

Checklist per l'esame di Fisica 3

Edoardo Gabrielli

4 febbraio 2020

Ispirata alla Checklist creata in precedenza da Giuseppe Bogna e Edoardo Centamori.

Sommario

Questo pdf contiene le domande con risposta per l'esame di fisica 3 poste nell'anno accademico 2019/2020. È presente la risposta alle sole 4 domande di tipo C da me selezionate ed alcune delle risposte alle domande B possono essere incomplete.

Indice

1	Prerequisiti	1
a	Domande a	1
1.a.1	β, γ	1
1.a.2	Prodotto scalare nella metrica di Minkowsky	1
1.a.3	Modulo di un quadrivettore	1
1.a.4	Trasformazioni di Lorentz	1
1.a.5	Operatori differenziali 4-dimensionali	1
1.a.6	Tempo proprio	2
1.a.7	Invariante di Lorentz	2
1.a.8	4-velocità e 4-impulso	2
1.a.9	Conservazione del quadrimpulso	2
1.a.10	Vettore covariante e tensore covariante	2
1.a.11	Tensore metrico	2
1.a.12	Tensore antisimmetrico di rango 2	2
1.a.13	Legge relativisticamente covariante	3
1.a.14	Composizione delle velocità	3
1.a.15	Prodotto di 4-vettori invariante di Lorentz	3
1.a.16	Paradosso dei gemelli	3
1.a.17	Operatore di D'Alembert invariante di Lorentz	3
1.a.18	4-accelerazione e 4-velocità perpendicolari	3
1.a.19	Costanti $c, \epsilon_0, \mu_0, e^2/4\pi, \hbar$ in CGS e MKSA	4
1.a.20	Costante $\hbar \cdot c$ in eV·nm e MeV·fm	4
1.a.21	Tipi di fotoni	4
1.a.22	Massa del fotone	4
1.a.23	Carica elettrica dell'elettrone e del protone in MKSA	4
1.a.24	Costante di struttura fine α	4
1.a.25	Massa elettrone e protone	4
1.a.26	Considerazione sulla massa del neutrone	5
1.a.27	Energia media di legame dell'elettrone atomico	5
1.a.28	Ottica fisica e ottica geometrica	5
1.a.29	Relazioni tra campo elettrico e magnetico	5
1.a.30	Onda piana elettromagnetica: ampiezza, frequenza, vettore d'onda, lunghezza d'onda	5
1.a.31	Relazione di dispersione, velocità di fase e di gruppo	5
1.a.32	Polarizzazione di un'onda	6
1.a.33	Campo elettromagnetico in un sistema di coordinate con il formalismo reale e complesso	6
1.a.34	Principio di Huygens	6
1.a.35	Impedenza del vuoto	6
1.a.36	Momento di dipolo elettrico e magnetico, quadrupolo elettrico	6
1.a.37	Velocità delle onde elettromagnetiche in un mezzo lineare e isotropo	7
1.a.38	Densità di energia dell'onda elettromagnetica	7
1.a.39	Vettore di Poynting	7
1.a.40	Pressione di radiazione su una superficie piana	7
1.a.41	Interferenza e diffrazione	7
2	Indagine della materia tramite collisioni e decadimenti	7
a	Domande a	7
2.a.1	Assorbimento, diffusione di onda E.M.	7
2.a.2	Sezioni d'urto di onda E.M. su bersaglio	8
2.a.3	Ampiezza di scattering	8
2.a.4	Potenza irradiata da dipolo elettrico, magnetico e quadrupolo elettrico	9
2.a.5	Distribuzione angolare della radiazione di dipolo elettrico e magnetico (non relativistico)	9
2.a.6	Resistenza di irraggiamento per un circuito ad una maglia	10
2.a.7	Urto elastico ed inelastico tra particelle con esempi	10
2.a.8	Conservazione di alcune grandezze per interazioni elettromagnetiche/forti	11
2.a.9	Conservazione di alcune grandezze per interazioni forti	11

2.a.10	Conservazione di alcune grandezze per interazioni deboli	12
2.a.11	Processi esclusivi e inclusivi, esotermici e endotermici, Q-value.	12
2.a.12	Tre definizioni di sezione d'urto equivalenti nei processi corpuscolari	12
2.a.13	Sezione d'urto elastica, inclusiva, esclusiva e totale per urti tra particelle	13
2.a.14	Probabilità di interazione di particella su lamina sottile	13
2.a.15	Forza di reazione radiativa	13
2.a.16	Significato fisico della Breight-Wiegner	14
2.a.17	osservazioni sullo scattering Rutherford	15
2.a.18	Differenza tra Scattering Rutherford e Mott	15
2.a.19	Significato dei termini nelle sezioni d'urto Mott e Rutherford	15
2.a.20	Definizione di raggio nucleare tramite lo Scattering Rutherford	15
2.a.21	Definizione di A, Z, N, nuclei isotopi, isobari, isotoni, stabili ed instabili	15
2.a.22	Unità di massa atomica, energia di legame B e difetto di massa Δ	16
2.a.23	Formula semiempirica B e termini spiegati dal modello a goccia	16
2.a.24	Definizione dei decadimenti α , β^+ , β^- , γ , cattura elettronica con rispettivi Q-Value	16
2.a.25	Scoperta del neutrino nel decadimento β^-	17
2.a.26	Spiegazione dell'esistenza del neutrone nell'atomo	18
2.a.27	Particelle per la misura del fattore di forma	18
2.a.28	Larghezza di vita media, tempo di dimezzamento, branching fraction	18
2.a.29	Ordini di grandezza di sezioni d'urto forti o deboli	19
2.a.30	Vite medie per interazioni forti, elettromagnetiche, deboli	19
2.a.31	Cinematica dell'effetto Mossbauer	19
2.a.32	Variabili indipendenti con due reagenti e N prodotti	20
2.a.33	Variabili indipendenti per un decadimento a due, considerazioni sul caso di Spin nullo	20
2.a.34	Variabili del Dalitz Plot	20
2.a.35	Variabili indipendenti per il decadimento a tre corpi, considerazioni sul caso di Spin nullo	20
2.a.36	Funzione di distribuzione esclusiva dei 4-impulsi	21
2.a.37	Metodo della massa invariante	21

b Domande b

22

2.b.1	Calcolo della resistenza di irraggiamento per spira investita da onda E.M.	22
2.b.2	Q-valore ed energia di soglia considerando l'interazione Coulombiana	24
2.b.3	Equivalenza tra sezione d'urto elastica con fotoni incidenti o onda monocromatica incidente	25
2.b.4	Numero di eventi su volume e tempo negli urti tra particelle con v_{rel} distribuita con $f(v_{rel})$	26
2.b.5	Attenuazione di fascio di particelle su materiale omogeneo con atomi di una specie	26
2.b.6	Attenuazione di fascio di particelle su materiale omogeneo con atomi di più specie	27
2.b.7	Stima numerica della sezione d'urto forte in alcuni processi	27
2.b.8	Protone con energia tipica di LHC su protone fermo per ottenere 14 TeV	28
2.b.9	Energia per innescare $e^+ + e^- \longrightarrow p + \bar{p}$	28
2.b.10	Energia di soglia per reazioni a due (in cui un reagente è fermo)	28
2.b.11	Probabilità che il neutrino interagisca attraversando la terra lungo il diametro	28
2.b.12	Oscillazione dell'elettrone con forze di richiamo, viscosa, radiativa nel campo di un'onda E.M.	29
2.b.13	Sezione d'urto differenziale elastica per onda monocromatica su elettrone legato elasticamente	29
2.b.14	Dimostrare il valore della sezione d'urto Thompson	30
2.b.15	Sezione d'urto elastica per onda elettromagnetica piana su elettrone legato elasticamente	30
2.b.16	Sezione d'urto totale per onda piana su elettrone legato elasticamente	30
2.b.17	Approssimare la Breight-Wiegner con una Lorentziana	31
2.b.18	Valori nel picco per le sezioni d'urto di onda su elettrone legato elasticamente	32
2.b.19	Legge di smorzamento di energia ed ampiezza per elettrone legato elasticamente	32
2.b.20	Relazione tra parametro di impatto (b) e angolo di scattering (θ) nel caso Rutherford	33
2.b.21	Minima distanza d tra particelle nello scattering Rutherford	36
2.b.22	Esempi di energia minima per far fare l'interazione forte al protone	36
2.b.23	Differenze tra Scattering Rutherford e Mott	37
2.b.24	Stato finale di alcuni decadimenti a partire da particella antenato	37
2.b.25	Esempi di Q-valore per alcune reazioni	37
2.b.26	Invarianza di $d^3p/2E$	38
2.b.27	Semplificare l'elemento infinitesimo dello spazio dei 4-impulsi con le proprietà della δ	38
2.b.28	Elemento infinitesimo nello spazio dei quadrimpulsi nel centro di massa (due particelle)	38
2.b.29	Relazione lineare tra s_{12} e E_3 nel centro di massa nel caso di 3 particelle finali	39
2.b.30	Trasformazione di una funzione di distribuzione del 3-impulso di una particella	40
2.b.31	Trasformazione di una funzione di distrib. del 3-impulso e dello spazio per una particella	40

2.b.32	Probabilità di trovare la particella con probabilita di decadimento indep. dal tempo	40
2.b.33	Protagonisti della interazione forte	40
2.b.34	Decadimento del Pione neutro in due fotoni	41
2.b.35	Decadimento del pione carico in muone e neutrino muonico	42
2.b.36	Andamento masse nucleari a parità di A in funzione di Z	43
2.b.37	Considerazioni energetiche sul decadimento α	43
2.b.38	Considerazione energetica sul decadimento β	44

3 Elettromagnetismo classico e acceleratori di particelle 45

a Domande a 45

3.a.1	Quadricorrente e quadripotenziale del campo E.M.	45
3.a.2	Definizione del tensore dei campi E.M.	45
3.a.3	Densità di energia del campo elettromagnetico, vettore di Poynting, tensore degli sforzi	45
3.a.4	Equazioni di Maxwell in forma covariante	46
3.a.5	Equazione di continuità per la 4-corrente	46
3.a.6	Gauge di Lorentz e di Coulomb	46
3.a.7	Trasformazioni di Lorentz dei campi	46
3.a.8	Quadrivettore densità di forza	46
3.a.9	Effetto doppler relativistico	47
3.a.10	Potenziali ritardati	47
3.a.11	Campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto arbitrario	47
3.a.12	Solido di radiazion e diagramma di radiazione	47
3.a.13	Campo magnetico in funzione del campo elettrico per carica puntiforme	48
3.a.14	Distribuzione angolare di energia irradiata per unità di frequenza	48
3.a.15	Tempo di interazione per carica in movimento con osservatore	49
3.a.16	Principio di Babinet	50
3.a.17	Fattore di forma	50
3.a.18	Funzionamento di un acceleratore elettrostatico	50
3.a.19	Energie per unità di lunghezza per drift tube e cavità superconduttrici	50
3.a.20	Funzionamento di un acceleratore lineare	51
3.a.21	Funzionamento di acceleratore circolare	51
3.a.22	Solido di radiazione per carica in moto circolare	52

b Domande b 52

3.b.1	Relazione differenziale tra tempo e tempo ritardato	52
3.b.2	Definizione delle variabili \hat{n} , β , \mathbf{R} , \mathbf{r} , \mathbf{r}' , t , t'	52
3.b.3	Distribuzione in potenza per carica accelerata in moto non relativistico	53
3.b.4	Ricavare le leggi di trasformazione dei campi	54
3.b.5	Invarianti costruiti con il tensore dei campi	55
3.b.6	Campi per una carica in moto fissato un sistema di riferimento	55
3.b.7	Equazione del moto in forma covariante per una carica in un campo E.M. esterno	56
3.b.8	Reazione radiativa (già fatta in altra domanda)	57
3.b.9	Tensore energia impulso	57
3.b.10	Teoremi di conservazione di energia ed impulso con campo E.M.	57
3.b.11	Un esempio sul tensore degli sforzi	57
3.b.12	Un esempio sul tensore energia impulso	58
3.b.13	Ricavare i potenziali di Lienard-Wiechert	58
3.b.14	Potenza irradiata da carica in moto non relativistico	60
3.b.15	Ricavare la formula di Larmor relativistica a partire da quella non relativistica	60
3.b.16	Frequenza critica della luce di Sincrotrone	61
3.b.17	Fattore di forma elettromagnetico per sfera uniformemente carica	61
3.b.18	Fattore di forma per superficie sferica uniformemente carica	62
3.b.19	Velocità di un elettrone in diversi acceleratori lineari	62
3.b.20	Potenza irradiata da carica in moto rettilineo	64
3.b.21	Energia persa in una rivoluzione per protoni ed elettroni nell'acceleratore circolare	65
3.b.22	Potenza angolare emessa per una carica oscillante in linea retta	66
3.b.23	Potenza dissipata in un acceleratore lineare in funzione di dp/dt oppure di dE/dx	66
3.b.24	Lunghezza d'onda critica di sincrotrone in alcuni casi	68
3.b.25	Enunciato del teorema ottico	68

3.b.26 Sezione d'urto differenziale Rayleigh a partire dalla Thompson	68
---	----

4 Interazione radiazione-materia 69

a Domande a 69

4.a.1 Spessore di un materiale espresso in due modi	69
4.a.2 Effetto fotoelettrico e scattering Compton	69
4.a.3 Lunghezza d'onda Compton	69
4.a.4 Scattering Rayleigh	69
4.a.5 Creazione di coppie su nucleo	70
4.a.6 Effetto Cherenkov e angolo Cherenkov	70
4.a.7 Situazioni di applicazione della formula di Frank-Tamm	72
4.a.8 Situazioni di applicazione della formula di Frank-Tamm integrale	72
4.a.9 Cause ed effetti della radiazione di frenamento	72
4.a.10 Importanza della Bremsstrahlung per gli elettroni	73
4.a.11 Situazione di applicazione della energia irraggiata per unità di frequenza e di angolo solido	74
4.a.12 Energia irraggiata per unità di frequenza per Bremsstrahlung non relativistica	74
4.a.13 Sezione d'urto di irraggiamento	74
4.a.14 Sezione d'urto di irraggiamento per schermaggio incompleto	75
4.a.15 Sezione d'urto di irraggiamento relativistica	75
4.a.16 Sezione d'urto di irraggiamento in funzione della sezione d'urto espressa in m^2	77
4.a.17 Definizione di lunghezza di radiazione	77
4.a.18 Definizione di energia Critica	78
4.a.19 Legge di attenuazione per irraggiamento dell'energia in un mezzo	78
4.a.20 Formula di Tsai	78
4.a.21 Perdita di energia per collisioni	78
4.a.22 Formula di Bethe-Bloch	79
4.a.23 Andamento della Bethe-Bloch	79
4.a.24 Range o percorso residuo di una particella	79
4.a.25 Stopping Power per i vari processi nella materia	80
4.a.26 Calcolo del percorso residuo nota la curva di stopping power.	80
4.a.27 Picco di Brag	80
4.a.28 Scattering multiplo per particella in moto veloce nella materia	80
4.a.29 Definizione di angolo multiplo di scattering	80
4.a.30 Espressione per l'angolo quadratico medio di scattering	80
4.a.31 Distribuzione per il fenomeno di multiplo scattering	81
4.a.32 Metodo di produzione di antiprotoni nell'esperimento di Segre	81
4.a.33 Metodo di separazione degli antiprotoni dal fondo di pioni nell'esperimento di Segre	81
4.a.34 Esperimento di Anderson sulla scoperta del positrone	82

b Domande b 82

4.b.1 Il cono Cherenkov	82
4.b.2 Numero di fotoni emessi nella radiazione in funzione dell'energia della particella	83
4.b.3 Numero di fotoni osservati nella radiazione Cherenkov con un rivelatore in due casi	83
4.b.4 Angolo di emissione Cherenkov in funzione dell'impulso	83
4.b.5 Funzionamento di vari tipi di rivelatori	84
4.b.6 Energia persa per unità di frequenza per irraggiamento nel caso non relativistico	85
4.b.7 Energia persa per irraggiamento nell'unità di frequenza non relativistica in funzione di b	86
4.b.8 Sezione d'urto di irraggiamento nel caso di screening attivo	87
4.b.9 Perdita di energia per irraggiamento nel caso relativistico	87
4.b.10 Valutazione numerica della lunghezza di radiazione in alcuni casi	87
4.b.11 Valutazione numerica dell'energia irraggiata da un elettrone nel piombo	88
4.b.12 Fotoni emessi da un elettrone nel silicio, probabilita che uno di questi interagisca successivamente	88
4.b.13 Probabilità di avere produzione di coppie su piombo	88
4.b.14 Energia massima e minima trasferibile per singola collisione	89
4.b.15 Dimostrare la formula di perdita di energia per collisioni secondo le approssimazioni di Bhor	90
4.b.16 Valutazione del minimo dell'energia persa per collisioni in alcuni materiali	91
4.b.17 Proprietà della distribuzione dell'angolo quadratico medio nel multiplo scattering	91
4.b.18 Dimostrare l'espressione approssimata per l'angolo quadratico medio (multiplo scattering)	92
4.b.19 Indagine di interazione con la materia per alcune particelle	93

4.b.20 Angolo di flessione di un Muone in materiale con campo magnetico	95
4.b.21 Fotoni incidenti su carbonio: energia degli elettroni prodotti	95
4.b.22 Ricavare la lunghezza d'onda Compton	96
4.b.23 Probabilità di interazione di fotoni nel Piombo	97
4.b.24 Sezione d'urto Rayleigh in funzione della sezione d'urto differenziale Thompson e di $F(\mathbf{q})$. . .	97
4.b.25 Confutazione dell'ipotesi di protone nell'esperimento di Anderson	97
4.b.26 Considerazioni sulla velocità delle particelle nell'esperimento di Segrè	97

5 Domande a scelta 98

c Domande c	98
5.c.1	98
5.c.2	98
5.c.3	99
5.c.4	99

Elenco delle figure

1 Assorbimento e diffusione e.m. di un sistema	8
2 Dipolo magnetico oscillante.	9
3 Spettro di energia dell'elettrone.	17
4 Esempio di Dalitz Plot.	21
5 Spira immersa nel campo di onda e.m.	22
6 Andamento delle sezioni d'urto della Bright-Wiegner	31
7 Dimensioni atomiche tipiche	33
8 Schema dello scattering Rutherford.	34
9 Elemento infinitesimo della sezione d'urto	34
10 Scattering su sfera rigida	36
11 Decadimento del π^0 in due fotoni: a sinistra nel centro di massa e a destra nel sistema del laboratorio.	41
12 Carica in moto e punto di osservazione dei campi	49
13 Distribuzione Angolare della radiazione di sincrotrone	52
14 Campi elettrici generati da una carica in moto	56
15 Schema di rilevamento della Luce di Sincrotrone	61
16 Drift Tube in un acceleratore lineare	63
17 Sistema di riferimento per una carica accelerata linearmente.	65
18 Schema di osservazione dell'effetto Cherenkov	71
19 Situazione geometrica della radiazione cherenkov	71
20 Schema dello scattering coulombiano per la Bremsstrahlung	73
21 Emissione della radioazione nel caso di Bremsstrahlung non relativistica	73
22 Emissione della radioazione nel caso di Bremsstrahlung relativistica	73
23 Tipi di screening per la Bremsstrahlung.	76
24 Andamento commentato della Bethe-Bloch.	79
25 segre	81
26 Distribuzione pioni-antiprotoni	82
27 Rivelatori Cherenkov a soglia	84
28 Rilevatore Cherenkov RICH.	84
29 Rilevatori Cherenkov DIRCH.	85
30 Gauss per un cilindro con una carica puntiforme all'interno	86
31 Tabella con proprietà di alcuni materiali.	94
32 Sezione d'urto di fotone su carbonio.	96
33 Sezione d'urto Mott differenziale	99
34 elettrone su nucleo	100
35 Fattore di forma per sfera uniformemente carica	101
36 Sezione d'urto per un elettrone incidente su un atomo di piombo considerando $F(\mathbf{q})$	101

Parte 1

Prerequisiti

a Domande a

1.a.1 Definire le quantità β e γ per le trasformazioni di Lorentz.

Presi due sistemi di riferimento inerziali O ed O' si ha che β è la velocità del sistema O' rispetto ad O (in unità di c) mentre:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

1.a.2 Definire il prodotto scalare di due 4-vettori.

Presi $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$ e $y^\mu = (y^0, \mathbf{y})$ si definisce il loro prodotto come $x^\mu y_\mu$ come:

$$x^\mu y_\mu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}.$$

1.a.3 Definire il modulo di un 4-vettore.

Se x^μ è un 4-vettore il suo modulo è definito secondo la metrica:

$$|x|^2 = x^\mu x_\mu.$$

Dato che il tensore metrico non è definito positivo il modulo di un 4-vettore può esser positivo, negativo o nullo.

1.a.4 Scrivere le trasformazioni di Lorentz per il boost lungo un asse (asse x).

Per un boost lungo l'asse x si ha:

$$\begin{cases} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

o in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1.a.5 Definire le derivate in 4-dimensioni, la quadridivergenza, il differenziale di uno scalare di Lorentz, l'operatore di D'Alembert.

Si definisce gli operatori ∂^μ e ∂_μ come:

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right), \quad \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right).$$

Preso un generico campo tensoriale, la sua 4-divergenza (rispetto a qualche indice) è la contrazione tra l'operatore ∂^μ e l'indice stesso (se quest'ultimo è covariante) oppure tra l'operatore ∂_{μ} e l'indice stesso (se quest'ultimo è controvariante). Ad esempio preso il campo vettoriale $v^\mu \equiv (v^0, \mathbf{v})$ la sua 4-divergenza sarà:

$$\partial_\mu v^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial v^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Se invece ϕ è un invariante di Lorentz il suo differenziale è:

$$d\phi = dx^\mu \partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \phi.$$

L'operatore di D'Alembert invece è:

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.$$

1.a.6 Definire il tempo proprio e dare la relazione (differenziale) fra tempo proprio e tempo nel sistema in cui si osserva il moto.

Si sa che l'intervallo ds^2 è uno scalare di Lorentz, inoltre per un sistema solidale (o tangente) si ha $dx^\mu = (cd\tau, 0)$ con $d\tau$ il tempo proprio infinitesimo. Si ha quindi:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 d\tau^2 - |dx|^2 = c^2 dt^2 - |\mathbf{v}|^2 dt^2 \implies d\tau = \frac{dt}{\gamma}.$$

1.a.7 Dare la definizione di invariante di Lorentz.

Un invariante di Lorentz è una grandezza che viene lasciata invariata dalle trasformazioni di Lorentz: è uguale in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

1.a.8 Definire la 4-velocità ed il 4-impulso di un punto materiale di massa m , esprimere le loro unità di misura nei sistemi MKS e $\hbar = c = 1$, dimostrare che il loro modulo è costante.

In MKS la 4-velocità ed il 4-impulso sono rispettivamente:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = (\gamma c, \gamma \mathbf{v}) \left(\frac{[m]}{[s]} \right), \quad p^\mu = m u^\mu \left(\frac{[kg] \cdot [m]}{[s]} \right).$$

Mentre in unità di $\hbar = c = 1$ si ha che u^μ è adimensionale mentre p^μ di misura in kg . Dimostriamo che il modulo di questi due è costante:

$$u^\mu u_\mu = \gamma^2 (c^2 - \mathbf{v}^2) = c^2$$
$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2$$

1.a.9 Enunciare la legge di conservazione del 4-impulso.

Per un sistema isolato (ovvero non sottoposto a forze esterne) il 4-impulso totale si conserva nel tempo.

1.a.10 Dare la definizione di 4-vettore covariante e controvariante; definire un tensore covariante di rango 2 e la sua traccia.

Un tensore covariante è il prodotto tensoriale di due quadrivettori covarianti. Di conseguenza un tensore covariante $F_{\mu\nu}$ trasforma sotto trasformazioni di Lorentz come:

$$F'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta F_{\alpha\beta}.$$

La traccia di F è

$$F^\mu_\mu = g^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

1.a.11 Definire il tensore metrico $g_{\mu\nu}$

Il tensore metrico si definisce come: $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

1.a.12 Dare la definizione di tensore antisimmetrico di rango 2 ed indicare quali dei suoi elementi siano le componenti di un vettore polare e quali quelle di un vettore assiale tridimensionale.

Un tensore antisimmetrico $F^{\mu\nu}$ di rango 2 è un tensore che cambia segno sotto scambio di indici:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Nel caso particolare in cui $F^{\mu\nu}$ è della forma:

$$F^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & v_x & v_y & v_z \\ \hline -v_x & 0 & -w_z & w_y \\ -v_y & w_z & 0 & -w_x \\ -v_z & -w_y & w_x & 0 \end{array} \right)$$

Allora il vettore \mathbf{v} è polare (invariante sotto parità) mentre il vettore \mathbf{w} è assiale ("contro"variante sotto parità: cambia segno).

1.a.13 Definire quando una legge è scritta in modo relativisticamente covariante.

Una legge fisica è scritta in modo relativisticamente covariante se è una uguaglianza tra due oggetti che trasformano allo stesso modo sotto cambi di sistema di riferimento, ossia se i due oggetti hanno gli stessi indici covarianti e controvarianti.

1.a.14 Enunciare o ricavare la legge relativistica di composizione delle velocità.

Supponiamo di avere un corpo puntiforme e siano \mathbf{v} e \mathbf{v}' le sue velocità nei sistemi inerziali O e O' . Se $\mathbf{w} = w\hat{x}$ è la velocità di O' rispetto ad O allora si ha

$$v'_x = \frac{v_x - w}{1 - v_x w/c^2} \quad v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - v_x w/c^2)} \quad v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - v_x w/c^2)}$$

$$\text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}}$$

1.a.15 Dimostrare che il modulo di un 4-vettore ed il prodotto di due 4-vettori sono invarianti di Lorentz.

È sufficiente dimostrare che il prodotto di due 4-vettori è invariante:

$$x'^\mu y'_\mu = \Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\gamma x^\alpha y^\gamma.$$

Inoltre il gruppo di Lorentz può esser definito come il gruppo che lascia invariato la metrica di Minkowsky, quindi:

$$\Lambda^\mu_\alpha g_{\mu\beta} \Lambda^\beta_\gamma = g_{\alpha\gamma} \implies x'^\mu y'_\mu = x^\mu y_\mu$$

1.a.16 Spiegare il paradosso dei gemelli.

Consideriamo i gemelli Bob e Alice sulla terra nell'anno 3000. Supponiamo che la prima rimanga sulla terra (supposta sistema inerziale) e che Bob parta per una stella a 8 anni luce dal pianeta a velocità 0.8 c.

Poniamoci nel sistema della terra: per andare nel sistema di Bob, sull'astronave, è necessario un boost con $\gamma = \sqrt{1 - \beta^2} = 0.6$ sia all'andata che al ritorno.

Se volessimo il tempo Δt trascorso tra la partenza ed il ritorno di Bob sulla terra nel sistema di riferimento di Alice si ottiene 20 anni (10 all'andata e 10 al ritorno). Tuttavia Alice, che ha studiato bene relatività ristretta a scuola, sa che il tempo nel sistema di Bob scorreva più lentamente rispetto al suo sistema, quindi si immagina che per Bob il viaggio sia durato $\Delta t' = \gamma \Delta t = 12$ anni, si aspetta quindi che Bob sarà più giovane di lei.

Poniamoci adesso nel sistema di riferimento di Bob all'inizio del viaggio sull'astronave: un ragionamento simmetrico ci porterebbe a conclusioni completamente opposte rispetto a sopra, da cui il paradosso.

Il problema porta alla luce due violente conseguenze della relatività di Einstein: la prima è la fine del concetto di simultaneità tra sistemi inerziali differenti, la seconda è il fatto i due sistemi per quanto sembrano idealmente simmetrici non lo sono affatto. Il gemello sull'astronave accelera in vari momenti del suo percorso, il suo non è un sistema di riferimento inerziale, da questa rottura deriva il fatto che il gemello sulla terra a fine viaggio risulta effettivamente più vecchio. È necessario quindi, per risolvere il paradosso, andare oltre la relatività ristretta ed incamminarsi verso la relatività generale.

1.a.17 Dimostrare che l'operatore di D'Alembert è un invariante di Lorentz.

Se si considera l'operatore di D'Alembert come il prodotto di quadri-vettori allora la dimostrazione è già stata effettuata nel punto (1.a.15).

1.a.18 Dimostrare che la 4-accelerazione e la 4-velocità sono perpendicolari.

Visto che $u^\mu u_\mu = c^2$ possiamo derivare a destra e sinistra rispetto al tempo proprio ottenendo:

$$0 = \frac{du^\mu u_\mu}{d\tau} = u^\mu a_\mu + a^\mu u_\mu = 2u^\mu a_\mu$$

Da quest'ultima relazione si evince che 4-velocità e 4-accelerazione sono perpendicolari.

1.a.19 Quanto valgono in MKS e in CGS le costanti: c , ϵ_0 , μ_0 , $e^2/4\pi$, \hbar ?

In MKS si ha:

$$\begin{aligned}c &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \\ \epsilon_0 &= 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m} \\ \mu_0 &= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \\ \frac{e^2}{4\pi} &= 2.04 \cdot 10^{-39} \text{ C}^2 \\ \hbar &= 1.05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

In CGS invece:

$$\begin{aligned}c &= 3 \cdot 10^{10} \text{ cm/s} \\ \epsilon_0 &= \frac{1}{4\pi} \\ \mu_0 &= \frac{4\pi}{c^2} \\ \frac{e^2}{4\pi} &= 1.83 \cdot 10^{-20} \text{ esu}^2 \quad (\text{con } 1 \text{ esu} = 1 \text{ Am/c} = 10^{-8} \text{ cm/c}) \\ \hbar &= 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}\end{aligned}$$

1.a.20 Quanto vale entro il 5% la costante $\hbar c$ in eV-nm e in MeV-fm?

La costante $\hbar c$ vale:

$$\hbar c = 197 \text{ eV} \cdot \text{nm} = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$$

1.a.21 Spiegare la differenza tra le seguenti categorie di fotoni: infrarossi - visibili - ultravioletti - raggi X - raggi γ .

La differenza tra le categorie sta nella energia (o equivalentemente nella frequenza):

Fotoni	Frequenza [Hz]	Energia [eV]	Lunghezza d'onda [nm]
infrarosso	$5 \cdot 10^{11} - 4 \cdot 10^{14}$	$2.5 \cdot 10^{-4} \sim 10^{-1}$	$10^5 \sim 700$
visibile	$4 \cdot 10^{14} - 8 \cdot 10^{14}$	$10^{-1} \sim 5$	$700 \sim 300$
ultravioletto	$8 \cdot 10^{14} - 3 \cdot 10^{17}$	$5 \sim 2 \cdot 10^4$	$300 \sim 1$
raggi X	$3 \cdot 10^{17} - 5 \cdot 10^{19}$	$10^3 \sim 2 \cdot 10^5$	$1 \sim 10^{-2}$
raggi γ	$\geq 5 \cdot 10^{19}$	$\geq 10^5$	$\leq 10^{-2}$

1.a.22 Quanto vale la massa del fotone?

Il fotone ha massa nulla.

1.a.23 Quanto valgono, entro il 5%, la carica elettrica dell'elettrone e del protone (in MKSA)?

La carica dell'elettrone vale

$$e = -1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

mentre quella del protone vale l'opposto.

1.a.24 Quanto vale, entro il 5%, la costante di struttura fine (α)?

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 7.29 \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

1.a.25 Quanto valgono, entro il 10%, la massa dell'elettrone e del protone (in MKS e in MeV/ c^2)?

$$\begin{aligned}m_e &= 0.511 \text{ MeV}/c^2 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \\ m_p &= 938 \text{ MeV}/c^2 = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}\end{aligned}$$

1.a.26 Dire se la differenza fra la massa del neutrone e la somma della massa del protone e dell'elettrone sia: 1 MeV; 10 MeV; 100 MeV oppure negativa.

$$m_n - (m_p + m_e) \approx 1 \text{ MeV}$$

1.a.27 Quanto è l'ordine di grandezza dell'energia media di legame di un elettrone all'interno di un atomo?

L'energia di legame di un elettrone all'interno di un atomo varia tra 1 e 100 eV, tale energia è tendenzialmente più vicina ad 1 eV.

1.a.28 Spiegare la differenza fra ottica fisica ed ottica geometrica

L'ottica geometrica studia i fenomeni ottici assumendo che la luce si propaghi mediante raggi rettilinei (riflessione, rifrazione).

L'ottica fisica è la branca dell'ottica che studia i fenomeni in cui emerge la natura ondulatoria della luce (interferenza, diffrazione).

Nel limite in cui le dimensioni lineari degli oggetti studiati siano molto maggiori della lunghezza d'onda della luce incidente l'ottica fisica è approssimata sempre meglio dall'ottica geometrica.

1.a.29 Esprimere tutte le relazioni fra campo elettrico, magnetico direzione di propagazione di un'onda e.m. piana.

I campi ed il vettore d'onda formano una terna ortogonale; in particolare si ha (in CGS):

$$\mathbf{B} = \hat{k} \wedge \mathbf{E} \quad \mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \bar{\hat{k}}$$

In particolare i campi sono trasversali, ovvero:

$$\hat{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \hat{k} \cdot \mathbf{B} = 0$$

1.a.30 Dare la definizione di onda piana elettromagnetica monocromatica e delle seguenti quantità: ampiezza, frequenza angolare, vettore d'onda, frequenza, periodo, lunghezza d'onda. Scrivere le relazioni esistenti fra le grandezze sopra definite.

Un'onda piana monocromatica è un'onda le cui componenti dei campi sono della forma

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t}$$

L'ampiezza è il modulo dei campi, ω è la frequenza angolare, \mathbf{k} è il vettore d'onda, $f = \omega/2\pi$ è la frequenza, $T = 1/f$ è il periodo, $\lambda = 2\pi/|\mathbf{k}|$ è la lunghezza d'onda. Nel vuoto si ha la relazione $\omega = kc$.

1.a.31 Definire la relazione di dispersione, la velocità di fase e la velocità di gruppo per un'onda e.m. e spiegarne il loro significato fisico.

Dalle equazioni di Maxwell in MKS

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

si ricava che, per campi monocromatici:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2}{c^2} \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2}{c^2} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Quindi esplicitando anche il laplaciano delle equazioni si trova la relazione funzionale che lega ω a k : la relazione di dispersione

$$c^2 k^2 = \epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2$$

La velocità di gruppo e di fase possono allora essere definite come

$$v_f = \frac{\omega}{k} \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

La prima rappresenta la velocità con cui si propaga la fase dell'onda mentre la seconda quella con cui si propaga l'involuppo del pacchetto.

1.a.32 Definire la polarizzazione di un'onda e.m.

La polarizzazione di un'onda EM è la direzione in cui oscilla il campo elettrico. Questa può essere lineare (se la direzione di oscillazione non varia nel tempo), circolare o ellittica.

1.a.33 In un sistema Oxyz scrivere l'espressione del campo elettrico e del campo magnetico di un'onda e.m. piana monocromatica, polarizzata linearmente lungo y e che si propaga lungo x, sia utilizzando il formalismo reale, sia utilizzando il formalismo complesso complesso.

In CGS:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_0 \hat{y} e^{ikx - i\omega t} = E_0 \hat{y} \cos(kx - \omega t) \\ \mathbf{B} &= E_0 \hat{z} e^{ikx - i\omega t} = E_0 \hat{z} \cos(kx - \omega t) \end{aligned}$$

1.a.34 Enunciare e spiegare il principio di Huygens.

Ogni elemento di un fronte d'onda si può considerare come sorgente secondaria di onde sferiche in fase con l'onda primaria e di ampiezza proporzionale all'ampiezza dell'onda primaria e all'area dell'elemento di fronte d'onda.

La distribuzione angolare di ampiezza è data dal fattore di obliquità:

$$f(\theta) = \frac{1 + \cos(\theta)}{2}$$

1.a.35 Definire e calcolare l'impedenza del vuoto, e chiarire il suo significato fisico.

Consideriamo un'onda e.m. monocromatica polarizzata linearmente che propaga (nel vuoto) nella direzione \hat{z} , i campi saranno in MKS:

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{x} \cos(\omega t - kz) \quad \mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \hat{y} \cos(\omega t - kz)$$

Da cui il vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{E_0^2}{c\mu_0} \cos^2(\omega t - kz) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz)$$

Nell'ultima espressione il termine sotto radice ha le dimensioni di $\sqrt{\frac{H}{F}} = \Omega$: è una resistenza.

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 120\pi \Omega$$

Questa è chiamata impedenza del vuoto e rappresenta la resistività ρ superficiale di un materiale che assorbe senza riflettere le onde e.m. piane (tipicamente nella regione di microonde: $\sim 3\text{GHz} < f < \sim 300\text{GHz}$)

1.a.36 Definire - in CGS e in MKSA - per un sistema di cariche e correnti elettriche: momento di dipolo elettrico; momento di quadrupolo elettrico; momento di dipolo magnetico.

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \int \rho(\mathbf{r}) d^3r \\ \mathbf{Q} &= \int \rho(\mathbf{r}) (3\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - r^2 \mathbb{I}) d^3r \\ \mathbf{m} &= \frac{1}{2[c]} \int \mathbf{r} \wedge \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3r \end{aligned}$$

Dove ρ e \mathbf{J} sono le densità di carica e di corrente, le quantità tra parentesi [] sono quelle da aggiungere per il sistema CGS.

1.a.37 Calcolare, a partire dalle EDM, la velocità delle onde elettromagnetiche in un mezzo omogeneo, lineare ed isotropo.

In un mezzo così descritto vale la relazione:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon(\omega) \mu(\omega) \omega^2}{c^2} \mathbf{E} = 0$$

Quindi la velocità di fase cercata è (considerando la relazione di dispersione trovata sopra):

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

1.a.38 Esprimere la densità di energia di un'onda e.m. piana in funzione dei campi elettrico e/o magnetico.

In unità MKS:

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) = \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2$$

In CGS invece:

$$u = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{8\pi} = \frac{\epsilon_0}{4\pi} |\mathbf{E}|^2$$

1.a.39 Dare la definizione ed esprimere il vettore di Poynting di un'onda e.m. piana in funzione del campo elettrico e/o magnetico.

In CGS:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \hat{k}$$

In MKSA:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \wedge \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \hat{k} = \frac{c}{\mu_0 c^2} E_0^2 \hat{k} = \epsilon_0 c E_0^2 \hat{k}.$$

1.a.40 Esprimere la pressione (di radiazione) che un campo e.m. esercita su una superficie piana.

Supponendo la superficie perfettamente riflettente si ottiene:

$$p = \frac{2I}{c}.$$

con $I = \langle S \rangle$ è l'intensità dell'onda.

1.a.41 Dare la definizione di interferenza e diffrazione; di interferenza costruttiva e distruttiva.

L'interferenza è un fenomeno in cui le intensità di due onde coerenti non si sommano linearmente. La diffrazione è un fenomeno in cui un fascio di radiazione si allarga (emette onde sferiche) dopo aver superato una fenditura o un ostacolo.

Parte 2

Indagine della materia tramite collisioni e decadimenti

a Domande a

2.a.1 Descrivere qualitativamente il fenomeno dell'assorbimento, il fenomeno della diffusione elastica ed il fenomeno della diffusione inelastica di un'onda e.m. su un sistema.

Schematizzando il sistema come una scatola su cui facciamo incidere onde e.m. e osservando la radiazione emessa dall'oggetto possiamo distinguere tre fenomeni:

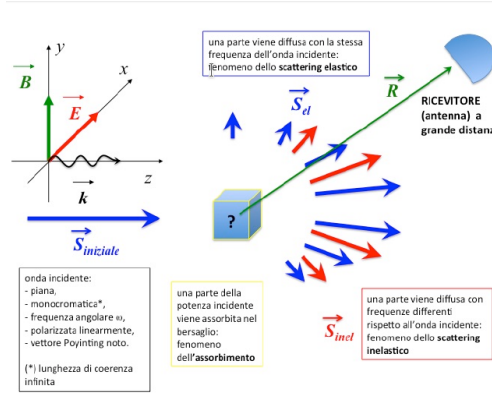


Figura 1: Assorbimento e diffusione e.m. di un sistema

Una parte della potenza irradiata dall'onda sorgente può essere assorbita dall'oggetto (quindi dissipata con qualche meccanismo interno): fenomeno dell'assorbimento.

Una parte della potenza dell'onda incidente può essere diffusa sempre con la medesima frequenza: fenomeno della diffusione elastica.

Una parte della potenza dell'onda incidente può essere diffusa con frequenze differenti dalla incidente stessa: fenomeno della diffusione inelastica.

Un esempio di sistema di questo tipo è l'atomo in cui l'onda incidente eccita gli elettroni che, accelerando, possono irraggiare e dare luogo ai tre fenomeni citati.

2.a.2 Per un'onda e.m. monocromatica che incide su un bersaglio (per esempio un circuito o un atomo) definire le sezioni d'urto: di assorbimento, elastica differenziale, totale elastica; inelastica differenziale; inelastica totale; totale.

- Sezione d'urto di assorbimento:

$$\sigma_{abs} = \frac{\langle P_{abs} \rangle}{\langle |S_{in}| \rangle}$$

- Sezione d'urto elastica:

$$\sigma_{el} = \frac{\langle P_{el} \rangle}{\langle |S_{in}| \rangle}$$

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = R^2 \frac{\langle |S_{el}(\theta, \phi)| \rangle}{\langle |S_{in}| \rangle}$$

- Sezione d'urto inelastica:

per ogni frequenza angolare ω_i a cui avviene la diffusione si ha:

$$\sigma_{\omega_i} = \frac{\langle P_{\omega_i} \rangle}{\langle |S_{in}| \rangle}$$

$$\frac{d\sigma_{\omega_i}}{d\Omega} = R^2 \frac{\langle |S_{\omega_i}(\theta, \phi)| \rangle}{\langle |S_{in}| \rangle}$$

- Sezione d'urto totale:

$$\sigma_{tot} = \sigma_{abs} + \sigma_{el} + \sum_{n=i} \sigma_{\omega_i}$$

Da notare che l'unità di misura della sezione d'urto è quella di un'area.

2.a.3 Definire la ampiezza di scattering per un'onda e.m. monocromatica che incide su un bersaglio fisso (per esempio un circuito o un atomo).

Per uno stato finale del sistema (con l'onda diffusa generata dal bersaglio) a grandi distanze il campo elettrico può esser scritto come il prodotto di un'onda sferica e di un termine che tenga conto della dinamica del processo:

$$E_f = f(\theta, \varphi) \frac{e^{-i(\omega_f t - k_f R + \phi)}}{R}$$

Con ω_f frequenza uscente, k_f vettore d'onda uscente, ϕ fase.

L'ampiezza di scattering f è quindi l'ampiezza dell'onda sferica riemessa dall'oggetto scatterante (che interagisce con un'onda piana monocromatica). Questa è legata alla sezione d'urto differenziale dalla relazione:

$$\frac{d\sigma_{\omega_f}}{d\Omega} = \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{|E_0|^2}$$

2.a.4 Descrivere la situazione in cui la legge

$$P = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}_e^2 + \frac{1}{180c^5} \ddot{\mathbf{Q}}_{ij}^2 + \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}_m^2$$

(espressa in CGS) è applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata; trascrivere poi l'espressione in MKSA.

P è la potenza irradiata da un sistema in cui sono presenti un dipolo elettrico (1), un quadrupolo magnetico (2) ed un dipolo magnetico (3):

1. Dipolo elettrico:

$$P_1^{CGS} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}_{el}^2 \quad P_1^{MKS} = k_0 \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}_{el}^2$$

con

$$\mathbf{p}_e = \sum_{cariche} q \mathbf{r}$$

2. Quadrupolo elettrico:

$$P_2^{CGS} = \frac{1}{180c^5} \ddot{\mathbf{Q}}_{ij}^2 \quad P_2^{MKS} = k_0 \frac{1}{180c^5} \ddot{\mathbf{Q}}_{ij}^2$$

con

$$\mathbf{Q} = \sum_{cariche} q (3\mathbf{r} \wedge \mathbf{r} - r^2 \mathbb{I})$$

3. dipolo magnetico:

$$P_3^{CGS} = \frac{2}{3c^3} \ddot{\mathbf{p}}_m^2 \quad P_3^{MKS} = k_0 \frac{2}{3c^5} \ddot{\mathbf{p}}_m^2$$

con

$$\mathbf{p}_m = \frac{1}{2[c]} \sum_{cariche} q \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}$$

Queste sono applicabili se le dimensioni caratteristiche dell'oggetto che emette sono molto più piccole della lunghezza d'onda incidente.

