso da quello di corpo nero:

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) \neq B_\nu(T(\mathbf{r})). \quad (1.3.1)$$

Resta comunque il fatto che la funzione sorgente è definita grazie alla relazione di Kirchhoff:

$$s_\nu(\mathbf{r}) = B_\nu(T(\mathbf{r})). \quad (1.3.2)$$

La relazione 1.3.1 implica che il flusso uscente dalla stella deve necessariamente essere nullo:

$$F_\nu \neq 0. \quad (1.3.3)$$

Ed abbiamo anche visto che questo comporta, per piccole deviazioni dallo spettro di corpo nero, che possiamo scrivere:

$$I_\nu(\mathbf{r}, \mathbf{k}) = B_\nu(T(\mathbf{r})) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.3.4)$$

Possiamo procedere al calcolo del flusso di energia uscente partendo dalla seguente equazione per la pressione:

$$\frac{dP_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{F_\nu}{c}. \quad (1.3.5)$$

Questa è stata dimostrata nel caso di atmosfera grigia, abbiamo visto che vale anche per ogni caso monocromatico. Invertendo tale relazione abbiamo che:

$$F_\nu = c \frac{dP_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (1.3.6)$$

E cambiando variabili:

$$d\tau_\nu = -\alpha_\nu dz. \quad (1.3.7)$$

$$F_\nu = -\frac{c}{\alpha_\nu} \frac{dP_\nu}{dz}. \quad (1.3.8)$$

Vorremo calcolare tutto il flusso di energia uscente dalla stella:

$$\begin{aligned} F &= \int_0^\infty F_\nu d\nu = \\ &= -c \int_0^\infty \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dP_\nu}{dz} d\nu. \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

Per rimanere generali adesso riscriviamo quest'ultima in funzione di una nuova grandezza α_R :

Definizione 3.1: Coefficiente di assorbimento di Rosseland

Il coefficiente di assorbimento di Rosseland è la media armonica del coefficiente di assorbimento:

$$\frac{1}{\alpha_R} = \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dP_\nu}{dz} d\nu}{\int \frac{dP_\nu}{dz}}. \quad (1.3.10)$$

Questo coefficiente ci garantisce che avranno un contributo principale all'assorbimento soltanto con le frequenze aventi α_ν minore, ovvero quelle per cui il mezzo è più trasparente.

Ricordando che vale anche la relazione:

$$P_\nu = \frac{4\pi}{3c} B_\nu(\tau_\nu). \quad (1.3.11)$$

Possiamo inserire questa nella espressione per $1/\alpha_R$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_R} &= \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{4\pi}{3c} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} d\nu}{\int \frac{4\pi}{3c} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} d\nu} = \\ &= \frac{\int \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \end{aligned} \quad (1.3.12)$$

La distribuzione $\partial B_\nu/\partial T$ ha massimo per la frequenza $4kT/h$, questa avrà quindi un contributo maggiore delle altre al calcolo del flusso.

Nei libri viene spesso definita una quantità equivalente alla α_R : l'opacità radiativa di Rosseland k_R (ricordiamo che vale la relazione $\alpha_\nu = k_\nu \rho$):

$$\frac{1}{k_R} = \frac{\int \frac{1}{k_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \quad (1.3.13)$$

Scriviamo allora il flusso totale come:

$$F = -\frac{c}{\alpha_R} \frac{dP}{dz} = -\frac{c}{k_R \rho} \frac{dP}{dz}. \quad (1.3.14)$$

Visto che in LTE vale anche la relazione:

$$P = \frac{u}{3} = \frac{aT^4}{3}. \quad (1.3.15)$$

Allora abbiamo anche che:

Fatto 3.1: Equazione del flusso di energia radiativa dall'interno stellare

$$F = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{k_R \rho} \frac{dT}{dz}. \quad (1.3.16)$$

Questo ci dice un sacco di informazioni sul flusso di energia dall'interno della stella:

- $F \neq 0 \iff \frac{dT}{dz} \neq 0$.
- F è direttamente proporzionale al gradiente di temperatura verso l'esterno.
- Materiali più opachi (k_R più grandi) hanno flussi inferiori.
- L'equazione ha la stessa forma dell'equazione del calore: è quindi un trasporto diffusivo.

