Monte Carlo Simulation

Basis dari Monte Carlo Simulation adalah eksperimentasi dari element probabilistik dari random sampling

Hal tersebut berdasarkan 5 langkah:

1. Menyiapkan distribusi probabilitas untuk variabel penting
2. Membangun distribusi probabilitas kumulatif untuk setiap variabel
3. Menetapkan interval angka acak untuk setiap variabel
4. Membuat random number
5. Mensimulasikan serangkaian uji coba

Harry's Auto Tire Example

Diketahui penjualan ban radial merupakan penjualan terbesar di Harry's Auto Tire. Dengan begitu, Harry berharap dapat menentukan aturan untuk mengatur inventorynya. Dia juga ingin mensimulasikan demand harian untuk beberapa hari.

<u>Langkah 1: Membangun Probabilitas Distribusi</u>

Demand untuk ban radial.

Demand untuk Ban	Frekuensi (Hari)
0	10
1	20
2	40
3	60
4	40
5	30
Total	200

<u>Langkah 2: Membangung sebuah distribusi probabilitas kumulatif untuk setiap variable</u>

Probabilitas dari demand ban radial

Untuk mencari probabilitas dari sebuah kejadian pada kasus ini kita dapat menggunakan rumus

PoC = F/T

Dimana,

PoC = Probabilitas dari sebuah kejadian

F = Frekuensi

T = Jumlah keseluruhan Frekuensi

Sehingga ketika diterapkan pada kasus ini akan menjadi

Demand untuk Ban	PoC
0	10/200 = 0.05
1	20/200 = 0.10
2	40/200 = 0.20
3	60/200 = 0.30
4	40/200 = 0.20
5	30/200 = 0.15

Total	200/200 = 1.0

Probabilitas Kumulatif untuk Ban Radial

Untuk mencari probabilitas kumulatif (CP) pada kasus ini kita dapat menambahkan probabilitas dengan hari sebelumnya. Maka ketika diimplementasikan pada kasus ini akan menjadi

Demand untuk Ban	PoC	CP
0	0.05	0.05
1	0.10	0.15
2	0.20	0.35
3	0.30	0.65
4	0.20	0.85
5	0.15	1.0

<u>Langkah 3: Menyiapkan Random Number Interval</u>

Menentukan random number interval

Dalam menentukan random number interval kita dapat melihatnya dari CP yang telah kita cari sebelumnya. Angka CP tersebut akan menjadi batas atas atau akhir interval yang akan ditentukan.

Demand	PoC	CP	Interval
0	0.05	0.05	01 - 05
1	0.10	0.15	06 – 15
2	0.20	0.35	16 – 35
3	0.30	0.65	36 – 65
4	0.20	0.85	66 – 85
5	0.15	1.0	86 – 00

<u>Langkah 4: Membangun Random Number</u>

Angka random yang dibangun tidak melebihi batas atas interval dan batas bawah interval jika mengacu pada kasus ini yaitu 01 – 00.

Dan biasanya angka random ini akan diberikan pada ulangan nanti. Jika diterapkan pada kasus ini maka akan menjadi

❑ Table of random numbers (partial)

52	06	50	88	53	30	10	47	99	37
37	63	28	02	74	35	24	03	29	60
82	57	68	28	05	94	03	11	27	79
69	02	36	49	71	99	32	10	75	21
98	94	90	36	06	78	23	67	89	85
96	52	62	87	49	56	59	23	78	71
33	69	27	21	11	60	95	89	68	48
50	33	50	95	13	44	34	62	64	39
88	32	18	50	62	57	34	56	62	31
90	30	36	24	69	82	51	74	30	35

<u>Langkah 5: Melakukan Simulasi pada eksperimen</u>

Setelah membangun random number, maka kita akan menggunakan untuk melakukan simulasi terhadap demand hariannya.

Dalam kasus ini, kita akan menggunakan kolom dari *table of random number* sebagai simulasi dari kasus ini. Simulasi dapat ditentukan berdasarkan interval yang telah kita tentukan. Maka ketika diimplementasikan akan menjadi,

❑ Table of random numbers (partial)

52	06	50	88	53	30	10	47	99	37
37	63	28	02	74	35	24	03	29	60
82	57	68	28	05	94	03	11	27	79
69	02	36	49	71	99	32	10	75	21
98	94	90	36	06	78	23	67	89	85
96	52	62	87	49	56	59	23	78	71
33	69	27	21	11	60	95	89	68	48
50	33	50	95	13	44	34	62	64	39
88	32	18	50	62	57	34	56	62	31
90	30	36	24	69	82	51	74	30	35

Hari	Random Number	Simulasi
1	52	3
2	37	3
3	82	4
4	69	4
5	98	5
6	96	5
7	33	2
8	50	3
9	88	5
10	90	5
Total		39

Dengan Total simulasi 39 kita akan mendapatkan rata-rata demand harian untuk ban adalah 39/10 = 3.9 ban.