2.a.5 Scrivere la distribuzione angolare della radiazione di dipolo elettrico e di dipolo magnetico nel caso non relativistico.

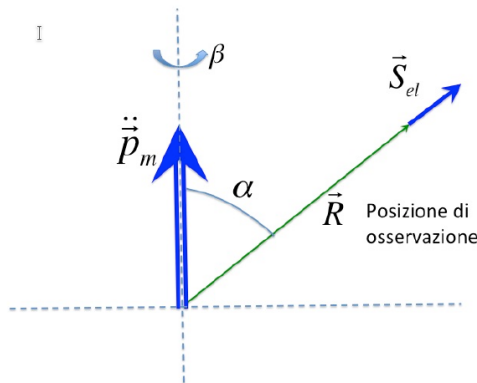


Figura 2: Dipolo magnetico oscillante.

Sulla base della notazione di figura si ha:

MKSA I campi e la potenza irraggiata si scrivono come:

Dipolo magnetico:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}_m(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^3} & \mathbf{B} &= k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}_m(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^3} \\ P_m &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}_m|^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} & \frac{dP_m}{d\Omega} &= \frac{dP_m}{d\cos\alpha d\beta} = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^5} \ddot{\mathbf{p}}_m^2(t_{rit}) \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Dipolo elettrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}_e(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^2} & \mathbf{B} &= k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}_e(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^2} \\ P_e &= \frac{|\ddot{\mathbf{p}}_e|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} & \frac{dP_e}{d\Omega} &= \frac{dP_e}{d\cos\alpha d\beta} = \frac{1}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{p}}_e^2(t_{rit}) \sin^2\alpha \end{aligned}$$

CGS I campi e la potenza irraggiata si scrivono come:

Dipolo magnetico:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\frac{\ddot{\mathbf{p}}_m(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^2} & \mathbf{B} &= \frac{(\ddot{\mathbf{p}}_m(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^2} \\ P_m &= \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}_m|^2}{c^3} & \frac{dP_m}{d\Omega} &= \frac{dP_m}{d\cos\alpha d\beta} = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\mathbf{p}}_m^2(t_{rit}) \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Dipolo elettrico:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{(\ddot{\mathbf{p}}_e(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^2} & \mathbf{B} &= \frac{\ddot{\mathbf{p}}_e(t_{rit}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^2} \\ P_e &= \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{p}}_e|^2}{c^3} & \frac{dP_e}{d\Omega} &= \frac{dP_e}{d\cos\alpha d\beta} = \frac{1}{4\pi c^3} \ddot{\mathbf{p}}_e^2(t_{rit}) \sin^2\alpha \end{aligned}$$

Si potrebbe fare una verifica con:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega$$

2.a.6 Definire la "resistenza di irraggiamento" di un circuito elettrico a una maglia e fornire un esempio.

Nota la corrente (I) che scorre nel circuito la resistenza di irraggiamento è la resistenza dovuta alla dissipazione per irraggiamento:

$$R_{irr} = \frac{P_{irr}}{I^2}$$

Ad esempio per un circuito planare si ha (CGS):

$$\mathbf{m} = IS\hat{\mathbf{n}}/c \implies R_{irr} = \frac{2}{3} \frac{S^2 \omega^4}{c^5}$$

2.a.7 Definire urto elastico ed urto inelastico fra due particelle; fornire poi almeno un esempio di reazione elastica ed una inelastica fra:

1. un fotone ed un atomo
2. due particelle cariche
3. un protone ed un nucleo.

Un urto è elastico se la natura delle particelle non varia nell'urto stesso, ovvero se per ogni costituente

$$p_i^\mu p_{i,\mu} = m_i^2$$

è costante nel tempo. Urti di questo tipo sono della forma:

$$a + b \implies a + b$$

In tutti gli altri casi l'urto è anelastico e si hanno situazioni del tipo:

$$a + b \implies \sum_i p_i$$

Diamo adesso esempi di reazioni:

Fotone e Atomo

- Elastico: Scattering Thomson.

$$\gamma + H \Rightarrow \gamma + H$$

- Inelastico: Effetto Compton.

$$\gamma + A \Rightarrow \gamma + e^- + A^+$$

Due particelle cariche

- Elastico:

$$p + p \Rightarrow p + p$$

- Inelastico: Produzione del bosone di Higgs

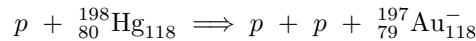
$$p + p \Rightarrow H + \dots$$

Protone e Nucleo

- Elastico:

da trovare ancora...

- Inelastico: Reazione degli alchimisti



2.a.8 Dire quali fra le seguenti grandezze si conservano sempre nei processi di urto in cui avvengono interazioni elettromagnetiche e/o forti, ma non deboli.

1. **carica elettrica.** Si conserva.
2. **numero barionico.** Si conserva.
3. **numero leptonico elettronico.** Si conserva.
4. **numero leptonico muonico.** Si conserva.
5. **numero di elettroni.** Non si conserva: Formazione di coppie.

$$\gamma \longrightarrow e^+ + e^-.$$

6. **differenza fra il numero di elettroni ed il numero di positroni.** Si conserva.
7. **numero di protoni.** Non si conserva: produzione di protoni su nucleo.
8. **differenza fra il numero di protoni ed il numero di antiprotoni.** Si conserva.

2.a.9 Dire quali fra le seguenti grandezze si conservano sempre nei processi di urto in cui avvengono esclusivamente interazioni forti: Fornire almeno un esempio per ogni situazione in cui vi sia una grandezza non conservata.

1. **carica elettrica.** Si conserva.
2. **numero barionico.** Si conserva.
3. **numero leptonico elettronico.** Si conserva.
4. **numero leptonico muonico.** Si conserva.
5. **numero di elettroni.** Si conserva.
6. **differenza fra il numero di elettroni ed il numero di positroni.** Si conserva.
7. **numero di protoni.** Si conserva.
8. **differenza fra il numero di protoni ed il numero di antiprotoni.** Si conserva.

2.a.10 Dire quali fra le seguenti grandezze si conservano sempre nei processi di urto in cui avvengono interazioni deboli, fornire almeno un esempio quando si ha qualcosa di non conservato.

1. **carica elettrica.** si conserva.
2. **numero barionico.** si conserva.
3. **numero leptonico elettronico.** non si conserva.

$$\mu^- \Rightarrow e^- + \gamma$$

4. **numero leptonico muonico.** Non si conserva, stessa interazione di sopra.
5. **numero di elettroni.** Non si conserva: Decadimento del Neutrone.

$$n \Rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

6. **differenza fra il numero di elettroni ed il numero di positroni.** Non si conserva: Decadimento β^+

$${}^A_ZX_N \longrightarrow {}^A_{Z-1}Y_{N+1}^- + e^+ + \nu_e$$

7. **numero di protoni.** Non si conserva: Decadimento β^-

$${}^A_ZX_N \longrightarrow {}^A_{Z+1}Y_{N-1}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$$

8. **differenza fra il numero di protoni ed il numero di antiprotoni.** Non si conserva: Decadimento β^-

2.a.11 Definire i processi esclusivi e inclusivi, il Q-valore di un processo e i processi esotermici o endotermici.

Un processo si dice esclusivo se in esso viene misurato il 4-impulso di tutti i prodotti. Un processo si dice inclusivo se in esso vengono misurati solo i 4-impulsi di alcuni prodotti.

Il Q-valore di un processo è definito come:

$$Q = (m_i - m_f)c^2 = T_f - T_i$$

Un processo è esotermico se $Q > 0$, endotermico altrimenti.

2.a.12 Definire la sezione d'urto nei seguenti tre casi, e dimostrare come da ognuno di essi si possano dedurre gli altri due:

1. Particelle incidenti su un unico bersaglio [dati: $j_{\text{incidenti}}$; N_f]
2. Sottile fascio di particelle incidenti su una lastra contenente i bersagli [dati: $\Phi_{\text{incidenti}}$, $\hat{\sigma}_{\text{bersagli}}$, N_f]
3. Urti nel volume fra particelle di due specie diverse e differenti concentrazioni [dati: N_{eventi} per unità di tempo e di volume, n_1 e n_2 concentrazione delle particelle interagenti, v_{rel} (si ipotizza che tutte le particelle di una specie abbiano la stessa velocità).]

Con $\hat{\sigma}$ densità superficiale di eventi, j densità di corrente, N_f frequenza di eventi osservati (o numero di eventi per unità di tempo), Φ flusso di particelle.

Nel primo caso si ha:

$$\sigma = \frac{1}{|j|} \frac{dN_f}{dt}$$

Nel secondo invece:

$$\sigma = \frac{1}{n_s \Phi} \frac{dN_f}{dt}$$

Nel terzo:

$$\sigma = \frac{1}{n_1 n_2 v_{rel}} \frac{dn_f}{dt}$$

Nell'ultimo la sezione d'urto dipende dalla velocità relativa. Inoltre se si ha la funzione di distribuzione per la velocità relativa:

$$\frac{dN_f}{dt} = n_1 n_2 \int_0^\infty \sigma(v_{rel}) f(v_{rel}) dv_{rel}$$

Per passare dal primo al secondo caso basta osservare che:

$$\Phi = |j| S, \quad n_s = \frac{1}{S} \quad (\text{un bersaglio})$$

Con S area del bersaglio. Se mi metto in un sistema in cui una delle particelle è ferma, è evidente mostrare l'equivalenza tra il caso (2) e (3).

2.a.13 Per gli urti fra due particelle definire le sezioni d'urto: elastica, inelastica, inclusiva, esclusiva, totale.

Consideriamo la reazione:

$$a + b \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n$$

e sia $f_i(E_i)$ la distribuzione di probabilità dell'energia del prodotto i-esimo. La sezione d'urto inclusiva di tale prodotto è:

$$\sigma_i = \int_{E_{i,min}}^{E_{i,max}} f(E_i) dE_i$$

Se invece si considera la distribuzione degli impulsi di tutte le particelle finali: $f(P_1, \dots, P_n)$ si ha una sezione d'urto esclusiva:

$$\sigma_e = \int f(P_1, \dots, P_n) \prod_{i=1}^n d^4 P_i$$

La sezione d'urto elastica è la sezione d'urto relativa ad un urto elastico, la sezione d'urto anaelastica è la sezione d'urto relativa ad un urto anaelastico.

2.a.14 Calcolare la probabilità di interazione per una particella che incide su una lamina sottile [dati: σ processo, $N_{bersagli}$ per unità superficie]. Che significato avrebbe una probabilità maggiore di uno? Quest'ultima risposta dipende dalle tipologie degli urti?

La probabilità di interazione è: $P = N\sigma$. Se questa è maggiore di 1 significa che è venuta meno l'approssimazione di lamina sottile. In ogni caso questa non dipende dal tipo di interazione.

2.a.15 Indicare le condizioni per cui la forza di reazione radiativa per una particella (di massa m e carica unitaria) $F_{rad} = m\tau\dot{a}$ è da considerarsi valida ed utilizzabile.

Si ritiene necessario, per indicare le approssimazioni, ricavare la forza in questione. La forza di radiazione può essere definita come la forza il cui lavoro è responsabile della perdita di energia per irraggiamento noto nella formula di Larmor (CGS):

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\mathbf{v}}^2$$

Posso scrivere:

$$\dot{\mathbf{v}}^2 = \frac{d(\mathbf{v}\dot{\mathbf{v}})}{dt} - \mathbf{v}\ddot{\mathbf{v}}$$

Inserendo nel secondo membro della equazione si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_{rad} \cdot \mathbf{v} dt = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} \Big|_{t_1}^{t_2} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v} \cdot \ddot{\mathbf{v}} dt$$

Se il moto è periodico di ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\mathbf{F}_{rad} - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}} \right) \cdot \mathbf{v} dt = 0$$

Poiche velocità e accelerazione sono ortogonali in tal caso, abbiamo quindi un candidato per la \mathbf{F}_{rad} .

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{v}}.$$

che in MKSA si scrive come:

$$\mathbf{F}_{rad} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{x}} = m_e \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{x}} = m_e \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} \ddot{\mathbf{x}} = m_e \tau \ddot{\mathbf{x}}.$$

Possiamo quindi dare una stima dei valori tipici di questa forza:

$$r_e = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} = 2.82 fm \implies \tau = \frac{2}{3} \frac{r_e}{c} = 6.2 \cdot 10^{-24} s.$$

Tenendo conto della forza viscosa che agisce classicamente sull'elettrone

$$\mathbf{F}_{visc} = -\beta \dot{\mathbf{x}} = -m_e \Gamma' \dot{\mathbf{x}}$$

con valori tipici: $\Gamma' \sim 10^{10} s^{-1}$.

Infine ipotizzando anche una forza "elastica" attrattiva nucleare con valore tipico $\omega_0 \sim 10^{14} - 10^{16}$ otteniamo la relazione:

$$\Gamma' \ll \omega_0 \ll \frac{1}{\tau}.$$

Questo conto sarà utile per la Domanda 2.b.12.

2.a.16 Spiegare il significato e indicare l'unità di misura di ogni grandezza fisica nelle seguenti leggi:

$$\begin{aligned} (1) \rightarrow \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} &= r_e^2 L(\omega) \sin^2(\alpha) & (2) \rightarrow \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} &= r_e^2 L(\omega) \frac{1 + \cos^2(\alpha)}{2} \\ (3) \rightarrow \sigma_{el} &= \sigma_{Th} L(\omega) & (4) \rightarrow \sigma_{tot} &= 4\pi r_e c \frac{\omega^2 \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}} \end{aligned}$$

con

$$L(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}} \quad \sigma_{Th} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = 0.66 \text{ barn}$$

inerenti l'interazione di un'onda e.m. piana e monocromatica su un elettrone legato elasticamente.

L'equazione (1) è la sezione d'urto differenziale per l'interazione tra l'elettrone ed un'onda polarizzata linearmente. Può essere ottenuta dalla equazione del moto dell'elettrone legato elasticamente soggetto alle forze della domanda precedente (di richiamo, di attrito viscoso e radiazione radiativa) immerso nel campo di una onda e.m. piana monocromatica (vedi Domanda 2.b.12):

$$\mathbf{x} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma' - i\tau\omega^2} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}}.$$

In cui si definiscono

$$\Gamma_{tot} = \Gamma' + \Gamma \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \Gamma = \omega_0^2 \tau \quad \text{con } \tau \text{ quello ottenuto nella domanda precedente}$$

Quindi basta adesso ricordare che la distribuzione angolare di potenza irradiata da un dipolo oscillante $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 e^{-i\omega t}$ è:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4 |\mathbf{p}_0|^2}{4\pi c^3} \sin^2(\alpha).$$

Quindi inserendo $|\mathbf{p}_0| = |e\mathbf{x}|$ e dividendo per il vettore di Poynting incidente si ha la tesi (1).

L'equazione (2) è la sezione d'urto differenziale con l'onda incidente non polarizzata: bisogna in questo caso mediare su tutte le possibili polarizzazioni dell'onda incidente ottenendo il fattore finale.

l'espressione (3) si ottiene integrando sull'angolo solido la (1) o la (2).

infine la (4) è la sezione d'urto totale definita come:

$$\sigma_{tot} = \frac{e \langle \dot{\mathbf{x}} \mathbf{E} \rangle}{\langle \mathbf{S}_{in} \rangle}.$$

Possiamo notare anche che:

$$\frac{\sigma_{el}}{\sigma_{tot}} = \frac{1}{1 + \Gamma' / (\omega^2 \tau)}.$$

Che tende all'unità quando non c'è dissipazione.

2.a.17 Discutere qualitativamente le osservazioni sperimentali dello scattering di Rutherford.

Inviando un fascio di particelle α su una lamina d'oro si osserva che circa 1 particella su 8000 viene deviata a grandi angoli o rimbalza. Queste osservazioni non sono spiegabili con il modello a panettone di Thomson ma si spiegano bene con il modello di Bhor.

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Ruth} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0 \sin^2(\frac{\theta}{2}))^2} \left(\frac{zZe^2}{4T} \right)^2.$$

Si deduce facilmente che le particelle più energetiche sono più penetranti, le particelle più cariche vengono maggiormente deflesse.

2.a.18 Spiegare la differenza fra lo scattering Rutherford e lo scattering Mott.

Lo Scattering Mott:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Ruth} \left(1 - \beta^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right).$$

Tiene conto dello spin degli elettroni e degli effetti relativistici che questi hanno nel loro moto.

2.a.19 Spiegare il significato di tutti i termini delle seguenti espressioni delle sezioni d'urto differenziali Rutherford e Mott:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Ruth} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Mott} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Ruth} (1 - \beta^2 \sin^2 \theta/2) \quad \text{con } T \rightarrow \frac{pV}{2}$$

Sono tutti termini di banale comprensione, ricordiamo però che θ è l'angolo di scattering: l'angolo tra la direzione iniziale della particella e quello finale.

2.a.20 Dare la definizione operativa di raggio nucleare mediante lo scattering di Rutherford.

Fissando un angolo di scattering $\hat{\theta} = 60^\circ$ si ha che per energie maggiori di $T_{soglia} \approx 30 MeV$ diviene importante l'interazione forte con il nucleo: si ha un discostamento dalla legge che lega la sezione d'urto Rutherford a T. Quindi possiamo ipotizzare che la distanza minima che si ottiene in questo caso sia una buona stima del raggio nucleare.

$$d \approx \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 T_{soglia}} \implies R = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin(\frac{\hat{\theta}}{2})} \right).$$

È necessario notare che R è la distanza tra i nuclei degli atomi coinvolti nello scattering, non il nucleo dell'atomo (che vorremmo definire), è quindi necessario incidere con particelle il cui nucleo sia di dimensioni attese molto inferiori rispetto a quelle del nucleo in esame per dare una buona stima del raggio di quest'ultimo (ipotesi verificata nel caso di particelle α su Piombo, ad esempio).

2.a.21 Definire le quantità che in un nucleo usualmente si indicano con A, Z, N (simbologia ${}_Z^AX_N$). Dare la definizione di nuclei isotopi, isobari, isotoni, stabili, instabili.

A è il numero di nucleoni (protoni e neutroni), Z è il numero di protoni, N è il numero di neutroni. Due nuclei sono:

- Isotopi: hanno lo stesso Z.
- Isobari: hanno lo stesso A.
- Isotoni hanno lo stesso N.
- Instabili: hanno vita media finita.
- Stabili: hanno vita media "infinita".

2.a.22 Dopo avere definito l'unità di massa atomica e avere dato il suo valore in MeV/c², definire l'energia di legame (B) di un atomo ed il "difetto di massa" (Δ) di un atomo.

$$1 \text{ u.m.a.} = \frac{1}{12} m({}^{12}_6\text{C}_6) = 931.49 \text{ MeV}/c^2.$$

La B è l'energia necessaria per separare un nucleone dal suo nucleo.

L'energia di legame B di un nucleo X con A nucleoni e Z protoni è:

$$B(A, Z) = Z(m_p + m_e - m_u) - N(m_n - m_u) - \Delta_{A,Z} = 7.29 \text{ MeV} \cdot Z + 8.07 \text{ MeV} \cdot N - \Delta_{A,Z}.$$

Dove

$$m_u = 1 \text{ u.m.a.} \quad m_p = 938.2 \text{ MeV}/c^2 \quad m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$$

Il difetto di massa è invece:

$$\Delta = m_x - \frac{A}{12} m({}^{12}_6\text{C}_6) = m_x - Am_u.$$

E lo si può trovare nelle tabelle in rete.

Il difetto di massa è particolarmente utile per ricavare il Q-valore: è immediato esprimere la massa del nucleo coinvolto in una interazione mediante tale quantità e l'unità di massa atomica m_u .

2.a.23 Enunciare la formula semiempirica $B = B(A, Z)$ ed indicare i suoi termini che sono spiegati dal modello a goccia. Spiegare le ipotesi su cui tale modello è basato e fornire l'ordine di grandezza dell'energia media di legame di un nucleone all'interno di un nucleo.

Nel modello a goccia si ha in prima approssimazione (per nuclei abbastanza grandi) una energia di legame proporzionale al numero di nucleoni e quindi al volume del nucleo stesso:

$$B_1(A, Z) = a_V A \quad \text{Termine correttivo di volume.}$$

In seconda approssimazione possiamo considerare che i nucleoni che si trovano sulla superficie del nucleo non sono circondati da altri nucleoni, vi sarà allora un termine correttivo superficiale:

$$B_2(A, Z) = a_S A^{2/3} \quad \text{Termine correttivo di superficie.}$$

Poi possiamo aggiungere una ulteriore correzione per tener conto della repulsione columbiana tra i nucleoni carichi (Z tiene conto della carica, A tiene conto del raggio):

$$B_3(A, Z) = a_C \frac{Z^2}{A^{2/3}} \quad \text{Termine correttivo Columbiano.}$$

Si hanno infine altri termini correttivi che tengono conto di effetti quantistici e del principio di Pauli:

$$B(A, Z) = a_V A - a_S A^{2/3} - a_C \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(Z - N)^2}{A} + \delta_{pair}.$$

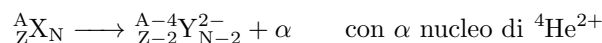
Il modello in considerazione è quello "A Goccia", l'ipotesi di questo è che il nucleo di numero atomico Z e peso atomico A occupi un volume sferico di raggio:

$$R = r_0 A^{1/3} + r_{skin} \approx (1.25 A^{1/3} + 2.0) fm.$$

Il modello prevede che l'energia di legame tra due nucleoni sia dell'ordine di $\sim 2.2 \text{ MeV}$, ovvero la differenza tra la massa del deutone e la somma delle masse del protone e neutrone.

2.a.24 Definire i decadimenti α , β , γ e il decadimento tramite cattura elettronica in un nucleo. Calcolare il Q-valore per il decadimento $\beta+$, $\beta-$, e per la cattura elettronica a partire dal difetto di massa delle specie coinvolte.

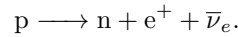
Decadimento α



Decadimento β^+



in cui si ha la transizione:



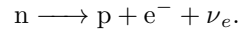
Il Q-valore del decadimento è: $Q = \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z-1} - 2m_e$

Il Q-valore della reazione è: $Q = m_p - m_n - m_e = -1.804\text{MeV}$.

Decadimento β^-



in cui si ha la transizione:



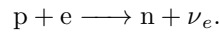
Il Q-valore del decadimento è: $Q = \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z+1}$

Il Q-valore della reazione di transizione è: $Q = m_n - m_p - m_e = 0.782\text{MeV}$.

Cattura elettronica



in cui si ha:

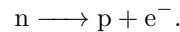


2.a.25 Come si è arrivati alla conclusione che nel decadimento beta deve essere emessa una particella neutra non rivelata?

Il problema in questione risale al 1934 (con Pauli che ipotizza l'esistenza della particella), venne formalizzato successivamente da Fermi e da Bhor.

Ciò che destava sgomento era lo spettro di emissione dell'elettrone. Spieghiamo a grandi linee il problema:

All'inizio si pensava che avvenisse il processo



In cui sicuramente si hanno le relazioni (di qui in avanti $c = 1$)

$$m_e (0.511 \text{ MeV}) \ll m_p (938.3 \text{ MeV}) \approx m_n (939.6 \text{ MeV}).$$

Conviene quindi ipotizzare che il neutrone si trovi inizialmente fermo, in tal caso anche il protone viene praticamente creato fermo. Per la conservazione dell'energia:

$$m_n = E_p + E_e.$$

con

$$E_p = \sqrt{m_p^2 + p_p^2} \quad E_e = \sqrt{m_e^2 + p_e^2}.$$

Se si trascura il rinculo del protone, come ipotizzato sopra:

$$m_n \approx m_p + \sqrt{m_e^2 + p_e^2}.$$

Quest'ultima relazione fissa l'impulso e l'energia dell'elettrone, quindi ci aspettiamo che lo spettro di quest'ultimo abbia un unico picco, invece sperimentalmente si ottengono curve del tipo:

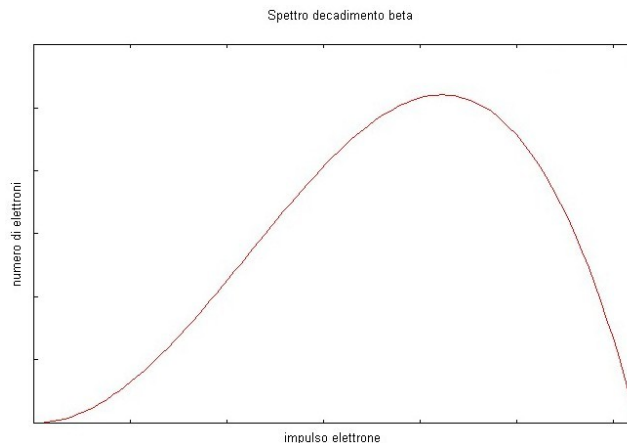


Figura 3: Spettro di energia dell'elettrone.

Tale grafico mostra uno spettro completo che parte da energie nulle fino ad arrivare ad annullarsi di nuovo a $\sim 5.5 m_e$.
Per spiegarlo è quindi necessario ipotizzare che vi sia un'altra particella tra i prodotti che è appunto il neutrino.

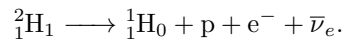
2.a.26 Spiegare perchè, sebbene il neutrone libero sia instabile, esso non possa decadere quando è all'interno di taluni nuclei.

Affinchè il neutrone in un nucleo possa decadere è necessario che

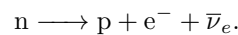
$$Q = \sum_{in} M_k - \sum_{fin} M_k > 0.$$

Questo in alcuni nuclei può non essere verificato, ad esempio:

Stabilità del Deuterio



con:

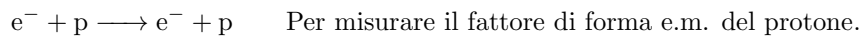


si ha che la reazione non avviene perchè:

$$Q = \Delta_{2,1} - 2\Delta_{1,0} = (13.136 - 14.578) \text{ MeV} = -1.442 \text{ MeV}.$$

2.a.27 Quali particelle incidenti e di quale energia si utilizzano per misurare i fattori di forma nucleari?

Si usano in genere Scattering elastici, in particolare la particella adatta è l'elettrone, ad esempio:



Se funziona con il protone allora funziona anche con i nuclei avendo cura di scegliere le giuste energie con il metodo seguente.

Per quanto riguarda l'energia dell'elettrone dobbiamo tener conto di che lunghezza vogliamo ispezionare: Per sondare oggetti di dimensioni caratteristiche del fm è necessario sondare con energie aventi le stesse dimensioni in termini di lunghezza d'onda di De Broglie:

$$E = \hbar\omega = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{1240 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1 \text{ fm}} = 1240 \text{ MeV}.$$

2.a.28 Dare le definizioni di: larghezza, vita media, semivita (o tempo di dimezzamento), rapporto di decadimento ("Branching fraction" o "Branching ratio") per il decadimento di una particella.

Se N è il numero di particelle non ancora decadute la vita media è definita da:

$$\dot{N} = -\frac{N}{\tau}.$$

La larghezza di vita media è la probabilità di decadimento nell'unità di tempo:

$$\Gamma = 1/\tau.$$

La larghezza viene solitamente espressa in eV tramite:

$$\Gamma [\text{eV}] = \Gamma [\text{s}]^{-1} \cdot \hbar.$$

Perchè una particella che decade si può interpretare come una risonanza piccata nella massa di quest'ultima e di larghezza proprio Γ .

Il tempo di dimezzamento è

$$T = \tau \ln(2).$$

In fine il rapporto di decadimento di un "canale" è il rapporto tra i decadimenti di quel canale ed il numero totale di decadimenti.

$$B_f = \frac{\Gamma_f}{\Gamma}.$$

2.a.29 Quali sono gli ordini di grandezza tipici delle sezioni d'urto delle interazioni forti e delle interazioni deboli?

Per le interazioni forti si hanno sezioni d'urto dell'ordine di $10 - 100$ mb, per le interazioni deboli invece 1 fb.

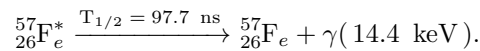
2.a.30 Quali sono, approssimativamente, gli ordini di grandezza delle vite medie dovute ad interazioni deboli, elettromagnetiche, forti?

- Interazioni deboli: dai 15 minuti per il decadimento β del neutrone fino a 10^{-8} s del decadimento del π carico.
- Interazioni elettromagnetiche: tempi tipici sono dell'ordine di 10^{-16} s.
- Interazione forte: tempi tipici sono 10^{-23} s.

2.a.31 Spiegare la cinematica di un decadimento γ nucleare e spiegare qualitativamente l'effetto Mossbauer.

Definizione di decadimento γ . I decadimenti γ sono delle transizioni fra uno stato eccitato di un nucleo ed uno stato di energia inferiore con l'emissione di un fotone (raggi X: 10keV-1MeV).

Considerando la reazione:



- M : la massa dello stato fondamentale del nucleo.
- $M^* = M + E_0$: la massa dello stato eccitato.
- E_γ : l'energia del fotone nel laboratorio e nel centro di massa se il decadimento avviene da fermo.

Siamo interessati all'energia dei fotoni uscenti, a prima vista sembrerebbe E_0 ma in realtà è una sovrastima: il rinculo del nucleo si porta via energia, vediamo cinematicamente.

La quantità di moto del fotone nel centro di massa (e quindi anche dell'atomo di F_e):

$$E_\gamma = P_{cm}^\gamma.$$

Quindi si ha anche che dalla conservazione dell'energia:

$$E_{in} = M^* = M + E_0 = E_{fin} = \sqrt{M^2 + E_\gamma^2} + E_\gamma.$$

Possiamo quindi ricavare E_γ in funzione di tutto il resto:

$$E_\gamma = \frac{E_0 (E_0 + 2M)}{2(E_0 + M)}.$$

Essendo la massa del ${}_{26}^{57}\text{Fe} = 53.05$ GeV ed $E_0 = 14.4$ keV possiamo approssimare:

$$E_\gamma \approx E_0 - \frac{E_0^2}{2M}.$$

Quindi l'energia persa è:

$$\Delta E_\gamma \approx -\frac{E_0^2}{2M} \implies \frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} \approx -\frac{E_0}{2M}.$$

Essendo $E_0 \approx E_\gamma$. Nel caso in esame si ha:

$$|\Delta E_\gamma| \approx 1.9 \text{ meV} \implies \left| \frac{\Delta E_\gamma}{E_\gamma} \right| \approx 1.3 \cdot 10^{-7}.$$

Quest'ultima è molto maggiore di:

$$\frac{\Gamma}{E_0} = 3.2 \cdot 10^{-13}.$$

Quindi sarà difficile che un fotone partito dal decadimento riesca ad eccitare un nuovo atomo di F_e poichè il fotone è emesso in un range di energia molto grande rispetto alla larghezza del processo.

Se invece prendo un blocco di atomi di ferro (o in gergo: nu bll pezz de ferragl) la massa che va al denominatore nelle equazioni sopra non è più quella del singolo atomo ma quella di tutto il blocco. Succede quindi che:

$$\Delta E_\gamma \ll \Gamma.$$

Si può quindi avere un effetto coerente se il fotone che esce urta contro un altro atomo di ferro: Effetto Mossbauer.

2.a.32 Quante sono le variabili indipendenti nello stato finale di una reazione in cui due particelle collidono ed N particelle sono prodotte?

Sia il processo di decadimento:

$$a + b \longrightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Si ha che il numero di osservabili indipendenti è dato da le variabili ed i vincoli in gioco:

- n 4-impulsi \implies 4n variabili
- n vincoli dovuti alla massa delle singole particelle: $m_i^2 = P_{0,i}^2 - \mathbf{P}_i^2$
- 4 vincoli per la conservazione impulso-energia: $P_{in} = \sum_i P_i$

quindi le variabili indipendenti sono $3n - 4$.

Nota In quanto affermato non c'è stato bisogno di esplicitare il numero di reagenti, questo numero vale in generale per qualsiasi numero di particelle iniziali (se si hanno n prodotti).

2.a.33 Quante sono le variabili indipendenti nello stato finale di una reazione in cui una particella decade in due particelle? Quali implicazioni avremmo se la particella che decade avesse un momento angolare nullo?

Le variabili indipendenti sono $3 \cdot 2 - 4 = 2$, se la particella ha spin nullo allora si ha una isotropia spaziale che ci permette di integrare l'espressione per il decadimento a due corpi:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_1} = f_{dec}(\Omega_1) \frac{P_{cm}}{4M}.$$

sull'angolo solido:

$$\Gamma = f_{dec} \frac{P_{cm}}{4M} 4\pi.$$

2.a.34 Definire le variabili utilizzate nel "Dalitz plot".

Le variabili del Dalitz plot sono:

- s_{12} : il quadrato della massa invariante delle particelle 1 e 2
- s_{23} : il quadrato della massa invariante delle particelle 2 e 3

2.a.35 Quante sono le variabili indipendenti nello stato finale di una reazione in cui una particella decade in tre particelle? Quali implicazioni avremmo se la particella che decade avesse un momento angolare nullo?

Le variabili indipendenti sono $3 \cdot 3 - 4 = 5$.

La larghezza di decadimento si può esprimere come:

$$\Gamma = \int f_{dec}(s_{12}, s_{23}, \alpha, \beta, \gamma) dL_p.$$

Con α, β, γ angoli di Eulero e dL_p elemento infinitesimo dello spazio delle fasi definito da:

$$\begin{aligned} dL_p &= \frac{d^3\mathbf{P}_1}{2E_1} \cdot \frac{d^3\mathbf{P}_2}{2E_2} \cdot \frac{d^3\mathbf{P}_3}{2E_3} \cdot \delta^4\left(\mathbf{P}_{in} - \sum_{n=1}^3 \mathbf{P}_i\right) = \\ &= \frac{1}{32s} ds_{12} ds_{23} d\alpha d(\cos\beta) d\gamma. \end{aligned}$$

Se la particella ha momento angolare nullo allora lo stato iniziale non ha una direzione privilegiata, quindi f_{dec} non dipende dagli angoli di Eulero e si può integrare su questi ultimi:

$$d\Gamma = f_{dec}(s_{12}, s_{23}) \frac{ds_{12} ds_{23}}{32s} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_{-1}^1 d\cos\beta \int_0^{2\pi} d\gamma = \frac{\pi^2}{4s} f_{dec}(s_{12}, s_{23}) ds_{12} ds_{23}.$$

2.a.36 Definire la funzione di distribuzione esclusiva dei 4-impulsi delle particelle emergenti dopo la collisione di due particelle (oppure dopo il decadimento di una particella).

Per la collisione di due particelle si ha:

$$d\sigma = f_{urto}(P_1 \dots P_n) dL_p = f_{urto}(P_1 \dots P_n) \frac{d^3 P_1}{2E_1} \dots \frac{d^3 P_n}{2E_n} \delta^4 \left(P_{in} - \sum_i P_i \right).$$

con σ sezione d'urto del processo, f_{urto} probabilità di misurare la sezione d'urto $d\sigma$ in un intorno di $P_1 \dots P_n$ (contenente tutte le informazioni dinamiche del processo) e dL_p è l'elemento infinitesimo dello spazio delle fasi.

2.a.37 Spiegare il metodo della ‘massa invariante’ per identificare una particella instabile e misurarne la sua massa.

Il metodo della massa invariante è un metodo utile ad individuare particelle instabili tramite l'analisi del Dalitz Plot.

Ricominciamo dall'inizio: per il decadimento a 3 corpi si hanno $3n-4 = 5$ variabili indipendenti, mettendosi nel sistema del centro di massa (dove il decadimento avviene in un piano) si possono scegliere gli angoli di eulero come 3 delle 5 variabili, le altre due sono arbitrarie. È stata però adottata la convenzione di scegliere come variabili quelle che andranno a comporre il Dalitz Plot definite come:

$$\text{Massa inv. di 1 e 2:} \quad \Rightarrow \quad s_{12} = (P_1 + P_2)^2 = (P_{in} - P_3)^2 = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}E_3.$$

$$\text{Massa inv. di 2 e 3:} \quad \Rightarrow \quad s_{23} = (P_2 + P_3)^2 = (P_{in} - P_1)^2 = s + m_1^2 - 2\sqrt{s}E_1.$$

Può essere infine utile definire anche (non è variabile del Dalitz):

$$\text{Massa inv. di 1 e 3:} \quad \Rightarrow \quad s_{13} = (P_1 + P_3)^2 = (P_{in} - P_2)^2 = s + m_2^2 - 2\sqrt{s}E_2.$$

Nelle relazioni $\sqrt{s} = E_1 + E_2 + E_3$ è l'energia nel centro di massa del sistema. si può notare che tutte e tre le quantità sopra sono vincolate:

$$1 \text{ e } 2 \text{ ferme} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2)^2 \leq s_{12} \leq (\sqrt{s} - m_3)^2 \quad \Leftarrow \quad 3 \text{ ferma.}$$

$$1 \text{ e } 3 \text{ ferme} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_3)^2 \leq s_{13} \leq (\sqrt{s} - m_2)^2 \quad \Leftarrow \quad 2 \text{ ferma.}$$

$$2 \text{ e } 3 \text{ ferme} \quad \Rightarrow \quad (m_2 + m_3)^2 \leq s_{23} \leq (\sqrt{s} - m_1)^2 \quad \Leftarrow \quad 1 \text{ ferma.}$$

Possiamo quindi interpolare le prime 3 relazioni:

$$s_{12} + s_{13} + s_{23} = 3s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2\sqrt{s}(E_1 + E_2 + E_3) = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2.$$

E aggiungendo il vincolo su s_{13} :

$$m_1^2 + m_2^2 + 2m_2\sqrt{s} \leq (s_{12} + s_{23}) \leq s + m_2^2 - 2m_1m_3.$$

Quindi la distribuzione di particelle finali è vincolata a stare in una porzione dello spazio delle fasi di forma rettangolare:

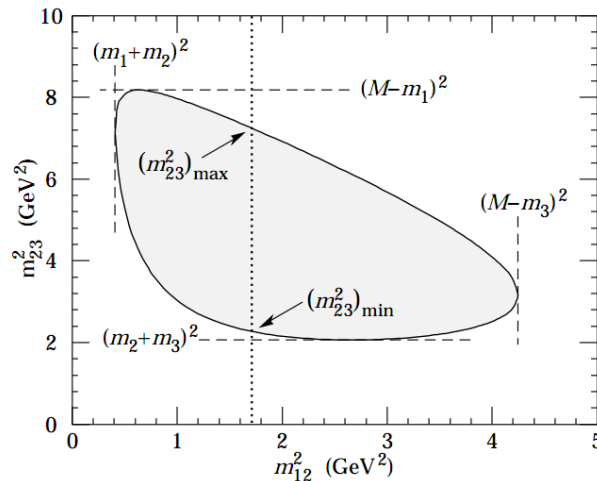


Figura 4: Esempio di Dalitz Plot.

Adesso manca di osservare che nelle variabili scelte l'elemento infinitesimo dello spazio delle fasi di può scrivere come:

$$dL_p = \frac{1}{32s} ds_{12} ds_{23} d\alpha d(\cos(\beta)) d\gamma.$$

Questo risultato mostra che lo spazio delle fasi è uniformemente popolato nella zona permessa (piatto) se si utilizzano le variabili descritte.

Venendo al dunque si ha che, sperimentalmente, quando questo spazio non è uniformemente popolato si può dedurre che vi sia un processo intermedio non previsto: un decadimento a due corpi in cui uno dei prodotti decade a sua volta in due corpi, si hanno allora degli addensamenti nello spazio delle fasi in zone che ci indicano la massa invariante della particella instabile (dal decadimento a due). Questo è il metodo della massa invariante.

b Domande b

2.b.1 Calcolare la "resistenza di irraggiamento" di un circuito elettrico quadrato di lato L , piccolo rispetto alla lunghezza d'onda λ della radiazione monocromatica incidente, se il circuito è puramente resistivo con resistenza R . Calcolare anche la sezione d'urto di assorbimento e la sezione d'urto elastica se l'onda incidente ha campo magnetico perpendicolare al piano del circuito e di modulo massimo B_0 .

Nomi a parte il problema è schematizzato in Figura:

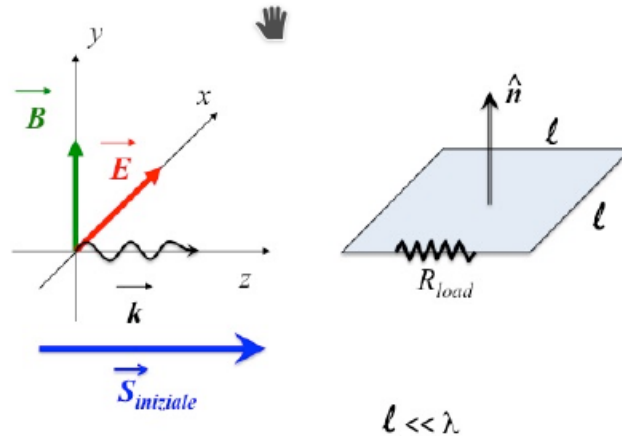


Figura 5: Spira immersa nel campo di onda e.m.

Calcolo della resistenza di irraggiamento. I campi ed il vettore di Poynting dell'onda sono:

$$\mathbf{E} = E_x \hat{i} = E_0 \cos(\omega t - kz) \hat{i}.$$

$$\mathbf{B} = B_y \hat{j} = B_0 \cos(\omega t - kz) \hat{j}.$$

$$\mathbf{S}_{in} = \frac{E_0^2}{Z_0} \cos(\omega t - kz) \hat{k}.$$

Sia $I(t)$ la corrente che scorre nel circuito; possiamo sfruttare le ipotesi di dimensioni piccole (rispetto a λ) per dire che tale corrente è uniforme in tutta la spira. Trascurando anche autoinduttanza e capacità parassite possiamo affermare che il circuito ha momento di dipolo nullo.

Non vale lo stesso per il momento di dipolo magnetico:

$$\mathbf{p}_m = I(t) l^2 \hat{j}.$$

Adesso aggiungendo le ipotesi di perfetta monocromaticità dell'onda incidente e di nessuna perdita di energia per irraggiamento del circuito si calcola la corrente $I(t)$ applicando Faraday:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = R_{load} I(t).$$

Mettiamo quindi in mezzo la geometria del circuito:

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R_{load}} = -\frac{1}{R_{load}} \frac{d\Phi(\mathbf{B})}{dt} = -\frac{1}{R_{load}} \frac{d}{dt} \left[\int_{-l/2}^{l/2} B_0 \cos(\omega t - kz) l dz \right] = \frac{\omega l^2 B_0 \sin(\omega t)}{R_{load}} \frac{\sin(kl/2)}{kl/2}.$$

Aggiungendo l'approssimazione:

$$\frac{kl}{2} = \frac{\pi l}{\lambda} \ll 1 \implies I(t) = \frac{\omega l^2 B_0 \sin(\omega t)}{R_{load}}.$$

Possiamo allora calcolare la potenza irradiata:

$$P_{el} = \frac{|\ddot{\mathbf{p}}_m|^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \frac{\ddot{I}^2(t) l^4}{6\pi\epsilon_0 c^5}.$$

Se si effettua un bilancio energetico del circuito:

$$\varepsilon I = R_{load} I^2 + P_{el} = R_{load} I^2 + \frac{l^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} \ddot{I}^2.$$

Nel caso in analisi la f.e.m. è armonica

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad \text{con} \quad \varepsilon_0 = \omega l^2 B_0$$

Quindi la soluzione stazionaria per la corrente sarà anch'essa armonica: $I = I_0 \sin(\omega t)$, in conclusione:

$$\varepsilon I = R_{load} I^2 + \frac{\omega^4 l^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} \implies \varepsilon = (R_{load} + R_{irr}) I.$$

Dove è stata definita la resistenza di irraggiamento (dipendente dalla frequenza):

$$R_{irr} = \frac{\omega^4 l^4}{6\pi\epsilon_0 c^5}.$$

Espressa in funzione della lunghezza d'onda:

$$R_{irr} = \omega^4 \frac{l^4}{6\pi\epsilon_0 c^5} = \left(\frac{2\pi c}{\lambda} \right)^4 \frac{l^4 \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}{6\pi\epsilon_0 c^4} = \frac{8}{3} \pi^3 Z_0 \left(\frac{l}{\lambda} \right)^4 = 31.1 \text{ k}\Omega \left(\frac{l}{\lambda} \right)^4.$$

Calcolo delle sezioni d'urto. Notando che

$$I(t) = \frac{\varepsilon(t)}{(R_{load} + R_{irr})}.$$

Possiamo ottenere la potenza assorbita e la potenza "elastica":

$$P_{abs} = R_{load} I^2 = \frac{R_{load}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \varepsilon^2.$$

$$P_{el} = R_{irr} I^2 = \frac{R_{irr}}{(R_{load} + R_{irr})^2} \varepsilon^2.$$

Quindi la potenza trasferita al carico è massima per $R_{load} = R_{irr}$.

