Работа 1.4.1
Изучение физического маятника

Морозов Александр

30 ноября 2022 г.

1 Аннотация

Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от момента его инерции.
В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

2 ТеорЕтические сведения

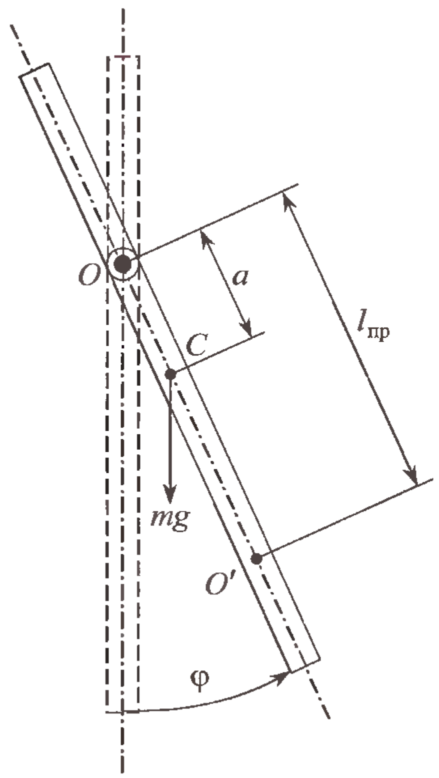

Рис. 1: Физический маятник

Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \tag{1}$$

где I – момент инерции маятника, φ – угол отклонения маятника от положения равновесия, t - время, - момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной l. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2,$$

где m – масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на маятник,

$$M = -mga\sin\varphi.$$

Если угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$, так что

$$M \approx -mga\varphi$$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для I и M в (1), получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \tag{2}$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}.$$

Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}}$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний. Это утверждение (изохорность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравнению (2). Движение маятника описывается по этой формуле только для малых углов φ.

Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}},$$

где l' – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a}$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку O' (см. рис. 1), отстоящую от точки опоры на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период будет таким же, как и при качании вокруг точки O.

Используя формулу для периода физического маятника получаем следующее соотношение:

$$T^2 a = \frac{4\pi^2}{g} a^2 + \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

Отсюда можно сделать вывод о том, что $T^2 a$ линейно зависит от a^2, поэтому это зависимость можно представить в виде

$$T^2 a = k a^2 + b,$$

где

$$k = \frac{4\pi^2}{g} \text{ и } b = \frac{\pi^2 l^2}{3g}.$$

3 Методика измерений

В каждом опыте меняется положение призмы и, путем уравновешивания её на специальной стойке измеряется положение её центра масс. Далее, используя секундомер, я замеряю период 20 колебаний маятника, отклоняя его на один и тот же угол.

4 Используемое оборудование

Секундомер: $\sigma_c = 0{,}015$ с - среднее время реакции человека
Линейка: $\sigma_{\text{лин}} = 0{,}05$ см - половина цены деления

5 Результаты измерений и обработка данных

5.1 Нахождение зависимости aT^2 от a^2

Для вычисления ускорения свободного падения и длины стержня будем исследовать зависимость периода колебаний T от расстояния a между точкой опоры и центром масс. Результаты проведённых измерений представлены в таблице 1.