Kita dapat mencatat bahwasannya rata-rata demand harian yang kita dapatkan adalah 3.9 ban.

Selanjutnya kita dapat mencari Expected daily demand (EDD) untuk mengtahui seberapa jauh perbedaan simulasi dengan ekspetaksi

$$EDD = \sum_{i=0}^{5} (Prob\ of\ i\ tire)(Demand\ of\ i\ tire)$$

$$= (0.05)(0) + (0.10)(1) + (0.20)(2) + (0.30)(3) + (0.20)(4) + (0.15)(5)$$

$$= 2.95\ ban$$

Jadi dapat dilihat terdapat perbedaan yang cukup signifikan pada simulasi dan ekspektasi dan itu akan berpengaruh terhadap inventory.

Simulation and Inventory Analysis

Pada kasus ini kita akan membangun keputusan *order quantity* dan *reorder point* untuk sebuah produk yang mempunyai demand probabilitas dan reorder lead time.

Simskin's Hardware Store

Pada kasus ini, pemilik toko ingin menemukan persediaan yang bagus, kebijakan persediaan biaya yang rendah untuk sebuah bor listrik

Pemilik toko sendiri mengidentifikasi dua tipe variable yakni variable terkontrol dan tidak terkontrol. Variable terkontrol adalah *order quantity* dan *reorder point*. Sedangkan yang tidak terkontrol adalah daily demand dan variable lead time.

Berikut adalah table simulasi dari kasus diatas untuk Demand harian

Table 1.1

D	F	P	CP	I
0	15	0.05	0.05	01 – 05
1	30	0.10	0.15	06 – 15
2	60	0.20	0.35	16 – 35
3	120	0.40	0.75	36 – 75
4	45	0.15	0.90	76 – 90
5	30	0.10	1.00	91 – 00
	300	1.00		