Adesso basta mediare il vettore di Poynting per concludere:

$$\langle |\mathbf{S}_{in}| \rangle = \frac{\mathbf{E}_0^2}{2Z_0}.$$

Ilora le sezioni d'urto sono:

$$\sigma_{abs} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} l^4 Z_0 \frac{R_{load}}{(R_{load} + R_{irr})^2}.$$

$$\sigma_{irr} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} l^4 Z_0 \frac{R_{irr}}{(R_{load} + R_{irr})^2}.$$

$$\sigma_{tot} = \sigma_{irr} + \sigma_{load} = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} l^4 Z_0 \frac{1}{(R_{load} + R_{irr})}.$$

2.b.2 Utilizzando le apposite tabelle che forniscono le masse dei nuclei, determinare il Q-valore o l'energia di soglia dei seguenti processi, valutando l'eventuale ruolo della interazione coulombiana nello stato iniziale:

1. $p + 40\text{Ar} \Rightarrow p + 39\text{Ar} + n$
2. $p + 14\text{N} \Rightarrow X + n$
3. $p + 16\text{O} \Rightarrow X + n$
4. $n + 14\text{N} \Rightarrow 14\text{C} + p$
5. $4\text{He} + 14\text{N} \Rightarrow 17\text{O} + p$
6. $2\text{H} + 3\text{H} \Rightarrow 4\text{He} + n$
7. $2\text{H} + 2\text{H} \Rightarrow 4\text{He} + \gamma$
8. $p + 198\text{Hg} \Rightarrow 197\text{Au} + p + p$

Partiamo con un pò di teoria:

$$Q = \sum M_{in} - \sum M_{fin}.$$

Se il Q-valore è positivo allora la reazione avviene in modo spontaneo: l'energia di soglia è nulla.

Se il Q-valore è negativo allora l'energia di soglia è maggiore di zero e dipende dalla carica del proiettile. Se la particella proiettile è neutra allora l'energia di soglia è il modulo del Q-valore, altrimenti è necessario calcolare l'energia necessaria a vincere l'interazione coulombiana per arrivare al nucleo (essendo le interazioni sopra scritte tutte forti) nel sistema del laboratorio.

Per effettuare il calcolo sfruttiamo la conservazione dell'energia e della quantità di moto non relativistiche in una dimensione, chiariamo la notazione:

- R : raggio del nucleo colpito
- m_{prt} : massa del proiettile.
- v_0 : velocità iniziale del proiettile.
- T : energia cinetica iniziale del proiettile.
- Z : protoni del nucleo colpito.
- M : massa del nucleo colpito.
- d : distanza in cui i nuclei si urtano definita dalla somma dei raggi delle due particelle coinvolte:

$$d = R + r_{prt} \approx \left(1.25A^{1/3} + r_{skin} + r_{prt}\right) \text{ fm} = \left(1.25A^{1/3} + 2 + r_{prt}\right) \text{ fm}.$$

Facendo il conto:

$$\begin{cases} m_{prt}v_0 = (m_p + M) V_{cm} \\ T \geq \frac{1}{2} (m_{prt} + M) V_{cm}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} \\ T = \frac{1}{2} m_{prt} v_0^2 \end{cases}$$

Quindi sviluppando per T si ottiene l'energia cinetica necessaria per la reazione:

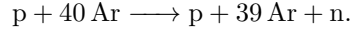
$$T \geq \left(1 + \frac{m_{prt}}{M}\right) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} = T_{\min}.$$

e per l'energia di soglia dobbiamo soltanto sommare il modulo del Q-valore:

$$E_{soglia} = T_{\min} + |Q|.$$

In questo modo possiamo risolvere tutte le interazioni elencate.

Interazione 1. Bisogna notare che $40\text{Ar} = {}^{40}_{18}\text{Ar}$ (vedi tabelle con difetti di massa), quindi:



$$Q = (m_p + 40m_u + \Delta_{40,18}) - (m_p + 39m_u + \Delta_{39,18} + m_n) = m_u + \Delta_{40,18} - \Delta_{39,18} - m_n.$$

Numericamente:

$$Q \approx (931.49 + (-35.04) - (-33.24 + 939.57)) \text{ MeV} \approx -8.3 \text{ MeV} \quad \text{Reazione endotermica.}$$

Per il calcolo dell'energia di soglia applichiamo subito quando visto sopra:

$$E_{\text{soglia}} = \left(1 + \frac{m_p}{M_{40\text{Ar}}}\right) \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 d} + |Q| \quad \text{con } M_{40\text{Ar}} = 40m_u + \Delta_{40,18}.$$

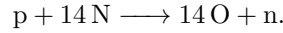
si calcola la distanza minima d (il raggio del protone è circa 1.25 fm):

$$d \approx \left(1.25 \cdot (40)^{1/3} + 2 + r_{\text{protone}}\right) \text{ fm} \approx 6.25 \text{ fm}.$$

Quindi l'energia di soglia (calcolo numerico approssimato a mente...):

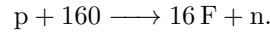
$$E_{\text{soglia}} \approx 4 \text{ MeV} + 8 \text{ MeV} \approx 12 \text{ MeV}.$$

Interazione 2.



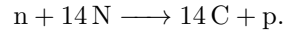
$$Q = -6.54 \text{ MeV} \quad E_{\text{soglia}} = 8.26 \text{ MeV}.$$

Interazione 3.



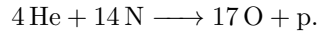
$$Q = -16.8 \text{ MeV} \quad E_{\text{soglia}} = 18.7 \text{ MeV}.$$

Interazione 4.



$$Q = -1.557 \text{ MeV} \quad E_{\text{soglia}} = 1.557 \text{ MeV}.$$

Interazione 5.



$$Q = -4.432 \text{ MeV} \quad E_{\text{soglia}} = 4.432 \text{ MeV}.$$

eccetera eccetera...

2.b.3 Dimostrare la relazione fra la definizione della sezione d'urto elastica nel caso di fotoni incidenti su un unico bersaglio e la definizione di sezione d'urto elastica per un'onda e.m. monocromatica su un unico bersaglio.

Nel caso di onda monocromatica su un bersaglio si ha:

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{\langle P_{\text{el}} \rangle}{\langle |\mathbf{S}_{\text{in}}| \rangle}.$$

Mentre per un fascio di fotoni incidenti:

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{1}{|\mathbf{j}_{\gamma}|} \frac{dN_{\text{el}}}{dt}.$$

L'equivalenza delle due deriva dal fatto che se si moltiplica e si divide la seconda per $\hbar\omega$:

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{\frac{dN_{\text{el}}}{dt}}{|\mathbf{j}_{\gamma}|} = \frac{\frac{dN_{\text{el}}}{dt} \hbar\omega}{|\mathbf{j}_{\gamma}| \hbar\omega} = \frac{\langle P_{\text{el}} \rangle}{\langle |\mathbf{S}_{\text{in}}| \rangle}.$$

2.b.4 Quale calcolo si deve effettuare per determinare il numero di eventi per unità di tempo e di volume che si producono negli urti fra particelle di due specie diverse e differenti concentrazioni le cui velocità relative sono distribuite con un funzione $f(V_{rel})$, normalizzata all'unità, e la cui sezione d'urto è $\sigma(V_{rel})$?

Date due specie con densità volumica n_a e n_b che si scontrano e con densità di prodotti n_f , se la $f(V_{rel})$ è normalizzata allora si ha:

$$\frac{dn_f}{dt} = n_a n_b \int_0^\infty f(v_{rel}) \sigma_f(v_{rel}) v_{rel} dv_{rel}.$$

Tipicamente la $f(V_{rel})$ è gaussiana.

2.b.5 Calcolare l'attenuazione di un fascio di particelle incidenti su un materiale omogeneo e composto da atomi di una sola specie in funzione della profondità [dati: sezione d'urto del processo su ogni atomo del bersaglio, densità di massa del mezzo, numero atomico del mezzo].

Lamina sottile Data una lastra di materiale omogeneo definiamo alcune (tante, forse troppe) quantità utili: spessore Δx , densità ρ , area ΔS , volume di lastra considerato V , sezione d'urto su ogni atomo bersaglio (totale) σ_{tot} , n_b la concentrazione di bersagli nel materiale e n_a la concentrazione di particelle incidenti. Possiamo riscrivere queste in funzione delle quantità date dal testo e sfruttare qualche utile relazione.

Partiamo da n_b : definendo M_{tot} la massa totale di lastra nel volume, M_A la massa di una mole della sostanza del materiale in grammi, N_a il numero di avogadro si ha:

$$V \cdot n_b = N_{tot} = moli \cdot N_a = \frac{M_{tot}}{M_A} N_a \implies n_b = \frac{N_{tot}}{V} = \frac{\rho}{M_A} N_a.$$

La probabilità di interazione nel volume considerato è definita da:

$$P_{int} = n_b \cdot \sigma_{tot} \Delta x = \frac{\rho N_a}{M_A} \sigma_{tot} \Delta x.$$

A questo punto si vede come è definita la profondità di penetrazione (essendo la P_{int} adimensionale):

$$\mathcal{L} = \frac{M_A}{\rho N_a \sigma_{tot}}.$$

quindi l'attenuazione è data dalla frazione di particelle che riescono a passare, quantità che si può ricavare come il complementare della probabilità di interagire: la probabilità di passare.

$$A = 1 - \frac{\Delta x}{\mathcal{L}} \quad \text{Nel caso di lamina sottile.}$$

Quanto visto fin'ora funziona finché la lamina si può considerare sottile: $\Delta x < \mathcal{L}$, se questa approssimazione viene meno è necessario rivedere alcuni conti.

Materiale generico Possiamo pensare ad un materiale generico come la sovrapposizione di tante lamine sottili di diversa superficie. Si può quindi vedere la probabilità di interazione come una funzione della posizione $P_{int}(x)$, quindi anche la stessa attenuazione sarà funzione della posizione $A(x)$. Calcoliamo l'attenuazione alla posizione $x + \Delta x$, dobbiamo utilizzare le regole delle probabilità combinate:

$$A(x + \Delta x) = A(x) A(\Delta x) = A(x) (1 - P_{int}(\Delta x)) = A(x) \left(1 - \frac{\Delta x}{\mathcal{L}}\right).$$

Applicando il rapporto incrementale risulta quindi evidente che il risultato sarà esponenziale (cosa che goffamente sapevamo già dal momento che si applicano le proprietà della probabilità di eventi ripetuti).

$$\frac{A_{int}(x + \Delta x) - A_{int}(x)}{\Delta x} = -\frac{A(x)}{\mathcal{L}}.$$

Facendo tendere Δx a zero:

$$\dot{A} = -\frac{A}{\mathcal{L}} \implies A(x) = e^{-x/\mathcal{L}} \quad \text{Materiale generico.}$$

2.b.6 Calcolare l'attenuazione di un fascio di particelle incidenti su un materiale omogeneo e composto da atomi di diverse specie in funzione della profondità [dati: sezione d'urto del processo su ogni atomo del bersaglio, densità di massa del mezzo, numeri atomici, composizione chimica del mezzo]

Lamina sottile Essendo nota la composizione chimica del mezzo è noto anche la percentuale di atomi che compongono il materiale:

$$\text{Composizione del mezzo: } X_{a_1}^{(1)} \dots X_{a_N}^{(N)}.$$

Con X^i specie atomica, a_j pedice che indica la composizione chimica nella formula del composto (per non appesantire si trascurano le formule con simboli ripetuti tipo CH_3COOH). Si può quindi ragionare come se avessimo N copie del nostro materiale ognuno interamente composto da una singola specie preservando le densità ρ_i che sono presenti nel materiale originale, successivamente si applica il principio di sovrapposizione sommando tutte le attenuazioni e normalizzando sulle N specie:

$$A_i = 1 - \frac{\Delta x}{\mathcal{L}_i} \implies A_{\text{tot}} = \frac{\sum_{n=1}^N A_n}{N} = 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\Delta x}{N \mathcal{L}_n}.$$

con la penetrazione definita a partire dalla densità e dalla massa molare delle singole specie:

$$\mathcal{L}_i = \frac{M_A^{(i)}}{\rho_i N_a \sigma_{\text{tot}}}.$$

Materiale generico Con passaggi del tutto analoghi alla domanda precedente si arriva alla conclusione:

$$A_{\text{tot}} = \frac{\sum_{n=1}^N e^{-x/\mathcal{L}_n}}{N}.$$

2.b.7 Effettuare una stima numerica della sezione d'urto totale forte per i seguenti urti:

1. $p + 40\text{Ar}$
2. $n + 14\text{N}$
3. $4\text{He} + 14\text{N}$
4. $2\text{H} + 3\text{H}$

Se si considera solo la sezione d'urto forte non c'è bisogno di preoccuparsi di interazioni elettrodeboli: si suppone che l'energia sia sufficiente da poter trascurare questo tipo di interazioni. Il calcolo si riduce alla stima della superficie di possibile impatto tra i due oggetti assunti come sferici:

$$\sigma_{\text{strong}} \approx \pi (R_1 + R_2)^2.$$

Con R_1 e R_2 raggi delle particelle interagenti. Per tutti gli atomi in gioco ho scelto di considerare sempre r_{skin} .

Interazione 1.

$$\sigma_1 \approx \pi (r_p + R_{40\text{Ar}})^2 \approx \pi (1.25 \cdot (40)^{1/3} + 2 + 1.25)^2 \text{ fm}^2 \approx \pi \cdot (6.25)^2 \text{ fm}^2$$

Quindi

$$\sigma_1 \approx \pi \cdot 39 \text{ fm}^2 \approx 120 \text{ fm}^2 = 1.2\text{b}$$

Interazione 2. $\sigma_2 \approx 1.23\text{b}$

Interazione 3. $\sigma_3 \approx 2.54\text{b}$

Interazione 4. $\sigma_4 \approx 1.7\text{b}$

2.b.8 Calcolare l'energia che dovrebbe avere un protone che incide su un protone fermo per ottenere una energia nel centro di massa pari a quella di LHC (14TeV).

Sia E l'energia del protone nel laboratorio, si ha:

$$E_{\text{cm}}^2 = (E_{\text{lab}})^2 - \mathbf{P}_{\text{lab}}^2 = (E + m_p)^2 - (E^2 - m_p^2) = 2m_p^2 + 2m_p E.$$

Quindi l'energia necessaria è circa $E = 10^6$ TeV

2.b.9 Calcolare l'energia di degli elettroni/positroni per innescare la reazione:

$$e^+ + e^- \implies p + \bar{p}$$

in cui i due leptoni collidono con 3-impulsi opposti e di modulo diverso.

Se E_1 e E_2 sono le energie dei due leptoni si ha

$$(E_1 + E_2)^2 - \left(\sqrt{E_1^2 - m_e^2} - \sqrt{E_2^2 - m_e^2} \right)^2 \geq 4m_p^2.$$

L'energia di soglia si ottiene studiando la funzione nelle due variabili sopra, da lì si evince che il minimo si ha per $E_1 = E_2$, quindi:

$$E_{\text{min}} = m_p.$$

2.b.10 Calcolare l'energia di soglia nel laboratorio per le seguenti reazioni (la seconda particella è inizialmente ferma):

1. $\gamma + {}^{16}\text{O} \implies e^+ + e^- + {}^{16}\text{O}$
2. $\gamma + e^- \implies e^- + e^+ + e^-$
3. $p + p \implies p + p + p + \bar{p}$
4. $p + {}^{16}\text{O} \implies p + p + \bar{p} + {}^{16}\text{O}$
5. $e^+ + e^- \implies p + \bar{p}$
6. $e^- + p \implies n + \nu_e$
7. $\bar{\nu}_e + p \implies n + e^+$

Per tali calcoli è necessaria una generalizzazione della risposta al quesito precedente, è infatti richiesto che:

$$\left(\sum_i P_{i,\text{in}} \right)^2 \geq \left(\sum_i m_{i,\text{fin}} \right)^2.$$

Adesso si può sfruttare il fatto che i reagenti sono soltanto due e che il secondo è sempre a riposo (generalizzazione della domanda 2.b.8):

$$E_1 \geq \frac{1}{2m_2} \left[\left(\sum_i m_{i,\text{fin}} \right)^2 - (m_1^2 + m_2^2) \right].$$

E adesso si tratta solo di infilare dentro i numeri.

2.b.11 Calcolare la probabilità che un neutrino interagisca nell'attraversare la Terra lungo un diametro.

Nota: sia assuma che l'energia del neutrino sia tale che la sezione d'urto totale su un singolo nucleone sia $1 \text{ fb} = 10^{-15} \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$.

Si assume per il calcolo $\rho_T \approx 5.5 \text{ g/cm}^3$.

Possiamo ipotizzare una bassa probabilità di interazione per il neutrino, è quindi possibile assumere la terra come una lamina sottile (con immenso piacere dei terrapiattisti) e calcolare la probabilità cercata come:

$$P_{\text{int}} = n\sigma d \approx 4.2 \cdot 10^{-6}.$$

Con $d \approx 12.76 \cdot 10^3 \text{ km}$ diametro terrestre e $n \approx \rho_T \cdot N_A / 1[\text{g}] \approx 5.5 \cdot 6 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-3}$ densità media di protoni sulla terra.

2.b.12 Dimostrare che un elettrone (non relativistico) soggetto ad una forza elastica di richiamo, ad una forza di attrito viscoso ed alla forza di reazione radiativa, nel campo di un'onda e.m. piana polarizzata linearmente oscilla con la legge:

$$\mathbf{x} = \frac{e\mathbf{E}_0}{m_e} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}} e^{-i\omega t} \quad \text{con} \quad \Gamma_{tot} = \Gamma' + \Gamma \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$$

Facendo riferimento ai risultati delle Domande 2.a.15, 2.a.16 si prosegue con il calcolo. L'equazione di moto dell'elettrone in questo caso è (considerando anche la F_{rad}):

$$m_e \ddot{\mathbf{x}} = q\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} - m_e \tau \ddot{\mathbf{x}} - m_e \Gamma' \dot{\mathbf{x}} - m_e \omega_0^2 \mathbf{x}.$$

Spostando l'incognita vettoriale a destra si ha:

$$-\tau \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}} + \Gamma' \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = \frac{q\mathbf{E}_0}{m_e} e^{-i\omega t}.$$

Cercando la soluzione stazionaria $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t}$ si ha:

$$-\tau (-i\omega)^3 \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t} + (-i\omega) \Gamma' \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t} + \omega_0^2 \mathbf{x}_0 e^{-i\omega t} = \frac{q\mathbf{E}_0}{m_e} e^{-i\omega t}.$$

Quindi:

$$\mathbf{x}_0 = \frac{q\mathbf{E}_0/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma' - i\tau\omega^3}.$$

È quindi utile definire $\Gamma_{tot} = \Gamma' + \tau\omega^2 = \Gamma' + \Gamma \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$ per giungere alla conclusione:

$$\mathbf{x} = \frac{q\mathbf{E}_0}{m_e} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}}.$$

2.b.13 Dimostrare che la sezione d'urto differenziale elastica per un'onda e.m. piana e monocromatica su un elettrone legato elasticamente vale

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = r_e^2 L(\omega) \sin^2(\alpha)$$

con α angolo fra la direzione di osservazione e direzione di polarizzazione (lineare) dell'onda.

La risposta al quesito è stata prematuramente scritta alla Domanda 2.a.16 facendo uso del risultato ottenuto nella Domanda 2.b.12. Si riaccenna solo al fatto che è stata definita $L(\omega)$ come:

$$L(\omega) = \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2}.$$

Vediamo di dimostrare quanto scritto, sopra abbiamo ottenuto:

$$\mathbf{x} = \frac{q\mathbf{E}_0}{m_e} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_{tot}}.$$

Calcoliamo il vettore di Poynting (mediato nel tempo) associato alla potenza irradiata dall'elettrone: Esplicitando l'espressione del campo di radiazione di dipolo elettrico in funzione della variabile α del problema si ha:

$$\mathbf{E}_{dip} = k_0 \frac{(e\ddot{\mathbf{x}} \wedge \hat{\mathbf{r}}) \wedge \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}| c^2}.$$

$$\langle \mathbf{S}_{el} \rangle = \langle \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \rangle = \left\langle \frac{|\mathbf{E}_{dip}|^2}{c\mu_0} \right\rangle = k_0^2 \frac{|e\ddot{\mathbf{x}}|^2 \sin^2(\alpha)}{c^4 r^2 \mu_0} = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{|e\ddot{\mathbf{x}}_0|^2 \sin^2(\alpha)}{c^3 r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Che in CGS risulta più elegante:

$$\langle \mathbf{S}_{el} \rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{|e\ddot{\mathbf{x}}_0|^2 \sin^2(\alpha)}{c^3 r^2} \hat{\mathbf{r}}.$$

Dividendo questo vettore per il vettore di poynting iniziale (da qui in poi CGS per semplicità) si ottiene l'espressione cercata:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{\langle \mathbf{S}_{el} \rangle \cdot r^2 \hat{r}}{\frac{c}{8\pi} |E_0|^2} = \frac{\omega^4 e^4}{c^4 m_e^2} \frac{\sin^2(\alpha)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2} = r_e^2 \frac{\omega^4 \sin^2(\alpha)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2}.$$

Dove è necessario riconoscere il raggio classico in CGS:

$$r_e^{(CGS)} = \frac{e^2}{c^2 m_e}.$$

Va da se che in MKSA:

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \left(\frac{k_0 e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4 \sin^2(\alpha)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2}.$$

2.b.14 Dimostrare che la sezione d'urto Thomson vale $\sigma_{Th} = \frac{8}{3} \pi r_e^2 = 0.66 \text{ barn}$.

Si può arrivare allo Scattering Thompson riscrivendo l'equazione di moto dell'elettrone e trascurando la pressione di radiazione di cui si è invece fatto uso nelle precedenti domande:

$$m_e \ddot{\mathbf{x}} = e \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}.$$

La potenza irradiata di dipolo sarà quindi:

$$P_{irr} = k_0 \frac{e^2 |\ddot{\mathbf{x}}|^2}{3c^3}.$$

Sviluppando i conti e ricordando la definizione di sezione d'urto si arriva banalmente a:

$$\sigma_{Th} = \frac{8}{3} \pi r_e^2.$$

Ricordando ancora che il Raggio classico dell'elettrone è: $r_e = k_0 \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.82 \text{ fm}$.

2.b.15 Dimostrare che la sezione d'urto elastica per un'onda e.m. piana e monocromatica su un elettrone legato elasticamente vale:

$$\sigma_{el} = \sigma_{Th} L(\omega)$$

È in pratica richiesto di trovare la Funzione di Brieght-Wiegner. Visto che abbiamo la sezione differenziale tuttavia è sufficiente integrarla su tutti gli angoli. Ci si riduce allora al calcolo dell'integrale:

$$\int \sin^2(\alpha) d\Omega = \int \frac{1 + \cos^2(\alpha)}{2} d\Omega = 2\pi + \frac{1}{2} 2\pi \int_0^{2\pi} \cos^2(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha = \frac{8}{3} \pi.$$

Tutto il resto esce indisturbato dall'integrale sull'angolo solido, da cui la tesi.

2.b.16 Dimostrare che la sezione d'urto totale per un'onda e.m. piana e monocromatica su un elettrone legato elasticamente vale:

$$\sigma_{tot} = 4\pi r_e c \frac{\omega^2 \Gamma_{tot}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2}$$

Abbiamo già risolto l'equazione del moto:

$$\mathbf{x} = \frac{e \mathbf{E}_0}{m} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega \Gamma_{tot}}.$$

Si tratta quindi solo di ricordare che la potenza totale dissipata può essere espressa come:

$$P_{tot} = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \rangle = \langle \dot{\mathbf{x}} \cdot q \mathbf{E} \rangle = \langle e \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} q \text{Re} \{ \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{E}^* \}.$$

Quindi:

$$P_{\text{tot}} = \frac{q^2 \omega^2 |\mathbf{E}_0|^2 \Gamma_{\text{tot}}}{2m \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2 \right)}.$$

Resta adesso da dividere per il vettore di Poynting incidente:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{P_{\text{tot}}}{\langle |\mathbf{S}_{\text{in}}| \rangle} = 4\pi r_e c \frac{\omega^2 \Gamma_{\text{tot}}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2}.$$

Per completezza si scrive anche:

$$\sigma_{\text{abs}} = \sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{el}} = 4\pi r_e \omega^2 L(\omega) \left[c\Gamma_{\text{tot}} - \frac{2}{3} r_e \omega^2 \right].$$

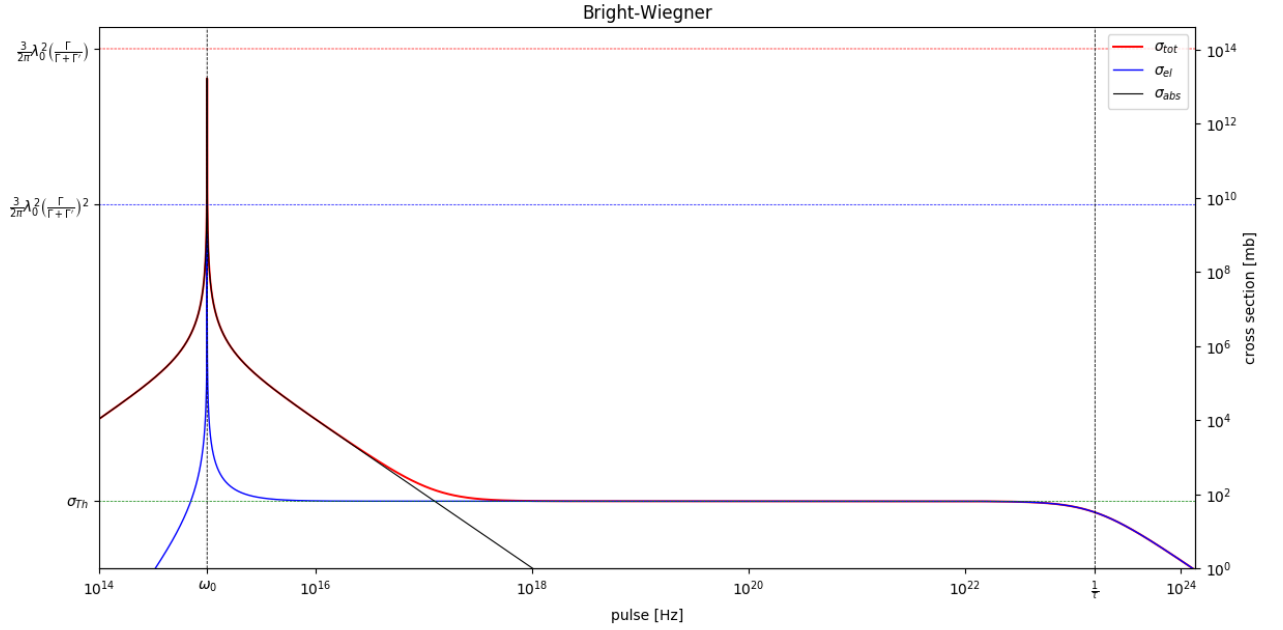


Figura 6: Andamento delle sezioni d'urto della Bright-Wiegner

Nella figura si mostra come vanno le sezioni d'urto, è necessario notare che, per un rendering più fedele, sarebbero serviti più punti plottati (la funzione non ha raggiunto il massimo atteso). Per pigrizia è stato testato che arrivasse al massimo ma non è stata riportata l'immagine; insomma fidarsi o provare per credere.

2.b.17 Dimostrare che la sezione d'urto elastica per un'onda e.m. piana e monocromatica su un elettrone legato elasticamente in prossimità di una risonanza stretta (specificare il criterio) si può approssimare con una curva lorentziana

$$\sigma_{\text{el}} = \sigma_{\text{Th}} \frac{\omega_0^2/4}{(\omega_0 - \omega)^2 + \frac{(\Gamma' + \Gamma)^2}{4}}$$

La B-W si approssima con una lorentziana in un intorno (dell'ordine della larghezza $\Gamma + \Gamma'$) di ω_0 : $\omega \approx \omega_0$.

La risonanza è stretta se la larghezza a metà altezza è molto inferiore alla frequenza di risonanza: $\Gamma + \Gamma' \ll \omega_0$.

Passiamo alle approssimazioni allora:

$$\begin{aligned}\sigma_{el} &= \sigma_{Th} \frac{\omega^4}{(\omega_0 - \omega)^2 (\omega_0 + \omega)^2 + \omega^2 \left(\Gamma + \Gamma' \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2} \approx \\ &\approx \sigma_{Th} \frac{\omega_0^4}{4\omega_0^2 (\omega_0 - \omega)^2 + (\Gamma + \Gamma')^2 \omega_0^2} \approx \\ &\approx \sigma_{Th} \frac{\omega_0^2/4}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\Gamma + \Gamma'}{2} \right)^2}.\end{aligned}$$

2.b.18 Dimostrare che per un'onda e.m. piana e monocromatica su un elettrone legato elasticamente le sezioni d'urto al picco valgono:

$$\begin{aligned}\sigma_{el} &= \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \left(\frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma'} \right)^2 \\ \sigma_{TOT} &= \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma}{\Gamma + \Gamma'} \quad \text{Con } \lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \\ \sigma_{inel} &= \frac{3\lambda_0^2}{2\pi} \frac{\Gamma\Gamma'}{(\Gamma + \Gamma')^2}\end{aligned}$$

Le tre sezioni d'urto in questione sono:

$$\begin{aligned}\sigma_{el} &= \frac{8}{3} \pi r_e^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2} \\ \sigma_{inel} &= \frac{4\pi r_e \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \Gamma_{tot}^2} \left(c\Gamma_{tot} - \frac{2}{3} \omega^2 r_e \right) \\ \sigma_{tot} &= 4\pi r_e c \frac{\omega^2 \Gamma_{tot}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 \Gamma_{tot}^2}.\end{aligned}$$

Accettanto il fatto che tutte le tre sezioni d'urto hanno un massimo per $\omega = \omega_0$ basta prendere le sezioni d'urto e inserire $\omega = \omega_0$. Per ottenere la forma di sopra è necessario scrivere il raggio classico come nella derivazione della forza di radiazione:

$$r_e = \frac{3}{2} \tau c = \frac{3}{2} \frac{\Gamma}{\omega_0^2}.$$

2.b.19 Dimostrare che un elettrone (moto non relativistico) soggetto ad una forza elastica di richiamo, ad una forza di attrito viscoso ed alla forza di reazione radiativa, se viene lasciato libero di oscillare da una posizione iniziale perde energia con una 1 legge esponenziale in cui la costante tempo vale $\frac{1}{\Gamma' + \Gamma}$. Come si chiama questa costante tempo? Quale sarebbe la costante tempo con cui, invece, si smorza l'ampiezza delle oscillazioni?

Riprendiamo l'equazione di moto dell'elettrone, tuttavia adesso togliamo la forzante dovuta all'onda incidente.

$$-\tau \ddot{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{x}} + \Gamma' \dot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x} = 0.$$

Adesso è necessario ricordare le relazioni tra i vari parametri in gioco:

$$\Gamma' \ll \omega_0 \ll \frac{1}{\tau}, \quad \Gamma \ll \omega_0.$$

La prima è una questione puramente di grandezze fisicamente tipiche, la seconda deriva dalla prima ($\omega_0 \tau \ll 1$) e dal fatto che $\Gamma = \tau \omega_0^2 \ll 1 \cdot \omega_0$.

È quindi ragionevole cercare una soluzione oscillante e smorzante con smorzamento debole rispetto alla pulsazione:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 e^{-i(\omega_0 - i\gamma/2)t} = \mathbf{x}_0 e^{-i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2}, \quad \gamma \ll \omega_0.$$

Adesso la festa è nel sostituire questa soluzione nella equazione buttando via i termini trascurabili:

$$-\tau (-i(\omega_0 - i\gamma/2))^3 + (-i(\omega_0 - i\gamma/2))^2 - (-i(\omega_0 - i\gamma/2))\Gamma' - \omega_0^2 = 0.$$

Sostituendo $\tau = \Gamma/\omega_0^2$:

$$-i\frac{\Gamma}{\omega_0^2} \left(\omega_0^3 - \frac{3}{2}i\gamma\omega_0^2 + \dots \right) - (\omega_0^2 - i\gamma\omega_0 + \dots) + \left(-i\Gamma'\omega_0 - \frac{1}{2}\gamma\Gamma' \right) + \omega_0^2 \approx 0.$$

Sempre sulla base delle approssimazioni sopra è possibile notare che i termini reali sono trascurabili (raggruppare alcuni Γ o Γ' nei punti giusti per vederlo), ci si riduce alla forma:

$$-i\Gamma\omega_0 - \frac{3}{2}\Gamma\gamma - i\Gamma'\omega_0 + i\gamma\omega_0 - \frac{1}{2}\gamma\Gamma' \approx 0 \implies -\Gamma\omega_0 - \Gamma'\omega_0 + \gamma\omega_0 \approx 0.$$

Che ci porta alla conclusione:

$$\gamma \approx \Gamma + \Gamma'.$$

Quindi l'ampiezza delle oscillazioni è smorzata con una costante tempo data da:

$$\mathbf{x} = \dots \cdot e^{-t/\tau_{osc}} \quad \text{con} \quad \tau_{osc} = \frac{2}{\gamma} = \frac{2}{\Gamma + \Gamma'}.$$

Se consideriamo invece l'andamento della energia è necessario tener conto del fatto che essa è quadratica nella velocità (cinetica) e nella posizione (potenziale):

$$E = E_0 e^{-\gamma t} \implies \tau_{energia} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\Gamma + \Gamma'}.$$

In tutto questo macello il risultato importante è uno: la larghezza totale di uno stato risonante è il reciproco della sua vita media, risonanza stretta = particella longeva e viceversa.

2.b.20 Calcolare la relazione tra parametro d'impatto (b) e angolo di scattering (θ) nel caso di scattering di Rutherford (Coulombiano) e di scattering su sfera rigida.

Prima di iniziare con questi argomenti è bene dare una rilucidata ad alcune grandezze tipiche in esame: le dimensioni atomiche.

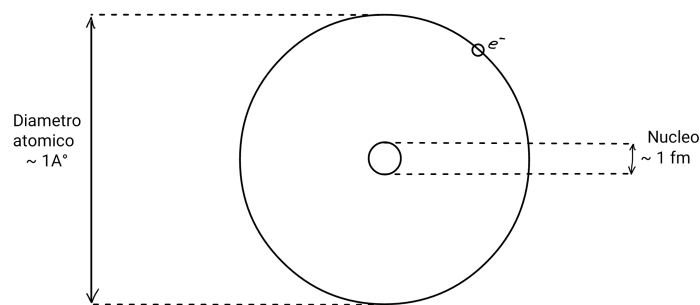


Figura 7: Dimensioni atomiche tipiche

Veniamo quindi agli scattering discussi, la situazione è modellizzata in Figura 8:

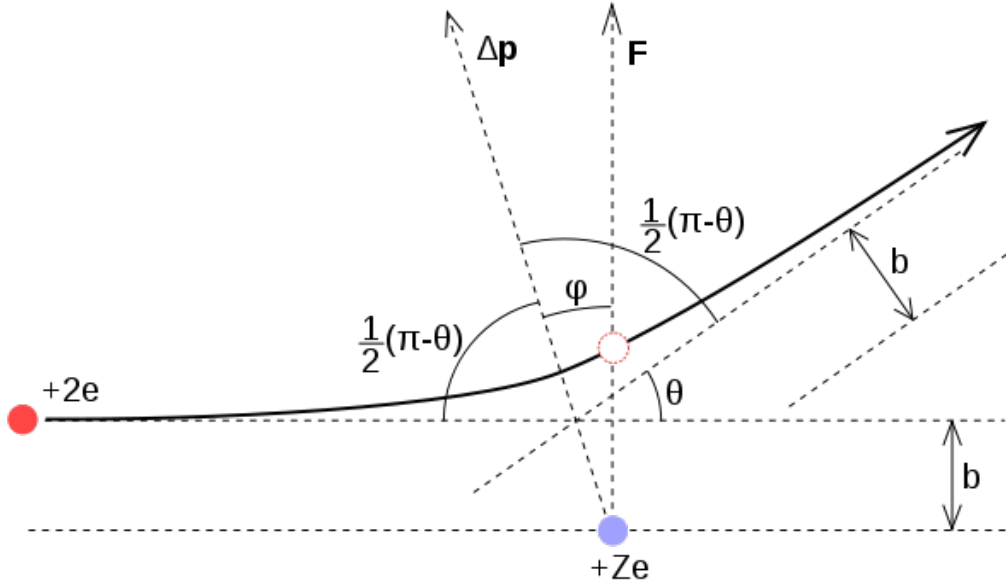


Figura 8: Schema dello scattering Rutherford.

Per tutte le seguenti affermazioni viene considerato il centro scatterante come fisso (con massa molto maggiore del proiettile).

Interazione Columbiana. Inizialmente la particella ha una velocità v_0 che per la conservazione dell'energia e per simmetria deve essere uguale a quella finale v_f :

$$|\mathbf{v}_0| = |\mathbf{v}_f|.$$

Si può trovare la variazione di impulso dopo interazione:

$$\Delta p = |\Delta \mathbf{p}| = \sqrt{(m\mathbf{v}_f - m\mathbf{v}_0)^2} = m\sqrt{v_0^2 + v_0^2 - 2v_0^2 \cos(\theta)} = 2mv_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

È utile anche ricordare la relazione che lega μ (angolo di riferimento che giace sul piano perpendicolare alla \mathbf{v}_0) all'elemento infinitesimo di sezione d'urto:

$$d\sigma = b db d\mu.$$

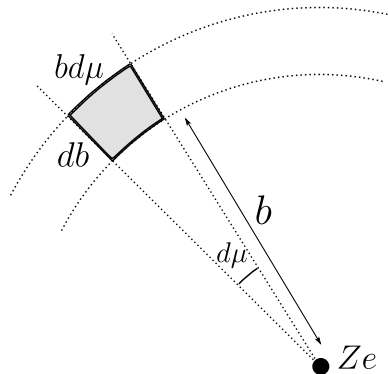


Figura 9: Elemento infinitesimo della sezione d'urto

Essendoci qua una simmetria sotto rotazioni attorno all'asse \hat{v}_0 possiamo integrare sull'angolo μ della relazione:

$$d\sigma = 2\pi b db.$$

Altra relazione differenziale che ci è utile adesso è:

$$\frac{d\sigma}{d\mu} = bdb.$$

La sezione d'urto differenziale si può scrivere allora in funzione di $b(\theta)$:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\mu d\cos(\theta)} = \frac{bdb}{d\cos(\theta)} = -\frac{bdb}{\sin(\theta) d\theta}.$$

Consideriamo adesso la variabile φ nella Figura 8 indice della posizione angolare dell'oggetto durante l'interazione, è definita tra:

$$\varphi_{\min} = -\frac{\pi - \theta}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi - \theta}{2} = \varphi_{\max}.$$

Possiamo giocare la conservazione del momento angolare durante il processo sfruttando la variabile sopra definita come coordinata polare.

$$L_z = m(\mathbf{r} \wedge \mathbf{v})_z = m[\mathbf{r} \wedge (\dot{r}\hat{r} + r\dot{\varphi}\hat{\varphi})] = mr^2\dot{\varphi}.$$

Quindi considerando anche il momento angolare iniziale abbiamo una prima relazione per parametrizzare il differenziale nel tempo:

$$mv_0b = mr^2\frac{d\varphi}{dt} \quad \implies \quad dt = \frac{r^2}{bv_0}d\varphi.$$

Perche parametrizzare il tempo? Perche ci è utile per relazionare la variabile b a θ ! Infatti la variazione di impulso calcolata sopra può essere scritta come:

$$|\Delta\mathbf{p}| = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}_{\perp}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{F}| \cos(\varphi) dt.$$

La forza citata è quella columbiana tra i due corpi:

$$|\mathbf{F}| = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Mettiamo tutto nell'integrale (compreso il dt):

$$|\Delta\mathbf{p}| = \int_{\varphi_{\min}}^{\varphi_{\max}} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 br^2} \frac{\cos(\varphi)}{b} \frac{r^2}{v_0} d\varphi = \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 bv_0} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Senza mollare eliminiamo il $|\Delta\mathbf{p}|$ ricavato all'inizio:

$$2mv_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 bv_0} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

E le nostre fatiche vengono ripagate perche abbiamo la prima risposta:

$$b(\theta) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

È quindi possibile definire anche una minima distanza di urto centrale d quando la cotangente è unitaria:

$$d = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 mv_0^2/2} = \frac{zZ(\alpha\hbar c)}{T} \approx zZ \frac{1.44[\text{MeV}]}{T[\text{MeV}]} [\text{fm}] \quad \implies \quad b(\theta) = \frac{d}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Appreziamo la grandezza del risultato, siamo in grado di prevedere, note la carica e la massa del proiettile, la distanza ortogonale (b) tra i centri incidenti dal momento che scegliamo l'angolo di osservazione θ_0 (o meglio, tutto ciò che arriva all'osservatore è partito da una posizione con parametro di impatto noto).

Si può infine trovare la sezione d'urto Rutherford differenziale come:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = -\frac{bdb}{\sin(\theta) d\theta} = -\frac{b}{2\cos(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\theta}{2})} \cdot \frac{d}{2} \left(\frac{d(\cot(\frac{\theta}{2}))}{d\theta} \right) = \dots = \frac{d^2}{16\sin^4(\frac{\theta}{2})}.$$

Interazione con sfera rigida In questo caso basta sfruttare alcune semplici considerazioni geometriche:

$$\frac{d\sigma}{db} = 2\pi b \quad \text{con} \quad b < R.$$

A fare la differenza qua è la semplice definizione di θ :

$$\frac{b}{R} = \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \implies b = R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

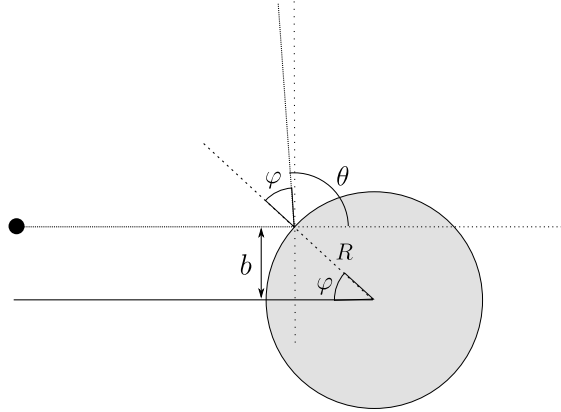


Figura 10: Scattering su sfera rigida

2.b.21 Calcolare la minima distanza fra le due particelle in uno scattering Rutherford.

Definiamo v_m come la velocità del proiettile nell'istante in cui ha raggiunto la distanza minima x . Sfruttando la conservazione dell'energia e del momento angolare si ottiene:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_m^2 + \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 x} \\ mv_0b = mv_mx \end{cases}.$$

Si ricava v_m dalla seconda sostituendola nella prima, ne risulta una equazione del secondo grado per x :

$$x^2 - d \cdot x - b^2 = 0 \implies x = \frac{d}{2} \left(1 + \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right).$$

2.b.22 Calcolare l'energia minima affinché un protone possa avere una interazione forte "toccando" un nucleo di ^{12}C o di ^{28}Si .