1.3.2 Cammino libero medio di Rosseland

Con le quantità introdotte è utile definire anche un cammino libero medio:

$$\bar{l} = \frac{1}{\alpha_R} = \frac{1}{k_R \rho}. \quad (1.3.17)$$

Questo cammino libero è una quantità molto più generale di quello visto nelle scorse lezioni perchè fa una media armonica di tutte le opacità all'interno della stella. Vediamo come sfruttarlo per un esempio numerico.

Abbiamo visto alcune quantità importanti per il sole:

- $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ g.
- $R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ cm.
- $\bar{\rho}_\odot = 1.4$ g/cm³.
- (aggiungiamo adesso) $k_R = 0.4$ cm²/g.

Sulla base di queste possiamo dire che $\bar{l} \approx 2$ cm. Se confrontato con il raggio solare abbiamo che:

$$\frac{\bar{l}}{R_\odot} \sim 3 \cdot 10^{-12}. \quad (1.3.18)$$

Questo ci dice una cosa molto interessante sui fotoni prodotti all'interno della stella: ci mettono molto molto tempo ad uscire.

1.3.3 Moto dei fotoni all'interno di una stella.

Un fotone che nasce all'interno di una stella verrà assorbito dopo un certo tempo da un atomo all'interno di questa per poi essere riemesso in genere in modo completamente scorrelato da come era partito, la distanza che riesce a percorrere tra un assorbimento ed il successivo è in genere ben approssimata dalla quantità \bar{l} . Diamo una stima numerica del tempo impiegato ad uscire dalla stella effettuando questo random walk. Sappiamo che per questo moto casuale si ha un percorso residuo medio di:

$$\sqrt{\langle L^2 \rangle} = \sqrt{N} \sqrt{\langle \bar{l}^2 \rangle}. \quad (1.3.19)$$

NOi vorremmo che il nostro fotone fosse in grado di uscire, vediamo dopo quanto tempo avrà percorso una distanza dell'ordine del raggio solare:

$$R_{\odot} = \sqrt{N} \bar{l} \implies N = \left(\frac{R_{\odot}}{\bar{l}} \right)^2. \quad (1.3.20)$$

Quindi il numero di interazioni che il fotone fa prima di essere (forse) in grado di uscire è dell'ordine di

$$N \sim 10^{21}. \quad (1.3.21)$$

Considerando che i fotoni viaggiano alla velocità della luce abbiamo che:

$$\Delta t = N \frac{\bar{l}}{c}. \quad (1.3.22)$$

Considerando inoltre che prima di essere riemesso dopo l'assorbimento ci vogliono in media 10^{-8} s allora abbiamo che:

$$\Delta t \sim 3 \cdot 10^6 \text{ anni}. \quad (1.3.23)$$

La luce che ci arriva dal sole è quella che è stata prodotta milioni di anni fa.

1.3.4 Equilibrio idrostatico della stella

Definizione 3.2: Stella

Una stella è un sistema gassoso autogravitante.

Le stelle sono oggetti solitari, se consideriamo che la stella più vicina al nostro sistema solare è Alpha-Centauri, che dista $d = 1.4 \text{ pc} = 4 \cdot 10^{18} \text{ cm}$, abbiamo che il rapporto tra la distanza d ed il raggio della stella è mostruosamente grande:

$$\frac{d}{R_{\odot}} \approx 0.6 \cdot 10^8. \quad (1.3.24)$$

Quindi il volume occupato dallo spazio rispetto a quello occupato da una stella è:

$$\frac{V_d}{V_{\odot}} \approx 10^{23}. \quad (1.3.25)$$

La stella è quindi un oggetto destinato a perdere tutta la sua energia essendo il cosmo molto più freddo di lei. Per fortuna le scale temporali di perdita di energia di una stella sono molto più grandi della vita media di un essere umano, quindi osservando il sole dalla mattina alla sera non lo vedremo diventare più piccolo, nemmeno in milioni di anni di osservazione!

Questo perchè il sole, come altre stelle, si trova ad un particolare equilibrio pressione-gravità che gli permette di avere una qualche stabilità (seppure apparente, poichè essendoci un flusso di energia comunque è destinato a perderne).

