

Работа 1.2.5

Изучение вынужденной регулярной прецессии гироскопа

Морозов Александр

30 ноября 2022 г.

1 Введение

Цель работы: исследовать вынужденную прецессию гироскопа; установить зависимость скорости вынужденной прецессии от величины момента сил, действующих на ось гироскопа; определить скорость вращения ротора гироскопа.

В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка, осциллограф, генератор частоты.

2 Теоретический сведения

Уравнение движения твёрдого тела можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{P}}{dt} &= \vec{F} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}\end{aligned}\tag{1}$$

Момент импульса тела в главных его осях x , y , z равен

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z,$$

где I_x , I_y , I_z – главные моменты инерции, ω_x , ω_y , ω_z – компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$. Быстро вращающееся тело, для которого, например,

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, \quad I_y\omega_y,$$

принято называть гироскопом. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

В силу (1) приращение момента импульса определяется интегралом

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}dt.\tag{2}$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, из интеграла (2) следует, что приращение $\Delta\vec{L}$ момента импульса значительно меньше самого момента импульса:

$$|\Delta\vec{L}| \ll |\vec{L}|$$

С этим связана замечательная устойчивость, которую приобретает движение гироскопа после приведения его в быстрое вращение. Выясним, какие силы надо приложить к гироскопу,

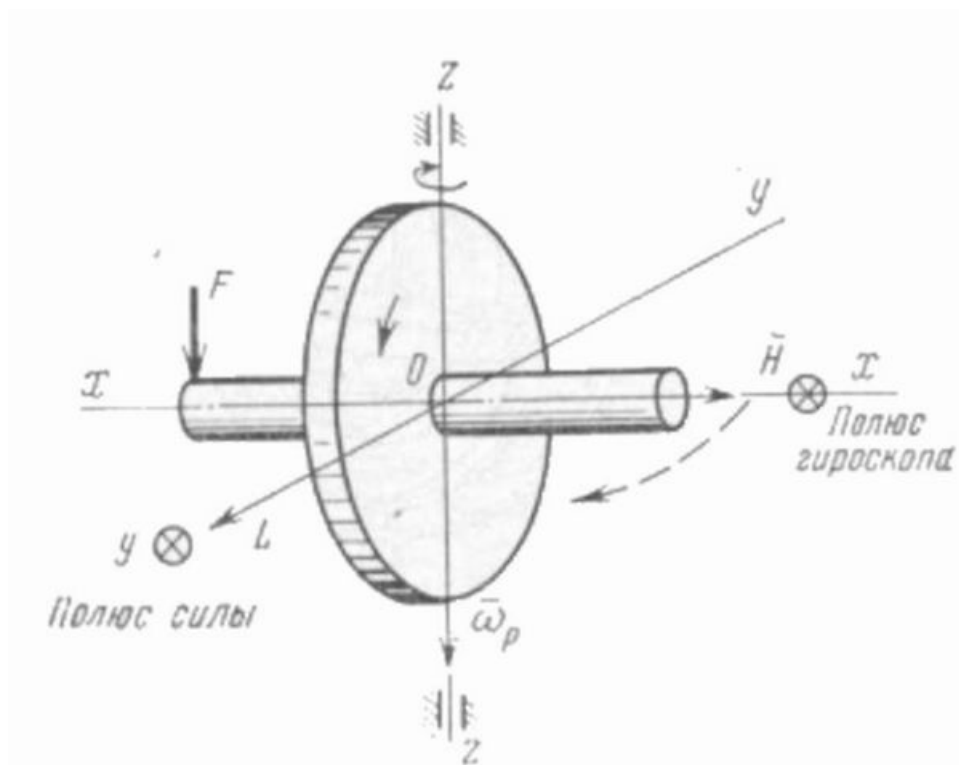


Рис. 1: Гироскоп

чтобы изменить направление его оси. Рассмотрим для примера маховик, вращающийся вокруг оси z , перпендикулярной к плоскости маховика (рис. 1). Будем считать, что

$$\omega_z = \omega_0, \quad \omega_x = 0, \quad \omega_y = 0.$$

Пусть ось вращения повернулась в плоскости zx по направлению к оси x на бесконечно малый угол $d\varphi$. Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси y , так что