È inanzitutto necessario per risolvere il problema di minimo considerare l'urto centrale: $b = 0$. In tal caso l'angolo di scattering è $\theta = \pi$ e $x = d$ dove d è la distanza tra i nuclei aventi raggio:

$$R = (1.25A^{1/3} + 2) \text{ fm}.$$

L'energia minima è allora proprio l'energia potenziale necessaria ad arrivare alla distanza d :

$$E_{\min} = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)}.$$

O molto più semplicemente (vista la fatica fatta in precedenza per definire d :

$$d = (R_1 + R_2) \approx zZ \frac{1.44[\text{MeV}]}{T[\text{MeV}]} [\text{fm}] \implies T = zZ \frac{1.44}{(R_1 + R_2)} [\text{MeV}].$$

Mettendo i numeri si ha:

$$E_C \approx 1.4 \text{ MeV}, \quad E_{\text{Si}} = 11.2 \text{ MeV}.$$

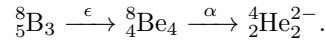
2.b.23 Discutere le differenze tra lo scattering di Rutherford (particelle α su nuclei) e lo scattering di elettroni su bersaglio puntiforme.

La differenza principale è che gli elettroni si muovono solitamente a velocità relativistiche e hanno spin $1/2$, questo invalida i conti fatti prima. Nel caso discusso quindi è necessario tirare in ballo la sezione d'urto Mott.

2.b.24 Cercando i dati nelle apposite tabelle (reperibili sul web) si indichino gli stati finali e si calcoli il Q-valore per i decadimenti delle seguenti specie instabili: 8B , ${}^{39}Ar$, 7Be , ${}^{64}Cu$, ${}^{76}Ge$.

Per rispondere a questa domanda è necessario ricordarsi la natura dei Decadimenti ed avere sottomano il Nuclear Wallet Card.

Isotopo del Boro



$$\Delta Q_\epsilon = \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z-1} \approx 18 \text{ MeV}$$

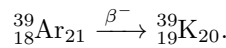
$$\Delta Q_\alpha = (4m_u + \Delta_{A,Z-1}) - (\Delta_{A-4,Z-2} + 4m_u + \Delta_\alpha) \approx 0.1 \text{ MeV}.$$

Quindi l'energia complessiva del processo è

$$\Delta Q_\epsilon + \Delta Q_\alpha \approx 18.1 \text{ MeV}.$$

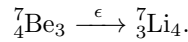
Notare che in questo caso particolare i prodotti di decadimento α e ${}^4_2He_2^{2-}$ hanno approssimativamente la stessa massa.

Isotopo dell'Argon



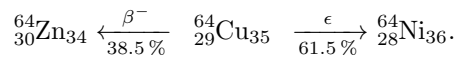
$$\Delta Q_{\beta^-} = \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z+1} = 0.57 \text{ MeV}.$$

Isotopo del Berillio



$$\Delta Q_\epsilon = \Delta_{A,Z} - \Delta_{A,Z-1} \approx 1.861 \text{ MeV}.$$

Isotopo del Rame Nelle tabelle sono indicate due possibilità, esaminiamo entrambe:



Senza essere ripetitivi (stesse cose viste sopra) si riportano i risultati:

$$\Delta Q_\epsilon = 1.67 \text{ MeV}.$$

$$\Delta Q_{\beta^-} = 0.68 \text{ MeV}.$$

Isotopo del Germanio

$${}^{76}_{32}Ge_{44} \implies \tau_{1/2} \sim 2 \cdot 10^{21}.$$

Al gran sasso si studia il decadimento $\beta^- \beta^-$ di Questo isotopo (nome in codice GERDA).

2.b.25 Cercando i dati nelle apposite tabelle (reperibili sul web) si trovino i Q-valori per le reazioni

$$1. n + {}^{154}Gd \implies \gamma + {}^{155}Gd$$

$$2. n + {}^{155}Gd \implies \gamma + {}^{156}Gd$$

$$\Delta Q_1 = (m_n + 154m_u + \Delta_{154,64}) - (155m_u + \Delta_{154,64}) \approx 6.43 \text{ MeV}.$$

$$\Delta Q_2 = \dots \approx m_n - m_u + \Delta_{155,64} - \Delta_{156,64} \approx 7.4 \text{ MeV}.$$

2.b.26 Dimostrare che $\frac{d^3 p}{2E}$ è un invariante relativistico effettuando esplicitamente la trasformazione di Lorentz (si consideri il boost lungo un asse, per esempio l'asse x)

Facciamo questo boost lungo x:

$$\begin{aligned}\frac{d^3 \mathbf{P}'}{2E'} &= \frac{dP'_x dP'_y dP'_z}{2Ex'} = \\ &= \frac{\gamma d(P_x + \beta E) dP_y dP_z}{2\gamma(E + \beta P_x)} = \\ &= \frac{[dP_x + \beta d\sqrt{P_x^2 + m^2}] dP_y dP_z}{2(E + \beta P_x)} = \\ &= \frac{\left(dP_x + \beta \frac{2P_x dP_x}{2\sqrt{P_x^2 + m^2}}\right) dP_y dP_z}{2(E + \beta P_x)} = \\ &= \frac{d^3 \mathbf{P}}{2E}.\end{aligned}$$

2.b.27 Dimostrare che

$$d^4 P \delta(P^2 - m^2) \theta(P_0) = \frac{d^3 \mathbf{P}}{2E}$$

e sfruttare questo risultato per semplificare la scrittura dell'elemento infinitesimo dello spazio dei 4-impulsi di N particelle emergenti dopo la collisione di due particelle (oppure dopo il decadimento di una particella).

È sufficiente rimembrare una delle proprietà della δ :

$$\delta(f(x)) = \sum_j \frac{\delta(x - x_j)}{|f'(x)|_{x=x_j}}.$$

Da inserire opportunamente nella espressione a sinistra dell'uguale nella richiesta: dobbiamo ricordare che P è in realtà un quadrivettore.

$$\begin{aligned}d^4 P \cdot \delta(P^2 - m^2) \theta(P_0) &= d^4 P \cdot \delta(\mathbf{P}^2 - P_0^2 - m^2) \theta(P_0) = \\ &= d^4 P \cdot \theta(P_0) \left[\frac{\delta(P_0 - E)}{|[2P_0]_{P_0=E}|} + \frac{\delta(P_0 + E)}{|[2P_0]_{P_0=-E}|} \right] = \\ &= d^4 P \frac{\delta(P_0 - E)}{2E} = \frac{d^3 \mathbf{P}}{2E}.\end{aligned}$$

Alla seconda domanda si è accidentalmente risposto sotto nella 3.b.28.

2.b.28 Dimostrare che nel centro di massa l'elemento infinitesimo dello spazio dei 4-impulsi, nel caso di 2 sole particelle nello stato finale, si scrive come $\frac{|\mathbf{p}_{cm}}{4\sqrt{s}} d\Omega_{cm}$.

Ricordiamo la forma dell'elemento infinitesimo dello spazio delle fasi:

$$dL_p = [d^4 P_1 \cdot \delta(P_{0,1}^2 - \mathbf{P}_1^2 - m_1^2) \cdot \theta(P_{0,1})] \cdot \dots \cdot [d^4 P_n \cdot \delta(P_{0,n}^2 - \mathbf{P}_n^2 - m_n^2) \cdot \theta(P_{0,n})] \cdot \delta^4 \left(P_{in} - \sum_i P_i \right).$$

Che utilizzando la risposta alla domanda precedente si riscrive come:

$$dL_p = \frac{d^3 \mathbf{P}_1}{2E_1} \dots \frac{d^3 \mathbf{P}_n}{2E_n} \delta^4 \left(P_{in} - \sum_i P_i \right).$$

Se si hanno due prodotti definiamo le loro masse come m_1 e m_2 , l'energia del centro di massa \sqrt{s} e ricordiamo che il 3-impulso totale nel centro di massa è nullo. L'elemento infinitesimo dL_p si scrive come:

$$\begin{aligned} dL_p &= \frac{d^3 \mathbf{P}_1}{2E_1} \frac{d^3 \mathbf{P}_2}{2E_2} \cdot \delta^4 (P_{\text{in}} - P_1 - P_2) = \\ &= \frac{d^3 \mathbf{P}_1}{2E_1} \frac{d^3 \mathbf{P}_2}{2E_2} \cdot \delta (\sqrt{s} - E_1 - E_2) \cdot \delta^3 (\mathbf{0} + \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) = \\ &= \frac{d\mathbf{P}_1}{4E_1 E_2} \cdot \delta (\sqrt{s} - E_1 - E_2) \end{aligned}$$

Passando in coordinate sferiche:

$$dL_p = \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \cdot \delta (\sqrt{s} - E_1 - E_2).$$

Possiamo adesso sfruttare il fatto che nel centro di massa l'impulso totale è nullo, chiamiamo P_{cm} l'impulso della particella singola (le due particelle hanno in modulo lo stesso impulso in questo sistema $|\mathbf{P}_1| = |\mathbf{P}_2| = P_{\text{cm}}$):

$$\sqrt{s} = \sqrt{P_{\text{cm}}^2 + m_1^2} + \sqrt{P_{\text{cm}}^2 + m_2^2}.$$

Che può essere risolta (Hint: servono due elevazioni al quadrato) per P_{cm} :

$$P_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)}{4s}}.$$

Non esplicitiamo P_{cm} nei calcoli a seguire, è bene però sapere che può essere scritto in funzione di variabili più "comuni". La relazione sopra sarà sfruttata al secondo passaggio del seguente calcolo.

$$\begin{aligned} dL_p &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \cdot \delta \left(\sqrt{s} - \sqrt{P_1^2 + m_1^2} - \sqrt{P_2^2 + m_2^2} \right) \\ &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \cdot \frac{\delta (P_1 - P_{\text{cm}})}{\left| \left[\frac{d}{dP_1} \left(\sqrt{s} - \sqrt{P_1^2 + m_1^2} - \sqrt{P_1^2 + m_2^2} \right) \right]_{P_1=P_{\text{cm}}} \right|} = \\ &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \cdot \frac{\delta (P_1 - P_{\text{cm}})}{\left| \left[\frac{P_1}{E_1} + \frac{P_1}{E_2} \right]_{P_1=P_{\text{cm}}} \right|} = \\ &= \frac{P_1^2 dP_1 d\Omega_1}{4E_1 E_2} \cdot \frac{\delta (P_1 - P_{\text{cm}})}{P_{\text{cm}} \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2}} = \\ &= \frac{P_{\text{cm}}}{4\sqrt{s}} d\Omega_1 \end{aligned}$$

Noto l'impulso delle particelle nel centro di massa (o, se si vuole, \sqrt{s}, m_1, m_2) si ha che l'elemento infinitesimo dello spazio delle fasi dei due prodotti dipende solo dall'angolo solido di un prodotto (che in caso di isotropia spaziale come qua è l'opposto di Ω_2). Questo è molto utile per la sezione d'urto differenziale ad esempio.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1} = f_{\text{urto}}(\Omega_1) \frac{P_{\text{cm}}}{4\sqrt{s}}.$$

2.b.29 Nel caso di 3 particelle nello stato finale di una reazione, dimostrare che fra il quadrato della massa invariante di due di esse e l'energia della terza (nel centro di massa) sussiste una relazione lineare.

Prendiamo la massa invariante citata $\sqrt{s_{12}}$ e l'energia della restante paticella come E_3 , con ovvio significato dei simboli si ha (definizione di massa invariante):

$$s_{12} = (P_1 + P_2)^2.$$

Che per la conservazione dell'energia e dell'impulso si può scrivere come:

$$s_{12} = (P_{\text{in}} - P_3)^2 = P_{\text{in}}^2 + P_3^2 - 2P_{\text{in}}P_3 = s + m_3^2 - 2\sqrt{s}E_3.$$

Ecco la relazione lineare.

2.b.30 Come si trasforma una funzione di distribuzione del 3-impulso

$$f(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}$$

di una particella per una trasformazione di Lorentz?

Premessa: misurare in un sistema la funzione di distribuzione del 3-impulso significa misurare il numero di eventi dn nell'elemento di volume nello spazio degli impulsi $dn = f(\mathbf{P}) d^3\mathbf{P}$. È inoltre naturale che il numero di eventi registrati deve essere lo stesso in ogni sistema di riferimento

$$dn = f(\mathbf{P}) d^3\mathbf{P} = f(\mathbf{P}') d^3\mathbf{P}' = dn'$$

Abbiamo dimostrato anche che

$$\frac{d^3\mathbf{P}}{2E}.$$

è un invariante relativistico, quindi si può concludere:

$$\frac{E}{E'} f(\mathbf{P}) d^3\mathbf{P} = \frac{E'}{E'} f(\mathbf{P}') d^3\mathbf{P}' \implies f(\mathbf{P}') = \frac{E}{E'} f(\mathbf{P}).$$

2.b.31 Come si trasforma una funzione di distribuzione nello spazio delle fasi

$$f(\mathbf{p}, \mathbf{r}) d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{r}$$

di una particella per una trasformazione di Lorentz?

È necessario notare che anche qua il numero di eventi dn nel volume infinitesimo dello spazio delle fasi si deve conservare come sopra, ragionando quindi allo stesso modo si trova la legge di trasformazione richiesta.

Mettiamoci per utilità nel sistema in cui la particella è a riposo e consideriamo un boost lungo uno dei 3 assi di riferimento, possiamo sfruttare la contrazione delle lunghezze

$$d^3\mathbf{r}' = \frac{d^3\mathbf{r}}{\gamma} = \frac{d^3\mathbf{r}}{E'} mc^2 = \frac{d^3\mathbf{r}}{E'} E.$$

Quindi $E d^3\mathbf{r}$ è un invariante relativistico. Avendo trovato che anche $d^3\mathbf{P}/E$ è invariante si ha che

$$dn = f(\mathbf{P}, \mathbf{r}) d^3\mathbf{P} d^3\mathbf{r} = f(\mathbf{P}', \mathbf{r}') d^3\mathbf{P}' d^3\mathbf{r}' = dn' \quad \text{Invarianza del numero di eventi}$$

$$\frac{d^3\mathbf{P}}{E} E d^3\mathbf{r} = \frac{d^3\mathbf{P}'}{E'} E' d^3\mathbf{r}' \quad \text{Invarianti trovati sopra.}$$

Dalle quali deriva l'invarianza di $f(\mathbf{P}, \mathbf{r})$.

2.b.32 Dimostrare che se la probabilità di decadimento di una particella per unità di tempo non dipende dal tempo, la probabilità di trovare la particella non decaduta al tempo t segue una legge esponenziale.

Sia $S(t)$ la probabilità di trovare la particella al tempo t , considerando la invece la probabilità $P(t)$ di decadere dopo l'unità di tempo dt si ha (per ipotesi):

$$\frac{P(dt)}{dt} = \frac{1}{\tau} \text{ (costante)} \implies S(dt) = 1 - \frac{dt}{\tau}.$$

Quindi all'istante $t + dt$ si ha (per le regole delle probabilità combinate):

$$S(t + dt) = S(t) S(dt) = S(t) \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right).$$

Che ha come soluzione proprio un esponenziale (vedi Domanda 2.b.5):

$$S(t) = e^{-t/\tau}.$$

2.b.33 Dire quali fra le seguenti particelle sono soggette ad interazioni forti: $p, \bar{p}, \pi^+, \pi^-, \mu^+, \mu^-, e^+, e^-, \alpha$, Nucleo di Azoto, $\nu, \bar{\nu}$

Solo gli adroni (composti da Quark) possono fare interazione forte, quindi la risposta è: $p, \bar{p}, \pi^+, \pi^-, \alpha$, Nucleo di Azoto.

2.b.34 Pioni neutri, di energia E nel sistema del laboratorio, decadono in due fotoni. La distribuzione è isotropa ne centro di massa. Si calcoli la distribuzione dell'energia di uno dei due fotoni nel laboratorio e gli angoli, rispetto alla direzione di volo del pione, dei due fotoni nel sistema del laboratorio in funzione dell'angolo nel sistema del centro di massa.

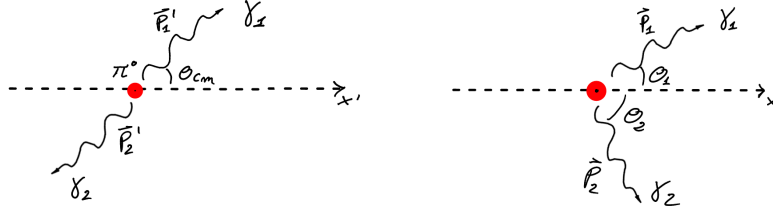


Figura 11: Decadimento del π^0 in due fotoni: a sinistra nel centro di massa e a destra nel sistema del laboratorio.

Fissando idee e notazione come in Figura 11 procediamo al calcolo richiesto.

$$\pi \longrightarrow \gamma + \gamma.$$

La massa del π^0 è 134.96 MeV, assumiamo che nel laboratorio questo si muova con velocità β nell'istante precedente al decadimento. Nel sistema del π^0 si ha:

$$P'_1 = \frac{m}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta_{cm}) \\ \sin(\theta_{cm}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad P'_2 = \frac{m}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\cos(\theta_{cm}) \\ -\sin(\theta_{cm}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Essendo inoltre la distribuzione di prodotti isotropa nel centro di massa possiamo scrivere:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_{cm}} = \frac{\Gamma}{4\pi} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\Gamma}{d\cos(\theta_{cm})} = \frac{\Gamma}{2}.$$

Nel laboratorio si ha invece:

$$P_1 = E_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1) \\ 0 \end{pmatrix} \quad P_2 = E_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

È possibile limitare le energie dei prodotti nel laboratorio tramite una trasformazione di Lorentz:

$$\begin{aligned} E_1 &= \gamma \frac{m}{2} (1 + \beta \cos(\theta_{cm})) & E_2 &= \gamma \frac{m}{2} (1 - \beta \cos(\theta_{cm})) \\ P_{1,x} &= E_1 \cos(\theta_1) = \gamma \frac{m}{2} (\beta + \cos(\theta_{cm})) & P_{2,x} &= E_2 \cos(\theta_2) = \gamma \frac{m}{2} (\beta - \cos(\theta_{cm})) \\ P_{1,y} &= E_1 \sin(\theta_1) = \frac{m}{2} \sin(\theta_{cm}) & P_{2,y} &= E_2 \sin(\theta_2) = -\frac{m}{2} \sin(\theta_{cm}). \end{aligned}$$

Guardando alla prima colonna facendo variare il $\cos(\theta_{cm})$ con la fantasia è facile vedere che:

$$\gamma \frac{m}{2} (1 - \beta) \leq E_1 \leq \gamma \frac{m}{2} (1 + \beta).$$

Possiamo adesso calcolarci come è distribuita l'energia E_1 (della particella 1 nel laboratorio):

$$\frac{d\Gamma}{dE_1} = \frac{d\Gamma}{d\cos(\theta_{cm})} \frac{d\cos(\theta_{cm})}{dE_1} = \frac{\Gamma}{2} \frac{2}{m\gamma\beta} = \frac{\Gamma}{m\gamma\beta}.$$

La distribuzione è quindi piatta (non dipende da E_1) e ben normalizzata se integrata nei limiti di E_1 . Per quanto riguarda la seconda richiesta procediamo calcolando la distribuzione angolare di uno dei fotoni.

Per farlo possiamo sfruttare ancora le trasformazioni di Lorentz di cui sopra isolando gli angoli nel laboratorio (essenzialmente la risposta al quesito è questa):

$$\begin{aligned}\cos(\theta_1) &= \frac{P_{1,x}}{E_1} = \frac{\beta + \cos(\theta_{\text{cm}})}{1 + \beta \cos(\theta_{\text{cm}})} & \cos(\theta_2) &= \frac{P_{2,x}}{E_2} = \frac{\beta - \cos(\theta_{\text{cm}})}{1 - \beta \cos(\theta_{\text{cm}})} \\ \sin(\theta_1) &= \frac{P_{1,y}}{E_1} = \frac{\sin(\theta_{\text{cm}})}{\gamma(1 + \beta \cos(\theta_{\text{cm}}))} & \sin(\theta_2) &= \frac{P_{2,y}}{E_2} = \frac{-\sin(\theta_{\text{cm}})}{\gamma(1 - \beta \cos(\theta_{\text{cm}}))}.\end{aligned}$$

Dalla prima in alto si ricava la cosa che ci serve: $\cos(\theta_{\text{cm}})$ in funzione di $\cos(\theta_1)$:

$$\cos(\theta_{\text{cm}}) = \frac{-\beta + \cos(\theta_1)}{1 - \beta \cos(\theta_1)}.$$

Sfruttiamo adesso l'isotropia nel centro di massa:

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{d\cos(\theta_1)} &= \frac{d\Gamma}{d\cos(\theta_{\text{cm}})} \frac{d\cos(\theta_{\text{cm}})}{d\cos(\theta_1)} = \\ &= \frac{\Gamma}{2} \frac{1 - \beta \cos(\theta_1) - (-\beta)(-\beta + \cos(\theta_1))}{(1 - \beta \cos(\theta_1))^2} = \\ &= \frac{\Gamma}{2} \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta \cos(\theta_1))^2} = \\ &= \frac{\Gamma}{2\gamma^2} \frac{1}{(1 - \beta \cos(\theta_1))^2}.\end{aligned}$$

Nell'ultima equazione si evidenzia come siano prediletti angoli piccoli (funzione crescente al tendere di $\theta_1 \rightarrow 0$). Infine possiamo dire qualcosa in più sulla differenza degli angoli nel laboratorio, nonchè "l'apertura" del cono formato dalla direzione dei due fotoni nel lab:

$$\sin(\theta_1 - \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_2)\cos(\theta_1) = \frac{2\beta \sin(\theta_{\text{cm}})}{\gamma(1 - \beta^2 \cos^2(\theta_{\text{cm}}))}.$$

Questa funzione vista la dipendenza da β fa cose diverse a seconda della velocità del π^0 .

2.b.35 Calcolare la funzione di distribuzione in energia ed in angolo nel sistema del laboratorio di un fascio di neutrini o di muoni prodotto nel decadimento di pioni carichi di energia 14 GeV.

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Con $m_{\pi^+} = 139.57$, $m_\mu = 105.66$ MeV e $m_\nu = 0$. Se il pione ha energia 14 GeV allora avrà

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = 100 \implies \beta \approx 0.99994.$$

Mettiamoci nel sistema del π^+ , i 4-vettori energia-impulso dei prodotti sono:

$$P'_\mu = \begin{pmatrix} \sqrt{P_{\text{cm}}^2 + m_\mu^2} \\ P_{\text{cm}} \cos(\theta_{\text{cm}}) \\ P_{\text{cm}} \sin(\theta_{\text{cm}}) \\ 0 \end{pmatrix} \quad P'_\nu = \begin{pmatrix} P_{\text{cm}} \\ -P_{\text{cm}} \cos(\theta_{\text{cm}}) \\ -P_{\text{cm}} \sin(\theta_{\text{cm}}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo la conservazione dell'energia nel centro di massa per esprimere P_{cm} in funzione delle sole masse invarianti:

$$m_\pi = E'_\mu + E'_\nu = \sqrt{P_{\text{cm}}^2 + m_\mu^2} + P_{\text{cm}} \implies P_{\text{cm}} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \approx 30 \text{ MeV}.$$

Visto che il pione ha spin nullo si ha anche qua l'isotropia dei prodotti, quindi il risultato della domanda precedente su $\frac{d\Gamma}{d\Omega}$. Trasformiamo allora per l'energia del neutrino nel laboratorio:

$$E_\nu^{\text{lab}} = \gamma P_{\text{cm}} (1 - \beta \cos(\theta_{\text{cm}})).$$

In cui si trovano di nuovo limiti inferiori essendoci $\cos(\theta_{\text{cm}})$ di mezzo:

$$0 \approx \gamma P_{\text{cm}} (1 - \beta) \leq E_\nu^{\text{lab}} \leq \gamma P_{\text{cm}} (1 + \beta) \approx 6.2 \text{ GeV}.$$

Abbiamo tutte le carte per calcolare la distribuzione del neutrino:

$$\frac{d\Gamma}{dE_\nu^{lab}} = \frac{d\Gamma}{d\cos(\theta_{cm})} \frac{d\cos(\theta_{cm})}{dE_\nu^{lab}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{P_{cm}\beta\gamma}.$$

Analogamente si può fare per il μ :

$$E_\mu^{lab} = \gamma \left(\sqrt{P_{cm}^2 + m_\mu^2} + \beta P_{cm} \cos(\theta_{cm}) \right).$$

$$7.8 \text{ GeV} \approx \gamma \left(\sqrt{P_{cm}^2 + m_{cm}^2} - \beta P_{cm} \right) \leq E_\mu^{lab} \leq \gamma \left(\sqrt{P_{cm}^2 + m_{cm}^2} + \beta P_{cm} \right) \approx 14 \text{ GeV}.$$

$$\frac{d\Gamma}{dE_\mu^{lab}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{1}{P_{cm}\beta\gamma}.$$

2.b.36 Qual e' l'andamento delle masse nucleari a parità di A in funzione di Z?

I nuclei isobari (a parità di A) hanno una massa con andamento quadratico in Z:

$$\begin{aligned} M_{A,Z}^{atomo} &= ZM_H^{atomo} + Nm_n - B_{A,Z} = \\ &= ZM_H^{atomo} + (A - Z)m_u + \text{cost}(A) + a_s \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_{sym} \frac{(Z - N)^2}{A} - \delta_{pair}. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo una parabola in funzione di Z, tuttavia non dobbiamo sottovalutare l'importanza del termine δ_{pair} :

$$\delta_{pair} = \begin{cases} \delta_0 & \text{se } A \text{ pari: } Z, N \text{ pari} \\ -\delta_0 & \text{se } A \text{ pari: } Z, N \text{ dispari} \\ 0 & \text{se } A \text{ dispari} \end{cases}$$

Per A dispari le masse dei nuclei si dispongono quindi su un'unica parabola al crescere di Z, per A dispari invece faranno uno "Zig Zag" dalla parabola inferiore a quella superiore formando così due parabole sovrapposte.

La particella più stabile sarà quella con massa inferiore: quella sul fondo della parabola. Il modo in cui le particelle decadono è fortemente influenzato dal fatto che A sia pari o dispari: se è dispari c'è solo una strada per arrivare al nucleo più stabile seguendo l'unica parabola, altrimenti (A pari) i metodi di decadimento per il singolo isobaro possono essere molteplici.

Se un isobaro si trova sulla parabola superiore potrà fare decadimento $\epsilon = \beta^+$ se si trovano nella parte sinistra della parabola oppure β^- se si trovano nella parte destra di quest'ultima, entrambi i decadimenti portano verso un nucleo della parabola inferiore.

Se un isobaro si trova nella parabola inferiore può fare decadimento $2\beta^-$ se si trova nella parte sinistra della parabola, altrimenti fa $2\beta^-$ ed in entrambi i casi restano nella parabola inferiore.

2.b.37 Dimostrare che in un tipico decadimento α , la particella α emerge con circa il 98% dell'energia disponibile.

In un decadimento α si ha:

$${}_Z^AX_N \longrightarrow {}_{Z-2}^{A-4}Y_{N-2} + \alpha.$$

Metodo Complicato In decadimento tipico di questi si ha anche che $A \gg 4, Z \gg 2$. Inoltre $B(4, 2) = 28.3$ MeV. Forti di queste informazioni immagineremo un piano A, Z pensando queste come variabili indipendenti per poter fare alcune approssimazioni in seguito. Calcoliamo intanto il Q-valore.

Nel calcolo del Q-valore del processo utilizziamo la massa dell'atomo scritta come:

$$M_{A,Z} = ZM_H + Nm_n - B_{A,Z}.$$

Notiamo che, conservandosi il numero di protoni e neutroni il Q-valore si riduce alla differenza delle Biniding Energy B con particolare attenzione ad i segni nella Definizione di Q:

$$Q_\alpha = B(A - 4, Z - 2) + B(4, 2) - B(A, Z).$$

Ragionando sempre in termini di A, Z generigi sfruttiamo le ipotesi $A \gg 4$ e $Z \gg 2$ per sviluppare il termine $B(A - 4, Z - 2)$ attorno al punto $[A, Z]$:

$$B(A - 4, Z - 2) \approx B(A, Z) - 4 \frac{\partial B(A, Z)}{\partial A} - 2 \frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z}.$$

Quindi reinserendo nella formula per Q_α ed utilizzando anche la Definizione di B:

$$\begin{aligned} Q_\alpha &\approx -4 \frac{\partial B(A, Z)}{\partial A} - 2 \frac{\partial B(A, Z)}{\partial Z} + 28.3 \text{ MeV} = \\ &= -4a_V + \frac{8}{3}a_S A^{-1/3} + 4a_C \frac{Z}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - 4a_{sym} \frac{(A-2Z)^2}{A^2} + 28.3 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Quest'ultima ci permette di notare che i valori tipici del Q del decadimento non si discostano dai pochi MeV (tipicamente 5 MeV), niente di relativistico insomma.

Se ci mettiamo adesso in un sistema solidale alla particella che decade si ha che le due particelle finali hanno impulsi di modulo uguale ed opposta direzione (ipotesi di spin nullo), quindi:

$$m_\alpha^2 |\mathbf{v}_\alpha|^2 = m_y^2 |\mathbf{v}_y|^2 \implies m_\alpha T_\alpha = m_y T_y.$$

E visto che il Q -valore è definito anche come $Q = T_\alpha + T_y$ se ne conclude che:

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 + \frac{m_\alpha}{m_y}} \approx Q \left(1 - \frac{m_\alpha}{m_y}\right) \approx Q \left(1 - \frac{4}{A-4}\right).$$

Basta avere $A = 200$ per $T_\alpha = 0.98 \cdot Q$.

Metodo Semplice Alle stesse conclusioni si arriva con molta meno sofferenza utilizzando il fatto che i prodotti di decadimento sono limitati da funzioni del Q -value e stimando il Q -Value con i difetti di massa:

$$Q = \Delta_{A,Z} - \Delta_{A-4,Z-2} - \Delta_{4,2} \quad (\sim \text{MeV}).$$

Andando nel sistema del centro di massa in cui X decade a riposo l'energia cinetica di ogni singolo prodotto è limitata superiormente dal Q -value essendo $Q = T_\alpha + T_y$.

Questo pone dei limiti anche all'impulso dei prodotti, per la particella α si ha:

$$p_\alpha = \sqrt{E_\alpha^2 - m_\alpha^2} = \sqrt{(T_\alpha + m_\alpha)^2 - m_\alpha^2} < \sqrt{Q^2 + 2Qm_\alpha}.$$

Nel centro di massa naturalmente si ha $|\mathbf{p}_\alpha| = |\mathbf{p}_y|$. Quindi esprimiamo l'energia cinetica dei prodotti in funzione dell'impulso come:

$$T_\alpha = \frac{|\mathbf{p}_\alpha|^2}{2m_\alpha} < \frac{Q^2 + 2Qm_\alpha}{2m_\alpha} \quad T_y = \frac{|\mathbf{p}_y|^2}{2M_y} < \frac{Q^2 + 2Qm_\alpha}{2M_y}.$$

In realtà a noi interessa che:

$$\frac{T_y}{T_\alpha} = \frac{m_\alpha}{M_y}.$$

E visto che $m_\alpha = 4m_u + \Delta_{4,2} \sim 4 \text{ GeV}$ e $M_y = (A-4)m_u + \Delta_{A-4,Z-2} \sim 200 \text{ GeV}$ si ha:

$$T_y \approx 0.02 T_\alpha.$$

Da cui si conclude come sopra.

2.b.38 Dimostrare che in un decadimento β la somma delle energie dell'elettrone e dell'antineutrino emessi è praticamente uguale al Q -valore della reazione.

Ricordando il decadimento β^- :



Mettiamoci in un sistema in cui X decade a riposo. In questo sistema le energie dei 3 prodotti sono tutte minori del Q -valore poichè:

$$T_Y + T_{e^-} + T_{\bar{\nu}_e} = Q.$$

Questo pone dei limiti anche agli impulsi dei 3 prodotti:

$$\begin{aligned} |\mathbf{p}_{e^-}| &= \sqrt{E_e^2 - m_e^2} = \sqrt{(T_e + m_e)^2 - m_e^2} < \sqrt{Q^2 + 2m_e Q}. \\ |\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}| &< Q. \end{aligned}$$

$$|\mathbf{p}_Y| < |\mathbf{p}_{\bar{\nu}_e}| + |\mathbf{p}_{e^-}| < Q + \sqrt{Q^2 + 2m_e Q}.$$

Come nel caso precedente si può dimostrare che $Q \sim \text{MeV}$, quindi l'energia del nucleo uscente (la cui massa è almeno tre ordini superiori a Q) nel sistema del centro di massa:

$$T_Y = \frac{|\mathbf{p}_Y|^2}{2m_Y} < \frac{(Q + \sqrt{Q^2 + 2m_e Q})^2}{2m_Y} \sim \frac{Q}{1000} \implies Q \approx T_{e^-} + T_{\bar{\nu}_e}.$$

Perchè la massa dell'elettrone (presente al numeratore) è dello stesso ordine del Q valore.

Parte 3

Elettromagnetismo classico e acceleratori di particelle

a Domande a

3.a.1 Dare la definizione di quadri-corrente e di quadri-potenziale del campo elettromagnetico.

$$j^\mu = (c\rho, \mathbf{j}) \quad A^\mu = (\varphi, \mathbf{A}).$$

3.a.2 Dare la definizione del tensore del campo elettromagnetico e scriverne le componenti.

Il tensore discusso è il tensore antisimmetrico di rango 2

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu.$$

avente componenti:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -Ex & -Ey & -Ez \\ Ex & 0 & -Bz & By \\ Ey & Bz & 0 & -Bx \\ Ez & -By & Bx & 0 \end{pmatrix}.$$

3.a.3 Dare la definizione della "densità di energia" del campo elettromagnetico, del "vettore di Poynting" e del "tensore degli sforzi di Maxwell"

Trattiamo qua di leggi di conservazione provenienti da equazioni di continuità:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\text{densità di energia}) + \nabla \cdot (\text{vettore}) = (\text{densità di potenza}).$$

Si può dimostrare (vedi Fisica II, Teorema di Poynting) che la densità di energia nell'equazione nel caso di campo elettromagnetico è:

$$\rho_E = \epsilon_0 \frac{E^2}{2} + \epsilon_0 c^2 \frac{B^2}{2}.$$

Mentre il vettore, detto Vettore di Poynting:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}.$$

Il tensore di Maxwell deriva invece da un'altra legge di conservazione: quella dell'impulso del campo elettromagnetico. Tale tensore è così definito:

$$T_{i,j} = \left(\epsilon_0 \frac{E^2 + c^2 B^2}{2} \delta_{ij} - \epsilon_0 (E_i E_j + c^2 B_i B_j) \right).$$

3.a.4 Scrivere le equazioni di Maxwell (sia quelle non omogenee che quelle omogenee) in forma covariante.

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{j^\nu}{\epsilon_0 c} \quad \text{Disomogenee.}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = \partial_\mu \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{Omogenee.}$$

Dove è stato definito il tensore duale, per chi ancora si chiede come cavolo sia fatto si fa una piccola digressione:

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{0i} &= \frac{1}{2} \epsilon^{0i\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \epsilon^{0ijk} F_{jk} = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} F_{jk} = -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{jkl} B^L = -B^i \\ \tilde{F}^{ij} &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijkl} F_{kl} = \frac{1}{2} \epsilon^{ij0k} F_{0k} + \frac{1}{2} \epsilon^{ijk0} F_{k0} = -\epsilon^{ijk} F_{0k} = \epsilon^{ijk} E_k. \end{aligned}$$

Quindi questo tensore è lo stesso di quello dei campi se si manda $E \longrightarrow B$ e $B \longrightarrow -E$.

3.a.5 Scrivere l'equazione di continuità per la quadri-corrente in forma covariante (e verificarne la consistenza con le equazioni di Maxwell)

Prendiamo le equazioni di Maxwell disomogenee (in forma covariante) e sfruttiamo l'antisimmetria del tensore elettromagnetico:

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0.$$

facendo la stessa operazione anche al di là dell'uguale si trova quindi l'equazione richiesta

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

3.a.6 Dare la definizione di "gauge di Lorenz" e di "gauge di Coulomb".

Nella Gauge di Lorenz è richiesto:

$$\partial_\mu A^\mu = 0.$$

Mentre nella Gauge di Coulomb:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Le due condizioni si equivalgono nel caso elettrostatico.

3.a.7 Scrivere la legge di trasformazione di Lorentz del campo elettrico e del campo magnetico (distinguendo fra componenti parallele e componenti perpendicolari al "boost").

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\ \mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{E}_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{B}) \\ \mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\ \mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma (\mathbf{B}_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}). \end{aligned}$$

3.a.8 Dare la definizione del quadri-vettore "densità di forza di Lorentz".

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{dt d^3r}.$$

Il fatto che questo sia un quadrivettore deriva dal fatto che il denominatore è un invariante relativistico, si ha inoltre che:

$$f^\mu = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_\nu = \left(\frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}{c}, \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \right).$$

3.a.9 Ricavare le espressioni dell'effetto Doppler relativistico (calcolo della frequenza e dell'angolo misurati dal rivelatore nel caso di moto relativo fra sorgente e rivelatore stesso).

Si sa che esiste il 4-vettore:

$$k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right).$$

Consideriamo un moto bidimensionale e mettiamoci nel sistema di una sorgente di onde elettromagnetiche che si muove (la sorgente) a velocità $\mathbf{v} = c\beta\hat{x}$, in tale sistema il quadrivettore k^μ lo definiamo come:

$$k^\mu = \frac{\omega}{c} (1, \cos\theta \cdot \hat{x}, \sin\theta \cdot \hat{y}).$$

Invece nel sistema del rivelatore questo quadrivettore è:

$$k_R^\mu = \frac{\omega}{c} (1, \cos\theta_R \cdot \hat{x}, \sin\theta_R \cdot \hat{y}).$$

Legati dalla trasformazione di Lorentz tra i due sistemi:

$$\begin{aligned}\omega_R &= \gamma\omega(1 + \beta\cos\theta) \\ \tan\theta_R &= \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta + \beta)}.\end{aligned}$$

3.a.10 Scrivere l'espressione per i potenziali ritardati (ϕ ed A) per una qualunque distribuzione di cariche (ρ) e correnti (\mathbf{j}).

Potenziale scalare:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'.$$

Potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'.$$

3.a.11 Spiegare tutti i termini dell'espressione

$$\mathbf{E} = \left[\frac{q}{R^2} \frac{\hat{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 (1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} + \frac{q}{Rc} \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right]_{t'=t-R/c}$$

per il campo elettrico generato da una carica puntiforme in moto arbitrario.

Sia $\mathbf{s}(t)$ la legge oraria della carica q e sia \mathbf{r} la posizione dell'osservatore, allora possiamo definire le quantità dell'espressione:

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{s}(t') \quad \hat{n} = \mathbf{R}/R.$$

Il primo termine della equazione nella richiesta è il campo generato da una carica che si muove in moto rettilineo uniforme e non è un termine radiativo (va giù come R^{-2}), il secondo termine è invece radiativo e dipende dalla accelerazione della carica.

3.a.12 Dare la definizione di “solido di radiazione” e di “diagramma di radiazione” per una carica accelerata.

Solido di radiazione Preso un oggetto che irraggia si dice solido di radiazione la figura tridimensionale costruita posizionando nell'origine la sorgente di radiazione e nelle diverse direzioni spaziali frecce di lunghezza proporzionale all'intensità del campo elettrico nella direzione indicata dalla freccia stessa.

Diagramma di radiazione. Sezione planare del solido di radiazione in direzioni opportune a comprenderne la forma.

3.a.13 Quanto vale il campo magnetico generato da una carica puntiforme in moto arbitrario se è noto il campo elettrico?

Ragionando nel sistema istantaneamente a riposo della carica il campo magnetico è nullo, definiamo in questo sistema il campo elettrico come \mathbf{E} , allora il campo magnetico nel laboratorio istante per istante è ortogonale a $\boldsymbol{\beta}$ e vale:

$$\mathbf{B}_{\perp} = -\gamma (\boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}).$$

In realtà vale in generale che:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}.$$

3.a.14 Spiegare tutti i termini della espressione

$$\frac{dI_{\omega}}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \hat{n}}{c})} dt' \right|^2$$

Parliamo della famigerata Radiazione di sincrotrone. Quella scritta sopra è la distribuzione angolare dell'energia irraggiata per unità di frequenza I_{ω} di una carica q in moto con velocità $\boldsymbol{\beta}$. Inoltre \hat{n} è la direzione di osservazione e il sistema usato è il CGS. Anche se non richiesto possiamo dimostrarla a partire dalla formula del campo di radiazione della Domanda 3.a.11.:

$$\mathbf{E} = \frac{q}{cr} \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \Bigg|_{t=t_{\text{rit}}}$$

ricordiamo che $\mathbf{B} = \hat{n} \wedge \mathbf{E}$, e che come conseguenza la densità di energia irraggiata ε è proporzionale a $|\mathbf{E}|^2$, quindi l'energia irraggiata per unità di angolo solido si esprime come:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\Omega} &= \int_{-\infty}^{\infty} r^2 [\mathbf{S} \cdot \hat{n}] dt = \\ &= \int r^2 \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 dt = \\ &= \frac{q^2}{4\pi c} \int \left[\frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \Bigg|_{t=t_{\text{rit}}} \right]^2 dt. \end{aligned}$$

È utile adesso avvalersi dell'identità di parseval sulla trasformata di Fourier:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(\omega)|^2 d\omega.$$

Portiamo allora l'integranda nel dominio delle frequenze:

$$\frac{d\varepsilon}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{q^2}{4\pi c} 2 \cdot \int_0^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

con $\hat{f}(\omega)$ trasformata dell'integranda nell'equazione sopra, l'integrale va solo sulle frequenze positive perchè la funzione che trasformiamo è reale ($\hat{f}(-\omega) = \hat{f}^*(\omega)$), da questo viene il fattore 2.

Adesso la funzione integranda si avvicina molto all'oggetto che stavamo cercando (un oggetto definito per unità di frequenza), infatti:

$$\frac{dI_{\omega}}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} |\hat{f}(\omega)|^2 = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \Bigg|_{t=t_{\text{rit}}} e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

Basta adesso cambiare variabili:

$$\begin{aligned} t \longrightarrow t_{\text{rit}} = t' = t - \frac{R(t')}{c} &\implies t(t') = t' + \frac{R(t')}{c}. \\ dt \longrightarrow dt_{\text{rit}} = dt' &= d\left(t - \frac{R(t')}{c}\right). \end{aligned}$$

con $R(t)$ distanza tra particella e punto di osservazione, è bene ricordare che per distanze "grandi" come quelle dei campi di radiazione si ha:

$$R(t') \approx x - \hat{n} \cdot \mathbf{r}(t').$$

Con x distanza del punto di osservazione dall'origine e $\mathbf{r}(t)$ traiettoria della particella. In questo modo è evidente che lo Jacobiano del cambio di variabili sia:

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

rimettendo tutto dentro si ottiene l'espressione nella richiesta (avendo cura di notare che all'esponentiale ci sarà una fase che proviene da R , quella è irrilevante essendoci un modulo quadro.).

3.a.15 Una carica elettrica Q si muove con velocità costante (relativistica) di modulo V su una retta, a distanza b da tale retta si trova un osservatore che misura il campo elettrico e magnetico generato dalla carica. Quanto è l'ordine di grandezza del tempo in cui l'osservatore misura un campo elettrico che sia almeno la metà del campo elettrico massimo misurato?