Concentriamoci adesso sull'equilibrio tra pressione e gravità, per studiarlo vediamo una descrizione euleriana della stella:

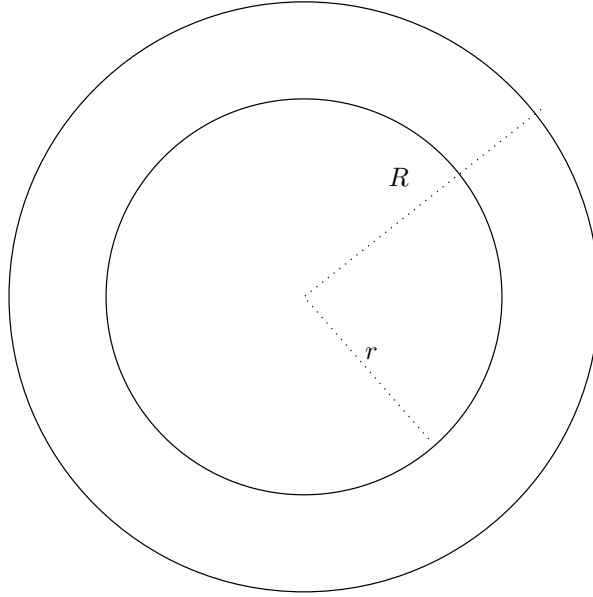


Figura 1.3: Descrizione euleriana di una stella

Consideriamo la massa nella shell interna come

$$m = m(r, t). \quad (1.3.26)$$

Mentre la massa totale:

$$M = m(R, t). \quad (1.3.27)$$

La variazione di massa nella shell interna sarà data da:

$$dm = \frac{\partial m}{\partial r} dr + \frac{\partial m}{\partial t} dt. \quad (1.3.28)$$

Per la simmetria del problema avremo che:

Fatto 3.2: Equazione di struttura stellare

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho. \quad (1.3.29)$$

Mentre per la variazione temporale:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = -4\pi r^2 \rho v. \quad (1.3.30)$$

Con v velocità di "fuga" della massa dalla stella.

Sostituendo nella equazione differenziale otteniamo una equazione di continuità per simmetria sferica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0. \quad (1.3.31)$$

Prendiamo adesso uno strato dr di stella, perchè la stella non collassi su se stessa (o esploda) è necessario che le forze su questo strato siano nulle, su questo strato avremo la forza di gravità che spinge verso l'interno, la pressione degli strati superiori che spingono anche essi per gravità e la pressione degli strati gassosi inferiori che spingono verso l'esterno. Quindi:

$$(P(r) - P(r + dr)) 4\pi r^2 - g(r) 4\pi r^2 dr = 0. \quad (1.3.32)$$

Dove $g(r)$ è la forza gravitazionale:

$$g(r) = -G \frac{M}{r^2}. \quad (1.3.33)$$

La prima equazione cardinale ci da una condizione sulla derivata della pressione:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -g(r) \rho. \quad (1.3.34)$$

Abbiamo quindi una importante equazione che determina l'equilibrio idrostatico di una stella:

Fatto 3.3: Equazione per l'equilibrio idrostatico

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -G \frac{m\rho}{r^2}. \quad (1.3.35)$$

26-03-2020

1.4 Lezione 10

1.4.1 Tempi scala dell'evoluzione stellare.

Un buon argomento che ci consente di dire che le stelle sono all'equilibrio idrostatico è il fatto che il loro raggio non diminuisce su scale temporali molto grandi (nel caso del sole tali scale raggiungono il miliardo di anni). Proviamo a stimare alcune delle scale temporali protagoniste del processo di equilibrio tra gravità e pressione termodinamica di una stella. L'equazione che vigila tale equilibrio è la legge di Newton per una Shell infinitesima della stella:

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \underbrace{\frac{\partial P}{\partial r}}_{\text{Negativo}} - G \frac{m\rho}{r^2}. \quad (1.4.1)$$

Il termine di variazione di pressione è negativo, quindi con l'ulteriore segno (-) diventa un contributo positivo. Tale contributo viene bilanciato dalla forza gravitazionale che tende invece a far collassare tale Shell. Vediamo cosa succederebbe alla stella se, manipolando l'equazione di Newton, togliamo quei termini responsabili dell'equilibrio. In questo modo avremo una stima dei tempi scala di evoluzione stellare.