$$d\varphi = \Omega dt,$$

где Ω – угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что

$$L_\Omega \ll L_{\omega_0} \quad (3)$$

Это означает, что момент импульса маховика, равный $I_z\omega_0$ до приложения внешних сил, только повернётся в плоскости zx по направлению к оси x , не изменяя своей величины. Таким образом,

$$|d\vec{L}| = Ld\varphi = L\Omega dt.$$

Но это изменение направлено вдоль оси x , поэтому вектор $d\vec{L}$ можно представить в виде векторного произведения вектора угловой скорости $\vec{\omega}$, направленного вдоль оси y , на вектор собственного момента импульса маховика, направленного вдоль оси z ,

$$d\vec{L} = \vec{\Omega} \times \vec{L} dt,$$

т. е.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}.$$

В силу (1) имеем

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L}. \quad (4)$$

Формула (4) справедлива, если выполнено условие (3). Она позволяет определить момент сил \vec{M} , который необходимо приложить к маховику для того, чтобы вызвать вращение оси маховика с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Мы видим, таким образом, что для поворота оси вращающегося маховика к оси x необходимо приложить силы, направленные не вдоль оси x , а вдоль оси y , так чтобы их момент \vec{M} был направлен вдоль оси x .

Для гироскопа массой m_r , у которого ось собственного вращения наклонена на угол α от вертикали, скорость прецессии, происходящей вокруг вертикальной оси под действием силы тяжести, равна

$$\Omega = \frac{M}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_r g l_{\text{ц}} \sin \alpha}{I_z \omega_0 \sin \alpha} = \frac{m_r g l_{\text{ц}}}{I_z \omega_0},$$

где $l_{\text{ц}}$ – расстояние от точки подвеса до центра масс гироскопа, т. е. скорость прецессии не зависит от угла α .

Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае равна

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (5)$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа.

Измерение скорости прецессии гироскопа позволяет вычислить угловую скорость вращения его ротора. Расчет производится по формуле (5). Момент инерции ротора относительно оси симметрии I_0 измеряется по крутильным колебаниям точной копии ротора, подвешиваемой вдоль оси симметрии на жесткой проволоке. Период крутильных колебаний T_0 зависит от момента инерции I_0 и модуля кручения проволоки f :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{f}}.$$

Чтобы исключить модуль кручения проволоки, вместо ротора гироскопа к той же проволоке подвешивают цилиндр правильной формы с известными размерами и массой, для которого легко можно вычислить момент инерции $I_{\text{ц}}$. Для определения момента инерции ротора гироскопа имеем

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2},$$

где $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

3 Методика измерений

Все измерения проводятся с использованием описанного ниже оборудования, далее они вносятся в таблицу Excel и подлежат обработке для нахождения погрешностей и построения графиков.

4 Используемое оборудование

- **Линейка:** $\Delta_{\text{лин}} = 0,001$ м
- **Секундомер:** $\Delta_{\text{сек}} = 0,5$ с - время реакции человека

- Электронные весы: $\Delta_{\text{вес}} = 0,001$ кг

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 Определение направления вращений ротора гироскопа

Направление вращения ротора гироскопа определяется достаточно просто, необходимо посмотреть, в какую сторону направлен вектор угловой скорости прецессии. Вектор угловой скорости ротора гироскопа будет направлен таким образом: начало в задней части гироскопа, конец в точке подвеса груза.

5.2 Определение момента инерции ротора гироскопа

Определим момент инерции ротора, путем измерения его у пробного цилиндра и, воспользовавшись пропорциональностью их моментов инерции и масс вычислим нужную нам величину.

5.2.1 Вычисление момента инерции цилиндра

Момент инерции цилиндра можно вычислить по следующей формуле:

$$I_{\text{ц}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} \left(\frac{d_{\text{ц}}}{2} \right)^2,$$

где $m_{\text{ц}}$ – масса цилиндра, $d_{\text{ц}}$ – его диаметр.