È evidentemente necessario per rispondere alla domanda parametrizzare il campo elettrico in funzione del tempo nel riferimento dell'osservatore. Per far questo ci mettiamo da prima nel riferimento della carica (O') e poi con una trasformazione di Lorentz dei campi andiamo nel sistema dell'osservatore:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{E}' = e \frac{\mathbf{R}'}{R'^3}, & \mathbf{B}' = 0 & \xrightarrow{\text{Lorentz}} \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\parallel} = \mathbf{E}'_{\parallel} \\ \mathbf{E}_{\perp} = \gamma \mathbf{E}'_{\perp} \\ \mathbf{B} = \gamma \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}. \end{array} \end{array}$$

Tuttavia come è ben noto i campi sono espressi ancora in funzione delle variabili del sistema solidale alla carica (t', x', y', z'), sarà necessario un altro boost per cambiare parametrizzazione.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{l} x(t) = v \cdot t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{array} & \xrightarrow{\text{Lorentz}} & \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z. \end{array} \end{array}$$

Rimane la dipendenza del campo elettrico dalla distanza dalla carica anche dopo la trasformazione di Lorentz, tale distanza è tuttavia parametrizzata con le variabili primarie:

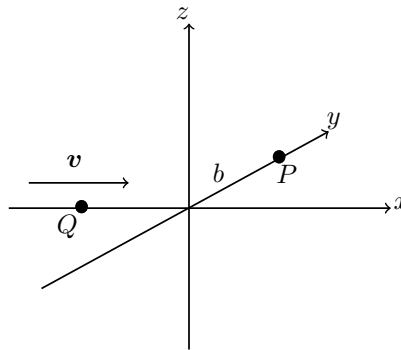


Figura 12: Carica in moto e punto di osservazione dei campi

$$\begin{aligned} R' &= \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \\ &= \sqrt{\gamma^2 (x - vt)^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \gamma \sqrt{(x - vt)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)} = \gamma R^*. \end{aligned}$$

Inseriamola nelle componenti dei campi:

$$\begin{aligned} E_x &= e \frac{\gamma (x - vt)}{\gamma^3 (R^*)^3} = e \frac{x - vt}{\gamma^2 (R^*)^3} \\ E_y &= e \gamma \frac{y}{\gamma^3 (R^*)^3} = e \frac{y}{\gamma^2 (R^*)^3} \\ E_z &= e \gamma \frac{z}{\gamma^3 (R^*)^3} = e \frac{z}{\gamma^2 (R^*)^3}. \end{aligned}$$

In maniera più compatta si può scrivere:

$$\mathbf{E} = e \frac{\mathbf{R}_i}{\gamma^2 (R^*)^3}.$$

Con \mathbf{R}_i defito dalle equazioni precedenti.

Adesso con riferimento alla Figura 12 calcoliamo il campo visto dal punto $P = (0, b, 0)$:

$$\begin{aligned} E_x &= -e \frac{\gamma vt}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} \\ E_y &= e \frac{b\gamma}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} \\ E_z &= 0. \end{aligned}$$

Se si prova a graficare queste funzioni ci si rende conto che il contributo più significativo al campo misurato da P è quello lungo y (alternativamente si può dimostrare che il modulo del campo elettrico è massimo quando si annulla E_x ovvero in $t = 0$), quindi per abbozzare l'ordine di grandezza richiesto senza perdersi in conti basta notare che E_y ha un solo massimo: per $t = 0$, quindi possiamo richiedere che il campo valga circa la metà rispetto a questo massimo. La richiesta si traduce nell'avere il denominatore che valga il doppio rispetto al massimo, ovvero:

$$\gamma^2 v^2 t^2 \sim b^2 \implies t \sim \frac{b}{\gamma v}.$$

3.a.16 Enunciare il principio di Babinet.

La figura di diffrazione generata da un corpo opaco è la stessa che si ottiene con lo schermo complementare: ottenuto sostituendo il corpo con una apertura.

3.a.17 Definire il fattore di forma per un'onda che incide su un sistema.

Il fattore di forma per un sistema caratterizzato da una densità di carica ρ è definito:

$$F(\mathbf{q}) = \frac{\int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d^3r}{\int \rho(\mathbf{r}) d^3r}.$$

Dove \mathbf{q} rappresenta la differenza tra il vettore d'onda entrante e uscente.

Tale quantità può essere definita anche per sistemi discreti facendo un attento uso delle δ

3.a.18 Spiegare qualitativamente il funzionamento di un acceleratore elettrostatico.

In un acceleratore elettrostatico le particelle vengono accelerate da campi statici. Le particelle vengono fatte passare in un tubo a vuoto in cui è presente un campo elettrico costante.

L'energia che viene fornita alla particella è modesta: 1-10 MeV. Questa energia è limitata dal fatto che le particelle passano nel tubo una sola volta.

3.a.19 Quali sono, approssimativamente, le energie per unità di lunghezza che attualmente si ottengono nell'accelerazione di protoni con la tecnica dei "drift tube"? E delle cavità superconduttrici?

Con i drift tube si riesce a fare $100 \frac{\text{keV}}{m}$, mentre con le cavità superconduttrici si arriva a $50 \frac{\text{MeV}}{m}$.

3.a.20 Spiegare qualitativamente il funzionamento di un acceleratore lineare, indicando le differenze importanti fra l'accelerazione di elettroni e di protoni.

Un acceleratore lineare consiste in un tubo a vuoto in cui sono presenti degli elettroni in cascata tra i quali viene stabilita una d.d.p. oscillante.

A differenza di un acceleratore elettrostatico si può sempre aggiungere uno stadio per accelerare le particelle. È quindi possibile raggiungere energie più elevate rispetto ai primi.

Una differenza importante tra protoni ed elettroni è la forma che i drift tube devono avere per accelerare gli uni o gli altri essendo gli elettroni molto meno massivi dei protoni. Un'altra grande differenza è la potenza irradiata dai due: condideriamo l'accelerazione di una particella di carica q e massa m , visto che la traiettoria è rettilinea si ha:

$$qE = m\gamma^3 a.$$

La potenza irradiata è quindi (CGS):

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 a^2 = \frac{2q^4 E^2}{3m^2 c^3}.$$

In particolare la potenza irradiata da un elettrone è circa $3 \cdot 10^6$ volte quella irradiata da un protone.

3.a.21 Spiegare qualitativamente il funzionamento di un acceleratore circolare, indicando le differenze importanti fra l'accelerazione di elettroni e di protoni.

Un acceleratore circolare moderno è solitamente il sincrotrone, quest'ultimo consiste nel tenere le particelle in moto circolare mediante l'ausilio di magneti e cavità superconduttrici che si alternano tra loro. I campi generati da questi due ultimi sono regolati in modo da tenere le particelle lungo la traiettoria prestabilita. Qui la grande differenza tra l'accelerazione di protoni ed elettroni consiste nella energia persa nell'irraggiamento, per arrivarci è necessario avvalersi della Formula di Larmor relativistica (MKSA):

$$P = I = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0} \gamma^6 \left[\frac{|\dot{\beta}|^2}{c} - |\beta \wedge \dot{\beta}|^2 \right].$$

Nel caso di un acceleratore lineare conta soltanto il primo termine, nel circolare invece pesa anche il secondo. Analizziamo proprio questo secondo caso, ipotizzando un raggio di curvatura R :

$$\begin{aligned} I &= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \gamma^6 (a^2 - a^2 \beta^2) = \\ &= \frac{q^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} |\mathbf{a}|^2 = \\ &= \frac{q^2 \gamma^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{\beta^2 c^2}{R} \right)^2 = \\ &= \frac{q^2 \gamma^4 \beta^4 c}{6\pi\epsilon_0 R^2}. \end{aligned}$$

Se la particella trascorre un tempo T_B sotto l'effetto curvatore del campo magnetico B per ogni giro e R_B è il raggio della circonferenza formata dalle sole zone in cui vi è l'effetto di questo campo si ha:

$$T_B = \frac{2\pi R_B}{\beta c}.$$

In quanto sotto l'effetto di B non vi è accelerazione tangenziale. Allora l'energia persa per irraggiamento è data da:

$$\Delta E = I \cdot T_B.$$

Che con un pò di algebra e sostituzioni si può anche esprimere come:

$$\Delta E = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{R_B} \right) m_e c^2 \beta^3 \gamma^4.$$

La perdita di energia per irraggiamento è sostanzialmente dovuta alla velocità della particella, essendo meno massosi gli elettroni (a parità di energia dei protoni) hanno β e γ molto maggiori dei protoni, il loro irraggiamento in curva è tale da avere un nome per la notevole potenza emessa: luce di sincrotrone. (da rivedere perchè secondo me è un pò stupido...)

L'energia persa per irraggiamento è quindi un fattore che limita molto le energie ottenibili in acceleratori circolari se si studiano collisioni di elettroni o positroni. Nel caso dei protoni il fattore limitante principale è l'intensità del campo magnetico che siamo in grado di produrre per far sterzare le particelle.

3.a.22 Effettuare un disegno, qualitativo, del solido di radiazione per una carica in un acceleratore lineare o circolare.

Per l'acceleratore circolare si ha la distribuzione angolare (CGS):

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{q^2 a^2}{4\pi c^3 (1 - \beta \cos \theta)^3} \left[1 - \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \varphi}{\gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2} \right].$$

Che è piccata in un doppio cono stonato attorno a β :

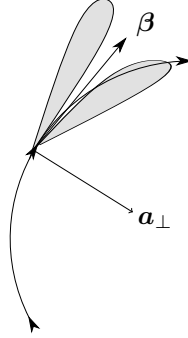


Figura 13: Distribuzione Angolare della radiazione di sincrotrone

b Domande b

3.b.1 Dimostrare l'espressione

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \hat{n} \cdot \beta.$$

dove t e t' sono il tempo di osservazione ed il tempo 'ritardato', rispettivamente.

Si prenda una carica che si muove con la legge oraria $\mathbf{s}(t)$ e velocità β , sfruttando la definizione di tempo ritardato:

$$t = t_{\text{rit}} + |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_{\text{rit}})|/c.$$

Possiamo differenziare:

$$\frac{dt}{dt_{\text{rit}}} = 1 - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_{\text{rit}})) \cdot \frac{d\mathbf{s}(t_{\text{rit}})}{dt_{\text{rit}}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t_{\text{rit}})|c} = 1 - \hat{n} \cdot \beta|_{\text{rit}}.$$

3.b.2 Date le definizioni 'standard' delle variabili $\hat{n}, \beta, \mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t'$, dimostrare le seguenti relazioni:

$$1) \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = -\beta c$$

$$2) \frac{dR}{dt'} = -\hat{n} \cdot \beta c$$

$$3) \frac{d(\mathbf{R} \cdot \beta)}{dt'} = -\beta^2 c + \mathbf{R} \cdot \dot{\beta}$$

$$4) \nabla R = \frac{\hat{n}}{(1 - \hat{n} \cdot \beta)}$$

$$5) \nabla t' = \frac{-\hat{n}/c}{1 - \hat{n} \cdot \beta}.$$

Si ha che \mathbf{r} e t sono il punto e l'istante in cui si osservano i campi, \mathbf{r}' la posizione delle sorgenti. t' è il tempo ritardato definito da:

$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')|.$$

Si ha inoltre che

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'(t').$$

Mentre $\hat{n} = \mathbf{R}/R$ e $\boldsymbol{\beta} = \dot{\mathbf{r}}'/c$. Possiamo inoltre derivare \mathbf{R} rispetto al tempo ritardato per ottenere una delle relazioni:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt'} = -\dot{\mathbf{r}}' = -\boldsymbol{\beta}c.$$

Facciamo quindi lo stesso con R :

$$\frac{dR}{dt'} = \frac{d|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{dt'} = \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} = -\hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta}c.$$

E con il prodotto $\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}$:

$$\frac{d(\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta})}{dt'} = \boldsymbol{\beta} \cdot \frac{d\mathbf{R}}{dt'} + \mathbf{R} \cdot \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt'} = -\beta^2 c + \mathbf{R} \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}.$$

Dalla definizione di tempo ritardato si ha una utile relazione tra $\nabla t'$ e ∇R :

$$-c\nabla t' = \nabla R.$$

È necessario calcolare solo $\nabla t'$ per avere anche l'altra quantità:

$$\begin{aligned} -c\nabla t' &= \nabla |\mathbf{r} - \mathbf{r}'(t')| = \\ &= \hat{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{\sum_{j=1}^3 (r_j - r'_j(t'))^2} = \\ &= \frac{\hat{x}_i}{2R} \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 (r_j - r'_j(t'))^2 = \\ &= \frac{\hat{x}_i}{R} \sum_{j=1}^3 (r_j - r'_j(t')) \left(\delta_{ij} - c\beta_j(t') \frac{\partial t'}{\partial x_i} \right) = \\ &= \hat{n} - c\hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \nabla t'. \end{aligned}$$

Se ne conclude che :

$$\nabla t' = -\frac{\hat{n}/c}{1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta}}.$$

3.b.3 Calcolare la distribuzione in potenza in funzione dell'angolo di emissione per una carica accelerata in moto non relativistico.

Si parte dal campo generato da una carica in moto :

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = q \left[\frac{\hat{n} - \boldsymbol{\beta}}{\gamma^2 (1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} \right]_{\text{rit}} + \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R} \right]_{\text{rit}}.$$

Dove le quantità sono quelle definite nella domanda precedente. Si trascura adesso il campo a decrescenza rapida e si considera solo il campo di radiazione approssimandolo al caso non relativistico:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R} \right]_{\text{rit}} \approx \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{rit}}.$$

L'approssimazione si ottiene raggruppando un \hat{n} al numeratore. Il vettore di Poynting quindi è:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 \hat{n} = \frac{q^2}{4\pi c} \left| \frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right|^2.$$

Dove si è anche trascurato il termine $\boldsymbol{\beta}$ rispetto al termine \hat{n} perchè discutiamo il caso non relativistico. Andando adesso in un sistema di riferimento in cui θ è l'angolo tra la accelerazione della particella e la direzione di osservazione si ha:

$$\mathbf{S} = \frac{q^2}{4\pi R^2 c} \sin^2 \theta |\dot{\mathbf{v}}|^2 \hat{n}.$$

In conclusione si trova la distribuzione angolare di potenza come:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{dP}{d\Sigma} \frac{d\Sigma}{d\Omega} = |\mathbf{S}| R^2 = \frac{q^2}{4\pi c} a^2 \sin^2 \theta.$$

3.b.4 Ricavare esplicitamente le leggi di trasformazione di Lorentz del campo elettrico e del campo magnetico. Discutere, in particolare, il caso in cui, in un certo sistema di riferimento inerziale, il campo magnetico è nullo e il caso in cui il campo elettrico è nullo.

Il modo migliore per vedere come trasformano i campi è vedere come trasforma il tensore dei campi. Per semplicità scegliamo un boost lungo l'asse x , tale tensore (antisimmetrico) trasforma come :

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_{\alpha}^{\mu} \Lambda_{\beta}^{\nu} F^{\alpha\beta}.$$

Si può adesso procedere in due modi: calcolo indiciale o calcolo matriciale, si tratta qua la prima strada. Per completezza si aggiunge solo che brutalmente il conto con le matrici sarebbe:

$$F' = \Lambda F \Lambda^t.$$

Dove Λ è:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mentre F è:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Se non vogliamo morire di conti bisogna essere astuti. Calcoliamo alcune componenti del tensore trasformato:

$$F'^{0i} = \Lambda_{\alpha}^0 \Lambda_{\beta}^i F^{\alpha\beta}.$$

Quindi per la prima riga si ha :

$$\begin{aligned} F'^{01} &= -E'_x = \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 F^{00} + \Lambda_1^0 \Lambda_1^1 F^{01} + \Lambda_1^0 \Lambda_0^1 F^{10} + \Lambda_0^0 \Lambda_1^1 F^{11} = \\ &= \gamma \cdot (-\beta\gamma) \cdot 0 + \gamma \cdot \gamma \cdot F_{01} + (-\beta\gamma) \cdot (-\beta\gamma) F^{10} + 0 = \dots = F^{01} = -E_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F'^{02} &= -E'_y = \Lambda_0^0 \Lambda_2^2 F^{02} + \Lambda_1^0 \Lambda_2^2 F^{22} = \\ &= \gamma \cdot 1 \cdot F^{02} + (-\beta\gamma) \cdot 1 \cdot F^{12} = \gamma (F^{02} - \beta F^{12}) = -\gamma (E_y - \beta B_z) \end{aligned}$$

$$F'^{03} = -E'_z = \Lambda_0^0 \Lambda_3^3 F^{03} + \Lambda_1^0 \Lambda_3^3 F^{13} = -\gamma (E_z + \beta B_y).$$

Il calcolo faticoso ha dei vantaggi: il tensore rimarrà antisimmetrico, quindi abbiamo già scritto la prima riga e la prima colonna. Per i rimanenti 3 elementi si trova:

$$F'^{12} = -B'_z = -\gamma (B_z - \beta E_y)$$

$$F'^{13} = B'_y = \gamma (B_y + \beta E_z)$$

$$F'^{23} = -B'_x = -B_x.$$

Quindi il tensore trasformato risulta :

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma(E_y - \beta B_z) & -\gamma(E_z + \beta B_y) \\ E_x & 0 & -\gamma(B_z - \beta E_y) & \gamma(B_y + \beta E_z) \\ \gamma(E_y - \beta B_z) & \gamma(B_z - \beta E_y) & 0 & -B_x \\ \gamma(E_z + \beta B_y) & -\gamma(B_y + \beta E_z) & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Sistema con campo magnetico nullo Un sistema di esempio è quello solidale ad una carica, in questo caso non essendoci moto di carica si ha $\mathbf{B} = 0$ quindi il tensore dei campi è:

$$F'_{B=0} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -\gamma E_y & -\gamma E_z \\ E_x & 0 & \gamma \beta E_y & \gamma \beta E_z \\ \gamma E_y & -\gamma \beta E_y & 0 & 0 \\ \gamma E_z & -\gamma \beta E_z & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da cui guardando le componenti se ne deduce la relazione: $\mathbf{B}' = \boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{E}'$

Sistema con campo elettrico nullo Un buon esempio qua è un plasma che si dispone sempre in modo da annullare il campo in questione, quindi :

$$F'_{B=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\beta B_z & -\gamma\beta B_y \\ 0 & 0 & -\gamma\beta B_z & \gamma\beta B_y \\ -\gamma\beta B_z & \gamma\beta B_y & 0 & -B_x \\ \gamma\beta B_y & -\gamma\beta B_z & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente a sopra se ne deduce che $\mathbf{E}' = -\boldsymbol{\beta} \wedge \mathbf{B}'$

3.b.5 Dire quali sono gli "invarianti di Lorentz" che si possono costruire con il tensore del campo elettromagnetico e ricavarne le espressioni esplicite in termini dei campi elettrico e magnetico. Ridiscutere, usando gli invarianti, il caso discusso nel punto precedente e discutere il caso in cui gli invarianti sono nulli.

Possiamo costruire due invarianti indipendenti:

$$\begin{aligned} I_1 &= F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = F_{0i}F^{0i} + F_{i0}F^{i0} + F_{ij}F^{ij} = \\ &= E_i \cdot (-E_i) + (-E_i) \cdot E_i + \epsilon_{ijl}B_l \cdot \epsilon_{ijk}B_k = \\ &= -2|E|^2 + 2|B|^2 \\ I_2 &= F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = \dots = -4\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned}$$

Quindi gli invarianti sono, riscritti in modo chiaro (notiamo che I_1 è invariante allora lo è anche $-I_1$):

$$I_1 = |\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{B}|^2 \qquad I_2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}.$$

Analizziamo con cura i casi specifici in cui tramite questi invarianti possiamo trarre immediate conclusioni sulla natura del campo elettrico e magnetico (si usa la notazione con cui sono stati chiamati sopra):

- Se $\mathbf{B} = 0$ oppure $\mathbf{E} = 0$ si ha sicuramente che $I_2 = 0$ da cui $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ in tutti i sistemi di riferimento.
- Se $I_2 \neq 0$ allora esiste un sistema di riferimento in cui \mathbf{E} e \mathbf{B} sono paralleli ed entrambi non nulli.
- Se $I_1 > 0$ e $I_2 = 0$ allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{B} = 0$ (Esempio: carica puntiforme ferma).
- Se $I_1 < 0$ e $I_2 = 0$ allora esiste un sistema di riferimento in cui $\mathbf{E} = 0$ (Esempio: Plasma).
- Se $I_1 = 0$ e $I_2 = 0$ allora si ha per tutti i sistemi di riferimento che $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ e $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

3.b.6 Una carica elettrica Q si muove con velocità costante su una retta con velocità costante:

$$\begin{aligned} x &= Vt \\ y &= b \\ z &= 0. \end{aligned}$$

Calcolare in funzione del tempo il campo elettrico ed il campo magnetico generato dalla carica nel punto O e produrre il grafico di ognuna delle 6 componenti trovate in funzione del tempo t.

Il calcolo del campo elettrico è stato affrontato nella Domanda 3.a.15, per sfruttarlo aggiungiamo che in quel caso era la carica a passare per l'origine, mentre l'osservatore a distanza b. Per simmetria invertendo osservatore e carica si ottiene lo stesso risultato della domanda citata, ovvero:

$$\begin{aligned} E_x &= -e \frac{\gamma vt}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} \\ E_y &= e \frac{b\gamma}{(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}} \\ E_z &= 0. \end{aligned}$$

Calcoliamo quindi il campo magnetico come $\mathbf{B} = \beta \wedge \mathbf{E} = v/c \cdot E_y \hat{z}$:

$$B_z = e \frac{b\gamma}{c(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Per avere un quadro degli andamenti basta quindi plottare i campi elettrici. Al variare di β nel seguente plot si riporta come questi ultimi si modificano (con la convenzione che la linea si assottiglia mano a mano che β aumenta).

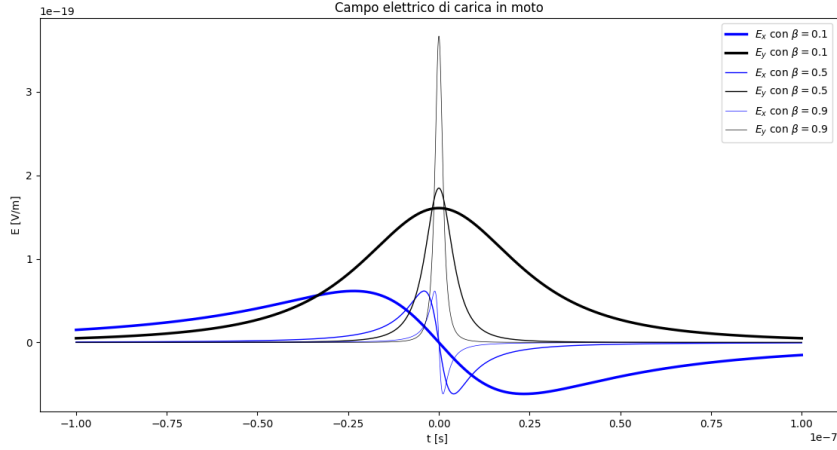


Figura 14: Campi elettrici generati da una carica in moto

Da notare che il campo lungo y diventa sempre più stretto e piccato all'aumentare di β (di conseguenza anche il campo magnetico, soltanto che questo è rifatto di un fattore β).

3.b.7 Scrivere in forma covariante l'equazione del moto di una carica in un campo elettromagnetico esterno ("quadri-forza di Lorentz").

Analizziamo il caso di una particella puntiforme, l'equazione relativistica (tridimensionale) del moto è:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right).$$

Nella quale l'impulso spaziale è $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$.

È quindi ragionevole pensare che si debba sfruttare il 4-impulso $p^\mu = mu^\mu$ con $u^\mu = \gamma(c, \mathbf{v})$, ed il tensore dei campi già introdotto nelle domande precedenti, ovvero l'entità che contiene tutte le informazioni necessarie dei campi e che viene da un formalismo covariante. Per procedere si cerca quindi una equazione della forma:

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = NF^{\mu\nu}u_\nu.$$

Cercando una normalizzazione N ragionando sulle dimensioni: per trarre una forza dall'espressione di destra ci serve una carica a moltiplicare ed una velocità a dividere, si prova ad utilizzare $\frac{e}{c}$. Si prova quindi componente per componente:

$$\begin{aligned} F^{0i}u_i &= -E_i \cdot (-\gamma v_i) = \gamma \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \\ F^{i\alpha}u_\alpha &= F^{i0}u_0 + F^{ij}u_j = E_i c\gamma - \epsilon_{ijk} B_k (-\gamma v_j) = \\ &= c\gamma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{B} \right). \end{aligned}$$

Considerando il fatto che

$$dt = \gamma d\tau$$

si ha che li componenti spaziali (le seconde calcolate) danno proprio l'equazione del moto.

Considerando invece che $P^\mu = (\varepsilon/c, \mathbf{p})$ si ha che la componente temporale rappresenta il teorema delle forze vive:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}.$$

3.b.8 Dimostrare che la forza di reazione radiativa è:

$$\mathbf{F}_{\text{rad}} = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{\mathbf{a}} = z^2 m_e \tau_e \dot{\mathbf{a}} \quad \text{con } \tau_e = \frac{2r_e}{3c} = (6.2 \cdot 10^{-24}) \text{ s.}$$

Indicare inoltre il campo di applicazione di quest'ultima.

La dimostrazione euristica e non relativistica è stata affrontata nella Domanda 2.a.15 insieme ai campi di applicazione (moto periodico).

3.b.9 Dare la definizione del "tensore energia-impulso" del campo elettromagnetico e scrivere la sua relazione con la "densità di forza di Lorentz".

Il tensore energia impulso è definito come:

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right).$$

Dove $\eta^{\mu\nu}$ è il tensore metrico $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Per inquadrarlo meglio lo si può vedere sotto forma di matrice:

$$\Theta = \left(\begin{array}{c|c} u_{\text{em}} & \mathbf{S} \\ \hline \mathbf{S} & -T_{\text{Maxwell}} \end{array} \right).$$

Tale tensore è legato alla densità di forza di Lorentz da:

$$\partial_{\mu} \Theta^{\mu\nu} + f^{\nu} = 0.$$

Dove la densità di forza di Lorentz ricordiamo essere:

$$f^{\nu} = \frac{1}{c} F^{\mu\nu} j_{\mu} = \left(\frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}}{c}, \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j} \wedge \mathbf{B} \right).$$

3.b.10 Dire come si generalizzano i teoremi di conservazione dell'energia e dell'impulso a situazioni in cui sia presente un campo elettromagnetico.

Nel caso dell'energia si ha (CGS):

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} (E^2 + B^2) + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}.$$

Nel caso dell'impulso invece:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}) + \nabla \cdot \mathbf{T} = -\left(\rho \mathbf{E} + \frac{\mathbf{j}}{c} \wedge \mathbf{B} \right).$$

Con \mathbf{T} tensore degli stress di Maxwell.

Entrambe le equazioni sono generalizzate al caso relativistico dalla Equazione che lega la densità di forza di Lorentz al tensore energia impulso.

3.b.11 Scrivere il tensore degli sforzi per un'onda e.m. piana che si propaga in una direzione definita come \hat{n} .

Il tensore degli stress è definito come:

$$\mathbf{T} = \mathbb{I} u_{\text{em}} - \frac{1}{4\pi} (\mathbf{E} \otimes \mathbf{E} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{B})$$

Oppure con gli indici:

$$T^{ij} = \delta^{ij} u_{\text{em}} - \frac{1}{4\pi} (E^i E^j + B^i B^j)$$

Con

$$u_{\text{em}} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2) = \frac{1}{8\pi} (E_i E_i + B_j B_j).$$

Quindi con un'onda piana che propaga nella direzione \hat{n} si ha sempre (con una opportuna rotazione del sistema di riferimento) che

$$T^{ij} = n^i n^j u_{\text{em}}.$$

Per verificarlo basta scegliere il sistema di riferimento in cui l'onda piana propaga nella direzione $\hat{x} = \hat{n}$, in questo modo si ha:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= E_0 \hat{y} e^{ikx - i\omega t} \\ \mathbf{B} &= E_0 \hat{z} e^{ikx - i\omega t}.\end{aligned}$$

Da cui segue immediatamente che

$$T^{ij} = \delta^{ij} \frac{E_i E_i + B_i B_i}{8\pi} - \frac{1}{4\pi} (E^i E^j + B^i B^j)$$

Non ci scordiamo che E_i è diverso da zero solo con $i = 1$ (ovvero per la componente y), allo stesso modo B_i è diverso da zero solo con $i = 2$. Questo comporta che il secondo termine (quello con il segno meno nella espressione sopra) non si annulla solo per il secondo ed il terzo elemento diagonale (yy e zz) in cui vale u_{em} , tuttavia in entrambi i casi questi vengono annullati dalla presenza del primo termine (che è anche esso diagonale). Infatti, essendoci una δ , il primo termine si collocherà nella matrice T solo sugli elementi diagonali, portando in ognuno di essi lo stesso scalare u_{em} .

Se ne conclude che:

$$T^{ij} = u_{\text{em}} n^i n^j.$$

Dove il prodotto scalare tra n^i e n^j è solo un modo compatto per esprimere la matrice che scriveremo tra poco.

$$\hat{n} = \begin{pmatrix} i = 0 \implies 1 \\ i = 1 \implies 0 \\ i = 2 \implies 0 \end{pmatrix}.$$

Facendo scorrere gli indici e provando a combinarli si trova la forma matriciale di T :

$$T = u_{\text{em}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.b.12 Scrivere esplicitamente il 4-tensore impulso-energia per un'onda elettromagnetica piana monocromatica che si propaga lungo l'asse x con densità di energia u_{em} .

Utilizzando i risultati della domanda 3.b.9 e 3.b.11 possiamo dire che:

$$\Theta = \begin{pmatrix} u_{\text{em}} & u_{\text{em}} & 0 & 0 \\ u_{\text{em}} & -u_{\text{em}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Riconosciamo nella matrice 3x3 in basso a destra il tensore degli stress calcolato in precedenza con il segno cambiato, in alto a sinistra la densità di energia ed ai lati il vettore di Poynting con la densità di energia collocata nella direzione di propagazione.

3.b.13 Ricavare l'espressione per i potenziali di Lienard-Wiechert (ϕ ed \mathbf{A} per una carica puntiforme in moto arbitrario) a partire dai potenziali ritardati.

Ricordiamo l'espressione dei potenziali ritardati:

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3 r' .\end{aligned}$$

Sia Q una carica che si muove con la legge oraria $\mathbf{s}(t)$, le densità di carica e di corrente ad essa associate sono:

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r}, t) &= q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)) \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= q\dot{\mathbf{s}}(t)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)).\end{aligned}$$

Il tempo ritardato è definito come al solito:

$$c(t - t') = |\mathbf{r} - \mathbf{s}(t')|.$$

Si procede quindi al calcolo del potenziale scalare, il calcolo del potenziale vettore è del tutto analogo.

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = q \int \frac{\delta^3(\mathbf{r}' - \mathbf{s}(t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'.$$

Si può quindi utilizzare la proprietà della delta :

$$\int \delta(f(x)) dx \stackrel{f(x)=y}{=} \int \delta(y) \frac{1}{|f'|} dy = \frac{1}{|f'|} \Big|_{f(x)=0}.$$

Ricordandoci che lo stiamo applicando ad un caso vettoriale, concentriamoci sul cambio di variabile (prima uguaglianza della relazione sopra) nel nostro integrale abbiamo:

$$f(\mathbf{r}') = \mathbf{r}' - \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right).$$

Nel calcolo della derivata consideriamo direttamente il fatto che, rimanendo una δ all'interno dell'integrale dopo il cambio di variabile, l'integrale verrà calcolato nei punti in cui la δ si annulla. Nel nostro caso si annulla in $\mathbf{r}' = \mathbf{s}(t')$, quindi calcoleremo la derivata di f direttamente nel punto di annullamento della δ rimanendo astratti nella formulazione dell'integrale. E necessario anche notare che la parametrizzazione

$$\hat{t} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}$$

è tanto valida quanto quella del tempo ritardato, deriveremo rispetto a questo tempo applicando le regole di derivazione di funzioni composte:

$$\begin{aligned}f'(\mathbf{r}')|_{\mathbf{r}'=\mathbf{s}(t')} &= \left[1 - \frac{\partial \mathbf{s}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{\partial \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{s}(t')} = \\ &= \left[1 - \frac{\mathbf{v}\left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{c} \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]_{\mathbf{r}'=\mathbf{s}(t')} = \\ &= 1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{n}.\end{aligned}$$

Inoltre è necessario scrivere il denominatore dell'integranda in funzione della nuova variabile y , senza perdere di generalità possiamo scriverlo come :

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = |\mathbf{r} - f^{-1}(y)|.$$

Detto ciò l'integrale diventa:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = q \int \frac{\delta(y)}{|\mathbf{r} - f^{-1}(y)|} \frac{1}{|f'(y)|} dy.$$

Applicando la δ esce dall'integrale un termine $f^{-1}(y = 0)$; non è necessario esplicitarlo, basta applicare nuovamente l'operatore di inversione per farlo tornare \mathbf{r}' calcolato in $\mathbf{s}(t')$. Si conclude quindi che:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)| (1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \hat{n})} \right]_{t=t'}.$$

Analogamente possiamo ricavare il potenziale vettore:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \left[\frac{q\boldsymbol{\beta}(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{s}(t)| (1 - \boldsymbol{\beta}(t) \cdot \hat{n})} \right]_{t=t'}.$$

3.b.14 Calcolare la potenza totale irraggiata da una carica accelerata in moto non relativistico. Esprimere i risultati in MKSA e nelle unità “naturali”.

Il campo elettrico di una carica in zona di radiazione è (nell'approssimazione non relativistica):

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) R} \right]_{\text{rit}} \approx \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{rit}}$$

Essendo il campo $\mathbf{B} = \hat{n} \wedge \mathbf{E}$ dal calcolo del vettore di Poynting si conclude che (conto affrontato nella domanda Domanda 3.b.3):

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 |\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{4\pi c}.$$

Integrando sull'angolo solido si ottiene che (sistema di riferimento con coordinate sferiche):

$$P = \frac{2q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{3c}.$$

In MKSA si ottiene:

$$P = \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{\beta}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c}.$$

3.b.15 Ricavare la formula di Larmor relativistica

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 (|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\beta}|^2).$$

a partire dalla formula non relativistica ed utilizzando argomenti di invarianza relativistica.

L'equazione non relativistica è quella ricavata nella domanda precedente.

La potenza deve essere un invariante relativistico. Infatti è definita dal rapporto tra un'energia ed un tempo, entrambe prime componenti di un quadriettore e quindi entrambe trasformanti allo stesso modo (come un tempo).

Conviene allora sfruttare l'invariante $a^\mu a_\mu$, con a^μ quadriaccelerazione definita da:

$$a^\mu = \begin{pmatrix} \gamma^4 \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}, & \gamma^2 \mathbf{a} + \gamma^4 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}.$$

Possiamo provare a vedere se la quantità giusta è:

$$P = -\frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3} a^\mu a_\mu.$$

Che è un invariante di Lorentz e soprattutto coincide con la formula non relativistica. Proviamo a vedere se torna con il caso cercato:

$$\begin{aligned} a^\mu a_\mu &= \gamma^4 \left(\gamma^4 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - |\mathbf{a} + \gamma^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta}) \boldsymbol{\beta}|^2 \right) = \\ &= \gamma^4 \left(\gamma^4 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - \gamma^4 |\boldsymbol{\beta}|^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - |\mathbf{a}|^2 - 2\gamma^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 \right) = \\ &= \gamma^4 \left(-\gamma^2 (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - |\mathbf{a}|^2 \right) = \\ &= \gamma^6 \left(|\boldsymbol{\beta}|^2 \cdot |\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\beta})^2 - |\mathbf{a}|^2 \right) = \\ &= \gamma^6 \left(|\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\beta}|^2 - |\mathbf{a}|^2 \right). \end{aligned}$$

Da cui se ne conclude che la quantità provata è quella giusta.

3.b.16 Dimostrare che la radiazione di sincrotrone ha uno spettro di emissione con una frequenza “critica” $\omega_u \approx \omega_0 \gamma^3$.

Per arrivare al risultato costruiamo geometricamente la situazione di osservazione:

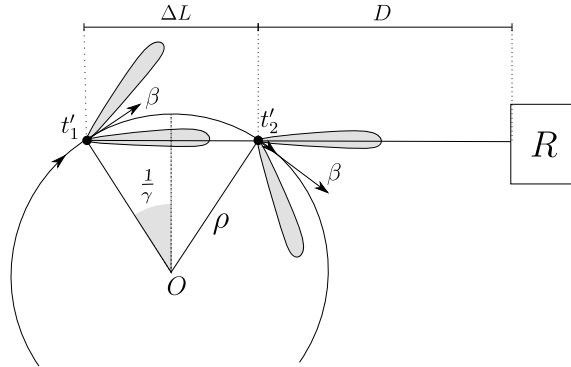


Figura 15: Schema di rilevamento della Luce di Sincrotrone

Alla posizione R di Figura c'è un rivelatore di radiazione elettromagnetica, la circonferenza rappresentata è la traiettoria della particella nell'acceleratore. Si rappresentano gli istanti t'_1 e t'_2 in cui la radiazione (che può essere rilevata da R) viene emessa dalla sorgente. Se la radiazione emessa in tali istanti viene rilevata allora arriva al rivelatore rispettivamente agli istanti t_1 e t_2 , questa notazione induce le relazioni:

$$t_1 = t'_1 + \frac{\Delta L + D}{c}$$

$$t_2 = t'_2 + \frac{D}{c} = t'_1 + \frac{\Delta L}{V} + \frac{D}{c}.$$

Possiamo allora dare una stima del tempo in cui si osserva la radiazione come:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_2 - t_1 = \\ &= \frac{\Delta L}{V} - \frac{\Delta L}{c} = \\ &= \Delta L \left(\frac{1}{\beta c} - \frac{1}{c} \right). \end{aligned}$$

Adesso dobbiamo sfruttare il fatto che per particelle che viaggiano a velocità relativistiche $1/\gamma \approx 1$, quindi l'angolo in figura taglierà un arco di circonferenza piccolo rispetto alle dimensioni dell'apparato. Quindi:

$$\Delta L \approx \frac{2\rho}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \Delta t \approx \frac{2\rho}{\gamma} \left(\frac{1-\beta}{\beta c} \right).$$

Infine moltiplicando e dividendo per $1+\beta$:

$$\Delta t = \frac{2\rho}{\gamma\beta c} \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta} \right) \approx \frac{\rho}{c\gamma^3}.$$

Logicamente se l'impulso dura Δt significa che lo spettro angolare di radiazione si estende fino ad una frequenza critica:

$$\omega_c \sim \frac{1}{\Delta t} = \frac{c\gamma^3}{\rho} = \omega_0 \gamma^3.$$

3.b.17 Calcolare il fattore di forma elettromagnetico per una sfera uniformemente carica di raggio a .

La sfera di raggio a uniformemente carica avrà una distribuzione di carica esprimibile come:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{3Q}{4\pi a^3} & \text{se } |\mathbf{r}| < a \\ 0 & \text{se } |\mathbf{r}| > a \end{cases}.$$

Per un dato valore di q scegliamo delle coordinate sferiche aventi l'asse polare diretto lungo q stesso, si calcola quindi il fattore di forma come:

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{q}) &= \frac{\int \rho(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r}{\int \rho(\mathbf{r}) d^3r} \\
 &= \frac{1}{Q} \int_0^a dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho(r) e^{-irq \cos \theta} r^2 \sin \theta \\
 &= \frac{2\pi}{Q} \int_0^a \int_1^{-1} \rho(r) e^{-irq \cos \theta} r^2 |d \cos \theta| dr = \\
 &= \frac{4\pi}{Q} \int_0^a \rho(r) r^2 \frac{\sin(qr)}{qr} dr = \\
 &= \frac{3}{a^3 q} \int_0^a r \sin(qr) dr = \\
 &= \frac{3}{a^3} \left(-\frac{1}{q} r \cos(qr) + \frac{1}{q^2} \sin(qr) \right) \Big|_0^a = \\
 &= 3 \left(\frac{\sin(aq)}{(aq)^3} - \frac{\cos(aq)}{(aq)^2} \right).
 \end{aligned}$$

In quest'ultima si può notare che, grazie alla simmetria del sistema sotto rotazioni, $F(\mathbf{q}) = F(q)$

3.b.18 Calcolare il fattore di forma per una superficie sferica uniformemente carica di raggio a . [nota: l'interno è vuoto]

In tal caso la densità di carica si può esprimere come:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\mathbf{r}| < a \\ \frac{Q}{4\pi a^2} & \text{se } |\mathbf{r}| = a \\ 0 & \text{se } |\mathbf{r}| > a \end{cases}.$$

Procedendo come sopra senza interare su r si ottiene:

$$F(q) = \frac{3 \sin(aq)}{a^2 q}.$$

3.b.19 Calcolare la velocità di un elettrone [e successivamente di un protone] posto in una struttura acceleratrice che abbia:

- 1) Campo elettrico longitudinale costante.
- 2) Campo elettrico longitudinale oscillante.

Inserendo valori numerici ragionevoli, calcolare il tempo affinché la particella, partendo da ferma, raggiunga una energia pari al doppio della sua massa a riposo.

Supponiamo la struttura lineare, l'equazione di moto di una particella nel campo dell'acceleratore è:

$$\frac{d}{dt}(p_x) = qE \implies \frac{d}{dt}(\gamma\beta) = \frac{qE}{mc}.$$

Campo elettrico costante Nel caso di campo costante l'equazione si risolve con:

$$\gamma\beta = \frac{qE}{mc} \cdot t = \frac{t}{\tau}.$$

Per trovare la velocità (quindi β) dobbiamo esplicitare γ nella precedente:

$$\frac{\beta^2}{1 - \beta^2} = \frac{t^2}{\tau^2} \implies \beta = \frac{t}{\sqrt{t^2 + \tau^2}}.$$

Da cui l'energia:

$$E = mc^2\gamma = mc^2\sqrt{1 + \frac{t^2}{\tau^2}}.$$

Ne segue che per avere una energia che sia il doppio di quella a riposo bisogna imporre:

$$2 = \sqrt{1 + \frac{\Delta t^2}{\tau^2}} \implies \Delta t = \sqrt{3}\tau \approx \begin{cases} 10^{-11} & \text{per l'elettrone} \\ 10^{-7} & \text{per il protone} \end{cases}.$$

Nella stima numerica è stato preso il valore tipico di campo elettrico per un acceleratore lineare di 50 MeV/m.

Campo elettrico oscillante Gli acceleratori costruiti con questo metodo accelerano le particelle solo nel semiperiodo in cui il campo elettrico è diretto nella direzione in cui è attesa la accelerazione, per far ciò si alternano zone in cui il campo è presente a zone in cui invece non lo è.

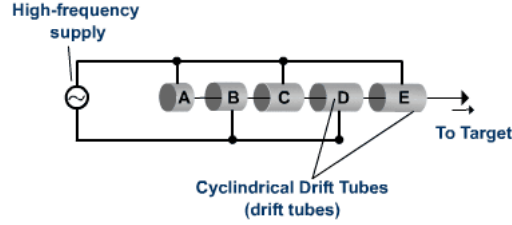


Figura 16: Drift Tube in un acceleratore lineare

Prendiamo adesso un campo elettrico del tipo :

$$E = E_0 \sin\left(\frac{\pi t}{\tau'}\right).$$

Non possiamo più applicare il metodo utilizzato sopra, potremmo in qualche modo cercare di discretizzare il problema mediando l'equazione del moto su un semiperiodo (per i motivi spiegati all'inizio), la variabile diventa allora il tempo impiegato a fare un semiperiodo τ' :

$$\Delta(\beta\gamma) = \frac{qE_0}{mc} \int_0^{\tau'} \sin\left(\frac{\pi t}{\tau'}\right) dt = \frac{2qE_0\tau'}{\pi mc}.$$

Quindi ogni volta che la particella attraversa un Drift tube subisce una variazione di $\gamma\beta$ come quella scritta sopra. Se parametrizziamo il modulo del campo elettrico iniziale come:

$$E_0 \rightarrow \frac{2E_0}{\pi} = E'_0.$$

ci si accorge che il risultato non è tanto differente da quello incontrato nel caso di campo costante (ipotizziamo sempre che la particella sia idealmente ferma nel momento dell'accensione del campo).

$$\Delta\gamma\beta = \gamma_{\text{fin}}\beta_{\text{fin}} = \frac{qE'_0}{mc}\tau' = \frac{\tau'}{\hat{\tau}}.$$

con $\hat{\tau} = \frac{qE'_0}{mc}$.