Tempo scala di collasso

Immaginando di togliere la variazione di pressione dalla equazione precedente, si ottiene:

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -G \frac{m\rho}{r^2}. \quad (1.4.2)$$

In questo modo non c'è niente che controbilancia la gravità della stella: avremo un collasso gravitazionale. Per stimare il tempo di collasso gravitazionale τ_{FF} possiamo approssimare l'accelerazione nella equazione precedente nel seguente modo:

$$\left| \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right| = \frac{R}{\tau_{\text{FF}}^2}. \quad (1.4.3)$$

Dove FF sta per Free Fall. Inserendo questa nella prima equazione cardinale e valutando anche la forza di gravità in termini di M e R si ha:

Definizione 4.1: Tempo di collasso gravitazionale

$$\tau_{\text{FF}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{G\rho}}. \quad (1.4.4)$$

Questo tempo scala di collasso gravitazionale è inversamente proporzionale alla densità media come ci si aspetta ragionevolmente.

Considerando che possiamo approssimare la densità media del sole come: $\rho_0 \approx 1.4 \text{ g/cm}^3$ si ha un tempo scala di collasso di circa 27 minuti. Visto che il sole resta stabile per milioni di anni possiamo assumere che ci sia un buon bilanciamento tra pressione e gravità.

Per altre stelle (aventi la stessa massa del sole ma raggi diversi) avremo tempi scala di caduta libera differenti:

- Giganti rosse: $R = 100R_{\odot} \implies \tau_{\text{FF}} \approx 1000\tau_{\text{FF}\odot} \sim 18 \text{ giorni.}$
- Nane bianche: $\rho \gg \rho_{\odot} \implies \tau_{\text{FF}} \approx \tau_{\text{FF}}/1000 \sim \text{secondi.}$

Tempo scala di esplosione

Allo stesso modo, togliendo la gravità dalla equazione di Newton abbiamo che:

$$\rho \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = - \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (1.4.5)$$

Quindi possiamo ragionare in modo analogo alla sezione precedente:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \right| &= \frac{R}{\tau_{\text{exp}}^2} = \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \approx \\
&\approx \frac{1}{\rho} \frac{P(0) - P(R)}{R - 0} = \\
&= \frac{P_c}{\rho R}.
\end{aligned} \tag{1.4.6}$$

Definizione 4.2: Tempo scala di esplosione

$$\tau_{\text{exp}} = R \sqrt{\frac{\rho}{P}} \approx \frac{R}{c_s}. \tag{1.4.7}$$

Dove la pressione nella espressione è quella del centro della stella, mentre c_s è la velocità del suono.

Stimiamo la pressione al centro della stella all'equilibrio idrostatico:

$$\frac{P_c}{R} \approx -G \frac{M \rho}{R^2} \implies P_{c,\odot} \approx \frac{GM \rho}{R} \approx 5 \cdot 10^{15} \text{ dyn/cm}^2 \sim 5 \cdot 10^9 \text{ atm}. \tag{1.4.8}$$

Con dei modelli numerici più avanzati possiamo dire che $P_{c,\odot} \approx 2.6 \cdot 10^{17} \text{ dyn/cm}^2$. Dobbiamo tenere di conto del fatto che al centro della stella è presente un gas che risponderà ad una qualche legge di stato $P(\rho, T)$, questa legge di stato è alla base della comprensione della stabilità della stella poichè ci caratterizza la risposta di quest'ultima alla perdita di energia.

In generale tale legge di stato dipende sia da ρ che da T , ci sono casi in cui tale legge dipende soltanto da ρ , ad esempio nelle nane bianche. In tale situazione il gas di elettroni presente negli interni stellari può essere approssimato come un gas di Fermi. Tale approssimazione è stata approfondita nel corso di struttura della materia.