Dimana,

D = Demand

F = Frequency

P = Probability

CP = Cumulative Probability

I = Interval for Random Number

Berikut adalah table simulasi dari kasus diaatas untuk lead time

Table 1.2

D	F	P	CP	I
1	10	0.20	0.20	01 – 20
2	25	0.50	0.70	21 – 70
3	15	0.30	1.00	71 – 00
	50	1.00		

Dimana,

D = Demand

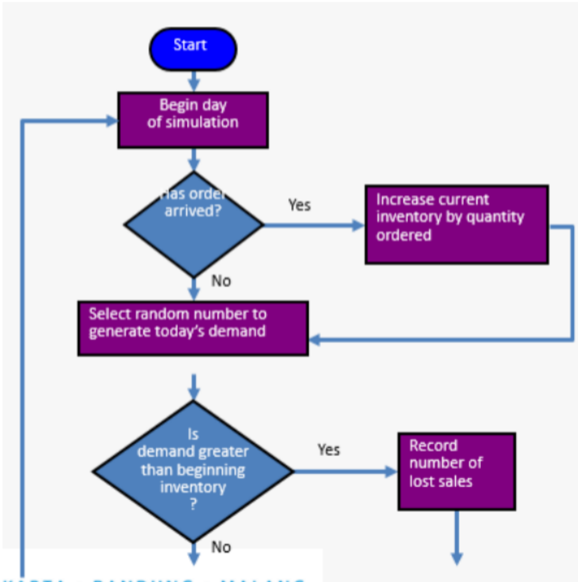
F = Frequency

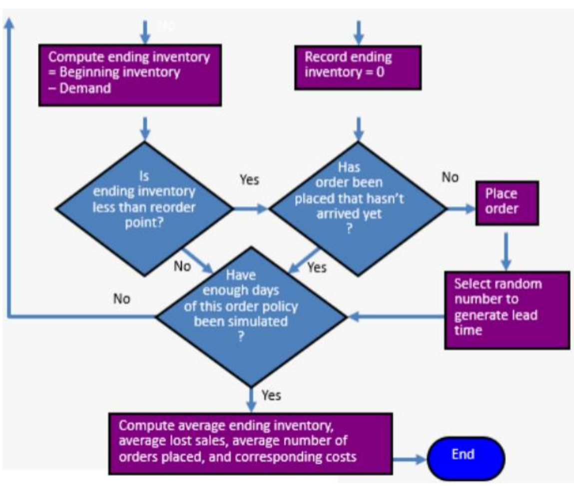
P = Probability

CP = Cumulative Probability

I = Interval for Random Number

Berikut adalah flow graph yang merepresentasikan step by step dari kasus ini





Berdasarkan flow chat tersebut kita dapat melakukan tahapan berikut untuk menyelesaikan permasalahan:

- Gunakan tabel random number, dengan begitu didapatkan 4 langkah:
  - Mulai harian dengan melakukan pengecekan apakah inventory yang diorder sudah sampai atau belum. Jika ya, tambahkan dengan inventory terkini dengan jumlah kuantitas yang diorder.
  - Membuat daily demand dari probabilitas demand dengan memilih random number
  - Menghitung akhir dari inventory setiap harinya. Jika inventory terkini tidak memenuhi demand harian, maka tetap berikan inventory yang ada dan catat kekurangan sebagai lost sales.
  - Tentukan apakah inventory akhir dari inventory telah mencapai reorder point atau tidak. Jika mencapai maka dapat dipesan kembali.

Table 1.3

ORDER QUANTITY = 10 UNITS   REORDER POINT = 5 UNITS

(1) DAY	(2) UNITS RECEIVED	(3) BEGINNING INVENTORY	(4) RANDOM NUMBER	(5) DEMAND	(6) ENDING INVENTORY	(7) LOST SALES	(8) ORDER	(9) RANDOM NUMBER	(10) LEAD TIME
1	...	10	06	1	9	0	No		
2	0	9	63	3	6	0	No		
3	0	6	57	3	3	0	Yes	02	1
4	0	3	94	5	0	2	No		
5	10	10	52	3	7	0	No		
6	0	7	69	3	4	0	Yes	33	2
7	0	4	32	2	2	0	No		
8	0	2	30	2	0	0	No		
9	10	10	48	3	7	0	No		
10	0	7	88	4	3	0	Yes	14	1
				Total	41	2			

Tabel diatas merupakan gambaran dari penyelesaian permasalahan yang dibahas sebelumnya.

Note: untuk mendapatkan demand kita dapat menggunakan random number sebelah kiri kolom demand dan hal tersebut berlaku kepada lead time

Dapat dilihat bahwasannya pada hari pertama dan kedua inventorynya masih memenuhi demand sehingga tidak ada lost sales dan ending inventorya masih belum mencapai reorder point yaitu 5 (terletak diatas table)

Sedangkan pada hari ketiga ending inventorynya telah memenuhi syarat reorder point sehingga harus melakukan reorder dan reorder. Pada ending inventory hari ketiga dapat dilihat bahwa inventory tersisa 3, maka dengan menggunakan random number yang diberikan pada soal yaitu 2 dimana angka tersebut merupakan salah satu interval dari lead time ke 1 (dapat dilihat dari *Table 1.2*)

Dengan lead time ke 1 maka akan memakan 1 hari kerja (1 hari penuh untuk pengiriman) dengan begituu barang akan sampai pada hari kelima. Sehingga pada hari keempat inventory tidak memenuhi demand karena inventory pada hari keempat adalah 3 dan demand pada hari keempat adalah 5, maka terjadi lost sale sebesar 2.

Note : Proses diatas akan berulang terus menerus dengan konsep yang sama sampai hari terakhir yaitu hari kesepeuluh.

Inventory Cost Analysis

Setelah melakukan analisa inventory dan simulasi kita dapat mencari inventory cost pada kasus tersebut.

Tujuan untuk melakukan analisa inventory cost adalah untuk menemukan cost terendah.