Notiamo che se vogliamo la quantità $\gamma\beta$ dopo che la particella ha attraversato n Drift Tube basta sommare n volte la quantità $\tau'/\hat{\tau}$. calcoliamo la velocità della particella all'uscita dell'ennesimo Drift Tube sfruttando il calcolo effettuato in precedenza:

$$\beta = \frac{n\tau'}{\sqrt{\hat{\tau}^2 + n^2\tau'^2}}.$$

E in modo analogo l'energia:

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{n^2\tau'^2}{\hat{\tau}^2}}.$$

La ricerca del tempo in cui la particella raggiunge il doppio dell'energia a riposo richiede questa volta una piccola considerazione aggiuntiva: per ogni semi periodo trascorso in presenza del campo elettrico ve ne è uno trascorso all'esterno dei Drift Tube. Dobbiamo quindi aggiungere al tempo necessario all'interno dei drift tube (sempre in termini di semi periodi) il tempo trascorso all'esterno senza campo elettrico ed a velocità costante.

$$n\tau' + n\tau' = \sqrt{3}\hat{\tau} \implies 2n\tau' = \sqrt{3}\hat{\tau}.$$

E chiamando $2\tau' = T$ il periodo di oscillazione si ha:

$$nT = \sqrt{3} \frac{2qE_0}{\pi mc}.$$

I tempi in cui si riesce a raddoppiare l'energia hanno la stessa espressione (fattore $\frac{2}{\pi}$ a parte), visto che le tensioni che si riesce a raggiungere nei due casi sono simili anche il valore numerico di tali tempi non differisce di molto.

3.b.20 A partire dai campi ritardati, dimostrare che

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 |\mathbf{a}|^2 \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 (1 - \beta \cos \theta)^5}.$$

è la potenza (MKSA) irradiata da una carica accelerata in un moto rettilineo.

I campi ritardati citati nel testo sono:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R} \right]_{\text{rit}}.$$

Nel caso affrontato essendo il moto rettilineo velocità ed accelerazione sono parallele, quindi:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R} \right]_{\text{rit}}.$$

Come sempre si può ricavare il vettore di Poynting utilizzando il modulo quadro del campo elettrico:

$$\mathbf{S}(t) = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|_{\text{rit}}^2 \hat{n} = \frac{q^2}{4\pi c} \left| \frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3 R^2} \right|_{\text{rit}}^2 \hat{n}.$$

In questo modo si ha il vettore di Poynting parametrizzato per unità di tempo, infatti con questo potremmo calcolare l'energia che attraversa l'elemento infinitesimo di area come:

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathbf{S}(t) \cdot \hat{n}.$$

Se nell'integrale facciamo il cambio di variabile

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{dt}{dt'} \mathbf{S}(t(t')) \cdot \hat{n}.$$

Possiamo ridefinire l'integranda come la potenza irradiata istantaneamente dalla particella

$$\frac{dW}{dt'} = \frac{dt}{dt'} \mathbf{S}(t(t')) \cdot \hat{n}.$$

calcolata al tempo in cui la radiazione viene emessa e non al tempo ritardato, ovvero esattamente quella che vogliamo considerare. Lo Jacobiano di questo cambio di variabile è (calcolato nella Domanda 3.b.1):

$$\frac{dt}{dt_{\text{rit}}} = 1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta}.$$

Quindi la potenza irradiata per unità di angolo solido tornando in MKSA è (come già visto nella Domanda 3.b.3):

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= |\mathbf{S}| R^2 = \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \left| \frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|^2 (1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) = \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{|\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})|^2}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^5}. \end{aligned}$$

Per concludere la dimostrazione manca adesso il sistema di riferimento in coordinate sferiche, facendo riferimento alla seguente figura

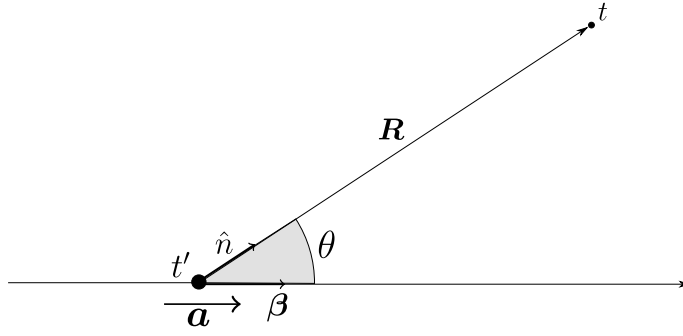


Figura 17: Sistema di riferimento per una carica accelerata linearmente.

è facile concludere l'uguaglianza tra la formula trovata in forma vettoriale sopra e quella richiesta nel testo.

3.b.21 Calcolare l'energia persa in una rivoluzione per una carica in moto uniforme su una circonferenza (acceleratore circolare). Calcolare la frazione di energia persa in un giro rispetto alla sua energia cinetica, effettuando una valutazione numerica, nel caso di elettroni a LEP (energia 50 GeV, raggio 4km) o protoni ad LHC (energia 7 TeV, raggio 4km). Nota: utilizzare la formula di Larmor in GCS:

$$P = \frac{2q^2}{3c^3} \gamma^6 (|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{a} \wedge \boldsymbol{\beta}|^2) .$$

Sia a l'accelerazione radiale della particella nel suo moto, R il raggio di curvatura totale e R_B il raggio di curvatura nel tratto esclusivamemnte composto da zone con campo magnetico (quelle adibite a curvare).

Nel caso di moto uniforme su una circonferenza abbiamo visto nella Domanda 3.a.21 che la formula di Larmor si può riscrivere come (CGS):

$$P = \frac{2\gamma^4 \beta^4}{3} \frac{q^2 c}{R_B^2} .$$

O anche, per effettuare stime numeriche, in MKSA:

$$P = \frac{\gamma^4 \beta^4}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2 c}{R_B^2} .$$

Per una stima della energia persa al giro in irraggiamento dobbiamo considerare solo le zone in cui vi è accelerazione di carica, quindi le zone di curvatura in cui vi è un campo magnetico. Tale tempo, se la particella viaggia a velocità costante è:

$$T_B = \frac{2\pi R_B}{\beta c} .$$

Quindi la variazione di energia sul giro (aggiungiamo e togliamo termini per renderla più interpretabile):

$$\begin{aligned} \Delta E &= P \cdot T_B = \\ &= \frac{\gamma^4 \beta^4}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2 c}{R_B^2} \frac{2\pi R_B}{\beta c} = \\ &= \frac{4\pi}{3} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m_e c^2} m_e c^2 \frac{\beta^3 \gamma^4}{R_B} \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(\frac{r_e}{R_B} \right) m_e c^2 \beta^3 \gamma^4 \end{aligned}$$

Possiamo quindi già fare una prima stima numerica lasciando liberi i parametri che variano nei due casi:

$$\Delta E \approx 4 \cdot 2.8 \text{ [fm]} \cdot 0.51 \text{ [MeV]} \frac{\beta^3 \gamma^4}{R_B} \approx 5.6 \text{ [fm]} \cdot \text{[MeV]} \frac{\beta^3 \gamma^4}{R_B}.$$

Con i dati del testo possiamo calcolare le quantità necessarie alla stima di γ e β :

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}}.$$

Acceleratore LEP In tal caso si ha $\gamma = (50 \cdot 10^3)/0.51 \approx 10^5$, $\beta \approx 1$ quindi:

$$\Delta E \approx \frac{5.6 \cdot 10^{-15}}{4 \cdot 10^3} \cdot 10^{20} \text{ [MeV]} = 1.4 \cdot 10^2 \frac{\text{[MeV]}}{\text{giro}} = 0.14 \frac{\text{[GeV]}}{\text{giro}}.$$

Che da quindi una frazione di energia persa per giro di $\Delta E/E \approx 0.3\%$

Acceleratore LHC La massa del protone fa la differenza su γ e su β :

$$\gamma = \frac{7 \cdot 10^6 \text{ [MeV]}}{9.383 \cdot 10^2 \text{ [MeV]}} \approx 7.5 \cdot 10^3$$

$$\beta \approx \sqrt{1 - 10^{-8}} \approx 1.$$

Per l'energia quindi:

$$\Delta E \approx \frac{5.6 \cdot 10^{-15}}{4 \cdot 10^3} (7.5 \cdot 10^3)^4 \text{ [MeV]} \sim \text{[eV]}.$$

Da cui si deduce che la frazione di energia persa per irraggiamento nel caso di protoni è pressochè nulla.

3.b.22 Calcolare la potenza emessa in funzione dell'angolo per una carica oscillante armonicamente in linea retta (termine di dipolo elettrico)

Potremmo riallacciarsi al campo di radiazione del dipolo sempre passando per i campi di radiazione di Lieneard-Wiechert nell'approssimazione non relativistica:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) &\approx \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{n} \wedge (\hat{n} \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}})}{R} \right]_{\text{rit}} \\ &= \frac{q}{c^2 R} [(\ddot{\mathbf{x}} \wedge \hat{n}) \wedge \hat{n}]_{\text{rit}} \\ &= \frac{1}{c^2 R} ([\ddot{\mathbf{p}}]_{\text{rit}} \wedge \hat{n}) \wedge \hat{n}. \end{aligned}$$

Dove \mathbf{p} è il momento di dipolo oscillante del tipo: $\mathbf{p} = q x_0 e^{i\omega t} \hat{x}$, preso in questo caso (a titolo di esempio) nella direzione \hat{x} .

Abbiamo visto in precedenza (Domanda 3.b.3) che la potenza irradiata per unità di angolo solido si può esprimere come:

$$\frac{dP}{d\Omega} = R^2 |\mathcal{S}| = R^2 \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2.$$

Chiamando quindi θ l'angolo tra la direzione di oscillazione \hat{x} e la direzione di osservazione \hat{n} possiamo esprimere i prodotti vettoriali in funzione di tale angolo, inoltre la doppia derivata fa scendere un fattore ω^2 , se ne conclude che:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{|\mathbf{p}|^2 \omega^4}{4\pi c^3} \sin^2 \theta.$$

3.b.23 Calcolare, a partire dalla formula di Larmor relativistica, la potenza totale dissipata in un acceleratore lineare in funzione di $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ oppure di $\frac{dE}{dx}$ (energia fornita per unità di lunghezza). Dimostrare che la frazione di energia persa nell'accelerazione è trascurabile, fornendo adeguati valori numerici nel caso di accelerazione di elettroni o protoni.

Come visto nella Domanda 3.a.21 la potenza dissipata per irraggiamento in un acceleratore lineare è:

$$P = \frac{q^2 \gamma^6}{6\pi \epsilon_0 c^3} |\mathbf{a}|^2 = \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3 m^2} \left| \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right|^2.$$

Infatti per la componente spaziale del quadrimpulso si ha:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{dmv\gamma}{dt} = \\ &= m\alpha\gamma + mv\frac{d\gamma}{dt} = \\ &= m\alpha\gamma + m\alpha\beta^2\gamma^3 = \\ &= m\alpha\gamma^3.\end{aligned}$$

Inoltre siamo andati subito in una dimensione essendo il moto unidimensionale. Se la volessimo in funzione della variazione lineare di energia potremmo sfruttare la relazione:

$$\begin{aligned}c\frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt}\sqrt{E^2 - m^2c^4} = \\ &= \frac{2E}{2\sqrt{E^2 - m^2c^4}} \frac{dE}{dt} = \\ &= \frac{E}{cp} \frac{dE}{dt} = \\ &= \frac{mc^2\gamma}{mv\gamma c} \frac{dE}{dt} = \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{dE}{dt} = \\ &= c \frac{dE}{dx}.\end{aligned}$$

Quindi si otterrebbe il medesimo risultato.

L'uguaglianza tra le due variazioni ci è utile invece per calcolare f_{rad} : la frazione di energia persa rispetto all'incremento di energia:

$$\begin{aligned}f_{\text{rad}} &= \frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \\ &= \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 \frac{1}{v \frac{dE}{dx}} = \\ &= \frac{2}{3\beta} \frac{r_e \left(\frac{dE}{dx}\right)}{mc^2}.\end{aligned}$$

Si vede che questa è trascurabile sempre, infatti in una distanza dell'ordine dei fm non si riescono ad ottenere variazioni di energia dell'ordine di mc^2 .

La domanda del testo era invece la frazione di energia persa \hat{f} , la calcoliamo sempre a partire dalla formula di Larmor:

$$P = \frac{q^2}{6\epsilon_0 c^3} \gamma^6 a^2 = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{m^2} \left(\frac{dp}{dt}\right)^2$$

sia E_0 il modulo del campo elettrico applicato, si ha sempre dall'equazione di moto:

$$\frac{dp}{dt} = qE_0.$$

Introducendo questa nella potenza irradiata:

$$P = \frac{q^4 E_0^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}.$$

Il calcolo da effettuare per ottenere \hat{f} è dato dalla Potenza irradiata diviso la potenza totale necessaria a portare la particella ad una energia E_f all'interno di un acceleratore lineare:

$$\hat{f} = \frac{P \cdot t_f}{E_f}.$$

Dove t_f è il tempo necessario a raggiungere l'energia finale E_f . Si risolve se t_f è lineare in E_f , calcoliamo questo tempo seguendo la linea di quanto fatto nella Domanda 3.b.19:

$$\gamma_f = \sqrt{1 + \left(\frac{t_f}{\tau}\right)^2} \implies t_f = \tau \sqrt{\gamma_f^2 - 1} \approx \tau \cdot \gamma_f = \frac{mc}{qE_0} \cdot \frac{E_f}{mc^2} = \frac{E_f}{qE_0 c}.$$

Otteniamo quindi che:

$$\hat{f} = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^2} \frac{E_0}{q} = \frac{E_0}{E_{\text{crit}}}.$$

Concentriamoci su E_{crit} , nel caso di elettroni:

$$E_{\text{crit}} = q \frac{6\pi\epsilon_0 m^2 c^4}{q^4} = \frac{3}{2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_e^2} \approx 2.7 \cdot 10^{20} \frac{[\text{V}]}{[\text{m}]}.$$

Quindi non c'è speranza, si raggiungono al massimo i MV/m: trascurabile.

Nel caso di protoni invece non occorre nemmeno fare il conto: basta guardare l'espressione di \hat{f} , dipende inversamente dalla massa, se è trascurabile per gli elettroni lo è anche per i protoni.

3.b.24 Calcolare la lunghezza d'onda critica della radiazione di sincrotrone (elettroni) nei casi seguenti:

i) energia=50GeV, raggio=4km;

ii) energia=5GeV, raggio=30m

La frequenza critica è stata calcolata nella Domanda 3.b.16, la lunghezza d'onda critica che ne deriva è:

$$\lambda_c = \frac{2\pi c}{\omega_c} = \frac{2\pi \rho}{\gamma^3}.$$

con ρ raggio dell'acceleratore.

Caso i) $\gamma \approx 10^5 \implies \lambda_c \approx 0.25 \text{ A}^\circ$

Caso ii) $\gamma \approx 10^4 \implies \lambda_c \approx 1.8 \text{ A}^\circ$

3.b.25 Enunciare il teorema ottico e spiegarne il significato fisico nel caso di radiazione elettromagnetica su un ostacolo opaco.

Si consideri un'onda elettromagnetica $\mathbf{E}_{in} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega t - k z)}$ incidente su un bersaglio opaco ortogonalmente. Tale "interazione" produce una onda sferica rifratta che può essere scritta come:

$$\mathbf{E}_s = \frac{e^{-i(\omega t - k r)}}{r} \mathbf{f}(\mathbf{k}).$$

Dove $\mathbf{f}(\mathbf{k})$ è l'ampiezza di scattering: racchiude tutta la dinamica del processo diffrattivo.

Si ha che la potenza dissipata in tutto il processo di scattering è:

$$P_{\text{diss}} = \frac{c}{2k} \text{Im}[\mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{f}(k\hat{z})].$$

Che è l'enunciato del teorema ottico.

Alcune volte il teorema si trova enunciato anche utilizzando la sezione d'urto totale, il legame tra gli enunciati è ovviamente modulo mediato del vettore di Poynting che va a dividere la P_{tot} per ottenere σ_{tot} .

3.b.26 Come si ricava la sezione d'urto differenziale Rayleigh a partire dalla sezione d'urto Thomson ?

Nello scattering Thompson si ha che, per un fotone che incide su un elettrone:

$$\left. \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} \right|_{\text{el}} = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{\text{tot}}^2(\omega)} \sin^2 \alpha.$$

Con α angolo tra la direzione di polarizzazione del campo e direzione di osservazione. Per il resto della notazione facciamo riferimento alle domande 2.a.15 e 2.a.16.

Lo scattering Rayleigh serve invece nel caso di più centri scatteranti, come ad esempio un'onda incidente su un atomo, in tal caso è necessario introdurre nel calcolo della potenza irradiata l'effetto della possibile interferenza tra i campi generati dai vari elettroni.

A questo scopo nasce il fattore di forma, tiene di conto di tali interferenze, in modo tale che se avessimo una distribuzione ρ di carica con $\int \rho(\mathbf{r}) d^3 r = Q$ il campo generato da questa non sarebbe altro che il campo di una carica puntiforme Q moltiplicato per $F(\mathbf{q})$ della distribuzione.

Risulta quindi chiaro che l'unica correzione da aggiungere allo scattering dell'elettrone singolo è proprio il modulo quadro di questo fattore moltiplicato per il numero di elettroni presenti nell'atomo: lo scattering Rayleigh risulta:

$$\frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{\text{el}}}{d\Omega} \Big|_{\text{el}} |ZF(\mathbf{q})|^2.$$

Parte 4

Interazione radiazione-materia

a Domande a

4.a.1 Quale e' la relazione fra lo spessore di un materiale, espresso in cm, e lo spessore espresso in g/cm² ?

La relazione tra X [cm] e X' [g/cm²] consiste in:

$$X\rho = X'.$$

Dove ρ è la densità del mezzo, il vantaggio di esprimere uno spessore in g/cm² è che in questa unità lo spessore risulta indipendente dallo stato (solido, liquido, gassoso) del materiale che si usa (solitamente per rilevare le radiazioni di particelle che attraversano la materia).

4.a.2 Spiegare qualitativamente l'effetto fotoelettrico e lo scattering Compton, indicandone le differenti caratteristiche

L'effetto fotoelettrico consiste nella interazione:

$$\gamma + \text{atomo} \longrightarrow e^- + \text{atomo}^+.$$

In pratica un fotone con energia E cede tutta la sua energia ad un elettrone atomico che viene espulso dall'atomo con energia $E - E_{\text{lev}}$ dove E_{lev} è l'energia del livello a cui si trova l'elettrone. La soglia di energia per far avvenire il processo è quindi E_{lev} , mentre il range di energia in cui il processo è il prevalente è tra $E_{\text{lev}}^{\text{min}}$ e $E_{\text{lev}}^{\text{max}}$. Per il carbonio l'energia di livello massima è 10 keV mentre per il piombo arriva anche a 500 keV.

L'effetto Compton invece sussiste in un urto elastico tra un fotone ed un elettrone, considerato libero:

$$\gamma + e^- \longrightarrow \gamma + e^-.$$

In cui vi può essere uno scambio di energia tra il fotone e l'atomo. Questo è l'effetto prevalente per energie del fotone incidente dell'ordine dei MeV ed a differenza del Rayleigh la sua sezione d'urto va come Z .

4.a.3 Dare l'espressione ed il valore numerico della lunghezza d'onda Compton.

Visto che nell'effetto Compton vi è scambio di energia tra il fotone e l'elettrone allora la frequenza del fotone dopo lo scattering risulta cambiata, applicando la conservazione dell'energia e dell'impulso si ottiene che:

$$\omega - \omega' = \frac{\hbar\omega\omega'}{mc^2} (1 - \cos\theta).$$

Dove ω è la frequenza del fotone prima dello scattering, ω' la frequenza dopo lo scattering, θ l'angolo di scattering. Esprimendo tale relazione in termini di $\lambda = 2\pi c/\omega$ si ha che:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos\theta).$$

Abbiamo quindi definito la lunghezza d'onda Compton dell'elettrone:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = 2.43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2.43 \text{ pm}.$$

4.a.4 Spiegare qualitativamente lo scattering Rayleigh

Lo scattering Rayleigh corrisponde all'interazione elastica tra un fotone ed un atomo. È un effetto importante fino ad energie ~ 1 keV (sezione d'urto che va come Z^2), dopo la sua sezione d'urto decresce come il reciproco del quadrato dell'energia.

4.a.5 Spiegare qualitativamente il fenomeno della creazione di coppie da parte di un raggio gamma che incide su un atomo.

La creazione di coppie

$$\gamma \longrightarrow e^+ + e^-$$

è cinematicamente proibita, infatti prima della reazione il sistema del centro di massa non esiste, dopo sì, ma la velocità di tale sistema non cambia dopo l'urto (o più in generale, il centro di massa prima dell'urto non era definito, quindi non può essere scritta una legge di conservazione). C'è quindi bisogno di una particella spettatrice carica. Supponiamo che vi sia un atomo spettatore, si ha:

$$\gamma + \text{atomo} \longrightarrow e^+ + e^- + \text{atomo}.$$

Se M è la massa di tale atomo allora l'energia di soglia per il fotone è (conservazione del modulo del quadripulso):

$$(E_\gamma + M)^2 - E_\gamma^2 = (2m_e + M)^2.$$

$$E_\gamma \geq 2m_e \left(1 + \frac{m_e}{M}\right).$$

In particolare $E_\gamma \geq 2m_e \approx 1 \text{ MeV}$, da cui la necessità di avere un raggio γ .

4.a.6 Descrivere qualitativamente l'effetto Cherenkov e dimostrare tramite il principio di Huygens che la radiazione Cherenkov è emessa ad un solo angolo.

L'effetto Cherenkov consiste nella emissione di onde elettromagnetiche da parte di una particella carica che si muove a velocità v superiore a quella della luce.

$$\beta c > \frac{c}{n}.$$

Con n parte reale dell'indice di rifrazione. L'emissione è dovuta all'irraggiamento coerente di dipoli elettrici che sono messi in oscillazione dal campo elettromagnetico generato dalla particella nel suo passaggio.

Analizziamo nel dettaglio la direzione di propagazione di quest'onda utilizzando il principio di Huygens.

Ipotizziamo che al tempo t' si propaghi dalla particella un'onda elettromagnetica con fronte d'onda sferico. Dopo un tempo Δt tale fronte ha un raggio

$$R = \frac{c}{n} \Delta t.$$

Tra il tempo in cui l'onda discussa ha iniziato a propagarsi (t') ed il tempo in cui ha raggiunto il raggio R ($t = t' + \Delta t$) si propagano perturbazioni sferiche del tutto analoghe a quella sopra, che al tempo t avranno un raggio intermedio tra R e 0.

Di conseguenza la perturbazione elettromagnetica si sviluppa su un fronte che è la sovrapposizione di tutte le superfici sferiche di onde formatesi nel tempo Δt (effetto motoscafo). Chiamiamo la direzione di propagazione dell'onda θ , ci aspettiamo che il coseno di quest'angolo abbia proporzionalità inversa da β e da n . In questo modo all'aumentare di n l'effetto risulta più evidente (luce "più lenta") mentre al diminuire di β (nei limiti in cui vale ancora $\beta > 1/n$) l'effetto tenda a svanire (si torna in situazioni in cui le cose vanno più lentamente della luce).

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n}.$$

Ipotizziamo che in un punto P vi sia un osservatore che rivela le onde elettromagnetiche, la situazione sarebbe questa:

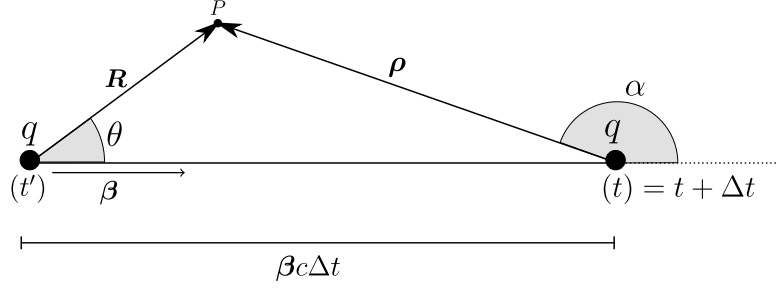


Figura 18: Schema di osservazione dell'effetto Cherenkov

Nell'immagine l'osservatore in P rileva l'onda arrivare al tempo t , quando la particella è "già oltre", in un certo senso possiamo pensare che l'osservatore sente prima il dolore del proiettile che il rimbombo della pistola. Facendo riferimento alla figura 18 dimostriamo la relazione angolare citata sopra.

$$R = |\mathbf{R}| = \frac{c}{n} \Delta t \quad \quad \quad \rho + \beta c \Delta t = R.$$

Facendo il modulo quadro della relazione vettoriale si ottiene:

$$R^2 = \frac{c^2}{n^2} \Delta t^2 = \beta^2 c^2 \Delta t^2 + \rho^2 + 2\rho\beta c \Delta t \cos \alpha.$$

Adesso dividiamo per ρ^2 questa espressione, ciò che si ottiene è una equazione di secondo grado nell'incognita $\frac{\Delta t}{\rho}$ con dei coefficienti interessanti:

$$c^2 \left(\beta^2 - \frac{1}{n^2} \right) \left(\frac{\Delta t^2}{\rho^2} \right) + 2\beta c \cos \alpha \left(\frac{\Delta t}{\rho} \right) + 1 = 0.$$

I coefficienti sono interessanti perchè, per ipotesi noi abbiamo assunto che la particella viaggia ad una velocità tale che $\beta > \frac{1}{n}$, condizione che ritroviamo espressa nel segno del primo coefficiente. Quindi la soluzione della equazione esiste se:

$$\frac{\Delta}{4} = \beta^2 c^2 \cos^2 \alpha - c^2 \left(\beta^2 - \frac{1}{n^2} \right) \geq 0.$$

Quindi serve avere $\sin \alpha \leq \frac{1}{\beta n}$ e, imponendo anche $\Delta t > 0$ si deve avere $\cos \alpha < 0$ (si prende il cono all'indietro, non quello in avanti). Quindi abbiamo due soluzioni distinte per ogni punto interno al cono delimitato dai vincoli su α .

Con il principio di Huygnes sappiamo però che le soluzioni interne al cono non troveranno sovrapposizione coerente di onde sferiche, cosa che invece si ottiene sul bordo del cono dove tutte le onde sferiche avanzano coerentemente a formare una unica perturbazione. Ci concentriamo quindi sulla soluzione al bordo ($\sin \alpha = \frac{1}{\beta n}$). Facciamo una considerazione geometrica su questa particolare scelta dell'angolo α :

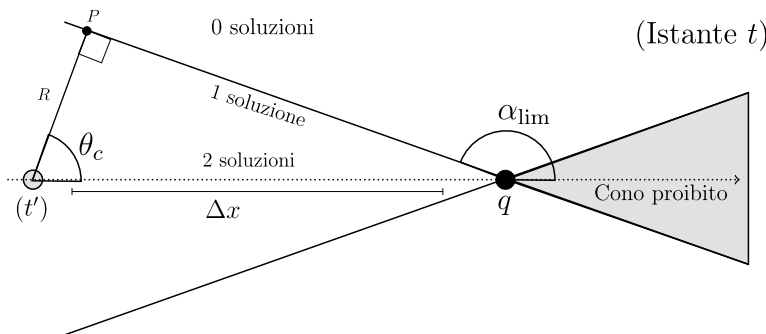


Figura 19: Situazione geometrica della radiazione cherenkov

Sfruttando un teorema sui triangoli:

$$\frac{R}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{\Delta x}{\sin \hat{P}}.$$

E inserendo i valori di Δx , R usati sopra si dimostra che l'angolo sotteso al punto P è rettangolo per $\sin \alpha = \frac{1}{\beta n}$. Quindi possiamo ricavare l'angolo Cherenkov semplicemente dalle proprietà dei triangoli rettangoli:

$$\theta_c = \frac{\pi}{2} - (\pi - \alpha) = \alpha - \frac{\pi}{2}.$$

In particolare

$$\sin \alpha = \sin \left(\theta_c + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \theta_c = \frac{1}{\beta n}.$$

Abbiamo quindi trovato l'angolo Cherenkov, indica la direzione dal quale l'osservatore in P vede arrivare l'onda.

4.a.7 Descrivere la situazione in cui la legge

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma dx} = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2 \theta_c.$$

inerente la radiazione Cherenkov, è applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata.

Quella espressa è detta la formula di Frank-Tamm, si applica quando una particella di carica z (in unità di e) attraversa uno spessore dx infinitesimo di materiale con indice di rifrazione $n(\omega)$ ed esprime il numero di fotoni emessi per unità di energia $E_\gamma = \hbar\omega$. Questa equazione si riscrive in termini dell'indice di rifrazione sostituendo l'equivalente dell'angolo Cherenkov discusso nella domanda precedente:

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma dx} = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right).$$

Ricordiamo adesso alcuni valori delle costanti in gioco:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \qquad \hbar c = 197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}.$$

Quindi

$$\frac{\alpha}{\hbar c} = \frac{10^{-6} \cdot 10^{13}}{137 \cdot 197} \left[\frac{\text{fotoni}}{\text{eV} \cdot \text{cm}} \right] \approx 370 \left[\frac{\text{fotoni}}{\text{eV} \cdot \text{cm}} \right].$$

Ricordiamo anche che l'indice di rifrazione è in realtà $n(\omega)$, da cui deriva la dipendenza della formula da E_γ .

4.a.8 Descrivere la situazione in cui la legge

$$N_\gamma = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} L \int_{E_1}^{E_2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon_r(E)} \right] P_{\text{det}} dE.$$

inerente la radiazione Cherenkov, è applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata.

Le quantità sono le stesse della domanda precedente, tuttavia questa esprime il numero di fotoni rilevati da un detector avente una efficienza P_{det} nel range di energia tra E_1 ed E_2 , il mezzo attraversato ha inoltre larghezza L .

4.a.9 Descrivere qualitativamente le cause e gli effetti del fenomeno della radiazione di frenamento da parte di una particella carica nella materia.

Una particella carica di massa M e carica $q = ze$ che attraversa un materiale subisce l'interazione coulombiana con i nuclei che lo compongono di carica Ze .

Per ogni interazione la particella accelera (a causa della repulsione o attrazione) e quindi irraggia: Radiazione di frenamento o Bremsstrahlung.

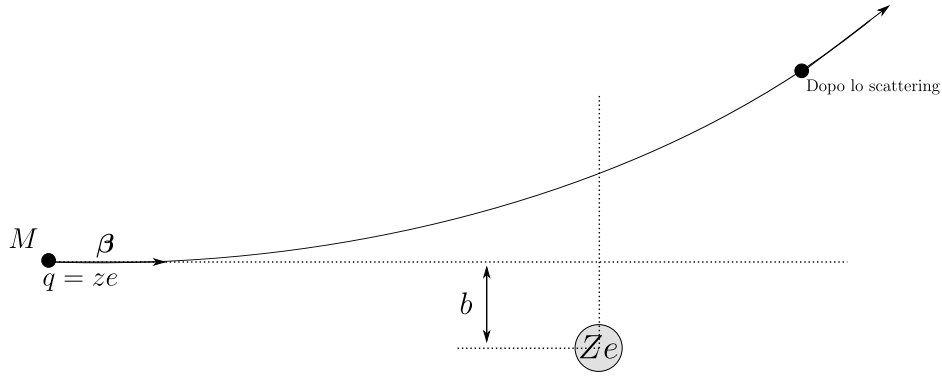


Figura 20: Schema dello scattering coulombiano per la Bremsstrahlung

La perdita di energia dovuta a questo irraggiamento è importante per elettroni (aventi una certa energia critica E_c) ed è invece trascurabile per le altre particelle. Inoltre la radiazione di frenamento avviene in modo indipendente su ciascun nucleo del materiale attraversato, è allora facile immaginare che darà luogo a processi di emissione incoerenti.

Nel sistema del laboratorio la radiazione può essere rilevata in modi diversi a seconda della velocità del proiettile:

Particella non relativistica La radiazione è proporzionale a $\sin^2 \alpha$, con α angolo tra la media della accelerazione nel processo e la direzione di osservazione.

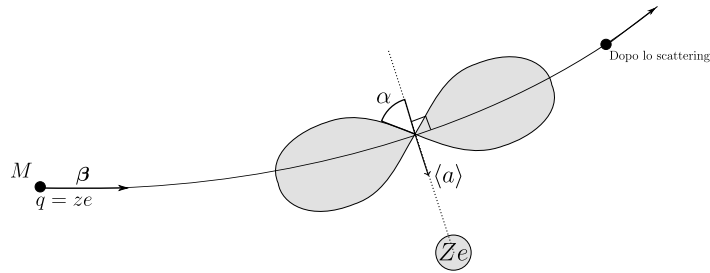


Figura 21: Emissione della radioazione nel caso di Bremsstrahlung non relativistica

Particella ultrarelativistica La radiazione viene rilevata in avanti, con angolo di $\frac{1}{\gamma}$ rispetto alla direzione di β (si dimostra con una trasformazione dal sistema in cui la particella è ferma a quello del laboratorio).

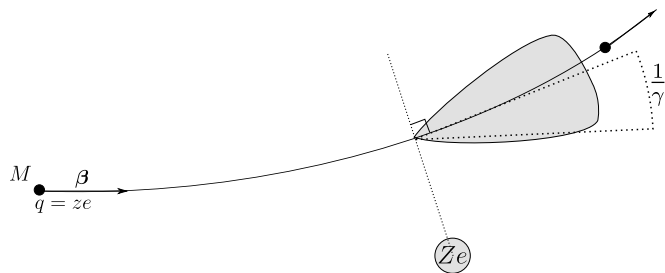


Figura 22: Emissione della radioazione nel caso di Bremsstrahlung relativistica

4.a.10 Spiegare perchè la perdita di energia per irraggiamento è significativa per elettroni e non per le altre particelle cariche.

La forza di Coulomb dipende dalla carica elettrica e non dalla massa della particella, quindi dall'equazione del moto si ottiene che:

$$a \sim \frac{1}{M}.$$

Visto che l'irraggiamento dipende dall'accelerazione al quadrato si ha anche che:

$$I \sim \frac{1}{M^2}.$$

e banalmente questo è l'unico motivo per cui gli elettroni irradiano maggiormente di Bremsstrahlung.

4.a.11 Descrivere la situazione in cui la legge

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \beta) \wedge \dot{\beta}]}{(1 - \hat{n} \cdot \beta)^2} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \hat{n}}{c})} dt' \right|^2.$$

è applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata.

L'equazione descrive l'energia irraggiata per unità di frequenza ed angolo solido, deriva dalla più generale

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} = \frac{\epsilon_0 c r^2}{\pi} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2.$$

Dove $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ è la trasformata del campo elettrico di radiazione (valida per ogni tipo di irraggiamento). Nel caso in questione è quello di una carica puntiforme accelerata in moto relativistico, tale equazione è stata dimostrata nella Domanda 3.a.14.

4.a.12 Descrivere la situazione in cui la legge

$$I_\omega(b) = \begin{cases} \frac{8z^4 Z^2 \alpha \hbar c^2}{3\pi} \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 \frac{r_e^2}{V^2} \frac{1}{b^2} & \text{per } \omega < \frac{V}{b} \\ 0 & \text{per } \omega > \frac{V}{b} \end{cases}.$$

applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata.

$I_\omega(b)$ indica l'energia irraggiata per unità di frequenza in funzione del parametro di impatto (J·s). Tutte le altre quantità sono state ampiamente presentate nel corso della lettura ma facciamo un ripassino su quelle che non vediamo da un pò:

$$r_e = k_0 \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.82 \text{ fm}$$

$$m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2 = 9.12 \cdot 10^{-31} \text{ kg}.$$

Detto questo la formula rappresenta I_ω per una Bremsstrahlung nel caso non relativistico nella approssimazione che il moto complessivo della carica possa essere assunto come rettilineo, quindi angoli di scattering piccoli. In tal modo viene assunta la variazione di quantità di moto nella sola direzione ortogonale alla direzione di incidenza del proiettile ed i conti per la dimostrazione diventano pochi. È stata inoltre approssimata la funzione ad uno scalino, quando in realtà i termini sopra espressi corrispondono all'andamento asintotico di quest'ultima.

4.a.13 Definire la sezione d'urto di irraggiamento e spiegare il suo significato fisico.

La sezione d'urto di irraggiamento è definita come

$$\chi_\omega = \int_{b_{min}}^{b_{max}} 2\pi I_\omega b db \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{Hz}} \cdot \text{m}^2 \right].$$

ed è la grandezza che moltiplicata per il numero di nuclei per unità di superficie fornisce l'energia irraggiata per intervallo di frequenza I_ω .

4.a.14 Descrivere la situazione in cui la legge

$$\chi_\omega = \frac{16z^4 Z^2 \alpha \hbar c^2}{3} \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 \frac{r_e^2}{V^2} \ln\left(\frac{MV^2}{\hbar\omega}\right).$$

e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata.

Questa sezione d'urto di irraggiamento è quella derivante dalla equazione della domanda precedente integrata sul parametro di impatto. Questa è applicabile nel caso in cui:

$$\frac{\hbar}{MV} < b < \frac{V}{\omega}.$$

Con M la massa della particella incidente.

Saremmo portati ad pensare che il limite inferiore su b sia il raggio nucleare, in realtà il principio di indeterminazione risulta più stringente per particelle lente:

$$\Delta x \Delta p = \hbar.$$

L'indeterminazione sull'impulso della particella è sicuramente inferiore all'impulso iniziale di questa: $\Delta p \lesssim MV$ (siamo a distanze tali per cui la probabilità di schianto nel nucleo è alta), mentre sul Δx l'indeterminazione è proprio il parametro di impatto b , quindi:

$$bMV \gtrsim \hbar \implies b \gtrsim \frac{\hbar}{MV}.$$

Come limite superiore invece saremmo portati a pensare che sia il raggio atomico, in realtà il tempo tipico di interazione stringe ancora il campo nel caso non relativistico:

$$\Delta t \approx \frac{b}{V} \implies \omega < \frac{V}{b}.$$

Nel caso di elettroni relativistici il parametro di impatto inferiore è proprio la lunghezza d'onda Compton.

4.a.15 Descrivere la situazione in cui la legge

$$\frac{dE^{\text{irr}}}{dx} = n_{\text{nuclei}} \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 r_e^2 \ln\left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e}\right) E.$$

applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata.

La formula descrive l'energia irraggiata per unità di lunghezza da una particella ultrarelativistica ($V \sim c$) con energia iniziale E e massa M , questa espressione si ottiene integrando la sezione d'urto di irraggiamento di tale particella nel dominio detto di Screening attivo, ricaviamo intanto tale sezione d'urto. Nel sistema Σ' in cui la particella è a riposo si ha che durante lo Scattering (in cui il nucleo va incontro alla particella) M irraggia in maniera non relativistica, quindi la formula per la χ'_ω è:

$$\chi'_\omega = \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha \hbar c^2 \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 \frac{r_e^2}{V^2} \ln\left(\frac{b_{\text{MAX}}}{b_{\text{min}}}\right).$$

È bene ricordare che per questa interazione avremo una larghezza spettrale di

$$\omega' < \gamma \frac{c}{b}$$

Come minimo del parametro di impatto si può usare il principio di indeterminazione come per la domanda precedente, c'è tuttavia da stare attenti al fatto che adesso $\Delta p \lesssim MV\gamma$, quindi:

$$b \gtrsim \frac{\hbar}{MV\gamma}.$$

Considerando la grandezza di γ questa stima risulta decisamente inferiore del raggio nucleare, è quindi erranea. Il tempo di interazione è $\tau \approx b/(c\gamma)$, possiamo allora pensare che il campo elettrico agisce sul proiettile in

una regione di estensione $\tau \cdot c = b/\gamma$. Se questa fosse più piccola di Δx allora non avrebbe senso parlare di interazione e irraggiamento (si presenterebbero effetti di interferenza), quindi poniamo:

$$\Delta x \gtrsim \frac{b}{\gamma} \implies b_{\min} = \frac{\hbar}{MV}.$$

Come nel caso non relativistico.

Dobbiamo adesso trovare il limite superiore, si hanno due possibili casi:

$$b_{\max}^{(1)} = \gamma \frac{v}{\omega'}.$$

Considerando il limite dovuto al tempo di interazione, oppure

$$b_{\max}^{(2)} = a = 1.4 \frac{a_0}{Z^{1/3}}.$$

Che corrisponde al raggio atomico con:

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e c \alpha}.$$

Per valutare quale dei due sia quello giusto consideriamo il fatto che, nel sistema del laboratorio, tutta la radiazione viene emessa in avanti con un angolo rispetto alla velocità iniziale della particella:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{\gamma} \implies \cos \hat{\theta} \approx 1 - \frac{1}{2\gamma^2}.$$

Quindi la corrispondente frequenza nel sistema primato sarà

$$\omega' = \gamma \omega \left(1 - \beta \cos \hat{\theta}\right) \approx \gamma \omega \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)\right) = \frac{\omega}{\gamma}.$$

Siccome il fotone irraggiato nel laboratorio avrà sicuramente energia inferiore all'energia cinetica dell'elettrone che lo ha partorito si ha (conservazione dell'energia):

$$\hbar \omega \leq (\gamma - 1) M c^2 \implies \omega' \lesssim \frac{M c^2}{\hbar}.$$

Questo ci aiuta a valutare chi tra i due parametri è più grande:

$$\frac{b_{\max}^{(1)}}{b_{\max}^{(2)}} = \frac{\gamma v / \omega'}{a} \gtrsim \frac{\gamma \hbar}{a M c} = \gamma Z^{1/3} \frac{m_e \alpha}{1.4 M} \approx \gamma \frac{Z^{1/3} m_e}{192 M}.$$

Vista la dipendenza diretta da γ è facile vedere che, per elettroni ultrarelativistici si ha sempre $\gamma v / \omega' > a$, quindi il parametro giusto da scegliere è il secondo, ovvero il raggio atomico a . Il caso in cui lavoriamo è detto screening attivo, espresso graficamente come segue:

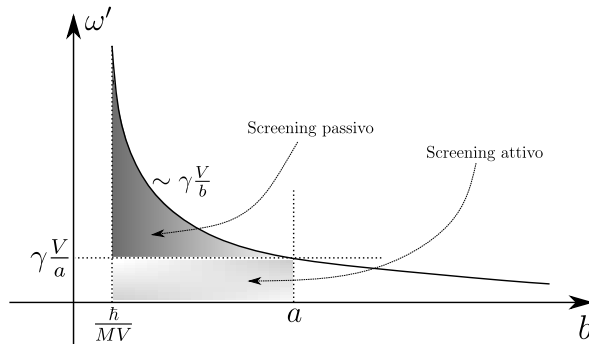


Figura 23: Tipi di screening per la Bremsstrahlung.

In ogni caso si deve rispettare il fatto che la frazione calcolata poco fa deve essere maggiore di 1 per andare in Screening attivo, quindi:

$$\gamma > \frac{192 M}{Z^{1/3} m_e}.$$

Inserendo tutto nella sezione d'urto si ottiene l'espressione:

$$\chi'_\omega = \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha \hbar c^2 \left(\frac{m_e}{M} \right)^2 \frac{r_e^2}{c^2} \ln \left(\frac{192 \cdot M}{Z^{1/3} \cdot m_e} \right).$$

Adesso basta notare che, come visto sopra, $\omega = \gamma\omega'$. Inoltre $dE_{\text{irr}} = \gamma dE'_{\text{irr}}$ che viene dal fatto che questa quantità infinitesima trasforma come un tempo:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{du^\mu}{d\tau} \frac{du_\mu}{d\tau} \implies dE \sim G dt.$$

Con G invariante di Lorentz.

Prendiamo allora la definizione di χ_ω :

$$\chi_\omega = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 2\pi b \frac{dE}{dw} db.$$

Con tutte le considerazioni fatte sopra e considerando in più che il parametro di impatto è invariante (essendo ortogonale al boost) otteniamo $\chi_\omega = \chi'_\omega$, quindi:

$$\frac{dE_{\text{irr}}}{dx} = n_{\text{nuclei}} \int_0^{\omega_{\max}} \chi_\omega d\omega = n_{\text{nuclei}} \int_0^{E/\hbar} d\omega \chi_\omega = n_{\text{nuclei}} \frac{E}{\hbar} \chi_\omega.$$

Che è proprio l'espressione cercata (E è l'energia cinetica della particella!!).