Conoscere la legge di stato ci permette di capire il modo con cui la struttura risponde alla perdita di energia inievitabili nella evoluzione della stella. Infatti possiamo già distinguere due casi a seconda della tipologia di equazione di stato:

- $P(\rho, T)$: se si ha una perdita di energia si hanno le seguenti conseguenze

$$T \text{ Diminuisce} \implies P \text{ Diminuisce} \implies \text{Prevale la gravità} \implies \text{Contrazione}. \tag{1.4.9}$$

- $P(\rho)$: se si ha una perdita di energia si hanno le seguenti conseguenze

$$T \text{ Diminuisce} \implies P \text{ Resta costante} \implies \text{Nessuna contrazione}. \tag{1.4.10}$$

1.4.2 Teorema del viriale per corpi autogravitanti.

Ipotizziamo una situazione all'equilibrio idrostatico

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{Gm\rho}{r^2}. \tag{1.4.11}$$

Moltiplichiamo a destra e sinistra per il volume della sfera di raggio r :

$$V(r)dr = \frac{4}{3}\pi r^3 dr. \tag{1.4.12}$$

E ricordando l'equazione di struttura stellare:

$$\frac{\partial m}{\partial r} = 4\pi r^2 \rho. \tag{1.4.13}$$

Otteiamo:

$$V(r)dP = -\frac{Gm}{3R} dm. \tag{1.4.14}$$

Possiamo quindi integrare ambo i membri, a destra si ha

$$\int V dP = \underbrace{VP|_0^R}_{\substack{V(0)=0 \\ P(R)=0}} - \int P dV = - \int P dV. \quad (1.4.15)$$

A sinistra invece abbiamo l'energia potenziale gravitazionale:

$$\Omega = - \int \frac{Gm}{r} dm. \quad (1.4.16)$$

In conclusione abbiamo legato l'energia potenziale gravitazionale alle variabili termodinamiche P e V , questa è una versione del teorema del viriale:

Fatto 4.1: Teorema del Viriale

$$\Omega = -3 \int P dV. \quad (1.4.17)$$

Facciamo due esempi concreti di questo teorema per due leggi di stato:

Teorema del viriale per gas non relativistico

$$P = \frac{2}{3} \frac{K}{V}. \quad (1.4.18)$$

Dove K è l'energia cinetica traslazionale. In questo caso il teorema si scrive come:

$$\Omega = -2K. \quad (1.4.19)$$

Teorema del viriale per un gas relativistico

$$P = \frac{1}{3} \frac{K}{V} \implies \Omega = -K. \quad (1.4.20)$$

1.4.3 Energia e stabilità della stella

Assumiamo che la stella sia composta da un gas perfetto, in tal caso abbiamo dal teorema di equipartizione dell'energia che:

$$dK = \frac{3}{2} k_B T dN = \frac{3}{2} k_B T \frac{dm}{\mu m_H}. \quad (1.4.21)$$

Dove μ è il peso molecolare medio delle particelle:

$$\mu = \frac{\bar{m}}{m_H}. \quad (1.4.22)$$

Mentre m_H è l'unità di massa atomica. Visto che $1g = N_A m_H$ si avrà anche:

$$\begin{aligned} dK &= \frac{3}{2} k_B T \frac{N_A}{\mu} dm = \\ &= \frac{3}{2} \frac{R}{\mu} T dm. \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

Ricordando adesso le definizioni dei calori specifici a volume e pressione costante:

$$C_P - C_V = \frac{R}{\mu} = C_V (\gamma - 1). \quad (1.4.24)$$

Con $\gamma = C_P/C_V$.

Introducendo anche l'energia interna:

$$dU = C_V T dm. \quad (1.4.25)$$

Si ha che:

$$dK = \frac{3}{2} (\gamma - 1) dU. \quad (1.4.26)$$

Se assumiamo γ costante in tutta la struttura abbiamo una espressione non infinitesima per l'energia cinetica traslazionale:

$$K = \frac{3}{2}(\gamma - 1)U. \quad (1.4.27)$$

Visto che l'energia totale della stella può essere presa come somma dell'energia interna e della energia gravitazionale avremo che questa può essere espressa sia in funzione di Ω che di U :

$$\begin{aligned} E = \Omega + U &= \frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\Omega = \\ &= -(3\gamma - 4)U. \end{aligned} \quad (1.4.28)$$

Per avere una struttura stabile sarà necessario che questa energia sia negativa, di conseguenza il parametro γ dovrà essere maggiore di $4/3$.