При измерении этих параметров получаем:

- $m_{\text{ц}} = (1,616 \pm 0,001)$ кг
- $d_{\text{ц}} = (0,077 \pm 0,001)$ м

Тогда

$$I_{\text{ц}} = 0,00127 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Погрешность вычисления момента инерции цилиндра может быть найдена по следующей формуле:

$$\sigma_{I_{\text{ц}}} = I_{\text{ц}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_m}{m_{\text{ц}}} \right)^2 + \left(2 \frac{\sigma_1}{d_{\text{ц}}} \right)^2} \approx 0,00003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Тогда получим конечное значение:

$$I_{\text{ц}} = (0,00123 \pm 0,00003) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

5.2.2 Измерение периода крутильных колебаний пробного цилиндра

Далее вычислим период крутильных колебаний цилиндра, подвесив его на проволоке и измерив время его 7 колебаний.

№	t , с	$N_{\text{кол}}$	T , с	$\langle T \rangle$, с	σ_T , с	ε_T , %
1	21,2	7	3,028	3,031	0,078	0,025
2	21,08	7	3,011			
3	21,3	7	3,042			

Таблица 1: Результат измерения периода крутильных колебаний цилиндра

Период колебаний цилиндра в отдельном опыте может быть рассчитан по формуле:

$$T = \frac{t}{N_{\text{кол}}}.$$

Среднее значение периода крутильных колебаний можно найти по формуле:

$$\langle T \rangle = \frac{1}{N_{\text{оп}}} \sum_{i=1}^{N_{\text{оп}}} T_i.$$

Случайную погрешность определения периода крутильных колебаний рассчитываем по формуле:

$$\sigma_T^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N_{\text{оп}} - 1} \sum_{i=1}^{N_{\text{оп}}} (T_i - \langle T \rangle)^2}.$$

Полная погрешность может быть вычислена по формуле:

$$\sigma_T = \sqrt{(\sigma_T^{\text{сл}})^2 + (\Delta_{\text{сек}})^2}$$

Таким образом период крутильных колебаний цилиндра будет равен:

$$T_{\text{ц}} = (3,031 \pm 0,078) \text{ с}$$

5.2.3 Измерение периода крутильных колебаний ротора гироскопа

Производим измерение времени $N_{\text{кол}}$ крутильных колебаний цилиндра и повторяем опыт $N_{\text{оп}} = 3$ раза. Полученные результаты заносим в таблицу 2.

№	t , с	$N_{\text{кол}}$	T , с	$\langle T \rangle$, с	σ_T , с	ε_T , %
1	16,36	7	2,187	2,215	0,033	1,03
2	16,8	7	2,255			
3	16,6	7	2,204			

Таблица 2: Результат измерения периода крутильных колебаний ротора гироскопа

Вычисления средних значений периода колебаний и погрешностей проводим по формулам, описанным выше.

Тогда для ротора:

$$T_0 = (2,215 \pm 0,033) \text{ с}$$

5.2.4 Вычисление момента инерции ротора гироскопа

Так как моменты инерции пропорциональны отношению квадратов периодов:

$$I_0 = I_{\text{ц}} \frac{T_0^2}{T_{\text{ц}}^2} = 0,00078 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Погрешность вычисления момента инерции ротора гироскопа можно вычислить по формуле:

$$\sigma_{I_0} = I_0 \sqrt{(\varepsilon_{I_{\text{ц}}})^2 + (2\varepsilon_{T_0})^2 + (\varepsilon_{T_{\text{ц}}})^2} \approx 0,00003 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

В итоге получаем:

$$I_0 = (0,00078 \pm 0,00003) \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

5.3 Определение частоты вращения ротора гироскопа при помощи осциллографа

Частоту вращения гироскопа можно получить при помощи осциллографа. В силу строения данного гироскопа, его можно подключить к осциллографу вместе с генератором. Если мы добьемся эллипса на его экране, это значит что частоты гироскопа и осциллографа синхронизировались, поэтому частота вращения гироскопа в данный момент равна частоте на генераторе. У нас получился стабильный эллипс при частоте генератора

$$\nu = 390,1 \text{ Гц}$$

5.4 Вычисление момента сил трения

Проведем серию измерений, отклоняя носик гироскопа на одинаковый угол в 10 градусов и измеряя время, за которое он вернется в горизонтальное положение. Так как мы знаем момент инерции ротора, достаточно найти угловую скорость во всех измерениях и вычислить соответствующие погрешности.