4.a.16 Descrivere la situazione in cui la legge

$$\chi_\omega = \hbar\omega \frac{d\sigma_y}{d\omega}.$$

è applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza fisica ivi indicata.

La formula è una manipolazione algebrica della definizione di χ_ω :

$$\chi_\omega = \frac{1}{n} \frac{dE_{\text{irr}}}{dx d\omega}.$$

Con n densità dei centri scatteranti. Proviamo a manipolare l'espressione:

$$\chi_\omega = \hbar\omega \frac{d}{d\omega} \left(\frac{dE_{\text{irr}}}{dt} \frac{1}{n \cdot \hbar\omega \frac{dx}{dt}} \right).$$

Possiamo allora definire una corrente di particelle proiettili (l'inverso del secondo termine in parentesi) a moltiplicare la potenza irradiata mediata (è mediata perchè E_{irr} è l'energia irradiata totale), questa altro non è che la sezione d'urto del processo di irraggiamento (definita come una superficie, non come quella finta sezione d'urto χ_ω).

$$\chi_\omega = \hbar\omega \frac{d}{d\omega} (\sigma_y).$$

4.a.17 Dare la definizione di lunghezza di radiazione.

La lunghezza di radiazione X_0 è la distanza tipica che una particella percorre in un materiale. Tale distanza infatti subentra nella legge esponenziale con cui varia l'energia della particella:

$$E = E_0 e^{-x/X_0}.$$

Tale lunghezza è tipica del materiale che la particella percorre. Per lo Screening attivo la lunghezza di radiazione è l'inverso del coefficiente che moltiplica E (l'equazione della domanda 4.a.15):

$$X_0^{\text{attivo}} = \frac{1}{n_{\text{nuclei}} \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha \left(\frac{m_e}{M} \right)^2 r_e^2 \ln \left(\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e} \right)}.$$

4.a.18 Dare la definizione di "Energia critica"

L'energia critica è l'energia oltre il quale l'energia dell'elettrone si attenua per il solo effetto della Bremstrahlung. Nello screening attivo abbiamo visto esserci un limite inferiore a γ per la particella incidente, questo implica che in tal caso l'energia della particella ha anch'essa un limite inferiore che corrisponde proprio alla sua energia critica:

$$E_c = Mc^2 \gamma_{\text{lim}} = Mc^2 \frac{192}{Z^{1/3}}.$$

4.a.19 Descrivere la situazione in cui la legge

$$E = E_0 e^{-x/X_0}.$$

è applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza ivi indicata.

La legge è applicabile nel caso di Bremstrahlung con particella incidente di energia E_0 superiore alla energia E_c e descrive l'andamento dell'energia all'interno del materiale in cui tutta l'energia persa va in irraggiamento.

4.a.20 Descrivere la situazione in cui la legge

$$\frac{1}{\rho X_0} = 4\alpha r_e^2 \frac{Z^2}{A(g)} N_A \left[\ln \left(\frac{184}{Z^{1/3}} \right) - f(Z) + \frac{L'}{Z} \right].$$

applicabile e spiegare il significato e l'unità di misura di ogni grandezza ivi indicata. [formula di Tsai non dimostrata a lezione]

La formula descrive in modo più preciso l'inverso della lunghezza di radiazione tenendo conto della struttura del materiale che il proiettile attraversa (con gli appositi coefficienti $f(Z)$ e L').

Il termine $f(Z)$ corrisponde ad una serie in $a = \alpha Z$, i primi termini sono :

$$f(Z) = a^2 \left[(1 + a^2)^{-1} + 0.0202 + \dots \right].$$

Il termine L' invece dipende dal tipo di materiale, tuttavia per i materiali con $Z \geq 5$ vale:

$$L' = \ln \left(\frac{194}{Z^{2/3}} \right).$$

Ricordiamo che $A(g)$ è la massa atomica del materiale attraversato in grammi e $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ è il numero di avogadro.

4.a.21 Descrivere qualitativamente il meccanismo della perdita di energia per collisioni da parte di una particella carica nella materia.

Una particella carica interagisce con gli elettroni atomici di un materiale cedendo loro energia tramite interazioni coulombiane. Si ipotizza in queste interazioni che la variazione di impulso di ogni elettrone sia interamente ortogonale alla direzione di incidenza della particella facendo sostanzialmente uso di una approssimazione impulsiva.

L'effetto che il passaggio della particella provoca sul materiale può essere di vari tipi:

- Il materiale si ionizza producendo coppie elettrone-ione nei gas o elettrone-lacuna nei semiconduttori.
- Il materiale emette fotoni di scintillazione (sostanzialmente dovuti al salto in alto e successivamente in basso in energia dell'elettrone partecipe dello scattering).
- Riscaldamento del materiale per agitazione termica nel passaggio.

Tale processo trova applicazione nella misura simultanea della quantità di moto e della massa di una particella ed allo studio del percorso residuo di particelle cariche per uso medico (adroterapia) o protettivo per la schermatura di radiazione (degli acceleratori di particelle).

4.a.22 Spiegare il significato di ogni termine dell'espressione per la perdita di energia per collisioni (formula di Bethe-Bloch, non dimostrata):

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE_{\text{coll}}}{dx} = z^2 \frac{Z}{A(g)} 4\pi \frac{m_e c^2}{\beta^2} N_A r_e^2 \left(\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I^2} T_{\text{Max}} \right) - \beta^2 + \frac{\delta}{2} \right).$$

Abbiamo alcune quantità già viste nella formula di Tsai, in più c'è I che è l'energia potenziale media di ionizzazione, T_{max} che è l'energia massima trasferibile dalla particella all'elettrone:

$$T_{\text{Max}} = \frac{2m_e c^2 \beta \gamma}{1 + \frac{2m_e \gamma}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2}.$$

ed il fattore $\delta/2$ è il fattore di correzione della densità dovuto a fermi, quest'ultimo dipende da β e dal tipo di materiale attraversato.

4.a.23 Disegnare qualitativamente la funzione di Bethe-Bloch indicando i valori dei punti significativi.

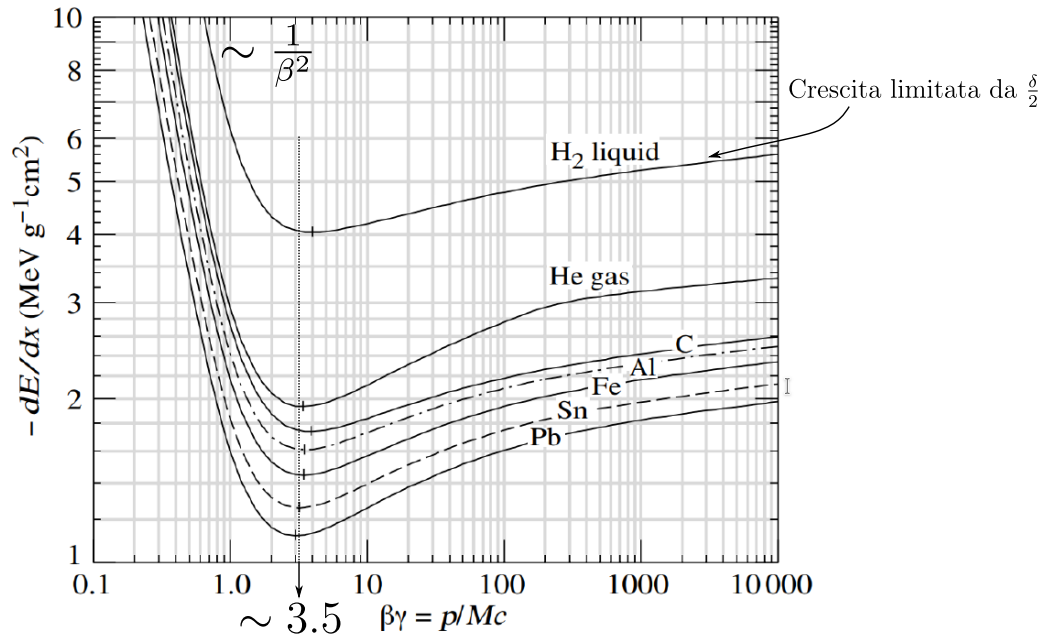


Figura 24: Andamento commentato della Bethe-Bloch.

Sull'asse delle x abbiamo $\beta\gamma = \frac{|p|}{Mc}$. Si aggiunge soltanto che il minimo della funzione si ottiene per:

$$\left. \frac{1}{\rho} \frac{dE_{\text{coll}}}{dx} \right|_{\text{min}} \sim 2 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}.$$

Le particelle aventi impulso $|p| \sim 3.5 \text{ Mc}$ si dicono al minimo di ionizzazione e sono importanti per l'effetto detto Picco di Bragg.

4.a.24 Definire il "percorso residuo" ("range") per una particella carica in un materiale.

Il percorso residuo R (anche chiamato Range) è il percorso dopo il quale una particella attraversando un materiale esaurisce la sua energia e si ferma.

$$R(E_0) = \int_0^R dx = \int_0^{E_0} dE \cdot \frac{dx}{dE} = \int_0^{E_0} \frac{1}{\frac{dE}{dx}} dE.$$

Il calcolo precedente viene fatto numericamente poichè l'espressione per $\frac{dx}{dE}$ detto Stopping Range è complicata e soprattutto tiene conto non solo della energia persa in collisioni coulombiane ma anche quella persa in irraggiamento e in interazioni nucleari forti.

4.a.25 Definire gli "stopping power" totale, collision, radiative e nuclear; indicare per quali particelle ognuno di essi sia o meno rilevante.

Partiamo dal totale:

$$\left(\frac{dx}{dE}\right)_{\text{tot}} = \left(\frac{dx}{dE}\right)_{\text{collision}} + \left(\frac{dx}{dE}\right)_{\text{radiative}} + \left(\frac{dx}{dE}\right)_{\text{nuclear}}.$$

Il primo termine è l'inverso della formula di Bethe-Block, il secondo è l'inverso della formula di Tsai mentre il terzo è rilevante solo per interazioni forti, ovvero interessa gli adroni.

4.a.26 Come si calcola il "percorso residuo" ("range"), nota la curva $\frac{dE}{dx}$, in funzione dell'energia E della particella?

Si calcola con l'integrale numerico della Domanda 4.a.24.

4.a.27 Spiegare qualitativamente il cosiddetto "picco di Bragg"

Quando una particella carica è rallentata da un materiale fino ad arrestarsi la distribuzione di energia depositata dipende in maniera marcata dalla forma dello stopping power $ST(E) = \left(\frac{dE}{dx}\right)^{-1}$.

Se la particella entra nel mezzo con una energia superiore a quella del minimo di ionizzazione $\beta\gamma > 3.5$ allora l'energia depositata per unità di lunghezza decresce fino a raggiungere il minimo. Proseguendo oltre il minimo la particella continua a perdere energia per collisioni (quindi β cala) ma la perdita per unità di lunghezza in questa direzione sale come $1/\beta^2$. In questo modo l'energia depositata avrà un massimo in corrispondenza del punto di arresto nel materiale della particella, tale massimo è chiamato Picco di Bragg.

4.a.28 Descrivere qualitativamente il fenomeno dello scattering multiplo da parte di una particella carica in moto veloce nella materia.

Nell'urto di una particella con un atomo bersaglio l'angolo di deflessione è, nel peggiore dei casi $\sim 10^{-3}$ rad, quindi trascurabile nella maggior parte dei contesti. Se invece la particella attraversa un materiale allora incontrerà diversi nuclei nel suo cammino, per ciascun nucleo avremo piccole deflessioni scatteranti.

La discussione sul fenomeno dello scattering multiplo è appunto la valutazione dell'angolo di deflessione all'uscita del mezzo. Anticipiamo che facendo numerose interazioni l'angolo di deflessione sarà distribuito gaussianamente (teorema del limite centrale).

4.a.29 Definire l'angolo di multiplo scattering (rispetto alla direzione iniziale della particella) e definire la sua proiezione su un piano (che contiene la direzione iniziale della particella). Indicare i limiti delle due variabili così definite.

L'angolo multiplo di scattering θ è l'angolo formato tra la direzione iniziale e la direzione dopo lo scattering multiplo della particella che attraversa un mezzo. Possiamo ipotizzare questo angolo come $\theta \ll 1$ per una particella veloce.

Ipotizzando che la particella fosse inizialmente diretta lungo l'asse \hat{z} , possiamo definire le proiezioni dell'angolo di deflessione sui due piani che contengono la direzione iniziale tra loro ortogonali: θ_x e θ_y con $\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2$.

Come accennato sopra si impone una distribuzione gaussiana su questi angoli con r.m.s. pari a θ_0 definita dal tipo di scattering preso come modello (per angoli piccoli l'ideale è lo scattering Rutherford). Anche allo scarto quadratico medio su queste due variabili si impone $\theta_0 \ll 1$, inoltre sono entrambe variabili a media nulla.

4.a.30 Spiegare il significato di ogni termine dell'espressione per l'angolo quadratico medio di multiplo scattering (rispetto alla direzione iniziale della particella)

$$\sqrt{\langle\theta_{\text{ms}}^2\rangle} = \theta_0\sqrt{2} = z\frac{13.6\text{MeV}}{P\beta c}\sqrt{\frac{L}{X_0}}\left(1 + 0.0038\ln\left(\frac{L}{X_0}\right)\right).$$

θ_0 è l'angolo r.m.s. per i due angoli definiti sopra, P è l'impulso iniziale della particella, L è lo spessore del materiale attraversato, X_0 la lunghezza di radiazione del materiale. Si arriva a questo risultato sfruttando per lo scarto quadratico sul singolo urto la sezione Mott e moltiplicando per il numero di possibili urti sulla base della lunghezza e densità del materiale.

4.a.31 Se non fosse sufficiente la approssimazione di piccoli angoli e distribuzione gaussiana, indicare quale fra le seguenti funzioni descriverebbe meglio il fenomeno del multiplo scattering:

- i) Bethe-Bloch,
- ii) Moliere,
- iii) Breit-Wigner,
- iv) Bohr.

La funzione sarebbe la Moliere.

4.a.32 Illustrare in modo qualitativo il metodo di produzione degli antiprotoni nell'esperimento di Segré et al.

Tramite l'acceleratore Bevatron si invia un fascio di protoni su una lamina di rame, l'urto rompe l'atomo in questione, si liberano p, π^+, \bar{p}, π^- . Gli antiprotoni liberati hanno impulso $p = 1.19 \text{ MeV}/c$. Successivamente le particelle vengono deviate dal campo del Bevatron per entrare nel sistema di rilevazione ideato per l'esperimento. Tra le particelle positive si ha in media circa 1 antiprotone ogni 10^5 pioni. Con l'impulso di queste particelle si ha $\beta = 0.99$ per i pioni e $\beta = 0.78$ per gli antiprotoni.

4.a.33 Spiegare qualitativamente il metodo di separazione degli antiprotoni dal fondo di pioni nell'esperimento di Segré et al. tramite contatori Cerenkov

Le particelle uscenti sono deflesse di 21° dal campo magnetico del Bevatron e successivamente di altri 34° dal campo magnetico di M1. Dopo M1 le particelle passano attraverso un collimatore Q1: un magnete quadripolare che focalizza il fascio ed uno scintillatore S1.

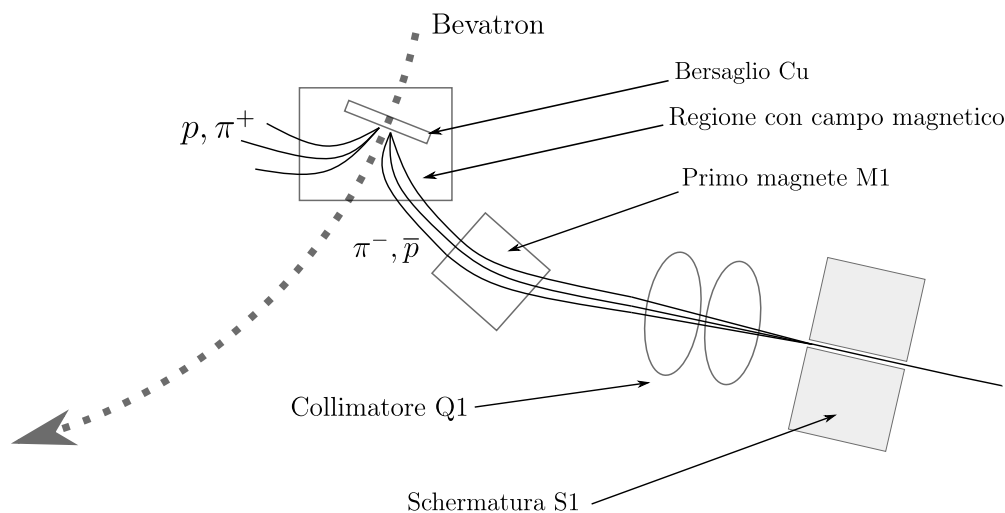


Figura 25: segre

Dopo le particelle incontrano un secondo collimatore Q2 seguito da un altro magnete M2 che le deflette di altri 34° . Infine le particelle attraversano il secondo scintillatore S2, un primo contatore Cherenkov C1 che rileva particelle con $\beta > 0.78$, un secondo contatore Cherenkov C2 con $0.75 < \beta < 0.78$ ed un ultimo scintillatore per rilevare le particelle che uscenti da C2 con angoli di scattering troppo grandi. Il sistema di magneti permette di selezionare le particelle con un certo impulso, la velocità della particella invece è misurata in due modi indipendenti: tempo di volo e contatori Cherenkov.

Fare due misure indipendenti della velocità è indispensabile in quanto, utilizzando ad esempio il solo tempo di volo come controllo si otterrebbe una distribuzione di eventi del tipo:

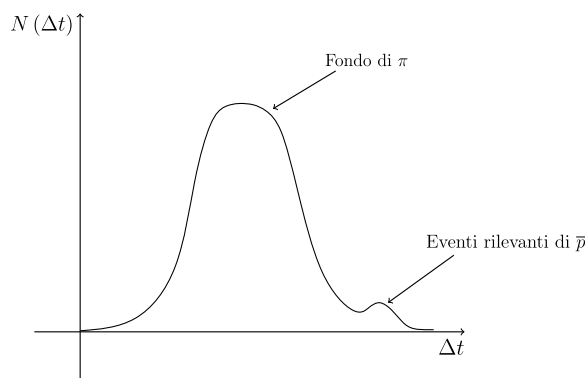


Figura 26: Distribuzione pioni-antiprotoni

È quindi richiesta la coincidenza di eventi $S_1 * S_2 * C_2$, se scatta anche lo scintillatore S_3 allora il conteggio è annullato perchè vuol dire che la particella aveva un grande angolo di scattering (si evitano errori dovuti a particelle che non erano ben collimate con il gruppo). Con questo metodo di controlli incrociati si riesce ad escludere quasi tutti i π dal conteggio (il 3 % di questi attiva C2), per i pochi pioni che attivano C2 si utilizza come controllo C1: se si attiva quest'ultimo il conteggio viene annullato. In questo modo è stato possibile ridurre il fondo di pioni e distinguere il segnale dell'antiprotone tramite oscilloscopi (presumibilmente attivati dalle scintillazioni della strumentazione).

4.a.34 Descrivere l'esperimento di Anderson sulla scoperta del positrone.

Nell'esperimento venne utilizzata una camera a nebbia: un dispositivo isolato contenente vapore saturo. Una particella carica e sufficientemente energetica che attraversa la camera ionizza il gas sulla sua traiettoria e gli atomi ionizzati formano dei nuclei di condensazione su cui si formano delle goccioline. Fotografando la camera è quindi possibile ricostruire la traiettoria della particella incidente. Se inoltre immergiamo il tutto in un campo magnetico possiamo misurare anche l'impulso a partire dal raggio di curvatura.

$$R = \frac{mV}{qB}.$$

Anderson utilizzò un campo magnetico di 1.7 T e registrò la traccia di una particella che attraversa 6 m di piombo. Le sue osservazioni furono che la particella prima di attraversare la lastra aveva un impulso $p_i = 63$ MeV/c, dopo l'attraversamento invece $p_f = 22.5$ MeV/c, dal verso di curvatura dedusse che la particella aveva carica positiva.

Si poteva quindi avanzare l'ipotesi che la particella fosse un protone non relativistico, se non fosse che in tal caso:

$$E_i = \frac{p^2}{2m_p} \approx 2.1 \text{ MeV}.$$

Quindi non avrebbe sufficiente energia per attraversare uno strato di 6 mm di piombo.

Ipotizzando invece che fosse un positrone relativistico questo perderebbe circa 7 MeV per ionizzazione e la sua energia si riduce di un fattore $1/e$ per irraggiamento. Il risultato è quindi compatibile con l'impulso misurato nell'esperimento: era un positrone relativistico.

b Domande b

4.b.1 Dimostrare che all'interno del cono della radiazione Cherenkov vi sono due soluzioni per

$$t' = t - \frac{nR}{c},$$

nessuna soluzione all'esterno, ed una sola sul fronte d'onda.

Il problema è stato ampiamente discusso nella spiegazione del fenomeno alla domanda Domanda 4.a.6.

4.b.2 A partire dalla espressione

$$\frac{d^2 N_\gamma}{dE_\gamma dx} = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} \sin^2 \theta_c.$$

valida per la radiazione Cherenkov, dimostrare che

$$N_\gamma = z^2 \frac{\alpha}{\hbar c} L \int_{E_1}^{E_2} \left[1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon_r(E)} \right] P_{\text{det}}(E) dE.$$

È necessario ricordare, dall'espressione dell'angolo Cherenkov che:

$$\sin^2 \theta_c = 1 - \frac{c^2}{n^2(E) v^2} = 1 - \frac{1}{\beta^2 \epsilon_r(E)}.$$

Successivamente integrando su x si ottiene il fattore L che è la lunghezza del tratto preso in considerazione, integrando anche nell'energia si ottiene anche il fattore $P(E)$ che è l'efficienza del fotorivelatore.

4.b.3 Calcolare il numero di fotoni osservati da un fotorivelatore sensibile con efficienza del 30% a luce fra 300nm e 600nm, al passaggio di un elettrone nei due casi seguenti:

i) $n=1.005$ (gas), $\beta=0.999$, lunghezza=1m;

ii) $n=1.5$ (solido trasparente), $\beta=0.99$, lunghezza=1cm.

Il conto da fare è l'integrale della espressione nella domanda precedente, il coefficiente di diffrazione è in questo caso indipendente dall'energia, mentre gli estremi di integrazione sono:

$$E_1 = \hbar \omega_1 = \hbar \frac{2\pi c}{\lambda_1} \qquad E_2 = \hbar \frac{2\pi c}{\lambda_2}.$$

Ogni termine può uscire dall'integrale, ne risulta che:

$$N_\gamma = 2\pi \alpha L \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) P_{\text{det}}.$$

Nel primo caso si rilevano 189 fotoni, nel secondo invece se ne rilevano 12533.

4.b.4 Calcolare l'angolo di emissione della radiazione Cherenkov in funzione dell'impulso (e della massa) della particella e dell'indice di rifrazione.

L'angolo Cherenkov vale

$$\sin^2 \theta_c = \frac{1}{n\beta}.$$

Sfruttiamo la definizione di γ e dell'impulso:

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2} \qquad p = m\gamma v.$$

Manipolando le due espressioni si arriva all'equazione:

$$\frac{1}{1 - \beta^2} = \frac{p^2}{m^2 c^2 \beta^2} \implies \beta = \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + m^2 c^2}}.$$

Abbiamo quindi β in funzione delle quantità richieste, basta adesso inserire nella prima equazione per concludere:

$$\sin^2 \theta_c = \frac{1}{n} \sqrt{1 + \left(\frac{mc}{p} \right)^2}.$$

4.b.5 Descrivere qualitativamente il principio di funzionamento dei rivelatori Cherenkov:
i) a soglia
ii) RICH
iii) DIRC

Rivelatori a soglia. Questi rivelatori sono in grado di rilevare il numero di fotoni emessi ma non l'angolo di emissione.

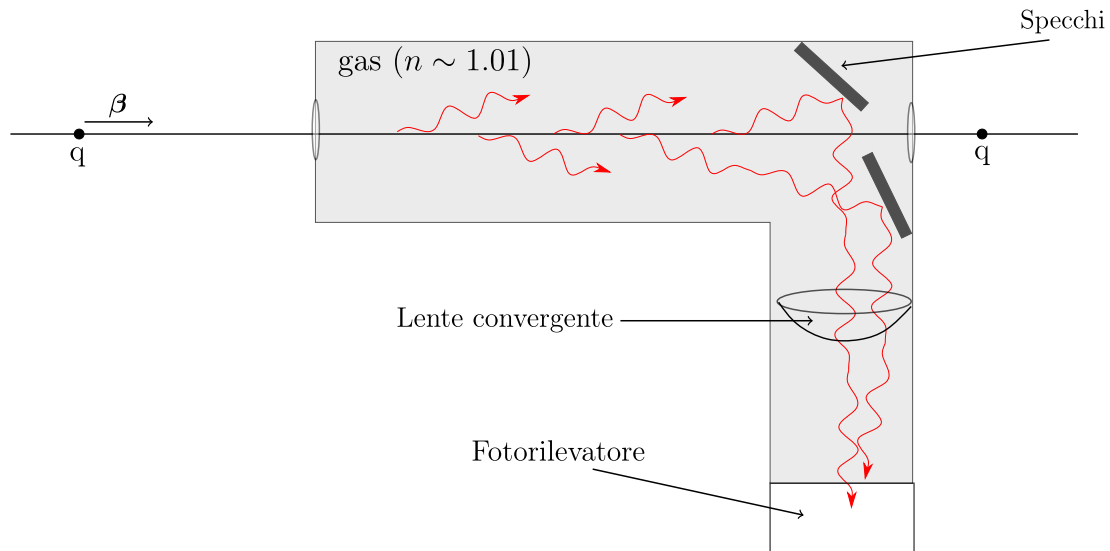


Figura 27: Rivelatori Cherenkov a soglia

Il mezzo utilizzato nella camera è un gas ad alta pressione con $n \sim 1.001 - 1.01$, particolarmente adatto a particelle ultrarelativistiche. Questo rivelatore fornisce quindi risposta binaria a seconda che la particella superi o no la velocità della luce nel mezzo:

- 0) Se $\beta < 1/n$
- 1) se $\beta > 1/n$

Rivelatore RICH A differenza dei primi questi rivelatori sono in grado di misurare l'angolo di emissione θ_c , l'indice di rifrazione del mezzo radiatore è tale da avere solitamente $n < 1.1$, la luce subisce quindi una rifrazione che gli permette comunque di uscire nella stessa direzione della particella (non superando quindi l'angolo limite di riflessione). Tale luce viaggia su superfici coniche e viene osservata su un piano contenente i fotorilevatori, quello che si osserva sono degli anelli: anelli Cherenkov.

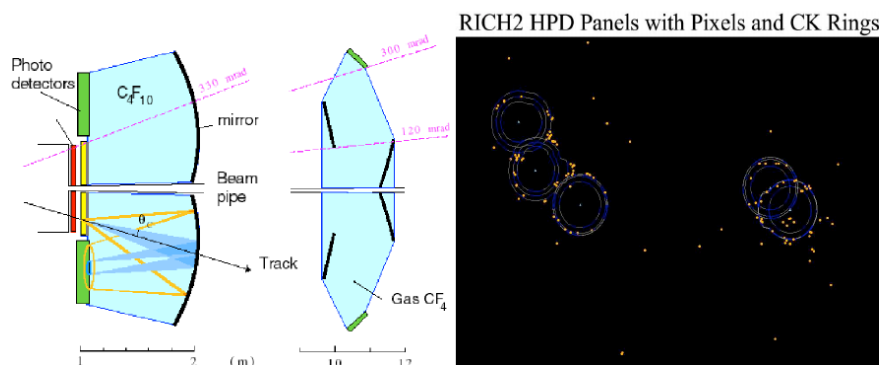


Figura 28: Rilevatore Cherenkov RICH.

Rilevatori DIRCH Questo tipo di rivelatore funziona come il Rich: misura l'angolo θ_c . L'indice di rifrazione del materiale è solitamente $n \sim 1.4$, per questo la luce viene riflessa internamente fino a raggiungere i lati del radiatore. Per evitare la luce venga riflessa anche al lato in cui vorremmo rilevare la radiazione si inserisce un distillato con $n \sim 1.33$ tra radiatore e fotorivelatori.

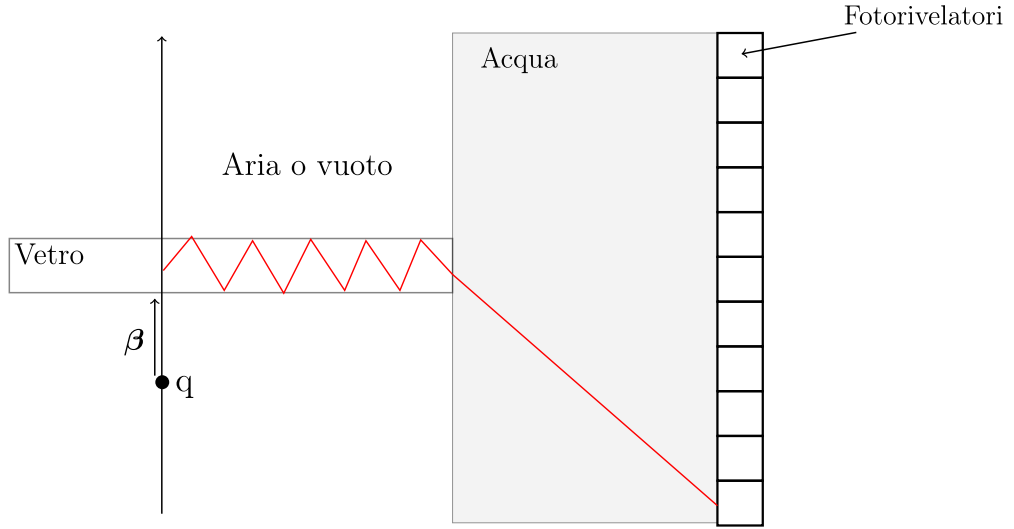


Figura 29: Rilevatori Cherenkov DIRCH.

4.b.6 Partendo dalla espressione

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \beta) \wedge \dot{\beta}]}{(1 - \hat{n} \cdot \beta)^2} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \hat{n}}{c})} dt' \right|^2.$$

dimostrare che l'energia persa per unità di frequenza nel caso non relativistico e' approssimabile con

$$I_\omega = \begin{cases} \frac{2q^2}{3\pi^2 c} |\Delta\beta|^2 & \text{per } \omega < 1/\tau \\ 0 & \text{per } \omega > 1/\tau \end{cases}.$$

Nel caso non relativistico la formula di partenza si scrive come :

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} \approx \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int \hat{n} \wedge [\hat{n} \wedge \dot{\beta}] e^{i\omega t'} dt' \right|^2.$$

Se applichiamo questa formula ad una carica non relativistica che si avvicina ad un centro scatterante (nucleo) allora possiamo stimare il tempo di interazione

$$\tau \approx \frac{b}{v}.$$

Con v velocità della particella e b parametro di impatto. Da questo tempo si ricava l'ampiezza di spettro di frequenza ottenibile in trasformata:

$$\Delta\omega \approx \frac{1}{\tau}.$$

Sappiamo quindi che per $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ la funzione $\frac{dI_\omega}{d\Omega}$ tenderà a zero (lemma di Rieman-Lebesgue), mentre per $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ sarà l'espressione scritta sopra integrata nel dominio temporale della intera interazione:

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} \approx \begin{cases} \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \hat{n} \wedge [\hat{n} \wedge \dot{\beta}] e^{i\omega t'} dt' \right|^2 & \text{con } \omega \ll \frac{1}{\tau} \\ 0 & \text{con } \omega \gg \frac{1}{\tau} \end{cases}.$$

Il modello sussiste quindi nell'approssimare questa funzione con uno scalino "centrato" in $\frac{1}{\tau}$, sostituiamo l'integrale già svolto:

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} \approx \begin{cases} \frac{q^2}{4\pi^2 c^3} |\Delta v|^2 \sin^2 \theta & \text{con } \omega < \frac{1}{\tau} \\ 0 & \text{con } \omega > \frac{1}{\tau} \end{cases}.$$

Dove è stato preso un sistema di riferimento in cui θ è l'angolo tra \mathbf{v} ed il versore di osservazione del campo \hat{n} . Integrando sull'angolo solido si ottiene in fine:

$$I_\omega = \frac{8}{3} \pi \frac{q^2}{4\pi^2 c^3} |\Delta v|^2 \left(1 - \theta \left(\omega - \frac{1}{\tau}\right)\right) \theta(\omega).$$

Che semplificando è l'espressione cercata (in cui si è fatto uso di distribuzioni).

4.b.7 Partendo dalla espressione

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \boldsymbol{\beta}) \wedge \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \hat{n}}{c})} dt' \right|^2.$$

dimostrare che l'energia persa per unità di frequenza nel caso non relativistico ad un dato parametro di impatto b è approssimabile con

$$I_\omega = \begin{cases} \frac{8z^2 Z^2 \alpha \hbar c^2}{3\pi} \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 \frac{r_e^2}{V^2} \frac{1}{b^2} & \text{con } \omega < \frac{V}{b} \\ 0 & \text{con } \omega > \frac{V}{b} \end{cases}.$$

Si parte in realtà dalla espressione ottenuta nella domanda precedente (all'esame se beccate questa avete già fatto ambo):

$$I_\omega = \begin{cases} \frac{2q^2}{3\pi^2 c} |\Delta \boldsymbol{\beta}| & \text{per } \omega < 1/\tau \\ 0 & \text{per } \omega > 1/\tau \end{cases}.$$

Il prossimo passo è calcolare $|\Delta \mathbf{v}|$ in funzione del parametro di impatto b , per farlo possiamo approssimare la traiettoria della particella scatterata ad una retta (approssimazione di angoli di scattering piccoli), sempre rispettata sperimentalmente in caso di Bremsstrahlung. In questo modo la variazione di quantità di moto è solo perpendicolare alla direzione di incidenza della particella ed il suo modulo è dato da:

$$|\Delta \mathbf{p}| \approx \left| \int_{-\infty}^{\infty} ze \mathbf{E}_\perp dt \right|.$$

Nella approssimazione in cui la velocità della particella risulti invariata:

$$|\Delta \mathbf{p}| \approx \frac{ze}{v} \left| \int \mathbf{E}_\perp dx \right| = \frac{ze}{2\pi bv} \left| \int 2\pi b \mathbf{E}_\perp dx \right| = \frac{ze}{2\pi bv} 4\pi Ze.$$

Dove nell'ultimo passaggio si è applicato Gauss in CGS.

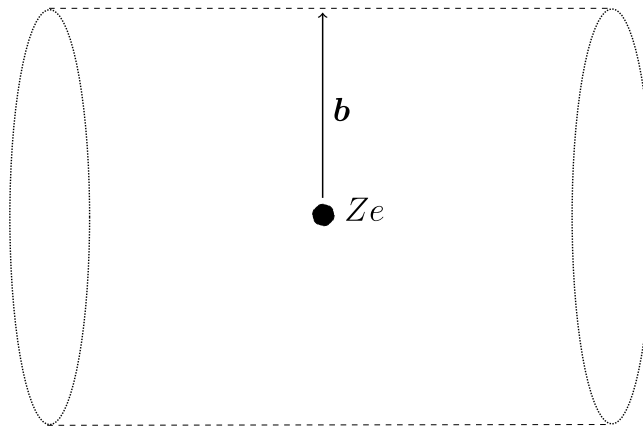


Figura 30: Gauss per un cilindro con una carica puntiforme all'interno

Quindi $|\Delta \mathbf{v}| = |\Delta \mathbf{p}|/M$, inserendo questo nella espressione di I_ω :

$$I_\omega = \begin{cases} \frac{2q^2}{3\pi^2 c^3} \frac{z^2 q^2}{4\pi^2 b^2 v^2 M^2} 16\pi^2 Z^2 q^2 & \text{per } \omega < 1/\tau \\ 0 & \text{per } \omega > 1/\tau \end{cases}.$$

Inserendo il raggio classico dell'elettrone $r_e = q^2/m_e c^2$ e la costante di struttura fine $\alpha = e^2/\hbar c$ semplificando si ottiene l'espressione cercata.

4.b.8 Dimostrare, a partire dalla espressione

$$\chi_\omega = \frac{16z^4 Z^2 \alpha \hbar c^2}{3} \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 \frac{r_e^2}{V^2} \ln \left[\frac{MV^2}{\hbar \omega} \right].$$

non relativistica, che nel caso relativistico la sezione d'urto di irraggiamento per elettroni è approssimabile, in un modello, con

$$\chi_\omega = \frac{16}{3} z^4 Z^2 \alpha \hbar r_e^2 \ln \left(\frac{195.5}{Z^{1/3}} \right).$$

Questo, e molto altro, è stato fatto nella Domanda 4.a.15.

4.b.9 Dimostrare che nel caso relativistico la perdita di energia per irraggiamento è approssimabile con

$$\frac{dE_{\text{irr}}}{dx} = n_{\text{nuclei}} \frac{16}{3} z^2 Z^2 \alpha \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 r_e^2 \ln \left[\frac{192}{Z^{1/3}} \frac{M}{m_e} \right].$$

e quindi l'espressione approssimata per la lunghezza di radiazione per elettroni

$$X_0 = \left(n_{\text{nuclei}} \frac{16}{3} \rho \frac{N_A}{A} Z^2 \alpha^2 r_e^2 \ln \left[\frac{192}{Z^{1/3}} \right] \right)^{-1}.$$

Anche questa è stata ricavata nella Domanda 4.a.15, si aggiunge solo che la lunghezza di radiazione, ottenuta la formula di cui sopra si deduce dal fatto che:

$$\frac{dE_{\text{irr}}}{dx} = \frac{E}{X_0}.$$

Nota È per l'energia persa che, nella equazione precedente, va il segno negativo al secondo termine.

4.b.10 Valutare la lunghezza di radiazione del Piombo e del Silicio con il modello spiegato a lezione ed effettuare un confronto con i valori sperimentali reperibili su internet.

Si applica la formula di Tsai semplificata:

$$\rho X_0 = \frac{1}{\frac{16}{3} \frac{N_A}{M_A} Z^2 \alpha r_e^2 \ln \left(\frac{184}{Z^{1/3}} \right)}.$$

Piombo: $Z = 82$, $A = 207$ Modello: $\rho X_0 = 4.4 \text{ g/cm}^2$; Dati: $\rho X_0 = 6.37 \text{ g/cm}^2$

Silicio: $Z = 14$, $A = 28$ Modello: $\rho X_0 = 17.5 \text{ g/cm}^3$; Dati: $\rho X_0 = 21.8 \text{ g/cm}^2$

4.b.11 Calcolare l'energia irradiata da un elettrone di 60MeV che attraversi 5.6mm di Pb e calcolare il numero medio di fotoni emessi di energia fra 1eV e 1MeV

La distanza percorsa è proprio la lunghezza di radiazione, quindi l'energia irradiata dall'elettrone è:

$$E_{\text{irr}} = E_{\text{in}} - E_{\text{lost}} = E \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 38 \text{ MeV}.$$

Per il numero di fotoni in quel range di energia possiamo sfruttare le due formule:

$$\frac{dN_\gamma}{d\omega} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dE_{\text{irr}}}{d\omega} = n_s \frac{\chi_\omega}{\hbar\omega} \qquad n\chi_\omega \frac{E}{\hbar} = n \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_e^2 \left(\ln \frac{192}{Z^{1/3}} \right) E = \frac{E}{X_0}.$$

scrivendo $n_s = n \cdot dx$ si ha:

$$\frac{dN_\gamma}{dx d\omega} = n \frac{\chi_\omega}{\hbar\omega} = \frac{1}{\omega X_0}.$$

Partiamo dall'integrare in ω , dobbiamo dapprima collegarla prima all'energia dei fotoni emessi tramite:

$$\omega = \frac{E}{\hbar}.$$

Quindi:

$$\frac{dN_\gamma}{dx} = \frac{1}{X_0} \int_{E_1/\hbar}^{E_2/\hbar} \frac{1}{\omega} d\omega.$$

Dobbiamo prestare attenzione al fatto che qui E è dello stesso ordine di X_0 , se cercassimo il numero di fotoni totali allora dovremmo tener di conto che l'energia sta diminuendo. Nel nostro caso invece i fotoni emessi a queste energie non risentono dell'effetto dell'ingresso in profondità perchè la particella ha sempre sufficiente energia per emettere tali frequenze in tutto il percorso (fantasticando), quindi:

$$N_\gamma = \frac{L}{X_0} \ln \left(\frac{E_2}{E_1} \right) \approx 15.$$

4.b.12 Calcolare il numero medio di fotoni emessi di energia fra 10 e 100 MeV per un elettrone di 1 GeV che attraversi 300 μm di Silicio o 1 mm di Piombo. Calcolare poi la probabilità che uno di questi fotoni effettui una interazione prima di uscire dal materiale.

Si applica la formula dell'esercizio precedente ricordando che, per il silicio $X_0 = 9.36 \text{ cm}$.

- Si: $N_\gamma = 0.5$
- Pb: $N_\gamma \approx 2.9$

La probabilità che un fotone effettui interazione prima di uscire dal materiale può essere calcolata utilizzando l'equivalenza tra i processi fondamentali di formazione di coppie e^+, e^- ed i processi come la Bremsstrahlung in cui invece vengono rilasciati fotoni. Quindi la lunghezza di irraggiamento X_0 può esser associata anche alla distanza in volo media di un fotone prima di produrre una coppia, da cui:

$$P_{\text{int}} \approx \frac{\Delta l}{X_0} \cdot N_\gamma = \begin{cases} 1.6 \cdot 10^{-3} & \text{Per il Silicio} \\ 50\% & \text{Per il Piombo} \end{cases}.$$

Sulla precisione di questa stima (ed il calcolo che invece andrebbe effettuato) vedi la domanda successiva.

4.b.13 Utilizzando le tabelle che forniscono le sezioni d'urto di fotoni su atomi, calcolare la probabilità che un fotone da 10 MeV produca una coppia e^+e^- in uno spessore di Piombo pari ad una lunghezza di radiazione.

Per fotoni incidenti con tale energia la sezione d'urto è $\sim 40 \text{ b}$, quindi la probabilità di interazione è:

$$P = n\sigma\Delta l = \frac{\rho N_A}{M_A} \sigma \Delta l \approx \frac{\Delta l}{0.76 \text{ cm}} \approx 75\%.$$

Quindi nella domanda precedente la probabilità ha un errore di stima di circa il 25%.

4.b.14 Calcolare l'energia minima e l'energia massima trasferibile in un singola collisione da una particella carica, di massa molto maggiore di quella dell'elettrone, in moto veloce attraverso la materia ad un singolo elettrone atomico.

Nell'ipotesi di piccoli angoli di scattering la variazione di impulso dell'elettrone è interamente ortogonale alla direzione di incidenza del proiettile, quindi:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{p} &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{\perp} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -e \mathbf{E}_{\perp} dt = \\ &= \frac{1}{v} \int_{-\infty}^{\infty} -e \mathbf{E} dx = \\ &= \frac{-e}{2\pi b v} \frac{Ze}{\epsilon_0} \hat{n}.\end{aligned}$$

I passaggi sono analoghi a quelli della Domanda 4.b.7, \hat{n} è il versore ortogonale a v .

L'energia trasferita ad un elettrone in funzione del parametro di impatto la si può calcolare come:

$$T(b) = \frac{|\Delta \mathbf{p}|^2}{2m} = \frac{Z^2 e^4}{4\pi^2 \epsilon_0 v^2} \frac{1}{2m} = 2Z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{b^2}.$$

Se si segue la logica del modello di Bohr per l'energia minima si ha che la durata dell'urto coulombiano è $\tau \sim \frac{b}{\gamma V}$, la richiesta di Bohr è che questo tempo sia minore del periodo di rotazione dell'elettrone atomico: $\tau < T_e \sim \frac{1}{\omega_e}$. Da questa ultima relazione se ne ricava un b_{\max} che sostituito nella energia ci da:

$$T_{\min} = 2Z^2 \frac{m_e r_e^2 \omega_e^2}{\beta^4 \gamma^2}.$$

Se si vuole l'energia massima si deve fare alcune affermazioni di cinematica relativistica e soffrire un pò.