1.4.4 Capacità termica negativa per una stella.

Possiamo ipotizzare che la stella perda energia soltanto per irraggiamento, in tal caso si ha che:

$$\begin{aligned} L = -\frac{dE}{dt} &= -\frac{3\gamma - 4}{3(\gamma - 1)}\dot{\Omega} = \\ &= (3\gamma - 4)\dot{U}. \end{aligned} \quad (1.4.29)$$

Quindi abbiamo la seguente catena di disuguaglianze:

$$L > 0 \implies \dot{\Omega} < 0, \dot{U} > 0. \quad (1.4.30)$$

Questo significa che quando la stella perde energia essa risponde con una contrazione ed aumenta la sua energia interna, quindi risponde con un incremento di temperatura. Quindi la stella è un sistema particolare in cui una perdita di energia comporta un surriscaldamento: la capacità termica è negativa.

Esiste una eccezione a questo meccanismo: le nane bianche. Per questo tipo di stelle la perdita di energia comporta un raffreddamento poichè la legge di stato è indipendente dalla temperatura (non vi è alcuna contrazione durante il processo di irraggiamento).

1.4.5 Sviluppo di una stella.

Quando una stella nasce non avrà ancora sorgenti di energia nucleare all'interno, quindi l'energia che irraggia la costringerà ad una contrazione ed un aumento della temperatura.

A questo punto possono succedere due cose:

- **Fase di Stop nucleare:** La temperatura raggiunge quella di innesco delle reazioni termonucleari. In questo caso dobbiamo aggiungere un termine alla equazione della energia, in pratica tutta l'energia persa in irraggiamento verrà fornita dalle reazioni, fino a che non si esauriscono i reagenti. In questa fase la stella quindi non si contrae e, se riesce ad entrare in questa fase, aumenta notevolmente la durata della sua vita.
- **Nana Bruna:** la densità aumenta così tanto che il gas degenera $P(\rho)$ prima che si raggiunga la temperatura di innesco delle reazioni termonucleari. In questo caso la contrazione si interrompe e la stella inizia una evoluzione differente, perdendo energia le nane brune si raffreddano anzichè riscaldarsi.
- **Fine della fase di stop nucleare e ripartenza del ciclo** Il primo elemento che viene usato come carburante nucleare è l'idrogeno, quando questo si esaurisce la stella ritorna ad essere in bilico tra la fase di Stop Nucleare e la trasformazione in nana bruna. La cosa che ad ogni bivio discrimina la scelta è la massa, le stelle più massicce ripeteranno il ciclo più e più volte fino ad arrivare a consumare il Ferro nelle reazioni, dopo questa fase si ha un inevitabile collasso gravitazionale con conseguente formazione di supernovae.

1.4.6 Stella con gas monoatomico all'interno

Nel caso di gas monoatomico si ha che $\gamma = 3/5$, quindi le relazioni dell'energia possono essere esplicitate:

$$E = \frac{\Omega}{2} = -U. \quad (1.4.31)$$

$$U = K. \quad (1.4.32)$$

Quindi possiamo riscrivere la variazione di energia come:

$$L = -\frac{\dot{\Omega}}{2} = \dot{U} = \dot{K}. \quad (1.4.33)$$

In assenza di reazioni termonucleari che compensano tale perdita la stella utilizzerà metà della sua energia per compensare la perdita per luminosità, l'altra metà va in energia interna, quindi in energia cinetica, quindi in riscaldamento.

Possiamo definire un tempo caratteristico per descrivere questa evoluzione:

Definizione 4.3: Tempo scala di Kelvin-Helmoltz

Il tempo scala con cui la struttura reagisce ad una perdita di energia è:

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{|\Omega|}{2} \frac{1}{L}. \quad (1.4.34)$$

Possiamo stimare tale tempo scala nel caso del sole:

$$\Omega = - \int \frac{Gm}{r} dm \stackrel{\rho \text{ cost}}{\Longrightarrow} \Omega = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \quad (1.4.35)$$

Quindi si ha che:

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{3}{10} \frac{GM^2}{RL}. \quad (1.4.36)$$

- $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{33} \text{ g.}$
- $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^{10} \text{ cm.}$
- $L_{\odot} \approx 3.8 \cdot 10^{33} \text{ erg/s.}$

Con i valori del sole abbiamo che:

$$\tau_{\text{KH}, \odot} \approx 10^7 \text{ anni..} \quad (1.4.37)$$

Notiamo che il valore temporale di questa stima è lo stesso che abbiamo ottenuto quando abbiamo stimato il tempo necessario ad un fotone ad uscire dalla stella, e non è un caso...