Diketahui bahwa:

$$Average\ ending\ inventory = \frac{total\ inventory}{total\ hari\ test} = \frac{41}{10} = 4.1\ unit\ per\ hari$$

$$Average\ lost\ sale = \frac{total\ lost\ sale}{total\ hari\ test} = \frac{2}{10} = 0.2\ unit\ per\ hari$$

$$Average\ number\ of\ orders\ placed = \frac{total\ number\ of\ order}{total\ hari\ test} = \frac{3}{10} = 0.3\ order\ per\ hari$$

Dan diketahui pula bahwa:

- Toko Simskin buka 200 hari per tahun
- Estimasi ordering cost adalah \$10 per order
- Holding cost adalah \$6 per bor setiap tahunnya
- Lost sale costnya adalah \$8

Maka berdasarkan data yang diketahui kita dapat mencari berikut:

$$\textit{Daily order cost}$$
$$= \textit{Estimasi ordering cost}$$
$$* \textit{ Average number of ordered place}$$
$$= 10 * 0.3 = \$3$$

$$\textit{Daily holding cost}$$
$$= \textit{Holding Cost per hari}$$
$$* \textit{ Average ending inventory}$$
$$= 0.03 * 4.1 = \$0.12$$

$$\textit{Daily stock out cost}$$
$$= \textit{cost per lost sale}$$
$$* \textit{ average of number of lost sale per hari}$$
$$= \$8 * 0.2 = \$1.6$$

$$\textit{Total daily inventory cost}$$
$$= \textit{Daily order cost}$$
$$+ \textit{ daily holding cost}$$
$$+ \textit{ daily stock out cost}$$
$$= \$3 + \$0.12 + \$1.6$$
$$= \$4.72$$

Simulation of a Queueing Problem

Pada simulation of queueing problem kita akan memodelkan waiting line untuk simulasi.

Port of New Orleans

Pada kasus ini diketahui bahwa

- Fully loaded barges arrive at night for unloading
- The number of barges each night varies from 0 - 5
- The number of barges vary from day to day
- The supervisor has information which can be used to create a probability distribution for the daily unloading rate
- Barges are unloaded first-in, first-out
- Barges must wait for unloading which is expensive
- The dock superintendent wants to do a simulation study to enable him to make better staffing decisions

Dengan data diatas kita dapat membuat tabel rata-rata kedatangan overnight barges dan random intervalnya (yang angka randomnya diambil dari soal). Maka tablenya akan seperti berikut

Table 2.1

NUMBER OF ARRIVALS	PROBABILITY	CUMULATIVE PROBABILITY	RANDOM NUMBER INTERVAL
0	0.13	0.13	01 to 13
1	0.17	0.30	14 to 30
2	0.15	0.45	31 to 45
3	0.25	0.70	46 to 70
4	0.20	0.90	71 to 90
5	0.10	1.00	91 to 00

Dengan data diatas pula kita dapat membuat tabel rata-rata unloading dan angka random. Maka, tablenya akan menjadi:

DAILY UNLOADING RATE	PROBABILITY	CUMULATIVE PROBABILITY	RANDOM NUMBER INTERVAL
1	0.05	0.05	01 to 05
2	0.15	0.20	06 to 20
3	0.50	0.70	21 to 70
4	0.20	0.90	71 to 90
5	0.10	1.00	91 to 00
	1.00		

Setelah mendapatkan kedua table diatas maka kita dapat membuat table queueing simulation dari barge unloading.

(1) DAY	(2) NUMBER DELAYED FROM PREVIOUS DAY	(3) RANDOM NUMBER	(4) NUMBER OF NIGHTLY ARRIVALS	(5) TOTAL TO BE UNLOADED	(6) RANDOM NUMBER	(7) NUMBER UNLOADED
1	—	52	3	3	37	3
2	0	06	0	0	63	0
3	0	50	3	3	28	3
4	0	88	4	4	02	1
5	3	53	3	6	74	4
6	2	30	1	3	35	3
7	0	10	0	0	24	0
8	0	47	3	3	03	1
9	2	99	5	7	29	3
10	4	37	2	6	60	3
11	3	66	3	6	74	4
12	2	91	5	7	85	4
13	3	35	2	5	90	4
14	1	32	2	3	73	3
15	0	00	5	5	59	3
	20		41			39

Berdasarkan tabel tersebut maka kita dapat mendapatkan informasi seperti berikut:

$$Average\ number\ of\ barge\ delayed\ to$$

$$the\ next\ day = \frac{Total\ delays}{Total\ Days} = \frac{20}{15}$$

$$= 1.33\ barges\ delayed\ per\ day$$

$$Average\ number\ of\ nightly\ arrivals$$

$$= \frac{Total\ Arrivals}{Total\ Days} = \frac{41}{15}$$

$$= 2.73\ arrivals$$

$$Averages\ number\ of\ barges\ unloaded\ each\ day$$

$$= \frac{Total\ unloading}{Total\ Days} = 2.6\ unloadings$$

Markov Chain

Analisis Markov (disebut sebagai Proses Stokastik) merupakan suatu bentuk khusus dari model probabilistik.