Partiamo dal presupposto che per l'energia massima l'urto sarà centrale ($\cos \theta = 1$), in tal caso gli impulsi iniziali e finali sono paralleli, calcoleremo proprio questa energia cinetica (che sarà quindi la massima). Prendiamo la seguente notazione:

- Quantità utili del proiettile Z: $E_Z^{(\text{in})} = E$ $\mathbf{p}_Z^{(\text{in})} = \mathbf{p}$ $\mathbf{p}_Z^{(\text{fin})} = \mathbf{p}_Z$
- Quantità utili dell'elettrone inizialmente fermo: $E_e^{\text{fin}} = E_e$ $\mathbf{p}_e^{\text{fin}} = \mathbf{p}_e$

Le leggi di conservazione si scrivono come:

$$\begin{cases} E + m_e = E_Z + E_e \\ \mathbf{p}_Z = \mathbf{p} - \mathbf{p}_e \end{cases}.$$

Il nostro obbiettivo è eliminare gli impulsi finali nel modo meno doloroso possibile: non esplicitiamo subito l'energia iniziale di Z perchè tanto ce la portiamo quasi in fondo nel conto così com'è.

Eleviamo al quadrato la seconda e tiriamo fuori l'energia cinetica finale dell'elettrone dalla prima:

$$\begin{cases} E + m_e = \sqrt{p_Z^2 + M^2} + T + m_e \\ p_Z^2 = p^2 + p_e^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}_e \end{cases}.$$

Per avere il sistema da risolvere ci manca la terza equazione che lega l'energia cinetica all'impulso dell'elettrone finale:

$$\sqrt{p_e^2 + m_e^2} = T + m_e \implies p_e = \sqrt{T^2 + 2Tm_e}.$$

Sostituendo nell'ultima sopra si ha:

$$p_Z^2 = p^2 + T^2 + 2Tm_e - 2p\sqrt{T^2 + 2Tm_e}.$$

Adesso ci divertiamo a togliere la radice dalla prima equazione del sistema in alto elevandola al quadrato (semplificando m_e diventa più semplice):

$$E^2 + T^2 - 2T \cdot E = p_Z^2 + M^2 \implies p_Z^2 = E^2 + T^2 - 2T \cdot E - M^2.$$

È arrivato il momento di esplicitare E^2 , lasciamo invece per essere brevi E :

$$E^2 = p^2 + M^2.$$

Se inseriamo E^2 l'equazione si semplifica notevolmente, riscriviamo il sistema:

$$\begin{cases} p_Z^2 = p^2 + T^2 - 2T \cdot E \\ p_Z^2 = p^2 + T^2 + 2Tm_e - 2p\sqrt{T^2 + 2Tm_e} \end{cases}.$$

Abbiamo raggiunto il nostro scopo, possiamo eguagliare le equazioni rimuovendo p_Z :

$$-T \cdot E = Tm_e - p\sqrt{T^2 + 2Tm_e}.$$

Questa si risolve rapidamente con la seguente sostituzione: $x = \sqrt{T}$. Si ottiene:

$$(m_e + T)x^2 = x \cdot p\sqrt{x^2 + 2m_e}.$$

Semplificando una x ed elevando ambo i membri al quadrato si ha:

$$(m_e + E)^2 x^2 = p^2 (x^2 + 2m_e).$$

Isolando $x^2 = T$ si arriva al risultato:

$$T = \frac{2m_e p^2}{(m_e + E)^2 - p^2} = \frac{2m_e M^2 \beta^2 c^2 \gamma^2}{m_e^2 + p^2 + M^2 - p^2 + 2Em_e}.$$

Portando al denominatore M^2 e ricordando che $E = M\gamma$ si conclude:

$$T = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 + 2\gamma \frac{m_e}{M}}.$$

Nel nostro caso $M \gg m_e$, quindi: $T_{\max} = 2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2$.

4.b.15 Indicare le ipotesi effettuate e dimostrare la seguente espressione approssimata

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE_{\text{coll}}}{dx} = z^2 \frac{Z}{A(g)} 4\pi \frac{m_e c^2}{\beta^2} N_A r_e^2 \left(\ln \frac{c^2 \beta^3 \gamma^2}{z \omega_e r_e} \right).$$

per la perdita di energia per collisioni (formula di Bohr)

Consideriamo un tratto Δx di materia e cerchiamo di calcolare l'energia media trasmessa in collisioni elettroniche in questo tratto, ci serve la concentrazione degli elettroni:

$$n_e = \rho \frac{Z}{M_A} N_A = \rho \frac{Z}{A \cdot 1g} N_A.$$

L'energia media trasmessa in un tratto Δx è data dalla media di collisioni nel volume cilindrico sotteso a Δx :

$$\Delta T_{\text{coll}} = T(b) 2\pi b n_e \Delta x db.$$

Perciò in un tratto infinitesimo e mediando sui possibili parametri di impatto troviamo l'espressione della Stopping Power:

$$\left\langle \frac{dE_{\text{coll}}}{dx} \right\rangle = n_e \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 2\pi T(b) b db = 4\pi n_e z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} r_e^2 \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}} \right).$$

Nel caso di Bhor le approssimazioni sono state spiegate nella domanda precedente, manca di ricavare il b_{\min} a partire dalla espressione (sopra) di T_{\max} :

$$b_{\min} = \sqrt{2z^2 \frac{m_e c^2}{\beta^2} \frac{r_e^2}{T_{\max}}} = \frac{z r_e}{\beta^2 \gamma}.$$

Per quanto riguarda il b_{\max} si ha invece:

$$b_{\max} = \frac{\gamma V}{\omega_e}.$$

Sostituendo i due parametri di impatto limite si ha la soluzione.

- 4.b.16** Utilizzando la modellizzazione $I = (16 \text{ eV}) \cdot Z^{0.9}$, valutare il valore minimo dell'energia persa per collisioni, in MeV/g/cm², per i seguenti materiali:
i) Piombo
ii) Silicio
iii) aria a TPN.

Dobbiamo applicare la formula di Bethe-Block nei pressi del minimo di energia persa per collisioni: $\gamma\beta \approx 3.5$. Dalla correlazione tra γ e β questo significa che $\beta \approx 0.96$, quindi lo approssimeremo all'unità commettendo un errore del 4%.

Inoltre si trascureranno anche i termini correttivi della formula e si lavorerà nella approssimazione $\gamma \ll M/m_e$:

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{dE_{\text{coll}}}{dx} \right\rangle = z^2 \frac{Z}{A} \frac{K}{\beta^2} \left(\ln \frac{(2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2)}{I} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right).$$

Dove K vale:

$$K = N_A \frac{4\pi m_e c^2 r_e^2}{1 \text{ g}} = 0.307 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}}.$$

Nel nostro caso si considerano gli urti su elettroni $z = 1$. Possiamo inoltre trascurare il termine di fermi, infatti questo è rilevante per alti valori di $\gamma\beta$ e non nei pressi del minimo. Quindi ci si riduce a :

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \frac{dE_{\text{coll}}}{dx} \right\rangle = 0.307 \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}} \frac{Z}{A} \left(\ln \left(7.5 \cdot 10^5 \frac{1}{Z^{0.9}} \right) - 1 \right).$$

	Z	A	$E_{\text{coll}} \frac{\text{MeV} \cdot \text{cm}^2}{\text{g}}$
Piombo	82	207	1.04
Silicio	14	28	1.56
Aria a TPN (azoto)	7	14	1.66

- 4.b.17** Nell'approssimazione di piccoli angoli e distribuzione gaussiana di varianza nota, calcolare il valor medio, il valore quadratico medio e la sigma per:
i) l'angolo di multiplo scattering rispetto alla direzione iniziale della particella
ii) la sua proiezione su un piano che contenga la direzione iniziale della particella.

Assumiamo che la particella si muova inizialmente lungo l'asse \hat{z} . Sia θ l'angolo di multiplo scattering rispetto alla direzione \hat{z} e θ_x, θ_y le sue proiezioni sui piani xz e yz rispettivamente.

Se si assume che gli ultimi due angoli siano distribuiti gaussianamente per simmetria devono avere anche la stessa deviazione standard e media nulla:

$$P(\theta_x) = \frac{1}{\theta_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\theta_x^2 / 2\theta_0^2}.$$

Analogamente per θ_y . Di questa distribuzione sappiamo che:

$$\langle \theta_x \rangle = \langle \theta_y \rangle = 0.$$

$$\langle \theta_x^2 \rangle = \langle \theta_y^2 \rangle = \theta_0^2.$$

$$\sigma_{\theta_x} = \sigma_{\theta_y} = \theta_0.$$

Considerando che geometricamente $\theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2$ possiamo cercare la distribuzione di θ , la si trova imponendo la normalizzazione sulle due proiezioni:

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_y P(\theta_x) P(\theta_y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_x \int_{-\infty}^{\infty} d\theta_y \frac{1}{2\pi\theta_0^2} \exp\left(-\frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{2\theta_0^2}\right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\theta}{\theta_0^2} e^{-\theta^2 / 2\theta_0^2} d\theta. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi la funzione di distribuzione su θ :

$$P(\theta) = \frac{\theta}{\theta_0^2} e^{-\theta^2/2\theta_0^2}.$$

Possiamo quindi calcolare i valori richiesti anche per quest'ultima:

$$\begin{aligned}\langle\theta\rangle &= \int_0^\infty \frac{\theta^2}{\theta_0^2} e^{-\theta^2/2\theta_0^2} d\theta = \theta_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ \langle\theta^2\rangle &= \int_0^\infty \frac{\theta^3}{\theta_0^2} e^{-\theta^2/2\theta_0^2} d\theta = 2\theta_0^2 \\ \sigma_\theta &= \sqrt{\langle\theta^2\rangle - \langle\theta\rangle^2} = \theta_0 \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}.\end{aligned}$$

Inoltre il massimo di $P(\theta)$ è proprio θ_0

4.b.18 Dimostrare l'espressione approssimata per l'angolo quadratico medio di multiplo scattering (proiezione su un piano):

$$\theta_0 = z \frac{\text{costante}}{P\beta c} \sqrt{\frac{L}{X_0}}.$$

e confrontare il valore della costante ottenuta con la formula contenuta nel PDG.

Per effettuare il conto è necessario prima calcolare lo scarto quadratico medio sul singolo urto e successivamente sommare su tutti i centri scatteranti tenendo conto della composizione del materiale.

Partiamo dalla sezione d'urto Mott per il singolo urto e approssimiamola nel caso di angoli di scattering piccoli:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZ\alpha\hbar c}{2PV} \right)^2 \frac{1 - \beta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} = \left(\frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV} \right)^2 \frac{1}{\theta^4}.$$

Il termine d'innanzi alla frazione con θ deve avere le dimensioni di una distanza al quadrato, lo definiamo come:

$$l = \frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV} \implies \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{l^2}{\theta^4}.$$

Si può calcolare lo scarto quadratico medio su un urto conoscendo questa distribuzione approssimata:

$$\langle\theta_{\text{urto}}^2\rangle = \frac{\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \theta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega} = \frac{\int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \frac{l^2}{\theta^2} 2\pi \sin \theta d\theta}{\sigma_{\text{ms}}} \approx \frac{2\pi l^2}{\sigma_{\text{ms}}} \ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}}.$$

Cerchiamo di riscrivere quest'ultima utilizzando il parametro di impatto, è noto che, per questo scattering:

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{zZ\alpha\hbar c}{PV} \frac{1}{b} \implies \theta \approx \frac{l}{b}.$$

Il vantaggio di usare b è che sappiamo bene b_{\max} e b_{\min} :

$$\begin{aligned}b_{\min} &= R_{\text{nucleo}} = r_0 A^{1/3} \\ b_{\max} &= R_{\text{atomo}} = 1.4a_0 Z^{-1/3}.\end{aligned}$$

Si ha allora che:

$$\ln \frac{\theta_{\max}}{\theta_{\min}} = \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}} = \ln \frac{1.4 \cdot 0.53 \cdot 10^5 \text{ fm}}{1.4 \text{ fm} (AZ)^{1/3}} \approx \ln \frac{5.3 \cdot 10^4}{\sqrt[3]{2} Z^{2/3}} = 2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}}.$$

Dove si è sfruttata anche l'approssimazione $A \approx 2Z$. Quindi

$$\langle\theta_{\text{urto}}\rangle \approx \frac{4\pi l^2}{\sigma_{\text{ms}}} \ln \frac{205}{Z^{1/3}}.$$

L'angolo quadratico medio totale si ottiene quindi sommando in quadratura su tutti gli urti:

$$\langle\theta^2\rangle = N_{\text{urti}} \langle\theta_{\text{urto}}^2\rangle = 4\pi n L l^2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}}.$$

Ricordando adesso che la lunghezza di radiazione dalla formula di Tsai approssimata è:

$$X_0 \approx \frac{1}{4Z^2 n \alpha r_e^2 \ln \frac{184}{Z^{1/3}}}.$$

si può concludere che :

$$\begin{aligned} \sqrt{\langle \theta^2 \rangle} &= \sqrt{\frac{X_0}{X_0} 4\pi n L l^2 \ln \frac{205}{Z^{1/3}}} = \\ &= l \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{4\pi n \ln \frac{205}{Z^{1/3}}}{4Z^2 n \alpha r_e^2 \ln \frac{184}{Z^{1/3}}}} \approx \\ &\approx l \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{\pi}{Z^2 \alpha r_e^2}} = \\ &= \frac{2zZ\alpha\hbar c}{PV} \frac{1}{r_e} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{\pi}{Z^2 \alpha}} = \\ &= \frac{\sqrt{2} z m_e c^2}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \approx \\ &\approx z\sqrt{2} \frac{14.6 \text{ MeV}}{PV} \sqrt{\frac{L}{X_0}}. \end{aligned}$$

Da confrontare con la costante del PDG che vale invece 13.6 MeV.

Per ottenere θ_0 basta dividere la precedente per la radice di 2.

4.b.19 Utilizzando le opportune tabelle, anche reperibili su web, per le seguenti particelle:

- i) elettrone 3.5MeV
- ii) elettrone 100MeV
- iii) pione di 1GeV
- iv) muone di 45 GeV
- v) protone da 7 TeV

Che attraversino:

- a) 2 mmPb
- b) 2 mm scintillatore
- iii) 0.3 mm Silicio
- iv) 1 m Aria

Indicare se siano rilevanti e, in caso affermativo, calcolare le seguenti quantità:

- a) energia persa per irraggiamento
- b) l'energia persa per collisioni
- c) probabilita' di interazione forte con i nuclei
- d) angolo quadratico medio di multiplo scattering.

Alcune delle cose che ci serviranno sono nella seguente tabella:

Materiale	Z	A	nuclear interaction length (g/cm ²)	radiation length g/cm ² cm		density (g/cm ³)	minimum dE(coll)/dx (MeV/g/cm ²)
Alluminio (Al)	13	27,0	106,4	24,0	8,9	2,7	1,615
Argon gas TPN (Ar)	18	39,95	117,2	19,6	11000	0,001782	1,476
Argon liquido (Ar)	18	39,95	117,2	19,6	14,0	1,396	1,476
Aria gas TPN			90,0	36,7	30420,0	0,001205	1,815
Aria liquida			90,0	36,7	28,4	1,2931	1,815
Ferro (Fe)	26	55,8	131,9	13,9	1,76	7,87	1,76
Grafite (C)	6	12,0	86,3	42,7	18,84	2,265	1,74
Piombo (Pb)	82	207,0	194,0	6,4	0,56	11,35	1,12
Polyvinyltolulene (scint)			81,5	43,8	42,5	1,03	1,96
Silicio cristallino (Si)	14	28,0	106,0	21,8	9,36	2,33	1,664

Figura 31: Tabella con proprietà di alcuni materiali.

Dobbiamo ripassare, quantità per quantità, tutte le cose che ci serviranno sulle particelle:

Energia persa per irraggiamento Questa è trascurabile per tutti tranne che per gli elettroni. Per questi ultimi dobbiamo distinguere tra elettroni aventi energia maggiore o minore dell'energia critica:

$$E_c \approx 98 \frac{\text{MeV}}{Z^{1/3}}.$$

Se gli elettroni hanno una energia maggiore di quest'ultima allora si applica

$$E_{\text{irr}} = E_0 e^{-x/X_0}.$$

Altrimenti potremmo dare una stima dell'energia irraggiata mediante la formula per uno schermaggio incompleto come spiegato sul Jackson, ma la risposta sarà comunque che questa energia è trascurabile rispetto a quella persa per collisioni.

Energia persa per collisioni Se l'energia persa per irraggiamento è trascurabile è pratico vedere se l'energia con cui il proiettile incide è sufficiente ad attraversare il materiale.

Per far questo è necessario utilizzare i dati ed i grafici sullo stopping range dal PDG, una volta messi i parametri ed ottenuta la curva di Range si effettuano i seguenti passaggi:

- Determinare il Range in ingresso $R(E_{\text{in}})$ graficamente.
- Calcolare il Range di uscita come $R(E_{\text{out}}) = R(E_{\text{in}}) - \Delta x$.
- Determinare E_{out} sulle x in corrispondenza di $R(E_{\text{out}})$,

Se l'energia trovata risulta graficamente prossima allo zero allora l'energia persa per collisioni è tutta l'energia incidente.

Se si ha invece una energia persa per irraggiamento non trascurabile rispetto all'energia in ingresso allora si applica la formula:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = z^2 \cdot \frac{4\pi m_e c^2 r_e^2 N_A}{A(g) \beta^2} \left[\frac{1}{2} \ln \left(\frac{2m_e \beta^2 c^2 \gamma^2}{I^2} T_{\text{Max}}^2 \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right].$$

Approssimando allegramente per tutti $I \approx 10$ [MeV] $\cdot Z$, $T_{\text{Max}} \approx 2m_e^2 c^2 \beta^2 \gamma^2$, l'espressione diventa più facile:

$$E_{\text{coll}} \approx \rho z^2 \frac{K}{A \cdot \beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 \right] \cdot \Delta x =$$

Sostituendo il valore di K (ottenuto raggruppando alcuni termini) si ha :

$$E_{\text{coll}} = \frac{\rho z^2}{A \cdot \beta^2} \left[0.307 \frac{[\text{MeV}] \cdot [\text{cm}]^2}{[\text{g}]} \right] \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 \right] \cdot \Delta x.$$

Probabilità di interazione forte Questa interazione avviene soltanto per adroni, quindi nel nostro caso il π^- ed il p . Per queste particelle si calcola la sezione d'urto nucleare come l'area della circonferenza avente raggio la somma del raggio del proiettile e del raggio del nucleo bersaglio:

$$\sigma = \pi (r_p + R)^2 = \pi \left(1.25 + 1.25 \cdot A^{1/3} + 2 \right)^2 \text{ fm}^2.$$

successivamente il conto da fare è:

$$P_{\text{forte}} = \sigma \frac{\rho N_A}{A} x.$$

Angolo quadratico medio di multiplo scattering Se la particella riesce ad uscire il conto da effettuare è quello della Domanda 4.b.18

4.b.20 Per un muone che attraversi, incidendo perpendicolarmente, una lastra di Ferro di 5cm di spessore in cui è presente un campo magnetico di intensità nota, calcolare il valore numerico del rapporto fra la deflessione angolare dovuta al campo magnetico e la dispersione quadratica media dovuta al multiplo scattering. Come sarà la funzione di distribuzione dell'angolo in uscita? Quale è la dipendenza dall'energia del muone incidente?

Ipotizziamo che l'energia del muone sia tale da garantire che oltrepasserà la lastra (possiamo tornarci dopo) e che la frazione di energia persa nella lastra sia molto inferiore dell'energia iniziale in modo da considerare la curvatura magnetica uniforme.

Calcoliamo per prima cosa il raggio di curvatura dovuto al solo campo magnetico:

$$R = \frac{mv}{eB} = \frac{P}{eB} = \frac{3}{10} \frac{P [\text{GeV}/c]}{B [\text{T}]}.$$

Dove si è utilizzato l'esoterica conversione della carica elementare in unità gaussiane. Con un pò di geometria si calcola il seno dell'angolo di deflessione magnetico:

$$\sin \theta_m = \frac{x}{R} = \frac{50}{3} \cdot 10^{-3} [\text{m}] \frac{B [\text{T}]}{P [\text{GeV}/c]}.$$

Approssimando adesso angoli piccoli (è necessario che $\frac{P [\text{GeV}/c]}{B [\text{T}]} > \sim 1$) si ottiene:

$$\theta_m = \frac{x}{R} \approx 15 \text{ mrad} \frac{[\text{m}]}{P [\text{GeV}/c]} B [\text{T}].$$

Per l'angolo quadratico medio di multiplo scattering si ha invece:

$$\theta_0 = \frac{13.6 [\text{MeV}]}{PV} \sqrt{\frac{5 [\text{mm}]}{X_0}}.$$

Nel ferro si ha $X_0 = 1.76 \text{ cm}$, inoltre possiamo assumere $\beta \sim 1$ per la nostra stima, quindi:

$$\theta_0 \approx \frac{13.6 \cdot 10^{-3} [\text{GeV}]}{P [\text{GeV}/c] [\text{m/s}]} \sqrt{\frac{5 \cdot 10^{-3} [\text{m}]}{1.76 \cdot 10^{-2} [\text{m}]}} \approx 7.24 \text{ mrad} \cdot \frac{[\text{GeV}]}{P [\text{GeV}/c] [\text{m/s}]}.$$

Quindi il rapporto cercato (sempre per impulsi sufficienti a garantire l'uscita del muone e angoli di deflessione piccoli) è indipendente dall'impulso:

$$\frac{\theta_m}{\theta_0 \sqrt{2}} \approx 1.5 \cdot B [\text{T}].$$

La distribuzione angolare sarà in tal caso una Moliere centrata in θ_m .

4.b.21 Cercando i dati nelle apposite figure o tabelle si calcolino il valore (o i limiti) dell'energia degli elettroni emessi nello stato finale della reazione $\gamma + \text{C}$ per energie del fotone incidente pari a: 1keV, 10keV, 100keV, 1MeV, 10MeV.

La sezione d'urto di un fotone sull'atomo di carbonio segue questi andamenti:

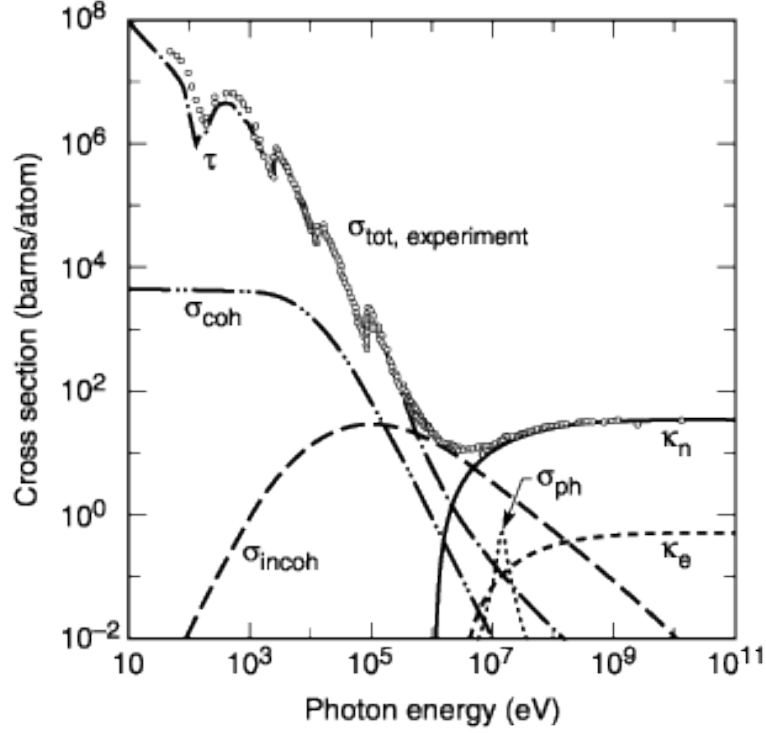


Figura 32: Sezione d'urto di fotone su carbonio.

Ad 1 keV il processo dominante è il fotoelettrico. Per questo processo l'energia cinetica dell'elettrone prodotto è la stessa l'energia del fotone incidente (trascurando l'energia di legame dell'ordine di 1-10 eV).

A 10 keV domina ancora il fotoelettrico ma iniziano ad essere importanti anche il Rayleigh (σ_{coh} in figura) ed il Compton (σ_{incoh} in figura). Nel primo (che è uno scattering elastico) l'elettrone non acquista energia. Nel secondo invece l'energia dell'elettrone è compresa tra gli 0 ed i 9 keV a seconda dell'angolo di scattering:

$$E_{phot} = \hbar\omega = \frac{h}{\lambda}c.$$

Il cambio di frequenza del Compton è noto e vale

$$\Delta\lambda = \lambda' (1 - \cos\theta).$$

Con $\lambda' = 2.43\text{pm}$ lunghezza d'onda Compton.

La lunghezza d'onda iniziale vale: $\lambda = hc/E = hc/10\text{keV} \approx 20\text{ pm}$. Quindi al massimo questa può diventare $\lambda_{fin} = \lambda + 2\lambda'$ se l'urto è centrale. L'energia minima del fotone dopo l'urto è quindi:

$$E_{min}^{Compton} = \frac{h}{\lambda_{fin}}c = \frac{\frac{197}{2\pi}\text{MeV} \cdot \text{fm}}{24.86\text{pm}} \approx 1.3\text{ keV}.$$

Per differenza (conservazione dell'energia) si ottiene che l'elettrone può avere energia massima di $E_{max}^{el} \approx 8.7\text{ keV}$, l'energia minima si ha quando il coseno vale 1 e quindi la lunghezza d'onda del fotone non cambia. In tal caso $E_{min}^{el} = 0$.

A 100 keV ed a 1 MeV il dominante è il Compton mentre a 10 MeV inizia ad essere importante la produzione di coppie. Per la produzione di coppie trascurando il rinculo del nucleo ci si aspetta che ciascuno dei prodotti abbia energia di circa 5 MeV.

4.b.22 Ricavare la relazione tra angolo di scattering e cambio di frequenza nell'effetto Compton

Definiamo k e k' i vettori d'onda del fotone prima e dopo l'urto e p , p' il 4-impulso dell'elettrone prima e dopo l'urto. Dalla conservazione del quadrimpulso si deve avere che:

$$\hbar(k - k') = p' - p.$$

Facendo la norma quadra a destra e sinistra e ricordando che l'elettrone è considerato inizialmente fermo si ottiene:

$$2\hbar(0 + 0 - 2(\omega\omega' - kk' \cos\theta)) = m^2 + m'^2 - 2mE'.$$

In cui θ è l'angolo di scattering. Adesso sfruttiamo la conservazione dell'energia ($E' = \hbar\omega + m - \hbar\omega'$) per ottenere:

$$2\hbar^2\omega\omega'(1 - \cos\theta) = 2m_e\hbar(\omega - \omega') \implies \hbar(1 - \cos\theta) = m_e\left(\frac{1}{\omega'} - \frac{1}{\omega}\right).$$

Se passiamo alle lunghezze d'onda otteniamo la relazione cercata:

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta).$$

Dove $\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \text{ pm}$.

4.b.23 Cercando i dati delle sezioni d'urto totali nelle apposite figure o tabelle (reperibili anche nella compilazione Particle Data Group <http://pdg.lbl.gov>) si calcoli la probabilità di interazione di:

- un fotone da 100 eV che incida su 1 μm di grafite
- un fotone da 1 MeV che incida su 1 mm di grafite
- un fotone da 10 MeV che incida su 1 mm di Piombo
- un fotone da 50 KeV che incida su 1 μm di Piombo
- un neutrino da 100 GeV che incida su 1 km di grafite
- un protone da 100 GeV che incida su 1 cm di grafite

Partiamo dal metodo da adottare: la probabilità cercata è data da

$$P = n_s \sigma.$$

Dove n_s è la densità superficiale di bersagli. Questa quantità può essere espressa in funzione di variabili tipiche del materiale:

$$P = \frac{\rho}{A[\text{g}]} N_A L \sigma.$$

4.b.24 Esprimere la sezione d'urto Rayleigh in funzione della sezione d'urto differenziale Thomson e del fattore di forma atomico $F(\theta)$.

La sezione d'urto Rayleigh differenziale vale

$$\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} = \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \Big|_e |ZF(\mathbf{q})|^2 \quad \text{con} \quad \frac{d\sigma_{el}}{d\Omega} \Big|_e = \frac{r_e^2 \omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma_{tot}^2(\omega)} \sin^2 \theta.$$

Per ottenere quanto richiesto dal testo è necessario integrare sull'angolo solido e conoscere il fattore di forma dipendente dall'angolo di scattering θ .

4.b.25 Dimostrare, utilizzando il materiale distribuito, perchè nell'esperimento di Anderson sulla scoperta del positrone alcune tracce positive osservate non possono essere nessuna delle particelle positive conosciute nel 1932.

Riprendendo la trattazione della Domanda 4.a.34 l'impulso iniziale misurato da Anderson era $p_i = 63 \text{ MeV}/c$, quello finale invece era $p_f = 22.5 \text{ MeV}/c$, se fosse stato un protone (unica particella con quella carica positiva conosciuta allora) sarebbe stato:

$$E_i = \frac{p^2}{2m_p} \approx 2.1 \text{ MeV}.$$

Un protone con quella energia ha un range in aria di circa 7 mm, la traccia della foto di Anderson è lunga almeno 30 cm, per questo non poteva essere un protone.

4.b.26 Calcolare la velocità media dei pioni e antiprotoni nell'esperimento di Segrè (quantità di moto 1.19 GeV/c) dopo che hanno attraversato il contatore Cherenkov a quarzo (spessore 2.5", densità relativa 2.2).

Per il calcolo possiamo utilizzare lo spessore relativo del materiale:

$$\Delta x = x [\text{pollici}] \cdot \rho_{rel} = (2.5 \cdot 2.54) [\text{cm}] \cdot 2.2 [\text{g/cm}^3] = 13.9 [\text{g/cm}^2]$$

L'energia dell'antiprotone entrante è

$$E_{\bar{p}} = \sqrt{p_{in}^2 + m_p^2} \approx 1.51 \text{ GeV}.$$

Da cui l'energia cinetica: $T_{\bar{p}} = E_{\bar{p}} - m_p = 0.57 \text{ GeV}$.

Lo stopping power per tale energia e per il diossido di silicio (quarzo) vale $dE/dx = 2.17 \text{ MeV cm}^2/\text{g}$, da questo si ricava l'energia finale:

$$\Delta E = \frac{dE}{dx} \Delta x \approx 30.1 \text{ [MeV]} \implies T_f \approx 0.54 \text{ [GeV]}.$$

Quindi tornando indietro con le formule inverse si ricava che:

$$E_f = 1.48 \text{ GeV} = m_p \gamma = m_p \sqrt{\frac{1}{1 - \beta^2}}.$$

Quindi:

$$\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{m_p}{E_f}\right)^2} \approx 0.773.$$

Analogamente si può procedere per i pioni se solo esistessero le dannate tabelle.

Parte 5

Domande a scelta

c Domande c

Primo gruppo

5.c.1 Ricavare la sezione d'urto differenziale dello scattering di Rutherford, sia in funzione dell'angolo θ sia in funzione del parametro di impatto b .

La risposta è stata data nella Domanda 2.b.20.

Secondo gruppo

5.c.2 Dimostrare che

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega} = \frac{q^2}{4\pi^2 c} \left| \int \frac{\hat{n} \wedge [(\hat{n} - \beta) \wedge \dot{\beta}]}{(1 - \hat{n} \cdot \beta)^2} e^{i\omega(t' - \frac{\mathbf{r}' \cdot \hat{n}}{c})} dt' \right|^2$$

È l'energia per unità di frequenza irraggiata da una carica in moto generico in funzione dell'angolo di emissione.

Vedi la Domanda 3.a.14 per la dimostrazione.

Terzo gruppo

5.c.3 Dimostrare, a partire dall'espressione

$$\chi_\omega = \frac{16}{3} z^4 Z^4 \alpha \hbar c^2 \left(\frac{m_e}{M}\right)^2 \frac{r_e^2}{V^2} \ln \left(\frac{MV^2}{\hbar \omega}\right).$$

non relativistica, che nel caso relativistico la perdita di energia per irraggiamento per un elettrone è approssimabile con

$$\frac{dE^{\text{irr}}}{dx} = n_{\text{nuclei}} \frac{16}{3} z^4 Z^4 \alpha r_e^2 \ln \left(\frac{192}{Z^{1/3}}\right) E.$$

E che quindi nell'attraversare uno spessore x di materiale la sua energia (media) vale $E = E_0 e^{-x/X_0}$.

La risposta è stata discussa in modo completo nella Domanda 4.a.15, l'unico problema sta nel fatto che qua b_{max} e b_{min} sono quelli per lo schermaggio incompleto, per arrivare alla formula serve lo schermaggio completo e quindi diversi valori del parametro di impatto (l'argomento del logaritmo è errato nella prima formula se si vuole arrivare alla seconda).

Quarto gruppo

5.c.4 Dimostrare che il raggio nucleare si può ricavare tramite la misura del fattore di forma elettromagnetico di un nucleo utilizzando elettroni veloci. Indicare quali angoli di scattering devono essere coperti dalla strumentazione nel caso di elettroni di energia 1 GeV su un nucleo di Piombo.

Tutti i grafici riportati in questa sezione fanno riferimento ai dati del problema. Partiamo dallo Scattering Mott:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Mott}} = \left[1 - \beta^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \cdot \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}}.$$

In cui vi è una correzione allo scattering Rutherford, che ricordiamo essere:

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4T} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)}.$$

Dove T è l'energia cinetica della particella incidente, esprimibile anche come $T = pV/2$. L'andamento del Mott al variare di θ è:

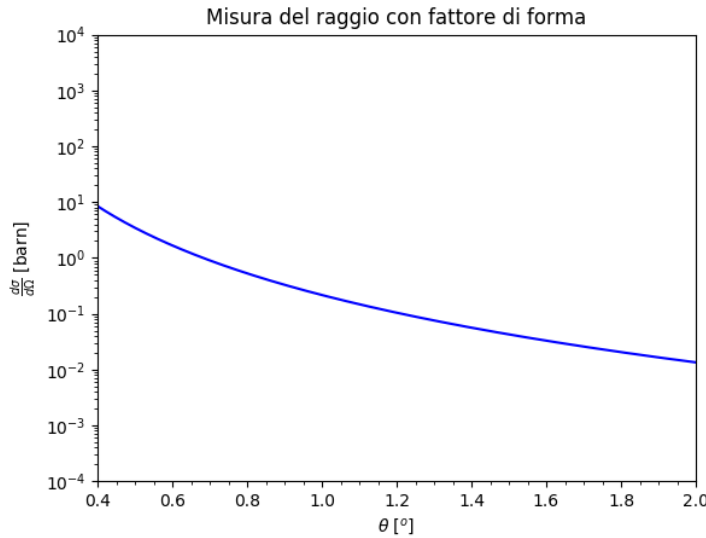


Figura 33: Sezione d'urto Mott differenziale

Quello che vorremmo noi è essere in grado di dare una dimensione al centro scatterante, con le sole formule scritte sopra non potremmo farlo perchè entrambi gli scattering si riferiscono a nuclei puntiformi. Per poter correggere lo scattering Mott dobbiamo ipotizzare che il nucleo sia sferico, in tal modo il calcolo effettuato per ottenere la sezione d'urto Mott resta valido (per il teorema della media se si vuole) e quando si considera il campo generato dalla carica Q bersaglio dobbiamo considerare il campo di una carica puntiforme con la correzione:

$$Q = F(\mathbf{q}) \int \rho(\mathbf{r}) d^3r = F(\mathbf{q}) Ze$$

Dove si aggiunge il fattore di forma per tener di conto della interferenza di ogni elemento infinitesimo della carica Q vista da un osservatore lontano. A questo punto la sezione d'urto sul nucleo diventa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |ZF(\mathbf{q})|^2 \left[1 - \beta^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right] \cdot \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Rutherford}}.$$

Il significato fisico di \mathbf{q} è il momento trasferito dall'elettrone (se moltiplicato per \hbar) durante lo scattering ed il suo modulo vale:

$$|\mathbf{q}| = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Con p impulso iniziale dell'elettrone. Per comprendere meglio la struttura del fattore di forma analizziamo la situazione dal punto di vista ondulatorio: la lunghezza d'onda di De Broglie dell'elettrone è $\lambda = h/p$, immaginiamo il nucleo come un ostacolo opaco di raggio R , un oggetto che faccia da barriera di potenziale per l'elettrone in modo che questo non possa penetrarvi. A titolo di esempio prendiamo il seguente modello semplificato:

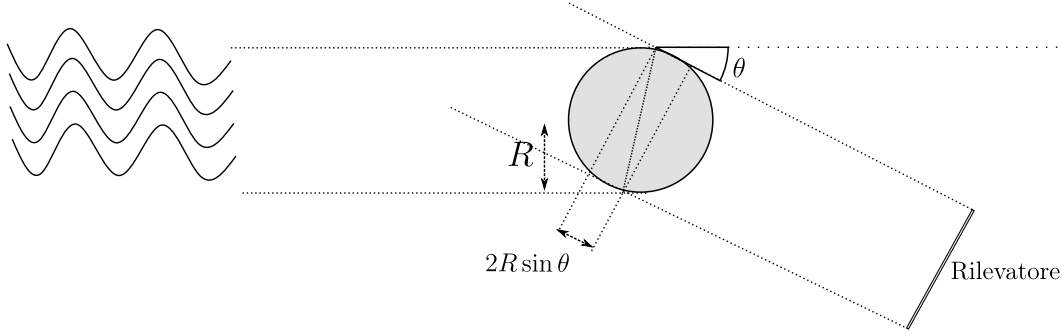


Figura 34: elettrone su nucleo

Le onde che passano sopra al nucleo percorrono una distanza $2R \sin \theta$ volte maggiore rispetto a quelle che passano sotto al nucleo per arrivare al rivelatore, questo comporta che (essendo il rivelatore e la distanza dall'evento di scattering entrambi molto maggiori di tutte le distanze disegnate) quando si verifica l'uguaglianza:

$$2R \sin \theta = \left(n + \frac{1}{2}\right) \lambda.$$

Le due onde arrivano in controfase e si ha quindi interferenza distruttiva, per tale angolo la sezione d'urto differenziale si annulla.

L'idea alla base è questa, in un modello più realistico dobbiamo considerare che le onde possono attraversare il nucleo, di queste onde se ne tiene di conto tramite il fattore di forma (che infatti incide direttamente sulla sezione d'urto differenziale: dove si annulla lui si annulla anche lei).

Il fattore di forma non è altro che la trasformata di Fourier della distribuzione di carica, quindi data una carica $Q = Ze$ con distribuzione ρ avente simmetria sferica si ha che il fattore di forma è del tipo:

$$F(\mathbf{q}) = \frac{1}{Ze} \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} d^3r.$$

Scegliendo un sistema di riferimento con coordinate sferiche l'integrale diventa:

$$\begin{aligned} Q \cdot F(\mathbf{q}) &= 2\pi \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \rho(r) r^2 e^{irq \cos \theta} \sin \theta d\theta dr \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^\infty \rho(r) r^2 e^{irq \cos \theta} |d \cos \theta| dr \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{iqr} - e^{-iqr}}{2iqr} r^2 \rho(r) dr \\ &= \frac{4\pi}{q} \int_{-\infty}^\infty r \sin(qr) \rho(r) dr. \end{aligned}$$

Modellizziamo adesso la distribuzione di carica come:

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\mathbf{r}| > R \\ \frac{3Q}{4\pi R^3} & \text{se } |\mathbf{r}| < R \end{cases}.$$

Ed inserita nel conto ci riporta a

$$F(q) = 3 \left(\frac{\sin(Rq)}{(Rq)^3} - \frac{\cos(Rq)}{(Rq)^2} \right).$$

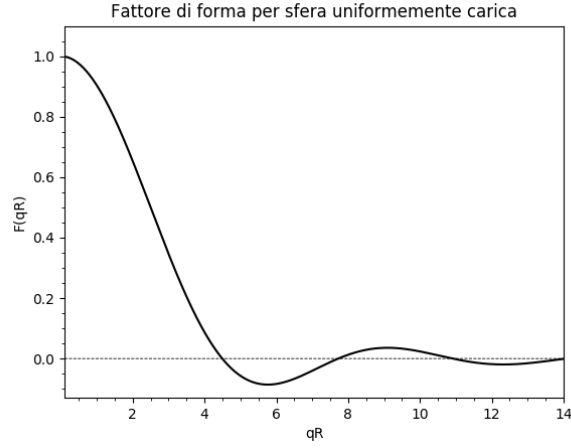


Figura 35: Fattore di forma per sfera uniformemente carica

Studiando i punti in cui si annulla questo fattore di forma è possibile estrapolare informazioni sul raggio atomico, informazioni sulle quali si può fare esperimenti misurando la sezione d'urto differenziale e confrontando il primo minimo con quello atteso ottenuto numericamente (diverso dallo zero che corrisponde ad angolo nullo):

$$Rq_{\min} = a \approx 4.5.$$

Inserendo l'espressione di q in funzione di angolo ed impulso:

$$2 \frac{p}{\hbar} \sin\left(\frac{\theta_{\min}}{2}\right) R = a \implies R = \frac{a\hbar}{2p \sin\left(\frac{\theta_{\min}}{2}\right)}.$$

Abbiamo quindi una espressione di R in funzione dell'angolo corrispondente al primo minimo di interferenza, ipotizziamo di voler verificare che il raggio nucleare del piombo sia:

$$R = \left(1.25 \cdot A^{1/3} + 2\right) [\text{fm}] = \left(1.25 \cdot 207^{1/3} + 2\right) [\text{fm}] \approx 9.4 [\text{fm}].$$

Con elettroni come nel testo, dobbiamo trovare l'impulso di tali elettroni:

$$p = \sqrt{E^2 - m^2} \approx 1 \text{ GeV}/c.$$

La costante di Plank ridotta in queste unità vale: $\hbar = 6.6 \cdot 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$. Se ne conclude che per misurare il raggio nucleare del piombo dovremmo posizionare una strumentazione che sia sensibile ad angoli di scattering tali che:

$$\frac{\theta}{2} = \arcsin\left(\frac{a\hbar}{2pR}\right) = \arcsin\left(\frac{4.5 \cdot 6.6 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^8}{2 \cdot 1 \cdot 10^9 \cdot 9.4 \cdot 10^{-15}}\right) \approx 0.3^\circ.$$

Quindi dovremmo avere una strumentazione sensibile almeno a 0.6° .

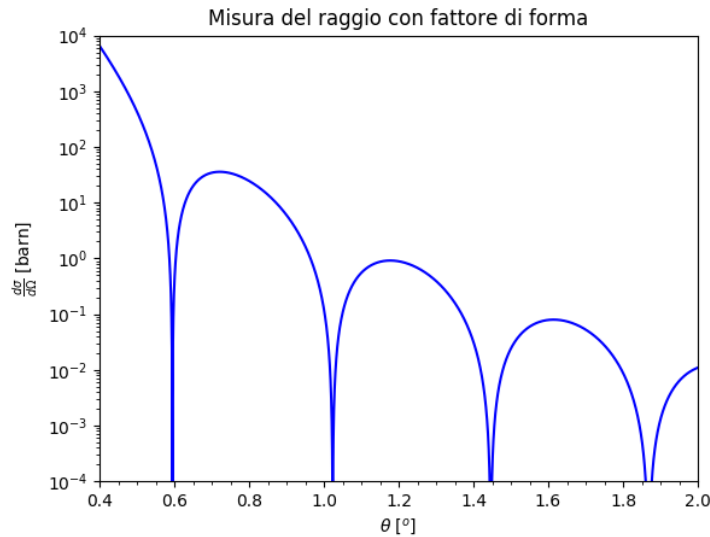


Figura 36: Sezione d'urto per un elettrone incidente su un atomo di piombo considerando $F(\mathbf{q})$