№	a, см	$T_{\text{общ}}$, с	$N_{\text{изм}}$	T, с	$T_{\text{ср}}$, с	Δ, с	$\sigma_{\text{сл}}$, с	σ_T, с	ε, %
1	5	132,47	20	6,6235	6,631	0,0002	$3{,}1 \cdot 10^{-5}$	0,0002	0,0089
2	5	132,56	20	6,6521					
3	5	116,72	20	6,341	6,39	0,0001	$3{,}25 \cdot 10^{-5}$	0,0002	0,0087
4	5	116,69	20	6,211					
5	14	118,38	20	5,965	5,81	0,0001	$3{,}44 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0086
6	14	118,34	20	5,772					
7	14	126,32	20	6,163	6,02	0,0001	$3{,}52 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0082
8	14	126,37	20	6,276					
9	20	138,19	20	6,345	6,322	0,0001	$5{,}89 \cdot 10^{-6}$	0,0001	0,0072
10	20	138,18	20	6,452					
11	20	137,59	20	6,521	6,428	0,0001	$7{,}07 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0086
12	20	137,47	20	6,912					
13	25	152,84	20	6,742	6,564	0,0001	$3{,}03 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0068
14	25	152,78	20	6,275					
15	25	153,31	20	6,721	6,321	0,0001	$6{,}53 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0077
16	25	153,44	20	5,927					
17	30	123,35	20	5,981	6,056	0,0001	$3{,}52 \cdot 10^{-5}$	0,0001	0,0084
18	30	123,4	20	6,198					
19	30	93,04	20	6,021	6,001	0,0001	$1{,}08 \cdot 10^{-5}$	0,0002	0,0108
20	30	93,03	20	5,981					

Таблица 1: Зависимость периода колебаний от расстояние от центра масс до точки подвеса

По полученным данным вычисляем T, $T_{\text{ср}}$, Δ, $\sigma_{\text{сл}}$, σ и ε по формулам из теоретической справки.

Найдем коэфиценты прямой $aT^2 = ka^2 + b$, используя табличные данные. Построим график зависимости и с помощью МНК найдем k, откуда найдем g.

Перенесём все необходимые данные в таблицу :.

a^2, см^2	7,84	62,41	182,3	210,3	272,3	342,3	756,3	1024	1369	1529
aT^2, см $\cdot$ с^2	31,93	33,82	41,44	41,23	44,27	46,95	60,05	76,45	90,7	98,02

Таблица 2: Значения aT^2 и a^2

Построим график зависимости aT^2 от a^2 :

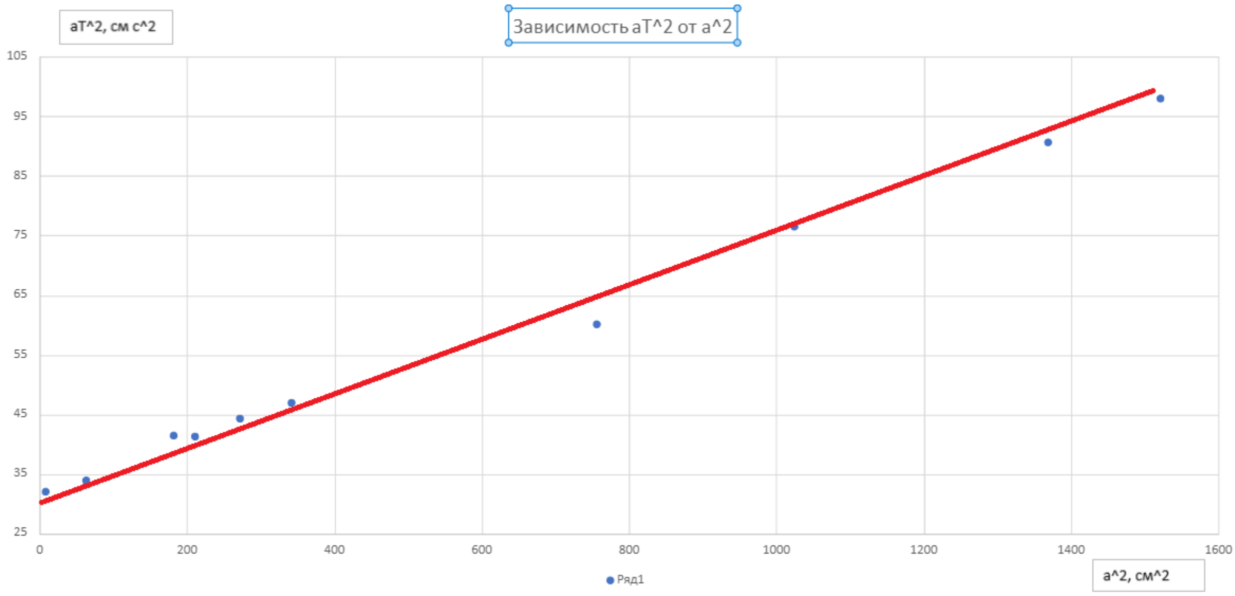

Рис. 2: Крутильный маятник

5.2 Вычисление g и l

Из графика получаем значения g и l:

- $k = (0{,}0402 \pm 0{,}0001)\ \frac{\text{с}^2}{\text{см}}$, $\varepsilon_k = 0{,}35\%$
- $b = (33{,}88 \pm 0{,}11)\ \text{см} \cdot \text{с}^2$, $\varepsilon_b = 0{,}31\%$

Вычислим случайные погрешности вычисления k и b:

$$\sigma_k^{\text{сл}} =\approx 7{,}31 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} =\approx 0{,}0331\ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k\sqrt{\left(\varepsilon_{aT^2}\right)^2 + \left(\varepsilon_{a^2}\right)^2} \approx 0{,}0001\ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{\left(\varepsilon_{aT^2}\right)^2 + \left(\varepsilon_{a^2}\right)^2} \approx 0{,}1026\ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\sigma_k^{\text{сл}}\right)^2 + \left(\sigma_k^{\text{сист}}\right)^2} \approx 0{,}0001\ \frac{\text{с}^2}{\text{см}},$$

$$\sigma_b = \sqrt{\left(\sigma_b^{\text{сл}}\right)^2 + \left(\sigma_b^{\text{сист}}\right)^2} \approx 0{,}1078\ \text{см} \cdot \text{с}^2.$$

Вычисляем g и l:

$$g = \frac{4\pi^2}{k} \approx 9{,}52\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$\sigma_g = g \cdot \varepsilon_k \approx 0{,}03\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

$$l = \sqrt{\frac{3bg}{\pi^2}} \approx 1{,}005\ \text{м},$$

$$\sigma_l = l\sqrt{\left(\frac{1}{2}\varepsilon_b\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\varepsilon_g\right)^2} \approx 0{,}002\ \text{м}.$$

В итоге имеем следующие результаты:

- $g = (9{,}52 \pm 0{,}03)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_g = 0{,}31\%$
- $l = (1{,}005 \pm 0{,}002)\,\text{м}$, $\varepsilon_l = 0{,}2\%$

5.3 Вычисление длины математического маятника

Посчитаем длину математического маятника, у которого период колебаний будет одинаковый с физическим маятником длиной 27,5 см (расстояние от центра масс до точки подвеса). Соответствующий период колебаний для него 1,475 с.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Тогда

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{1{,}475^2 * 9{,}8}{4 * 3{,}14^2} = 0{,}54\ \text{м} = 54\ \text{см}$$

Вычислим погрешность измерения длины математического маятника:

$$\sigma_l = \sqrt{2(\sigma_T)^2} = \sqrt{2} * \sigma_T = 2{,}115\ \text{см}$$

Таким образом получаем $l = 54 \pm 2{,}115$ см

На опыте также видно, что периоды маятников совпадают с хорошей точностью, так что мы посчитали все верно.

Сравним полученное значение с приведенной длиной маятника, которое мы получим по формуле из теор. справки. $l = 57{,}8$.
Величины лежат в пределах погрешности.

6 Обсуждение результатов

Результаты можно считать вполне достоверными, так как экспериментальные величины и величины, полученные в ходе расчетов, такие как для маятника совпадают с хорошей точностью.

7 Вывод

В ходе работы были получены следующие величины:

- $g = (9{,}52 \pm 0{,}03)\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_g = 0{,}31\%$
- $l = (1{,}005 \pm 0{,}002)\,\text{м}$, $\varepsilon_l = 0{,}2\%$

Все они лежат в пределах погрешности, что говорит о том, что формула приведенной длины маятника вполне справедлива. Также