$$M = \Omega I_0 \omega_0$$

m, гр	57	74	92	116	142	180	219	273
T, с	178	132	109	86	71	60	46	39
Ω , 1/с	0,005618	0,007576	0,009174	0,011628	0,014085	0,016667	0,021739	0,025641
M, Н*м	0,001709	0,002305	0,002792	0,003538	0,004286	0,005071	0,006615	0,007802

Рис. 2: Зависимость периода прецессии от массы груза

Из таблицы получим среднее значение момента сил трения: $M = 0,00426 \text{ Н} \cdot \text{м}$
Погрешность определения момента силы трения равна:

$$\sigma_M = M \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_\Omega^2} \approx 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Тогда получим конечный результат для момента силы трения:

$$M = 0,00425 \pm 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}$$

5.5 Определение частоты гироскопа по затуханию

Выключим подачу энергии на ротор и, регулируя частоту на генераторе будем пытаться сохранить эллипс на экране осциллографа, таким образом мы сможем получить зависимость частоты гироскопа от прошедшего времени и, при помощи МНК получить его частоту при работе в стационарном режиме.

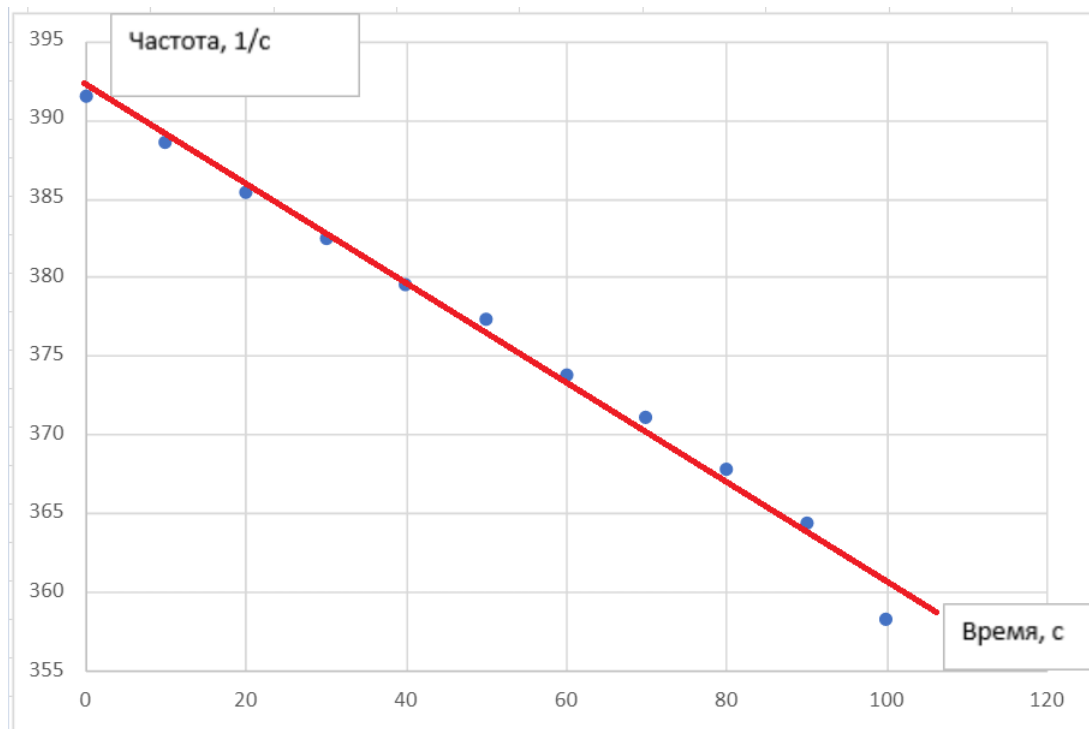


Рис. 3: Зависимость периода прецессии от массы груза

Таким образом частота получается равной $\nu = 393,1 \pm 2$ Гц

6 Обсуждения результатов

Результаты можно считать вполне точными, так как они лежат в пределах погрешности и были сделаны очень аккуратно, а также частоты в обоих случаях измерений совпадают

7 Вывод

Прецессия гироскопа зависит от разных факторов, таких как момент сил, момент инерции и угловая скорость вращения. При дальнейшей работе с гироскопом ею нельзя пренебрегать.