Proses Markov Analysis

Terdapat 3 prosedur utama untuk melakukan proses analisis Markov, yaitu:

- Membangun matriks probabilitas transisi
- Menghitung probabilitas suatu kejadian di waktu yang akan datang
- Menentukan kondisi steady state

Ciri-ciri analisis Markov

- Bila diketahui status suatu kondisi awal, maka pada kondisi periode berikutnya merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas, yang disebut dengan probabilitas transisi.
- Probabilitas transisi tidak akan berubah untuk selamanya.
- Probabilitas transisi hanya tergantung pada status awal.

Contoh Penerapan Markov

- Misal hanya terdapat 2 macam cuaca, yaitu hujan dan cerah. Diketahui bahwa dalam masalah ini, cuaca di Indonesia selalu berada pada salah satu dari dua state (status) yang mungkin, yaitu cerah atau hujan.

- Perubahan dari satu state ke state yang lain pada periode berikutnya merupakan suatu proses random yang dinyatakan dalam probabilitas, yang disebut dengan probabilitas transisi.

Diketahui:

$P(hujan|hujan) = 0.6$

$P(cerah|hujan) = 0.8$

$P(hujan|cerah) = 0.4$

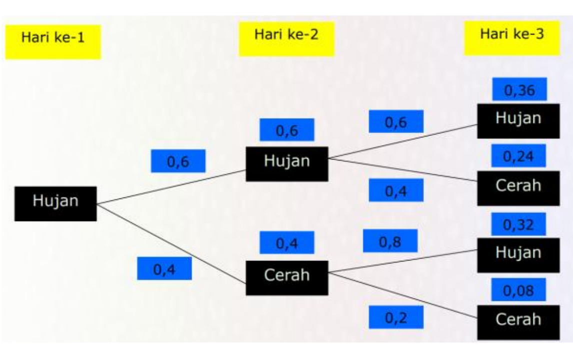
$P(cerah|cerah) = 0.2$

<u>Langkah 1. Membangun Matriks Probabilitas Transisi</u>

State Hari ini	State Besok	
	Hujan	Cerah
Hujan	0.6	0.4
Cerah	0.8	0.2

<u>Langkah 2. Menghitung Probabilitas</u>

Dengan Tree Probability



Jadi,

- Probabilitas cuaca akan berstatus hujan pada hari ke-3, jika pada hari ini (hari pertama) berstatus hujan adalah

H_H (3) = 0,36 + 0,32 = 0,68

- Probabilitas cuaca akan berstatus cerah pada hari ke-3, jika pada hari ini (hari pertama) berstatus hujan adalah

C_H (3) = 0.24 + 0.08 = 0.32

Dengan Perkalian Matriks

$$[H_H \quad C_H] = [1 \quad 0] \times \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$= [0.6 \quad 0.4]$$

<u>Langkah 3. Menentukan kondisi Steady State</u>

Dengan menggunakan perkalian matriks

$$[J_J(5) \quad M_J(5)] = [0,6672 \quad 0,3328]$$

$$[J_J(6) \quad M_J(6)] = [0,6666 \quad 0,3334]$$

$$[J_J(7) \quad M_J(7)] = [0,6667 \quad 0,3333]$$

$$[J_J(8) \quad M_J(8)] = [0,6667 \quad 0,3333]$$

Berdasarkan perhitungan diatas dapat dilihat bahwasannya kondisi steady state jatuh pada hari ke-8.

Contoh 2

- Misal, diambil sampel sebanyak 1000 konsumen yang tersebar dalam 4 merek sabun mandi yang digunakan, yaitu merek A, B, C, dan D.
- Dalam masalah ini, konsumen dapat berpindah dari satu merek ke merek lain. Perpindahan ini bisa disebabkan karena adanya promosi khusus, perbedaan harga, iklan yang terus menerus di TV, dsb.

Merek	Jml konsumen Bulan ini	Perubahan selama periode		Jml konsumen Bulan depan
		Mendapatkan	Kehilangan	
A	220	50	45	225
B	300	60	70	290
C	230	25	25	230
D	250	40	35	255
Jumlah	1000	175	175	1000

Langkah 1. Membangun Matriks Probabilitas Transisi

Sebelum membangun matriks probabilitas transisi kita harus mengetahui perpindahan dari setiap merek ke merek lainnya

Merek	Jml konsumen Bulan ini	Mendapatkan dari				Kehilangan ke				Jml konsumen bulan depan
		A	B	C	D	A	B	C	D	
A	220	0	40	0	10	0	20	10	15	225
B	300	20	0	25	15	40	0	5	25	290
C	230	10	5	0	10	0	25	0	0	230
D	250	15	25	0	0	10	15	10	0	255
Jumlah	1000									1000

Maka dengan diketahui data perpindahan tersebut kita dapat menghitung jumlah perpindahan pelanggan seperti berikut

State	State Bulan depan				Jumlah
Bulan ini	A	B	C	D	
A	175	20	10	15	220
B	40	230	5	25	300
C	0	25	205	0	230
D	10	15	10	215	250

Ketika sudah mengetahui perpindahannya maka kita dapat langsung membangun matriks probabilitas transisinya

State	State Bulan depan			
Bulan ini	A	B	C	D
A	0,796	0,091	0,045	0,068
B	0,133	0,767	0,017	0,083
C	0	0,109	0,891	0
D	0,040	0,060	0,040	0,860

Note: 0.796 = 175/220

Langkah 2. Hitung Peluang Transisi pada kondisi steady state

$$[x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$$

$$= [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]\begin{bmatrix} 0.796 & 0.091 & 0.045 & 0.068 \\ 0.133 & 0.767 & 0.017 & 0.083 \\ 0 & 0.109 & 0.891 & 0 \\ 0.040 & 0.060 & 0.040 & 0.860 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0.796x_1 + 0.133x_2 + 0 + 0.040x_4$$

$$x_2 = 0.091x_1 + 0.767x_2 + 0.109x_3 + 0.060x_4$$

$$x_3 = 0.045x_1 + 0.017x_2 + 0.891x_3 + 0.040x_4$$

$$x_4 = 0.068_{x1} + 0.083x_2 + 0 + 0.860x_4$$

Lakukan substitusi eliminasi untuk mencari x_1, x_2, x_3, x_4 sehingga dapat mengetahui peluang transisi pada kondisi steady state.

Contoh 3

Industri personal komputer merupakan industri yang mengalami pergerakan sangat cepat dan teknologi menyediakan motivasi kepeda konsumen untuk mengganti komputer setiap tahunnya. Kepercayaan merek sangat penting dan perusahaan-perusahaan mencoba segala cara untuk menjaga agar konsumen menjadi puas. Bagaimanapun juga, beberapa konsumen mencoba untuk mengganti dengan merek yang lain (perusahaan lain). Tiga merek tertentu Doorway, Bell, Kumpaq yang meguasai pangsa pasar. Orang yang memiliki komputer merek Doorway akan membeli tipe Doorway yg lain 80% dan sisanya membeli 2 merek yang lain dengan peluang sama besar. Pemilik komputer Bell akan membeli Bell lagi 90% dari waktu sementara itu 5% akan membeli Doorway dan 5% akan membeli Kumpaq. Sekitar 70% pemilik Kumpaq akan membeli Kumpaq, 20% akan membeli Doorway. Tiap merk memiliki 200.000 konsumen yang berencana untuk membeli sebuah komputer baru pada tahun depan, berapa banyak komputer dari tiap tipe akan dibeli ?

Langkah 1. Membangun Matriks Probablitias Transisi

	Initial	Doorway	Bell	Kumpang
Doorway	200.000	0.8	0.1	0.1
Bell	200.000	0.05	0.9	0.05
Kumpang	200.000	0.2	0.1	0.7

$$\pi(1) = \pi(0)P$$

$$P_2 = P * P$$

Peluang tahun depan

$$\begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.05 & 0.9 & 0.05 \\ 0.2 & 0.1 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.665 & 0.18 & 0.155 \\ 0.95 & 0.82 & 0.085 \\ 0.305 & 0.18 & 0.515 \end{bmatrix}$$

Langkah 2. Menghitung jumlah konsumen tahun depan

Untuk mencari jumlah konsumen tahun depan maka kita dapat mengalikan initial dengan setiap kolom, maka akan menjadi

$$Doorway = 133.000 + 19.000 + 61.000$$
$$= 213.000$$

$$Bell = 36.000 + 164.000 + 36.000$$
$$= 236.000$$

$$Kumpang = 31.000 + 17.000 + 103.000$$
$$= 151.000$$